北京惟一日報社叢書第一種之三

羅素講演

物的分析

附數理邏輯

物的分析

慕嚴筆記

第一次

今天講演的題目是『物的分析。』對於『物是什麽』這個問題，經過近世哲學家和科學家兩方面研究，才將以前物質的觀念改了，物質不是東西的意思，是指事情(Event)說的。現在講物質從兩個觀點講起（一)物理學的，(二)哲學的。物理學是一定的，因爲有實驗的結果在內；所以現在先講物理學上的觀點，次講哲學上的觀點，最後得哲學的結論。

此次講演其中三分之二是物理上的觀念，三分之一是哲學上的觀念。講物理學上的觀念時，所用的東西都是很難的，不容易懂的　但這不是我的錯處，因爲宇宙間的事情本來是很難懂的，不過有些事情我們見慣了，並不去求懂他，不覺着奇怪罷了。按相對論(Th ory of Relativity)來講，對於物質的觀念，和平常對於物質的觀念是不同的。在舊物理學中以爲時間和空間是不相干的，他們都是絕對獨立的。但按相對論講起來，空間和時間是有關係的，並且他們界限也是不清楚的。

所說的相對論是愛斯坦(Alke t Einstein)發明的　他講的相對論有兩種(一)特別相對論(Special Relativity),(二)普通相對論(Gen ral Relativity)。運動的相對,早已發明　以前的哲學家就知道運動是相對的。如從地球上看太陽,太陽是動的;從太陽上看地球,地球是動的。後來把相對的觀念用到物理學上,這是很近的發明　現在先講特別相對論,因為他比較的容易懂些。

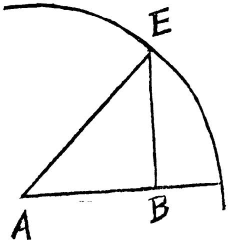
特別相對論,普通講起來,很有興趣的。他將以前時間和空間的觀念破除了現在說時間和空是有關係的。以前所以說他兩不相關,因為那麼說便利些罷了,如說:現在就是現在,過去就是過去,這裏一件事情,和距這裏一里遠的地方在一點鐘以後的一件事情是不同的。但照相對論講起來,如觀察人的情形不同,所見的事情也就不同了。如彗星離太陽近的時候走的很快,比地球走的快,如有人在彗星上觀察一件事情,和在地球上一個人所觀察的是不同的。所以剛纔所說的那兩件事情,就許相距不是一里,也許前後差的不是一點鐘。如兩觀察人的情形不同(如一人在地球上一人在彗星上),觀察同一的事情,得的結果不一樣,究竟那個算對呢?如這個對,那個亦對,豈不矛盾了麼?按相對論講起來,兩個

都是對的，並不矛盾；因爲事情要照時間和空間兩種定的　平常對於量長短，量時候，是不發生問題的，是一定無疑的　但照相對論來講，長短和時間都不是一定的，是隨運動的情形變的　因爲空間和時間是變的，所以只有在同一時間同一空間中的觀察是一樣的。

二件事情，如發生的先後不同或地位不同，便有分離(Separation)。照相對論說，空間和時間是有關係的，所以分離，也是將時間和空間混合起來說的。分離的定義是

$$S = Ct -$$

S爲分離，C是光在眞空中行的速率，t及r是那二件事情相差的時候和距離。用圖表明，如第一圖。A和B是兩種事情，AB等於r　Ct等於AD，以A爲中心，AD爲半徑，作一弧，從B作垂直於AB的直線，交此弧於E然後BE就是分離



第一圖

如二個事情相差的時間很多，空間相差很少，他

們好像在同一空間發生的，這分離就叫時間性的分離（Time-like Separation）。如空間差的很多，時間差的很少，這二件事情就好像在同一時間內發生的，這分離叫作空間性的分離(Sp -like Separation)

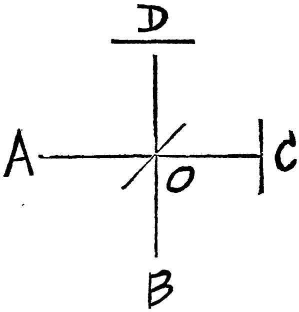
普通相對論講的範圍較寬些。他所講的包含牛頓的萬有引力公律 (Law of Gravitation)， 能力不滅定律，運動量不滅定律，及其他力學上的公律 愛斯坦講的萬有引力公律和牛頓的有些不同。但愛斯坦所講的，於實驗都符合；牛頓所講的，和實驗所得的結果差一些，但差的很少，平常不容易看出罷了。最有趣味的是愛斯坦所講的時間和空間的性質，同由克立德幾何學(Euclidi n Geometry)不合，倒合於非由克立德幾何 (Non-Euclidian G ometry)。非由克立德幾何，原是學者照邏輯所發明的抽象的理論。除了研究數學的外，都以爲他一點用處沒有，不過是根據數學的一種空想。但現在照相對論來講，時間和空間合於非由克立德幾何學。原先以爲純是空想的東西，現在變爲實用的了。

照相對論講的，和平常事實不合。這並不是眞不合，因爲平常的速度大小，不能表示出相對論的原理，所以覺得好像於事實不合一樣。星球運動的速度比光

慢得多，平常速度又比星小，和光的速度差得更多了 平常實驗的結果，和牛頓力學（Newtoni n Dynamies）有些差的，牛頓力學不過是信近的眞確 因爲平常的速度太小，所以看不出這個差錯來 最顯著的是銑（Radium），銑是放射不息的，他放射的速度很大，和光差不多 所以銑的質量，照牛頓學說來講，便講不通了。牛頓講質量和運動是不相干的，照相對論講，質量和運動是有關係的。

相對論所講的主要的事實，就是光的速度試驗的結果。這是很奇怪的一個結果，光的速度和四圍的情境是不相關的。無論當時情形怎樣，光之速率是一定不變的。但與平常別的速率來比，譬如，火車每小時走六十里，汽車三十里，人每小時行四里，他們都向同一方向走；火車對於人的速率是每小時五十六里，汽車對於人的速率是二十六里，火車對於汽車的速率是三十里。如火車進行的方向與光相同，照平常說來，光對於火車的速率要比光對於不動物的速率，每小時減少六十里。但照實驗的結果，不是這樣的，無論火車走多麼快，光對於他的速率和他不動一樣。這不是很奇怪麼？光對於火車，汽車，人，和不動的車站走的一般快的。

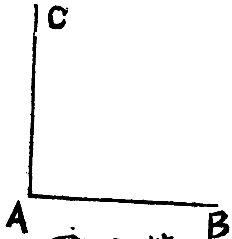
米求孫(A A. Michel on)和馬雷(E. W. Morl y)試驗的結果，證明光的速率是不變的　他們的實驗在近代物理上是很著名的　現在講他的實驗。第二圖



第二圖

中，有條光綫自A射至一半透明鏡(光線射上時一半可以反射，一半透過)O上，這鏡和AO成一四十五度角　在C和D地方，置兩個全反射鏡子　C在OA引長的直線上，DO垂直於AO，並OC之長等於OD之長　如B在DO引長的直線上，我們在B處測。光線從A射到O鏡上，一半透過到C，由C反射到O，由O反射到B，其他一半由O反射到D，又反射回至O，透過到B　所以在光線OB，是由兩條光線—一從C反射來，一從D反射來，—合成的　在這實驗中，在B觀察的光，並沒有干涉的現象　由此可知從O至C，回至O，到B的光線和由O到D，回至O，到B的光線同時到B了。照以太波動說，謂全宇宙充滿以太(Ether)，光是以太中一種波動。光在以太中的速率每秒為 30,000,000,000 糎　這說謂以太是

靜止的，光的速度是對以太說的。如果是這樣，假若有一物體順光的方向走，則光對於此物體的速度應當減少，但是事實上不是這樣的。現在再講一個相仿的例



第三圖

。第三圖中，A，B為兩隻船，相距二里，由上流飄下，河流的速度為每小時三里。C和A的距離亦為二里，CA常垂直於AB。在A船上有人放出二鴿，他兩個飛行的速度都為每小時五里。一鴿由A船飛至B船，再從B回到A；一鴿由A飛到C，再由C回到A 因B是繼續進行的，所以鴿由A飛至B時，對於B的速率每小時為(5－3 2)二里。由B回A時，因為A是進行的，他對於A的速率每小時為(5＋3＝8)八里。所以鴿由A飛到B，再從B回到A，共費時一點又十五分鐘。由A飛往C之鴿因為C是前行的所以他的道路向前傾斜。照計算的結果，大概來回要飛五里所以只須一點鐘就可以飛回至A 這兩隻鴿飛的速度相同，回到A時相差一刻鐘。照這樣講來，地球在以太中動，光對於地球的速度，必因地球的運動而變。現在把米求孫和馬雷的試驗中，照以太波動說，兩光線到B相差的時候算出來 設OC

與地球運動的方向相同（參看第二圖）。地球對於以太的速度爲 V，C 爲光對於以太之速度　然後（C－V）爲光由 O 至 C 時對於試驗所用儀器之速度，（C＋V）爲光回 O 時對於儀器之速度　光由 O 到 C 再由 C 回至 O 所費的時間應爲

$$\frac{l}{C-V}+\frac{l}{C+V}=\frac{2Cl}{C^2-V^2}\qquad l=OC$$

再算光由 O 至 D，再由 D 回至 O 的時間。光對於實驗用的儀器的速率當作在 O D 上，垂直於 O C 的，其相對的速率爲 $(C^2-V^2)^{\frac{1}{2}}$ （註）所須的時間爲

$$\frac{2l}{(C^2-V^2)^{\frac{1}{2}}}\qquad l\quad OD=OC$$

現在看由 O 至 C 再回至 O 所用的時間爲 $\frac{2Cl}{C^2-V^2}$，由 O 至 D 再回至 O 所用的時間爲 $\frac{2l}{\sqrt{C^2-V^2}}$　這兩個時間的比例是

$$\frac{2Cl}{C^2-V^2}\div\frac{2l}{\sqrt{C^2-V^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

稱這比例曰 r，就是

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

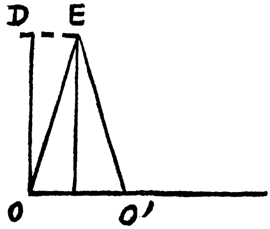
這是照舊物理學所得的結果，兩個時間相差為二倍。但做了許多實驗，無論何時，無論何地，無論 O C 為多長，所得的結果，都沒時差在內。所以知這不是實驗的錯誤。用以太波動說解說光是不對的；就是對，以太也不是靜止的。

