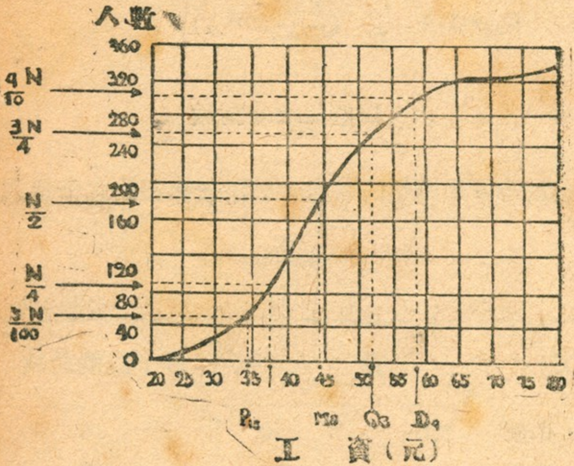
$$P_{23}=L+\frac{i}{f}\cdot\cdot\left(\frac{23N}{100}-F_{23}\right)$$

六、圖解法求分割數

分割數均可用圖解法求之，但限於等組距之分組次數數列。

工資（元）	人數	以下累積數數
2.0——2.5	6	6
2.5——3.0	16	22
3.0——3.5	34	56
3.5——4.0	61	117
4.0——4.5	66	183
4.5——5.0	57	240
5.0——5.5	37	277
5.5——6.0	28	305
6.0——6.5	9	314
6.5——7.0	6	320
7.0——7.5	8	328
7.5——8.0	8	336



步驟

(1) 作修勻累積次數曲線圖。

(2) 求分割數之次數地位

中位數之地位：$\frac{N}{2}=168$

下四分位數之地位：$\frac{N}{4}=84$

上四分位數之地位：$\frac{3N}{4}=252$

第九個十分位數之地位$\frac{9N}{10}=302.4$

第十五個百分位數之地位$\frac{15N}{100}=50.4$

(3) 在縱表尺上覓取分割數之次數地位，作線與 x 軸平行，與修勻累積次數曲線相交。

(4) 在各交點上作線垂直於x軸，與x軸之交點，卽所求之分割數。

觀圖：　$Md=4.4$

$Q_1=3.7$

$Q_2=5.2$

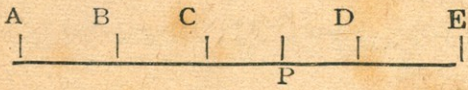
$D_9=5.9$

$D_{15}=3.4$

七、中位數之特質

中位數最重要之特質，爲與各量數的距離之和爲最小者。

今有A、B、C、D、E 五個兵站，若將電話交換機設在中位數處，則所需之電話線爲最小者，證之如下



中位數在C站。

電話線之和$=AC+BC+CD+CE$

若電話交換機改設在P處，則

電話線之和$=AP+BP+CP+PD+PE$

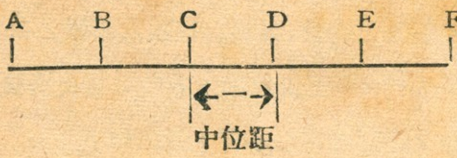
$=(AC+CP)+(BC+CP)+CP+(CD-CP)$

$+(CE-CP)$

$=AC+BC+CD+CE+CP$

故電話線較前多費CP之長度。

若兵站爲偶數（量數之項數爲偶數）則交換機設在當中之二站上或二站之間，所需線料，均屬最小限度。此二



站之間，謂之中位距。學者試自證在中位距上任意一點，與各兵站之距離爲最小。

八、中位數之優點與缺點。

優點：

1.中位數不受極端量數之影響，用中位數表示社會平均財富，不因有萬貫家財者而使平均財富增加。

2.中位數確定方法簡易，只須計算項數，即可求得。

3.極端量數不確定者，欲求平均數以爲代表，最好求中位數。

4.不可測量之統計事項，如品質資料，亦可求中位數。

缺點：

1.中位數有時不能代表一數列，例如調查所得兩羣人數相等之工人，一羣月入工資在10元與20元之間，一羣則在30元與40元之間，中位數，必在20元與30元之間，但事實上20元與30元之間，全無一人。故中位數之應用，限於量數相當集中之數列，少數極端量數無甚影響者。

2.欲與極端量數以較大之比重時，中位數不適用。

3.中位數有時亦爲抽象數目，與實際不符。

4.計算方法雖簡，而無一定數學公式可資遵循。

第四節　衆數

一、衆數之意義

衆數亦稱範數。在分組次數表或簡單次數表上，次數發現最多之量數或數値，即爲衆數。或謂衆數乃最密集的地位，或謂衆數乃最顯著的數値。若將次數分配表繪諸圖上，以修勻之連續曲線表示次數分配之情形，則與最大縱坐標相應對之橫坐標，即衆數也。

例如戶口調查，若戶量爲四人之戶數最多，則四人即戶量分配之衆數，而此等家庭謂之代表家庭。又衆數不必爲數値，現象中發現最常之情形亦爲衆數。如某處死亡病因以痢疾爲最多，則痢疾亦爲衆數，謂之流行症；如某時期以盛錫福之呢帽最通行，則盛錫福呢帽爲衆數，或稱最時行的呢帽。

吾人尋常好言「普通甚麼」，如普通人，普通公務員，普通工人，普通食物，普通香煙等等。普通者，最常見之意也，而最常見之情形即衆數也。就知識程度言，普通人均爲小學程度；就薪俸言，普通公務員均在百元左右；就工資言，普通工人均在二十元左右；就種類言，普通食物爲米；就

牌號言，普通香煙爲白金龍；則凡此小學程度，百元二十元一米，白金龍均衆數也。

二、決定衆數之方法

甲、觀察法

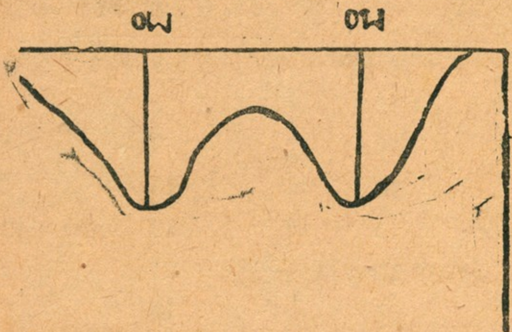
衆數旣爲最常見之量數或情形，吾人只須將資料分類分組，作成次數分配表，即可由觀察而得衆數。

年齡	學生人數
總計	109
12	1
13	3
14	15
15	30
16	21
17	14
18	9
19	8
20	4
21	2
22	2

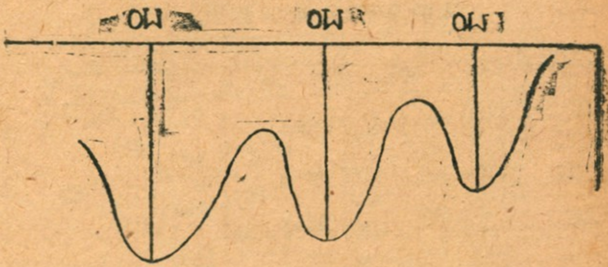
由上表觀之、由12歲起人數漸增，至15歲，登峯造極，得30

人，16歲以上之人數又漸減，則15歲卽衆數也。

統計資料如不同質，則其數列常呈多衆數之數列，而其曲線則爲多峯曲綫，如技術截然不同之兩羣工人，混合調查，最普通之熟練工人工資爲50元，而最普通之粗工工資爲15元，則50元與15元均爲衆數，其曲綫成下圖形式：



又如某大學有附中附小，三者之學生，並非按步升級而係限制年齡各自招考者，則其學生之混合年齡分配，或將成爲三峯曲線，則呈下圖形式：



可見不同質之統計資料，可以有多個衆數，分別代表其羣性，反之，若統計數列有多個衆數，亦可反證其資料大概爲不同質。

乙、繼續併組法

資料縱爲同質，有時因組距不夠大，而呈多峯曲綫，此時應採用繼續併組法以決定衆數。

觀下表，自第二行向下讀之，可見人數漸增，至685 乃達最高點，自此以下，雖時多時少，但無有過685 者。但在此行共有14個最大値，數目之增減，殊無規律。是則有14個衆數，（最大縱坐標相應之橫坐標）惟在 1.15——1.24 組之衆數最爲顯著耳。若吾人擴大組距，繼續併組，則可以求得較爲正確之衆數。

歸併階組決定衆數法

工資率	工人人							
	一組	二箇組		三箇組			五箇組	
.25—.34	1	16		75			340	
.35—.44	15		74		154			
.45—.54	59	144				301		725
.55—.64	85		242	355				
.65—.74	157	270			439			
.75—.84	113		282			483	1472	
.85—.94	169	370		674				
.95—1.04	201		505		1190			2012
1.05—1.14	304	989				1088		
1.15—1.24	685		784	1242				
1.25—1.34	99	557			1023		1397	
1.35—1.44	458		925			496		
1.45—1.54	466	538		740				934
1.55—1.64	72		274		603			
1.65—1.74	202	531				587		
1.75—1.84	329		389	660			990	
1.85—1.94	60	373			396			
1.95—2.04	313		418			583		640
2.05—2.14	45	310		343				
2.15—2.24	265		298		399			
2.25—2.34	33	134				330	806	
2.35—2.44	101		243	380				
2.45—2.54	108	209			372			322
2.55—2.64	13		176			98		
2.65—2.74	163	165		180				
2.75—2.84	2		47		146		188	
2.85—2.94	15	144				147		
2.95—3.04	129		134	181				85
3.05—3.14	5	52			64			
3.15—3.24	47		59			57		
3.25—3.34	19	19		233			254	
3.35—3.44	0		231		226			
3.45—3.54	221	226				242		113
3.55—3.64	5		21	32				
3.65—3.74	16	27			27			
3.75—3.84	11		11			93	96	
3.85—3.94	0	82		82				
3.95—4.04	82		32		85			6
4.05—4.14	0	3				1		
4.15—4.24	3		3	3				
4.25—4.34	0	0			3		6	
4.35—4.44	0		3			4		
4.45—4.54	3	4		4				9
4.55—4.64	1		1		1			
4.65—4.74	0	0				0		
4.75—4.84	0		0	8			8	
4.85—4.94	0	8			6			
4.95—5.04	8		8			8		
5.05—5.14	0	0		1				
5.15—5.24	0		1					
5.25—5.34	1	1						

見 BOWLEY ELEMENTS OF STATISTICS p.97

在一角組，衆數甚不確定，已如前述。今從.25—.44組起，作二角分組，則人數為16,144,270,370,989,557,538,531,等等，在1.05—1.24組間之989為最大者：若二角併組從.35—.54起，則人數為74,242,282,505,784,924,274等等，最大人數924在1.35—1.54組，是故二角組不能決定衆數之所在。今再作三角併組，若從.55—.84起、則有355,674,1242(1.15—1.44),740等；若從.65—.94起,則有439,1190(.95—1.24),1093等若從.75—1.04起，則有433,1088(1.05—1.34),996等,在此併組程序中，所有衆數之所在組均包括1.15—1.24一組，故可想定衆數為1.20或近於此數，雖不中不遠矣。

繼續併組法，可撮述如下：將資料之表列，繼續擴大組距，直至有一定規律或成單峯數列為止；觀察最顯著之衆數所有組為何；若組限變更，而衆數移動(如上述之二角組)，則組距仍不夠大；若組限變更，則衆數並不移動，則衆數即在各大組(如上述之1.15—1.44,.95—1.24,1.05—1.34)所包含之最小組(如上述之1.15—1.24)中。

丙、插補法

有時雖則資料同質，分配甚有規律，亦不易精密決定衆數。試觀下表：

年齡	人數
18——20	3
20——22	30
22——24	43
24——26	21
26——28	17
28——30	5
30——32	1
32——34	——
34——36	1

雖則知衆數必在22—24—組，但究在何處，無由決定。在此種情形，通常用插補法決定之。卽取衆數所在組之上下兩組的次數，以爲決定之因素。假定上下兩組，對於衆數之牽引力，與其次數成比例，次數多者牽引力大。故上表之衆數爲

$$Mo=22+2\times\frac{21}{30+21}$$

$$=22+\frac{42}{51}$$

$$=22.8$$

或 $$Mo=24-2\times\frac{30}{30+21}$$

$$=24-\frac{90}{51}$$

$$=22.8$$

寫成公式卽爲 $Mo=L+i\times\frac{f_2}{f_1+f_2}$

或 $Mo=U-i\times\frac{f_2}{f_1+f_2}$

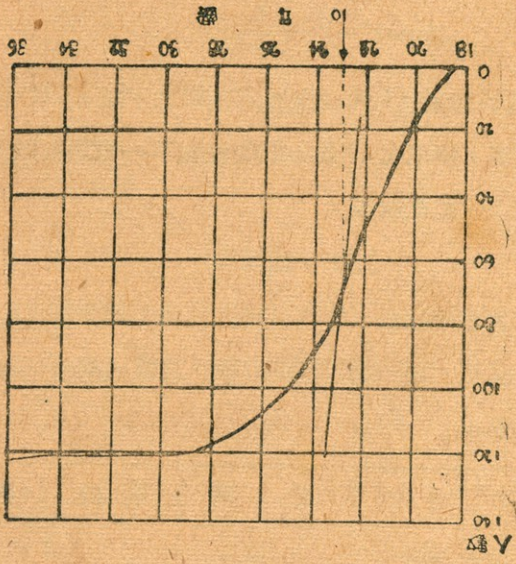
其中Mo代表衆數，L代表衆數所在組之下限，U代表衆數所在組之上限，i爲組距，f 爲衆數所在組下一組之次數，f_2爲衆數所在組上一組之組限。

丁、圖解法

若將次數分配表，作成累積次數圖，則曲線之轉點，卽爲衆數之所在，用一直尺以觸曲線，當直尺剛巧切斷曲線之點，卽轉點也。

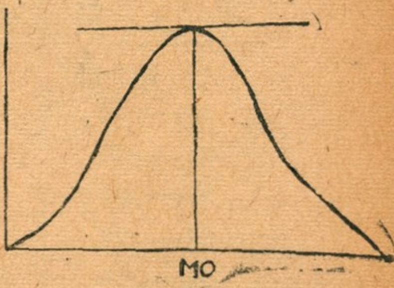
年　　齡	人　數	累積次數
18——20	3	3
20——22	30	33

22——24	43	76
24——26	21	97
26——28	17	114
28——30	5	119
30——32	1	120
32——34		120
34——36	1	121



由上圖可知衆數在二十三歲附近，而不及二十三歲，吾人即可大略謂衆數在二十三歲。

或作修勻次數分配圖，其最大縱坐標相應之橫坐標，亦卽衆數之所在。



戊、皮爾生估計法

依皮爾生式之經驗，在「略不對稱」的次數曲線上，算術平均數與衆數的距離，大約等於算術平均數與中位數的距離之三倍，卽

$$M-Mo=3(M-Md)$$

$$Mo=M-3(M-Md)$$

所以假定（一）統計資料是略不對稱的次數分配，並且（二）算術平均數和中位數早已求得，卽可用上列公式，估計衆數之數值。但不具備上列第一條件，不可用此公式；不具備第二條件，大可不必求得算術平均數與中位數再來求衆數。

年齡	人數
總計	121
18——20	3
20——22	30
22——24	43
24——26	21
26——28	17
28——30	5
30——32	1
39——34	—
34——36	1

上表假定已經求得算術平均數(M)爲23.7,中位數(Md)爲23·3,則衆數可估計如下:

$$Mo = \times M - 3(M - Md)$$

$$= 23{\cdot}7 - 3(23{\cdot}7 - 23{\cdot}3)$$

$$2 = 3{\cdot}7 - 1{\cdot}2$$

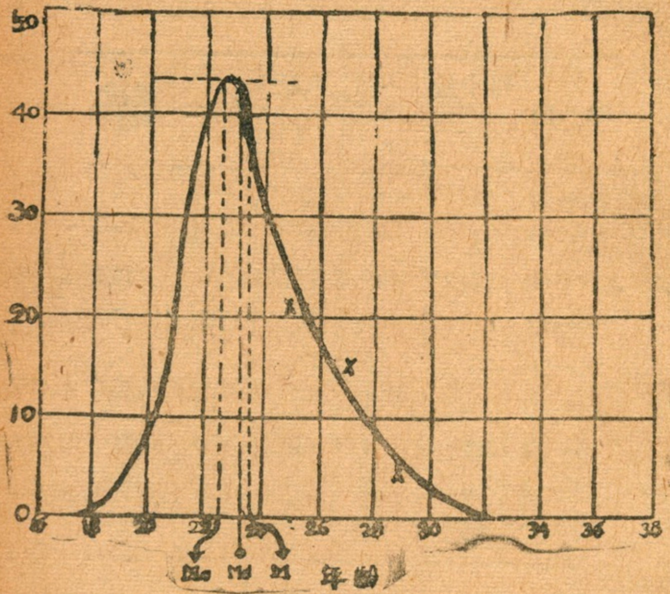
$$= 22{\cdot}5$$

「附」算術平均數與中位數

年 齡	組中值 X	$\frac{X-23}{2}$ x	人數 f	f x	累積次數
18—20	19	—2	3	—6	3
30—22	21	—1	30	—30	33(F)
Md→22—24	23(A)	0	43(f)	0	76 ← $\frac{11}{2}=60.5$
24—26	25	1	21	21	97
26—28	27	2	17	34	114
28—30	29	3	5	15	119
30—32	31	4	1	4	120
32—34	33	5	—	0	120
34—36	35	6	1	6	121
總 計	×	×	121	44	×

$$M=A+\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\times i=23+\frac{44}{121}\times 2=23+.7=23.7$$

$$M=L+\frac{\frac{N}{2}-F.}{f}\times i=22+\frac{\frac{121}{2}-33}{43}\times=22+1.3=23.3,$$



年齡

三、衆數之重要性

吾人常聞「普通人」如何，「一般人」如何，「大多數人」如何，究竟作何解釋？如言普通工人，究竟指工資收入爲算術平均數者而言，抑係指其工資爲衆數者而言？尋常的意義，乃指工資收入爲衆數者。普通公務員，並非謂其某種可量品質（如薪給，年齡）爲全體之算術平均數，而係謂此種

品質可以找得最大多數之相同者。列如普通公務員，公餘之暇，多閱覽報紙，而不讀古文；多觀電影而不聽音樂；月薪多爲百元之譜；住宅多在所在機關附近等。但所謂「普通人「仍非眞有其人，僅就某種徵性，擧其共同之點而言耳。平均數之所以能代表現象，蓋因其具有概括事物之抽象觀念。

在衆數上，吾人可以找出大多數之人，所謂謀大多數人之幸福，即此等人之幸福。而算術平均數與中位數，則不免遠離實際，僅爲一數字觀念。惟有衆數方可找得最大多數之實例。衆數表示最常見之事物，獲得最多之例證，其應用亦極其普遍。成衣發售之衣商，須知身材之衆數，而非算術平均數；某處將設立一郵局，須知郵件之衆數，某人擬開設日用品商店，須知日用品之衆數，而非其他任何平均數。諸如此類，衆數均異常明確，而毫無決定之煩者。

四、衆數之優點與缺點

衆數之最大特點，亦其最大優點，即絕不受極端量數之影響。某生成績爲零分，與算術平均數以極大之影響，而與衆數無涉。某國萬貫家財者少數，而衣食不周者千千萬萬，又一國人民均屬小康之家，兩者之平均財富，就算術平均而

言，或者大致相同，但就衆數而言，則不免大相逕庭。研究歷年之國民生活，在算術平均數，吾人僅可抽象說明一般生活程度之提高；而用衆數，則可指出大多數人生活之改善程度。Booth 之 ''London ,, 一書，卽充分運用衆數者。每項職業，指出年齡分配之衆數；各業工貲，指出工貲之衆數。其描述現代域市之產業工人，卽以衆數爲準繩。總之，衆數之最大優點，在於忽視特異之事項，而取其普通事項。此外，衆數之決定，無庸知道極大極小之量數，只須知道最大多數之量數，卽可決定；且謂平均戶量爲每家4.23人，遠不如謂大多數之家庭爲四口之家；又不可測量之品質，亦可取衆數爲其代表。

衆數之缺點，卽若干統計數列不可應用。若統計數列，並無典型可尋，而爲一羣不規則之數目，則衆數無由決定。衆數之爲用，原在指示典型，離此典型之數字，則可視爲另有原因，例如工資衆數爲二十元，其過與不及者，或由於機會有優劣，技術有精粗。苟統計數列所表現之事實，果有典型存在，則衆數必可指出之，惟衆數對於代表統計事實，只能指出典型之所在，欲表現其他徵性，自須藉助於其他統計

常數也。

第五節　幾何平均數

一、簡單幾何平均

設有 n 個量數

$$X_1, X_2, \cdots\cdots \cdots Xn,$$

則其幾何平均數G之公式如下：

$$G = \sqrt[n]{X_1 \quad X_2 \cdots\cdots\cdots\cdots Xn}$$

惟開 n 次方，事實上不可能，須利用對數求之：

$$\log G = \frac{1}{n}(\log X_1 + \log X_2 \cdots\cdots + \log Xn) = \frac{1}{n}\Sigma \log X$$

幾何平均數恆小於算術平均數，而大於倒數平均數。

若平均數着重於量數間的比率關係，而非注重其間之絕對差數，則應選擇幾何平均數。例如若 8 與13的相差，其重要性恰和13與18的相差相同，則 8 與18的平均數，應爲

$$M = \frac{8+18}{2} = 13$$

但若 8 與12的比率，如同12與18的比率一樣重要，則 8 與18的平均數應爲

$$G=\sqrt{8\times 18}=\sqrt{144}=12。$$

今設有五個量數，X_1, X_2, X_3, X_4, X_5，其中X_1與X_2小於算術平均數M，亦小於幾何平均數G，而X_3，X_4，X_5，大於M，亦大於G，則

$$M=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}$$

或 $$5M=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$$

$$\underline{(M-X_1)+(M-X_2)=(X_3-M)+(X_4-M)+(X_5-M)};$$

$$G=\sqrt[5]{X_1\times X_2\times X_3\times X_4\times X_5}$$

或 $$G^5=X_1\times X_2\times X_3\times X_4\times X_5$$

$$\frac{G}{X_1}\times\frac{G}{X_2}=\frac{X_3}{G}\times\frac{X_4}{G}\times\frac{X_5}{G}$$

