三十七年最新版

大学入門

第一集

数学

浣溪学社主编

民國三十七年新編

大學入門

編著　郭本[illegible]　胡欽[illegible]

浣溪學社主編

中華民國三十七年六月初版

大學入門

第一集 數學之部

實價國幣二十七萬五仟元

主編者 浣溪學社學術組

出版者 浣溪學社出版委員會
杭州浙江大學轉

印刷者 當代出版社印刷廠
杭州謝麻子巷六號

經售處 全國各大書局

民國三十六年全國各大學新生入學試題解答

數學之部

國立浙江大學

(1) 甲 組

1. 設 $(a-1)(b-1)>0$; a, b, θ 皆爲實數，求

$$\frac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$$

之最小值。

解：
$$\frac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$$
$$=\frac{[(1+\cos\theta)+(a-1)][(1+\cos\theta)+(b-1)]}{1+\cos\theta}$$
$$=(1+\cos\theta)+\frac{(a-1)(b-1)}{1+\cos\theta}+(a+b-2)$$

記 $1+\cos\theta=x$, $\because$ $a+b-2$ 爲常數，故本題僅需求得

$$(1)\quad K=x+\frac{(a-1)(b-1)}{x}$$

之最小値即可。

由 (1)，得

$$x^2-Kx+(a-1)(b-1)=0$$

解 x，得

$$(2)\quad x=\frac{K\pm\sqrt{K^2-4(a-1)(b-1)}}{2}$$

$\because$ $1+\cos\theta\geqq 0$, $(a-1)(b-1)>0$, $\therefore$ $K>0$,

又由 (2), $\because$ $x\geqq 0$, 得

$$(3)\quad K\geqq 2\sqrt{(a-1)(b-1)}$$

當 $K=2\sqrt{(a-1)(b-1)}$， $x=1+\cos\theta=\sqrt{(a-1)(b-1)}\leqq 2$。

茲分二情形討論之。

(i) 當 $(a-1)(b-1)\leqq 4$時，

K之極小値爲 $2\sqrt{(a-1)(b-1)}$

(ii) 當 $(a-1)(b-1)>4$時，

如 $K=2\sqrt{(a-1)(b-1)}$ 則 $x=1+\cos\theta=\frac{K}{2}>2$，

此爲不可能，故$K>2\sqrt{(a-1)(b-1)}$，且(2)中應取作負號，即

$$x=\frac{K-\sqrt{K^2-4(a-1)(b-1)}}{2}\leqq 2,$$

$$\sqrt{K^2-4(a-1)(b-1)}\geqq K-4,$$

平方之，$K^2-4(a-1)(b-1)\geqq K^2-8K+16$，

$\therefore$ (4) $K\geqq 2+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$

此時K之極小値爲 $2+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$

〔其實 $2+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)>2\sqrt{(a-1)(b-1)}$。〕

綜合上述結果得

(a) 當 $(a-1)(b-1)\leqq 4$ 時

$\frac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$之最小値爲$a+b-2+2\sqrt{(a-1)(b-1)}$。

(b) 當 $(a-1)(b-1)>4$ 時

$\frac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$之最小値爲

$a+b-2+2+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)$。

2. 問級數

$$1-\frac{x}{\sqrt{1}}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}-\cdots$$

何時收斂？

解：此級數除首項外，其普通項爲

$$(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}=a_n x^n,\qquad n=1,2,\cdots$$

$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1,$

$\because \left| x \right| < 1,$ 級數收斂。

又當 $x=1$，級數爲交項級數，後項係數之絕對値小於前項係數之絕對値，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

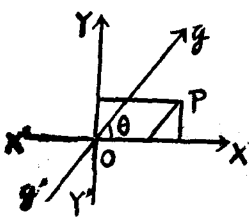
∴級數收斂。

但當 $x=-1$，級數 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$ 爲發散

∴ $-1 < x \leqq 1$ 時，級數收斂。

3. 設二斜交軸x及y之交角爲θ；作一圓使通過x軸上之二定點 $(a^2,0)$ $(b^2,0)$ 且與軸y相切，求此圓之方程式。

解：



設直角座標軸XX', YY',

斜交座標軸xx'≡XX', yy'.

設任一點P之直角座標爲(X,Y)斜交座標爲(x,y)

則其間之關係如下：

$$(1)\begin{cases} X = x + y\ \mathrm{Cos}\,\theta \\ Y = y\ \sin\theta \end{cases}$$

在直角座標下，圓方程式爲

$$X^2+Y^2+D_1X+E_1Y+F_1=0,$$

用(1)代入，簡化之，得

$$x^2+y^2+2\,\mathrm{Cos}\,\theta\ xy+D_1\,x+(D_1\,\mathrm{Cos}\,\theta+E_1\,\mathrm{Sin}\,\theta)y+F_1=0,$$

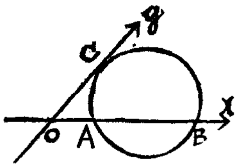
記 $D=D_1$，$E=D_1\ \mathrm{Cos}\,\theta+E_1\ \mathrm{Sin}\,\theta$，$F=F_1$，

得在斜交座標下，圓之方程式爲

$$(2)\quad x^2+y^2+2\,\mathrm{Cos}\,\theta\ x\,y+D\,x+E\,y+F=0,$$

其中 D, E, F 為任意常數。

今解本題



設此圓在y軸上切點C之座標為 $(0, k)$

即 $k=\overline{OC}$，

由平面幾何定理，知

$\overline{OC}^2=\overline{OA}\cdot\overline{OB}$， $\therefore\ k^2=a^2b^2$.

$k=\pm ab$.

故有二圓滿足所設條件，設為 C_1，C_2.

C_1 通過 $(a^2, 0)$，$(b^2, 0)$，$(0, ab)$ (3)

C_2 通過 $(a^2, 0)$，$(b^2, 0)$，$(0, -ab)$ (4)

將(3)代入(2)，消去 D, E, F 即得 C_1 之方程式

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+2xy\cos\theta & x & y & 1 \\ a^4 & a^2 & 0 & 1 \\ b^4 & b^2 & 0 & 1 \\ a^2b^2 & 0 & ab & 1 \end{vmatrix}=0.$$

展開，得

(5) $x^2+y^2+2xy\cos\theta-(a^2+b^2)x-2aby+a^2b^2=0$

同理 C_2 之方程式為

(6) $x^2+y^2+2xy\cos\theta-(a^2+b^2)x+2aby+a^2b^2=0.$

4. 設P為一橢圓上之任何點，且F為其一焦點，證明以FP及橢圓長軸各為直徑之二圓必相內切。

解： 設橢圓之方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a>b>0.$$

用參數表示之

$x=a\cos\theta$， $y=b\sin\theta$.

設P點座標為 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$

F點座標為 $(C, 0)$， $C=\sqrt{a^2-b^2}$

茲設 C_1 為以PF為直徑之圓，圓心為 O_1，半徑為 R_1，

C_2 爲以橢圓長軸爲直徑之圓即

$x^2+y^2=a^2$，　圓心爲O（O，O）半徑爲 a.

若　C_1，C_2 相內切，則$\overline{O_1O}=a-R_1$，其逆亦眞

O_1 之座標（$\frac{a\,\mathrm{Cos}\,\theta+C}{2}$，$\frac{b\,\mathrm{Sin}\,\theta}{2}$）。

$$\overline{O_1O}=\sqrt{\left(\frac{a\,\mathrm{Cos}\,\theta+C}{2}\right)^2+\left(\frac{b\,\mathrm{Sin}\,\theta}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\,\mathrm{Cos}^2\theta+2\,aC\,\mathrm{Cos}\,\theta+C^2+b^2\,\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\,\mathrm{Cos}^2\theta+2\,aC\,\mathrm{Cos}\,\theta+a^2-b^2+b^2\,\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b^2)\,\mathrm{Cos}^2\theta+2\,aC\,\mathrm{Cos}\,\theta+a^2}$$

$$=\frac{1}{2}(C\,\mathrm{Cos}\,\theta+a)$$

又　$R_1=\frac{1}{2}\sqrt{(a\,\mathrm{Cos}\,\theta-C)^2+(b\,\mathrm{Sin}\,\theta)^2}=\frac{1}{2}(-C\,\mathrm{Cos}\,\theta+a)$

∴　$a-R_1=a-\frac{1}{2}(a-C\,\mathrm{Cos}\,\theta)=\frac{1}{2}(a+C\,\mathrm{Cos}\,\theta)=\overline{O_1O}$

∴　C_1，C_2 相內切。

5. 解方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{Sin}\,\theta & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \mathrm{Sin}^2\theta & \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ \mathrm{Sin}^3\theta & \frac{1}{8} & 1 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

解：　此行列式爲關於 $\mathrm{Sin}\,\theta$ 之三次式，故方程式爲以$\mathrm{Sin}\,\theta$作未知數之三次方程式，僅有三根，由觀察知當$\mathrm{Sin}\,\theta=\frac{1}{2}$，1，−1時，行列式均爲 0，即此三數爲其根，亦即

$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$，或$(n+\frac{1}{2})\pi$.

$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$

(2) 乙組

1. 設x之方程式 $x^3-12x+16\mathrm{Cos}\,\theta=0$ 有重根，求θ之值。

解：　上方程式 $\triangle=\frac{(16\mathrm{Cos}\,\theta)^2}{4}+\frac{(-12)^3}{27}=64\mathrm{Cos}^2\theta-64.$

$\triangle=0$，有重根。即

$\cos^2\theta-1=0$，　$\cos\theta=\pm1$，

$\therefore\ \theta=n\pi\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

2. 四個骰子，同時擲之，欲其表面點數之和為10，其或然率（Probability）為何？

解：四個骰子，表面點數之和為10，其出現點數不外乎下列六情形（不計順序）

(1) 1,1,2,6；(2) 1,1,3,5；(3) 1,1,4,4；(4) 2,2,3,3；(5) 1,2,2,5；(6) 1,2,3,4；(7) 1,3,3,3；(8) 2,2,2,4；

其排列個數 (1)為12，(2)為12，(3)為6，(4)為6，(5)為12，(6)為24，(7)為4，(8)為4。

而四個骰子總出現情形為 6^4 故

$$或然率=\frac{12+12+6+6+12+24+4+4}{6^4}=\frac{80}{1296}=\frac{5}{81}。$$

3. 面積 240 方寸之矩形內接於半徑 13 寸之圓中，求矩形兩邊之長。

解：設矩形一邊長為 a，另一邊長為 b。

則 $\begin{cases}ab=240 & (1)\\ a^2+b^2=(2\times13)^2=676 & (2)\end{cases}$

(2)+2×(1)，得 $(a+b)^2=1156$，即

$$a+b=\pm34.$$

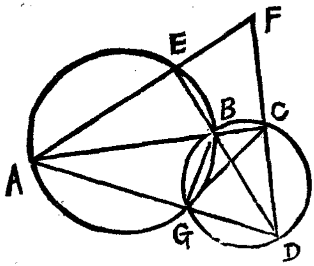
(2)−2×(1)，得 $(a-b)^2=196$，即

$$a-b=\pm14.$$

上二式均應取正號，即解 $\begin{cases}a+b=34\\ a-b=14\end{cases}$

得　$a=24$ 寸　$b=10$ 寸。

4，從四直線中任取三條時，所得之四個三角形之外接圓相會於一點。



解：　設四直線 ABC，DBE，DCF，AEF，作成四三角形：△ABE，△DCB，△ACF，△DFE。設 △ABE，△DCB 之外接圓除 B 點外，相交於 G 今要證 △ACF，△DFE之外接圓亦通過 G.

(證明)連接BG，CG

∵ A，B，E，G，共圓，

∴ ∠DBG＝∠EAG

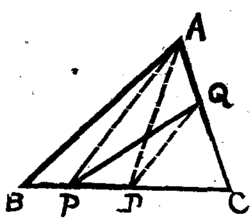
∵ D，C，B，G，共圓　∴ ∠DBG＝∠DCG

∴ ∠DCG＝∠EAG＝∠FAG

∴ A，G，C，F 共圓即 △ACF 之外接圓過 G，

同理可證 △DEF 之外接圓亦過 G。

5. 從一定三角形一邊上之一定點引平分三角形面積之直線。



解：　△ABC，BC 邊上一點 P.

設 D 爲BC之中點，連結 PA，過 D 作 DQ∥AP 交 AB 於 Q 連 PQ，則 PQ 平分 △ABC。

(證明) ∵ D爲BC中點

∴ △ABD＝△ACD

即 △CQD＋△AQD＝$\frac{1}{2}$△ABC

∵ DQ∥AP，∴ △AQD＝△QDP

∴ △CQD＋△QDP＝△QCP＝$\frac{1}{2}$△ABC 即

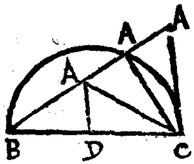
∴ PQ 平分 △ABC。

國立北京清華南開三大學

(甲組作3，4，5，6，7五題；乙、丙組作1，2，3，4，5五題)

1. 設D爲三角形ABC之底邊BC之中點，若頂角 A 爲鈍角，直角或銳角，則底邊BC分別大於、等於、或小於中線AD之二倍，試證之。

解：



以BC爲直徑作半圓，若∠A爲鈍角，則A在半圓內部

∴ AD＜圓之半徑

即 BC＞2 AD，

∠A爲直角，A點在半圓上，AD 爲圓之半徑

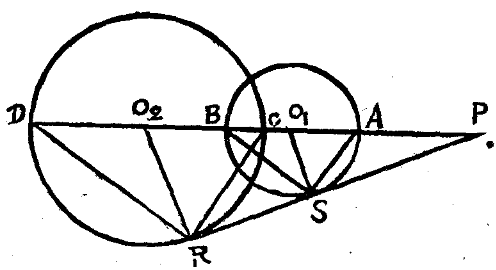
即 BC＝2 AD。

∠A爲銳角， 則A點在半圓外部 ∴ AD＞圓之半徑

即 BC＜2 AD。

2. 設二圓之連心線交一圓於A與B二點，交第二圓於C與D二點，又交二圓之一外公切線於點P。設在連心線上，點A離P最近，點D離P最遠，試證

$PA \cdot PD = PB \cdot PC$.



解： 設 O_1, O_2 爲第一，第二圓心

R, S 爲二切點

∵ $O_1S \perp RP$, $O_2R \perp RP$, ∴ $O_1S \parallel O_2R$

∴ $\angle CO_2R = \angle AO_1S$ ∴ $\triangle CO_2R \backsim \triangle AO_1S$

（∵均爲等腰三角形，夾角相等） ∴ $AS \parallel CR$。因之

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PS}{PR}$$

同理，因 $BS \parallel DR$,

$$\therefore\ \frac{PB}{PD}=\frac{PS}{PR}$$ 即

$$\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PD}$$

$$PA\cdot PD=PB\cdot PC.$$

3. 解下列三角方程式

$$\operatorname{Sin} 4x-2\operatorname{Cos} 2x\operatorname{Sin} x=0.$$

解： $\operatorname{Sin} 4x-2\operatorname{Cos} 2x\operatorname{Sin} x=2\operatorname{Sin} 2x\operatorname{Cos} 2x-2\operatorname{Cos} 2x\operatorname{Sin} x$

$$=2\operatorname{Cos} 2x(\operatorname{Sin} 2x-\operatorname{Sin} x)=4\operatorname{Cos} 2x\operatorname{Cos}\frac{3x}{2}\operatorname{Sin}\frac{x}{2}=0$$

$\operatorname{Cos} 2x=0$，或 $\operatorname{Cos}\frac{3x}{2}=0$，或 $\operatorname{Sin}\frac{x}{2}=0$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)=n\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

或 $x=\frac{2}{3}\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{3}n\pi\pm\frac{\pi}{3}$，

或 $x=2n\pi.$　　　　$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

4. (a)簡化下式：

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}+\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}}$$

(b)用數學歸納法，證明二項式定理

解：(a) $\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}+\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^6}{a-(a-1)}}+\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^6}{a-(a-1)}}$$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^2+(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^2$$

$$=a+(a-1)-2a\sqrt{a-1}+a+(a-1)+2a\sqrt{a-1}=4a-2.$$

(b) 證明

(I) $(a+b)^n=a^n+c_1^n a^{n-1}b+c_2^n a^{n-2}b^2+\cdots$

$$+c_v^n a^{n-v}b^v+\cdots+b^n,$$

$n=1$， $a+b=a+b$， (1)式成立。

設 (1)式 當 $n=k$ 時成立 卽

$$(2)\quad (a+b)^k = a^k + c_1^k a^{k-1} b + c_2^k a^{k-2} b^2 + \cdots$$

$$+ c_{v-1}^k a^{k-v+1} b^{v-1} + c_v^k a^{k-v} b^v$$

$$+ \cdots + b^k$$

(2) 式兩邊乘上 $(a+b)$ 得

$$(3)\quad (a+b)^{k+1} = a^{k+1} + c_1^k a^k b + c_2^k a^{k-1} b^2 + \cdots$$

$$+ c_{v-1}^k a^{k-v+2} b^{v-1} + c_v^k a^{k-v+1} b^v + \cdots + ab^k$$

$$+ a^k b + c_1^k a^{k-1} b^2 + c_2^k a^{k-2} b^3 + \cdots$$

$$+ c_{v-1}^k a^{k-v+1} b^v + c_v^k a^{k-v} b^{v+1} + \cdots$$

$$+ b^{k+1}$$

$\because\quad c_v^k + c_{v-1}^k = c_v^{k+1}\qquad \therefore$ (3) 化爲

$$(4)\quad (a+b)^{k+1} = a^{k+1} + c_1^{k+1} a^k b + c_2^{k+1} a^{k-1} b^2 + \cdots$$

$$+ c_v^{k+2} a^{k-v+1} b^v + \cdots + b^{k+1}$$

卽 (1)式當 $n=k+1$ 時亦成立，因之$n=1,2,\cdots\cdots$ 都成立。

5. 解方程組：

$$\begin{cases} 2x^2+3xy+2y^2+x+y-9=0, & (1)\\ x^2+xy+y^2-7=0. & (2)\end{cases}$$

解： (1)—(2)，得

$x^2+2xy+y^2+x+y-2=0$，

卽 $(x+y+2)(x+y-1)=0$

由 $x+y+2=0$， $y=-x-2$ 代入(2)得

$x^2+2x-3=0$，　$x=1,-3$，　故 $y=-3,1$，

由 $x+y-1=0$　$y=-x+1$　代入(2)得

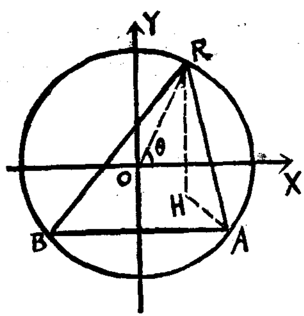
$x^2-x-6=0$　$x=3,-2$，　$y=-2,3$

故得四組解答

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=-3\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right\}。$$

6. AB 是一個圓的一條固定的弦，R 是此圓上的一個變動的點，求三角形 ABR 的垂心的軌跡。

解：



設　圓方程式爲

$x^2+y^2=a^2$

AB 直線方程式爲

$y=-b$，$(0<b<a)$

則　$A(\sqrt{a^2-b^2},-b)$，

$B(-\sqrt{a^2-b^2},-b)$

設　R座標爲$(a\cos\theta,a\sin\theta)$，

$\triangle ABR$垂心H座標(x,y)。

∵ BR之斜率爲

$$\frac{a\sin\theta+b}{a\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2}},$$

∴ AH之斜率爲$-\dfrac{a\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2}}{a\sin\theta+b}$

∴ AH之方程式爲

(1)　$y+b=-\dfrac{a\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2}}{a\sin\theta+b}(x-\sqrt{a^2-b^2})$

RH之方程式爲

(2)　$x=a\cos\theta$

故　H 之座標 (x,y) 即爲 (1),(2) 之解答

由　(2) $x=a\cos\theta$，　故　$a\sin\theta=\pm\sqrt{a^2-x^2}$，代入(1)

得　$y+b=-\dfrac{x^2-(a^2-b^2)}{\pm\sqrt{a^2-x^2}+b}=\dfrac{(a^2-x^2)-b^2}{\pm\sqrt{a^2-x^2}+b}$

$=-b\pm\sqrt{a^2-x^2}$

移項平方之，得

$x^2+(y+2b)^2=a^2$

即 H 之軌跡為一圓，圓心為 $(0,-2b)$，半徑為 a.