（註）因地球是運動不止的，所以光由 C 至 D 時，D 已動至 E 處，及其回至 O 時，O 已動至 O 處。故光所走的路程，實是 O E O' 但我們看着好似 O D O

$$\frac{OE}{DE}=\frac{C}{V}$$

$$\frac{OE^2}{OE^2-DE^2}=\frac{C^2}{C^2-V^2}$$

$$\frac{OE^2}{OD^2}=\frac{C^2}{C^2-V^2}$$



$$\frac{OE}{OD}=\frac{C}{(C^2-V^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{OE}{OD}=\frac{(C^2-V^2)^{\frac{1}{2}}}{C}$$

所以光由O至D時，對於D的速率應爲$(C-V^2)^{\frac{1}{2}}$

現在再講斐沙（Fize u）的試驗。有一玻璃管中貯水，使光線行經其內。光在眞空中速度爲C，管中水向發光體的方向進行的速度爲V　如光在水中速度爲WO　光對於流水的速度，照平常講來，當爲W+V，其實他的速度是

$$\frac{W+V}{1+\frac{VW}{C^2}}$$

此式可化爲

$$W+V\left(1-\frac{W^2}{C^2}\right)\quad *$$

這實驗所得的結果，比平常以爲應得的結果略小，亦是一個很奇怪的結果

$$* \quad \frac{W+V}{1+\frac{WV}{C^2}} = (W+V)\left(1+\frac{WV}{C^2}\right)^{-1}$$

$$= (W+V)\left(1-\frac{WV}{C^2}+\left(\frac{WV}{C^2}\right)^2\right.$$

$$= W+V-\frac{W^2V}{C^2}-\frac{WV^2}{C^2}+$$

$$= W+V\left(1-\frac{W^2}{C^2}\right)-\frac{WV^2}{C^2}+$$

$\frac{W}{C^2}$及其他商次數比較的很小可以略去。

(註)此處所說光的速率，是指光在眞空中的速率說的，並不是光在一種媒介體(medium)中的速率。照普通相對論講，光的速度也不是絕對不變的。

第二次

上次講了兩個重要的實驗，—米球孫和馬雷的及斐沙的，—從這二個實驗中，得到兩個結論，第一結論(從米球孫和馬雷的實驗中得出)是光的速率不依發光

體和觀測者運動的情形而變，他永遠是個常數。(註)他與別的速率不一樣的。如人在火車上每點鐘向車行的方向行四里，火車每點鐘行三十里，人對於車站的速率就是三十四里了　光不是這樣的，無論火車走多麼快，光對於車站的速率是不變的。

第二個結論(由斐沙實驗中得出)是　如管中水流的速率是 V，光在水中的速率是 W，光對於管的速率不是 W+V，須比這個小一點。

有兩個假設來解釋這二個實驗的結果

(一)物質運動時，他的順運動方向的長短就縮小了。如光的速率爲 C，物體運動的速率爲 V，那物的長短就縮小爲原長的 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍　用這式來解釋米球孫和馬雷的實驗的結果

(二)如人在火車上，順着火車進行的方向走　人的速率爲 W，火車的速率爲 V　人對於車站的速率不是 V+W，是 $\frac{V+W}{1+\frac{VW}{C^2}}$，C 是光的速率

在這兩個式子中，V 和 W 都是平常的速率，比光的速率小得很多，$\frac{V^2}{C^2}$

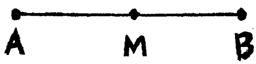
和 $\frac{vW}{C^2}$ 都幾等於零，所以平常看不出什麼變來 以上講的是些零碎的式子，是試驗的結果，不是總公式，以後講總的

在特別相對論裏，最難的就是時間（Tim ）的問題 平常以為宇宙間只有一個時間，兩件事情的發生，不是同時便有一定的先後 但在相對論中講時間不是這樣，兩件事情的先後，是由觀察者的情形定的。如兩觀察者運動的情形不同，他用的儀器是一般的精確，他們測兩事情發生的先後就不同。所以先後的次序，其中含有主觀的分子。

兩件事情在同一地方發生，先後的次序很容易看出，是不生問題的。如兩件事情發生的地方相距很遠的，要觀察他們的先後，必須用間接的法子來比較，在這上邊就發生問題了 在愛丁頓（Edi gt n）著的『空間時間和引力』（Sp e Tim nd Gravitati n）裏，有一個例子 設有一飛機，飛的速率為每小時 161 000 英里，從我面前經過。飛機上的人和我同時燃着雪茄烟，二枝烟的大小是一樣的，我們二人吸烟速度是一樣的，——就是如我們二人要在同一地方吸，一定是同時完 我們二人都有一樣精確的表，二人都精通數學，約好他吸完烟時發一閃

光，我吸完時發一閃光，以相通知。當我見飛機上發的閃光時，我便可以算出司機者用一點鐘纔吸完那枝烟，但我不過半點鐘就吸完了。司機者所測的和我相反，他測得我一點鐘始吸完，他不過半點鐘就吸完的。這是因為運動的關係，發生了先後的次序了。

二件事情不在同一地方發生，怎樣可以說他們是同時發生的呢？就是什麼叫作『同時』(Simultaneity)？在愛斯坦所著的一本相對論裏，給『同時』下了個定義：如第四圖中A和B為兩件事情，相距很遠。在AB之中點M處站一觀

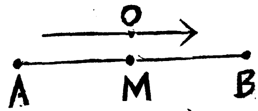


第四圖

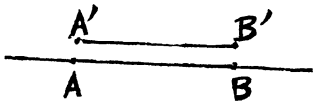
察者。如A和B發生時各發一閃光，如此觀察者同時看見這二閃光，就說A和B為同時發生的二件事情。這是異地同時的定義。如觀察者自A向B動時，所得的結果便不同了。如第五圖中，設觀察在一火車上，火車向B行。如觀察者適在O處，OM是垂直於AB的。如A和B處同時發出兩閃光，這二閃光必同時到M；但因O是向B進行的，故當A處發的閃光到M時，O已過M，則觀察者O見這閃光必較M為遲，並且觀察者O見B處發的閃光必較在M處的觀察

者爲先　所以火車上的觀察者覺着B事比A事發生的早　如火車向A處進行，則火車上的觀察者覺着A事比B事發生的早。

以上講時間的相對，現在講空間的相對。如A'B'爲火車之長(第六圖)，欲測量此車之長。測量者必須把與A'和B'相對的地下兩點記下；因爲火車是動的，必須將同時與A'和B相對的兩點記下，如AB。同時的意義就是剛纔所解釋的。於有人在車上用同樣的法子來測火車之長，因爲火車上所說的同時和在地下所說的同時不同，所以他得的結果和地下測量者得的結果不同。但他兩個差的很微，是個無限小的數(Infinitesimal)。但如火車的速率與光差不多，這個差也就很明顯了



第五圖



第六圖

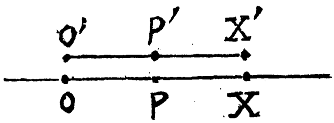
現在講羅論慈的變換式(Lor tz Trunsf rmatio Fo mul)

在愛斯坦著的一本書裏，有很多數學上的討論，是很難的，現在在這講演裏，不講那些很詳細的數學上討論了

設OX爲軌道，火車從O'向X'的方向進行　火車的速率爲V　當火車上

O 點與軌道上 O 點相合時，兩方將表對準，叫這時候爲零，比方說爲夜中十二點鐘。如軌道上的表走了 t 秒鐘，火車上的 O' 點如圖中的位置。就是火車由 O 走至 O'，在軌道上測得所費時間爲 t。然後

$$OO' = vt.$$



第七圖

當這時火車上的表所指的時候不是 t，是個別的時候，叫他作 t'. 在軌道上有一點 P，在火車上正對 P 的點叫作 P'；令

$$OP = x, \quad O'P' = x.$$

假使 O' 與 O 相合在 O 和 O 處同時發一閃光　光由 O 走到 P 時，所須時間爲 t，這是在軌道上說；在火車上光由 O 到 P 點所用時間爲 t'　因爲光的速率在火車上和在地上是一樣的，我們得以下二式

$$x = Ct \qquad x = Ct',$$

或

$$x - Ct = o \qquad x - Ct =$$

由此二式可得

$$(1)\quad x - Ct = \lambda(x - Ct)$$

λ是個常數　如光行的方向和火車行的方向相反，C變為負號的，又得

$$(2)\quad x' + Ct' = \mu(x + Ct)$$

μ為又一常數　這兩個式子都是實驗的結果　令

$$= \frac{\lambda+\mu}{2},\qquad b = \frac{\lambda-\mu}{2},$$

從(1)同(2)中可得

$$(3)\quad \begin{cases} x' = \quad - bCt, \\ Ct' = \quad Ct - bx \end{cases}$$

如令　$=$

然後　$x - bCt$

或　$= bCt$

卽得　$(4)\quad v \quad \frac{x}{t} = \frac{bC}{a}$

欲求a和b的值，須用相對論原理再得一公式　按相對論說，運動都是相

對的。如說火車對於軌道是動的也可以，說軌道對於火車動的也可以。這樣說起來，如火車上有一米達尺，在軌道上量得的長短和軌道上一米達尺，在火車上量得的長短是一樣的。單位是可以任意選擇的，我們就用 O' P' 爲單位，就是，

令 $x' = 1$

再令 $t = o$

由(3)內可得 $1 = ax$

$$x = \frac{1}{a}$$

就是如火車上量得爲一的時候，在地上量是 $\frac{1}{a}$。現在再從車上量地上的單位，

令 $x = 1$， $t' = o$

由(3)內得 $\begin{cases} x' = a - bCt \\ o = aCt - b \end{cases}$

從(4)得 $x' = a\left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)$

依相對論原理，這兩值必須相等，

$$\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)=\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}$$

今此值爲 γ 然後

$$b=\frac{av}{C}=\gamma\frac{v}{c}$$

合上所得　和t的公式，我們得

$$=\gamma(\quad-\quad t)$$

$$t=\gamma\left(t-\frac{vx}{C^2}\right)$$

這兩個方程式是羅論慈的變換式，可以包括特別相對論的全體。如知在此系統內之時間t和距離x，用此式可以求在別一系統內測得之時間和距離應有何值。

現在將此式與牛頓的力學相比　牛頓動力學中的與此二式相當的公式是

$$x'=\quad-Vt$$

及　　　　$t' = t.$

在第一式中，牛頓的式內無r因子，就是在他的式中r等於一　在第二式中牛頓的時間t'和t是相同的，依相對論說是不同的。

由上所得的式中，可以得

$$C^2t^2 - x^2 = C^2t'^2 - x'^2 = S^2 \text{(註)}$$

S是分離，亦叫事間（Intewal），是個常數。從此看來，分離可分三種

(1)　$C^2t^2 - x^2 > 0$　　（時間性）

(2)　$C^2t^2 - x^2 < 0$　　（空間性）

(3)　$C^2t^2 - x^2 = 0$

（註）從　$Ct - x = \lambda(Ct' - x')$

$Ct + x = \mu(Ct' + x')$

二式中，得

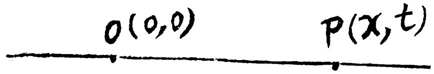
$$C^2t^2 - x^2 = \lambda\mu(C^2t'^2 - x'^2)$$