可見在算術平均數，各較小量數之所不及平均數者，恰等於各較大量數之所過者；而在幾何平均數，則平均數與各較小量數之比的乘積，恰等於各較大量數與平均數之比的乘積。一重差數，一重比率，彰彰明甚。

二、加權幾何平均

若各量數並非同等重要，則當分別重輕，各與以大小不

同之權數，設量數及其權數（或次數）如下：

量數	X_1	X_2	‥‥	Xn
權數	w_1	w_2	‥‥	w_n
（次數	f_1	f_2	‥‥	fn）

則加權幾何平均數Gw之公式如下：

$$G_w = \sqrt[\Sigma w]{X_1^{w_1} \quad X_1^{w_2} \cdots\cdots Xn^{w_n}}$$

或 $$\log G_w = \frac{1}{\Sigma w}(w_1 \log X_1 + w_2 \log X_2 + w_n \log Xn$$

$$= \frac{1}{\Sigma w} \Sigma w \log X$$

或 $$\log G_w = \frac{1}{\Sigma f}(f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + \cdots\cdots + fn \log Xn)$$

$$= \frac{1}{\Sigma f} \Sigma f \log X$$

幾何平均數除兩項之簡單幾何平均（開平方）外必須運用對數計算。

三、幾何平均數之應用

甲、計算物價指數

幾何平均數最重要之用途，厥爲計算物價指數。因爲物

價指數從100漲到120，其增漲程度恰與從120漲到144樣同，

$$\frac{120}{100}=1.2=\frac{144}{120}$$

而並不與120漲到140一樣。Jcvons最初引用幾何平均數，以計算物價指數，蓋由此也。

譬如米每石由50元漲到55元，吾人並不甚感覺，而木炭每担由5元漲至10元，則以爲物價飛騰，同是漲5元，何以感覺不同，蓋因前漲者10%，而後者則增100%也。同理，肉價每斤由5角漲至6角，遠不若由2角漲至3角之重要，雖均爲增漲一角而程度則大不相同也。

某地簡易零售物價指數計算表

（二十九年八月）

民國二十六年＝100

商品	單位	基期物價 p_0	計算期物價 p_1	價比 $\frac{p_1}{p_0}\times100$	價比之對數 $\operatorname{Log}\left(\frac{p_1}{p_0}\times100\right)$
米	市升	.12	.40	333	2.5224
麵粉	市斤	.12	.55	458	2.6609
豆油	市斤	.20	.30	400	2.6021
食鹽	市斤	.15	.45	300	2.4771
猪肉	市斤	.22	.80	361	2.5611

木炭	市斤	.35	1.80	514	2.7110
白布	市尺	.14	90	643	2.3082
總計	×	×	×	×	18.3448

【註】基期物價爲民國二十六年之平均物價，計算期物價爲二十九年八月之平均物價

$$\log G=\frac{1}{n}\Sigma\log X=\frac{1}{n}\Sigma\log\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)$$

$$=\frac{1}{7}\times 18.3448=2.6204$$

G＝417(二十九年八月之簡易零售物價指數)

乙、其他用途

凡數量之增減，依比率升降者，求其平均數或增減率均應取幾何平均。假定我國人口之增殖率與日本相同，則我國增四千七百萬，日本只能增加七百萬。馬爾薩斯謂人口之增加依幾何級數，在太平盛世，若國民不用人爲方法節制生育，此說確爲不移之論。此外複利率及學生學力之計算，均須用幾何平均。

若以Po表示本數，n表示時期，Pn表示本數與增加數

之和，r表示增加率，則

$$Pn=Po(1+x)n$$ (由Po,n,r求Pn之公式)

$$Po=\frac{Pn}{(1+r)n}$$ (由Pn,n,r求Pn之公式)

$$n=\frac{\log Pn-\log Po}{\log(1+r)}$$ (由Po,Pn,r求n之公式

$$r=n\sqrt{\frac{Pn}{Po}}-1$$ (由Po,Pn,n求r之公式)

玆舉例如下：

(1)求Pn 某地民國元年年中有十萬人，設其增殖率爲每年1%，問民國二十九年年中之人口數爲若干？

$$Po=100,000，n=28，r=.01$$

$$Pn=Po(1+r)n$$

$$\log Pn=\log Po+n\log(1+r)$$

$$=\log 100,000+28\times\log(1.01)$$

$$=5+28\times.0043$$

$$=5.1204$$

$$\therefore Pn=132,000$$ (民國二十九年之人口)

(2)求Po 某地民國二十九年年中之人口數爲132,000

設已知其增殖率爲1%，問民國九年中之人口爲若干？

$$Pn=132{,}000,\ n=20,\ r=.01$$

$$Po=\frac{Pn}{(1+r)n}$$

$$\log Po=\log Pn-n\log(1+r)$$

$$=\log 132{,}000-20\log(1.01)$$

$$=5.120-20\times.0043$$

$$=5.0344$$

$\therefore$ 　$Po=108{,}250$(民國九年的人口)

(8)求 n 某地民國十年之人口數爲 109,330，設其增殖率爲1%，問幾年後之人口將增至120,700？

$$Po=109{,}330,\ Po=120{,}700,\ r=.01$$

$$n=\frac{\log Pn-\log Po}{\log(1+r)}$$

$$=\frac{\log 120.700-\log 109{,}330}{\log(1\cdot 01)}$$

$$=\frac{5.0817-5.0387}{\cdot 0043}$$

$$=\frac{.0430}{\cdot 0043}$$

$= 10$ （民國二十年）

（4）求 r 某地民國六年之人口數爲105,070，至民國二十六年增至128,100，問其平均增殖率爲幾何？

$$Po = 105{,}070, \quad Pn = 128{,}100, \quad n = 20$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{Pn}{Po}} - 1$$

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{Pn}{Po}}$$

$$\log(1+r) = \frac{1}{n}(\log Pn - \log Po)$$

$$= \frac{1}{20} \times (\log 128{,}100 - \log 105{,}070)$$

$$= \frac{1}{20}(5.1077 - 5.0215)$$

$$= \frac{1}{20} \times .0860$$

$$= .0043$$

$$\therefore 1 + r = 1.01$$

$$\therefore r = .01 = 1\%$$

x複利率計算法可仿以上各例，Po爲本金，Pn爲本利和

,r 爲複利率，n 爲年數。

第六節　倒數平均數

倒數平均數　H爲各量數的倒數的算術平均數的倒數。

各量數：　$X_1 . X_2, \quad \cdots\cdots X_n$

各量數的倒數：　$\frac{1}{X_1}, \frac{1}{X_2}, \cdots\cdots \frac{1}{X_n}$

各數量的倒數的算術平均數 $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\cdots+\frac{1}{X_n}\right)=\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{X}$

各量數的倒數的算術平均數的倒數，卽倒數平均數

$$H=\frac{1}{\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{X}}=\frac{n}{\Sigma\frac{1}{X}}$$

若各量數各有其不同之次數或權數$f_1, f_2 \cdots\cdots\cdots\cdots f_n$　則

$$H=\frac{1}{\frac{1}{\Sigma f}\Sigma\frac{f}{X}}=\frac{\Sigma f}{\Sigma\frac{f}{X}}=\frac{n}{\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\cdots+\frac{1}{X_n}}$$

倒數關係之統計事項不多，故倒數平均數之應用有限通常用以求平均速率及有倒數關係之平均價格。舉例如下：

(1)某輪船溯江而上，先以每小時30里行60里，後以每

小時20里行60里(注意所行里數相同)，問其平均速率如何？

$$H=\frac{n}{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}}=\frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{20}}=\frac{2}{\frac{2+3}{60}}=\frac{120}{5}=24\text{里}$$

蓋因前後共費 5小時，行120里，故平均每小時行 24里。若用算術平均數 $M\frac{30+20}{2}=25$里，則錯矣。

若該輪船先以每小時30里行200 里，再以每小時20里行100 里，最後以每小時15里行50里，始達目的地，(注意各種速率所行里數不同)，問此段行程中平均速率幾何？

$$H=\frac{f_1+f_2+f_3}{\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\frac{f_3}{X_3}}=\frac{200\times 100+50}{\frac{200}{30}+\frac{100}{20}+\frac{50}{15}}$$

$$=\frac{4+2+1}{\frac{4}{30}+\frac{2}{20}+\frac{1}{15}}=\frac{7}{\frac{8+6+4}{60}}=\frac{70}{3}=23\frac{1}{3}\text{里}$$

蓋因每小時30里行200里，費$6\frac{2}{3}$小時，每小時20里行100里，費5小時；每小時15里行50里，費$3\frac{1}{3}$時，前後費15小時，共行350 里，每小時速率自為$\frac{350}{15}=23\frac{1}{3}$里。

(2) 物價以「每元若干」表示者，平均價格應取倒數平均

數，因每元若干係爲倒數關係，其價格實際上應爲每件若干元（小數）。例如蛋價六月爲每元15個，七月爲每元12個，八月爲每元10個；假定三個月交易量大致相同（權數或次數相同）問三個月之平均蛋價如何？

$$H=\frac{n}{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}}=\frac{3}{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{\frac{4+5+6}{60}}=\frac{180}{15}=12$$

蓋因每元15個，則每個 $6\frac{2}{3}$ 分；每元12個，則每個 $8\frac{1}{3}$ 分；每元10個，則每個10分；平均價格自爲

$$\cdot\left(6\frac{2}{3}+8\frac{1}{3}+10\right)=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}\text{分}$$

每元當爲　$100\div 8\frac{1}{3}=\frac{300}{25}=12$ 個

若用算術平均謂平均每元爲 $\frac{15+12+10}{3}=\frac{37}{3}=12\frac{1}{3}$ 個，則錯矣。

今有某甲買肥皂三種，每元5 塊者10塊，每元四塊者12

塊，每元3塊者15塊問平均每元買肥皂幾塊？

$$H=\frac{f_1+f_2+f_3}{\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\frac{f_3}{X_3}}=\frac{10+12+15}{\frac{10}{5}+\frac{12}{4}+\frac{15}{3}}$$

$$=\frac{37}{2+3+5}=\frac{37}{10}=3\frac{7}{10}\text{塊。}$$

因某甲費去10元，買得肥皂37塊，平均每元自爲$3\frac{7}{10}$塊。

第七節　各種平均數之比較

一、如何選擇適用之平均數

由以上各節之討論，平均數之功用當甚明顯：卽在用少數之簡單數字，以表明複雜之數列。萬千量數，吾人之腦筋一時不能理解，必須加以歸類、化簡、平均。至於應選擇何種平均數，殊難一概而論：總以能表現統計事項之顯著特色與主要性質爲宜。而不同之數列往往須用不同之平均數表示之，大抵優良適當之平均數具備下列諸條件：

1. 倘有典型存在，必能表現之：
2. 與極端量數以應有的影響：
3. 不因計算方法不同而變更其數値，或移動其位置；

4.計算簡易。

各種平均數，均有長處與缺點，吾人當依分析之目的以及材料之性質，以决定究竟應擇取何種平均數：

1.若重視各量數之差數，欲取長補短，則用算術平均數。算術平均應否加權，須視各量數之重要性而定；又可否計算百分數或統計係數，亦須視材料而定。

2.為避免極端量數之影響，宜用中位數及衆數，若資料確屬同質，量數相當集中而目的在表示大多數之實際典型，則尤以衆數最為適合。

3.為比較多數複雜之數列，資料頗不同質，亦不甚集中，則可求十分位數，百分位數，十分級之算術平均數等以比較之。各組之百分數亦為良好之比較標準。

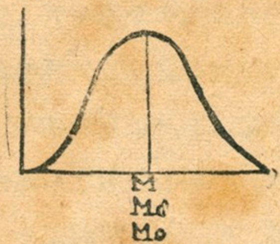
4.若注重量數間之比率，如物價之漲跌，人口之增殖，複利率之計算，學力之增進等，均宜用幾何平均數。

5.若各量數係以倒數關係表出者，如速率之言每小時若干里，物價之言每元若干件者，則當求倒數平均數。

二、各種平均數之關係

1.由算術平均數、中位數、衆數三者之地位，可略知統

計數列分配之梗概：若成對稱分配，則三者，合而爲一；



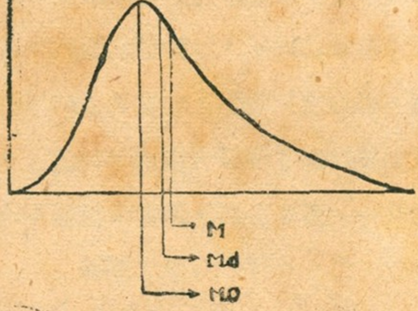
若量數集中於較小數值，而呈略不對稱之分配，則中位數大於衆數而小於算術平均數，且大略有

$$M-Mo=3(M-Md)$$

或

$$Mo=M-3(M-Md)$$

之關係；

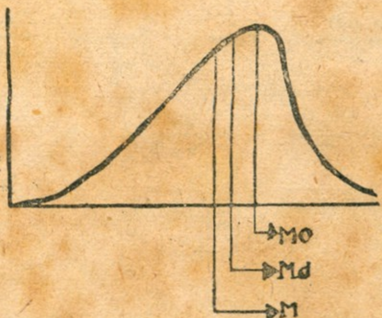


若量數集中於較大數值，而呈略不對稱之分配，則中位數小於衆數而大於算術平均數亦大略有

$Mo-M=3(Md-M)$　　（試與上面比較）

或　$Mo=M-3(M-Md)$

之關係；



若量數不同質，則衆數不確定，而成多峯分配。

2.算術平均數，幾何平均數，倒數平均數，可由數學公

式證明成下列關係

$$M>G>H.$$

證明方法頗煩，茲從略。

兩個量數之幾何平均數等於算術平均數與倒數平均數之乘積的幾何平均數，因

$$M=\frac{a+b}{2} \qquad H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$$

故 $$MH=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab,$$

$$\sqrt{MH}=\sqrt{ab}=G$$

例如4與9兩量數，

$$M=\frac{4+9}{2}=\frac{13}{2},H=\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{72}{13},G=\sqrt{4\times9}=6$$

而 $$6=\sqrt{\frac{13}{2}\times\frac{72}{13}}$$

故 $$G=\sqrt{MH}$$

且 $$M=\frac{13}{2}>\frac{12}{2}=6=G,H=\frac{72}{13}<\frac{72}{12}=6=G$$

故 $M>G>H$.

第六章　相差度

引　言

前章所論平均數，吾人專注意統計數列之中心位置或集中趨勢。所謂統計數列，乃指一羣人或事物具有若干徵性（如所屬之地域，發生之時間，賦有之屬性等），吾人按照其某一徵性（變量，如年齡），加以分類歸組，而按預定次序排列之。欲陳示此種數列，或則列之於表，或則繪之於圖，但爲化繁爲簡，並便於與其他數列比較起見，吾人須要確定或計算幾個數值，以顯明數列之徵性，此種數值吾人稱之曰表徵數，通常所取之表徵數如下：

1. 取一平均數，以定中心位置或表集中趨勢，此前章之目的也。
2. 取一相差度，以表示量數之分佈情形或離中趨勢，本章專述此點。
3. 取一偏斜度，以表示分配不對稱之程度。此項留待下章討論。

第一節　相差度之意義與種類

一、相差度之意義

甲乙兩國人民之平均財富相等，未必兩國之經濟生活相同，因甲國少數人腰横萬貫，大衆則地無立錐；而乙國或皆為中產之家，平均數只能表現取長補短，將全國私人財富集中以後再行平均分配與全體人民之情形。甲乙兩班學生平均成績相等，未必兩班學生之程度一模一樣，因甲班優秀者多而低劣者亦不少，乙班則均中庸發憤之流，扯長補短，兩班成績仍可相等也。今欲知甲乙二國貧富懸殊與分配均勻之情形，甲乙二班成績是否參差，惟有取另一表徵數以資測量，卽相差度是也。故相差度者表示各量數分布情形或離中程度之數量也。

二、相差度之種類

測量離中程度之相差度，通常用者有下列幾種：

1.全距　卽最大量數與最小量數之相差數。

$$Rg \;=(\text{最大量數})-(\text{最小量數})$$

2.四分位差　卽上下四分位數之距離之一半。

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

3.平均差　　卽各量數與平均數(M或Md,通常取Md)之離差之絕對值之算術平均數：

$$M.D.=\frac{\Sigma|d|}{N}\quad(d=X-Md,)$$

4.標準差　卽各量數對算術平均數之離差之平方之算術平均數的平方根：

$$Sd=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}\qquad(d=X-M)$$

5.均互差　卽各量數相互之差數之算術平均數：

$$g=\frac{S}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2S}{n(n-1)}$$,S爲相互差數之和。

三、相對相差度與離散係數

上述各種相差度，均用具體單位（如歲、斤、尺、升）表示，謂之絕對相差度。欲與性質不同之數列比較，則惟有引用相對相差度，卽用一比率以消滅具體單位。俗語謂「衣不長寸，鞋不長分」，蓋因衣本長，鞋本短，相差不得超

過某種比例也。若謂無論縫衣製帽作鞋，均不得有百分之三之差誤，則可以概括而言，無庸分別言其分寸之單位矣。相對相差度，可取下列幾種：

1.四分差度 $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \quad \left(\dfrac{\text{四分位差}}{\text{上下四分位數之平均數}}\right)$

2.平均差度 $= \dfrac{\text{M. D.}}{\text{Md}} \quad \left(\dfrac{\text{平均差}}{\text{中位數}}\right)$

3.標準差度 $= \dfrac{\text{Sd}}{\text{M}} \quad \left(\dfrac{\text{標準差}}{\text{算術平均數}}\right)$

惟通常所用之相對相差度，乃標準差對算術平均數之百分數，稱爲離散係數。

$$\text{C.V.} = \frac{100\text{Sd}}{\text{M}}$$

第二節　全距

全距爲表示差異情形最簡單之方法，亦爲最粗略之方法。在枚舉數列或簡單次數數列卽最大量數與最小量數之差數。例如某班學生年齡最長者爲35歲，最輕者爲19歲則全距爲

$$\text{Rg} = 35 - 19 = 16\text{歲；}$$

又如某班統計學成績最優者爲95分，最次者爲35分，則

$Rg=95-35=60$分。

在分組次數數列，全距爲最大組限與最小組限之差數，例如某班學生年齡分配最大組限爲 36 歲，最小組限爲18歲，則

$Rg=36-18=18$歲。

全距僅取兩極端量數以決定其數值，對於中間量數完全漠視，殊屬不當。例如某班學生僅有一生因害病甚久，致成績爲35分，其餘均在60分以上，遽謂該班成績參差不齊，甯有是理。又如某機關僅有主管人月薪600元，一二錄事月薪25元、其餘均在50—400元之間，乃謂該機關薪給全距爲575元，待遇懸殊，亦不足以表明眞象也。

全距之應用，通常在表示金融、證劵市場，每日價格之相差情形，讀者閱報卽可見某日外匯最高幾何，最低若干，兩者相減，卽可得是日價格變動之全距。至於稍稍精密之統計分析，未有用全距以作相差度者。

第三節　四分位差(附十分位差，百分位差)

上下四分位數之差數以及其他配對之分割數（如第一個

與第九個十分位數，第三個與第七個十分位數，第二十五個與第七十五個百分位數等）之差數，自與離中程度有關。惟無論數列分配情形如何，上下四分位數之間及其外之分配情形如何，只須四分位數相等，則所得四分位差相等，是其缺點。是故此種相差度亦頗不靈敏，惟在粗略之分析上，仍不失爲簡單明瞭之相差度，故用之者仍甚多。

四分位差乃上下四分位數相差數之半，約略與概差相等。

四分位差之求法，只須求得四分位數，代入公式卽得

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

四分位數之求法，見第五章第三節。

	年　齡	人　數	累積次數	
	18－20	3	32$F_1$2	
$Q_1 \longrightarrow$	20－22	30	33 $\rightarrow$	$\frac{121}{4}=30\frac{1}{4}$
	22－24	43	76，F_3，	
$Q_3 \longrightarrow$	24－26	21	97 $\rightarrow$	$\frac{3\times121}{4}=90\frac{3}{4}$
	24－28	17	114	
	28－30	5	119	

30－32	1	120
32－34	－	120
34－36	1	121

$$Q_1=L+\frac{\frac{N}{4}-F_1}{f}\times i=20+\frac{30\frac{1}{4}-3}{30}\times 2=21.82$$

$$Q_3=L+\frac{\frac{3N}{4}-F_3}{f}\times i=24+\frac{90\frac{3}{4}-76}{21}\times 2=25.490$$

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{25.40-21.82}{2}=1.79$$

$$\text{四分差度}=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}=\frac{25.40-21.82}{47.22}=0.079 \quad 0.076$$

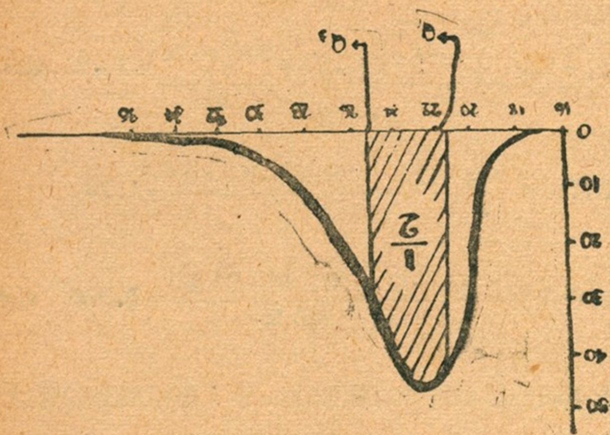
上下四分位數之間有次數之一半，而兩四分位數之中點為½（25.4＋21.8）＝23,6則上下兩四分位數必為