7. 一圓的中心在直線 $5x-3y-7=0$ 上，且經過兩圓

$x^2+y^2-6x-10y-15=0$,

$x^2+y^2+2x+4y-20=0$

的交點，求此圓之方程式.

解：　此圓方程式為

$x^2+y^2-6x-10y-15+k(x^2+y^2+2x+4y-20)=0$,

即　(1) $x^2+y^2+\dfrac{-6+2k}{1+k}x+\dfrac{-10+4k}{1+k}y+\dfrac{-15-20k}{1+k}=0$

圓心為　$\left(\dfrac{3-k}{1+k},\ \dfrac{5-2k}{1+k}\right)$ 代入

$5x-2y-7=0$，得

$5\dfrac{3-k}{1+k}-3\dfrac{5-2k}{1+k}-7=0$

$15-5k-(15-6k)-7(1+k)=0$

$7+6k=0$,　　$\therefore\ k=-\dfrac{7}{6}$　代入 (1)，得

$x^2+y^2+50x+88y-50=0$.

國立台大台灣省立農院工院師院

(1) 甲　組

1. 若二次方程式　$x^2+px+q=0$　　(1)

有相異二實根時　則　$x^2+px+q+k(2x+p)=0$　　(2)

($k\neq0$ 為實數) 亦有相異實根且僅有一根存在於方程式 (1) 所有二根之間，試證明之。

解： 設 方程式 (1) 二實根 x_1, x_2, $x_1 < x_2$

且判別式 $p^2-4q>0$

方程式 (2) 之判別式 爲

$(2k+p)^2-4(q+pk)=p^2-4q+4k^2>0$，

∴ (2) 有二相異實根

設 $f(x)=x^2+px+q$， $g(x)=x^2+px+q+k(2x+p)$，

則 $f'(x)=2x+p$， $g(x)=f(x)+kf'(x)$。

由 Rolle 定理 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$，

$g(x_1)\cdot g(x_2)=k^2f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$， 即

方程式 (2) 只有一根在 x_1, x_2之間。

2. 8 人圍圓桌而坐指定特別 2 人爲相隣其確率爲何？

解： 其或然率 $=\dfrac{2\times 6!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

3. 解 $\sin 2\theta \cos\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$，(但 $0<\theta<2\pi$)

解： $\sin 2\theta\cos\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta-1$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta-1$

$=2\sin\theta-2\sin^3\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta-1$

$=2\sin^2\theta(1-\sin\theta)-(1-\sin\theta)$

$=(2\sin^2\theta-1)(1-\sin\theta)=0$，

∴ $\sin\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$或1，

∴ $\theta=n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$， 或 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$。而所求之

$$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi,\frac{\pi}{2}.$$

4. 試求拋物線 $y^2+ax+by+c=0$ 之頂點之位置（但座標軸爲直交）

解： $y^2+ax+by+c=0$。

移項，配方

$y^2+by+\dfrac{b^2}{4}=-ax-c+\dfrac{b^2}{4}$

$$\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=-a\left(x-\frac{b^2-4c}{4a}\right)$$

∴ 頂點之座標爲 $\left(\frac{b^2-4c}{4a}, -\frac{b}{2}\right)$

5. 雙曲線之任意切綫被其二漸近綫所截之線分，必二等分於切點，試證明之。

解： 設雙曲綫方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

切點座標爲 (x_1, y_1)，

則 切線方程式爲

(1) $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$.

二漸近線方程式爲

(2) $bx-ay=0$, (3) $bx+ay=0$.

設 (1) 與 (2) 之交點爲 $A(x_2, y_2)$

(1) 與 (3) 之交點爲 $B(x_3, y_3)$

則 $x_2=\dfrac{a^2b}{bx_1-ay_1}$　　$y_2=\dfrac{ab^2}{bx_1-ay_1}$

$x_3=\dfrac{a^2b}{bx_1+ay_1}$　　$y_3=\dfrac{-ab^2}{bx_1+ay_1}$

設 $\overline{AB}$ 綫分之中點座標爲 (x_4, y_4)

則 $x_4=\dfrac{x_2+x_3}{2}=\dfrac{a^2b\left[(bx_1+ay_1)+(bx_1-ay_1)\right]}{2(bx_1-ay_1)(bx_1+ay_1)}$

$=\dfrac{a^2b\cdot 2bx_1}{2a^2b^2}=x_1$

$y_4=\dfrac{y_2+y_3}{2}=\dfrac{ab^2\left[(bx_1+ay_1)-(bx_1-ay_1)\right]}{2a^2b^2}=y_1$

(2) 乙、丙組

1. 50張彩票中2張中彩，若二人抽彩其最初一人中彩與第二人中彩之損益如何？

解：　第一人中彩之或然率 $= \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$

第二人中彩之或然率 $= \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} + \frac{48}{50} \cdot \frac{2}{49} = \frac{1}{25}$。

故無損益

2. 試證 $\begin{vmatrix} o & c & b & l \\ -c & o & a & m \\ -b & -a & o & n \\ -l & -m & -n & o \end{vmatrix} = (al-bm+cn)^2$

解：　設 $A = \begin{vmatrix} o & c & b & l \\ -c & o & a & m \\ -b & -a & o & n \\ -l & -m & -n & o \end{vmatrix} = \frac{-1}{n} \begin{vmatrix} o & c & b & l \\ +cn & o & -an & -nm \\ -b & -a & o & n \\ -l & -m & -n & o \end{vmatrix}$

將第三列乘m第四列乘（－a）加到第二列，得

$$A = \frac{-1}{n} \begin{vmatrix} o & c & b & l \\ al-bm+cn & o & o & o \\ -b & -a & o & n \\ -l & -m & -n & o \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{n}(al-bm+cn) \begin{vmatrix} c & b & l \\ -a & o & n \\ -m & -n & o \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{n}(al-bm+cn)(cn^2-bnm+aln)$$

$$= (al-bm+cn)^2.$$

3. 求 $\sqrt[3]{i}$

解　$\sqrt[3]{i}$　即　方程式，　$x^3-i=0$之根

$x^3-i=x^3-(\text{Cos } 90^\circ+i \text{ Sin } 90^\circ)=0$

∴ $x=\text{Cos } 30^\circ+i \text{ Sin } 30^\circ$，　或 $\text{Cos } 150^\circ+i \text{ Sin } 150^\circ$，

或 $\text{Cos } 270^\circ+i \text{ Sin } 270^\circ$，

即 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, -i.$

故 $\sqrt[3]{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$，或$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ 或$-i$。

4. 設$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 皆爲小於 180° 之正角，$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{5}$，$\tan\gamma=\frac{1}{7}$，$\tan\delta=\frac{1}{8}$，求證 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=45^\circ$。

解：
$$\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma+\delta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\gamma+\delta)}$$
$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+\dfrac{\tan\gamma+\tan\delta}{1-\tan\gamma\tan\delta}}{1-\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdot\dfrac{\tan\gamma+\tan\delta}{1-\tan\gamma\tan\delta}}$$
$$=\frac{\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}}+\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{56}}}{1-\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}}\cdot\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{56}}}=1.$$

因 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 皆小於180°，而各正切之值小於1，

故 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 皆小於45°，因之$\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 必小於180°。

而 $\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=1$， $\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=45^\circ$。

5. 設三角形之三邊爲 a, b, c, 內切圓之半徑爲 r；外接圓之半徑爲 R，試證 $\frac{1}{2Rr}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$。

解： 設△ABC之面積爲△， $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

由正弦定律 $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4\triangle}$

又 $r=\frac{\triangle}{s}$， 故 $Rr=\frac{abc}{4s}$

即 $\frac{1}{2Rr}=\frac{2s}{abc}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$。

國立中央大學

(1)甲組

1. 已知方程式 $x^3+kx+96=0$

之一根爲另一根之三倍，求 k 之值，幷解此方程式。

解：　設 方程式 $x^3+kx+96=0$

之三根爲 $a, 3a, b$

則
$$\begin{cases} a+3a+b=0 & (1) \\ 3a^2b=-96 & (2) \\ 3a^2+ab+3ab=k & (3) \end{cases}$$

由(1)，$b=-4a$ 代入 (2) 得

$-12a^3=-96$，　$a^3=8$，

$\therefore\ a=2,\ 2w,\ 2w^2$ （w爲 $x^3-1=0$ 之一虛根）

$b=-8,\ -8w, -8w^2$

由 (3) $k=3a^2+4ab=-13a^2=-52, -52w^2, -52w$.

如 k 爲實數，則 $k=-52$.

2. 解聯立方程式
$$\begin{cases} x\log y=y\log x, \\ x\log a=y\log b. \end{cases}$$

解：　=式相除，得

$$\frac{\log y}{\log a}=\frac{\log x}{\log b},\quad \log y=\frac{\log a}{\log b}\log x$$

$\therefore\ y=x^{\frac{\log a}{\log b}}$ 代入後式，得

$$x\log a=x^{\frac{\log a}{\log b}}\log b.$$

$$\therefore\ x=\left(\frac{\log a}{\log b}\right)^{\frac{\log b}{\log\frac{a}{b}}}$$

同理 $y=\left(\frac{\log a}{\log b}\right)^{\frac{\log a}{\log\frac{a}{b}}}$.

3. 設方程式 $f(x)=0$ 之 n 根爲相異之實數，試證方程式

$$xf'(x)+kf(x)=0$$

之根，均爲相異之實數，此中 k 爲一已知實數。

解： 本題誤，茲舉一例以明之。

例：

$$f(x)=x(x-1)=x^2-x=0$$

有二相異實根 0，1.

取 $k=-1$.

則 $xf'(x)+(-1)f(x)=x(2x-1)-(x^2-x)=x^2=0$

有重根

4. 化 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 爲有理方程式，證明其軌跡爲與兩軸相切之拋物線，并求其被 $(2a,3a)$ 點所二等分之弦之方程式。

解： $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

兩邊平方， $x+y+2\sqrt{xy}=a$

移項，平方， $(x+y-a)^2=4xy$ (1)

展開， $x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0$

上方程式二次項之判別式爲 0，且不能分解，故爲一拋物線。

又與 $y=0$ 之二交點均爲 (a,o)

$x=0$ 之二交點均爲 (o,a)

故與 x，y 軸相切

過 $(2a,3a)$ 之直線方程式爲

$x=2a+P\cos\theta$， $y=3a+P\sin\theta$， 代入 (1)

$[4a+P(\cos\theta+\sin\theta)]^2-4(2a+P\cos\theta)(3a+P\sin\theta)=0$.

計算 P之係數，命其爲零。

$$3a(\cos\theta+\sin\theta)-4a(2\sin\theta+3\cos\theta)=0$$

$\therefore\ \cos\theta=0$， $\theta=90°$

故得被 $(2a,3a)$ 所二等分之弦之方程式爲

$x=2a$.

5. 設 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$，$P_4(x_4, y_4)$ 爲同在一圓周上之四點，d_{ij} 爲 P_i 與 P_j 兩點間之距離，此中 $i=1,2,3,4$；$j=1,2,3,4$；$i\neq j$. 試證

(a)
$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}=0。$$

解： (a) 圓方程式爲

(1)　$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

∵ $P_i(x_i, y_i)$ 在圓上，故滿足

(2)　$x_i^2+y_i^2+Dx_i+Ey_i+F=0$　$(i=1,2,3,4,)$

(2) 四方程式看作爲 1，D，E，F 爲未知數之四元齊次聯立方程式，∵ 未知數不能全爲 O，故係數行列式＝0，卽

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0。$$

(b)

$$D=\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = -d_{12}^2\begin{vmatrix} d_{21}^2 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+d_{13}^2\begin{vmatrix} d_{21}^2 & 0 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & 0 \end{vmatrix} - d_{14}^2\begin{vmatrix} d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 \end{vmatrix}$$

$$= d_{12}^2\left(d_{21}^2\, d_{43}^2\, d_{34}^2 - d_{23}^2\, d_{41}^2\, d_{34}^2 - d_{24}^2\, d_{31}^2\, d_{43}^2\right)$$

$$+ d_{13}^2\left(-d_{21}^2\, d_{42}^2\, d_{34}^2 + d_{24}^2\, d_{31}^2\, d_{42}^2 - d_{24}^2\, d_{41}^2\, d_{32}^2\right)$$

$$- d_{14}^2\, d_{21}^2\, d_{32}^2\, d_{43}^2 + d_{23}^2\, d_{31}^2\, d_{42}^2 - d_{23}^2\, d_{41}^2\, d_{32}^2\Big)$$

$$= d_{12}^4\, d_{34}^4 - 2\, d_{12}^2\, d_{23}^2\, d_{14}^2\, d_{34}^2 - 2\, d_{12}^2\, d_{13}^2\, d_{24}^2\, d_{34}^2$$

$$+ d_{13}^4\, d_{24}^4 - 2\, d_{13}^2\, d_{14}^2\, d_{23}^2\, d_{24}^2 + d_{14}^4\, d_{23}^4$$

$$=\left(d_{12}^2\, d_{34}^2 + d_{14}^2\, d_{23}^2 - d_{13}^2\, d_{24}^2\right)^2 - 4d_{12}^2\, d_{23}^2\, d_{14}^2\, d_{34}^2$$

$$=\left(d_{12}^2\, d_{34}^2 + d_{14}^2\, d_{23}^2 - d_{13}^2\, d_{24}^2 + 2d_{12}\, d_{23}\, d_{14}\, d_{34}\right)$$

$$\cdot\left(d_{12}^2\, d_{34}^2 + d_{14}^2\, d_{23}^2 - d_{13}^2\, d_{24}^2 - 2d_{12}\, d_{23}\, d_{14}\, d_{34}\right)$$

$$=(d_{12}\, d_{34} + d_{14}\, d_{23} + d_{13}\, d_{24})(d_{12}\, d_{34} + d_{14}\, d_{23} - d_{13} d_{24})$$

$$\cdot(d_{12}\, d_{34} - d_{14}\, d_{23} + d_{13}\, d_{24})(d_{12}\, d_{34} - d_{14} d_{23} - d_{13} d_{24})$$

由平面幾何 Ptolemy 定理圓內接四邊形，對角線之乘積等於二對邊乘積之和

故　$d_{13}\,d_{24}=d_{12}\,d_{34}+d_{23}\,d_{14}$

$\therefore$　$D=0$.

6. 設三角形 ABC 之三邊爲 a,b,c.

(a) 試證　$1-\operatorname{Cos} A=\dfrac{2(s-b)(s-c)}{bc}$，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

(b) 設　Sin A, Sin B, Sin C 成調和級數，

試證　1－Cos A, 1－Cos B, 1－Cos C 亦成調和級數

解： (a)　由餘弦定律

$a^2=b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}A$，即

$$\operatorname{Cos}A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$1-\operatorname{Cos}A=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$$

(b)　由正弦定律　Sin A : Sin B : Sin C＝a : b : c;

故　Sin A, Sin B, Sin C 成調和級數，即 a, b, c 成調和級數，即 $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$

$$\therefore\quad b=\frac{2ac}{a+c},$$

由 (a)
$$\begin{cases}1-\operatorname{Cos}A=\dfrac{2(s-b)(s-c)}{bc},\\[2mm] 1-\operatorname{Cos}B=\dfrac{2(s-a)(s-c)}{ac},\\[2mm] 1-\operatorname{Cos}C=\dfrac{2(s-a)(s-b)}{ab},\end{cases}$$

$$\frac{1}{1-\operatorname{Cos}A}+\frac{1}{1-\operatorname{Cos}C}=\frac{b\,[c(s-a)+a(s-c)]}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$2s=a+b+c=a+c+\frac{2ac}{a+c}=\frac{a^2+c^2+4ac}{a+c},$$

$$\because\quad c(s-a)+a(s-c)=(c+a)s-2ac=\frac{a^2+c^2+4ac}{2}-2ac$$

$$=\frac{a^2+c^2}{2},$$

又　$$s-b=\frac{a^2+c^2+4ac}{2(a+c)}-\frac{2ac}{a+c}=\frac{a^2+c^2}{2(a+c)},$$

$$\therefore\ \frac{1}{1-\operatorname{Cos}A}+\frac{1}{1-\operatorname{Cos}C}=\frac{b}{2(s-a)(s-c)}\cdot\frac{a^2+c^2}{2}\cdot\frac{2(a+c)}{a^2+c^2}$$

$$=\frac{ac}{(s-a)(s-c)}=\frac{2}{1-\operatorname{Cos}B},$$

故 $1-\operatorname{Cos}A$, $1-\operatorname{Cos}B$, $1-\operatorname{Cos}C$ 成調和級數。

(2) 乙　組

1. 設 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 成調和級數，試證

$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$.

解： $\because$ $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ 成調和級數

$\therefore$ $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots \frac{1}{a_n},$ 算術級數

設其公差爲 d，則

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=(n-1)d$$

即　$$\frac{a_1-a_n}{a_1a_n}=(n-1)d$$

$$\therefore\ (n-1)a_1a_n=\frac{a_1-a_n}{d}。$$

$$=\frac{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)}{d},$$

但　$$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{a_1-a_2}{a_1a_2}=d$$

$$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=\frac{a_2-a_3}{a_2a_3}=d$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}a_n}=d$$

$$\therefore\ (n-1)a_1a_n=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{n-1}a_n.$$

2. 解無理方程式

$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}=\sqrt{8x+1}$,

并就其結果討論之.