$\lambda\mu \quad a - b^2$

$$= \frac{1}{1-\frac{v^2}{C^2}} - \frac{1}{1-\frac{v^2}{C^2}}\,\frac{v^2}{C^2}$$

$$= 1$$

這三式是普遍的，對於x和t是對的。對於 和t 亦是對的 他純粹是物理上的事實，不從觀察者的情形變的 如在 O 處有一件事情發生，他的距離是零，令他的時間也等於零，令( )表示此事情 在P處有一件事情發生，他的距離 OP 叫作x，時間爲t；以(x, t)表之



第八圖

(一)當(t)發生時，從O發的光已過P點，就是

$$C^2 t^2 - {}^2 > 0$$

(二)當(t)發生時，從O發的光尚未到P點，就是

$$C^2 t^2 - {}^2 < 0$$

(三)當(t)發生時，從O發的光適到P點，就是

$$C^2 t^2 - \quad = 0$$

這都是物理上的事實，不隨人變的。在第一種情形內，當觀察者看見第一件事情(o,o)後，還可以看見第二件事情(x, t)。我們可以使兩處事情在一處發生，不過時候有先後罷了。所以這分離叫作時間性的分離。在第二種情形中，觀察者看見第一件事情(o,o)後，不能再看見第二種事情(x, t)了。我們不能使這兩件事情在一處發生。所以這分離叫作空間性的分離。在第三種情形中，那兩件事情是沒有分離的。

在　$C^2t^2 - x^2 = C^2t'^2 - x'^2$　中，如要求時間分離，命

$$x' = V$$

然後　$$t' = \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{C^2}}$$

如求空間分離命

$$t' = o$$

然後　$$x' = \sqrt{x^2 - C^2t^2}$$

這兩值各為 t 及　最小的值　就是二事情的時間距離(空間距離為零)，或空

間距離(時間距離爲零)

所以宇宙間的分離，不是可以分作時間的距離(空間距離爲零)，就是可以分作空間的距離(時間距離爲零) 或者這二件事情在同一條光線上發生(分離等於零)

第三次

上次講特別相對論時說過，如在二系統中，他們相對的速度是不變的，時間和距離的關係可用羅論慈的變換式表出。他的兩個公式可以包括特別相對論的全體。如有許多系統，他們的相對的速度是不變的，則在任何系統上研究宇宙中現象的規則結果是相同的。

特別相對論中所講的系統，速率全是等速直線運動。所以他的範圍很狹 天然界的運動是很複雜的，決不能限定等速直線運動，所以宇宙間普遍的現象不能用特別相對論來解釋。普通相對論所講的，不限定是等速直線運動，他隨便取一系統來作標準，觀察宇宙間現象的公律，結果都是相同的 所以普通相對論的範圍廣得多了

在普通相對論中，有許多地方距常識很遠的。他說如速率也是相對的。但據平常說來，加速率和不變速率是不同的。譬如我們在輪船裏坐着，輪船的運動差不多是等速率的，我們並不覺着什麽；但如我們在升降機裏，向上去時覺着身體重一些，向下降時，覺着身體輕一些。這種感覺是加速率生出來的。要照相對論來講，升降機向上去，同地球向下去是一樣的；升降機向下去，和地球向上是一樣的。那麽何以在地面上的人不覺着呢？現在再舉一個反例。從前牛頓做一實驗，證明絕對空間的存在，他的實驗是：桶中盛水，先使桶旋轉甚快，起初水沒有旋轉，所以水面仍是平的；到後來水亦旋轉起來了，旋轉時發生離心力，所以水就中間凹下，四邊高起。牛頓就說，旋轉對於空間是絕對的，如果是相對的水面就不應當有高低。當初轉時，水不轉，這時候尚可說旋轉是相對的，但後來水也旋轉，就不成了。所以在特別相對論中，各種情形都很簡單，不難解釋的。但到普遍相對論中，就有許多困難發生。解釋這些困難時，必有好些預備，方可以講得明白，現在暫且不講。

上次講過，空間或時間的距離都不是絕對的，但兩件事情的分離是不變的

上次公式裏的空間只是一度的，並且有一事情的空間和時間都當作在原點　的。現在要用略複雜一點的公式來表明兩件事情的分離。設有二事情(x_1, y_1, z_1, t_1)及$(x, y_2, z_2\ t_2)$。x, y, z 爲三度空間的坐標（C ordinat s），t 爲時間的單位。如S爲兩件事情的分離，他的公式是

$$S^2 = C^2(t_2-t_1)^2 - (\ _2 - x_1) - (y - y_1) - (z_2 - z\ )$$

S的值是不變的，和觀察的情形不發生關係。這公式是普遍分離的定義，以前寫的不過一個特別的公式。在以上公式中所用的單位就是平常用的單位，即空間的單位爲公糎，時間的單位爲秒。但要這公式簡單，可以用光在一秒鐘所走的路（30,000 000 000糎）當空間的單位，時間的單位仍爲一秒鐘。這麼着上邊的公式就變作

$$S = (t - t_1) - (x_2 - \ ) - (y_2 - y_1) - (z_2 - z_1)$$

二事情的距離愈近，則其關係愈確　我們也可以使二事情空間時間的距離爲無限小。命

$$t_2 - t = dt$$

$$x_2 - x_1 = dx$$
$$y - y = dy$$
$$z_2 - z_1 = dz$$

dt，等就是數學中的微分，將這些微分代入以上式內，我們得一微分方程式(Differe ti l Equation)

$$d^2 = dt^2 - d \quad - dy - dz,$$

ds 爲無限小的分離。在普遍相對論裏，分離的觀念是很重要的。但這個公式並不是絕對的正確。如在空間附近沒有物質，這個公式是對的，離物質愈近，這公式愈不正確。愛斯坦設法改良此公式，加入某項函數，就可以解釋萬有引力的全部。

照普通相對論中所推論的結果，「相對 這二字不是個確當名詞 從哲學方面看來，宇宙間無論那種公律，不能由觀察人而定。譬如行星的運動，他並不是依着某觀察者而動的。所以愛斯坦說 物體在空中運動，運動定律所包含的各項，照普遍相對論來講，並無觀察者情形在內。照這個原理講，就生出許多奇怪的事

直線在幾何上，物理上，是個基本的觀念，但宇宙間並無絕對的直線，直線也是相對的。譬如沿紙邊畫一直線，同時紙又在黑板上運動，對於紙說，畫的是條直線，但在黑板上也許是條曲線 那麼紙上人說是直線，黑板上人說是曲線，究竟那個對呢？都是對的。不過因為觀察者情形不同，觀察得的結果也不同了所以在普通相對論裏，直線的觀念是不能存在的。

從這重要的結果，牛頓運動第一定律便不對了 這定律說：『凡物體不受外力時，常繼續其靜止的態度，或依等速直線的運動進行。』現在既無所謂直線，牛頓的第一定律就沒意義了。以前講特別相對論，已經知道距離不是絕對的。但在普通相對論裏，這仍是不能應用。平常所謂長短，量物的尺子，測距離的儀器，都不是絕對的，剛體（Rigid Body）的意義也不明白，因為普通所叫作剛體的，其中兩點的距離，不是永久不變的。所以剛體的觀念也不能用。速度，加速度，和測長短的儀器，剛體的觀念，都是相對的，故不能用為自然公律。

在特別相對論中講過時間是相對的，全宇宙間的事物，速度，加速度，等等

都有時間的關係，所以這些東西都是相對的　空間和時間都是相對的，所以平常力學裏和幾何學裏的觀念都是相對的。

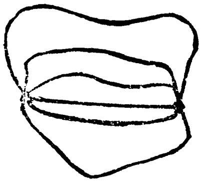
從前以牛頓的萬有引力的公律

$$F = \frac{mm'}{r^2}$$

當作宇宙間的自然公律　但現在看起來，是不對的　依這公式說，質量大，引力也大，質量小，引力也小。如火星的質量比木星小，所以火星對於太陽的吸力比木星對於太陽的吸力小。但質量是依觀察者運動而變的，並且距離也要依觀察者情形而定的　所以這公式不是絕對的，也要依觀察者情形而變的。這樣說來，怎樣可以叫作自然公律呢?

這樣一個基本的公式，還是相對的　那麼什麼是絕對的呢?以前講過，無論觀察者是怎樣個情形，分離總是不變的，所以 ds 是絕對的。如果兩件事情，距離不甚近，我們可以將他分爲無數的 ds ，再用積分的方法將他加起來，就可以得到這兩件事情的總分離　ds 是不變的，無數的 d 加起來也是不變的，就是

分離是不變的 用積分法從起點加到末點的時候，單論空間或單論時間的結果同與不同，暫且不說；分離的長度是終久不變的 但從這事到那事中間所經的路線不止一條。比仿說今天我們同聚在這裏，下星期我們又同聚在這裏，這二件事情是我們共同的，但是在這一星期中，各人有各人的事情，這當間所經的路線，沒有二人完全相同的。如第九圖中兩點是代表兩件事情，連這二點的線是所經的路線；圖中不過幾條罷了，實際上是很多很多的。但在許多



第九圖

綫裏總有一個最長的 就是在

$$ds^2 = dt - dx^2 - dy - dz$$

式中總有一組 dx, dy, dz 使 d 值最大。這條最長的路，我們叫他作自然綫（Geodesi）。在幾何學中，我們知道這是指最短的距離說的。如在一球面上，兩點間最短的綫是大圓圈的弧。又如雞蛋是一不規則的球體，然雞蛋上擇出二點，連這二點的總有一條最短的綫。但既知道最短的距離叫作自然綫了，何以又把最長的分離當作自然綫呢？這個很容易明白的，從

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

公式中看來，$dx + dy + dz^2$ 是距離的平方，這距離最小時，分離(d)就是最大的。所以叫最大的分離爲自然綫 質點(Particle)沿自然綫運動的，這個或者可以叫作宇宙間的自然公律，雖然不一定，但有對的機會；像牛頓的萬有引力的公律，一看就知道他不對。『凡質點都依自然綫運動』，這個定律可以包括力學中一切現像，只有電磁學不在其內。這個定律，德國物理學家海爾慈 (Heinrich Herz) 就知道。他是十九世紀末的人 (1857—1894)。因當時相對論的學說尚未發明，所以後人注意。