23.6±1.8

故吾人描述上表統計數列，可一言以蔽之曰：某班學生齡年之中位數為23.3歲（或算術平均數為23•7歲亦可）並有

一半學生在23.6±1.8歲之間。集中及離中情形均已表現，遂可與同類性質之數列相比較矣。若欲與不同性質之數列比較，則謂四分差度為.076或四分差離散係數為7.6%可也。

在對稱分配中，M.Md與M_o三者合一，而四分位差Q.D.與概差P·E·相等。



第四節 平均差

統計數列各量數對某平均數或其他定點之差數謂之離差

。離差之絕對值(|d|)之算術平均數即平均差。

一、枚舉數列之平均差

今有五人其年齡如下：　21,22,23,26,28

$$Md = \text{第三人之年齡} = 23\text{歲}$$

$$M = \frac{21+22+23+26+28}{5} = 24$$

離中位數之平均差：

$$M.D. = \frac{\sum |d|}{N}$$

$$= \frac{|21-23|+|22-23|+|23-23|+|26-23|+|28-23|}{5}$$

$$= \frac{2+1+0+3+5}{5} = 2.2$$

$$\text{平均差度} = \frac{M.D.}{Md} = \frac{2.2}{23} = .096$$

離算術平均數之平均差

$$M.D. = \frac{\Sigma |d|}{N}$$

$$= \frac{|21-24|+|22-24|+|23-24|+}{5}$$

$$\frac{|26-24|+|28-24|}{}$$

$$= \frac{3+2+1+2+4}{5} = 2.4$$

吾人遂謂此五人年齡之中位數爲23歲（或算術平均數爲24歲）平均差爲2.2歲（或2.4歲）。

二、簡單次數數列之平均差

（分組次數數列以組中值代表量數X同此）

	工資 (X)	工人 (f)	離差 $\|d\| = \|x - Md\|$	$f\|d\|$
	14	25	1	25
Md ⟶	15	20	0	0
	16	15	1	15
	18	10	3	30
	20	6	5	30
	24	3	9	27
	28	1	13	13
	總計	80	×	140

$$Md = 第\ \frac{N+1}{2}\ 個工人之工貲$$

$$= 第\ 40\frac{1}{2}\ 個工人之工貲$$

$$= 15元$$

$$M.D. = \frac{\Sigma f|d|}{\Sigma f} = \frac{140}{80} = 1.75元$$

$$平均差度 = \frac{M.D.}{Md} = \frac{1.75}{15} = .117$$

吾人遂謂此羣工人工資之中位數爲15元，平均差爲1.75元。

同法可求算術平均數及對算術平均數之平均差。

三、等組距分組次數數列平均差之簡捷計算法

$$M.D. = \frac{\Sigma f|d'| + C(Nb - Na)}{\Sigma f} \times i$$

M'd代表假定中位數，即中位數所在組的組中值

d' 代表各組中值與假定中位數之離差而以組距爲單位，$d' = \frac{X - M'd}{i}$

C　代表眞正中位數 Md 與假定中位數 M'd 之差數而以組距爲單位，即 $C=\frac{Md-M'd}{i}$

Na　代表比 Md 大之組中值相應對之次數之和

Nb　代表比 Md 小之組中值相應對之次數之和

年　齡	學生人數		組中值 x		$\lvert d'\rvert=\frac{\lvert X-M'd\rvert}{i}$	$f'\lvert d'\rvert$
18－20	3	Nb	19		2	6
20－22	30		21		1	30
Md→22－24	43		23	M'd	0	0
24－26	21	Na	25		1	21
26－28	17		27		2	34
28－30	5		29		3	15
30－32	1		31		4	4
32－34	－		33		5	0
34－36	1		35		6	6
總　計	121		×		×	116

Md= 23.3（見前）中在22－24一組，故以23爲假定中位數。即M'd=23

$$C = \frac{Md-M'd}{i} = \frac{23.3-23}{2} = .15$$ （C有時爲負數）

19,21,23均小於Md，故Nd=3+30+43=76

其餘各組中值均大於Md，故Nd=121－76=45

$\sum f|d'|=116, \sum f=121, i=2$

代入公式

$$M.D. = \frac{\sum f|d'|+C(Nb-Na)}{\sum f} \times i$$

$$= \frac{116 + .15(76-45)}{121} \times 2$$

$$= \frac{120.65 \times 2}{121} = 1.99$$

$$= \frac{120.65 \times 2}{121} = 1.99$$

平均差度$= \frac{M.D.}{Md} = \frac{1.99}{23.3} = .086$

吾人遂謂此班學生年齡中位數爲23·3歲，平均差爲2，若與不同性質之數列相比較X，則謂平均差度爲 8·6%

同法可求對算術平均數(23·7歲)之平均差。

(附)等組距分組次數數列平均差簡捷計算法公式之證明

分組	組中值	次數
a_1 — b_1	X_1	f_1
a_2 — b_2	X_2	f_2
⋮	⋮	⋮
$aj-1$, — $bj-1$	$Xj-1$	$fj-1$
aj — bj	$Xj \leftarrow Md$	fj
$aj+1$ — $bj+1$	$Xj+1$	$fj+1$
⋮	⋮	⋮
$at-1$ — $bt-1$	$Xt-1$	$ft-1$
at — bt	Xt	ft

設Md在aj—bj組，該組之組中值爲Xj.而$Md \angle Xj$.(Md $\urcorner$ Xj,證法同.)

$$\sum f|X-Md|$$

$$=f_1(Md-X_1)+f_2(Md-X_2)+\cdots+fj-1(Md-Xj-1)$$

$$+ f_j(X_j - Md) + f_{j+1}(X_{j+1} - Md) + \cdots + f_{t-1}(X_{t-1} - Md) + f_t(X_t - Md)$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} f_k(Md - X_k) + \sum_{k=j}^{t} f_k(X_k - Md)$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} f_k(\overline{Md - X_j} + \overline{X_j - X_k}) + \sum_{k=j}^{t} f_k(\overline{X_k - X_j} + \overline{X_j - Md})$$

$$= \sum f|X - X_j| + (Md - X_j)\left(\sum_{k=1}^{j-1} f_k - \sum_{k=j}^{t} f_k\right)$$

并 令 $M'd = X_j$

$$Nb = \sum_{k=1}^{j-1} f_k \text{（比Md小之各組中值相應對之次數之和）}$$

$$Na = \sum_{k=j}^{t} f_k \text{（比Md大之各組中值相應對之次數之和）}$$

則 $\sum f|X - Md| = \sum f|X - M'd| + (Md - M'd)(Nb - Na)$

故 $$M.D.=\frac{\sum f|X-M'd|+(Md-M'd)(Nb-Na)}{\sum f}$$

$$=\frac{\sum f\frac{|X-M'd|}{i}+\frac{Mb-M'd}{i}(Nb-Na)}{\sum f}\times i$$

令 $$|d'|=\frac{|X-M'd|}{i},\quad C=\frac{Md-M'd}{i}$$

則 $$M.D.=\frac{\sum f|d'|+C(Nb-Na)}{\sum f}\times i$$

四、平均差之特質

平均差係各量數對中位數或算術平均數（有時亦可用衆數）之離差絕對值之算術平均數，意義甚爲明顯，且係由全體次數計算而得，每一次數均有影響，不若全距之僅取兩極端數，亦不若四分位差之僅取兩四分點以爲計算之根據，中位數與各次數距離之和爲最小，在論中位數時已加證明。故平均差以取對中位數之離差較爲相宜。

但平均差有一缺點，卽須取離差之絕對值。因離差有正

有負故也。爲避免取絕對值起見，乃取對算術平均數之離差平方爲計算相差度之根據，平方皆爲正數也。（且在機遇理論上，離差之重要性視其平方而定）。

第五節　標準差

爲避免取絕對值之煩，以各量數對算術平均數之離差平方之算術平均數的平方根爲相差度，即標準差是也。

一、枚舉數列之標準差

年齡 X	d = X −	b²
21	−3	9
22	−2	4
23	−1	1
26	2	4
29	4	16
120($\sum X$)	0($\sum d$)	34($\sum d^2$)

$$= \frac{\sum X}{N} \quad \frac{120}{5} = 24$$

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} \quad \left[即Sd = \sqrt{\frac{\sum (X-M)^2}{N}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{34}{5}} = \sqrt{6.8} = 2.6歲$$

$$標準差度 = \frac{Sb}{M} = \frac{2.6}{24} = .108$$

$$離散係數：\quad C.V. = \frac{100\,Sd}{M} = 10.8$$

吾人乃可簡述此五人之年齡：N=24 ，Sd=2.6 ，標準差度爲.108，或離散係數爲10.80

二、簡單次數數列之標準差

$$公式：\quad Sd = \sqrt{\frac{\sum f(X-M)^2}{Mf}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

（分組次數數列以組中値代表量數X.亦用此公式）

工資 (X)	工人 (f)	fX	d=X−M	d^2	fd^2
14	25	350	−2.13	4.5369	113.4225
15	20	300	−1.13	1.2769	25.5380
16	15	240	−.13	0199	.2535
18	10	190	1.87	3.4969	34.9690
20	6	120	3.87	14.9769	89.8614
24	3	72	7.87	61.9369	185.8107
28	1	28	11.87	140.8969	140.8969
總計	80 ($\sum f$)	1290 ($\sum fX$)	×	×	590.7520 ($\sum fd^2$)

$$M=\frac{\sum fX}{\sum f}=\frac{1290}{80}=16.13\text{元}，\sum fd^2=590.7520。$$

$$Sd=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}=\sqrt{\frac{590.7520}{80}}$$

$$=\sqrt{7.3844}=2.72\text{元}$$

$$\text{標準差度}=\frac{Sd}{M}=\frac{2.72}{16.13}=.168$$

$$\text{離散係數}\quad C.V.=\frac{100Sd}{M}=16.8。$$

吾人可簡述此80個工人工資分配如下：平均每人每月16.13元，標準差爲2.72元，離散係數爲16.8%。

三、簡單次數數列與不等組距分組次數數列之標準差的簡捷計算法

由上述公式 $Sd=\sqrt{\frac{\sum f(X-M)^2}{\sum f}}$ 計算標準差，乘方

自乘法，殊嫌太繁，若用變更原點方法，則計算較簡。

$$\sum f(X-M)^2=\sum f(X-A+A-M)^2$$

$$=\sum f[(X-A)-(M-A)]^2$$

令 $x=X-A$，　$C=M-A$，則

$$\sum f(X-M)^2=\sum f(x-C)^2$$

$$=\sum f(x^2-2Cx+C^2)$$

$$=\sum fx^2-2C\sum fx+C^2\sum f$$

但 $\sum fx=\sum f(X-A)$

$$=\sum fX-A\sum f$$

$$=M\sum f-A\sum f$$

$$=(M-A)\sum f$$

$$=C\sum f$$

故 $\sum f(X-M)^2=\ fx^2-2C(C\sum f)+C^2\sum f$

$$=\sum fx^2-2C^2\sum f+C^2\sum f$$

$$=\sum fx^2-C^2\sum f$$

故 $Sd=\sqrt{\dfrac{\sum f(X-M)^2}{\sum f}}$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fx^2 - C^2 \Sigma f}{\Sigma f}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - C^2} \left[= \sqrt{\frac{\Sigma f(X-A)^2}{\Sigma f} - (M-A)^2} \right]$$

此卽變更原點後，計算標準差之公式也。式中：

X 代表各量數與假定算術平均數之離差，$x = X - A$。

C 代表算術平均數與假定算術平均數之差數，$C = M - A$.

工資 X	工人 (f)	$x = X - A$	fx	x^2	fx^2
14	25	−2	−50	5	100
15	20	−1	−20	1	20
16(A)	15	0	0	0	0
18	10	2	20	4	40
20	6	4	24	16	96
24	3	8	24	64	192
28	1	12	12	144	144
總計	80 (Σf)	×	10 (Σfx)	×	592 (Σfx)

$$\sum = A + \frac{\sum fx}{\sum f} = 16 + \frac{10}{80} = 16.13\text{元}，A = 16$$

$C = M - A = 16.13 - 16 = .13$

$\sum f = 80$，$\sum fx^2 = 592$

代入公式：

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum f2^2}{\sum f} - C^2}$$

$$= \sqrt{\frac{592}{80} - .13^2}$$

$$= \sqrt{7.4 - .0169} = \sqrt{7.3831}$$

$$= 2.72\text{元}$$

四、等組距分組量數數列標準差之簡捷計算法

若分組量數數列之組距相等，則標準差之計算方法，可用變更單位方法而更簡單化。由上公式

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum f(X-A)^2}{\sum f} - (M-A)^2}$$

$$=\sqrt{i^2\times\left[\frac{\frac{\Sigma f(X-A)^2}{i^2}}{\Sigma f}-\frac{(M-A^2)}{i^2}\right]}$$

$$=\sqrt{i^2}\times\sqrt{\frac{\Sigma f\left(\frac{X-A}{i}\right)^2}{\Sigma f}-\left(\frac{M-A}{i}\right)^2}$$

令 $x=\frac{X-A}{i}$，$C=\frac{M-A}{i}$，則

$$Sd=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f}-C^2}$$

此即變更原點與單位後標準差之計算公式也，式中

i 代表組距

x 代表各量數與假定算術平均數之離差，而以組距為單位

即 $x=\frac{X-A}{i}$

C 代表算術平均數與假定算術平均數之差數，而以組距為單位，即

$$C=\frac{M-A}{i}。$$

茲舉例如下：

年　齡	學生人數 f	組中值 X	$x=\frac{X-A}{i}$	fx	x^2	fx^2
18－20	3	19	－2	－6	4	12
20－22	30	21	－1	－30	1	30
22－24	43	23 (A)	0	0	0	0
24－26	21	25	1	21	1	21
26－28	17	‘7	2	34	4	68
28－30	5	29	3	15	9	45
30－32	1	31	4	4	16	16
32－34	—	33	5	0	25	0
34－36	1	35	6	6	36	36
總　計	121 (Σf)	×	×	44 (Σfx)	×	228 (Σfx^2)

$A=23,\ i=2,\ \Sigma f=121,\ \Sigma fx=44,\ \Sigma fx^2=228$

$$M = A + \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \times i = 23 + \frac{44}{121} \times 2 = 23.7$$

$$C = \frac{M - A}{i} = \frac{23.7 - 23}{2} = .35$$

$$Sd = i \times \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - C^2}$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{228}{121} - .35^2}$$

$$= 2 \times \sqrt{1.8843 - .1225}$$

$$= 2 \times \sqrt{1.7618}$$

$$= 2 \times 1.36$$

$= 2.66$歲.

$$標準差度 = \frac{Sd}{M} = \frac{2.66}{23 \cdot 7} = .112$$

離散係數　$C.V. = \frac{100Sd}{M} = 11.2$

五、標準差之特質

標準差係根據全體量數對算術平均數之離差求得，是各量數均與以應有之影響，此優點與平均差共有之。至其計算，取離差平方而非其絕對值，合乎數學原理，處理便利，此又勝於平均差一籌者。且再求進一步之分析，作機遇理論上之研究，惟有標準差能勝任之。求相關係數卽須利用標準差。故 YUle 氏主張，宜用標準差以表示相差度，惟簡明易解，則不及四分位差及平均差矣。

第六節　均互差

均互差，乃將各量數相互之差數相加，而以差數之項數除之。設量數有 n 個，則差數有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 項，設差數之和爲S，則均互差g（因均互差係意大利教授 Gini 所首倡，故用 g 表之）之公式如下：

$$g = \frac{S}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2S}{n(n-1)}$$

一、枚舉數列之均互差

例如甲乙丙三人之年齡爲23,21,則

$$S=(25-22)+(25-21)+(22-21)$$

$$=3+4+1=8$$

$$g=\frac{2S}{n(n-1)}=\frac{2\times 8}{3\times 2}=2.67$$

今設有五個量數，按小大次第排列如下：

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ 5_5,$$

則 $$\begin{aligned} S=&(X_5-X_4)+(X_5-X_3)+(X_5-X_2)+(X_5-X_1)+\\ &(X_4-X_3)+(X_4-X_2)+(X_4-X_1)+\\ &(X_3-X_2)+(X_3-X_1)+\\ &(X_2-X_1)\\ =&4X_5+2X_4+0X_3+(-2)X_2+(-4)X_1 \end{aligned}$$

若寫成與項數 5 之關係，則爲

$$S=(5-1)X_5+(5-3)X_4+(5-5)X_3+(3-5)X_2+(1-5)X_1$$

再設有六個量數按數小次第排列如下：

X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6,

$$
\begin{aligned}
S = & (X_6-X_5)+(X_6-X_4)+(X_6-X_3)+(\cancel{X}X_6-x_2)+\\
& (X_6-X_1)+\\
& (X_5-X_4)+(X_5-X_3)+(X_5-X_2)+(X_5-X_1)+\\
& (X_4-X_3)+(X_4-X_2)+(X_4-X_1)+\\
& (X_3-X_2)+(X_3-X_1)+\\
& (X_2-X_1)\\
= & 5X_6+3X_5+1X_4+(-1)X_3+(-3)X_2+(-5)X_1\\
= & (6-1)X_6+(6-3)X_5+(6-5)X_4\\
& (1-6)X_1+(3-6)X_2+(5-6)X_3
\end{aligned}
$$

由是可知若量數有 n 個，則

$$
\begin{aligned}
S = & (n-1)Xn+(n-3)Xn-1+(n-5)Xn-_2+\cdots\cdots+\\
& (1-n)X_1+(3-n)X_2+(5-n)X_3+\cdots\cdots\\
= & (n-1)Xn+(n-3)Xn-1+(n-5)Xn-_2+\cdots\cdots\\
& -(n-1)X_1-(n-3)X_3-(n-5)X_3-\cdots\cdots\\
= & (n-1)\,(Xn-X1)+(n-3)\,(Xn-1-X_2)+(n-5)\\
& (Xn-_2-X_3)+\cdots\cdots。
\end{aligned}
$$

X'	X''	$X'-X''$	p	$p(X'-X'')$
X_n	X_1	X_n-X_1	$n-1$	$(n-1)(X_n-X_1)$
X_{n-1}	X_2	$X_{n-1}-X_2$	$n-3$	$(n-3)(X_{n-1}-X_2)$
X_{n-2}	X_3	$X_{n-2}-X_3$	$n-5$	$(n-5)(X_{n-2}-X_3)$
⋮	⋮	⋮	⋮	
$\Sigma X'$	$\Sigma X''$	×	×	$\Sigma p(X'-X'')$

$$M=\frac{\Sigma X}{n}=\frac{\Sigma X'+MX''}{n}$$

$$S=Mp(X'-X'')$$

$$g=\frac{2S}{n(n-1)}=\frac{2\Sigma p(X'-X'')}{n(n-1)}$$

此卽枚舉數列均互差之計算公式也，其中X'代表較大之一半量數（若項數爲奇數，則多一個）按由大而小之次第排列，X''代表較小之一半量數，由小而大排列之。

相對均互差，可取 $\frac{g}{M}$ 或 $\frac{g}{Md}$ 。

茲舉例如下：

學生分數 X'	X"	X'－X"	p	p(X'－X")
94.	56	38	20	760
90	63	27	18	486
87	65	22	16	352
85	69	16	14	224
84	71	13	12	156
83	72	11	10	110
81	74	7	8	56
80	76	4	6	24
79	77	2	4	8
79	77	2	2	4
78	—	—	0	0
929	700	×	×	2180

$\Sigma X'=920$，$\Sigma X''=700$，$\Sigma p(X'-X'')=2180$

$$M=\frac{\Sigma X'+\Sigma X''}{n}=\frac{1620}{21}=77\text{分}$$

$$g = \frac{2S}{n(n-1)} = \frac{2\Sigma p(X'-X'')}{n(n-1)}$$

$$= \frac{2\times 2180}{21\times 20} = \frac{218}{21} = 10.4分$$

$$均互差度 = \frac{g}{M} = \frac{10.4}{77} = .135$$

故此班學生平均成績爲77分，均互差爲10.4分，均互差度爲13.5%，

二、次數數列之均互差

在次數數列，設$\Sigma f=n$，各量數（或組中值）及其次數如下：

$$X_1, X_2, X_3, \cdots Xi, Xi+_1, Xi+_2, \cdots Xk-_2, Xk-_1, Xk$$

$$f_1, f_2, f_3, \cdots fi, fi+_1, fi+_2, \cdots fk-_2, fk-1, fk$$

則相互差數之和爲

$$S = fk\ Xk(n-fk)+$$

$$fk-_1\ Xk-_1(n-2fk-1)+$$

$$fk-_2\ Xk-_2(n-2fk-2fk-1-fk-_2)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$f_{i+1}X_{i+1}(n-2f_k-2f_{k-1}-\cdots-2f_{i+2}-f_{i+1})-$

$f_1X_1(n-f_1)-$

$f_2X_2(n-2f_1-f_2)-$

$f_3X_3(n-2f_1-2f_2-f_3)-$

$\cdots\cdots\cdots-$

$f_iX_i(n-2f_2-\cdots\cdots-2f_{i-1}-f_1)$

年齡	組中値 X	人數 f	fX	p	pfX −	pfX +
18－20	19	3	57	－118	－6,726	－
20－22	21	30	630	－85	－53,550	－
22－24	23	43	989	－12	－11,868	－
24－26	25	21	525	52	－	27,300
26－28	27	17	459	90	－	41,310
28－30	29	5	145	112	－	16,240
30－32	31	1	31	118	－	3,658
32－34	33	－	－	119	－	0
34－36	35	1	35	120	－	4,200
總計	×	121	2871	×	72,144	92,768

$$M = \frac{MfX}{\Sigma f} = \frac{2871}{125} = 23.7\text{歲}$$

$$g = \frac{2S}{u(u-1)} = \frac{2\Sigma pfX}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(92,708-72,144)}{121\times 60}$$

$$= \frac{20564}{8260}$$

$$= 2.83\text{歲}$$

$$\text{均互差度} = \frac{g}{M} = \frac{2.83}{23\cdot 7} = \frac{2.83}{23\cdot 7} = .119 = 11.9\%$$