解: $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}=\sqrt{8x+1}$

平方之, $3x+11+2\sqrt{(x+6)(2x+5)}=8x+1$,

$2\sqrt{(x+6)(2x+5)}=5x-10$.

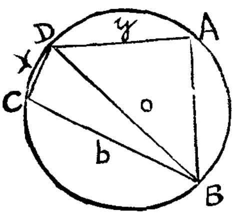
再平方, $4(2x+5)(x+6)=25x^2-100x+100$

即 $17x^2-168x-20=0$

$\therefore$ $x=10,\ -\frac{2}{17}$; 代入原方程式,

知 $-\frac{2}{17}$ 非其根,即僅 $x=10$ 爲其解.

3. 圓內接四邊形 ABCD 內, $\angle A=90°$, $AB=a, BC=b$, 其面積爲 c^2, 求 CD,DA 及圓半徑之長。



解: 設 $CD=x$, $DA=y$, 圓半徑爲 R.

則 $bx+ay=2c^2$ (1)

$b^2+x^2=a^2+y^2=4R^2$ (2)

由 (1), $y=\frac{2c^2-bx}{a}$, 代入 (2)

得 $b^2+x^2=a^2+\frac{4c^4+b^2x^2-4bc^2x}{a^2}$

簡化之,

$$(a^2-b^2)x^2+4bc^2x+a^2b^2-a^4-4c^4=0$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{a^2-b^2}\left(-2bc^2\pm\sqrt{4b^2c^4-(a^2-b^2)(a^2b^2-a^4-4c^4)}\right)$$

化簡, $$x=\frac{1}{a^2-b^2}\left(-2bc^2\pm a\sqrt{(a^2-b^2)^2+4c^4}\right);$$

$$y=\frac{1}{b^2-a^2}\left(-2ac^2\pm b\sqrt{(a^2-b^2)^2+4c^4}\right),$$

符號應取正號,否則 x,y 必有一爲負故得

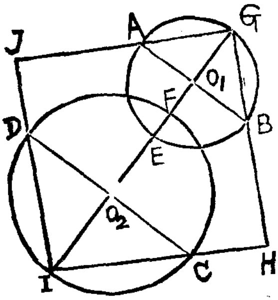
$$x=\frac{1}{a^2-b^2}\left(-2bc^2+a\sqrt{(a^2-b^2)^2+4c^4}\right),$$

$$y=\frac{1}{b^2-a^2}\left(-2ac^2+b\sqrt{(a^2-b^2)^2+4c^4}\right),$$

$$R=\pm\frac{1}{2(a^2-b^2)}\sqrt{(a^2+b^2)\left((a^2-b^2)^2+4c^4\right)-4abc^2\sqrt{(a^2-b^2)^2+4c^4}}.$$

R 之符號視 (a^2-b^2) 之正負，而取作負或正.

4. 作一正方形，令其四邊分別經過四已知點.



解： 設 A, B, C, D 爲已知點.

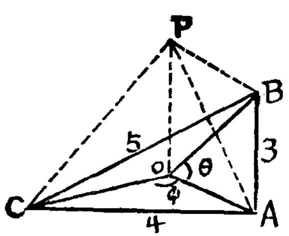
以 AB, CD 爲直徑作二圓 O_1, O_2, 設 E, F 爲圓 O_1, O_2 相近二半圓之中點，連 EF 交圓 O_1, O_2 于 G, I. 設 GB 交 IC 于 H, GA 交 ID 于 J 則 GHIJ 卽爲所求之正方形.

證明：$\because$ E 爲圓 O_1 半圓之中點，

$\therefore \angle EGB=45^\circ$

同理　$\angle EIC=45^\circ$　$\angle GHI=90^\circ$，且　$GH=IH$　又　$\angle AGE=\angle EIJ=45^\circ$　$\angle GJI=90^\circ$　$\therefore GJ=JI$，而　$\angle JGH=\angle JIH=90^\circ$　故　GHIJ 爲一正方形.

5. 於 A, B, C 三陣地測得敵機之仰角爲 60°, 45°, 45°; 今 B 地在 A 地正北 3000尺，C 地在 A 地之正西 4000 尺，求敵機之高，并討論之。



解：

設敵機之高 $OP=h$,　　則

$OB=OC=h$,　　$OA=\frac{h}{\sqrt{3}}$.

$\because$　$AB=3000$尺, $AC=4000$尺.

$\therefore$　$BC=5000$尺,

爲計算簡單計，

令 $AB=3$, $AC=4$,　則 $BC=5$

（法1）： 設 $\angle AOB=\theta$，$\angle AOC=\phi$，則 $\angle BOC=2\pi-\overline{\theta+\phi}$，由餘弦定律，得

$$\begin{cases} 3^2=h^2+\frac{1}{3}h^2-\frac{2}{\sqrt{3}}h^2\ \cos\theta, \\ 4^2=h^2+\frac{1}{3}h^2-\frac{2}{\sqrt{3}}h^2\ \cos\phi, \\ 5^2=h^2+h^2-2h^2\ \cos(\theta+\phi), \end{cases}$$

由此三式消去 θ，ϕ．得

$$h^4-\frac{2^4\times3^4\times h^2}{5^2}+2^2\times3^4=0$$

$$\therefore\qquad h^2=\frac{2^3\times3^4}{5^2}-\frac{2\times3^2}{5^2}\sqrt{11\times61}.$$

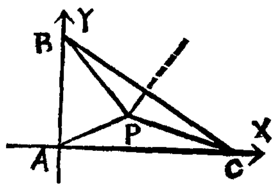
$$\therefore\qquad h=\frac{1}{5}\sqrt{2^3\times3^4-2\times3^2\times\sqrt{11\times61}}.$$

故敵機之高爲　$200\sqrt{2^3\times3^4-2\times3^2\sqrt{11\times61}}$ 尺。

（法2）： 取 A 爲原點，直角兩邊爲座標軸．

$C(4,0)$，　$B(0,3)$．

$PB=PC=h$，　$PA=\frac{1}{\sqrt{3}}h$．



$\because$　$PC:PA=h:\frac{h}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}:1$．

令 P 之座標爲 (x,y)，　則

P 之軌跡爲一圓周，其方程式爲

$$x^2+y^2+4x-8=0\qquad(1)$$

又 P 在 BC 之中垂線上，此中垂綫之方程式爲

$$y-\frac{3}{2}=\frac{4}{3}(x-2)\qquad(2)$$

卽　$$y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{6}\qquad(3)$$

代入（1），得　$25x^2+8x-\frac{239}{4}=0$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{-8+3\sqrt{11\times 61}}{50} \\ y = \dfrac{-69+4\sqrt{11\times 61}}{50} \end{cases}$$

故　$PA=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h=\dfrac{1}{50}\sqrt{(8-3\sqrt{11\times 61})^2+(69-4\sqrt{11\times 61})^2}$

$$\therefore\ h=\frac{1}{5}\sqrt{2^3\times 3^4-2\times 3^2\sqrt{11\times 61}}$$

得知敵機之高爲 $200\sqrt{2^3\times 3^4-2\times 3^2\sqrt{11\times 61}}$ 尺。

國立交通大學

(1)　甲　組

1. 三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根成爲
   (i)　等差級數之必要條件若何?
   (ii)　等比級數之必要條件若何?

解:　(i)　設三根爲　$a-b,\ a,\ a+b$　則

$$\begin{cases} (a-b)+a+(a+b)=-p, \\ a(a-b)+a(a+b)+(a+b)(a-b)=q, \\ a(a-b)(a+b)=-r, \end{cases}$$

卽

$$\begin{cases} 3a=-p & (1) \\ 3a^2-b^2=q & (2) \\ a(a^2-b^2)=-r & (3) \end{cases}$$

由　(1),(2) 得 $a=-\dfrac{p}{3}$, $a^2-b^2=-\dfrac{2}{9}p^2+q$ 代入(3)

得　$-\dfrac{p}{3}\left(-\dfrac{2}{9}p^2+q\right)=-r$,

卽　$2p^3-9pq+27r=0$

爲其必要條件。

（ii） 設三根爲 $\frac{a}{b}$, a, ab, 則

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+a+ab=-p, \\ \frac{a}{b}\cdot a+a\cdot ab+\frac{a}{b}\cdot ab=q, \\ \frac{a}{b}\cdot a\cdot ab=-r, \end{cases}$$

卽

$$\begin{cases} a\left(1+\frac{1}{b}+b\right)=-p & (1) \\ a^2\left(1+\frac{1}{b}+b\right)=q & (2) \\ a^3=-r & (3) \end{cases}$$

由 (1), (2), (3) 消去 a, b 得

$$rp^3-q^3=0$$

爲其必要條件。

2. 設x，y，z 爲互不等之三數，且設

$y^3+z^3+m(y^2+z^2)=z^3+x^3+m(z^2+x^2)=x^3+y^3+m(x^2+y^2)$

試證上開等式等於 $2xyz$; 且 $x+y+z+m=0$。

解： $$m=-\frac{y^3-x^3}{y^2-x^2}=-\frac{x^3-z^3}{x^2-z^2}=-\frac{z^3-y^3}{z^2-y^2} \qquad (1)$$

由第一，第二等式得

$$\frac{y^2+yx+x^2}{y+x}=\frac{x^2+xz+z^2}{x+z}$$

展開之得 $xy^2+zy^2=z^2y+xz^2$

卽 $x(y^2-z^2)+zy(y-z)=0$

得 $(y-z)(xy+yz+zx)=0$

$\because$ $y\neq z$, $\therefore$ $xy+yz+zx=0$ (2)

由 (1)， $$m=-\frac{x^2+y^2+z^2+\frac{1}{2}(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

$$=-(x+y+z)+\frac{3}{2}\,\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$$

$$= -(x+y+z),$$

$\therefore \quad m+x+y+z=0.$

設 $\quad k=y^3+z^3+m(y^2+z^2)=z^3+x^3+m(z^2+x^2)=x^3+y^3+m.(x^2+y^2)$

將三式相加，得

$$3k=2(x^3+y^3+z^3)+2m(x^2+y^2+z^2)$$
$$=-2(x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z),$$

$\because \quad x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z=(xy+yz+zx)(x+y+x)-3xyz=-3xyz,$

$\therefore \quad k=2xyz.$

3. 解 $\mathrm{Sin}^{-1}x-\mathrm{Cos}^{-1}x=\mathrm{Sin}^{-1}(3x-2).$

解： 設 $\quad \mathrm{Sin}^{-1}x=A, \quad \mathrm{Cos}^{-1}x=B,$

則 $\quad x=\mathrm{Sin}\,A, \quad \mathrm{Cos}\,A=\sqrt{1-x^2},$

$\quad x=\mathrm{Cos}\,B, \quad \mathrm{Sin}\,B=\sqrt{1-x^2},$

$\quad \mathrm{Sin}\,(A-B)=3x-2,$ 即

$\quad \mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Cos}\,B-\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Cos}\,A=3x-2,$

$\therefore \quad x^2-(1-x^2)=3x-2,$

故得 $\quad 2x^2-3x+1=0,$

$\therefore \quad x=1$，或 $\dfrac{1}{2}.$

4. 一曲線之參數方程式(Parametric eguations)為

$$x=a\,\mathrm{Cos}\,t-\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,2t-\frac{1}{2}a$$

$$y=a\,\mathrm{Sin}\,t-\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,2t$$

此處 t 為參數，試繪其圖形，并求此曲線之直角座標方程式，及極座標方程式。

解： $\quad x=a\,\mathrm{Cos}\,t-\dfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,2t-\dfrac{1}{2}a=a\,\mathrm{Cos}\,t$

$$-\frac{1}{2}a(2\operatorname{Cos}^2 t-1)-\frac{1}{2}a=a\operatorname{Cos}t-a\operatorname{Cos}^2 t$$
$$=a\operatorname{Cos}t(1-\operatorname{Cos}t),$$
$$y=a\operatorname{Sin}t-\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}2t=a\operatorname{Sin}t-\frac{1}{2}a(2\operatorname{Sin}t\operatorname{Cos}t)$$
$$=a\operatorname{Sin}t-a\operatorname{Sin}t\operatorname{Cos}t=a\operatorname{Sin}t(1-\operatorname{Cos}t),$$
$$\therefore\quad \frac{x}{y}=\operatorname{Cot}t,\quad \therefore\quad \operatorname{Sin}t=\frac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \operatorname{Cos}t=\frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$x=a\frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}-a\frac{x^2}{x^2+y^2},$$
$$\frac{x^2+y^2}{a}=\pm\sqrt{x^2+y^2}-x \qquad (1)$$

平方，簡化卽得曲線之直角座標方程式爲

$$(x^2+y^2+ax)^2-a^2(x^2+y^2)=0 \qquad (2)$$

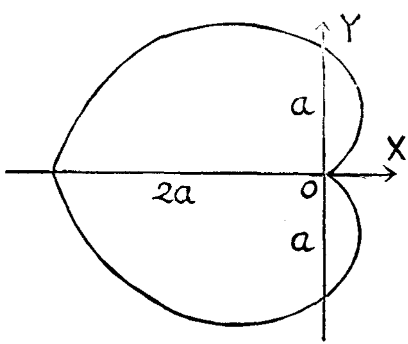
由 (1) $r^2=\pm ar-ar\operatorname{Cos}\theta$

故得極座標方程式爲

$$r=a(\pm 1-\operatorname{Cos}\theta)。$$

但當 $\theta=0$, $y=0$, 則 $t=0$, 故 $x=0$, 亦卽 $r=0$, 故上式應取正號，卽 $r=a(1-\operatorname{Cos}\theta)$，

此曲線爲心臟線，其圖形如下：



5. 通過拋物線之焦點作弦，連接此弦之極點（pole）與該焦點可得一連線，試證此連線必垂直於該弦。

解： 設拋物線之方程式爲 $y^2=4px$

則焦點爲（p，o），過焦點之弦設爲

（1） $y=m(x-p)$， m即爲此弦之斜率。

設該弦之極點爲（x_1，y_1），則該弦之方程式爲

（2） $y_1y=2(px_1+px)$

比較（1），（2），得 $m=\dfrac{2p}{y_1}$， $-mp=\dfrac{2px_1}{y_1}$，

$\therefore\ x_1=-p$， $y_1=\dfrac{2p}{m}$；

（x_1，y_1）與（p，o）連線之斜率爲

$$\frac{\frac{2p}{m}}{-p-p}=-\frac{1}{m}$$

故此連線與該弦垂直。

6. 若二次方程式

$x^2-5xy+4y^2+x+2y+k=0$，

表示兩直線，試求k之値，幷求此兩直線交點及交角。

解： 設 $x^2-5xy+4y^2+x+2y+k=(x-4y+a)(x-y+b)$

則 $a+b=1$， $a+4b=-2$。

$\therefore\ a=2$， $b=-1$， $k=ab=-2$。

二直線爲 $x-4y+2=0$ （1）

$x-y-1=0$ （2）

設 其交點爲 （x_1，y_1），交角爲Θ， 則

$x_1=2$， $y_1=1$

$$\tan\Theta=\frac{-1+4}{1+4}=+\frac{3}{5}，\quad \therefore\Theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)。$$

(2) 乙　組

1. 將 $\dfrac{x+1}{x^2+5x+6}$ 分成部分分數。

解：設 $\dfrac{x+1}{x^2+5x+6}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x+3}=\dfrac{(a+b)x+(3a+2b)}{x^2+5x+6}$

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 3a+2b=1, \end{cases} \quad \therefore\ a=-1,\quad b=2$$

$$\therefore\ \frac{x+1}{x^2+5x+6}=-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}\ 。$$

2. 若 $a\operatorname{Cos}x+b\operatorname{Sin}x=\sqrt{a^2+b^2}\ \operatorname{Sin}(x+c)$，

問 (a) c與a, b 之關係如何？

(b) x 爲何值時 $a\operatorname{Cos}x+b\operatorname{Sin}x$ 之值最大？

解：(a) $\tan c=\dfrac{a}{b}$， 即 $c=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}$.

(b) 當 $x=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\dfrac{a}{b}$ 時 $a\operatorname{Cos}x+b\operatorname{Sin}x$ 之值最大

3. 若 p_1, p_2 爲常數，則不論w爲何值，直線

$$x\operatorname{Cos}w+y\operatorname{Sin}w-p_1=0$$

$$x\operatorname{Sin}w-y\operatorname{Cos}w-p_2=0$$

之交點恆在一圓周上，試證明之。

解：
$$x\operatorname{Cos}w+y\operatorname{Sin}w=p_1 \qquad (1)$$

$$x\operatorname{Sin}w-y\operatorname{Cos}w=p_2 \qquad (2)$$

二式平方加之， 得 $x^2+y^2=p_1^2+p_2^2$。

故 (1)，(2)二直線交點恆在一圓周上，此圓之心爲原點，半徑爲 $\sqrt{p_1^2+p_2^2}$。

4. 某三角形三邊長度之數值，適爲方程式

$$x^3-px^2+qx-r=0$$

之三根，試應用三角形面積之公式

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

證明該三角形之面積爲

$$\frac{1}{4}\sqrt{p(4pq-p^3-8r)}$$

解：$\because\begin{cases}a+b+c=p\\ab+bc+ca=q\\abc=r\end{cases}$

$$\triangle=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)[(a+b+c)^3+4(ab+bc+ca)(a+b+c)-2(a+b+c)^3-8abc]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{p(4pq-p^3-8r)}.$$

5. 若 $y=x+k$ 與 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 相切，

則 $y=x+k$ 與 $(0,0)$ 之距離爲 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

解：橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 之切線方程式爲

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$\therefore\ m=1,\quad k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

故得切線之法形式爲

$$\frac{x-y\pm\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}=0$$

$\therefore$ 與 $(0,0)$ 之距離爲 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$。

6. 試討論並描繪曲線 $\rho=a(1-\cos\theta)$

解：此爲心臟曲線，見交大（甲）。

(3) 丙 組

1. 解方程式 $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-5}}+2=0$.

解： 令 $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}=u$. 則原方程式化為

$u^2+2u-3=0$. $\therefore$ $u=1$ 或 -3.

(1) $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}=1$， 即 $2x-5=x-2$， $\therefore$ $x=3$,

(2) $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}=-3$, 即 $2x-5=9(x-2)$, $\therefore$ $x=\dfrac{13}{7}$,

以此二值代入原方程式，知其根為 $x=3$.

2. 某無綫電製造商經長期之統計，獲知售價 p 與每月實銷隻數 n 有如下之關係： $2n=360-3p$;

而n隻無線電之成本為 $1000+\dfrac{1}{6}n^2$,問每月售出幾隻獲利最多？

解： $p=120-\dfrac{2}{3}n$， 設獲利為 A, 則

$$A=np-\left(1000+\frac{1}{6}n^2\right)=120n-\frac{2}{3}n^2-\left(1000+\frac{1}{6}n^2\right),$$

即 $$A=-\left(\frac{5}{6}n^2-120n+1000\right)=-\frac{5}{6}\left(n^2-144n+1200\right)$$

$$=-\frac{5}{6}\left[(n-72)^2-3984\right]=3320-\frac{5}{6}(n-72)^2$$

故 $n=72$, A 之最大值為 3320.