愛斯坦有兩條原理，暫且寫在下面

(一)自由質點都依自然綫運動。

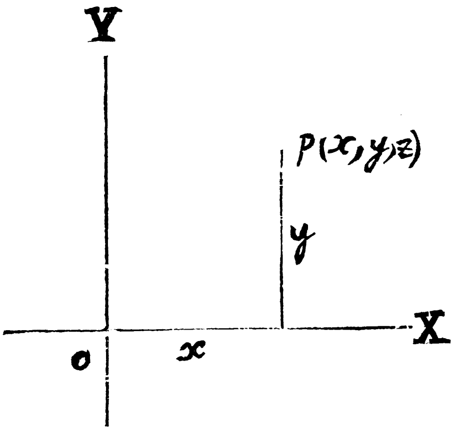
(二)空間時間界不是由克立德的，有一定可發見非由克立德的性質

這兩個須加解釋，方可明白。

第四次

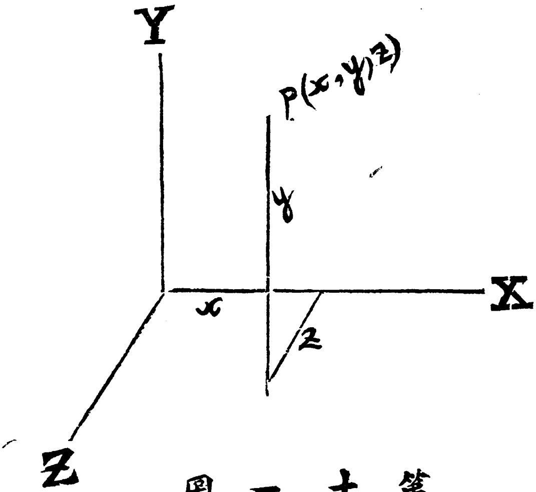
現在講事情的定位。如定事情的地位，普通數學中的位標全不能用了，因爲他都有直綫的觀念 上次講過，直綫不是絕對的，是由觀察人定的。你看是直綫

，我看就許是曲綫。如上次所說的沿紙邊畫綫的例子，紙上人看是直綫，黑板上人看就是曲綫。因爲這個原故，普通幾何裏的觀念全用不的了。今設有一種生物，生於鷄蛋面上。他只知有二度空間，並不知道鷄蛋面以外還有空間存在。鷄蛋面的曲度，是各處不同的。如果他們要量長短，所用的尺子須是曲的，他的曲度必須與所量的地方的曲度相合　但因鷄蛋面的曲度不同，所以適於一端的尺子到中部就不適用了　所以鷄蛋面上生物的生活是很複雜的。我們的宇宙似乎是很簡單的，但照相對論來講也是很複雜的，和鷄蛋面上一樣。



第十圖

照普通解析幾何中的方法，定位置是很簡單的　如在平面上，用兩位坐標x和y，如第十圖。在三度空間內，用三位坐標x，y和z，如第十一圖。但這全是用直綫定的　前面已



第十一圖

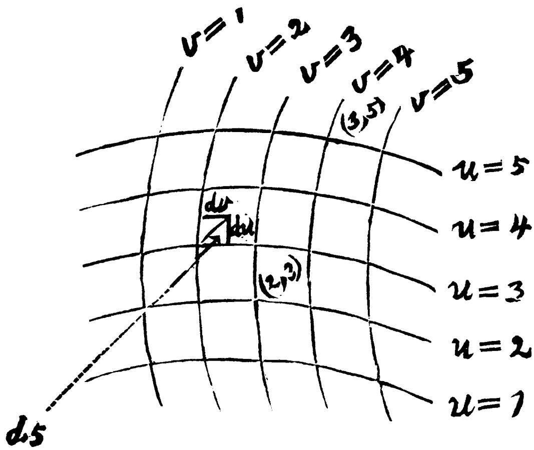
說過，宇宙間沒有絕對的直綫，所以照普遍相對論講，這種定位置的方法，是完全不能用了。

既無直綫 怎樣定位置呢？現在有一方法，任意選定一數目來定空間的位置。如有一不規則的曲面，在曲面上各點的位置，可用兩種數目來代表，如第十二圖中，一組爲U，一組爲V U和U不相交，V和V不相交 每一U和每一V都相交 每綫給以一名，如 =1, 2 , V=1, V=2,

如有一點在 u 3和 v=5 二綫上，這點就叫作(3,5) 又如一點在 2和 v=3 二綫上，就叫作(2 3) 這樣定位置的方法是完全任意的 所謂 u，v 並無

別的意義，不過是種記號罷了 好像說紐約城中第幾條街門牌幾號定一個人家是的。但是有一條件是要緊的，就是經過每一點，必須有一條U和一條V，並且只有一條U和一條V。

如從這一點到那一點的距離爲ds，U的變化爲du，V的變化爲dv現在要求一公式用du和dv來表ds。這是一複雜的曲面不易求得，今得一普通公式如下



第十二圖

$$ds = E\,du + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

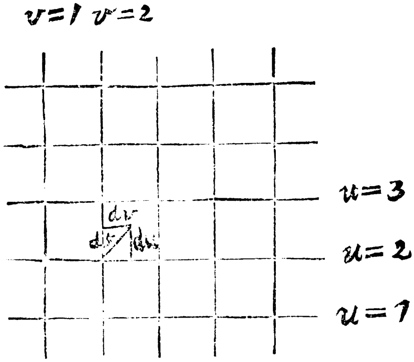
在這式中，係數E，F，G，是很任意的 如畫曲綫的法子不同這係數的值也就變了。但在個一定曲面上，無論如何畫，E，F，和G的值雖變，他們總有一函數—f(E F, G)—是不變的。這個函數是表明曲面一種性質的，表明曲面

的曲度的。如球面的曲度爲$\frac{1}{r^2}$，這個只與半徑 r 有關係，不因在球上畫綫的方法而變的。又如地球上的經緯度改變了，城市，山川等的位置由經緯度定的也就改變了，但地球的曲度是不變的。又在鷄蛋面上任你怎樣畫線，總有這種不變的函數。惟雞蛋面上各處的曲度不同，求他一部分的曲度時作一圓球使他與這部分相合，這球面的曲度，便是此一部分雞蛋面的曲度。高斯（註）（Karl Friedrich Gaus ）研究這種不變的性質，得出一不變項（Invariant）

（註）高斯（1777—1855）德國人，爲哥丁根（Goetingen）天文台台長，及哥丁根大學教授。他是十九世紀一個大數學家，發明計算軌道的新法，對於數學及數理物理也有許多發明。非由克立德幾何的觀念，到他方完全確定，並且非由克立德這個名詞是他第一先用的。

以上講的並不是題外的，這於普遍相對論很有關係的，也可以說是普遍相對論的一種。如若鷄蛋面上的生物有相當的智慧，也能發見各部的曲度不同，和人類能發見非由克立德幾何一樣。但他們是二度空間中的生物，終不能確實知道鷄蛋是什麽樣子，就像我們是生於三度空間中的，不能知道四度空間中的事物一樣

我們現在可以問，『我們所居的空間，是由克立德的呢，還是非由克立德的呢？』雞蛋面上的生物雖知道他們的宇宙是灣曲的，究竟不知道怎樣的個灣曲我們知道我們所處的宇宙也許是有灣曲的，所謂灣曲空間（Curved Sp c）的，並且用數學的方法，知道我們的宇宙是非由克立德的。但我們終不能想像非由克立德的宇宙是什麼樣子，祇能用數學的方法來研究這種性質。但是我們三度空間的人雖不能想像，四度空間中的生物一看便知道了，就如我們看雞蛋一樣。



第十三圖

　現在舉個例子，來解釋剛才說的　在平面上畫兩組直線（第十三圖），一組為U，一組為V　（本無直線，此不過照平常說法來畫）現在要求平面上的距離 ds，U的變化為 du，V的變化為 d　，則得

$$ds \quad d \quad + dv^2$$

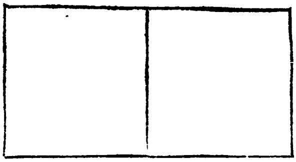
與普公式

$$d = Ed + 2F\,du\,dv + Gdv^2$$

相比較，則知在平面上

$$E=1,\ F=0,\ G=1.$$

我們知在平面上這公式上是準確的　但在眞宇宙中是怎樣呢？愛斯坦說　設若不知普通情形，在一很光滑的大理石桌上，用許多等長的棒搭起來，使他們都成直角式在一直線上，如第十四圖，末尾那根，搭上去卻好合適　這不過是僥倖罷了　實在的宇宙是不規則的，應當有些不符合的。



第十四圖

再舉一例，如地球上以經緯度定位置。如經爲β，緯爲λ(第十五圖)　用此法求距離，須用下公式

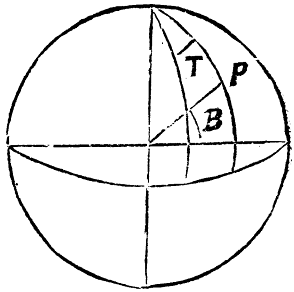
$$ds \quad d\beta^2 + c\ s^2\beta\, d\lambda^2$$

這公式不能和平面上的公式相通，因爲平面和球面上的公式決不能相通　設有一人在一宇宙中得一公式爲

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

他一定在一平面宇宙中，或以平面成的任何宇宙中，如圓柱體，圓椎體，等

的面上，但決不在球面上　因爲把一平面鋪在球面上決不能相合，因爲兩種性質根本不同，所以這兩種公式決不能相通。在經緯度中的公式不能包含平面上的公式，平面上的公式亦不能包含球面上的公式　如地球上分經緯度法改變了，所得的公式也就改變了；但無論如何改變，沒有一種公式可以



第十五圖

包含平面上的公式　總而言之，在一種面上雖可有無數的公式，這些公式決不能包含別種面上的公式。所以兩種不同的面，根本上有種不同的特性。

從這裏着想就發生非由克立德幾何學。非由克立德幾何和由克立德幾何中空間的不同，好像蛋面或球面與平面不同一樣，不過非由克立德幾何中的空間是三度罷了。普通所謂的空間，並不是眞實的空間，不過是人類的偏見　在普通空間中，其公式爲

$$ds = dx + dy + d$$

但在事實上，無論如何，不能得出這個公式，所以說空間是非由克立德的

按相對論和物理學上實驗的結果，也可以知道空間是非由克立德的非由克立德幾何，是俄人婁拔求斯苛(Nik lai Iva ovoh Lobatch wsky)在一八二九年發表的。同時波雷 (Johan n Bolyai) 也發表這種學說。非由克立德幾何的空間和由克立德幾何中的空間相比較，就和球面與平面相比較一般 我們知道在一球面三角形中，三角之和不等於一百八十度。所以他們說在非由克立德空間中，也許有這種的不同。在他們的時候以為這種結果是很奇怪的，但在普遍相對論中，這沒有什麼要緊，最要緊的就是用公式中的係數來表明空間的性質。