第七節　各種相差度之比較

一、相差度之選擇

相差度之功用，在於測量各量數之分佈情形或離中程度，已如前述。故欲知量數之集中情形或欲知代表數值，應求一適當之平均數，而欲知量數之參差程度，則不可再求一適當之相差度。應求何種相差度，其原則可略述如下：

1.全距太粗，不足以表示離中程度。但有時亦可用以觀察懸殊情況之大概。

7.四分位差表示居中一半量數，最大(上四分位數)與最小(下四分位數)二者之距離之一半、較全距爲精，但仍未取全體量數爲計算之根據。較粗之分析，可取中位數（或算術平均數）及四分位差表示數列之徵性。

3.平均差係限據全體量數對平均數（$\sum d$或$\sum$或$\sum O$）之離差計算，惟採取絕對値，數學上之處理，殊不便利。通常可取中位數及平均差代表一數列。

4.標準差根據全體量數對算術平均數之離差平方計算而得，無取絕對値之弊。較精之分析，均取算術平均數與標準差以表示集中及離中情形。

5.均互差觀念簡明，極合論理，以其將各量數一一互相比較也。惟因計算麻煩，今日用之者，尙不多覯。

6.性質不同之數列（如某大學之學生年齡，與某小學學生之年齡）或單位不同數列（如美國公務員年俸以美元計，我國公務員月薪以我國國幣計）比較離中情形，應取相對相差度或離散係數。

二、相差度與次數分配之關係

1.全距包括全體次數所佔之距離。

2.上下四分位數之中點左右各取一四分位差之距離，即 $\frac{Q_3+Q_1}{2}\pm$ Q.D.，包括次數之一半。九倍四分位差約包括全體次數99%。

3.在對稱次數分配或略不對稱次數分配上，平均差之七倍半，約包括全體次數之99%。

4.在對稱次數分配或稍微偏斜之分配中，在算術平均數之左右各取⅔Sd（P.E.=,6745Sd）約包括次數之半，各取 Sd 約包括次數之⅔（常態分配下，包括68.26%），若各取 2Sd，約包括95%，若各取 3Sd，則包括99%矣。

三、各種相差度之相互關係

據 Chaddock 之計算，在完全對稱分配中.Sd.M.D.與Q.D.相互之間，有確定之關係如下：

Sd ＝1.2533M.D.　　（或Sd ＝ ⁵⁄₄M.D）

Sd ＝1.4825Q.D.　　（或Sd ＝ ³⁄₂Q.D）

M.D.＝7979 Sd　　（或M.D.＝⁴⁄₅Sd）

$$M.D. = 1.1843Q.D. \qquad (\text{或} M.D. = \tfrac{6}{5}Q.D.)$$

$$(P.E. =)Q.D. = .6745Sd \qquad (\text{或} Q.D. = \tfrac{2}{3}Sd)$$

$$Q.D. = .8453M.D. \qquad (\text{或} Q.D. = \tfrac{5}{6}M.D.)$$

本章所舉某班 121 人年齡分配之例，係略不對稱之次數分配，試就以上關係比較如下：

$$sd = 2.66, \quad M.D. = 1.99, \quad Q.D. = 1.79$$

1. 由Sd估計 M.D. 及 Q.D.

$$M.D. = \tfrac{4}{5}Sd = \tfrac{4}{5} \times 2.66 = 21.3(1.99)$$

$$Q.D. = \tfrac{2}{3}Sd = \tfrac{2}{3} \times 2.66 = 1.77(1.79)$$

2. 由M.D. 估計 Sd 及 M.D.

$$Sd = \tfrac{5}{4}M.D. = \tfrac{5}{4} \times 1.99 = 2.49(2.66)$$

$$Q.D. = \tfrac{5}{6}M.D. = \tfrac{5}{6} \times 1.99 = 1.66(1.79)$$

3. 由Q.D. 估計 Sd 及 M.D.

$$Sd = \tfrac{3}{2}Q.D. = \tfrac{3}{2} \times 1.79 = 2.69(2.66)$$

$$M.D. = \tfrac{6}{5}Q.D. = \tfrac{6}{5} \times 1.79 = 2.15(1.99)$$

上述之 M.D. = 1.99 係對中位數之平均差，若用對算術平均數之平均差，估計結果當更爲接近也。

第七章　偏斜度與峯度

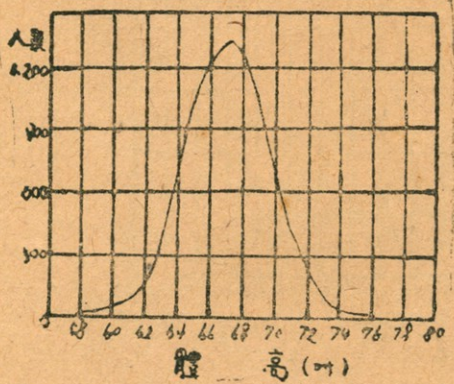
第一節　偏斜度之意義

平均數用以示數列之代表，相差度用以示數列之離散程度。而對於代表數值之左右兩側，依如何形式以行分配則尙未談及，其編斜是否對稱？若不對稱其偏斜之程度如何？偏斜之方向如何？實均有研究之必要。顯示次數分配之偏斜程度與方向者稱爲偏斜度 (Skewness) 亦表徵數之一種也。

多數數列之次數分配不能完全對稱，或左或右總有幾許偏斜，甚或有完全不對稱者，依于爾氏 (G. U. Yule) 之研究，次數分配有下列數種基本形式：

(一)對稱之次數分配(The symmetrical distribution) 此種分配在任何情形下均甚爲稀少，尤以經濟統計爲然，但在人類或生物測量之統計上較爲多見，例如下圖所示英國8855人之體高統計，爲近似於對稱之次數分配。

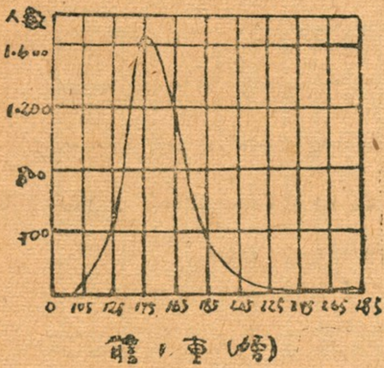
圖六十三　對稱之次數分配



（資料見Yulex:An Introduction to the Theory Of Statistlcsxxp.88)

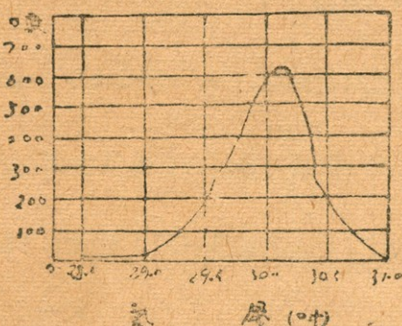
（二)略不對稱之次數分配(The moderately asymmetrcai distribution）此種分配甚爲普遍，但有偏右與偏左兩種，前者如下圖所示英國7749人之體重統計：後者如下圖所示英國1878-1880年之每日氣壓統計。

圖二十四 略不對稱之次數分配（偏右）



（資料見 Yulex:x„An Introduction to the Tdeory Of Satisticsx P.95）

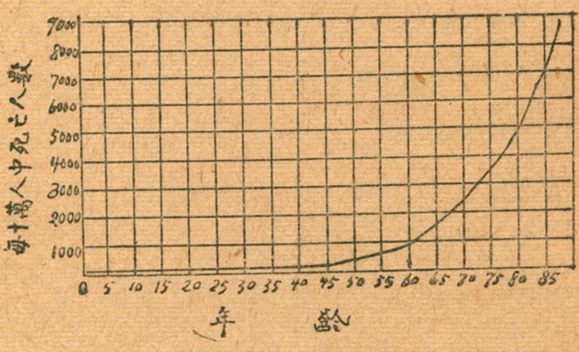
圖二十五 略不對稱之次數分配（偏左）



（資料見 Yule:An Intoduction to the Theory of Statistics p.96）

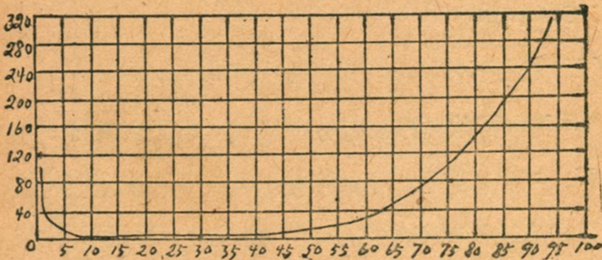
(三)完全不對稱之次數分配（The extemely asdmmetricaldistridution)此種分配有各種形式，常見者為 J 字形，其為 U 字形，前者如下圖所示1915—24年紐約男人每年患心病死亡人數依照年齡之分配，後者如下圖所示 1923 年紐約人口死亡率依照各種年齡之分配。

圖二十六　J字形之次數分配



（資料見紐約腺病心病學社所出版之紐約心病死亡統計）

圖二十七　U字形之次數分配



（資料見紐約衞生局第四十四次年報）

第二節　偏斜度之測定方法

偏斜度係用以表示次數分配之偏斜程度與方向者，而所謂偏斜程度與方向均對對稱之次數分配而言，故偏斜度之測定方法爲比較對稱與不對稱時之情形，而加以測定之法。比較時可有三種不同之觀點，因此有三種不同之方法。

（一）就各種平均數觀之

次數分配之對稱與否對於衆數中位數與算術平均數之影響不同，在對稱之次數分配三者合而爲一，不對稱之次數分配，三者分而爲三。若次數曲線向右偏斜，則算術平均數因受極端數值之影響甚大，故向右移動甚多，中位數祇受次數

多少之影響而不受各項數值大小之影響，故雖亦向右移動，但其移動之程度較算術平均數為微；反之若次數曲線向左偏斜，則算術平均數與中位數亦均向左移動，其移動之程度，算術平均數亦較甚於中位數。至於衆數則不論次數曲線之偏右或偏左，均能維持其原有之位置。故算術平均數與衆數之距離即可用以測定偏斜程度，惟此距離含有測量單位，常以標準差除之，以求得其偏斜度，設Sk示偏斜度，M示算術平均數，M_o示衆數，Sd示標準差，則得

$$Sk=\frac{M-M_o}{Sd}$$

在次數分配對稱時，$Sk=0$，對稱而偏右時Sk為正數；對稱而偏左時Sk為負數。

但衆數不易確定，故在略不對稱之次數分配，又可用算術平均數與中位數（M_d）之距離之三倍示之即得。

$$Sk=\frac{3(M-M_d)}{Sd}$$

（二）就四分位數之位置觀之

次數分配之對稱與否影響第一個四分位數與第三個四分

位數之位置，在對稱之次數分配，中位數與第一個四分位數(Q_1)及第三個四分位數(Q_3)之距離相等，即$Q_3-M_d=M_d-Q_1$；在不對稱時，$Q_3-M_d\neq M_d-Q_1$。因此觀察次數分配是否對稱，可由下式觀之：

$$(Q_3-M_d)-(M_d-Q_1)\begin{cases}=0\text{爲對稱。}\\ \neq 0\text{爲不對稱。}\end{cases}$$

而測量次數分配之偏斜程度，即可由$(Q_3-M_d)-(M_d-Q_1)$之差量示之。但此差量含有測量單位，故常以Q_3-Q_1除之，而得偏斜度(Sk)之公式如下：

$$Sk=\frac{Q_3+Q_1-2M_d}{Q_3-Q_1}$$

此法所求得之Sk，當次數分配對稱時，其數值亦爲零，其最大可能值爲1，最小可能值爲-1。若次數分配不對稱而偏右，Sk爲正數，偏左爲負數，故亦與上法所求得之Sk相同。

惟上列公式之除數若改用$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}$者，則其所求得之Sk爲上列公式所求得之Sk之二倍。

(三)就各種動差之數値觀之

皮爾生氏(K. Pearson)規定n次動差(nth moment)之公式如次

$$\mu_n = \frac{1}{\sum f_t}\sum f_t(X_t - M)^n$$

(X_t示各數量，f_t示各次數，M示算術平均數)

在對稱之次數分配，各級單次動差等於0，即

$$\mu_{2p+1} = \frac{1}{\sum ft}\sum ft(Xt - M)^{2p+1} = 0$$

(p為正整數)

反之，在不對稱之次數分配， 故各級單次動差不等於0，即

$$\mu_{2p+1}=0。$$

因此次數分配之對稱與否？可以各級單次動差之數值示之，但一次動差恆等於0，故常用三次動差(μ_3)示之，然k_3含有測量單位，必須以同單位之差量或離散度除之，鮑萊氏以Sb^3為除數，所得公式特稱x公式，以X示偏斜度；皮爾生

氏(K.Pearso)以k_2^3為除數，所得公式特稱皮爾生公式，以K示偏斜度。兩公式如次：

$$K=\frac{\mu_3}{Sd^3}$$

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

鮑萊公式所求得之K_1為皮爾生公所求得之β_1之方根通常用鮑萊公式。

上述各種方法，第一法與第二法均較簡單。若已知算術平均數，衆數與標準差，卽可由公式求得偏斜度；同樣，若已知中位數，第一個四分位數與第三個四分位數，亦可由公式見(224)頁求得偏斜度。故一般求偏斜度時，均用此二公式，但因衆數不易確定，中位數等屬於分割數系統，究不如第三法之精確可靠，因此第三法雖計算繁複，而在作精確之分析時必須用之，尤以配合曲線時為然。

玆以吾人常舉之某班學生年齡分配為例以明偏斜度之各種求法：

求偏斜度實例

(1) X	(2) f	(3) X－M	(4) $(X-\sum)^3$	(5) $f(X-M)^3$
總　計	30			305.034
19	2	－3.4	－39.304	－78.608
20	5	－2.4	－13.824	－69.120
21	4	－1.4	－ 2.744	－10.976
22	7	＝0.4	－ 0.064	－ 0.448
23	4	0.6	0.216	0.864
24	2	1.6	4.096	8.192
25	4	2.6	17.576	70.303
27	1	4.6	97.336	97.336
29	1	6.6	287.496	287.496

該項數列之算術平均數$M=22.4$，衆數$M_o=22$，中位數$Md=22$，第一個四分位數$Q_1=21$，第三個四分位數$Q_3=24$，標準差$Sd=2.30$，故可用第一法，第二法求得偏斜度如下：

(一)第一法　$Sk=\frac{Md-M_o}{Sd}=\frac{22.4-22}{2\cdot30}=\frac{0.3}{2\cdot4}$

$=0.17$

(二)第二法　$Sk=\frac{Q_3+Q_1-2Md}{Q_3-Q_1}=\frac{24+21-2\times22}{24-21}$

$$=\frac{1}{3}=0.33$$

至於第三法，須先求得μ_3，由表上得

$$\mu_3=\frac{\sum ft(Xt-M)^3}{\sum ft}=\frac{305.036}{30}=10.1679,$$

而後代入鮑萊公式得　$K=\frac{\mu_3}{Sd^3}=\frac{10,1679}{12.167}=0.83$，故

(三)第三法　　$Sk=X_1=0.83$，

各種測定方法所依據之觀點不同，所求得之偏斜度自不能相等，故比較數個數列之偏斜度時，必須應用同一方法，斯讀者不可不注意者也。

第三節　峯度之意義及測定方法

峯度(Kurtosis)亦爲表徵數之一種，然其意義不甚顯著，且亦必於次數數列時用之，故通常應用峯度者甚少，而一般研究統計者亦常忽略之也。

平均數爲數列之代表數值，離散度用以示數列之離散程度，偏斜度用以示次數分配之偏斜度，峯度則表示次數曲線峯形之相對高低程度者。測量次數曲線峯形之相對高低程度係以差誤常態曲線(Normal Curve of error)爲標準，正如以不對稱分配與對稱分配相比較，而得偏斜度相似，曲線之峯形高於常態曲線之峯形者，稱爲高峯態(Leptokurtic)，其意卽示集中於代表數值附近之次數較多：反之曲線之峯形低於常態曲線之峯形者，稱爲低峯態，(Platykurtic)其意卽示集中於代表數值附近之次數較少。故欲完全描述一次數數列尤以配合曲線時，實有研究峯度之必要

至於測定峯度之方法，亦隨觀點之不同而異，通常有三種方法。

(一)分割數法——

次數愈集中於平均數時，曲線之峯形愈高，而四分位差必愈小；反之，若次數愈不集中於平均數附近時，曲線之峯

註：差誤常態曲線亦稱高斯曲綫（Gaussian Curve）

$$f x=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

形愈低，而四分位差必愈大。故峯形之高低恰與四分位差之大小成相反之變化。乃可以四分位差作為測量峯度之標準，而以第九個十分位數與第一個十分位數之差量除之。設以K示峯度，則得公式如次：

$$K=\frac{Q.D.}{D_9-D_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

當曲線為正峯態(Mesokurtic)時：$Q.D.=0.6744898Sd$，$D_1=1.2815516Sd$ $D_9=1.2815516Sd$，故得

$$K=\frac{0.6744898Sd}{2.5631032Sd}=0.26315$$

從而可知當 $K=0.26315$ 時，其曲線為正峯態；$K<0.26315$ 時，其曲線為高峯態；$K>0.26315$ 時，其曲線為低峯態。

(二)動差法

數列之各級單次動差，在次數分配對稱時均為零，故不能以單次動差示曲線峯形之高低，至於各級偶次動差，不管次數

分配之對稱與否，均有其數值，設 μ_{2p} 示各級偶次動差，x 示各數值對算術平均數之差量，y 爲次數函數，則

$$\mu_{2p}=\int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} y\,dx$$

在常態曲線時。

$$\mu_{2p}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\left[-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}x^{2p-1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$+\frac{(2p-1)\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=0+(2p-1)\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=(2p-1)\sigma^2\mu_{2p-2}。$$

若令 $p=1$，則所得爲二級動差，實即標準差之平方數，

自能用以示曲線之峯形，故通常以四級動差為測量峯形之標準，如上式以p=2，則

$\mu_4=3\sigma^2\mu_2=3\sigma^4$，

但四級動差含有測量單位，故鮑萊氏主張以σ^4除之，並以K_2示峯度，其公式如下：

$$K_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

皮爾生氏則用μ_3^2為除數，並以β_2示峯度，其公式如下：

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

實則兩公式完全一樣，固毫無區別者也。而由上述公式即可求得常態曲線之峯度為$K_2=\beta_2=3$。從而知峯度K_2或β_2等於3時，即為正峯態，K_2或β_2大於3時為高峯態，K_2或β_2小於3時為低峯態。

至四級動差之積分形式雖如上述，而計算時當用下列公式：

$$\mu_t=\frac{\sum ft(Xt-M)^4}{\sum ft}\quad\cdots\cdots(65)$$

(Xt示各量數，ft示各次數，M示算術平均數。

一次數曲線之峯形，雖常受四分位差之影響，然其感應不甚靈敏，而第九個十分位數與第一個十分位數常可因一二數值起極大之變化，實際峯態固未必能有同樣之變化也，故分割數法殊嫌粗略，在精密之統計分析，則以使用動差法爲宜。

茲以前節所舉之某班學生年齡分配爲例，以明峯度之求法。

求峯度

(1) X	(2) f	(3) X－M	(3) $(X-M)^4$	(5) $f(X-M)^4$
總　計	30			2990,3360
19	2	－3.4	133.6336	267.2672
20	5	－2.4	33.1776	165.8880
21	4	－1.4	3.8416	16.3664
22	7	－0.4	0.0256	0.1792
23	4	0.6	0.1296	0.5184
24	2	1.6	6.5536	13.1972
25	4	2.6	45.6976	182.7904
27	1	4.6	447.7456	447.7456
29	1	6.6	1897.4736	1897.4736

(一)分割數法

$$Q.\ D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{24-21}{2}=\frac{3}{2}=1.5$$

$D_9=25 \qquad D_1=20$

$$\therefore\ K=\frac{1.5}{25-20}=\frac{1.5}{5}=0.3\quad>0.26315$$

(二)動差法 由上表求得$\sum ft(Xt-M)^4$

$=2990.3360$，故得

$$\mu_4=\frac{\sum ft(Xt-M)^4}{\sum ft}=\frac{2990.3360}{30}=96.3445$$

$$\therefore\ \alpha_2=\beta_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}=\frac{96.3445}{(2.30)^4}=\frac{96.3445}{27.9821}$$

$$=3.4428>3$$

依分割數法所得結果，可謂此分配爲低峯態曲線，但依動差法所得結果，此分配確爲略高於正峯態之曲線（依 $E'=\frac{K_1-3}{8}=0.055$，約高百分之5.5），其所以如此者，實由於分割數法不甚精密之故耳。

第八章　確　度

第一節　一般概念

一、測量之本質　無論自然現象或社會現象，均無絕對精密之測量；猶如世界上無絕對直之直線或絕對純粹之液體。試觀自然現象：欲衡量一物之重量正確至一兩，乃易事也；由於衡器之進步，吾人漸能稱至一分，一厘，甚至一毫，一絲，但終必有一限度。再如角度，肉眼所能辨者至爲有限，而應用六分儀可以測量一弧至十五秒之程度，若格靈威治天文家則能觀察至一秒之百分之一，然亦終必至一限度，踰此再求精確不可能矣。

以上云云，其結果吾人遂謂正確至一厘，或一秒；同理，吾人估計金錢數目，謂正確至一元或一分。

二、自然測量與統計測量，太陽之視差，乃用以決定日球與地球之距離者，視差之測量與統計上之估計頗爲相似。十八世紀之天文家估計視差爲10秒，相當於九千六百萬英里；因觀測方法以及儀器之改進，天文家遂漸同意視差爲 8 秒，但小數仍各不相同。1865 年以來未嘗有人估計較8.8秒尙

爲精確者，而近世紀來之觀察，均同意視差在8.76秒與8,78秒之間，是故日球與地球距離，其差誤已不出四百分之一矣。$\left(\frac{8.78-8.76}{8.76}=\frac{1}{438}\right)$由此可見：1.最先之估計，必有待於校正；2.正確程度與時俱進；3.絕對正確仍未達到，亦永不能達到。統計測量亦然，所有生命預測，國富估計，物價漲落，工資升降均祇能有某種程度之正確性。