即每月售出72隻獲利最多。

3. 試證

(a) $\tan 5A-\tan 3A-\tan 2A=\tan 5A\tan 3A\tan 2A$,

(b) $\sin 5A-\sin 2A-\sin A=\sin 2A(2\cos 3A-1)$.

解： (a) $\tan 5A-\tan 3A-\tan 2A=\dfrac{\sin 5A}{\cos 5A}-\dfrac{\sin 3A}{\cos 3A}-\dfrac{\sin 2A}{\cos 2A}$

$$=\frac{\sin5A\cos3A\cos2A-\sin3A\cos5A\cos2A-\sin2A\cos5A\cos3A}{\cos5A\cos3A\cos2A}$$

$$=\frac{\sin5A\cos3A\cos2A-\cos5A(\sin3A\cos2A+\cos3A\sin2A)}{\cos5A\cos3A\cos2A}$$

$$=\frac{\sin5A[\cos3A\cos2A-\cos(3A+2A)]}{\cos5A\cos3A\cos2A}$$

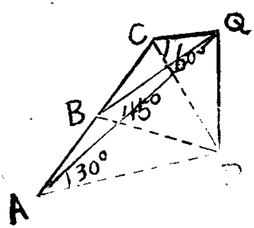
$$=\frac{\sin5A\sin3A\sin2A}{\cos5A\cos3A\cos2A}=\tan5A\tan3A\tan2A.$$

(b) $\sin5A-\sin2A-\sin A=(\sin5A-\sin A)-\sin2A$

$=2\cos3A\sin2A-\sin2A=\sin2A(2\cos3A-1)$.

4. 一平直之路上有 A, B, C 三點，$AB=BC=50$ 尺，路旁有一塔，在 A, B, C, 三點，測得塔頂之仰角爲 30°, 45°, 60°, 試證塔高爲 $25\sqrt{6}$ 尺.

解：



設塔高 $PQ=h$，則

$PA=h\cot30^\circ=\sqrt{3}\,h$,

$PB=h\cot45^\circ=h$,

$PC=h\cot60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}h$,

而　$AB=BC=50$.

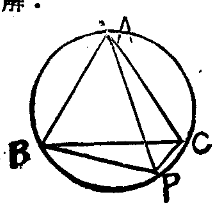
由中綫定理　$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PB}^2+\overline{AB}^2)$

代入得，　$3h^2+\frac{1}{3}h^2=2(h^2+2500)$

$\therefore$　$h=25\sqrt{6}$ 尺.

5. P 爲正三角形 ABC 外接圓 BC 弧上一任意點，則 $PA=PB+PC$.

解：



由 Ptolemy 定理

$PA.BC=PC.AB+PB.CA$

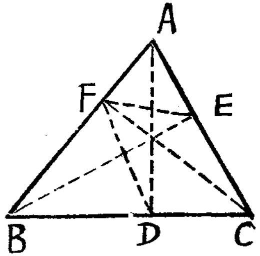
$\because$　$AB=BC=CA$

$\therefore$　$PA.BC=(PB+PC)BC$

$\therefore$　$PA=PB+PC$.

6. AD, BE, CF 爲△ABC之三高，求證 $\angle EFC=\angle DFC$.

解：



∵ A, C, D, F 共圓

∴ $\angle BFD=\angle C$.

又 B, C, E, F 共圓

∴ $\angle AFE=\angle C$.

∴ $\angle BFD=\angle AFE$.

而 $\angle BFC=\angle AFC=R\angle$.

∴ $\angle EFC=\angle DFC$.

國立武漢大學

(1) 甲 組

1. 將一張紙剪 a 刀，試證最多可得$\frac{a^2+a+2}{2}$塊。

解： 茲用數學歸納法證之：

當 $a=1$, $\frac{a^2+a+2}{2}=2$ 爲眞

設 $a=k$ 時，最多可得$\frac{k^2+k+2}{2}$塊爲眞，然後再剪一刀，如欲得最多之塊數，必須此刀所成之直綫，與前 k 刀所成之 k 條直綫皆爲相交，因之除原有$\frac{k^2+k+2}{2}$塊外，尚多$k+1$塊，故一共有

$$\frac{k^2+k+2}{2}+k+1=\frac{k^2+3k+4}{2}=\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}\text{塊}$$

卽得剪$(k+1)$刀，最多可得$\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$塊。故題證畢。

2. 設某數以3,5,11除之，各餘1,2,3,問此數最小應爲若干？

解：　設此數最小爲n，用3，5，11除之各得商爲

x，y，z；則

$n=3x+1=5y+2=11z+3$.

即求
$$\begin{cases} 3x-5y=1 & (1) \\ 3x-11z=2 & (2) \end{cases}$$

之最小正整數解

由視察知(1)之一特別解爲$x=-3$，$y=-2$. 故其一般整數解爲

$$\begin{cases} x=-3-5t \\ y=-2-3t \end{cases} \quad (3) \quad (t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

代入（2）得　　$-15t-11z=11$

由視察知 $t=0$，$z=-1$爲一特別解，故一般解爲

$$\begin{cases} t=-11p \\ z=-1+15p \end{cases} \quad (4) \quad (p=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

將（4）代入（3）得
$$\begin{cases} x=-3+55p \\ y=-1+33p \\ z=-1+15p \end{cases}$$

其最小正整數解爲當 $p=1$，即

$x=52$，　$y=31$，　$z=14$.

而　$n=157$.

3. 設 A,B,C 爲一三角形之三內角，試證

$\mathrm{Sin}\ 2A+\mathrm{Sin}\ 2B+\mathrm{Sin}\ 2C=4\ \mathrm{Sin}\ A\ \mathrm{Sin}B\ \mathrm{Sin}\ C.$

解：　$\because$　$A+B+C=180°$

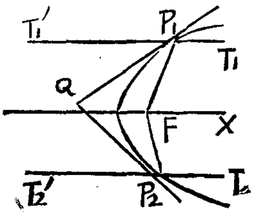
$\mathrm{Sin}\ 2A+\mathrm{Sin}\ 2B+\mathrm{Sin}\ 2C=2\mathrm{Sin}(A+B)\mathrm{Cos}(A-B)+2\mathrm{Sin}C\,\mathrm{Cos}C$

$=2\ \mathrm{Sin}\ C\,[\mathrm{Cos}(A-B)-\mathrm{Cos}(A+B)]$

$=2\ \mathrm{Sin}\ C\,[-2\ \mathrm{Sin}\ A\ \mathrm{Sin}(-B)]=4\ \mathrm{Sin}\ A\ \mathrm{Sin}\ B\ \mathrm{Sin}\ C.$

4. 拋物線上任意二切線之交角，等於二切點之焦點半徑所成交角之半，求證之。

解：



設 P_1Q，P_2Q 爲拋物線之二切線，P_1，P_2 爲切線，F 爲焦點，FX 爲拋物線之軸，P_1T_1，P_2T_2 平行於 FX。

因拋物線切線平分焦半徑與過切點平行軸之直線所成之角，

由圖知 $\angle FP_1Q=\angle QP_1T_1'$

$\angle FP_2Q=\angle QP_2T_2'$

但 $\angle P_1QP_2=\angle QT_2'P_2+\angle QP_2T_2=\angle QP_1T_1'+\angle QP_2T_2'$

$\angle P_1FP_2=\angle FP_1T_1'+\angle FP_2T_2'=2(\angle QP_1T_1'+\angle QP_2T_2')$

$\therefore\ \angle P_1FP_2=2\angle P_1QP_2$.

(2) 乙、丙組

1. 某人每年存定款入銀行，年利率依複利計算，若干年後得本利和恰爲定款之 3 倍，設年數加倍，得本利和爲定款之 5 倍，但取款時不存入定款，問年利率若干？

解：　設年利率爲r，n年後本利和爲定款之 3 倍。則

$$A(1+r)^n+A(1+r)^{n-1}+\cdots+A(1+r)=3A$$

即 $$\frac{(1+r)[(1+r)^n-1]}{(1+r)-1}=3$$

或 $$(1+r)[(1+r)^n-1]=3r \qquad (1)$$

同理得

$$(1+r)[(1+r)^{2n}-1]=5r \qquad (2)$$

(2) ÷ (1)，得

$$\frac{(1+r)^{2n}-1}{(1+r)^n-1}=\frac{5}{3}，$$ 即

$$(1+r)^n+1=\frac{5}{3}，\quad 故\quad (1+r)^n=\frac{2}{3} \qquad (3)$$

則 $r<0$，故本題誤。

〔(3)代入(1)，得 $r=-\frac{1}{10}$〕

2. 試求 $(1+2x+4x^2)^{20}$ 之展開式中 x^5 之係數。

解： $(1+2x+4x^2)^{20}$

$$=\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=20\\ \alpha\,\beta\,\gamma\text{正整數}}}\frac{20!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}1^{\alpha}(2x)^{\beta}(4x^2)^{\gamma}$$

$$=\sum\frac{20!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}2^{\beta+2\gamma}x^{\beta+2\gamma}$$

命 $\beta+2\gamma=5$，

而 $\alpha+\beta+\gamma=20$.

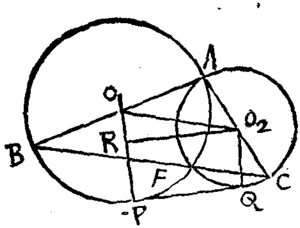
上二方程式之正整數解僅

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=17\\ \beta&=1\\ \gamma&=2\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&16\\ &3\\ &1\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&15\\ &5\\ &0\end{aligned}\right\}$$

得 x^5 之係數為

$$\left(\frac{20!}{17!\,2!}+\frac{20!}{16!\,3!}+\frac{20!}{15!\,5!}\right)\times32=1225728.$$

3. 設以一三角形各邊爲直徑作圓，試證任意兩邊上二圓公切線之長，爲第三邊被內切圓切點所分兩部分之比例中項。



解： 設 $\triangle ABC$，以 AB，AC 爲直徑作圓 O_1，O_2；$\overline{PQ}$ 爲公切線，P，Q 爲切點，F 爲 $\triangle ABC$ 內切圓在 BC 邊上之切點，過 O_2 作直線平行 PQ 交 O_1P 于 R 又設 r_1，r_2 爲圓 O_1，O_2 之半徑

則 $\overline{PQ}^2=\overline{RO_2}^2=\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_1R}^2$

$$=(\overline{O_1O_2}+\overline{O_1R})(\overline{O_1O_2}-\overline{O_1R})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\overline{BC}+r_1-r_2\right)\left(\frac{1}{2}\overline{BC}-r_1+r_2\right)$$

$$= \frac{AB+BC-CA}{2} \cdot \frac{BC+CA-AB}{2} = \overline{BF} \cdot \overline{CF}.$$

4. 試解下列方程式：

$\mathrm{Csc}\ 3\theta+\mathrm{Csc}\ 2\theta=\mathrm{Sin}\theta\ \ \mathrm{Csc}\ 2\theta\ \ \mathrm{Csc}\ 3\theta.$

解： 移項，將 Csc 化作 Sin 得

$$\frac{\mathrm{Sin}\,3\theta+\mathrm{Sin}\,2\theta-\mathrm{Sih}\,\theta}{\mathrm{Sin}\,3\theta\ \ \mathrm{Sin}\,2\theta}=\frac{3-4\,\mathrm{Sin}^2\theta+2\,\mathrm{Cos}\theta-1}{2\,\mathrm{Sin}\,3\theta\ \ \mathrm{Cos}\theta}$$

$$=\frac{2\,\mathrm{Cos}^2\theta+\mathrm{Cos}\theta-1}{\mathrm{Sin}\,3\theta\ \ \mathrm{Cos}\theta}=0.$$

由 $2\,\mathrm{Cos}^2\theta+\mathrm{Cos}\theta-1=0$，得 $(2\mathrm{Cos}\,\theta-1)(\mathrm{Cos}\theta+1)=0$

即 $\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{I}=\frac{1}{2}$ 或 -1， $\theta=\frac{\pi}{3}$，π

但 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 π 均使 $\mathrm{Sin}\,3\theta\ \ \mathrm{Cos}\theta=0$，

故方程式無解。

國立廈門大學

(1) 甲 組

1. 設 $A+B+C=180°$，且 $\frac{x}{\sin A}=\frac{y}{\sin B}=\frac{y}{\sin C}$，證明

$$(x-y)\ \mathrm{Cot}\frac{C}{2}+(y-z)\,\mathrm{Cht}\frac{A}{2}+(z-x)\,\mathrm{Cot}\frac{B}{2}=0$$

解： 由 $\frac{x}{\sin A}=\frac{y}{\sin B}==\frac{z}{\sin C}$

得 $\frac{x-y}{\sin A-\sin B}=\frac{y-z}{\sin B-\sin C}=\frac{z-x}{\sin C-\sin A}$

即 $\frac{x-y}{2\mathrm{Cos}\frac{A+B}{2}\,\mathrm{Sin}\frac{A-B}{2}}=\frac{y-z}{2\mathrm{Cos}\frac{B+C}{2}\mathrm{Sin}\frac{B-C}{2}}$

$$=\frac{z-z}{2\,\mathrm{Cos}\frac{C+A}{2}\mathrm{Sin}\frac{C-A}{2}},$$

設上三式等於 k，且因 $A+B+C=180°$，得

$$\begin{cases} x-y=2\,k\,\mathrm{Sin}\,\frac{C}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2}, \\ y-z=2\,k\,\mathrm{Sin}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{B-C}{2}, \\ z-x=2\,k\,\mathrm{Sin}\,\frac{B}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{C-A}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore\ (x-y)\ \mathrm{Cot}\,\frac{C}{2}+(y-z)\ \mathrm{Cot}\,\frac{A}{2}+(z-x)\ \mathrm{Cot}\,\frac{B}{2}$$

$$=2k\left[\mathrm{Cos}\,\frac{C}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2}+\mathrm{Cos}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{Sin}\frac{B-C}{2}+\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\,\mathrm{Sin}\frac{C-A}{2}\right]$$

$$=2k\left[\mathrm{Sin}\,\frac{A+B}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2}+\mathrm{Sin}\,\frac{B+C}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{B-C}{2}\right.$$

$$\left.+\mathrm{Sin}\,\frac{C+A}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{C+A}{2}\right]$$

$$=2k\left[(\mathrm{Cos}B-\mathrm{Cos}A)+(\mathrm{Cos}C-\mathrm{Cos}B)+(\mathrm{Cos}A-\mathrm{Cos}C)\right]=0$$

2. 令 $C_r^n=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}$，證明

(a) $C_r^n=C_{n-r}^n$

(b) $1-C_1^n+C_2^n-C_3^n+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$

(c) $1+(C_1^n)^2+(C_2^n)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_n^{2n}$

解 (a) $C_r^n=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}$$

$$\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}.$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\therefore\quad C^n_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=C^n_r.$$

（b）由二項定理

$$(a+b)^n=a^n+C^n_1a^{n-1}b+C^n_2a^{n-2}b^2$$
$$+C^n_3a^{n-3}b^3+\cdots+C^n_nb^n$$

命　$a=1$，　$b=-1$，　代入得

$$1-C^n_1+C^n_2-C^n_3+\cdots+(-1)^nC^n_n=0.$$

（c）$(1+x)^n=1+C^n_1x+C^n_2x^2+\cdots+C^n_nx^n$　（1）

$$(1+x)^{2n}=1+C^{2n}_1x+C^{2n}_2x^2+\cdots+C^{2n}_2x^n+\cdots$$
$$+C^{2n}_{2n}x^{2n}\qquad(2)$$

將（1）兩邊自乘得

$$(1+x)^{2n}=(1+C^n_1x+C^n_2x^2+\cdots+C^n_nx^n)^2$$

比較二式兩邊 x^n 項之係數，由（2）得

$$C^{2n}_n=1\cdot C^n_n+C^n_1C^n_{n-1}+C^n_2C^n_{n-2}+\cdots+C^n_n\cdot 1,$$

但　$C^n_n=1$，　$C^n_{n-r}=C^n_r$　$(r=1,2,\cdots\cdots n-1)$

$$\therefore\quad C^{2n}_n=1+(C^n_1)^2+(C^n_2)^2+\cdots+(C^n_n)^2.$$

3. 證明無限級數 $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{n^2+4n+3}+\cdots=\frac{3}{4}$

解：$\because\ \frac{1}{n^2+4n+3}=\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

∵上述級數每項皆可析爲二項。

設 Sn表示級數(n+1)項之和，$\left(S_0=\frac{1}{3}, S_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}, \cdots\right)$

則 $$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{n^2+4n+3}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$\therefore\ S_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{4}$，即 $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\cdots=\frac{3}{4}$

4. 設在拋物綫上兩點 P_1 P_2 之切線交於一點 P，令 F 爲其焦點，證明 $\overline{FP}^2=\overline{FP_1}\ \overline{FP_2}$.

解：設拋物線方程式 爲 $y^2=4px$.

P_1 P_2 P 之座標各爲 $(x_1\ y_1)$, (x_2, y_2), (a, b).

則 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 爲下列聯方程式

$$\begin{cases} by=2(px+pa) \\ y^2=4px \end{cases}$$

之二組解，即 x_1, x_2 爲方程式

$$p^2x^2+(2p^2a-pb^2)x+p^2a^2=0 \qquad (1)$$

之二根

又 $\overline{FP_1}=p+x_1$, $\overline{FP_2}=p+x$, $\overline{FP}^2=(a-p)^2+p^2$,

$$\therefore\ \overline{FP_1}\cdot FP_2=(p+x_1)(p+x_2)=p^2+p(x_1+x_2)+x_1x_2,$$

但由 (1) 知 $x_1+x_2=-\dfrac{2p^2a-pb^2}{p^2}$, $x_1\ x^2=a^2$

$$\therefore\ \overline{FP_1}\cdot\overline{FP_2}=p^2-(2a^2p-b^2)+a^2-(a-p)^2+b^2=\overline{FP}^2.$$

5. 設 A, B, C 爲直角雙曲線 $xy=a^2$ 上之三點，其一漸近線與 BC,

CA, AB 各交於 D, E, F; 則從 D, E, F, 各作 BC, CA, AB 之垂線會於一點，試證之。

解：　設　$xy=a^2$ 上三點　A, B, C 之座標爲

$$A\left(x_1, \frac{a^2}{t_1}\right),\quad B\left(t_2, \frac{a^2}{t_2}\right),\quad C\left(t_3, \frac{a^2}{t_3}\right)$$

取一漸近線　$x=0$

BC 之方程式爲

$$\frac{y-\dfrac{a^2}{t_2}}{x-t_2}=\frac{\dfrac{a^2}{t_2}-\dfrac{a^2}{t_3}}{t_2-t_3}$$

故　D 點之座標爲

$$x=0,\qquad y=\frac{a^2}{t_2}-t_2\left(\frac{\dfrac{a^2}{t_2}-\dfrac{a^2}{t_3}}{t_2-t_3}\right)=\frac{a^2}{t_2}+\frac{a^2}{t_3}$$

即 $D\left(0, \dfrac{a^2}{t_2}+\dfrac{a^2}{t_3}\right)$ 同理 $E\left(0, \dfrac{a^2}{t_3}+\dfrac{a^2}{t_1}\right)$, $F\left(0, \dfrac{a^2}{t_1}+\dfrac{a^2}{t_2}\right)$

又　BC 之斜率爲 $m_1=\dfrac{\dfrac{a^2}{t_2}-\dfrac{a^2}{t_3}}{t_2-t_3}=-\dfrac{a^2}{t_2\,t_3}$,

CA 之斜率爲 $m_2=-\dfrac{a^2}{t_3\,t_1}$,

AB 之斜率爲 $m_3=-\dfrac{a^2}{t_1\,t_2}$.