照近來推論的結果，宇宙是非由克立德的，並且不像把球面與平面的關係推廣到三度空間的。現在研究，知道宇宙並非三度的，是四度的，那一度就是時間。在四度空間中，有好些小不規則的地方。如空間中有物質存在，他就少高起一點，如山脊一般。愈近物質，空間愈是非由克立德的；離物質漸遠，空間的性質漸近於由克立德的。離物質極遠的空間，也許是由克立德的，但說不一定因為無法試驗。據愛斯坦說，空間也許是有窮的，像球體一般 時間因為有別種作用，

或者是無窮的。雖說宇宙大概像球形，總有地方是不規則的；就像說海洋面是水平的，但面上有許多波浪。海洋面上的波浪有大小，大波浪就好像宇宙中有大物質的地方，如太陽等，小波浪就像有小物質的地方，如地球等。宇宙的全體也許是球形，但各小部分的情形，一定是不一樣的。這等問題是很難解決的。說物質在宇宙中如一條長山一樣，那長度是時間，這大約是對的　愈近物質的空間越是非由克立德的，這是實驗的結果，大約是對的。

在特別相對論中，時間和空間的關係，有一簡單的公式

$$ds = dt - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

在普遍相對論中，這公式不甚正確的。在近物質有引力的地方，這公式須加修改，修改的方法，便是愛斯坦用來解釋萬有引力公律的。

(附)現在要講些數學上的討論

公式中最重要的一個，就是

$$d = \sum_{1}^{4} G_{uv}\, d\, u\, dxv$$

d 爲分離，　和　各有四值，因爲這是表四度空間的　係數 G 是任意的，

要依空間的性質而定。

自然線的公式　當分離積分的變化爲零時，就是

$$S\int d =$$

分離爲最長。所以這個公式便是自然線的定義

有一公式

$$J = \int_{t}^{t} f\left(\quad y \quad , \frac{dx}{dt,}, \frac{dy}{dt,} \qquad \cdot \right) dt$$

$$= F\ (t)\quad y = F\ (t) \qquad x = \frac{dx}{dt}$$

J 最大的條件爲

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

分離的公式爲

$$d = \sqrt{\Sigma_{1}^{4} G_{uv}\, dx_u\, dx_v} ,$$

所以自然線的方程式爲

$$2\frac{d}{ds}\left(\sum_{1}^{4} G \frac{dx_u}{ds}\right) = \sum \frac{\partial G_{uv}}{\partial x_1}\frac{\partial x_u}{\partial s}\frac{\partial x_v}{\partial s},$$

第五次

今晚講愛斯坦的萬有引力公律　這公律是相對論中狠重要的部分，用通俗的語言很難解釋明白，必須用微分方程式來講　在這演講裏 我只用通俗的語言來講

在講這公律以前，先講一比喻　設有一科學家，帶了許多儀器，可以作各種試驗，住在一個籠子裏面　設這籠子不在地球上，也不在別的星球上，在離物質很遠的空間裏面，所以他不被別的物質吸引　當這籠子靜止的時候，籠子中的東西，放在那裏便停在那裏，決不會動的。譬如把茶杯放在空中，便停在空中。所以這籠內並沒有上下的區別。假若有一種不可思議力，按等加速率拉這籠子，籠子裏邊的物體便都順着和籠子運動反對的方向落後。當物體落後時，如有一種物體阻止他，則這種物體便覺着有壓力。在外面的人看來，什麼東西都落後，是因

爲籠子按等加速率在那裏運動的緣故，但籠子中的這位科學家不曉得，所以他說『物體都向一邊落，是因爲那一邊有種引力吸各種物體。』因這個原故，他就把那一面叫作下面，和我們在地球上解釋物體下墜一樣。實在說起來，這引力不過是由變速度生出的一種現象，籠子裏面的科學家，不知外面的情形，所以說物體往下落，因爲下邊有引力，這物體在這力場之中，這種力場，可以叫作『人造的力場』(Artifi i l Field of Force)。

起先我們說運動是相對的，現在可以說力也是相對的了。像剛纔所說的，籠子的變速度，籠內的人看起來，是一邊有引力，可以吸各種物體，但從籠外看來，不過是拉籠子的快慢，並沒有力在裏邊，所以力也變成相對的了。因此，便生出『力學相對論。』

人造的力場是可以去掉的。譬如剛纔所說，籠子裏面並沒有什麼力場，不過是變速度生出的一種現象。因此，得出引力等値的原理 (Principle of Equivalence)。『引力等値』的意義是：『萬有引力場中，無論在那一點的力，都可用一相當的變速度換一換，使他値相等。』如說籠內某點的力場，就可以用變速度來

替他，其結果與設想萬有引力一樣，所以叫作「引力等值。」但是這個說法還嫌粗率，必須再加一句方可。在愛丁頓的正式報告裏，他說在公式

$$d \sum_{1}^{4} G_{\mu} d_{\mu} d_{\nu}$$

中　係數G的第一次和第二次導出函數對於引力等值是對的，第三次以上的導出函數對於引力等值便不對了。我們加入這句話，便精確多了

前次說牛頓的萬有引力公律

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

是不能用了，因為質量和距離都是依觀察者的情形定的，都不是客觀的實值。自然界的公律　必定有一種絕對的不變式，不能說在地球面上可以解釋各種現象的公律，就叫作自然界的公律，因為在別的星球上就許不能適用。所以要解釋宇宙中的現象，必須用絕對的不變式，不依觀察人的情形變的。

萬有引力的特別性質，是不依物質的種類而變。譬如地球無論變成紙的，皮的，鉛的，　他仍是繞着太陽轉，與他的成分沒關係。但是我們平常說力是

依物質而定，像這樣的解釋，豈不是很難了麼？但是愛斯坦對於這種現象的解釋很清楚。他說太陽附近的空間是非由克立德的，離太陽很遠的空間是由克立德的離太陽遠像一平面，離太陽近就變成曲面了。前次說過質點是沿自然線而動的，愛斯坦又說凡物質在太陽附近非由克立德的宇宙裏也是沿自然線而運動的，惟在太陽附近宇宙中的自然線和離太陽很遠由克立德空間中的自然線是不同的　這不同的原故，好像是因為太陽附近有引力。

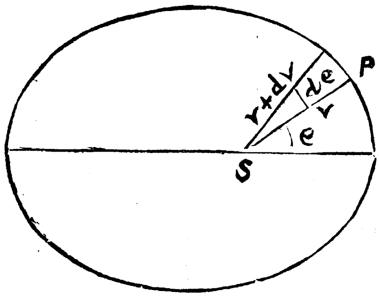
(註)笛克兒，法國人，(一五九六——一六五〇)，他是十七世紀一個大哲學家。漩渦的學說是他倡議　他說行星的旋轉，就是因為有漩渦的原故。照他的學說，太陽是在橢圓的中心，又地心吸力只在赤道面上是向地心的

像這樣簡單的解說，是很不完善的。

愛丁頓的書裏有一很好的比喻，說明在物質旁邊空間時間的性質。他說：有許多偏魚——沒有厚薄的——在海中沿海底行動，他們是二度空間中的生物。他們運動時若無阻礙，是依直線運動的。然有時他們走到一個地方，他們都不依直線走了，祇是繞着一個地方轉來轉去　這些魚中有個有點科學思想的——就是笛克兒

(Desc rdes)—(註)說這裏有漩渦(Vorte),所以走到這裏只好繞着這地方轉。又有一魚有個較好的解識,說,有一大魚—太陽魚—睡在那個地方,無論那個魚走到那個地方,總是要繞着他轉的,因爲太陽魚是有吸力的 他們講吸力的大小,則說大魚的吸力大,小魚的吸力小。這個說明是很簡單很周到的。但別的魚很不滿意,以爲太陽魚睡在中間,爲何生出這種影響,使別的魚都繞着他轉呢?普通魚都以爲太陽魚的引力是由海水中傳來的,假使對於海水有研究,就可以知道這種傳佈的現像。所以有許多魚來研究海水傳力的問題。但是另有一魚—愛斯坦—來用別的方法來解釋。他看見大魚和小魚所繞的路總是一樣,所以他注意在走的路程,不注意在發生的力。後來這魚發明出來一種新說,說在太陽魚的地方,高起來一點。但這種偏魚,是在二度空間中生活的,看不出那『高,』只覺得那地方有些古怪,經過這古怪的地方,他們必須繞灣 這彷彿有人在山坡上走路,身體總要向內傾斜一點,要不然就不能依直綫進行了 上面這個比喻,是不甚精確的,因爲比喻中所說的是二度空間,我們所要的是四度空間 普通以爲這些古怪的地方,就是我們所說的灣曲空間,在那裏便有引力

現在講萬有引力　爲簡單起見，將太陽當作一質點，太陽的體積和宇宙比起來，也可以說他是一質點　第十六圖中的楕圓形代表一個行星的軌道，(行星的軌道雖然是楕圓的，却和圓的差不多，不像圖中那樣扁的。)S代表太陽，是楕圓的一個焦點。設在P點行星與太陽的距離爲　，SP與軌道的長軸(Major axis)所成的角爲θ。次後r變爲　+dr，θ變爲θ+dθ，則分離的定義爲



第十六圖

$$ds \quad dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta$$

這個公式中用的是極位標(P l r Co-ordinat)，和特別相對論中所講的公式

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy = dz^2$$

是一樣的性質，全是在由克立德空間中，不過一個是在二度空間中，一個是在三度空間中罷了　但照愛斯坦的學說，在實在非由克立德空間中，分離的定義應該是

$$d = \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} - d\theta$$

這個式子和上式比較，就是多出m的一項　m是質量，他的單位並非用克(Gram)來計算，要另用一絕對的單位，所以m的值很小　這個公式表明空間和時間的性質於物質有關係的。設有一物，放在這個地方，即沿自然綫而動。從這公式裏即可求出自然綫是怎樣的　這個公式和牛頓的公式算出的結果，相差雖很小，但要問，在物質附近和離物質很遠的地方的運動，這兩個公式那一個是對的　現在有一機會來解決。

這二個公式中，只有$\left(1-\frac{2m}{r}\right)$一項不同　從這個不同的地方，就可以用天文學上的事實來解決，究竟是那一個對。把這兩公式比較起來，有兩項是不同的，現在看這兩項中那個影響大。今舉一例，以太陽說，太陽的質量是一　四七粁(Kilometer)。這個單位是很怪的，怎樣質量可以用長的單位來表明呢？其實因為質量與長短是有關係的，所以單位也可以變換。又因光的速率定為一，所以別的單位也變了。現在單位已明白了，就可以知道$\left(1-\frac{2m}{r}\right)$很近於一。再看 dt