三、可得之正確程度：，在自然測量上，吾人常能達到一極高之確度，例如每立方之水，毫無疑問，其重量可正確至百萬分之一；但有時只須知道其正確達到十分之一，即於願已足，例如與地球最近之恆星之距離，約爲三千四百萬至三千七百萬哩是也。在統計上亦往往如是，譬如卅年四川糧食產量爲八千萬石至一萬萬石，重慶市普通勞役每日工資爲五元至八元等是。上述例子之缺點爲當吾人估計一數，明知其不甚精確，但吾人不得而知其差誤之限度。吾人不易謂「估計數爲25.4元，其差誤約在上下三角之間，絕不致有角月以上之差誤」；但在自然測量上，吾人常能視所用測量儀器之精密，正確至其最小之分度止，如秤之錢，尺

之分是也。

四、實際上需要之確度吾人雖不能獲得精確之數字，但常能估計至實際上需要之正確程度；因通常祇需要某種習慣之確度。譬如耕地面積以畝表示，而無庸正確至若干方丈；目前之物價最小單位爲一分；出生時間祇需記其日期，而不必記淸何時何分；火車時刻表祇標明幾點幾分，而無秒數；大洋輪船行期以時爲準，而非分數；身高僅量至生的米突爲止；百米賽跑，只記至十分之幾秒。同理，在統計估計上，吾人罕需正確至千分之一，甚至無須正確至百分之一。每週工作時間之千分之一，不過三分鐘；每日工資之千分之一，不過五厘錢；重慶人口多一百少一百，國家支出多一萬元少一萬元，吾人全不介意，凡此限度內之確度吾人恆能獲得之。

第二節　差誤之意義

一、相對差誤之界說　確度之反面爲差誤，差誤愈小，則確度愈高。眞實數值減估計數值，謂之絕對差誤；絕對差誤與估計數值之比率謂之相對差誤。若估計數值高於眞實數值，差誤爲負，若估計數值低於眞實數值，差誤爲正。

例如農業工資每月平均眞實數值爲14元，而估計所得爲13元，則差誤爲 $\frac{14-13}{13}=\frac{1}{13}$ 或7.7%；若估計所得爲15元，則差誤爲 $\frac{14-15}{15}=-\frac{1}{15}$ 或－6.6%。

以記號表示：設以u表示測量所得之數（估計數值），而其眞實數值爲u^1，並以e表示相對差誤，則

$$e=\frac{u^1-u}{u}$$

而

$$u_1=u(1+e)$$

$$ue=u^1-u$$

ue 即絕對差誤。

二、差誤之表示方法　當研究差誤之時，所謂眞實數值無從知道，所能得知者，最多不過其可能之限度。例如某次戰役，吾人估計負傷人數爲 4.5 %，而由可能獲得之材料（如從參戰部隊之名册或傷兵收容所之名册觀之），得知此 4.5 %，上下.5 % 必近於事實，即謂差誤似不致高於

$\frac{.5}{4.5}=\frac{1}{9}$ 或11%，其絕對差誤爲.5%。屬時吾人亦能獲差誤之確定限度。負傷人數之百分比，必在0與100之間，若確知有1%負傷，而92%均已歸隊，則負傷人數百分比無論如何在1%與8%之間，則絕對差誤最多不過±3.5%（因4.5−1=3.5，4.5−8=−3.5)，然則相對差誤之最高限度爲 $\frac{\pm 3.5}{4.5}=\pm\frac{7}{9}$ 或±73%。此限度雖則太大，但究竟比含混言之「負傷4.5%，確度不得而知」正確多多。若再加調查，或許能使差誤範圍更可縮小，並能決定負傷比率必在3.5%與4.5%之間；則應曰「此次戰役負傷4%，正確至1%」，正同「某物重15斤3兩，正確至一兩」也。

有時吾人雖則不得確知差誤限度，但在總數內，往往某幾位數字絕對正確，其餘絕不可靠。例如英國根據1891年人口普查，及1881—91年人口增加率。估計1896年人口爲39,124,496. 吾人可以斷言其最後之兩位或三位數字。無異猜測；而其最前之兩位或三位數字，絕對可靠。其報告應爲39,100,000 或謂 39,124,000 ± 5,000 或其他表示方法；

此種寫法總比39,124,496正確多矣。

三、微細數字之省略 一般統計報告常將數字寫至一分一厘，此在政府機關發表數字，或無可評，因政府統計機關，其職責在接受下級機關之報告而彙集表列之，說明搜集之方法以及據報之時期，至於確度之決定，則留待經濟學者或統計學者之探討。但在綜合陳述社會現象時或爲科學的估計時，列舉細數（一則因其未必可靠，二則因其於理論上不關重要，於讀者了無意義），非但不必要；且甚非正確之表示。曩昔爲避免不正確之數字起見，往往簡述圓整數字（例如謂地球之直徑爲8,000哩），若確有理由，能得更正確之數字（例如比較赤道直徑與較小之兩極半徑）則應將較精確之數字寫出，同時標明其確度。

第三節 計算差誤之定律

一、和數之差誤 各量數之和數的差誤等於各量數之差誤之和，但各量數之差誤均須乘以各該量數對其和數之比率。

設測量 n 個數量，其估計數值爲$u_1u_2,\cdots\cdots\cdots un$，其差誤爲$e_1,e_2,\cdots\cdots en$；又估計數值之和數爲u，和數之差誤爲 e，

則和數之眞實數值爲

$u(1+e)$，而各量之眞實數值爲 $u_1(1+e_1)$，$u_2(1+e_2)$，……$u_n(1+e_n)$原故

$$u(1+e)=u_1(1+e_1)+u_2(1+e_2)+\cdots\cdots u_n(1+e_n)$$

但 $$u=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$$

相減，得 $$ue=u_1e_1+u_2e_2+\cdots\cdots+u_ne_n$$

故 $$e=e_1\times\frac{u_1}{u}+e_2\times\frac{u_2}{u}+\cdots\cdots+e_n\frac{u_n}{u}$$

當若干項爲負數時，此式亦可應用。

例如某年勞工階級對於膳食、衣着、居住之支出估計平均約爲25元,5.5元,6.5元，而眞實平均數爲27元，4.5元，6元，則差誤爲 $\frac{2}{25}$，$-\frac{2}{11}$，$-\frac{1}{13}$ 故和數之差誤爲

$(n=25+5.5+6.5=37)$

$$e=\frac{2}{25}\times\frac{25}{37}-\frac{2}{11}\times\frac{5.5}{37}-\frac{1}{13}\times\frac{6.5}{37}$$

$$=.054-.027-.0135$$

$$= +.0135 \text{ 或 } + 1\frac{1}{3}\%$$

此項定律有一重要之用途，當某一總數，其大部分之確度甚高，而其餘部分則不得而知，可應用此定律以求總數之確度。例如參戰部隊之大部分已報告負傷人數爲3,365，並知其差誤最多不過1％，而小部分則未據報告：吾人估計約有100人受傷，並假定其差誤甚大，爲$\frac{2}{3}$或67％，則總數之差誤爲

$$\frac{1}{100} \times \frac{3365}{3465} + \frac{2}{3} \times \frac{100}{3465} = .029 \text{或不過}$$

3％。是則其差誤極近於大部分之差誤。

二、簡單算術平均數之差誤 各量數之算術平均數的差誤等於各量數之差數之和，但各量數之差誤，均須乘以各該量數對其和數之比率。

設 $m_1, m, \ldots\ldots\ldots mn$ 爲 n 個估計數值，其眞實數值爲 $m_1(1+e_1), m_2(1+en), \ldots\ldots mn(1+e_n)$，則估計平均數爲

$$\frac{m_1+m_2++}{n}$$

眞實平均數爲 $\dfrac{m_1(1+e_1)+m_2(1+e_2)++}{n}$

算術平均數之差誤爲

$$e=\frac{\dfrac{m_1(1+e_1)+m_2(1+e_2)++}{n}-\dfrac{m_1+m_2++}{n}}{\dfrac{m_1+m_2++}{n}}$$

$$=\frac{e_1m_1+e_2m_2++}{m_1+m_2++}$$

$$=e_1\times\frac{m_1}{\sum m}+e_2\times\frac{m_2}{\sum m}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 $\sum m$ 表示各估計數值之總和。

由公式觀之，可知若各項差誤相差不大並且均爲正或均爲負每項差誤對平均數之差誤，影響均不甚大，且平均數之差誤大致與任何一項差誤相近；倘若在一般情形中，各項差誤有正有負，則平均差誤之誤勢將減少甚多，卽確度增大。故平均法可以削弱差誤。

三、加權算術平均數之差誤加權算術平均數之差誤爲下列二種差誤之和：(1)估計量數之差誤，此種差誤與簡單算術平均數之差誤相仿，(2)權數之差誤，若各量數大抵相等，則此種差誤爲至微細。

令w_1, w_2，……w_n爲n個估計量數 M_1, M_2，…… M_n之估計權數，再令 $w_1(1+d_1)$, $w_2(1_1+d_2)$……爲眞實權數，$M_1(1+e_1)$, $M_2(1+e_3)$……爲眞實量數。

設Mw表估計加權算術平均數，而 Mw (1+E) 表其眞實數值，則

$$Mw=\frac{\sum WM}{\sum W}, \sum WM = Mw\cdot\sum W$$

$$Mw(1+E)=\frac{[\sum W(1+d)M(1+e)]}{\sum W(1+d)}$$

$$MwE=\frac{\sum[W(1+d)M(1+e)]}{\sum[W(1+d)]}-\frac{\sum WM}{\sum W}$$

$$=\frac{\sum W\cdot\sum[W(1+d)M(1+e)]-\sum WM\cdot\sum W[1+d)]}{\sum W\cdot\sum[W(1+d)]}$$

$$E.\sum WM.\sum(1+d)=\sum W.\sum WM+\sum W.\sum WMe+\sum W.\sum WMd$$

$$+\sum W.\sum WMed-\sum WM.\sum W-\sum WM\sum Wd$$

$$=\sum W.\sum WMe+\sum W.\sum WM(d+ed)-\sum WM\sum Wd$$

兹設E,e,d均不過.1,則其乘積不過.01,可略之,

$$E.\sum WM.\sum W=\sum W.\sum WMe+\sum W.\sum WMd-\sum WM\sum Wd$$

$$=\sum W.\sum WMe+\sum[Wd(M.\sum W)]-\sum[Wd(\sum WM)]$$

$$=\sum W.\sum WMe+\sum W([M.\sum W-\sum WM)d]$$

$$\therefore E=\frac{\sum WMe}{\sum WM}+\frac{\sum[W(M.\sum W-\sum WM)d]}{\sum WM.\sum W}$$

若W_1M_1寫作m_1,則含量數之差誤e之各項與定律二相同,即$\frac{\sum me}{\sum m}$至d之係數需再加分析:

因$\sum WM=MW.\sum w$,

$$Mt\sum W-\sum MW=\sum WMt-\sum WMw$$

$$=\sum W.(Mt-Mw)=mt\sum W$$

其中mt表示某一估計量數對其加權平均數之差，

$$\therefore E=\frac{\sum WMe}{\sum WM}+\frac{\sum W.\sum Wmd}{\sum WM.\sum W}$$

$$=\sum\frac{WM}{\sum WM}.e+\sum\frac{Wm}{\sum WM}.d$$

故估計量數之差誤（e）各項包含M，M_2等，而權離差之差誤(d)各項僅包含各量數對其加權平均數之差離(m)；倘各量數對其平均數之相差度相當小，則各個離差均相當小，且wm之總和0，因$\sum Wm=\sum WM-Mw\sum W=0$，故倘使權數的差誤均相等，則平均數內由於權數之差誤為零；倘使權數之差誤與各個離差(m)不均同號，而且大差數不剛巧均遇着大權數，則勢必微小。

由是觀之，除非差誤之大小，量數之大小，以及權數之大小有一種特別連帶之關係，權數之差誤非但如同量數之差誤，有自行減低之效，而且有其係數，足使差誤互相冲消。倘項數頗多，必須權數差誤甚大，然後可與平均數以足堪重視之差誤。事實上，量數之差誤，其影響既遠在權數差誤之上

，只須權數之估定頗爲合理，而各量數又非甚懸殊，則權數之差誤常可忽視不計。

四、乘積之差誤，乘積之差誤約略等於各因子之差誤之代數和。

設 $f_1, f_2, \cdots\cdots fn$ 爲估計因子，其眞實數值爲 $f_1(1+e_1)$，$f_2(1+e_2)\cdots\cdots$，則乘積之差誤爲

$$E=\frac{f_1(1+e_1)\cdot f_2(1+e_2)\cdots\cdots-f_1\cdot f_2\cdots\cdots}{f_1\cdot f_2\cdots\cdots}$$

$$=(1+e_2)\cdot(1+e_2)\cdots\cdots-1$$

若略去兩個及兩個以上 e 之乘積，則

$$E=e_1+e_2+\cdots\cdots+e_n$$

各個 e 之爲正抑爲負，其機會相同。若一對一對之 e 不同號，則差誤有互相冲消之勢。倘各個差誤之符號相同，卽均爲正或均爲負，縱然各個差誤甚小，乘積之差誤必大。

例如估計100人每人平均收入25元，而實際上爲105人每人平均收入26元（差誤均爲正），則總收入之差誤，依上述公式計算爲 $\frac{5}{100}+\frac{1}{25}=.09$。

倘若實際上爲105人（正差誤）每人平均收入24元（負差誤），則總收入之差誤將爲 $\frac{5}{100}-\frac{1}{25}=.01$。

五、商數之差誤，商數之差誤約略等於分子分母差誤之代數差。

設 u_1, u_2 爲估計之分子分母，其眞實數值爲 $u_1(1+e_1)$，及 $u_2(1+e_2)$，則商數之差誤

$$E=\frac{\dfrac{u_1(1+e_1)}{u_2(1+e_2)}-\dfrac{u_1}{u_2}}{\dfrac{u_1}{u_2}}=\frac{1+e_1}{1+e_2}-1=\frac{e_1-e_2}{1+e_2}$$

$$=(e_1-e_2)(1-e_2+e_2^2-e_2^3+-)$$

若略去兩個及兩個以上 e 之乘積，則

$$E=e_1-e_2$$

倘使分子分母之差誤均爲正數或均爲負數，則勢將互相冲消；倘使二者約略相等，則商數之差誤極小。

吾人可應用定律五以比較某現象兩個時間數列之平均數。

記號之命定與定律二、三同，以 m, e, d 爲第一時期之估

計數值計敵値，m^1, e^1, d^1 爲另一時期之估計數值，則 m^1_1, m^1_2，……之簡單算術平均數對 m_1, m_2，……之簡單算術平均數的比率（商數）之差誤爲

$$E = \sum\left(e^1 \frac{m^1}{\sum m^1}\right) - \sum\left(e \frac{m}{\sum m}\right)$$

$$= \left(e^1_1 \frac{m^1_1}{\sum m^1} - e_1 \cdot \frac{m_1}{\sum m}\right) + \left(e^1_2 \cdot \frac{m^1_2}{\sum m^1} - e_2 \cdot \frac{m_2}{\sum m}\right) + +$$

倘若各量數（m）在兩個時期，並無劇烈變動，則 $\frac{m^1}{\sum m^1}$ 與 $\frac{m}{\sum m}$ 必相差甚微。忽略此種微末之差別，則簡單算術平均數之比率的差誤

$$E = \sum\left(\frac{m_1^1}{\sum m^1}\ (e_1^1 - e_1)\right)$$

假如兩時期之估計，環境之條件大致相同，卽差誤之機會相同，測 e_1 與 e 非但同號而已，抑且大致相等。

令 V_1, V_2，…………代替（$e_1^1 - e_1$），（$e_2^1 - e_2$）…………則

$$E = \sum\left(V_1 \frac{m^1}{\sum m^1}\right)$$，其中各個V大致甚小·

同理亦可分析加權平均數之比率的差誤。依原則：權數之差誤遠不及量數差誤之重要，吾人亦可應用上式以資估計加權平均數之比率的差誤之近似數。此公式可以文字表示如下：

六、同種數列之兩個算術平均數（觀察之時期不同）之差誤，約略等於各相應對之項目的差誤之差的和數，各差誤之差均須乘以第二時期各該量數對其總和之比率。

此項定律非常重要，有更為舉例說明之必要：

設在兩年中，吾人之估計，一部分較另一部分為可靠，乃可應用下列公式。

	第一年	第二年
估計之人數或權數	w：差誤 d	w^1；差誤d^1
估計之平均收入或量數	m_1；差誤e_1	m^1_1；差誤e^1_1
估計之人數，(較不正確者)	rw；r之差誤p	r^1w^1；r^1之差誤p^1
估計之收入，(較不正確者)	m_2；差誤e_2	m^1_2；差誤e^1_2

依假設$e_1 \angle e_2, e_1{}^1 \angle e^1_2$

第一年平均數之差誤爲 $E_1=$

$$\frac{\dfrac{w(1+d)\cdot m_1(1+e_1)+r(1+p)\cdot w(1+d)\cdot m_2(1+e_2)}{w(1+d)+r(1+p)w(1+d)}-\dfrac{wm_1+rwwm_2}{W+rW}}{\dfrac{wm_1+rwM_2}{w+rw}}$$

$$=\frac{\dfrac{m_1(1+e_1)+r(1+p)m_2(1+e_2)}{1+r(1+p)}-\dfrac{m_1+rm_2}{1+r}}{\dfrac{m_1+rm_2}{1+r}}$$

$$=\frac{m_1(1+e_1)+r(1+p)\ m_2(1+e_3)}{1+r(1+p)}\cdot\frac{1+r}{m_1+rm_2}-1$$

略去 e 與 p之乘積

$$=\frac{m_1+m_1e_1+rm_2+rm_2re_2m_2+rm_1+rm_1e_1+r^2m_2+r^2pm_2+r^2e_2m_2}{\{1+r(1+p)\}(m_1+rm_2)}$$

$$-\frac{m_1+rm_1+rpm_1+rm_2+r^2m_2+r^2pm_2}{\{1+r(1+p)\}(m_1+rm_2)}$$

$$=\frac{m_1e_1+rpm_2+re_2+re_2m_2rm_1e_1+r^2e_2m_2-rpm_1}{\{1+r(1+p)\}(m_1+rm^2)}$$

$$=\frac{e_1m_1\{1+r(1+p)\}+e_2rm_2\{1+r(1+p)\}+rp(m_2-m_1)\overbrace{-rpe_1m_1-r^2pe_2m_2}^{\text{略去}}}{\{1+r(1+p)\}(m_1+rm_2)}$$

$$=e_1\frac{m_1}{m_1+rm_2}+e_2\frac{rm_2}{m_1+rm_2}+p\frac{r}{1+r(1+p)}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+rm_2}$$

略去$\frac{r}{1+r(1+p)}$中之 rp，則

$$\sum_1=e_1\frac{m_1}{m_1+m_2}+e_2\frac{rm_2}{m_1+rm_2}+p\frac{r}{1+r}\frac{m_2-m_1}{m_2+rm_2}$$

由是觀之，e_2與 p（較不正確部分之差誤）均與 r（較不正確部分之權數與比較正確部分之權數的比率）相乘，p 並與m_2-m_1相乘，而m_2-m_1常甚微小，同時依假定e_1甚爲微小。

爲說明簡便起見，假定在兩時期較不正確之部分對全體之比率（r）不變，同時假定兩部分平均收入比率$\left(\frac{m_1}{m_1+rm_2}\right)$亦不變，乃得兩年算術平均數之比率的的差誤

$$E=(e_1'-e_1)\frac{m_1}{m_1+m_2}+(e_2'-e_2)\frac{rm_2}{m_1+rm_2}+(p'-p)$$

$$\frac{r}{1+r}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+rm_2}$$

例：蘇格蘭農業工人平均工資變動

	1867		1892	
	人數	平均收入(鎊)	人數	平均收入(鎊)
已婚農夫 估計數值	1,000	36	1,200	49
	(w)	(m_1)	(w^1)	(m_1')
已婚農夫 假設眞實數值	1,010	35	1,220	48
其他僱傭 估計數值	200	34	240	41.25
	(rw)	(m_2)	(r^1w^1)	(m'_2)
其他僱傭 假設眞實數值	220	37	240	47

$$r = \frac{200}{1,000} = \frac{1}{5}, \quad r^1 = \frac{240}{1,200} = \frac{1}{5}$$

$$d = \frac{1,010-1,000}{1,000} = \frac{1}{100}, \quad d^1 = \frac{1,220-1,200}{1,200} = \frac{1}{60}$$

$$e_1 = \frac{35-36}{36} = -\frac{1}{36} \qquad e_1' = \frac{48-49}{49} = -\frac{1}{49}$$

$$e_2 = \frac{37-34}{34} = \frac{3}{34} \qquad e_1' = \frac{47-41.25}{41 \cdot 25} = \frac{23}{165}$$

$$p = \left(\frac{220}{1010} - \frac{200}{1000}\right) \div \frac{200}{1000} = \frac{9}{101}$$

$$p^1=\left(\frac{240}{1220}-\frac{240}{1200}\right)\div\frac{240}{1200}=-\frac{1}{61}$$

上表假定已婚農夫之收入估計過高，而其他僱傭則過低。蓋因事實上其他僱傭之供宿及他項供應之實際收入不易估定。且兩種農人之人數比例亦不能正確知之。

代入前列公式：

(1)由於已婚農夫收入估計之差誤

$$E(e_1)=(e_1'-e)\frac{m_1}{m_1+rm_2}$$

$$=\left(-\frac{1}{49}+\frac{1}{36}\right)\times\frac{36}{36+\frac{1}{5}\times 34}=.0062$$

(2)由於其他僱傭收入估計之差誤

$$E(e_2)-(e'_2-e_2)\frac{rm_2}{m_1+rm_2}$$

$$=\left(\frac{23}{165}-\frac{3}{34}\right)\times\frac{\frac{1}{5}\times 34}{36+\frac{1}{5}\times 34}=.0081.$$