故過D與BC垂直的直線之方程式爲

$$y-\left(\frac{a^2}{t_2}+\frac{a^2}{t_3}\right)=\frac{t_2\,t_3}{a^2}\,x$$

即　$$\frac{t_2\,t_3}{a^2}x-y+\frac{a^2}{t_2}+\frac{a^2}{t_3}=0\qquad(1)$$

同理得過E與CA垂直之直線方程式爲

$$\frac{t_3\,t_1}{a^2}x-y+\frac{a^2}{t_3}+\frac{a^2}{t_1}=0\qquad(2)$$

過F與AB垂直之直線方程式爲

$$\frac{t_1 t_2}{a^2}x - y + \frac{a^2}{t_1} + \frac{a^2}{t_2} = 0 \qquad (3)$$

作三方程式係數行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{t_2 t_3}{a^2} & -1 & \left(\frac{a^2}{t_2}+\frac{a^2}{t_3}\right) \\ \frac{t_3 t_1}{a^2} & -1 & \left(\frac{a^2}{t_3}+\frac{a^2}{t_1}\right) \\ \frac{t_1 t_2}{a^2} & -1 & \left(\frac{a^2}{t_1}+\frac{a^2}{t_2}\right) \end{vmatrix} = \frac{-t_1t_2t_3}{a^2}a^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1} & 1 & \frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3} \\ \frac{1}{t_2} & 1 & \frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_1} \\ \frac{1}{t_3} & 1 & \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2} \end{vmatrix}$$

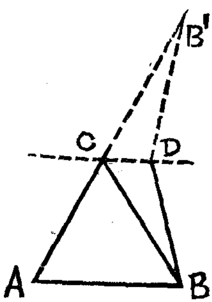
$$= -t_1 t_2 t_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1} & 1 & \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3} \\ \frac{1}{t_2} & 1 & \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3} \\ \frac{1}{t_3} & 1 & \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3} \end{vmatrix} = 0$$

故三直線共點。

(2) 乙、丙組

1. 等底等積諸三角形中，以當他二邊相等時周界爲極小，試證之。

解：



假設：△ABC＝△ABD，

AC＝BC，　AD≠BD.

求證：AB＋BC＋CA＜AB＋BD＋DA

證明：延長AC至B'，使CB'＝AC＝CB，

連 CD，DB'　因 △ABC＝△ABD，

∴ CD∥AB.

∴ ∠B'CD＝∠CAB＝∠ABC＝∠BCD

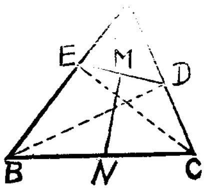
∴ △B'CD≌△BCD，B'D＝BD，

而 AD＋B'D＞AC＋CB'，

即 AD＋BD＞AC＋BC　∴ AB＋BC＋AC＜AB＋BD＋AD.

2. 自△ABC之二角點B，C各作BD　AC，CE　AB，設M，N各爲DE，BC之中點，試證MN⊥DE.

解：



假設：　△ABC中BD⊥AC，CE⊥AB.

EM＝MD，BN＝NC

求證：　MN⊥DE·

證明：　∠BDC＝∠BEC＝R∠

故B，C，D，E四點共圓，此圓以N為中心，BC為直徑，而DE為此圓之一弦，DE之中點M與中心連線必垂直於弦。

3. 設三角形ABC之內切圓之半徑為r，三內角A，B，C對邊之長各為a，b，c求證

$$a+b+c=2r\left(\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}\right)。$$

解：　由正弦定律 $\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=\frac{b}{\mathrm{Sin}B}=\frac{c}{\mathrm{Sin}C}=2R$，R為外接圓之半徑

$$\therefore\ a+b+c=2R(\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B+\mathrm{Sin}C)$$

但 $\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B+\mathrm{Sin}C=4\ \mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}$，

$$r=4R\ \mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2},$$

$$\therefore\ a+b+c=2r\ \mathrm{Cot}\frac{A}{2}\mathrm{Cot}\frac{B}{2}\mathrm{Cot}\frac{C}{2}$$

而 $\mathrm{Cot}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$

$$=\frac{\mathrm{Cot}\frac{A}{2}\mathrm{Cot}\frac{B}{2}\mathrm{Cot}\frac{C}{2}-\left(\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}\right)}{\mathrm{Cot}\frac{B}{2}\mathrm{Cot}\frac{C}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{A}{2}\mathrm{Cot}\frac{B}{2}-1}$$

$=0$，

$$\therefore\ \mathrm{Cot}\frac{A}{2}\mathrm{Cot}\frac{B}{2}\mathrm{Cot}\frac{C}{2}=\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}$$

$$\therefore\ a+b+c=2r\left(\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}\right)。$$

4. 證明 $\begin{vmatrix} bc & k^2 & bc(b+c) \\ ca & k^2 & ca(c+a) \\ ab & k^2 & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$

解： 將行列式第一列減去第二列，第二列減去第三列，得

$$\begin{vmatrix} c(b-a) & 0 & c(b-a)(a+b+c) \\ a(c-b) & 0 & a(c-b)(a+b+c) \\ ab & k^2 & ab(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= ca(b-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a+b+c \\ 1 & 0 & a+b+c \\ ab & k^2 & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

5. 求 $(x^3+\frac{1}{x^2})^{20}$ 中 x^{45} 之係數

解： $(x^3+\frac{1}{x^2})^{20}$ 用二項定理展開之，其一般項爲

$$C^{20}_r(x^3)^{20-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = C^{20}_r\, x^{60-3r-2r} = C^{20}_r\, x^{60-5r}$$

命 $60-5r=45$, $\therefore$ $r=3$

故 x^{45} 之係數爲 $C^{20}_3 = \frac{20.19.18.}{1.2.3} = 1140.$

國立復旦大學

(1) 甲 組

1. 設a,b,c爲方程式 $x^3+px+q=0$ 之三根，$S_n=a^n+b^n+c^n$

(1) 展開下行列式爲p，q之函數

$$\triangle = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$$

(2) 表明$\triangle>0$時，a,b,c爲三個不同實根；$\triangle<0$時，a,b,c三根中有一爲實根，其餘二相配虛根；$\triangle=0$時，a,b,c 爲三實根

且至少有二根相等。

解：（1）$S_0=3$，由根與係數關係得$S_1=0$，

$$S_2=S_1^2-2p=-2p.$$

又∵ $a^3+pa+p=0$，$b^3+pb+q=0$，$c^3+pc+q=0$

三式相加，得 $S_3=-pS_1-3q=-3q.$

由 $a^4+pa^2+qa=0$，$b^4+pb^2+qb=0$，$c^4+pc^2+qc=0$

三式相加，得 $S_4=-pS_2-qS_1=2p^2$，

$$\therefore\quad \triangle=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -2q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix}=-12p^3+8p^3-27q=-4p^3-27q^2$$

（2）設d爲$x^3+px+q=0$之判別式，

$$則\quad d=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

$$\therefore\quad \triangle=-108d.$$

但當 $d<0$，a，b，c 爲三不同實根，$d>0$僅一爲實根，其餘二爲相配虛根，$d=0$三實根至少有二根相等，故得證明。

2. 已與齊次方程組：

$$\begin{cases} x-y\cos C-z\cos B=0 \\ -x\cos C+y-z\cos A=0 \\ -x\cos B-y\cos A+z=0 \end{cases}$$

式中 A，B，C 爲三參數

（1）求此方程組除 $x=y=z=0$ 之一組解答外，有其他解答時 A，B，C 間之關係；

（2）求證 $A+B+C=\pi$ 時，x，y，z 恰爲一三角形之三邊。

解：（1）此方程組除 $x=y=z=0$ 之一組解答外，有其他解答之條件爲其係數行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -\mathrm{Cos}\,C & -\mathrm{Cos}B \\ -\mathrm{Cos}C & 1 & -\mathrm{Cos}A \\ -\mathrm{Cos}B & -\mathrm{Cos}A & 1 \end{vmatrix}$$

等於零，將 D 展開，得

$$D=1-2\cos A\cos B\cos C-\cos^2A-\cos^2B-\cos^2C=0$$

即爲所求之關係。

(2) 當 $A+B+C=\pi$ 時，則 $\cos(A+B+C)=0$，

即 $\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\sin B\cos C$

$-\sin A\cos B\sin C=0$.

於是得

$$2\cos A\cos B\cos C=(\cos A\sin B\sin C+\sin A\sin B\cos C)$$
$$+(\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C)+(\sin A\cos B\sin C$$
$$+\cos A\sin B\sin C)$$
$$=\sin B\sin(A+C)+\sin A\sin(B+C)+\sin C\sin(A+B)$$
$$=\sin^2B+\sin^2A+\sin^2C.$$

故知當 $A+B+C=\pi$ 時，$D=0$，即 x, y, z 除皆等於 0 外尙有其他解，就第一，第二方程式可解得

$$x:y:z=\begin{vmatrix}-\cos C & -\cos B\\ 1 & -\cos A\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-\cos B & 1\\ -\cos A & -\cos C\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -\cos C\\ -\cos C & 1\end{vmatrix}$$

$$=\cos A\cos C+\cos B:\cos B\cos C+\cos A:1-\cos^2C.$$

但 $\cos A\cos C+\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]+\cos B$

$$=\frac{1}{2}(\cos(A-C)-\cos(A+C))=\sin A\sin C,$$

同理知 $\cos B\cos C+\cos A=\sin B\sin C$，

$\therefore\ x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$。

此即爲正弦定律，故得 x, y, z 爲一三角形之三邊而以 A, B, C 爲三對角。

3. 試述無窮級數爲收斂或發散之定義，并討論普遍項如下之二無窮級數何時爲收斂何時爲發散？

解： 一無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$

作其部分和　$Sn=\sum_{m=1}^{n} Um$

如對於一任意小正數 ε，能決定一數 N，當 $n>N$時

使 $|Sn-A|<\varepsilon$　A 爲定常數，則稱 Sn 收斂於 A，

亦稱級數 $\sum_{n=1}^{\infty} Un$ 收斂，記 $\sum_{n=1}^{\infty} Un=A$.

如 Sn 不收斂，則稱級數 $\sum_{n=1}^{\infty} Un$ 爲發散。

（1）當$Un=x^{n+1}\left\{\log(n+1)\right\}^{q}$（log表以e爲底之對數）

$$作\ \frac{Un}{Un-1}=x\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{q}=x\left(1+\frac{\log\frac{n+1}{n}}{\log n}\right)^{q}$$

$$但\ \frac{\log\frac{n+1}{n}}{\log n}<\frac{1}{n\log n}\to 0\ (當\ n\to\infty)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{Un}{Un-1}=x$$

$\therefore$ $|x|<1$時 級數收斂，$|x|>1$時級數發散。

又 $x=\pm 1$時，級數亦發散。

（2）當 $Un=x^{n}(\mathrm{Cos}^{n}\theta+\mathrm{Cos}^{n-1}\theta\,\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}^{n-2}\theta\,\mathrm{Sin}^{2}\theta$

$+\cdots+\mathrm{Sin}^{n}\theta)$.　$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

茲分三情形討論之：

（i）當$\theta=45^{\circ}$時，$Un=x^{n}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n}(n+1)$

$$\frac{Un}{Un-1}=x\sqrt{\frac{1}{2}}\ \frac{n+1}{n}\to\sqrt{\frac{1}{2}}\ x$$

$\therefore$ $|x|<\sqrt{2}$ 時，級數收斂；$|x|\geqq\sqrt{2}$ 時，級數發散。

(ii) 當$0<\theta<45^\circ$時，$u_n=x^n\dfrac{Cos^{n+1}\theta-Sin^{n+1}\theta}{Cos\theta-Sin\theta}$

$$\therefore\ \frac{u_n}{u_{n-1}}=x\frac{Cos^{n+1}\theta-Sin^{n+1}\theta}{Cos^n\theta-Sin^n\theta}=x\frac{1-tan^{n+1}\theta}{sec\theta(1-tan^n\theta)}$$

$\because\ 0<\theta<45^\circ,\quad \therefore\ tan\theta<1,\quad tan^n\theta\to 0.\quad (n\to\infty)$

$$\therefore\ \frac{u_n}{u_{n-1}}\to x\ Cos'\theta$$

$\therefore$ $|x|<sec\theta$時，級數收斂；

$|x|>sec\theta$時，級數發散。

(iii) 當$45^\circ<\theta<90^\circ$時

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=x\frac{Con^{n+1}\theta-1}{csc\theta(cot^n\theta-1)}$$

$\therefore\ 45^\circ<\theta<90^\circ,\quad Cot\theta<1,\quad \therefore\ Cot^n\theta\to 0\quad (n\to\infty)$

$$\therefore\ \frac{u_n}{u_{n-1}}\to x\ sin\theta$$

$\therefore$ $|x|<csc\theta$時，級數收斂；

$|x|>csc\theta$時，級數發散。

4. 設有等邊雙曲線(c): $xy=1$；今於其上取三點A，B，C爲成三角形，而A，B，C之橫標依次爲a，b，c(1)求證過△ABC三頂點作向對邊之垂線會於一點，(2)求出三垂綫之交點坐標，并證明此交點在雙曲線(c)上。

解：(1) A，B，C之座標爲$A(a,\frac{1}{a})$，$B(b,\frac{1}{b})$ $C(c,\frac{1}{c})$

設 $AD\perp BC$，$BE\perp CA$，$CF\perp AB$

$$\because\ BC\text{ 之斜率爲}\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}{b-c}=-\frac{1}{bc},$$

∴　AD 之方程式爲

$$y-\frac{1}{a}=bc\ (x-a) \qquad (1)$$

同理　BE, CF 之方程式依次爲

$$y-\frac{1}{b}=ca\ (x-b) \qquad (2)$$

$$y-\frac{1}{c}=ab\ (x-c) \qquad (3)$$

三方程式係數行列式爲

$$\begin{vmatrix} bc & -1 & \frac{1}{a}-abc \\ ca & -1 & \frac{1}{b}-abc \\ ab & -1 & \frac{1}{c}-abc \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} bc & 1 & \frac{1}{a} \\ ca & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & 1 & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bc & 1 & bc \\ ca & 1 & ca \\ ab & 1 & ab \end{vmatrix}=0$$

∴　三垂線會於一點。

(2) 解 (1), (2)。

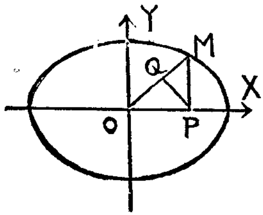
(2)—(1), $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=c(a-b)x$,　∴　$x=-\frac{1}{abc}$,

$$y=\frac{1}{a}+bc\left(-\frac{1}{abc}-a\right)=-abc.$$

故垂線交點在雙曲線 (c) 上.

5. 設於橢圓上之M (a Cosφ , b Sinφ) 點，引與橢圓心O之聯線OM，再由M點引正交於橢圓長軸之線 $\overline{MP}$ 復由P引與 OM 正交之線 $\overline{PQ}$. (1)求當M點沿橢圓移動時Q點之軌跡。(2)討論此軌跡之形狀，并繪圖以明之。

解：



橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$M(a\cos\phi,\ b\sin\phi)$

$P(a\cos\phi,\ 0)$

$\overline{OM}$ 之斜率為 $\frac{b}{a}\tan\phi$，

∴ $\overline{PQ}$ 之斜率為 $-\frac{a}{b}\cot\phi$。

故 $\overline{PQ}$ 之方程式為 $y=-\frac{a}{b}\cot\phi\,(x-a\cos\phi)$ 　　(1)

$\overline{OM}$ 之方程式為 $y=\frac{b}{a}\tan\phi\ x$ 　　(2)

解 (1),(2) 即得Q之座標

$$x=\frac{a\cos\phi}{\left(\frac{b}{a}\tan\phi\right)^2+1},\quad y=\frac{b\sin\phi}{\left(\frac{b}{a}\tan\phi\right)^2+1}$$

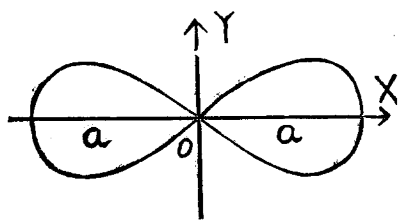
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{\left[\left(\frac{b}{a}\tan\phi\right)^2+1\right]^2},\quad \frac{y}{x}=\frac{b}{a}\tan\phi,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right]^2}=\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$$

故得Q點軌跡方程式為

$$(x^2+y^2)^2\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-x^4=0.$$

其圖形關於x軸，y軸原點對稱，且過原點大概形狀如下：



(2) 乙　組

1. 已知A,B,C爲定角及

$$D\equiv\begin{vmatrix}\mathrm{Cos}(\theta+A) & \mathrm{Cos}(\theta+B) & \mathrm{Cos}(\theta+C)\\ \mathrm{Sin}(\theta+A) & \mathrm{Sin}(\theta+B) & \mathrm{Sin}(\theta+C)\\ \mathrm{Sin}(B-C) & \mathrm{Sin}(C-A) & \mathrm{Sin}(A-B)\end{vmatrix}$$

(1) 化簡D

(2) 說明D之值對於θ爲任何角時，恆爲定值而小於0，

解：

$$D=\mathrm{Sin}(B-C)\begin{vmatrix}\mathrm{Cos}(\theta+B) & \mathrm{Cos}(\theta+C)\\ \mathrm{Sin}(\theta+B) & \mathrm{Sin}(\theta+C)\end{vmatrix}$$

$$-\mathrm{Sin}(C-A)\begin{vmatrix}\mathrm{Cos}(\theta+A) & \mathrm{Cos}(\theta+C)\\ \mathrm{Sin}(\theta+A) & \mathrm{Sin}(\theta+C)\end{vmatrix}$$

$$+\mathrm{Sin}(A-B)\begin{vmatrix}\mathrm{Cos}(\theta+A) & \mathrm{Cos}(\theta+B)\\ \mathrm{Sin}(\theta+A) & \mathrm{Sin}(\theta+B)\end{vmatrix}$$

$$=-\left[\mathrm{Sin}^2(B-C)+\mathrm{Sin}^2(C-A)+\mathrm{Sin}^2(A-B)\right]$$

$$\therefore\ D=-\left[\mathrm{Sin}^2(B-C)+\mathrm{Sin}^2(C-A)+\mathrm{Sin}^2(A-B)\right]$$

故D與θ無關，即D爲定値而小於0。

2. 已知方程式 $x^3-7x^2+14x-入^2-2入=0$ 之三根 a,b,c 成G.P.（等比級數）

(1) 試定入之值，　(2)求此方程式之各根。

解：(1)

$$\begin{cases}a+b+c=7\\ ab+bc+ca=14\\ abc=入^2+2入\end{cases}$$

因 a.b.c 成 G.P.　故　$ac=b^2$.