和 dr 的變值，那個影響大 自然 dt 要比 dr 大得多 所以把這兩項 $\left(1-\frac{2m}{r}\right)$ dt^2 和 $\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}$ 來比較，$\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt$ 要緊得多 從這地方就可以知道這二公式那一個對。近來有三種實驗，可以用來確定愛斯坦的公式 據觀察所得的結果，兩實驗已和愛斯坦的定律相合，還有一種可疑的地方。

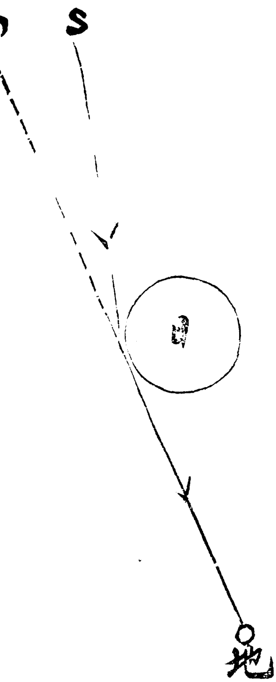
第一種就是水星軌道的計算 他軌道上最近太陽的一點，叫作近日點。這水星軌道的近日點老與計算的不合 每世紀總要差四十三秒。這個差是很小的，但天文學裏各種觀察都很精確，這個差也可以看出來。有人說明這種現像，說水星的軌道的裏面也許還有個行星，使水星軌道受他的影響 有人又說萬有引力的公律。

$$F=\frac{m_1m_2}{r^2}$$

也許差一點，但沒有人能證明。但照愛斯坦的公式算出來，則完全的和水星運動的實在情形相同。這是愛斯坦學說的第一個大勝利

第二種就是光也受引力的影響。照愛斯坦的新引力說，太陽所以有引力的原

故，是因爲太陽附近的空間的性質不同。無論何種特質，經過太陽附近，總要受他的影響，光也是這樣的 設一星之光從S射來(第十七圖)，這光線經過太陽的附近，受太陽引力的影響須要灣曲，所以這星光進行的路程實在是曲的，我們看起來好像是從S'發生來的。照舊方法說，也有說光有質量所以從太陽附近經過



第十七圖

，亦要受太陽的引力，所以灣曲。但愛斯坦算出來的這個曲度，要比牛頓所算出來的倍一倍。所以現在有三種說法 (一)光不要引力的影響，是不灣曲的，(二)就是牛頓的說法，說光和平常物質一樣受引力的影響，(三)是愛斯坦的說法，曲度要比牛頓說的大一倍。這三種說法，究竟那一種對呢？如果要看太陽旁星的方向，白天無論如何是看不見的，必須在日全蝕的時候，方可以看見。愛斯坦在一

九一五年發表他的學說，一直沒有相當的全日蝕 到一九一九年五月二十九日有一個全日蝕發現，並且太陽旁邊的星很明亮，可以觀察得很淸楚。這次全日蝕，以在南美觀察的爲最好。觀察的結果，和愛斯坦所說的相符合。這是愛氏學說第二個大勝利。

第三種是愛斯坦所預期尙未經實驗證實的。凡物質的原子，在高溫度時便要振動，發生出特別的光帶 如鈉光帶是黃的，銅光帶是綠的。照愛氏的學說，說各種原子在强有力的引力場中振動得慢，在弱力場中振動得快 所以太陽面上的原子振動比地球面上原子振動得慢一些，所以光帶也偏向紅一方面去，就紫的要藍一些，藍的要綠一些， 黃的要紅一些。但實驗的結果並沒有這種現像。這是愛斯坦的學說可懷疑的地方 但因他的學說有第一二種强有力的證明不能說他的學說是不對的。

第六次

今晚講前幾次所講的新物理學，對於哲學上的問題，有何等關係 這是很難說的，因爲新物理學很幼稚，雖說近幾年來進步得很快，但仍是很粗率的。就是

從相對論生出來的哲學上的觀念，照常識來說，是很明白的，似乎知道的很多；但是知道新物理很詳細的人，就覺得知道的很少，並沒有那麼多 照相對論的歷史看來，起初有許多哲學上的理論，後來從實驗的結果中，方知道沒有這麼許多。這也是科學中常有的事情 所以要沒有詳細研究過相對論的，也許覺得哲學上所想像的都是很對的。

運動相對的學說在普通哲學中也說過，說無論那種運動—不論直線運動 旋轉運動，也不限定是等速運動，—都是相對的。但牛頓用水桶旋轉試驗，證明旋轉運動是絕對的。雖有許多人生各種方法來解釋，說旋轉運動是相對的，但總是不適當，好像斯人們的 又如富科爾(Fualt)的擺，證明地球的自轉是絕對的。照上面說法，好像沒有方法可以說旋轉運動是相對的，但我想也許可以想法來解釋，不過是很難罷了。

說起數量，似乎有了相對論，種種數量都是相對的了，但照真正相對論的結果說，也不盡然。以前說過有幾種是要依觀察人情形而定的，如時間，空間，等但是說到分離上，就不對了，事情的分離是不依觀察者情形而變的，他完

全是客觀的。還有愛斯坦的萬有引力公律也是這樣的，這公式不論在何種空間中，用何等位標，都能適合的，所以這公式也是客觀的。所以照相對論說，也不是樣樣都是主觀的，不過有幾種變成主觀的罷了。現在相對論發達的不完全，所以絕對的分離仍要用主觀的時間空間來表示；將來相對論進步，也許能發明新法，使之不含有主觀項。

在哲學中最要緊的結果，就是空間時間的混合，在科學上也是一樣的要緊。平常說「上星期我們在這處，這星期我們又在這處；在這地方有一件事情，同時在別的地方也有一件事情。」這些話都是不對的，因為空間時間是相對的，要依觀察人情形而定的。所以同時和同地都是主觀的 在複雜的四度宇宙中，事情離也有一定，但是不能只用時間來量，或空間來量；這只能用分離來定

這個學說的結果，把常識裏物理上的觀念全推翻了 例如 A和B的地方各站一人，在A的人先發一光到B，在B的人看見光後，發一光到A。照平常說起來，這兩條光線所經過的是同一直線 但剛纔已經說過，宇宙間沒有同時和同地 所以從A到B再從B到A的時候，A已經不是那原來的A了 故平常

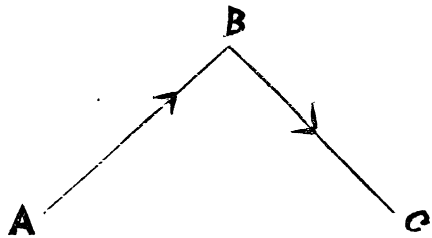
說來，在一條直線上可以來去，但照相對論說，是毫無意義的。比仿說從北京到上海，和從上海到北京走的路線　似乎是一樣的，其實是不一樣的。如我們能到太陽上去觀察，那就很明白了。因爲地球有公轉和自轉，所以由北京到上海和由上海到北京所走的路線是兩條很複雜的曲線，這兩條曲線是完全不同的。又如在火車上，從左邊走到右邊和從右邊走到左邊的路，當火車行駛時，在車外看來是兩條交錯的曲線，並不是一樣的。所以照相對論說，既無同時同地的觀念，那原路的定義也就不能成立了。

相對論的學說發明以後，不但科學界受了影響，就是別種學科也都受了同樣的影響。如說倫理學講行爲的善惡，宗教講靈魂是否不死和來生問題，政治講政策的結果，這些問題都和將來的時間是有關係的。照相對論說，現在將來的觀念並不是絕對的，都要依觀察人的運動而變，所以時間的次序是很隨便的。那麼有人問，「來生怎樣？」就回答他說「現在也可以當作將來，你要知道來生，就看現在好了。」用這句話來解決這個問題，怎樣能令人滿足呢？在相對論中說時間的先後，雖並非沒有限制，但在倫理宗教裏的觀念，總要受些影響。又如定命

論和意志自由的問題，也都和將來是有關係的，所以也要受些影響　實際問題大都是講將來要發生什麼事情，結果是怎樣，照相對論說這種問題都不成問題了。

剛纔說的話毫無限制，也有些太過，實際上事情的過去和將來也有一定的限制。如在這裏發出一光，射到四方，在一地方當這光射到以後發生一件事，這件事情的發生是在發光以後。這先後是絕對的，不依運動情形變的。如說有一棵星的光，須五十年方可射到地球上，在地球上發生一件事情，這事情和星光發生的先後，在事情發生時先後五十年是相對的，故地球上的事情和星光的先後在一百年範圍內是相對的。因此，事情距離愈遠相對的範圍愈大，先後的問題也愈含糊要是說到全宇宙，那就沒有絕對時間的先後了。

二件事情的分離如果很小，乃是個微分 ds ，這分離是很簡單而且是絕對的。如二件事情的分離很大，求分離時須把 ds 用積分法加起來，就有許多方法，要依走的路線而定，這就不是絕對的了。如沿着光線走，照公式算出的分離是零，就是從 A 到 B 是零（第十八圖），從 B 到 C 是零所以從 A 到 C 是零；但是要換一條路線走，那分離也許就不等於零了　所以分離要是 d ，是很對的，如



第十八圖

把他用積分的法子加起來，就不一定對了。在四度空間中，是沒有剛體的，所以分離不似長短的距離有簡單性質的，要量一物的長短，就要取一定的物件來比較，如說有幾尺，就是把一尺加上幾次，分離沒有這種性質，所以分離是不可加的，(說長度有可加性，亦不見得對)要是在四度空間裏還有引場，那就更複雜了，分離愈沒有可加性了。

分離的觀念包含有時間空間，好像可以用來作成四度空間的幾何學 但是分離沒有方向，所以他不能解釋光的方向。愛丁頓加入『近度』一項來解釋，但是我想也不大行。無論如何要把分離的觀念來解釋四度空間中的幾何，總是不夠的。

還有一結果，在哲學裏也是很重要的，就是用『事情』來代替『物質』。物理學裏用占空間的位置來解釋物質，用在不同的時間占不同的位置來解釋運動，現在知道運動和空間都是相對的，所以物質和時間的觀念全用不着了 現在用事情

來作單位，事情是在時空四度宇宙中的，所以不能說在某地，或在某時，總要混合起來說的。物質的觀念，就是用邏輯的方法集合許多事情而成的。

同物質觀念有關係的，還有質量。平常都說物質有質量可以稱的，但質量也不是一定的，要依運動時的情形而變的。況且質量也是能力的一種。如平常說光是一種能力，上次講過光也受引力的影響 因此把質量和能力一同看待，所以現在質量的觀念不很重要了。