(3)由於兩種農人人數比例估計之差誤

$$F(p)=(p^1-p)\frac{r}{1+r}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+rm_2}$$

$$=\left(-\frac{1}{61}-\frac{9}{101}\right)\times\frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}\times\frac{34-36}{36+\frac{1}{5}\times 34}=.0008$$

第三種差誤，即由於權數之差誤，至爲微小。

兩年平均收入比率之差誤爲

$$E=E(e_1)+E(e_2)+E(p)$$

$$=.0062+.0081+.0008$$

$$=.0151$$

試由實際數字觀之：

$$\text{估計比率}=\frac{1892\text{ 之 估計平均收入}}{1867\text{ 之 估計平均收入}}$$

$$=\frac{\frac{1200\times 49+240\times 41.25}{1200+240}}{\frac{1000\times 36+200\times 34}{1000+200}}$$

$$=\frac{47\cdot708}{35.667}=1.3376$$

$$\text{假定眞實比率}=\frac{1892\text{ 之 假定眞實平均收入}}{1857\text{ 之 假定眞實平均收入}}$$

$$=\frac{\dfrac{1220\times48+240\times47}{1220+240}}{\dfrac{1010\times35+220\times37}{1010+220}}$$

$$=\frac{47\cdot836}{35.358}=1.3529$$

$$\text{比率之差誤}=\frac{1.3529-1.3376}{1\cdot3376}$$

$$=\frac{\cdot0153}{1.3376}=.0114$$

,0151 與.0114 之差別乃由於計算方法之略去較不重要項目故也。

所當注意者實際數量比率之差誤與增加率之差誤不同，在上例中

估計增加率$=1.338-1=.338$　或 33.8%

假設眞實增加率$=1.353-1=.353$　或 35.3%

則增加率之差誤$=\dfrac{35.3-33.8}{33.8}=\dfrac{1.5}{33.8}=0.45$

第四節　偏誤與非偏誤

一、偏誤與非偏誤之意義。無論平均數或比率之差誤，亟應區別其爲偏誤抑爲非偏誤。其分別可舉例說明如次：設派遣若干人員赴各地調查工業狀況，其目的在證明工資高，工作情況合乎衞生，勞資協調等，則彼等或將僅考察經營最善之廠家，並僅取精工及長工之工資，因而所得各地平均工資不免太高，此種差誤，謂之偏誤，其方向相同，均有增高平均數之勢，總平均數之差誤，約等於每處之差誤。反之，若調查人員胸無成見，調查至爲公平，因而各視環境之不同，若干地點太高，其他則太低，此種差誤，謂之非偏誤，過高與過低之機會相等，調查之地點愈多則總平均數之差誤愈小。試觀下表，可見兩種差誤對平均數之影響：

	事 實	有成見之調查	無成見之調查
甲區平均工資	24元	25元	24元
乙區平均工資	23	25	25
丙區平均工資	26	27	25
丁區平均工資	27	28	28
戊區平均工資	28	30	27
總平均	25.6	27	25.8
差 誤	—	5.2%	1%

設乘一脚踏車，以行程自動測量器測量公路之距離，則將發現各個里程標石間之距離，未必相等，但其不足一公里或大於一公里之機會相等，行程愈遠，則總差誤愈小。是爲非差誤。倘使測量器不甚準確，往往行一公里之遙，紀錄950公尺，則其差誤爲偏誤。是故偏誤常能測定而剔除之，但非偏誤則只能任其自行冲消。尋常偏誤大抵由於測度工具之不精而產生；非偏誤則發生於測量技術上之過失。

二、偏誤與非偏誤之比較重要性　當調查人口時，婦女所報告之年齡，常較眞實年齡爲輕，足使平均年齡減低；而一般人則常報告圓整數目如五十歲、六十五歲之類，但就平均而論，並無甚影響。前者爲偏誤，後者爲非偏誤。總之、在單獨估計中，非偏誤不若偏誤之重要；但在兩個同性質之估計的比率中，則偏誤常能自行冲消。

令$e_1, e_2 \cdots$表各個量數之非偏誤，$d_1, d_2 \cdots$表其偏誤，則由定律二可知平均數之差誤爲

$$E=\sum\left(e\cdot\frac{m}{\sum m}\right)+\sum\left(d\cdot\frac{m}{\sum m}\right)$$

第一項之各個非偏誤e，有正有負，足以互相冲消。設以a表示$e_1, e_2, \cdots\cdots\cdots\cdots e_n$之平均數，則上式第一項之總和

其一次近似值爲 $\dfrac{2_2}{3\sqrt{n}}$

例如有百次測量，每次非偏誤約爲$\frac{1}{10}$，則平均數中由於非偏誤之差誤不過

$$\frac{2a}{3\sqrt{n}} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{10}\div\sqrt{100} = \frac{1}{150}$$

但偏誤則無互相冲消之效，若每次高$\frac{1}{10}$，則平均數亦將高$\frac{1}{10}$。

三、偏誤之重要。倘目的在求確度，則當權宜輕重，注意關係之重要，而忽略非偏誤。斤斤於測量技術改良，減少非偏誤；而由測量工具所生之偏誤，反置之不問，良屬無謂。當調查之時，常有偏誤存在其間，茍吾人不知其有無，自無法可想；設或知之，則縱用最粗疏之方法以校正之，較諸置若罔聞，尤為正確。因當用無成見之方法校正有成見之差誤（偏誤），則使偏誤變為非偏誤，由是平均數所包含之項數愈多，其差誤愈小。例如一萬農人調查之結果，得每月平均工資十三元，並有理由足以證明各個非偏誤約為一元，則非偏誤對平均工資之影響不過

$$\frac{2a}{3\sqrt{n}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1元}{\sqrt{000}} = \frac{1元}{150} = ,007元$$

但此平均數不免為一妄誕之平均數；因農人之實際所得

例如農忙時期之加工，計件工作之工資。膳宿之供給等，未必能有精確之計算。若捨此而不計算，則平均數之差誤甚至有 5 元之多。倘對各個農人之上述實際所得，與以估計（化偏誤爲非偏誤），縱然每次估計可有 5 元之差誤（非偏誤），而無其他偏誤之存在，則平均數之差誤不過

$$\frac{2a}{3\sqrt{n}}=\frac{2}{3}\frac{5\text{元}}{\sqrt{10000}}=\frac{1\text{元}}{30}=.033\text{元}$$

是則全部差誤不過4分(.007＋.033)而非5元。在考定一般報告之數字的確度時，此項原則必須銘諸座右，注意有無偏誤之存在。

四、比率之確度　若研究比率之確度，情形完全不同。依定律五比率之差誤約等分子、分母差誤之差、設以 q_1，q 表分子、分母之偏誤，e^1，表其非偏誤，則比率之差誤：

$$E=(d^1-d)\quad+(e^1-e)$$

其中非偏誤（e^1-e）約與 e^1 或 e 相等，因若以 E 表 e

或 e^1 之概差，其（s^1-e）之概e，爲 $E\sqrt{2}$。倘e或e^1

不致大於$\frac{2}{5}$，則(e^1-e)似不致大於$\frac{4}{5}\sqrt{2}$即$\frac{3}{5}$。

但偏誤(d^1-d)則不然，若分子分母之偏誤同號（均爲正，或均爲負）則比率之偏誤必較分子分母之偏誤爲小。祇須分子分母之估計方法確實相同，即調查同樣對象所問之問題相同，關於問題之內容取舍一致，則分子分母之偏誤，必無二致。再以前舉農業工資爲例，設兩次調查，除調查每月平均工資之外，均有忽略任何其他收入之顯然錯誤，則兩次比率之差誤之由於於此項偏誤者僅視工資率對其他收入之比例有無變動耳，而在短期間內，此項比例之變動，必甚微末。若兩次均僅調查夏季工資以代表全年平均工資，則比率之差誤，亦僅視夏季工資對平均工資之比例如何耳。故變動遲緩之現象，兩期估計（方法相同）之比率的差誤，當較各期之差誤爲小；何者？因非偏誤雖則略有增加，而最重要之偏誤則大形減低矣。此處吾人無容知道有無偏誤之存在，偏誤將自行消滅。若知其確有偏誤，並有方法足以作更正確之估計，自非無益；但若在一期內剔除其偏誤，而在另一期內則置之不問，以求兩期之比率，則不免鑄成大錯。爲比較起見，使後

期之估計較前期為正確，非徒無益，且常困難重重。因非偏誤雖可略微減低（設E與E_1為兩期之非偏誤，則比率之非偏誤為$\sqrt{E^2+E_1^2}$。此項偏誤視 E 或 E_1之減小而隨之減小），但比較重要之偏誤反而有增無減。

五、連續發表之統計其確度宜一致　政府統計人員或其他人員編製統計，不免兩難：一方面為使每年之報告，漸入正確起見，必須力求方法之改善，必須注視情況之變化，而調整其編製及表列之方法；另一方面為使歷年數字便於比較起見，則宜絕對保守，明知過去之錯誤而不加改革，但十分小心，不再有新錯誤或新遺漏。此種困難，通常之避免方法如次：當起初引用改良之方法時，表列時除用新之分類外，另為一舊式表式，以資與以前比較。當方法之變動所引起之差別，已經明瞭後，則往時之數字，乃可以調整之，使其確度與後期相若。　例如英國商業部1898以後，編製出口總值統計，包含隨貨出售與外人之船舶，而以前則否，故表列兩列兩期數字如下：

	1899	1898
英貨出口總值（不計隨貨出售與外人之船舶）……………	225,465,000鎊	233,359,000鎊
英貨與英屬商品由英轉運出口總值…………………………	65,020,000	60,655,000
總　計………………………	320,485,000	294,014,000
隨貨出售與外人之船舶總值	9,195,000	末　詳
新　總　計…………………	329,680,000	

在搜集資料及表列資料時，輕於些小之更動，常爲統計上錯誤之原因，此不可不注意也。

第五節　結論

本章討論之結果：可概述如次。有兩種方法足以增高確度：平均法可以減小非偏誤，而比率法可以減小偏誤。權數之差誤，遠不及其他差誤之重要。差誤雖不易計算，但可以所含各項之差誤表明之；雖不能得到絕對之正確，而可用上述方法以消減差誤，並用數學方法以測量消減之程度。其在同種數列或同法估計之數列的加權算術平均數的比率原則，有差誤必可大大消滅，此所以指數有其特殊之功用也。

第九章　比例

第一節　比例之意義

研習經濟學或社會科學者常用及各種比例(Ratios)或比率(Rates)，如死亡率(Death rates)，出生率(Birfh rates)，結婚率(marriage rates)，稅率(Tax rates)，勞工轉移率(Labor trunover rates)，股票轉移率(Stock turnover rates)等等均是。蓋由大量觀察而來之數字係絕對數值，而僅此絕對數值有時難以明瞭二者間之關係。例如甲市之人口爲2,000,000人，某年共死亡20,000人；乙市之人口爲500,000人，某年共死亡15,000人。吾人若謂甲市死亡人數較乙市死亡人數多5,000人，殊屬毫無意義，蓋甲乙二市人口並非相等，其人口多者之死亡人數當然應比人口少者爲多，故必須將死亡人數與總人口對照後始能互相比較，亦卽求得死亡人數對總人口之比例後始能比較，故有時欲比較各種現象間之關係時，非求出其比例不可。

比例爲一分數，係用以比較某現象與其結合現象者，而某現象爲分子，其結合現象爲分母。例如某公司民國三十年之銷貨對平均存貨之比例爲3.8，其意卽爲民國三十年之銷

貨爲分子，平均存貨爲分母，所得分數之數值爲/3.8。惟比例有用百分數表示者，即將原分數乘以100示之，此亦不可注意者也。

比率通常爲以時間爲單位之比例〔註〕例如死亡率爲每年每一千人中之死亡人數，利率爲每年每一元之利息，此均以一年爲單位之比例也。

由於此種關係，吾人可注意絕對增加，相對增加，絕對增加率，與相對增加率之區別。設若某地民國二十年之人口爲1,000人，民國三十年增至1,500人，則絕對增加爲500人，而相對增加爲增加人數對民國二十年人口之比例即50%，但此兩種數字均未顧及時間之因素。絕對增加率爲每年之增加人數即50人，相對增加率爲每年增加人數對民國二十年人口之比例，即每年增加5%，此兩種數字均係以時間爲單位者。比率通常爲相對比率。且在表示人口之增加率時，常非如上例所舉之以某一年爲基年之簡單比例，而爲幾何平均之比例。

註有時亦有例外，例如外匯率並非以時間爲單位，而指某一時期之外匯價格。

第二節　比例之種類

統計學上所用之比例，按性質之不同，可分五種：(一)變之比率(Rates of Change)，(二)分配之比例(Disatributlon satos)，(三)類別間之比例(Inter-class ratios)，(四)不同事物之比例(Hybrid ratios)，(五)特種統計係數。玆分述於下。

(一)變動之比率　變動之比率爲解釋社會生活與經濟生活變動之重要工具。設吾人欲比較國民財富之增加，或價格之變動，均須用變動比率。下表所示鷄蛋每月價格之環比，卽變動比率，係示各月蛋價對上月蛋價之變動，若爲100無變動，超過100之數，爲增高之百分數，不及100之數，減低之百分數。

鷄蛋每月價格之環比

	1917	1918	1919	1920	1921
一　月	99.0	106.9	104.0	104.7	94.0
二　月	95.0	106.7	84.4	87.8	81.2
三　月	94.4	81.8	68.5	81.9	58.9
四　月	70.0	77.2	03.6	83.3	69.9
五　月	115.8	93.4	107.3	90.4	99.0
六　月	108.7	96.1	104.9	98.9	96.0
七　月	91.0	103.0	95.3	99.2	113.4
八　月	105.3	112.1	106.8	109.0	120.9
九　月	111.4	105.8	104.3	110.5	114.3
十　月	122.6	114.3	109.9	113.3	112.5
十一月	105.3	113.5	120.8	113.6	129.2
十二月	109.9	119.5	114.6	114.2	115.6

（資料來源：　林和成著實用工商統計254頁）

（二）分配之比例　分配之比例係示一部分對其全體之數字關係，常用百分數示之。下表第三列所示即分配之比例，係示各種族所佔全人口之百分比，如白種佔全人口之89.7%，黑種佔全人口之9.9%等等。

（三）類別間之比例　類別間之比例係示某一部分與另一部分之關係，或某一種類與另一種類之關係。下表第六

列所示性比例卽類別間之比例，係示男性對女性之比例，例如總人口之性比例爲104.0，卽示總人口中男性對女性之比例爲104比100。

（四）不同事物之比例　不同事物之比例係用以比較不同事物者，故分子分母非同一種類之事物，此與上述數種比例所不同者也。所有「每人若干」之比例關係均屬此類，如每人所得，每人費消量，每人財富等是。同樣，鉄路上每噸或每人之收費亦不同事物之比例，其餘可依此類推。因此種比例係不同事物之較，故必須用平均數表示，而不能如上述比例之以百分數表示之。

（五）特種統計係數　特種統計係數爲特種比例，係示同一數列中某項目對另一項目或兩數列有關項目間之關係。前者如以前所述離散係數爲同一數列之標準差對算術平均數之比例，用以示該數列之離散程度者；後者如各種相關係數(Coefficients of Correlation)係示兩數列相互間之關係者。

美國1920年各種族人口比較表

(1) 種族別	(2) 人口數	(3) 各族佔全人口之百分比	男	女	性比例
總人口	105,710,623	100.0	53,900,431	51,810,189	104.0
白種	94,820,915	89.7	48,430,655	46,390,260	104,4
黑種	10,463,131	9.9	5,209,436	5,253,695	99,2
印地安人	244.437	0.2	125,068	119,369	104,8
中國人	61,639	1.0	53,891	7,748	695,5
日本人	111,010	0.1	72,707	38,303	189.8
菲律賓人	5,603	(a)	5,232	371	1,410.2
北印度人	2,507	(a)	2,409	98	(b)
高麗人	1,224	(a)	923	301	306.6
夏威夷人	110	(a)	75	35	(b)
其他種族	44	(a)	35	9	(b)

(a)小於0.1%，故未列入。

(b)女性人口少於100，故未計算性比例。

（資料來源； 美國1920年第十四次普查，第三編人口，第十一頁）

第三節 比例之計算與應用

比例之計算甚爲容易，祇須根據上述各種比例之意義，

將比較之事物一爲分子一爲分母卽可，惟爲使比例數字顯著起見，常乘以10之乘方數，最通用者爲乘以100，卽百分數。他如乘1,000，乘100,000亦常用之；乘1,000者如死亡率，其意卽每1,000人中死亡之人數；乘100,000者如特種死亡率，其意卽每100,000人中因某種病因死亡之人數。若比例數欲求準確至一位小數，則必須計算至兩位，而後略去一位。此爲計算與應用時一般注意之點，其尤應遵守之原則如下：

(一)比例之分母小於100，不宜用百分數，蓋易致錯誤之結果也。

(二)求比例之平均數時須注意加權。設有學生以其獎學金額之50%及家庭所給費用之10%購書，則除非兩種收入相等。否則購書費用決非兩種收入之30%。同樣，各省人口增加率之平均數，決非全國人口之增加率，除非各省之人口數相若。故求比例之平均數時必須注意加權，其權數爲各原比例之分母。

(三)分配之比例僅當總數同質時始能適用。在求分配比例之前必須考慮總數與其各部分是否同一性質，例如美國農業普查所得農場牲畜之總數卽非完全同質，若用以求馬、騾

、驢、牛、山羊、豬、綿羊、家禽等佔總牲畜之百分數，卽不甚適用。

(四)增加率或減少率僅當增加或減少數量與基數有顯著關係時始爲重要。例如一地人口之增加係基於自然之原因，而文盲之增加或減少並非基於自然之原因，若文盲之變動率用全人口爲基數，則比較此種變動率時必須加以極大之注意，蓋正確之比較固當以文盲人數與文盲減少人數相比較也。

(五)比例之良否賴於分子分母之適當選擇。通常一種事實必須與其所由出之事實比較，例如比例之分子若爲戰爭之傷亡人數，則分母必須爲參加戰爭之人數；若分子爲結婚人數，則分母應爲可婚人數，雖然該項原則常被混亂，但需要遵守亦至屬明顯者。

(六)比例之比較僅當其分子與分母均屬可以比較時始有意義。比較兩種或數種比例時常易發生錯誤，縱使此兩種比例甚爲一致或甚相似，而經深密之考慮後，常亦有不能作嚴格之比較者，故若比較比例或百分數時，必須注意其分子與分母能否互相比較。此一原則於邏輯比較上甚爲重要，且常不易被遵守，蓋資料常係不同時間或不同機關所搜集，自不易相比較也。但多數不能遵守此原則之原因係基於疏忽不能比較分子之或分母，下節所述經濟現象中之數項特種比例卽

其例也。

第四節　特種比例

在表示商業情況之各種比例中，信用率 (Credit ratios) 卽爲有特殊用處之一種比率，故有稱之爲信用測度計者。華爾氏(Alexander wale) 曾對此種商業比率作特殊之研究，此種比率對於信用之決定有重大之幫助，尤以『 靜態比率 』(Static ratios)與『動態比率』(velocity ratios) 之分別甚爲重要，前者測定某一期之財政狀況，後者係銷貨與資產負債中某一特定項目之比較。『靜態比率』分四種：(1)流動率(Current ratic) 卽流動資產對流動負債之比率；(2)應收款項對商品之比率；(3)債款對純値之比率；(4)純値對固定資產之比率。『動態比率』係銷貨對(1)應收款項，(2)商品，(3)純値，與(4)固定資產之比率。習慣上常以流動率爲標準而甚少注意其他各種信用之比率，但華爾氏以爲較合邏輯之分析，當按各種商業定其標準，各種比例均可似流動率之一樣應用也。

多種商業或經濟上所用之比例，均可加以適當之討論，但於此所欲討論者爲易致錯誤之數種。

其一爲勞工移轉率 。表示勞工移轉之方法甚多 ，但最

普通之一種爲一年中辭退人數除以工資賬之平均人數，卽如下式：

$$\frac{\text{一年中辭退人數}}{\text{工資賬之平均人數}}\times 100=\text{勞工移轉率}$$

然有以更換人數代替辭退人數爲分子者，亦有以平均在工人數代替工資賬之平均人數爲分母者，吾人自無法一一列舉各種可能之方法；但若一用辭退人數，一用更換人數，則比較時必得錯誤之結果。

其二爲利率，(Interest rates)，卽一年所付利息對本金之百分比例。對於借款時期之長短並無關係，例如短期借款雖不滿一年，其利率仍表示一年所付之利息，同樣長期借款，雖至三年五年，其利率亦表示一年所付之利息，如此始可比較也。

其三爲稅率。(Tax rates) 所得稅率常指對於所得應課之百分數。財產稅率在美國指財產估價每元之千分數，但應加區別者爲名義稅率(Nominal tax rate)與估計之眞實稅率(Estimated true tax rate)，後者爲稅額除以財產之市價。例如財產稅率爲千分之23.5，若有一汽車估價1,000元，則應納

稅款爲23.5元，而若該輛汽車實值僅 500 元，則眞實稅率爲千分之47.0，若該輛汽車實值 2,000 元，則眞實稅率爲千分之 11.75 ，故比較兩城之名義稅率實毫無價值，蓋分母性質不同不能比較也。例如美國1919年芝加哥(Chicago)之名義稅率爲59.29，尼伯拉斯加州之峨瑪哈 (Omaha, Nebraska) 爲100.73,威斯康州加瑪的孫(Madison, Wisconsin)爲13.50；但其售價之眞實稅率爲14.77，18.53與13.50。

上述爲商業與經濟上習見之比例，在生命統計之範圍內，比例之應用亦甚爲廣泛，其最主要者爲死亡率s，出生率，結婚率，離婚率，與疾病率。但須注意者此諸比率常以求得之比例乘以 1,000 。