$ab+bc+ca=b(a+b+c)=7b=14.$　$\therefore$　$b=2.$

$入^2+2入=abc=b^3=8.$　即　$入^2+2入-8=0$

$\therefore$　$入=2$ 或 $-4.$

(2)　$a+c=5$　　$ac=4$

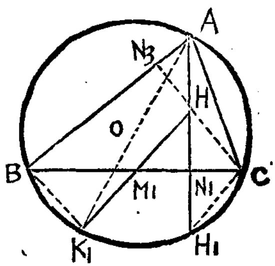
$\therefore$　$a=1$ 或 4,　$b=2$,　$c=4$ 或 1.

故此方程式之三根爲 1,2,4.

8. 設H爲△ABC之重心，求證

(1) H 對於 BC, CA, AB 之對稱點爲 H_1, H_2, H_3 同在 △ABC 之外接圓周上；

(2) H對於 BC, CA, AB 之中點之對稱點爲 K_1, K_2, K_3 同在△ABC 之外接圓周上。



解：(1) $AN_1 \perp BC$, $CN_3 \perp AB$,
延長AN_1與△ABC之外接圓交於 H_1

因 C,A,N_3,N_1 共圓.

$\angle BAH = \angle HCN_1$.

又 $\angle BAH = \angle N_1CH_1$.

∴ $\angle HCN_1 = \angle N_1CH_1$.

故 H_1爲H關於BC之對稱點。

同理可證H_2爲H關於CA之對稱點，H_3爲H關於AB之對稱點。因一點關於一直線之對稱點只有一點，故上性質之逆亦眞。

(2) 設O爲△ABG之外接圓心，連AO與圓交於K_1,

則 $\angle ABK_1 = R\angle$, ∴ $BK_1 \parallel CH$. ∴ $\angle HCL_1 = \angle CBK_1$

連接HK_1交BC於M_1, 得 $\angle BM_1K_1 = \angle HM_1C$.

又因 $\angle CBK_1 = \angle HCN_1 = \angle N_1CH_1$ (由(1))

∴ $BK_1 = CH_1$. 即 $BK_1 = H_1C$.

∴ $\triangle BK_1M_1 \cong \triangle M_1HC$. 即 $BM_1 = M_1C$.

而知M_1爲BC之中點，即圓周上之K_1爲H關於M_1之對稱點，同理可證其他，因一點關於另一點之對稱點只有一點，故上性質之逆亦眞。

4. 設△ABC之周界爲 2p, 面積爲△，及其內切圓與三個傍切圓之半徑分別爲r, r_1, r_2, r_3求證

(1) $\triangle = \sqrt{r r_1 r_2 r_3}$，　(2) $r_2r_3 + r_3r_1 + r_1r_2 = p^2$.

解：　設△ABC三邊之長爲a,b,c.　　則　$a+b+c=2p$.

$$\triangle^2=p(p-a)(p-b)(p-c),\quad r=\frac{\triangle}{p},$$

$$r_1=\frac{\triangle}{p-a},\quad r_2=\frac{\triangle}{p-b},\quad r_3=\frac{\triangle}{p-c}.$$

(1)　$$r\,r_1\,r_2\,r_3=\frac{\triangle^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\triangle^2.$$

$$\therefore\ \triangle=\sqrt{r\,r_1\,r_2\,r_3}.$$

(2)　$$r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=\frac{\triangle^2}{(p-b)(p-c)}+\frac{\triangle^2}{(p-c)(p-a)}$$

$$+\frac{\triangle^2}{(p-a)(p-b)}=\triangle^2\cdot\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=p\{3p-(a+b+c)\}=p^2.$$

5.　設M爲△ABC之一邊BC之中點，求證

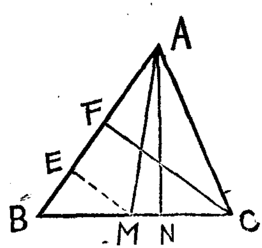
(1) AM分∠A爲二部分，其餘切分別爲

$2\cot A+\cot B$ 及 $2\cot A+\cot C$.

(2) AM與BC所夾之角，其餘切爲 $\cot B$ 及 $\cot C$ 之差之半。

解：　(1) 作$ME\perp AB$，$CF\perp AB$.

因 $BM=MC$，　$\therefore\ CF=2ME$，



$$BE=EF,\quad \cot\widehat{BAM}=\frac{AE}{ME},$$

$$\cot A=\frac{AF}{CF},\quad \cot B=\frac{BE}{ME}.$$

$$\therefore\ \cot\widehat{BAM}=\frac{AE}{ME}=\frac{AF}{ME}+\frac{BE}{ME}$$

$$=2\cot A+\cot B.$$

同理可證　$\cot\widehat{CAM}=2\cot A+\cot C$.

(2) 引$AN\perp BC$，　則 $BN-NC=2MN$.

$$\cot\widehat{AMC}=\frac{MN}{AN}=\frac{\frac{1}{2}(BN-NC)}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{BN}{AN}-\frac{NC}{AN}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\cot B-\cot C).$$

$$\cot \widehat{AMB}=\cot(\pi-\widehat{AMC})=-\cot \widehat{AMC}=\frac{1}{2}(\cot C-\cot B)$$

故　AM與BC所夾之角，其餘切為$\frac{1}{2}(\cot B-\cot C)$.

國立暨南大學

(1)　理　組

1. 已知 α, β, γ 為方程式 $2x^3+x^2-4x+1=0$ 之根，試求 $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\beta\gamma^2+\gamma\beta^2+\gamma\alpha^2+\alpha\gamma^2$之值。

解：　$\because\ \alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{2},\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2},$

$$\therefore\ \alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\beta\gamma^2+\gamma\beta^2+\gamma\alpha^2+\alpha\gamma^2$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)-3\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}.$$

2. 以拋物線之焦弦為直徑之圓，常與拋物線之準線相切，試證明之。

解：　設拋物線方程式為　$y^2=4px,$　　(1)

則　焦點為$F(p, o)$，準線為 $x=-p.$

過F任作一直線α：
$$\begin{cases} x=p+\rho\,\mathrm{Cos}\,\theta \\ y=\rho\,\mathrm{Sin}\,\theta \end{cases}\qquad (2)$$

設與拋物線(1)相交於$P_1(x_1, y_1)$，　$P_2(x_2, y_2)$兩點，

$\overline{P_1P_2}$之中點設為$P_0(x_0, y_0)$.

將(2)代入(1),得 $\rho^2\mathrm{Sin}^2\theta-4p\rho\,\mathrm{Cos}\,\theta-4p^2=0$　　(3)

設(3)之二根為ρ_1, ρ_2，　$\rho_1+\rho_2=\dfrac{4p\ \mathrm{Cos}\,\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta}$，$\rho_1\rho_2=\dfrac{-4p^2}{\mathrm{Sin}^2\theta}$

$$\overline{P_1P_2}^2=(\rho_1-\rho_2)^2=(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2$$

$$=\frac{16p^2\ \mathrm{Cos}^2\theta}{\mathrm{Sin}^4\theta}+\frac{16p^2}{\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$\therefore\ \overline{P_1P_2}^2=16p^2\csc^4\theta$$

又 $x_0=p+\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\cos\theta=p+2p\cot^2\theta$,

$$y_0=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\sin\theta=2p\cot\theta$$

故　以$\overline{P_1P_2}$爲直徑之圓之方程式爲

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{\overline{P_1P_2}^2}{4}$$

卽　$(x-p-2p\cot^2\theta)^2+(y-2p\cot^2\theta)^2=4p^2\csc^4\theta$，　(4)

今求準線與圓(4)之交點，將$x=-p$　代入(4)

得　$(-2p-2p\cot^2\theta+(y-2p\cot\theta)^2=4p^2\csc^4\theta$,

卽　$(y-2p\cot\theta)^2=0$，　此方程式有重根，表示準線與圓之二交點合而爲一，卽準線和圓相切。

3. 今有橢圓$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 之一弦，恰爲點(4, 2) 所平分，試求該弦之方程式。

解：　設該弦之傾角爲θ，則方程式爲

$$\begin{cases} x=4+\rho\cos\theta \\ x=2+\rho\sin\theta \end{cases} \qquad (1)$$

將　(1) 代入橢圓方程式，得

$$(4+\rho\cos\theta)^2+4(2+\rho\sin\theta)^2=36$$

卽　$\rho^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)+\rho(8\cos\theta+16\sin\theta)-4=0$

設上方程式之二根爲ρ_1, ρ_2,則必$\rho_1+\rho_2=0$

卽　$8\cos\theta+16\sin\theta=0$,　$\tan\theta=-\frac{1}{2}$

故此弦之方程式爲 $y-2=-\frac{1}{2}(x-4)$ 卽

$x+2y-8=0$.

4. 求證 $\tan^{-1}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$

解： $\because \tan\left(\tan^{-1}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right)$

$$=\frac{\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}}{1-\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}\cdot\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}\,ab}(2a^2-ab+2b^2-ab)}{\frac{1}{3ab}(3ab+2b+2a^2-5ab)}=\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan^{-1}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}.$$

5. 求證 $\begin{vmatrix} b+c-a-d & bc-ad & bc(a+d)-ad(b+c) \\ c+a-b-d & ca-bd & ca(b+d)-bd(c+a) \\ a+b-c-d & ab-cd & ab(c+d)-cd(a+b) \end{vmatrix}$

$=-2(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d).$

解： 此行列式關於a,b,c,d爲輪換對稱。

又將 $a=b$ 代入行列式，則行列式爲0，故 $(a-b)$ 爲其一因子，因輪換對稱，故 $(b-c)$，$(c-a)$，$(a-d)$，$(b-d)$，$(c-d)$ 皆爲其因子，故 $(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$ 爲其因子，但行列式關於a,b,c,d爲六次式，故必行列式 $=K(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$，於此K爲一常數。

比較 a^3bc^2 之係數，得 $-2=K$

故行列式 $=-2(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d).$

(2) 文 組

1. (1) $a=b^2$, $a^{x+2}=b^6$; $x=$?

(2) $\log_2(x+3)=\log_2(x-1)+1$， $x=$?

(3) $3+4i$ 之配數爲何？幅角爲何？模爲何？

（4） 已知 α 為 $x^2+x+1=0$ 之一根，求證 α^2 亦為其一根。

（5） $\operatorname{Sin}\left[2\tan^{-1}\sqrt{3}\right]=?$

解：（1） $a=b^2$， $\therefore\ a^3=b^6$ $\therefore\ a^{-}=a^{x+2}$ $\therefore\ x=1$，

（2） $\because\ 1=\log_2 2$

$\therefore\ \log_2(x+3)=\log_2(x-1)+\log_2 2=\log_2 2(x-1)$

$\therefore\ x+3=2(x-1)$　　$\therefore\ x=5$

（3） $3+4i$ 之配數為 $3-4i$，其幅角 $=\operatorname{ton}^{-1}\dfrac{4}{3}$ 模 $=5$。

（4） $\because\ \alpha^2+\alpha+1=0$

而 $(\alpha^2)^2+\alpha^2+1=\alpha^4+\alpha^2+1=(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

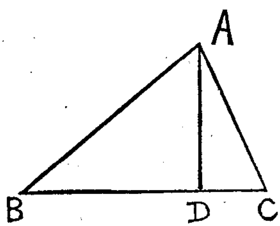
$\therefore$ α^2 亦為 $x^2+x+1=0$ 之根。

（5） $\because\ \operatorname{ton}^{-1}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore\ \operatorname{Sin}\left[2\operatorname{ton}^{-1}\sqrt{3}\right]=\operatorname{Sin}\dfrac{2\pi}{3}，=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

2. 自△ABC之頂點A至底邊BC作直線AD，將△ABC分為二三角形△ABD及△ACD，試證其外接圓半徑之比為AB：AC.

解：



設 △ABD，△ACD 之外接圓半徑依次為 R_1，R_2

由正弦律，得

$$\frac{AB}{\operatorname{Sin}\angle ADB}=2R_1,\quad \frac{AC}{\operatorname{Sin}\angle ADC}=2R_2$$

但 $\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$，

$\therefore\ \operatorname{Sin}\angle ADB=\operatorname{Sin}\angle ADC$

$\therefore\ R_1:R_2=AB:AC.$

3. 已知方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根為 α,β,γ，求以 $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma},\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha},\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$ 為三根之方程式。

解： $\because\ \alpha+\beta+\gamma=-p$,

$$\therefore\ \frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-\alpha}=\frac{-\alpha}{p+\alpha},$$

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha}=\frac{-\beta}{p+\beta},\ \frac{\gamma}{\alpha+\beta}=\frac{-\gamma}{p+\gamma},$$

令 $y=\dfrac{-x}{p+x}$， 得 $x=\dfrac{-py}{y+1}$ 代入原方程式

得 $\left(\dfrac{-py}{y+1}\right)^3+p\left(\dfrac{-py}{y+1}\right)^2+q\left(\dfrac{-py}{y+1}\right)+r=0$

$\therefore\ (-py)^3+p(-py)^2(y+1)+q(-py)(y+1)^2+r(y+1)^3=0$

簡化，即得所求之方程式為

$(r-pq)y^3+(p^3-2pq+3r)y^2+(3r-pq)y+r=0$.

4. 解下三角方程式中 x 之值：

$\tan x+\tan(x+\alpha)+\tan(x+\beta)=\tan x\ \tan(x+\alpha)\ \tan(x+\beta)$.

解： $\because\ \tan(a+b+c)=\dfrac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a\ \tan b\ \tan c.}{1-\tan b\ \tan c-\tan c\ \tan a-\tan a\ \tan b.}$

命 $a=x$, $b=x+\alpha$, $c=x+\beta$， 代入上式

得 $\tan\left[x+(x+\alpha)+(x+\beta)\right]=0$.

$\therefore\ 3x+\alpha+\beta=n\pi$，

$\therefore\ x=\dfrac{n\pi-\alpha-\beta}{3}$.

國立英士大學

(1) 甲 組

1. 設有方程式 $x^3-7x+\lambda=0$，

定λ之值，使其一根為另一根之二倍，並由是解之。

解： 設方程式 $x^3-7x+\lambda=0$ 之三根為

α, 2α, β；由根與係數關係，得

$3\alpha+\beta=0$, $2\alpha^2+3\alpha\beta=-7$, $2\alpha^2\beta=-\lambda$，

由前二方程式聯立解之，得

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=1\\ \beta=-3\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}-1\\ 3\end{array}\right\},\qquad \therefore\ \lambda=\pm 6$$

即當 $\lambda=6$，三根爲 $1, 2-3$;

當 $\lambda=-6$，三根爲 $-1,-2,3$.

2. 試解聯立方程式：
$$\begin{cases} ax+by+z=1\\ x+aby+z=b\\ x+by+az=1\end{cases}$$
並討論之。

解：
$$D=\begin{vmatrix} a & b & 1\\ 1 & ab & 1\\ 1 & b & a\end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} o & 1-a^2 & 1-a\\ o & a-1 & 1-a\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$=b\begin{vmatrix} 1-a^2 & 1-a\\ a-1 & 1-a\end{vmatrix}=b(1-a)^2\begin{vmatrix} 1+a & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=b(1-a)^2(2+a)$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & b & 1\\ b & ab & 1\\ 1 & b & a\end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} 1 & o & 1\\ b & a-b & 1\\ 1 & o & a\end{vmatrix}=b(a-1)(a-b)$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} o & o & 1\\ 1-ab & b-1 & 1\\ 1-a & 1-a & a\end{vmatrix}=(1-a)(2-b-ab)$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a & b & 1\\ 1 & ab & b\\ 1 & b & 1\end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} a & o & 1\\ 1 & a-b & b\\ 1 & o & 1\end{vmatrix}=b(a-1)(a-b)$$

今分下列諸情形討論之：

(i) 如 $a=b=1$，則方程式有無窮組解，

(ii) 如 $b=o$ 或 $a=1$，或 $a=-2$，方程式無解，

(iii) 非上述二情形時，則可解得

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{a-b}{(1-a)(2+a)}, \\[2ex] y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{2-b-ab}{b(1-a)(2+a)}, \\[2ex] z=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{a-b}{(1-a)(2+a)}。\end{cases}$$

3. 設有一圓 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 求定 A, B, C 使其與另一圓 $x^2+y^2+2x-y+2=0$ 之根軸爲經過(0,1)點,與ox軸成45°角之直線。

解：此二圓之根軸爲

$$(A-2)x+(B+1)y+(C-2)=0 \qquad (1)$$

又過 (0,1)，並與 ox 軸成 45° 角之直線爲

$$x-y+1=0 \qquad (2)$$

(1)，(2) 重合之條件爲 $\dfrac{A-2}{1}=\dfrac{B+1}{-1}=\dfrac{C-2}{1}=k.$

$\therefore\ A=2+k,\qquad B=-1-k,\qquad C=2+k,$

未定之圓爲一圓系 $(x^2+y^2+2x-y+2)+k(x-y+1)=0.$

4. 試展開行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

將其結果納成因式，使因子間顯出此行列式等於零當：

$a=b$或$b=c$或$c=a$.

由此推得：若有α,β,γ三角而$\alpha+\beta+\gamma=0$; 則

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

解：$\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}=(\sin b\cos c-\sin c\cos b)$

$$-(\operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} c-\operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} a)+(\operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} b-\operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} a)$$

$$=\operatorname{Sin}(b-c)+\operatorname{Sin}(c-a)+\operatorname{Sin}(a-b)$$

$$=2 \operatorname{Sin} \frac{b-a}{2} \operatorname{Cos} \frac{b+a-2c}{2}+2 \operatorname{Sin} \frac{a-b}{2} \operatorname{Cos} \frac{a-b}{2}$$

$$=2 \operatorname{Sin} \frac{a-b}{2}\left(\operatorname{Cos} \frac{a-b}{2}-\operatorname{Cos} \frac{a+b-2c}{2}\right)$$

$$=2 \operatorname{Sin} \frac{a-b}{2}\left[-2 \operatorname{Sin} \frac{a-c}{2} \operatorname{Sin} \frac{c-b}{2}\right]$$

$$=-4 \operatorname{Sin} \frac{a-b}{2} \operatorname{Sin} \frac{b-c}{2} \operatorname{Sin} \frac{c-a}{2},$$

故當 $a=b$，或 $b=c$，或 $c=a$ 時行列式爲零。

又命 $\alpha=a-b$，$\beta=b-c$，$\gamma=c-a$

則 $\alpha+\beta+\gamma=0$，且由上計算

$$\operatorname{Sin}(b-c)+\operatorname{Sin}(c-a)+\operatorname{Sin}(a-b)$$

$$=-4 \operatorname{Sin} \frac{a-b}{2} \operatorname{Sin} \frac{b-c}{2} \operatorname{Sin} \frac{c-a}{2},$$

得 $\operatorname{Sin}\alpha+\operatorname{Sin}\beta+\operatorname{Sin}\gamma=-4 \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2} \operatorname{Sin} \frac{\beta}{2} \operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2}$.