現在要問『什麼是物質？』這個問題有兩個回答，這兩個回答只是說法不同罷了，並不是因爲學理的不同，這兩個回答是一樣的，不過因爲事情排列的不同，所以有兩種說法。如問太陽的物質是什麼。我們知道太陽旁的空間時間有自然線。這自然線有許多特別的地方，將物質擱在這裏，不能動也不能進這個地方。這個不能進去的地方，就是太陽的物質。照此說來，物質是時空四度宇宙中一個特別的地方，在這地方自然線排列的很奇怪 從愛斯坦的公式

$$d = \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt - \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} - d\theta$$

中，就可以知道太陽附近的自然線排列的奇怪了　以上是第一種說法，說自然線排列奇怪的地方就是物質

現在講第二種說法。平常說太陽旁有力場，有自然線，地球依自然線而轉。所謂自然線並不是空中眞有一條線，不過是一串事情罷了。所以說地球沿自然線轉是不通的。地球經過多少年老這麼轉，所以地球自已也是一長串事情。所以我們可以說地球就是自然線，自然線就是地球。所以地球的定義是　地球就是所說的地球之自然線　不只地球是這樣說法，凡物質都可以　照這說法，物質就是物質的自然線。

現在我要另講一個題目，這個題目太大　恐怕今天不能詳細講。這個題目是相對論於實際上有何種影響？這些數學上的空話，究竟實際上發生何種效力？

這種問題固然很準確的了，但是怎樣用到實際上去呢？如果理論上說得很好，實際上差一些，那又怎樣呢？如自然綫，平常總說物質沿自然綫運動，什麼叫自然綫呢？自然綫的事情加起來便叫物質，這是爲什麼呢？自然綫隨便給他一個定義，物質如何能有的確的定義？這問題的回答是　自然綫是有事情相連的，離

得越近，則越相像 如今天看見一個太陽，明天看見一個太陽，已前希臘人已經說過太陽有許多個，不過這許多太陽都很相像罷了。但太陽變不變仍在一條綫上，所以總可以叫作太陽 又如木頭沿自然綫運動，木頭忽然燒了，這灰燼和木頭不相像了，所以相像這句話也靠不住。惟在自然綫上很近則很像 總之，說物質沿自然綫走，也可以說物質就是自然綫。這句話是眞的不是空的 不過相像的話，在理論上雖很淸楚，用到經驗上還是含糊的。

平常說物理學是實驗科學，實驗是根據事實的。這句話固然是很對 但實驗時總離不了觀察人身體上的變化。如在天文台上用望遠鏡看太陽，行星，恒星，等

無論儀器怎樣精確，總要光綫射到人眼的網膜上纔行；如果觀察人是個瞎子，他知道什麼是太陽，等 ？所以觀察雖很精確，結果總離不了我們身體上的變化，物理學這種科學雖很廣大，也不能不受這個限制。

現在對於事情觀念還要分析。平常講物理學上的事情是很簡單的，但在經驗上是很複雜的。如把茶杯打碎了，在物理學上看來是很簡單的一個事情，然實際上是很複雜的了，因爲各人所生的感覺都不相同，如你聽見是這個聲音，他聽見

是另一個聲音　物理學家對於經驗事情下一定義，說　這種事情是推想出來的。還有一定義說，這事情是把各種事情按論理學的方法組織成的。然一件事情，無論是推想的，或組織的，在物理學上總以爲是很複雜的。

但是許多事情不是我一人都能直接覺得的，必定要相信別人的經驗，如專靠我一人的經驗，那就很有限了，必定是不夠用的。剛纔說物理學上的事情是組織的或推想的。所謂組織的就是把一堆一串的東西加起來，總名之曰事情。如把天下姓王的人加起來，總名之曰『王姓』，把這些可以直接經驗的東西加起來，在物理學上也可以說是事情的定義。要不然推想的也可以。有許多東西我們雖不能經驗　然可以推想出來，如剛纔說的　『王姓』中的『王姓』是很抽象的，不能經驗的，然可以推想的，所以這也可以當作物理學上事情之定義。

現在講到事情的組織和推想，但是要知道怎樣組織和怎樣推想　那非用『算學的論理學』不行了。但這種專門學問很不容易講，現在也沒工夫講。現在要問物理學是由純粹經驗來的呢，還是由推想來的？這就是問物理學建設在那個根本上的。在物理學上我們知道有許多東西是歸納來的。但又要問，歸納法是不是完

全從經驗上得來的？有人說，一件事情，今天是這樣，明天是這樣，後天還是這樣，老是這樣，就可以說將來也是這樣，這是專用歸納法的　但歸納法也許有不對的時候。證明總原理時，也許有特別的地方不對了。從前米爾（John Miller）說各種東西都要實驗的，但他也沒說明歸納法是怎樣從實驗得來的。其實這種知識都是先天的，所以我常想總要有先天的學問纔行。

以上講的都是空空洞洞的，諸君也許不滿意，就是我也不滿意，因爲不能用算學的論理學來解釋。這個專門學問是很難的，沒有好好預備過的人，聽來也很不容易明白，所以只好不講。

在相對論中先有物理學上實驗的事情，然後用與理論相差很遠的事實來證明他　因爲受了實驗哲學的影響，自從用這個法子以後，物理學就大進步了，這是二百年來的一個大進步。但是純粹以經驗來作物理的基本，還差的遠呢。

現在既是不能用算學的論理學來講，對於『物的分析』這演講，就算完了

物的分析終

數學邏輯 （Math m ti 1L gi）

慕巖筆記

（譯『Mathem ti 』作『數學』是不妥的，因爲他未必是講數的 但普通都譯作『數學』，所以此處亦譯作『數學』 ）

第一次

數學邏輯與普通數學不同的地方在進行的方向，普通數學是向前的，數學邏輯是向後的。但這『向後』不是退步的意義，不過追本求源就是了

我們有許多數學的命題時，可以有兩種不同的問題發生 (一)從這些命題中可以推出何種的推論，——這是普通數學所要研究的。(二)這些命題從何種命題中推出來的，就是要找那些較簡單的，爲數較少的命題，從他們可以推論出這些來。像這樣再向後找，就可以找出更簡單的少數的命題 再依次向後找去 這就是數學邏輯所要研究的。

我們任意取一種推論的系統，——如算術，由克立德幾何，牛頓力學，等——全可由幾個自理（Axioms）或假定（Postulates）中推出來他的全部。（自理和假定不同的地方以後再講 ）不只這幾種，每種純粹數學都可以由有定數的幾個自

理和假定中推出。這些自理和假定都是純粹論理的。

平常的數學除去幾種，—如投影幾何，羣論，等 .—都是於數目有關係的。但有好些於數目毫無關係的學問，能用數學精確的法子來研究，要研究這些，數學邏輯是種需要的利器。數學邏輯雖是數學的一部分，與數目却是毫無關係的。

對於數學現在尙不能下淸晰的定義，等以後講過許多材料方可。現在暫且下個簡單的定義，就是 用符號推論結果的，就叫作數學；於用不用數目無關，用着也不過是湊巧罷了 但是他們有共同的特點 (一)數學是精確的；(二)數學是一定的—無疑的，(三)研究數學的人，如他對於一部分靈敏，對於別的部分也靈敏，大約凡能用抽象符號靈敏的，對於數學各部都必靈敏。

在事實上，我們知道有很多種數學於數目是無關的。我們研究這些種學問時用數學邏輯。數學邏輯對於這些是很重要的，就像微積分對於平常的數學一樣。諸君學過數學的總都知道。許多東西，從前以爲是哲學上的問題，到現在變作數學上的問題了。這些問題幾千年來沒有結果，現在用數學的方法他們也就有了一定的結果。如原先想說明物理的實體 (Entity)，但在哲學上對於物質，時間，

空間，等 問題都沒有講出什麼結果來 現在知道這些問題非用數學的方法來研究不成，所以他們就變作數學邏輯中的問題了，也就有了一定的結果。

我以前說過，凡純粹的數學全可由幾個純粹論理的自理或假定中推出 我現在要加個說明 在純粹數學中，不能有指出來的東西，全是用普通符號—如x，y，等 —來講，至於他指的是什麼東西，全可不問；並且能用實驗證明或否證的東西也不包括在內。如「二直線不能包含空間」不是純粹數學中的命題，並且是很不通的一個命題 (因為直線沒有完美的定義，就是我們用光線來作直線的定義，現在我們知道光綫受引力的影響也要變作曲的。) 要證明或否證他，在理論上很難的。純粹數學中不能有這樣的命題。

我們研究數學邏輯時，必須除去別特指出的東西或事情來 如『見下雨，我就想傘；現在我不想傘，所以沒下雨』—在數學上我們以p為「下雨」，q為『想雨傘』，我們只說：「假如p，就q。現在不q，所以沒p』在數學中，只講符號，不管他指的是什麼。也只用變量，用些無定義的字母—如x，y，z，—來代表他，依着幾個假定研究他們，也不問他們真不真。所以我有時給數學下了

個定義，數學的仇人聽見許是歡喜的，這定義是 研究數學的人不知道他們說的是什麼，也不知道所說的對不對。

我們既知道純粹數學可以從幾個自理或假定中推出他的全部來，所以這推論的方法是很緊要的。命題q可從命題p中推出，如知道p是對的，並且如果p對q就對。我們知道這個，如知道不是p錯誤了，q便是對的。這個叫作『假使p，就是q；』『或』p包含q』

『假使p，就是q』這句話是p，與q的函件（Fun ti n），叫作『命題函件』（Propositio l Fun tion）。在命題函件中，變項是一個或數個命題，就像在數學的函數中，變項是一個或數個數。在數學哲學中，命題函件是很緊要的。

如一命題函件的對不對，只依他所包函的命題之對不對而定，這個命題函件叫作『眞理函件』（Truth Fu ction）。試舉個非眞理函件來講明他，如『我相信p』是p的函件，但『我相信p』這命題的眞假不依p的眞假而定；因爲就是p是假的，我也可以相信他。所以『我相信p』不是個眞理函件

凡眞理的函件全可由一個眞理函件—不相容性(Incompatibility)，就是兩個

不能同時對—中得出　如p和q不相容，我們用符號

p/q

來表示他　所以p/q的意義是p和q不能同時對，就是或者p是錯的或者q是錯的。從這函件中可以推出別的函件來。如

(一) p/p。這式的意義是　或者p是錯的，或者p是錯的。所以他就表明p是錯的『p是錯的』或『非p』這種關係，我們用符號(~)表示他。所以

$\sim p$ = 非p（p是不對的）= p/p Df.