死亡數爲某一時期(常爲一年)內死亡人數對於該時期中之生存人數比例，因是常用一年內死亡人數與該年七月一日估計人數之比例示之。但吾人必須注意普通死亡率，特種死亡率，與標準死亡率之區別。若某城民國二十五年之死亡人數爲 20,000，該年七月一日之估計人口數爲2,000,000，則普通死亡率爲 10.0卽1,000人中死亡10人。若死亡之人數中

，有10.000人爲死於腸熱病者，則即可據以計算腸熱病死亡率，特種死亡率即分別就各種死亡原因，性別，年齡組成或其他特種分類所計算之死亡率，在分析比較上，特種死亡率較普通死亡率有價值。標準死亡率係將普通死亡率就性別與年齡之組成加以調整後之比率。

另有所謂嬰兒死亡率者，係根據特種方法計算，通常以某年嬰兒死亡人數對嬰兒出生人數之比例示之。

出生率較爲簡單，即某一時期（常爲一年）內出生人數對於該時期中點生存人數之比例。自然增加率爲出生率與死亡率之差數，若無遷入或徙出，則出生超過死亡之數，應與普查時人口增加之數相同。

結婚率普通指一年內結婚人數對於該年七月一號估計人數之比例而言，但用此法比較殊不合理，因各地人口之年齡組合不同，所能結婚之人數亦有差異，以不同條件之事項相比，顯然不合比較之原則，故合理之結婚率應以可婚人數爲比例之基礎，即爲一年內結婚人數除以該年七月一號之可婚

人數所得之比例數。

離婚率之計算方法與結婚率同樣，普通係以一年內離婚人數除以該年七月一日之估計人數，但合理之離婚率應為一年內離婚人數對該年七月一號已結婚人數之比例。

疾病率係一年內某種病件對該年七月一號估計人數之比例。此種比率對於流行病學之研究，極有用處。

在生命統計範圍內，比例之應用固廣，而其錯誤亦最易發生。例如普通死亡率（亦稱粗死亡率或總死亡率）係以全體人口為比例之基礎，包括兩性，一切年齡，國別，一切職業，及一切死亡原因；而吾人知年齡，國別，兩性諸因素對於死亡率能發生影響，故不管人口之組成僅比較普通死亡率實易生極大之錯誤。卽就特殊死亡率言之，若不細加分析，而妄為比較，亦易生錯誤之結果：例如按職業之種類求男子之死亡率，結果，銀行行長之死亡率，定比賣報男孩之死亡率為高，此決非職業之不同，使銀行行長之死亡率高於賣報男孩之死亡率，實因年齡不同之影響。總之，吾人使用比例時必須細加分析並注意上節所述之應用原則也。

第十章　指數

第一節　指數之意義

指數者，用簡單之數字表示現象在空間或時間之變化者也。就狹義之指數定義言之，其所示之現象爲綜合複雜不能直接測量者，所得指數卽大陸派所稱之綜合指數，（國人常譯 Aggregatve index 爲綜合指數實欠妥）；就廣義之指數定義言之，不管現象之單獨或綜合，簡單或複雜，凡表示現象在空間或時間之變化者均爲指數，卽包括大陸派所稱之個體指數與綜合指數。但個體指數實卽上章所述之比例數，故本章所述限於綜合指數，而一般所謂指數，亦指綜合指數而言也。

例如物價，其變化甚爲複雜，世間物品不止一種，其變化之趨勢亦不一律，或上漲，或下落，或相差甚大，或變動甚微，苟無簡單之數字以示一般物價之變化，則異地異時之物價將無由比較。更就生產而論，煤鉄之生產以噸計，米麥之生產以擔計，布綢之生產以疋計，發電機之生產以馬力計，倂此性質迴異單位不同之產量而欲比較其在不同時間或空

間所生之變化，非先將複雜之數量化成簡單之數字不可，此簡單之數字卽指數也。

第二節　指數之種類

指數之種類甚多，若依比較之基性及所用資料之不同，可分下列數種：

(一)依比較之基性分

(1)時間性指數　所謂時間性指數，卽以時間爲基性，表示現象在時間上之變化者也。例如以民國二十五年之平均物價爲基數，求各時間之指數卽是。惟以基期（Base Pe-riod）之不同，又可分爲定基，環比及鎖比等三種。

(2)地域性指數　以地域爲基性表示現象在空間之變化者謂之地域性指數，例如以南京之平均工資爲基數求各地之工資指數卽是。

(二)依所用資料之不同分　指數如依所用資料之不同分，種類甚多，玆舉其最著者述之如次：

(1)物價指數　在現代經濟制度之下，吾人之經濟行爲莫不受物價之支配，整個經濟機構莫不受物價之影響，故經濟學者必硏求物價現象也，而物價現象錯綜複雜難以捉摸

，故有物價指數之編製，物價指數卽用以示物價現象之變化者也。物價指數又以所用物價之不同，可分爲下列三種：

甲、批發物價指數——批發物價爲商人大宗買賣物品時所議定之價格，以此價格編成指數，卽批發物價指數(Index numbers of wholesale prices)。其效用乃在測定市場上一般物價之漲跌，及商業循環之眞相者也。

乙、輸出入物價指數——輸出入物價，爲國際貿易商人所宣佈之價格，或進出口商在貨物通過海關時所報，或海關所估之價格，以此價格編製之指數，卽輸出入物價指數(Index numbers of export and import prices)。編製此種指數之目的，乃在表示國際市場上，一國人民實際所付價格之變動，並可藉以推測國際貿易盛衰之趨勢。

丙、零售物價指數——零售物價，係消費者直接購買物品所付之價格，以此價格編成指數，卽所謂零售物價指數(Index numbers of retail prices)是也。編製此種指數之目的，乃在測定人民生活費用度之高低及貨幣購買力之強弱，研究社會經濟者，俱以此種指數爲立論之根據。

(2)生活費指數　生活費乃維持人類生存之費用，如衣

食住及燃料等費用是。生活費指數 (Index numbers of the cost of living) 乃卽測量生活費之變遷者也。

(3)工資指數　工資指數(Index numbers of Wages)乃以工人工作之報酬，編成之指數，其效用在測定工人工作酬勞之變遷，並可藉以解決勞資糾紛問題。

(4)外匯指數　外匯指數(Inbex numbeɹs of foreign exchange)者測量一國貨幣對外匯率變動而編製之指數也。其在用金國與用金國之間，可不必有基期而以平價爲基數，惟在用銀國與用金國之間，則須有基期方可比較。

(5)國外貿易指數　國外貿易指數(Index numbers of foreign trade)乃以一國對外貿易額編成，用以表示對外貿易之狀況者也。此種指數宜用對外貿易額編成，否則卽不足以確示對外貿易之實際趨勢，蓋貿易値之增加或減少，不能認爲貿易額亦增加或減少也。

(6)證劵指數　證劵指數(Index numbers of securities)乃以公債劵，公司股票及其他有價證劵之價格或買賣數量等編製之指數。其效用，乃在窺測債劵股票等發行業務之盛衰

及投資利益之大小者也。

指數除上述六種外，又有所謂生產量指數及消費量指數，用以測定供求之是否相應；成本指數用以預測營業之盈虧，據爲定價之標準；種類之多，殊不勝枚舉。

但指數雖依基性之不同，可分時間性指數與地域性指數兩種，而一般使用者均爲時間性指數，故以下各節以時間性指數爲討論之對象，而地域性指數不難由此想像得知也。

第三節　指數之計算方法

一、總和法(Aggregative methcd)

總和法係將各統計數列之屬於同一時期者分別總和之，而後分別求各期總和對基期總和之比例，此比例乘以 100 卽爲指數。設

基期各數値之總和爲：$p_0' + p_0'' + p_0''' + \cdots\cdots + p_0^{n}$

$$= \sum p_0,$$

計算期各數値之總和爲：$p_1' + p_2'' + p_1''' + \cdots\cdots + p_1^{(n)}$

$$= \sum p_1$$

則總和式指數之公式為

$$A=\frac{\sum p_1}{\sum p_0}\times 100$$

例重慶市民國二十九年一月至六月八種物品之零售價格如下表：

重慶市民國二十九年一月至六月八種物品之零售價格表

（單位二元）

物品	一月	二月	三月	四月	五月	六月
米	1.480	1.000	2.050	2.540	2.820	3.600
麵粉	0.180	0.190	0.240	0.300	0.300	0.400
猪肉	0.600	0.600	0.600	0.600	0.720	0.800
菜油	0.850	0.870	0.800	0.800	1.000	1.120
豆腐	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.030
白土布	0.170	0.520	0.090	0.900	0.300	0.920
嵐炭	6.750	7.700	7.860	7.800	8.700	12.050
肥皂	0.400	0.450	0.570	0.580	0.800	0.900
共計	10.750	11.950	12.830	13.600	15.0[illegible]0	19.820

先分別計算各月八種物價之總和，計一月為 \$10,750 二月為 11.900 三月為 12.830 四月為13.600五月為 15.400 六

月爲 19.820 若以一月爲基期，則卽可根據公式得各月之指數如下：

$$\text{一月之指數}=\frac{10.750}{10.750}\times100=100.00$$

$$\text{二月之指數}=\frac{11.950}{10.750}\times100=111.16$$

$$\text{三月之指數}=\frac{12.830}{10.750}\times100=119.35$$

$$\text{四月之指數}=\frac{13.600}{10.750}\times100-126.51$$

$$\text{五月之指數}=\frac{15.400}{10.820}\times100=143.26$$

$$\text{六月之指數}=\frac{19.820}{19.750}\times100=184.57$$

用總和法所求得之指數稱總和式指數。

二、比率平均法

比率平均法者，先求兩時期相應對數值之比率，而後再依平均法以求指數之法也。依所取平均數之不同，而有下述五種：

(1)算術平均　求各比率之算術平均數，而後乘以 100，所得指數稱爲算術平均式指數。

設計算期之各項數值爲p_1'，p_1''，$p_1'''$$p_1(n)$；基期之各項數值爲$p_0'$，$p_0''$，$p_0'''$，……$p_0{}^n$　；兩時期相應對數值之比例爲$\frac{p_1'}{p_0'}$，$\frac{p_1''}{q_0''}$，$\frac{p_1'''}{p_0'''}$，……$\frac{p_1(n)}{p_0n}$；項數爲 n；則算術平均式指數(I_M)之公式爲

$$I_M=\frac{I}{n}\left(\frac{p_1'}{p_0'}+\frac{p_1''}{p_0''}+\frac{p_1'''}{p_0'''}+\cdots\cdots\cdots+\frac{p_1(u)}{p_0n}\right)\times 100$$

$$-\frac{I}{n}\sum\frac{p_1}{p_0}\times 100$$

例如前表之資料，求算數平均式指數，可先求各項物品各計算期價格對基期價格之比例。設以一月爲基期，求各項物品其各月價格對一月價格之比例如下表：

重慶市民國二十九年一月至六月八種物品之零售價格比率表　（一月爲基期）

物　品	一月	二月	三月	四　月	五　月	六　月
米	1.0000	1.0871	1.3851	1.7162	1.0054	2.4324
麵　粉	1.0000	1.0556	1.3333	1.6697	1.6667	2.2222
猪　肉	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.2000	1.3333
菜　油	1.0000	1.0235	1.9412	0.9412	1.2471	1.3176
豆　腐	1.0000	1.0000	1,0000	1.0000	1.0000	1.6000
白土布	1.0000	1.1064	1.4681	1.9140	1.9574	1.9574
嵐　炭	1.0000	1.1407	1.1644	1.1644	1.2889	1.7852
肥　皂	1.0000	1.1250	1.4250	1.4500	2.1500	2.2500
共　計	8.0000	8.4323	9.7171	10.8534	12.4155	14.7981
指　數	100.00	106.65	121.46	135.67	155.49	184.98

而後按照公式，求各月各項比例之算術平均數乘以 100，即得各月之算術平均數，如上表指數欄所示。

（2）幾何平均　求各比率之幾何平均數，而後乘以 100，所得指數稱爲幾何平均式指數，設計算期與基期相應對數值之比率爲 $\frac{p_1'}{p_0'}$，$\frac{p_1''}{p_0''}$，$\frac{p_1'''}{p'''}$……………$\frac{p_0(n)}{p(n)}$；項數爲 n

；則幾何平均式指數(IG)之公式爲

$$I_G = \sqrt[u]{\frac{p_1'}{p_0'}, \frac{p_1''}{q_0''}, \frac{p_1'''}{p_0'''} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{p_1u}{p_0u}} \times$$

實際計算時，必須利用對數，卽採用下式

$$\log I_G = \frac{1}{N}\left(\log\frac{p_1'}{p_0'} + \log\frac{p_1''}{p_0''} + \log\frac{p_1'''}{p_0'''} + \cdots\cdots\cdots + \log\right.$$

$$\left.\frac{p_1(n)}{p_0n}\right) + \quad 2 \quad = \frac{1}{N}\sum \log\frac{p_1}{p_0} + 2 \cdots\cdots$$

仍用以上所列之資料，求幾何平均式指數，除求各項物品價格之比率如上列所列外，並求各項比率之對數，如下表：

重慶市民國二十九年一月至六月八種物品零售價格比率之對數　（一月為基期）

物品	一月	二月	三月	四月	五月	六月
米	0,00000	0,03887	0.14148	0.23457	0 27998	0.36966
麵粉	0.00000	0.02350	0.12493	0.22186	0.22180	0.34678
豬肉	0,00000	0.00000	0,00000	0,00000	0.07918	0.12493
菜油	0,00000	0 01009	1.97368	1.97368	0.09578	0.11979
豆腐	0.00000	0.00000	1,00000	0.00000	0.00000	0.17609
白土布	0,00000	0.04392	0.16676	0.28215	0.29167	0.29168
嵐炭	0.00000	0.05717	0. 6610	0.06610	0.11022	0.25169
肥皂	0,00000	0.05115	0.15381	0.16137	0,33244	0.35218
共計	0.00000	0.21970	1.62670	1.93973	1 41123	2.03280
平均	0.00.00	0.02746	0.2033	0,24247	0.17640	0.25410
指數	100.00	106.53	119.77	131.06	150.11	179.52

而後按照公式，求各對數之算術平均數加 2 卽求得指數之對數，復由指數之對數求得指數，如上表指數欄所示。

（3）倒數平均　求各比率之倒數平均數，而後乘以 100，所得指數稱爲倒數平均式指數。設計算期與基期相應對數值之比率爲 $\frac{p_1'}{d_0'}$，$\frac{p_1''}{p_0''}$，$\frac{p_1'''}{p_0'''}$……………$\frac{p_u}{p_{0u}}$；項數爲 u；則倒數平均數之公式爲

$$\frac{I}{I_H}=\frac{I}{N}\left(\frac{I}{\frac{p_1'}{p_0'}}+\frac{I}{\frac{p_1''}{p_0''}}+\frac{I}{\frac{p_1'''}{p_0'''}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{I}{\frac{p_1u}{p_0u}}\right)\times 100$$

$$=\frac{I}{N}\left(\frac{p_0'}{p_1'}+\frac{p_0''}{p_1''}+\frac{p_0'''}{p_1'''}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{p_0u}{p_1u}\right)\times 100$$

$$=\frac{I}{N}\sum\frac{p_0}{p_1}\times 100$$

倒數平均數指數係各比率之倒數平均數，故僅於比率有倒數關係時用之，一般甚少採用也。

(4)中位數　求各比率之中位數，而後乘以100，所得指數稱為中位數指數。本法之計算，無需資料之全部，僅就其一部分卽足以決定，故主張使用比率之中位數為物價指數者相當衆多，概括彼等之理由有三：甲、計算簡單，乙、計算物價指數時，所用以平均之商品並非全體，僅擇其一部份以概一切，故所得平均數與眞正確値之誤差，以中位數平均法為最小；丙、幾何平均數與算術平均數均受極端項之影響甚大，而中位數則無此缺點。但中位數旣僅使用中間部分之若干資料，則此部分之資料發生變化，卽足影響中位數

所求得之指數，是以此指數實爲不安定之數值，且用一部分資料，亦不足以眞確表示全體，故該法雖爲愛奇渥斯(Edge-worth)等所竭力提倡，而仍未爲世人所樂用。

(5)乘數 求各比率之乘數，而後乘以 100，所得指數稱爲乘數式指數，因乘數本身爲一不安定數值，且甚難確定，故尙無學者積極主張之。

第四節 指數之加權

構成指數上所使用種種數值之本身，其重要性各有不同，卽以物價指數而言，所使用之商品在經濟上之地位大不相同，因此其價格之變動，對於社會經濟之影響亦相差甚巨，如米價之變動當較茶價之變動爲重要，若編製指數時予米價與茶價以同樣地位，則所得指數必不甚眞確，故計算指數時，各數值有加權之必要也。

指數之加權，視所採計算方法而不同，玆分別述之如次。

一、總和法之加權

總和法係將統計數列之屬於同一時期者分別總和之，而後求各期總和對基期總和之比率，其所根據者爲各實際數值

，因是加權所取之權數，應爲各該數值之次數，例如用總和法編製物價指數係根據各項物品之實際價格，則加權時之權數，應爲各該物品之數量，或爲生產量，或爲消費量，或爲交易量，蓋如是求得乘積之總和爲其總金額，就此總金額求其指數，自爲合理之方法。用總和法加權所得之指數爲加權總和式指數。

設計算期之各項數值爲 p_1'，p_1''，p_1'''……………$p_1^{\ n}$；基期之各項數值爲p_0'，p_0''，p_0'''……………$p_0^{(u)}$；權數爲 q'，q''，q'''……………$q^{\ n}$；則加權總和式指數（Iw.A.）之公式如次：

$$\text{Iw.A.} = \frac{p'q' + p''q'' + p_1'''q''' + \cdots\cdots p_1u \quad qu}{p_0'q' + p_0''q'' + p_0'''q''' + \cdots\cdots p_0u \quad qu} \times 100$$

$$= \frac{\sum p\ q}{\sum p_0 q} \times 100$$

生活費指數常爲加權總和式指數，因生活費指數係示生活費用之昇降者，生活費用爲各項生活必需品之價格與其消費量之乘積，故若以消費量爲權數，用加權總和法所編成之

指數，爲最足以表示生活費用之昇降者。

例如社會部統計處所編生活費指數均爲加權綜合法，茲就其所編重慶市職業工人生活費指數爲例，說明其計算方法如次：

重慶市職業工人生活費指數所取之物品及其權數見下表所列(1)(3)兩欄：設有二十九年一月及二十六年上半年各項物品之價格如(4)(6)兩欄所列，則計算以二十六年上半年爲基期之二十九年一月之指數如下：

用加權綜合法計算重慶市二十九年一月工人生活指數

物品名稱 (1)	單位 (2)	q (3)	二十六年上半年		二十九年一月	
			q_0 (4)	p_0q (5)	p_1 (6)	p_1q (7)
米	市斗	6.8	1.208	8.214	1.480	10.064
麵粉	市斤	1.4	0.113	0.158	0.180	0.252
切麵	市斤	1.3	0.136	0.178	0.200	0.260
蠶豆	市斗	0.7	2.107	1.517	0.200	0.840
猪肉	市斤	3.9	0.257	1.002	0.600	2.340
牛肉	市斤	1.1	0.175	0.193	0.300	0.330
猪油	市斤	1.8	0.365	0.157	0.900	1.920

桊　油	市斤	0.9	0.300	0.270	0.850	0.765
蔴　油	市斤	0.5	0.300	0.150	1.200	0.600
鷄　蛋	個	7.5	0.017	0.128	0.060	0.450
醬　油	市斤	0.8	0.148	0.118	0.350	0.280
鹽	市斤	2.1	0.130	0.273	0.200	0.420
紅　糖	市斤	0.5	0.080	0.040	0.600	0.300
黄豆芽	市斤	2.4	0.024	0.058	0.100	0.240
豆　腐	塊	21.4	0.012	0.259	0.920	0.432
榨　桊	市斤	1.7	0.080	0.141	0.256	0.435
紛　條	市斤	0.9	0.200	0.218	0.300	0.270
水	挑	12.7	0.050	0.635	0.300	3.810
白土布	市尺	1.2	0.100	0.120	0.470	0.564
藍土布	市尺	1.9	0.072	0.137	0.600	1.140
陰丹士林布	市尺	0.6	0.158	0.195	0.820	0.492
草　鞋	雙	6.0	0.020	0.120	0.200	1.200
布　鞋	雙	0.4	0.400	0.160	1.800	0.720
碎　煤	挑	0.8	0.400	0.320	3.000	2.400
劈　柴	梱	3.3	0.163	0.538	6.810	2.673
桊　油	市斤	0.5	0.300	0.150	0.850	0.425
土臘燭	市斤	0.4	0.300	0.120	1.200	0.480
火　柴	小匣	2.8	0.007	0.020	0.050	0.140
肥　皂	塊	2.4	0.102	0.245	0.400	0.960
毛　巾	條	0.3	0.232	0.085	1.000	0.300

煙絲	市兩	4.5	0.150	0.675	0.300	1.350
乾酒	市斤	0.5	0.167	0.084	0.400	0.200
草紙	百張	0.9	0.100	0.090	0.200	0.180
平房	市方	1.7	1.646	2.798	5.925	10.073
總計	元			19.966		47.005

由$\sum p_0q=19.966$(第5欄總計)，$\sum p_1q=47.005$(第7欄總計)代入公式卽得

$$I_{w.A.}=\frac{47,005}{19,966}\times 100=235.43$$

二、比率平均法之加權

比率平均法係先求兩時期相應對數值之比率，而後求諸比率之平均數以求得指數，其所根據者爲各數值之比率，因是所取權數應爲無單位之比値或爲同一單位之數。例如物價指數用比率平均法編製時，若以各物品之生產量或貿易量或消費量爲權數顯屬錯誤，而必須用生產總値或貿易總値或消費總値等爲權數，若此總金額有同一公約數，則約之爲簡單數值作爲權數亦可。但比率平均法有種種，除中位數與衆數兩種不用加權外，其餘三種平均之加權公式如次：