(2) 乙　組

1. 求證 $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$

解： 將第二列，第三列一起加到第一列，得

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2b & -a-b-c & 2b \\ 2c & 0 & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c)^2(c-a-b-2c)=(a+b+c)^3.$$

2. (a) 用數學歸納法證

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6.$$

(b) 將 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 析爲因式.

解：(a) $n=1$，得 $1=1$，故成立。

設 $n=k$ 時成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=k(k+1)(2k+1)/6.$$

兩邊加上 $(k+1)^2$，得

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{k+1}{6}\{2k^2+k+6k+6\}=\frac{(k+1)(k+2)(2\overline{k+1}+1)}{6}$$

故得 $n=k+1$ 時亦成立；故

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6.$$

(b) 設 $A=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

A 爲關 x, y, z 之 5 次對稱式.

命 $x=-y$ 代入，則 $A=0$，故 $(x+y)$ 爲 A 之一因子.

因對稱 ∴ $(x+y)$，$(y+z)$，$(z+x)$ 亦爲 A 之因子

$$\therefore\ A=(x+y)(y+z)(z+x)\{k(x^2+y^2+z^2)+m(xy+yz+zx)\}$$

于此 k, m 爲常數；

令 $x=1, y=1, z=0$ 得 $15=2k+m$

令 $x=2, y=1, z=0$ 得 $35=5k+2m$

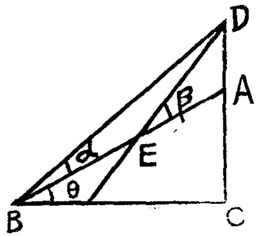
$$\therefore\ k=5,\ m=5.$$

$$A=5(x+y)(y+z)(z+x)\{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\}.$$

3. 在有一定斜度之山坡上一點，測得山嶺石塔之仰角爲 α，再上 a 呎後，其仰角爲 β，證明如塔高爲 h，則此山之斜度（即與水平面所成之角）爲

$$\arc\cos\left\{\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin(\beta-\alpha)}\right\}。$$

解：　本題誤，應改為〔……測得山顛石塔之仰角為α十山之傾角，再上 a 呎後，其仰角為 β十山之傾角，……〕，今就校正後題目解之。



設 $AD=h$, $BE=a$

$\angle ABC=\theta$　為山之傾角

$\angle DBA=\alpha$, $\angle DEA=\beta$

則　$\angle EDB=\beta-\alpha$

$\angle DAB=90^\circ+\theta$.

在 $\triangle BDE$中，由正弦定律，得

$$BD=a\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},$$

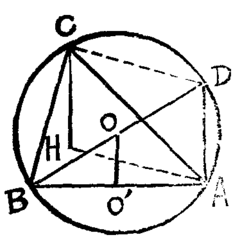
在 $\triangle BDA$中，由正弦定律，得

$$BD=h\frac{\sin\angle DAB}{\sin\alpha}=h\frac{\cos\theta}{\sin\alpha}$$

$$\therefore\quad \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{h\cos\theta}{\sin\alpha},$$

$$\therefore\quad \theta=\text{arc cos}\left\{\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin(\beta-\alpha)}\right\}.$$

4. 由三角形一頂點 A 作垂直於底邊 AB 之弦 AD，設 H 為三角形 ABC 之垂心，0 為圓心，$\overline{OO'}\perp AB$，證 $AD=CH=2\overline{OO'}$.



解：　連結 BD, CD, AH.

$\because$ DA　AB, $\therefore$ BD為直徑通過0,

而 $\overline{OO'}\perp AB$　$\therefore$ $2\overline{OO'}=AD$.

又　$\because$ $CH\perp AB$, $\therefore$ $CH\parallel AD$

AH　BC, $DC\perp BC$ ($\because$ BD 為直徑)

$\therefore$　AH　DC

故　HADC 為一平行四邊形

$\therefore$　$AD=CH=2\overline{OO'}$

國立北洋大學

1. 設 a, b, c 爲 $2x^3+x^2-4x+1=0$ 之三根，求以 $-\frac{1}{a^2}$，$-\frac{1}{b^2}$，$-\frac{1}{c^2}$ 爲根之三次方程。

解： 令 $y=-\frac{1}{x^2}$ 則 $x=\frac{1}{\sqrt{-y}}$ 代入原方程式，

得 $$2\frac{1}{-y\sqrt{-y}}-\frac{1}{y}-\frac{4}{\sqrt{-y}}+1=0，$$

兩邊乘 $y\sqrt{-y}$，得 $-2-\sqrt{-y}-4y+y\sqrt{-y}=0$，

即 $(y-1)\sqrt{-y}-(2+4y)=0$，

$$(y-1)^2(-y)=(2+4x)^2，$$

簡化，即得所求之方程式

$$y^3+14y^2+17y+4=0.$$

2. 求 $$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & e+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f+1 \end{vmatrix}$$ 之值。

解： 以第1列減去第2列，第2列減去第3列，第3列減去第4列，第4列減去第五列，第五列減去第六列，第六列不動，

得 $$\begin{vmatrix} a & -b & o & o & o & o \\ o & b & -c & o & o & o \\ o & o & c & -d & o & o \\ o & o & o & d & -e & o \\ o & o & o & o & e & -f \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f+1 \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} b & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & -f \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f+1 \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & -f \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f+1 \end{vmatrix}$$

$$=ab\begin{vmatrix} c & -d & 0 & 0 \\ 0 & d & -e & 0 \\ 0 & 0 & e & -f \\ 1 & 1 & 1 & f+1 \end{vmatrix}+ac\begin{vmatrix} 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & d & -e & 0 \\ 0 & 0 & e & -f \\ 1 & 1 & 1 & f+1 \end{vmatrix}+bcdef$$

$$=abc\begin{vmatrix} d & -e & 0 \\ 0 & e & -f \\ 1 & 1 & f+1 \end{vmatrix}+abd\begin{vmatrix} 0 & -e & 0 \\ 0 & e & -f \\ 1 & 1 & f+1 \end{vmatrix}+acdef+bcdef$$

$$=abcd\begin{vmatrix} e & -f \\ 1 & f+1 \end{vmatrix}+abce\begin{vmatrix} 0 & -f \\ 1 & f+1 \end{vmatrix}+abdef+acdef+bcdef$$

$$=abcdef+abcde+abcdf+abcef+abdef+acdef+bcdef.$$

3. 解 $\tan^{-1}\dfrac{1}{1-2x+4x^2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{1+2x+4x^2}=\tan^{-1}\dfrac{1}{4x+2}$.

解： 將上式兩邊取 tan，得

$$\frac{\dfrac{1}{1-2x+4x^2}+\dfrac{1}{1+2x+4x^2}}{1-\dfrac{1}{1-2x+4x^2}\cdot\dfrac{1}{1+2x+4x^2}}=\frac{1}{4x+2},$$

$$\frac{2+8x^2}{(1-2x+4x^2)(1+2x+4x^2)-1}=\frac{1}{4x+2}$$

$$(1-2x+4x^2)(1+2x+4x^2)-(4x+2)(2+8x^2)-1=0$$

$$(16x^4+4x^2+1)-1-(4x+2)(2+8x^2)=0$$

$$4x^2(4x^2+1)-4(2x+1)(4x^2+1)=0$$

$$(4x^2+1)(x^2-2x-1)=0,$$

$\therefore\ x^2-2x-1=0,\qquad x=1\pm\sqrt{2}.$

4. 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\theta=m$, 求 $\sin\dfrac{3}{4}\theta$ 之值。

解： $\operatorname{Sin}\frac{3}{4}\theta=\operatorname{Sin}\frac{\theta}{4}\left(3-4\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{4}\right)$ (1)

$\because \operatorname{Cos}\theta=m$, $\therefore \operatorname{Cos}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+m}{2}}$

$$\therefore \operatorname{Sin}\frac{\theta}{4}=\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+m}{2}}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2(1+m)}}}{2},$$

代入（1），簡化，卽得

$$\operatorname{Sin}\frac{3}{4}\theta=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+2m}}\left(1+\sqrt{2+2m}\right).$$

5. 設 A, B, C 爲三角形之三內角，求證

$\operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}B+\operatorname{Sin}C=\sqrt{2(1+\operatorname{Cos}A)(1+\operatorname{Cos}B)(1+\operatorname{Cos}C)}$.

解： $\because \operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}B+\operatorname{Sin}C=2\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}$

$$+2\operatorname{Sin}\frac{C}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2}=2\operatorname{Cos}\frac{C}{2}\left(\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}+\operatorname{Cos}\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=4\operatorname{Cos}\frac{A}{2}\operatorname{Cos}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2},$$

又 $\sqrt{2(1+\operatorname{Cos}A)(1+\operatorname{Cos}B)(1+\operatorname{Cos}C)}$

$$=\sqrt{16}\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}A}{2}}\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}B}{2}}\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}C}{2}}$$

$$=4\operatorname{Cos}\frac{A}{2}\operatorname{Cos}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2},$$

$\therefore \operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}B+\operatorname{Sin}C=\sqrt{2(1+\operatorname{Cos}A)(1+\operatorname{Cos}B)(1+\operatorname{Cos}C)}$.

6. 試求 $25x^2+14xy+25y^2=288$ 之長軸，短軸，焦點及準線。

解： 將座標軸旋轉 45° 卽

令 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$，$y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ 代入上方程式

得　$32x'^2+18y'^2=188$，即　$\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{16}=1$

∴ 長軸 $=8$，短軸 $=6$．

在新座標下，焦點為 $(0,\pm\sqrt{7})$，準線為 $y'=\pm\dfrac{16}{\sqrt{7}}$，

∴ 在原來座標下，焦點為 $\left(-\sqrt{\dfrac{7}{2}},\ \sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$

及 $\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$，準線為 $x-y\pm16\sqrt{\dfrac{2}{7}}=0$。

7. 設自原點作直線與拋物線 $y^2+8x+16=0$ 上之切線垂直，試求其垂足之軌跡。

解：設拋物線 $y^2=-8(x+2)$ 之切線斜率為 m，則切線方程式為

$$y=m(x+2)-\frac{2}{m} \qquad (1)$$

故垂足即(1)與

$$y=-\frac{1}{m}x \qquad (2)$$

之交點，由(1)，(2)消去 m，即得垂足之軌跡為

$$y=-\frac{x}{y}(x+2)+\frac{2y}{x}$$

即　$x({}^2+y^2)+2(x^2-y^2)=0$．

8. 圓錐割線 $\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_2x+b_2y+c_2 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}=0$

與直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_3x+b_3y+c_3=0$，及

$a_1x+b_1y+c_1+2(a_2x+b_2y+c_2)+a_3x+b_3y+c_3=0$

相切，試證之。

解：將行列式展開為

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_3x+b_3y+c_3)-(a_2x+b_2y+c_2)^2=0 \qquad (1)$$

$a_1x+b_1y+c_1=0$　代入(1)，得

$(a_2x+b_2y+c_2)^2=0$，由此知圓錐割線與直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 之二交點合而爲一，故爲相切，同理對 $a_3x+b_3y+c_3=0$ 亦然。

又由 $a_1x+b_1y+c_1+2(a_2x+b_2y+c_2)+a_3x+b_3y+c_3=0$

即 $a_2x+b_2y+c_2=-\frac{1}{2}(a_1x+b_1y+c_1+a_3x+b_3y+c_3)$ 代入 (1)

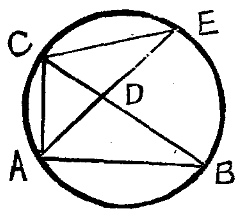
得 $(a_1x+b_1y+c_1-a_3x-b_3y-c_3)^2=0$

故得圓割錐線與直線 $a_1x+b_1y+c_1+2(a_2x+b_2y+c_2)$ $+a_3x+b_3y+c_3=0$ 相切。

國立四川大學

1. 設 ABC 爲一直角三角形，A爲直角，A之平分線與BC交於 D，與此三角形之外接圓交於 E，求證：

$\triangle ABC$ 之面積 $=\frac{1}{2}AD\times AE$.



解： $\triangle ABC$ 之面積 $=\frac{1}{2}AB\times AC$.

但 $\triangle AEC \backsim \triangle ABD$.

$\therefore$ $AE:AB=AC:AD$.

即 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 之面積 $=\frac{1}{2}AD\times AE$.

2. 設 x,y,z 爲任意三個角求證：

(i) $\sin x+\sin y+\sin z-\sin x+y+z=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}$

(ii) $\sin x\sin(y-z)\cos(y+z-x)+\sin y\sin(z-x)\cos(z+x-y)$ $+\sin z\sin(x-y)\cos(x+y-z)=0$.

解： (i) $\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{-x-y}{2}\cos\frac{x+y+2z}{2}$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y+2z}{2}\right)$$

$$= 4\,\mathrm{Sin}\frac{x+y}{2}\,\mathrm{Sin}\frac{y+z}{2}\,\mathrm{Sin}\frac{z+x}{2}\text{。}$$

(ii) $\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}(y-z)\,\mathrm{Cos}(y+z-x)+\mathrm{Sin}\,y\,\mathrm{Sin}(z-x)\mathrm{Cos}(z+x-y)$

$$+\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}(x-y)\mathrm{Cos}(x+y-z)$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}(y-z)[\mathrm{Sin}(y+z)-\mathrm{Sin}(y+z-2x)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}(z-x)[\mathrm{Sin}(z+x)-\mathrm{Sin}(z+x-2y)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}(x-y)[\mathrm{Sin}(x+y)-\mathrm{Sin}(x+y-2z)]$$
$$=\tfrac{1}{4}[-\mathrm{Cos}\,2y+\mathrm{Cos}\,2z+\mathrm{Cos}\,2(x-y)-\mathrm{Cos}\,2(z-x)]$$
$$+\tfrac{1}{4}[-\mathrm{Cos}\,2z+\mathrm{Cos}\,2x+\mathrm{Cos}\,2(y-z)-\mathrm{Cos}\,2(x-y)]$$
$$+\tfrac{1}{4}[-\mathrm{Cos}\,2x+\mathrm{Cos}\,2y+\mathrm{Cos}\,2(z-x)-\mathrm{Cos}\,2(y-z)]$$
$$=0\text{。}$$

3. 設一班有學生40人，中有甲乙二生，今選四人爲代表，問

(i) 甲乙均被選共有幾種方法？

(ii) 甲乙均不被選共有幾種方法？

(iii) 甲乙最少有一人被選之或然率若何？

解：(i) 方法有 $C^{40-2}_{4-2}=C^{38}_{2}=703$.

(ii) 方法有 $C^{40-2}_{4}=C^{38}_{4}=73815$.

(iii) 或然率 $=1-\dfrac{C^{38}_{4}}{C^{40}_{4}}=4-\dfrac{73815}{91390}=\dfrac{17575}{91390}=\dfrac{5}{26}$.

4. 設一三角形三邊之長爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根，式中 p, q, r 均爲已知數，求此三角形之面積.

解：見國立交通大學 (2) 乙組第 4 題。

國立重慶大學

1. (a) 試述餘式定理并證明之，

(b) 利用餘式定理求

$bc(a^2+bc)(b-c)+ca(b^2+ca)(c-a)+ab(c^2+ab)(a-b)$

之因式，

(c)　定A之值使 x^7-Ax^5+1 可爲 x^2+x+1 所除盡。

解：　(a)　設 $f(x)$ 爲 x 之多項式，以 $x-a$ 去除 $f(x)$ 則所得之餘式 $R=f(a)$，此謂之餘式定理。由此得 a 爲 $f(x)=0$ 之根，則 $f(x)$ 可被 $(x-a)$ 所整除。

證明：　$f(x)=(x-a)Q(x)+R$，　$Q(x)$ 爲商式，

以 $x=a$ 代入，即得　$f(a)=R$

如 a 爲 $f(x)=0$ 之根，則 $f(a)=0$

$\therefore\ f(x)=(x-a)Q(x)$.

(b)　設 $A=bc(a^2+bc)(b-c)+ca(b^2+ca)(c-a)+ab(c^2+ab)\cdot(a-b)$，A 爲關於 a,b,c 之五次輪換對稱式，

以 $a=b$ 代入，得 $A=0$，　$\therefore$　$a-b$ 爲 A 之因子，

$\because$　A 爲輪換對稱　$\therefore$　$b-c$, $c-a$ 亦爲 A 之因子

$\therefore$　$A=(a-b)(b-c)(c-a)\{k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)\}$

茲比較 b^2c^3 之係數得　　$-1=-k+m$,

比較 b^4c 之係數得　　$0=-k$,

$$\therefore\ k=0,\quad m=-1,$$

$\therefore$　$A=(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$.

(c)　設 $x^7-Ax^5+1=(x^2+x+1)(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1)$

展開之，且逐次比較係數得

$d+1=0$，　$c+d+1=0$，　$b+c+d=0$，

$a+b+c=0$，　$1+a+b=-A$，　$1+a=0$.

解之，得　$d=-1$, $c=0$, $b=1$, $a=-1$，　$\therefore\ A=-1$.