(Df. = Definition 在這地方的意義就是$\sim p$的定義是p/p)

(二) $(p/p)/(q/q)$　這式的意義是p或q是對的，就是p和q不能同時錯　用符號表示他

$p\ q = (p/p)/(q/q)$ Df.

pvq 是p和q『邏輯的和』(Logi al Sum)

(三) $(p/q)/(p/q) = \sim(p/q)$ = 非 $-(p/q)$ = p同q

所以這式的意義是p和q全是對的　用簡單的符號表示他

$$p \quad q = (p/q)/(p/q) \ \mathrm{Df.}$$

p　q是p和q『邏輯的積』(Logic l Sum)。

現在可以看出符號的用處。如沒有符號，平常說　『今天是星期二，明天是星期三。』在邏輯上須說　『或者今天不是星期二，或者明天不是星期三，和或者今天不是星期二或者明天不是星期三不相容。』這是很費力，並且很不易了解。

(四)　$p/(q/q)$。這式的意義是　p和非q不相容；就是或者p是錯的，或者非q是錯的；也就是或者p是錯的，或者q是對的　所以

p/(q/q) = 非p或q = 如果p,就是q

= p包含q (p implie　q)，

用符號表示

$$p \cup q = p/(q/q) \ \mathrm{Df}$$

(五)　p/(q/　) = p包含q和

這式的意思很明瞭，我就不再說了

研究數學邏輯時，須用幾個原理推論出別的來　現在我們有六個推論的原理(Deductive Pri cipl) 如下

前五個是形式的原理(Form l Pri ipl)，

(一) p p ⊃ p

就是p或p包含p

(二) q ⊃ p q

就是如果q，就p或q

(三) p v q ⊃ q v p

就是如p或q，就q或p

(四) p (q r) ⊃ q (p)

(五) (q ⊃) ⊃ (p q ⊃ p)

如果q包含 ，然後p或q就包含p或r。

尼寇得 (M. Nic d) 說這五個形式的原理可以用一個形式的原理包住　這個形式的原理如下：

有五個命題。p，q，r，　，t

令　$P=p/(q/r)$（p包含q和　），

$\pi=t/(t/t)$（t包含他自己），

$R=(p/\ )/(p/s)$（p和　），

$Q=(s/q)/R$（p和　包含　和q），

然後　$P/(\pi/Q)$（P包含π和Q）。

此外有一非形式的定律，也是尼寇得的

（六）如我們知道p是對的，並且知道p包含q，那麼我們就可以說q是對的

用以上的符號，論理學上的原則可以表出。如

矛盾定律（Law of C nt di tio ），p和非p不能同時存在，就是

$\sim(p\ \ \sim p)=p/(p/p).$

無中項定律（L w of Ex l ded Middl ）或是p，或是非p，就是

$p\ \ \sim p=(p/p)/[(p/p)/(p/p)]=(p/p)/p$

我們知道這二定律的意義是一樣的

三段論法（Syllogism）用符號表示，如下

$(p \supset q)\cdot(q \supset\ )\supset(p \supset\ )$

第二次

〔在此次講演前，先由趙元任先生講這次所用的符號，—代替括弧的符號

因爲括弧太繁，也不適宜，所以用一點（·）代（ ），二點（:）代〔 〕，三點（∴）代｛ ｝，

等 如

$4 - \{[(2+3)\ \ (3+5) - 12] \div 5\}$

用新符號寫，應爲

$4 \therefore -\ :\ 2+3\ \ \ 3+5\ -\ :\ 12\ ..\ \div\ ..\ 5$〕

兩個眞理函件叫作等值的（Equivale t），如這個對，那個就對，這個錯，

那個便錯 等值（Equival n ）的關係，我們用平常符號（≡）表之 所以

$(p \equiv q) = (p \supset q)\ \ (q \supset p)$

等值有三種性質

(一)反射(Reflexiveness) 就是

$p \equiv p.$

(二)對稱 (Symmet y) 卽

$p \equiv q \supset q \equiv p$

(三)跳項 (Tr n itiv) 卽

$p \equiv q \quad q \equiv r. \supset. p \equiv r.$

第二種性質和第三種性質是獨立的，彼此無關的 如

$a > b, \quad b > c$

然後 $a >$,

所以是跳項的；但不是對稱的，因爲

$a > b$

然後 $b > a$

是不對的 如a不像b，然後b就不像a；所以『不像』是對稱的，但不是跳項的，因爲如a不像b，b不像c，我們不能說a就不像c 第一種性質和第二種第

三種是有關係的。如第二種及第三種性質存在，第一種性質便存在。

數學邏輯中的等值和平常數學中相等(Equality)相當。但在數學邏輯中

$$p \equiv p \vee p$$

$$p \equiv p\ \ p.$$

我們知道在平常代數中

$$x = x + x, \qquad x =$$

是不對的。所以邏輯的代數（Logi l Alg bra）是非數目的（N n-nume i l）和平常數目的代數是不同的。

在邏輯的代數中也有幾個定律和平常代數中的定律相當的

(一)互換定律(Commut ti L w)

$$p \vee q \cdot \equiv q\ \ p$$

$$p \cdot q \equiv q\ \ p.$$

和平常代數中的互換定律

$$p + q = q + p \quad p \quad q = q \quad p$$

是一樣的。

(二)聯合定律(As iative L w)

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \quad q)$

$p \quad (q \quad r) \equiv (p \quad q) \quad r.$

這定律和平常代數中的定律是相同的。

(三)分配定律(Distributive L w) 這定律有二式，一式和平常代數中相同的，如下

$p \quad (q \quad r) : \equiv : p \quad q \qquad p$

在平常代數中爲

$x(y+z) = xy + \quad z.$

一式在平常代數中是不對的

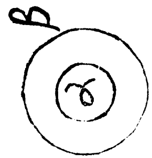
$p \qquad q \quad : \equiv : (p \quad q) \quad (p \quad)$

我們知道 $x + (y \quad z) = (x+y) \quad (x + \quad)$

在平常代數中是不對的

現在講『組的邏輯』(L gi f Cl)

以後凡組皆用希臘字母—α，β，γ，…代表 先講用的幾種符號

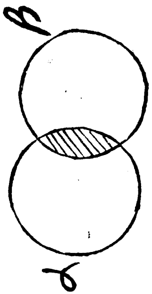


第 如圖中 組完全在β組之中α這個關係用符號

一 ($\subset$)表示他，就是

圖 $\alpha \subset \beta$ = 凡α的組員(M mb)全是β的組員

組的乘法



第 $\alpha \cap \beta = \alpha$和$\beta$共同的部分 如第二圖中描陰影的部分

二 組的加法

圖 $\alpha \cup \beta = \alpha$與$\beta$的和.

令 $\chi \varepsilon \alpha = \chi$是$\alpha$的一個組員

從以上各符號的定義上，我們得

$$\alpha \subset \beta \,:\supset:\, \chi \varepsilon \alpha \supset \chi \varepsilon \beta$$

$$\chi \varepsilon (\alpha \cap \beta) \equiv \chi \varepsilon \alpha \quad \chi \varepsilon \beta$$

$$\chi \varepsilon (\alpha \cup \beta) \,:\equiv:\, \chi \varepsilon \alpha \vee \chi \varepsilon \beta$$

由此知道組的邏輯中的符號(⊂)，(⋂)，(⋃)，和以前所講的符號(⊃)，(　)，(∨)有一定的關係

負組(Negative Cla s)。凡一組外的事物合成的組叫作此組的負組　負組和命題邏輯中否定命題相當，用符號(一)表示他。所以

$$-\alpha = 非\alpha$$

$$x \varepsilon -\alpha = \sim(x \varepsilon \alpha)$$ (—)和(∼)的關係

$$\alpha - \beta = \alpha \cap -\beta \ \mathrm{Df}$$

$$x \sim \varepsilon\, \alpha = \sim(x \varepsilon \alpha) \ \mathrm{Df}$$

組可分為三種

(一)無組員的組，叫作零組(Null Cl　)，用∧表之　例如，除2以外所有偶質數所成的組。

(二)一組中有些個組員，但不是全宇宙的東西都在內，叫作存在組(Exi ting Cl ss)　這種組用∃表示他。例如，包含所有質數的組。

(三)包含全宇宙的組叫作宇宙組(Universal Class)，用∨表示他　例如，

包含所有和他自己相等的東西的組

相等(Ide tity)的定義

$\alpha = \beta \equiv . \alpha \subset \beta \quad \beta \subset \alpha \quad \text{Df}$

相等和以前講的等值相當

從這定義中我們知道

$\wedge = -\vee$

$\vee = -\wedge$

令 $\exists ! \alpha = \alpha$ 至少有一個組員 就是 $\sim(\alpha = \wedge)$

我們得以下的命題

$\alpha \cap \beta = \wedge$ 沒有 α 的組員是 β 的組員

$\exists ! \alpha \cap \beta$ 有些 α 的組員是 β 的組員.

$\exists ! \alpha - \beta =$ 有些 α 的組員不是 β 的組員.

這三個和

$\alpha \subset \beta =$ 所有 α 的組員全是 β 的組員

在以前以為是組的邏輯中最大四個命題，可以包括組的邏輯全部 現在方知道有許多東西是在他們以外的。

現在我們講幾個三段論法

$\alpha \subset \beta \quad \beta \subset \gamma \quad \supset \quad \alpha \subset \gamma$

同

$p \supset q \quad q \subset r \quad \supset . p \supset r$

相當 所以($\supset$)在組的邏輯中和($\subset$)在命題邏輯中都是跳項的

$\alpha \subset \beta \quad \exists ! \alpha \cap \gamma \quad \supset \quad \exists ! \beta \cap \gamma$

$\alpha \subset \beta \quad \exists ! \alpha - \gamma \quad \supset \quad \exists ! \beta - \gamma$

$\alpha \subset \beta \quad \beta \cap \gamma \quad \Lambda \quad \supset \quad \alpha \cap \gamma = \Lambda$

我這筆記記的時候和整理的時候統是很草率的，恐怕要有許多錯誤 還望讀者諸君隨時指教

（記者識）

民國十年七月一日初版

物的分析附數理邏輯

定價大洋一角四分

講演者 羅素

記錄者 宗錫鈞 李小峯

發行者 北京惟一日報社

總發行所 北京惟一日報社 宣武門外香爐營頭條 電話南局一三四八號

分發行所
北京各大書坊 天津華洋公
論報 中美日報 上海民國
日報 國語日報 中國晚報
棋盤街羣益書社 寧波路
神州國光社 漢口 武漢商報
南昌第一中學校

羅素及勃拉克講演集

全集合訂二鉅册定價大洋一元三角

分訂本定價如下

哲學問題	四角
心的分析…	五角
物的分析附數理邏輯	一角四分
經濟影響下之政治思想附社會結構學	四角五分