(1)加權算術平均　加權算術平均係各比率乘其相應對

之權數而後總加之，再除以權數總和之謂，所得指數稱加權算術平均數指數。

設計算期之各項數值爲p_1'，q_1''……p_1^n；基期之各項數值爲p_0'，p_0''；p'''……p_0^n　兩時期相應對數值之比率爲

$\frac{p_1'}{p_0'}$，$\frac{p_1''}{p_0''}$，$\frac{p_1'''}{p_0'''}$……………$\frac{p_1u}{p_0u}$；p'之權數爲W'．，p''之權數爲W''，依此類推；則加權算術平均數指數(Iw.M.)之公式如次：

$$I_{w.M.}=\frac{\frac{p_1'}{p_0'}.w'+\frac{p_1''}{p_0''}.w''+\cdots\cdots+}{w'+w'+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{\sum p_1w}{\sum w}\times 100$$

仍用以前之資料，以各物品之每家平均消費值爲權數【註】則用加權算術平均法計算廿九年二月份指數（以一月爲基期）如下表：

註：係根據社會部所編公務員及工人生活費指數中採用之權數，決定各物品之每家平均消費量而後乘以一月份之物價所得之乘積。

用加權算術平均法計算重慶市二十九年二月零售物價指數

(1) 物　品	(2) W（每家平均消費值）	(3) $\frac{p_1}{p_1}$（29年2月對1月之比價）	(4) $\frac{p}{p_0}\cdot W$
米	10.212	1.0811	11.040
麵　粉	0.270	1.0556	0.285
豬　肉	1.280	1.0000	1.280
菜　油	0.935	1.0235	0.957
豆　腐	0.446	1.0000	0.446
白土布	2.054	1.1064	2.273
嵐　炭	5.400	1.1407	6.160
肥　皂	1.080	1.12q0	1.215
共　計	21.677		23.656
指　數			109.13

指數 109.13即係 $\sum \frac{p_1}{p_0}W$ 與 $\sum w$ 之數值代入公式求得。

(2)加權幾何平均　加權幾何平均係各比率以其相應對之權數爲方冪，而後連乘之，再開以權數總和次方之謂。所得指數稱加權幾何平均數指數。

設計算期與基期相應對數值之比率為$\frac{p_1'}{p_0'}$，$\frac{p_1''}{p_0''}$，$\frac{p_1'''}{p_0'''}$

……………$\frac{p_1(n)}{p_0(n)}$；p'之權數為w'，p''之權數為w''，依此類推；則加權幾何平均數指數（Iw. G.）之公式如次：

$$Iw.G. = \sqrt[\sum w]{\left(\frac{p_1'}{p_0'}\right)^{w'}\left(\frac{p_1''}{p_0'}\right)^{w''}\cdots\cdots} \times 100$$

$$= \sqrt[\sum w]{\prod\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{w}} \times 100$$

實際計算時，必須利用對數，即採用下列公式：

$$\log Iw.G. = \frac{w'\log\frac{p_1'}{p_0'} + w''\log\frac{p_1''}{p_0''} + \cdots\cdots}{w' + w'' + \cdots\cdots\cdots\cdots} + 12$$

$$= \frac{\sum\left(w.\log\frac{p_1}{p_0}\right)}{\sum w} + 2$$

例如上表之資料，用加權幾何平均法計算重慶市二十九

年二月之零售物價指數(以一月爲基期)，可先求各比率之對數，而後如下表之計算：

用加權幾何平均法計算重慶市二十九年二月零售物價指數

(1) 物品	(2) w	(3) $\log\frac{p_1}{p_0}$	(4) $w.\log\frac{p_1}{p_0}$
米	10.212	0.0338659	0.3458386
麵紛	0.270	0.0234994	0.0063448
肉猪	1.286	0.0000000	0.0009000
萊油	0.935	0.0100878	0.0094321
豆腐	0.446	0.0000000	0.0000000
白土布	2.054	0.0439122	0,0901957
嵐炭	5.400	0.0571714	0.3087256
皂肥	1.080	0.0511525	0.0552448
共計	21.677		0.8157815
log I			2.0376335

由上表$\sum w=21.677$，$\sum\left(w.\log\frac{p_1}{p_0}\right)=0.8157815$,代入公式(74)，求得$\log I=2.0376335$。求$\log I$之反對數，即得指數爲109.05。

（3）加權倒數平均　加權倒數平均係將各比率之倒數以其相應對之權數乘之，而後求其總和除以權數總和，再求其倒數之謂。所得指數稱加權倒數平均式指數。

設計算期與基期相應對數值之比率爲$\frac{p_1'}{p_0'}$，$\frac{p_1''}{p_0''}$，$\frac{p'''}{p_0'''}$ ………… $\frac{p\,u}{p_0u}$；p' 之權數爲w'，p''之權數爲 w ''，依此類推；則加權倒數平均式指數（$I_{w.H}$）之公式如次：

$$\frac{1}{I_{wH.}}\quad \frac{\frac{w'}{\frac{p_0'}{p_1'}}+\frac{w''}{\frac{p_1''}{p_0''}}+\cdots\cdots\cdots\cdots}{w'+w''}$$

$$=\frac{\sum w\frac{1}{\frac{p_1}{p_1}}}{\sum w}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7\ )$$

或 $I_{w.H}=\frac{\sum W}{\sum W\frac{1}{\frac{p_1}{p_0}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(76)$

加權倒數平均式指數，僅於比率有倒數關係且有加權必

要時始用之，一般甚少使用也。

由上所述，可知綜和法之加權須用數量，而比率平均法須爲無單位之數值或同一單位之數。以數量爲權數，問題比較簡單。或取基期之數量（Laspeyres法）或取計算期之數量(Paasche法)或取兩期之平均數量（Edgeworth與Marshell)甚至取若干期之平均數量均可；若取無單位之數値或同一單位之數爲權數，則有一加研究之必要。以物價指數言之，通常之交易值，消費值或生產值爲權數，而此諸價值等於數量之物價，其大小常隨物價而變動，以是指數之結果往往隨所用權數爲基期價值或計算期價值而有一種偏誤、所謂加權之偏誤（ Biasmthe weighting)是也。基期某種物價高（假定數量無劇烈之變動）其價值必較鉅，而所得之價比小；某種物價低，其價值必較小，而所得之價比大。以較大之權數乘小的價比，或以較小之權乘大的價比，無形中均足使指數偏低，反之，如以計算期之價值爲權數，則結果適得其反，因計算期某種物價高，其價值必較鉅，而所得之價小亦大，某種物價低，其價值必較小，而所得之價比亦小，以較小之權數乘小的價比，或以較大之權數乘大的價比，無形中均足使

指數高。故權數爲基期價值，則指數偏低；爲計算期價值，則指數高。除基期價值與計算期價值外，亦可以基期數量值計算期物價，或計算期數量乘基期物價所得之價值爲權數。茲以 p_o 與 p_o 分別代表基期之物價與數量； q與p 分別代表計算期之物價與數量 則以價值爲權數之四種基本方法如下：

(1)以某期數量乘基期價格所得之價值（$p_o p_o$）爲權數。

(2)以計算期數量乘基期價格所得之價值（p_o pr）爲權數。

(3)以基期數量乘計算期價格所得之價值（p_1 p_o）爲權數。

(4)以計算期數量乘加算期價格所得之價值（p_1 p_1）爲權數。

據費雪教授之報告，按第二法加權，指數亦有偏低之弊；按第三法加權，指數亦有偏高之弊。吾人究應何去何從？當視所用之公式而定。蓋一方面爲加權的偏誤，一方面尙有公式的偏誤（Type bias），如公式本身有偏高之弊，再用三、四兩法加權，則指數將有兩重偏誤，愈形偏高；如公式

本身有偏低之弊再用一、二兩法加權，則指將有兩重偏誤，愈形偏低。比例平均法均可用上述四法加權，共得二十種加權之公式，除中位數及衆數爲任性之公式外，茲將其餘十二式偏誤之有無與方向，及其爲一重偏誤或二重偏誤如下：

二重偏高
加權算術平均第三式
加權算術平均第四式

一重偏高
加權幾何平均第三式
加權幾何平均第四式

無偏誤
加權算術平均第一式
加權算術平均第二式
加權倒數平均第三式
加權倒數平均第四式

一重偏落
加權幾何平均第一式
加權幾何平均第二式

二重偏低
加權幾數平均第一式
加權幾數平均第二式

所應注意者，簡單幾何平均式原無偏誤，而加權結果則生偏誤；簡單算術平均式原有偏高之弊，但用第一第二兩法加權則無偏誤；簡單倒數平均式原有偏低之弊，但用第三第四兩法加權則無偏誤，可見權數選取之重要也。惟所謂無偏

誤非絕對準確之謂，不過公式之偏誤可與相反的加權之偏誤相消，但是否能相消無餘，未可定也。

第五節　指數之基期

依第三節所述，指數之計算必須以某一時期爲基準，此一時期稱爲指數之基期。指數之基期依其決定之方法可分爲二種；一曰固定基期(Fixed base) 二曰連環基期。固定基期係以某一時期之數值爲基準，此基準在未修改以前恆固定不變。連環基期則其作爲基準之時期隨時變換，如上年之物價作爲本年之基價，本年之物價作爲明年之基價是，如此各以上一年爲基期所得之指數稱爲環比指數，環比指數之各環相乘，而得鎖比指數，環比指數與鎖比指數則爲根據連環基期而得之指數。

連環基期之利在於比較時期之距離較短，其變化之測定較容易而準確，例如所比較者爲前後鄰接兩時期之物價，則環比指數確較固定某期指數爲明確，惟吾人研究一現象當作長期之觀察。而各期環比指數因小數四捨五入之關係，不免有微小之差誤，此項差誤愈積愈大，經過長時期，每每與事實相去甚遠且若基期時常變換，計算必較繁複，故一般指數

均樂用固定基期也。

然則基期應爲一星期乎？一月乎？一年乎？抑五年十年之平均乎？更應以何年，何月，何時期爲基期？均有一加討論之必要。

對於第一問題之解决，則與所取之平均法有關。如用算術平均數，則基期宜長，蓋若基期中之數值如有一二項極漲或極跌，則所得比值勢必異常之低或異常之高，而極高之比值大有左右算術平均之能力。卽有極低之數值，亦不能與之抵銷（比值之上昇無限，其下落則以零爲極限），故欲消除此種變態之影響，不可不用較長之時期；反之若用幾何平均數，則與基期之選擇無關，若用中位數而數值項數又甚多者，則基期之影響亦甚微。惟測量經濟現象之指數，不管其平均方法爲何，一年常較一月爲佳，而數年之平均又較一年爲佳，蓋一年之平均數爲基數可免除季節變動之影響，若更數年（常爲五年）至十年之平均數值爲基數，則更可免除循環變動之影響。

至於指數基期究應選擇何年？何月？何時期？概括言之，乃愈近指數時期愈好，蓋指數基期與指數時期相距愈遠，

則比值之趨勢愈形散漫，而變動升降之迹，愈不明顯。但尤應注意者，卽所選基期中不應有特殊事變，一般選擇基期之條件如次：

(一)社會經濟界之穩定——基期宜定於一般經濟及社會狀況穩定之時，不宜在經濟及社會狀況劇變之時。

(二)比值離散度之大小——以物價指數言之，宜採用物價平穩之時爲基期，惟物價之平穩與否，可以該時期比值離散度之大小測定之，蓋物價平穩之時，各比價之離散度及離散係數必小；非然者必大。

(三)基數供給之詳確——基數爲指數計算之標準，若其數字不能詳盡準確，則指數亦必不能確實，故基期必爲一時期其能供給十分詳盡準確之數字

第六節　指數公式

指數公式多至百數十，何者適用？何者不適用？甚難斷論，法國統計學家馬耳克(March)以爲指數公式在形式上所應滿足之標準凡五：

(一)敏感性——所據以編製指數之各數值中，有一值發生變化，其指數卽現出其變化之影響者，

(二)單位共通性——指數之數值不依數量單位之取法而異其結果者。

(三)比例性——各個物品價值依同一比例變化時，指數亦發生同一變化者。

(四)循環性——雖變更其基期，但任意二時期指數值之相對的變化比例仍不變更者。

(五)單純性——計算方法簡單者。

美國統計學家費暄氏更進而作實際之研究，以同種貨品，同種物價，以一九一三年爲基期，一九一八年爲計算期，用一百三十餘種不同之公式計算指數，結果最大之指數爲244,最小之指數爲178,兩者相差達66。據渠之研究，測驗公式良否之方法有二；(一)時間互換測驗法（Time reversal test），(二)因子互換測驗法（Eactor reversal rest），玆卽以物價指數爲例說明如次：

(一)時間互換測驗法　物價指數係以測量物價之相對的變動爲目的，故必須選取某一時期之物價爲標準以與另一時期之物價相比較，永得其變動之程度。依理甲乙兩時期互爲基期所得之指數應互爲倒數，亦卽兩者相乘之積應等於一；

依此原則而測驗公式是否優良卽所謂時間互換測驗，諸公式中適合時間測驗者僅簡單幾何平均，簡單中位數，簡單衆數及簡單總和式，餘均不合。玆就合與不合兩類公式中選擇其一舉例說明如次：

（1）簡單算術平均不合於時間互換測驗之例。　由表四十八，二十六年上半年米每市斗1.208元，陰丹士林布每市尺0.158元；二十九年一月米每市斗1.480元陰丹士林布每市尺0.820元。以二十六年上半年爲基期，二十九年一月之基數爲320.3，以二十九年一月爲基期，二十六年上半年之基數爲50.2。兩者之乘積爲1.620與1之差達62.0％；此62.0％爲向前指數與向後指數之聯合差誤，吾人雖無法察知差誤之由於向前指數者若干，由於向後指數者若干，然簡單算術平均式指數無論爲向前或向後，均有偏高之弊，固爲吾人所熟知也。而此種偏高卽可由時間互換測驗之。

（2）簡單幾何平均合於時間互換測驗之例，　設仍取上例用簡單幾何平均法求定指數，得二十九年一月之指數爲252.2，二十六年上半年之指數如39.7。兩者之乘積爲1.005較1僅差0.1％，此蓋由小數四捨五入之故。

(二)因子互換測驗法　此種測驗適用於加權指數，蓋加權指數公式中p代表物價，q代表交易量，若以p q互換，則其求得之指數非物價指數而爲物量指數，因子互換測驗者即物價指數與物量指數相乘之積是否與兩時期交易值之比率相等之測驗也。若商品祇有一種則其物價指數與其物量指數相乘之積等於計算期交之易值與基期之交易值之比也。若商品不止一種，則根據上述諸公式求得之指數均不能滿足此條件，費暄教授之所謂「理想公式」則與此條件相合，其公式如下：

$$I=\sqrt{\frac{\sum(P_1q_0)}{\sum(P_0q_0)}\times\frac{\sum(P_1q_1)}{\sum(P_0q_1)}}\cdots\cdots\cdots\cdots(77)$$

若其中p與p互換，即得物量指數如下：

$$\sqrt{\frac{\sum(p_1P_0)}{\sum(p_0P_0)}\times\frac{\sum(q_1P_1)}{\sum(q_0P_1)}}$$

兩者相乘，則得

$$\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

此即計算期之交易值與基期之交易値之比也。

除上述兩種測驗方法外，尚有一種測驗法謂之循環測驗(Circular test)，適用於兩個以上時期之比較　設以第一年爲基年。計算第二第三兩年之指數，而後以第二年之指數除第三年之指數，視其結果是否等於以第二年爲基期年者計算第三年指數，若相等卽爲合於循環測驗。但關於此項測驗，各家意見略有不同：潘蓀氏謂此乃時間互換測驗之合理的推論，蓋兩個時期旣可互換而無矛盾，則三個時期自當亦無矛盾，但適合此測驗必先有一條件，加權數須爲常數是也。費暄氏則以爲此項測驗可以不必，蓋祇有權數爲常數之時方可滿足此測驗，而各時代物品之重要性不同，權數不能固定不變也　通常各公式均不能適合此測驗，卽費暄氏所最稱道之理想公式亦不適合也。

再就時間互換測驗言之，時間互換測驗固爲試驗公式優劣之方法，但優良之公式未必盡合於時間互換測驗，合於時間互換測驗者亦未必卽爲優良之公式。如加權總和公式雖不合於時間互換測驗，然仍不失爲優良之公式；反之簡單中位數及簡單乘數式指數雖合於時間互換測驗，但依然無補於其任性之弱點，此吾人所應注意者也。

中華經濟統計研究所
叢書之一
統　計　學
全一冊

每冊基價國幣一元四角五分
外埠酌加郵費運費

編著者　褚一飛
發行人　顧詢
發行所　立信會計圖書用品社
上海河南路三三九號
重慶小什字立信大樓
印刷者　周順記印刷所
上海惠民路三一八號

中華民國三十二年十一月初版
中華民國三十五年十一月四版　（滬）

立信會計叢書目錄

簿記類

立信

簿記初階　李文杰編
商業簿記　甘允壽編
初級商業簿記教科書　陳文麟　施仁夫編
高級商業簿記教科書　潘序倫著
英文高級簿記會計　潘序倫著
高級商業簿記實習題附屬文件

會計學類

會計學（一—四冊）　潘序倫著
會計學　錢素君　夏治濬編
初級會計學　王逢辛編著
會計學概要　李鴻壽編
會計學教科書　潘序倫　王澹如編著
會計問題（上下冊）　施仁夫編著

銀行會計類

銀行會計　陳福安編
銀行會計　顧準　陳福安著
中華銀行會計制度　顧準著
銀行會計教科書　顧準編
劃一銀行會計科目

成本會計類

成本會計　陳文麟譯
陀氏成本會計（上下冊）　施仁夫譯
勞氏成本會計　潘序倫譯
勞氏成本會計習題　潘序倫譯
成本會計教科書　潘序倫編譯
再生產成本會計　于心潭著
工業會計制度　于心潭著
棉紡織廠成本會計　陳文麟著

政府會計類

政府會計　張慧生　王成杰編
中國政府會計制度　潘序倫　顧準編著
實用政府會計　蔡經濟編著
公有營業會計　余肇池編著
政府會計人員手冊　汪元錚編
政府會計制度一政規定

審計學類

審計學　顧詢　唐文瑞編
審計學　潘序倫　顧詢著
審計學教科書　潘序倫　顧詢編著
政府審計原理　蔣明祺著
政府審計實務　蔣明祺著
銀行內部審計　陳成耀著
審計問題　錢迺徵編
查帳報告書及工作底稿　顧詢　錢迺徵編
審計問題答解　錢迺徵編

其他會計類

股份有限公司會計上下冊　潘序倫著
鐵道會計　張心澂著
交通會計　張心澂著
電業會計　楊濤編著
各業會計制度（一集二集）　潘序倫編
專業會計制度　李鴻壽編
倉庫實務會計　卞宗濂著
會計名詞彙譯中英文對照　潘序倫編譯
會計數學　李鴻壽　莫啓歐編譯
會計數學用表　李鴻壽　莫啓歐編
決算表之分析及解釋　潘誌申譯
決算表之分析　黃組方著
決算表之編製及內容　黃組方編著
無形資產論　施仁夫譯

▲各種會計書籍均有習題詳解專供各校教員參攷之用須憑學校證明文件方可照售

立信商業叢書目錄

商業類

商業常識	陳文 張英閣編
商業概論（上下册）	陳文著
商業應用文作法	龎翔勛編著
財政學概論	王延超著
國家經濟學原理	林和成譯
貨幣學	陳紹武著
銀行學	金天錫 宋樂岩 陳穎光著
銀行實務概要	王澹如著
廣告學	丁馨伯著
投資學	任福履著
珠算速計法（寄售）	華印椿著
實用珠算教程（寄售）	周炎德編

法規類

公司法	
新公司法解釋	張肇元編
活頁直接稅法規	立信會計師事務所編
活頁工商法規	立信會計師事務所編
直接稅法令彙編	立信會計師事務所編
鑛業法規	立信會計師事務所編
保險業法規	立信會計師事務所編
工商業獎勵法規	立信會計師事務所編
政府會計審計法規	立信會計師事務所編
工商業同業公會及人民團體組織法規	立信會計師事務所編
六法新編（寄售）	中華民國德學會編纂

統計類

統計學	褚一飛編著
統計學續編	褚一飛編著

立信帳表目錄

帳簿類

- 日記簿
- 現金簿(收付式)
- 現金簿(收付餘額式)
- 現金簿(多欄式)
- 購貨簿
- 銷貨簿
- 購貨退出簿
- 銷貨退回簿
- 應收票據簿
- 應付票據部
- 付款憑單登記簿
- 零用現金簿
- 總帳
- 分類帳(差額式)
- 分類帳(T字式)
- 銀行往來帳
- 存貨帳

表單類

- 各種傳票
- 傳票封面
- 收據
- 發票
- 庫存表
- 薪工表
- 二欄表
- 三欄表
- 四欄表
- T式帳表
- 雙三欄表
- 十欄表
- 單欄日計表
- 雙欄日計表
- 單頁空白表
- 雙頁空白表

活頁帳類

大活頁帳 $10\frac{1}{4}'' \times 12\frac{3}{4}''$

- 分類帳
- 分戶帳
- 材料分類帳
- 股東分戶帳
- 活頁手搖帳夾
- 分目卡

小活頁帳 $8\frac{1}{2}'' \times 11''$

- 分類帳
- 分戶帳
- 材料分類帳
- 股東分戶帳
- 行莊往來結息帳
- 活頁手搖帳夾
- 分目卡

帳簿尺寸

- 特大號精裝二百面 $13'' \times 8\frac{1}{4}''$
- 大號精裝二百面 $10\frac{1}{2}'' \times 7\frac{1}{2}''$
- 小號精裝一百十五面 $8\frac{1}{2}'' \times 6\frac{3}{4}''$
- 小號平裝一百面 $8\frac{1}{2}'' \times 6\frac{3}{4}$
- 小號平裝五十面 $8\frac{1}{2}'' \times 6\frac{3}{4}''$

中央各機關及所屬普通公務機關帳表 (都八十餘種另有詳目)

學生課題紙

立信會計圖書用品社印製發行
上海河南路三三九號 電話九六四一五
重慶小什字立信大樓(藥王廟街二十五號)