2.　(a) 求 $1+4x+9x^2+16x^3+\cdots+n^2x^{n-1}$ 之和 S_n，

(b) 若 $-1<x<1$，利用 (a) 之結果證明無窮級數

$1+4x+9x^2+16x^3+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots\cdots$ 之和

$$S=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}，$$

(c) 試用二項式定理展開

$$\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}$$ 以驗之。

解： (a) 設 $S_n=1+4x+9x^2+16x^3+\cdots+n^2x^{n-1}$

因係數爲二階算術級數，故其第三逐差爲 0。

作 $S_n=1+4x+9x^2+16x^3+\cdots+n^2x^{n-1}$。

$-3xS_n=-3x-12x^2-27x^3-\cdots-3(n-1)^2x^{n-1}-3n^2x^n$

$3x^2S_n=3x^2+12x^3+\cdots+3(n-2)^2x^{n-1}+3(n-1)^2x^n+3n^2x^{n+1}$

$-x^3S_n=-x^3-\cdots-(n-3)^2x^{n-1}-(n-2)^2x^n-(n-1)^2x^{n+1}$
$-n^2x^{n+2}$

三式相加，得

$(1-x)^3S_n=1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

(b) $\because\ -1<x<1$，

無窮級數 $1+4x+9x^2+16x^3+\cdots\cdots$ 收斂

$\left(\because\ \dfrac{u_n}{u_{n-1}}=x\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^2\to x,\quad \therefore\ |x|<1\right.$，則級數收斂)

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} n^2x^{n-1}=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=S=\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}.$$

(c) $$\frac{2}{(1-x)^3}=2\left[1-(-3)x+\frac{(-3)(-4)}{1.2}x^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(-3)(-4)\cdots(-2-n)}{n!}(-x)^n+\cdots\right]$$

$$=2+6x+12x^2+\cdots+(n+1)(n+2)x^n+\cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1-(-2)x+\frac{(-2)(-3)}{1.2}x^2+\cdots$$

$$+\frac{(-2)(-3)\cdots(-1-n)}{n!}(-x)^n+\cdots$$

$$=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}=1+4x+9x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$$

$$+(n+1)^2x^n+\cdots\cdots$$

8. (a) 設A,B,C三角成等差級數，求證

$$\operatorname{Cot}B=\frac{\operatorname{Sin}A-\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Cos}C\ C-\operatorname{Cos}A};$$

(b) 求所有合於方程式

$\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Cos}\alpha=\operatorname{Sin}\theta+\operatorname{Sin}\alpha$ 之θ角。

解： (a) $\because$ A,B,C三角成等差級數

$$\therefore\quad B=\frac{A+C}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{Sin}A-\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Cos}C-\operatorname{Cos}A}=\frac{2\operatorname{Cos}\frac{A+C}{2}\operatorname{Sin}\frac{A-C}{2}}{-2\operatorname{Sin}\frac{A+C}{2}\operatorname{Sin}\frac{C-A}{2}}=\operatorname{Cot}\frac{A+C}{2}$$

$$=\operatorname{Cot}B.$$

(b) $\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Cos}\alpha=\operatorname{Sin}\theta+\operatorname{Sin}\alpha.$

$$2\operatorname{Cos}\frac{\theta+\alpha}{2}\operatorname{Cos}\frac{\theta-\alpha}{2}=2\operatorname{Sin}\frac{\theta+\alpha}{2}\operatorname{Cos}\frac{\theta-\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad 2\operatorname{Cos}\frac{\theta-\alpha}{2}\left(\operatorname{Sin}\frac{\theta+\alpha}{2}-\operatorname{Cos}\frac{\theta+\alpha}{2}\right)=0$$

$$\therefore\quad \operatorname{Cos}\frac{\theta-\alpha}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\therefore\quad \operatorname{Cos}\frac{\theta-\alpha}{2}=0,\ \text{或}\quad \operatorname{Sin}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\therefore\quad \frac{\theta-\alpha}{2}=2n\pi\pm\frac{\pi}{2},\ \text{或}\ \frac{\theta+\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}=n\pi$$

$\therefore \quad \theta=4n\pi\pm\pi+\alpha$, 或 $2n\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha$。

$(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

4. 設R, r 各爲 n 邊正多邊形外接圓及內切圓之半徑，R', r' 各爲 2n 邊正多邊形外接圓及內切圓之半徑，

求證：

$$R'^2=Rr, \qquad 2r'^2=r(R+r).$$

解：本題中n 邊正多邊形與2n邊正多邊形未與關係，欲證此二式，條件不够，故本題誤。

5. 設 P爲橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2$ 上之點，其坐標爲(a,b)，P點之法線交橢圓於Q, 以PQ 爲直徑作圓交橢圓於R, 求證PR 之方程爲 $ax+by=a^2+b^2$, QR之方程爲 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\frac{a^4-b^4}{a^4+b^4}$.

解：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2$　　　　(1)

P點法線方程式爲

$ax-by=a^2-b^2$　　　　(2)

解 (1),(2)　　$x=\frac{a^2-b^2+by}{a}$　代入 (1)，得

$$(a^4+b^4)y^2+2b^3(a^2-b^2)y+b^2(b^4-2a^2b^2-a^4)=0$$

但已知P(a, b) 爲橢圓與法線之交點之一，故 b 爲上方程式之一根

另一根必爲 $\frac{b(b^4-2a^2b^2-a^4)}{a^4+b^4}$，　其對應 x 之值爲

$$\frac{a(a^4-2a^2b^2-b^4)}{a^4+b^4},$$

$\therefore$ Q之座標爲 $\left(\frac{a(a^4-2a^2b^2-b^4)}{a^4+b^4}, \frac{b(b^4-2a^2b^2-a^4)}{a^4+b^4}\right)$

設 $\overline{PQ}$ 中點爲 $S(x_0, y_0)$，則 $x_0=\frac{a^3(a^2-b^2)}{a^4+b^4}$, $y_0=\frac{b^3(b^2-a^2)}{a^4+b^4}$

而 $\overline{PS}$ 之長 $r=\frac{ab(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4+b^4}$,

但以 PQ 爲直徑之圓之方程式爲

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \qquad (3)$$

爲求圓與橢圓之交點，由(1)，(3)消去 x，得

$$\begin{vmatrix} b^2 & 0 & a^2(y^2-2b^2) & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & a^2(y^2-2b^2) \\ 1 & -2x_0 & (y-y_0)^2+x_0^2-r^2 & 0 \\ 0 & 1 & -2x_0 & (y-y_0)^2+x_0^2-r^2 \end{vmatrix}$$

$$=b^4[(y-y_0)^2+x_0^2-r^2]^2+4a^2b^2x_0^2(y^2-2b^2)+a^4(y^2-2b^2)^2$$
$$-2a^2b^2(y^2-2b^2)[(y-y_0)^2+x_0^2-r^2]=0.$$

於此 y^4 之係數爲 $(a^2-b^2)^2$,

y^3 之係數爲 $4b^4y_0(a^2-b^2)$.

圓與橢圓一般有四個交點，此時二者在P相切，故四個交點已知其三個，即 P，P，Q，設第四個交點 R 之座標爲 (α,β)， 則

$$\frac{4b^2y_0}{b^2-a^2}=2b+\frac{b(b^4-2a^2b^2-a^4)}{a^4+b^4}+\beta$$

$$\therefore \qquad \beta=\frac{b(b^4+2a^2b^2-a^4)}{a^4+b^4},$$

同理可得 $\qquad \alpha=\dfrac{a(a^4+2a^2b^2-b^4)}{a^4+b^4}$,

PR之方程：
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ \dfrac{a(a^4+2a^2b^2-b^4)}{a^4+b^4} & \dfrac{b(b^4+2a^2b^2-a^4)}{a^4+b^4} & 1 \end{vmatrix}=0$$

即
$$\begin{vmatrix} \dfrac{x}{a} & \dfrac{y}{b} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^4+2a^2b^2-b^4 & b^4+2a^2b^2-a^4 & a^4+b^4 \end{vmatrix}=0$$

即
$$ax+by=a^2+b^2.$$

又 QR 之斜率爲 $\dfrac{b}{a}$， 故 QR 之方程爲

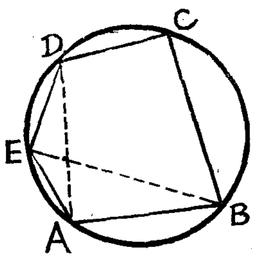
$$y-\frac{b(b^4-2a^2b^2-a^4)}{a^4+b^4}=\frac{b}{a}\left(x-\frac{a(a^4-2a^2b^2-b^4)}{a^4+b^4}\right),$$

即 $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\,\frac{a^4-b^4}{a^4+b^4}。$$

6. ABCDE 爲一凸五邊形，求證其五頂點在一圓上之充分必要條件爲

$$\frac{AB}{\mathrm{Sin}(C+E)}=\frac{BC}{\mathrm{Sin}(D+A)}=\frac{CD}{\mathrm{Sin}(E+B)}=\frac{DE}{\mathrm{Sin}(A+C)}=\frac{EA}{\mathrm{Sin}(B+D)}。$$

解： （i）先證其必要性：設五頂點在一圓周上，圓半徑爲 R，則由正弦定律，得



$$\frac{AB}{\mathrm{Sin}\angle AEB}=2R,$$

但 $\angle C+\angle E=180^\circ+\angle AEB$,

$\therefore\ \mathrm{Sin}(C+E)=-\mathrm{Sin}\angle AEB$

$$\therefore\ \frac{AB}{\mathrm{Sin}(C+E)}=-2R。$$

同理可證 $$\frac{BC}{\mathrm{Sin}(D+A)}=\frac{CD}{\mathrm{Sin}(E+B)}=\frac{DE}{\mathrm{Sin}(A+C)}=\frac{EA}{\mathrm{Sin}(B+D)}=-2R$$

$\therefore$ 必要性證畢。

(ii) 今證其充分性：設

$$\frac{AB}{\mathrm{Sin}(C+E)}=\frac{BC}{\mathrm{Sin}(D+A)}=\frac{CD}{\mathrm{Sin}(E+B)}=\frac{DE}{\mathrm{Sin}(A+C)}=\frac{EA}{\mathrm{Sin}(B+D)}$$
$$=k.$$

$\because\ \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=3\times180^\circ=540^\circ$，

且五邊形爲凸的，即 $\angle A,\angle B,\angle C,\angle D,\angle E$ 皆小於 180°，故 k 必爲負數。

由餘弦定律，得

$$\overline{AD}^2=\overline{AE}^2+\overline{DE}^2-2\,\overline{AE}\cdot\overline{DE}\ \mathrm{Cos}E$$

$$=k^2\mathrm{Sin}^2(B+D)+k^2\mathrm{Sin}^2(A+C)-2k^2\mathrm{Sin}(A+C)\mathrm{Sin}(B+D)\,\cdot$$

$\cdot \text{Cos}E$.

因 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=540^\circ$

$\therefore$ $\text{Cos}E=-\text{Cos}\left[(A+C)+(B+D)\right]$

$=-\text{Cos}(A+C)\text{Cos}(B+D)+\text{Sin}(A+C)\text{Sin}(B+D)$.

$\therefore$ $\overline{AD}^2=k^2\left\{\text{Sin}^2(B+D)\left(1-\text{Sin}^2(A+C)\right)\right.$

$+\text{Sin}^2(A+C)\left(1-\text{Sin}^2(B+D)\right)$

$\left.+2\text{Sin}(B+D)\text{Sin}(A+C)\text{Cos}(B+D)\text{Cos}(A+C)\right\}$

$=k^2\left\{\text{Sin}(B+D)\text{Cos}(A+C)+\text{Sin}(A+C)\text{Cos}(B+D)\right\}^2$

$=k^2\,\text{Sin}^2(A+B+C+D)=k^2\,\text{Sin}^2E$.

$\therefore$ $AD=\pm k\,\text{Sin}E$.

$\therefore$ $\text{Sin}\,E>0$， $k<0$， $\therefore$ 符號應取負號

$\therefore$ $AD=-k\,\text{Sin}\,E$.

同理可證 $BE=-k\,\text{Sin}\,A$.

在 $\triangle ADE$中，由正弦定律 $AD=2r\,\text{Sin}\,E$，r 爲 $\triangle ABE$ 外接圓之半徑 即 $r=-\dfrac{k}{2}$，同理知 $\triangle ABE$外接圓之半徑$r'=-\dfrac{k}{2}$，

$\therefore$ $r=r'$.

$\therefore$ A,B,D,E 四點共圓，同理 可得 B,E,C,D 四點共圓，

$\therefore$ A,B,C,D,E 五點共圓。

（甲組作 1，2，3，5，乙丙組作 1，2，4，6）

國立江蘇醫學院

1. 證明 $\text{Sin}^2(A+45^\circ)+\text{Sin}^2(A-45^\circ)=1$.

解： 因 $\text{Sin}(A+45^\circ)=\text{Sin}\left[90^\circ+(A-45^\circ)\right]$

$=\text{Cos}(A-45^\circ)$，故證。

2. 如 $A+B+C=180°$ 試證

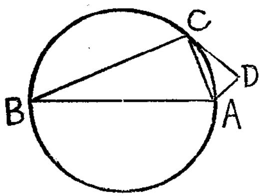
$$\operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}B-\operatorname{Sin}C=4\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2}.$$

解： $\operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}B-\operatorname{Sin}C=2\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Cos}\frac{A}{2}$

$$+2\operatorname{Cos}\frac{B+C}{2}\operatorname{Sin}\frac{B-C}{2}=2\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\left(\operatorname{Sin}\frac{B+C}{2}+\operatorname{Sin}\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=4\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2}.$$

3. 由一圓周上任意一點 C 引一切線，再由圓之任一直徑 AB 之一端 A 至切線作垂線 AD，求證 ∠CAD＝∠CAB.



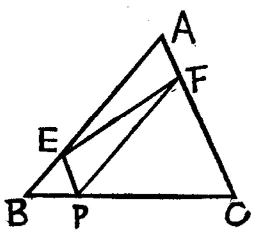
解： ∵ ∠BCA＝∠CDA＝R∠，

∠CBA＝∠ACD，

∴ △ABC ∽ △ACD

∴ ∠CAD＝∠CAB.

4. 自 △ABC 之底邊 BC 上任取一點 P，引二邊 AB，AC 之平行線 PF，PE 各交 AC，AB 於 F，E 兩點，則 △AEF 為 △BEP 與 △PFC 之比例中項。



解： △BEP： △AEF＝BE：AE，

△AEF： △PFC＝AF：FC，

∵ BE：AE＝BP：PC

＝AF：FC

∴ △BEP：△AEF

＝△AEF：△PFC.

即 △AEF 為 △BEP 與 △PFC 之比例中項。

5. 已知三數 m^2+m+1, $m^2+2m+11$, $m^2+3m+28$ 爲等比級數，問 m 之值若何？

解：$(m^2+2m+11)^2=(m^2+m+1)(m^2+3m+28)$,

即 $6m^2-13m-93=0$.

$\therefore\ m=-3$ 或 $\dfrac{31}{6}$.

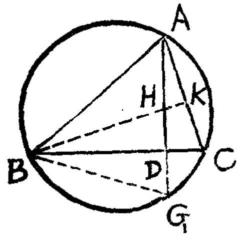
6. 由 10 人中若依抽籤法選出 4 人，問其選法有幾種？又同一人每回當籤之機會有幾回？

解：選法有 $C^{10}_4=\dfrac{10.9.8.7}{1.2.3.4}=210$ 種。

某人每回當籤之機會有 $C^{10}_3=120$回。

私立建國法商學院

1. 三角形 ABC 之高 AD 延長交外接圓於 G, 則 D 爲重心 H 與 G 的距離之中點。



解：設 BK⊥AC. 故 A,B,D,K共圓.

$\angle HAK=\angle HBD$

又 $\angle HAK=\angle GBD$

$\therefore\ \angle HBD=\angle GBD$

$\therefore\ DG=DH$.

2. 求證 $\tan(45^\circ+x)-\tan(45^\circ-x)=2\tan 2x$.

解：$\tan(45^\circ+x)-\tan(45^\circ-x)=\dfrac{1+\tan}{1-\tan x}-\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

$$=\frac{(1+\tan x)^2-(1-\tan x)^2}{1-\tan^2 x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}=2\ \tan_2 x.$$

8. 已知方程式 $x^3+6x^2+7x-2=0$ 之三根成等差級數，求此三根。

解：設三根爲 $\alpha-\beta$, α, $\alpha+\beta$, 則

$$\begin{cases}(\alpha-\beta)+\alpha+(\alpha+\beta)=-6\\ \alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=2\end{cases}$$

解之，得　$\alpha=-2$，　$\beta=\pm\sqrt{5}$.

故所求之三根爲　-2，$-2+\sqrt{5}$，$-2-\sqrt{5}$.

4. 問一組10條平行線與另一組12條平行線相交，能成若干平行四邊形？

解：　能成　$C_2^{10}\cdot C_2^{12}=\frac{10.9}{1.2}\cdot\frac{12.11}{1.2}=2970$ 個平行四邊形。

江蘇學院

(1) 甲　組

1. 設以 C_0^n, C_1^n, C_2^n, …，C_n^n 分別代表展開 $(1+x)^n$ 之各項係數，試證下列二式（但n爲正整數）

(A)　$C_1^n-2C_2^n+3C_3^n-4C_4^n+\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$.

(B)　$2C_0^n+\frac{2^2}{2}C_1^n+\frac{2^3}{3}C_2^n+\frac{2^4}{4}C_3^n+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

解；　(A)　$C_1^n-2C_2^n+3C_3^n-4C_4^n+\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n$

$$=n-2\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{3n(n-1)(n-2)}{1.2.3}-\cdots+(-1)^{n-1}n$$

$$=n\left\{1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\ 2}-\cdots+(-1)^{n-1}\right\}$$

$$=n\{1-1\}^{n-1}=0.$$

(B)　$(1+x)^{n+1}=1+(n+1)x+\frac{(n+1)(n)}{1.2}x^2$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)\cdots,2}{1.2.3\cdots n}x^n+x^{n+1}$$

$$(1+x)^{n+1}-1=(n+1)\left\{x+\frac{1}{2}C_1^n x^2+\frac{1}{3}C_2^n x^3+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}C_{n-1}^n x^n+\frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right\}$$

令 $x=2$，得

$$3^{n+1}-1=(n+1)\left\{2C_0^n+\frac{2^2}{2}C_1^n+\frac{2^3}{3}C_2^n+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n\right\}$$

$$\therefore\quad 2C_0^n+\frac{2^2}{2}C_1^n+\frac{2^3}{3}C_2^n+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

2. 證 (i) $(1.2.3\cdots n)^3<n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$；

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^2$ (此處e爲自然對數之底)。

解：(i) $\because\quad \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3}{n}>(1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdots n^3)^{\frac{1}{n}}$

而 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{n}\right\}^2$

$\therefore\quad \left\{(1.2.3.\cdots\cdots n)^3\right\}^{\frac{1}{n}}<n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$\therefore\quad (1.2.3.\cdots\cdots n)^3<n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}.$

(ii) 令 $y=(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ 則

$$\log_e y = \frac{\log_e(e^x + x)}{x} = \frac{x + \log_e(1 + xe^{-x})}{x}$$

$$= 1 + \frac{1}{x}\left(xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{3}x^3e^{-3x} - \cdots\right)$$

$$= 1 + e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \cdots$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \log_e y = 2. \text{ 即 } \lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

3. 自雙曲線一對共軛直徑彼此之端點所作之切線交於其漸近綫上。

解： 雙曲線 $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (1)

其共軛雙曲線 $b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$ (2)

$P_1(x_1, y_1)$ 在 (1) 上， 過 P_1 之直徑為

$y_1x - x_1y = 0$ (3)

其共軛直徑為 $b^2x_1x - a^2y_1y = 0$ (4)

(3) 與 (1) 之交點為 $P_1(x_1, y_1)$， $Q_1(-x_1, -y_1)$.

(4) 與 (2) 之交點為 $P_2\left(\frac{ay_1}{b}, \frac{b}{a}x_1\right)$, $Q_2\left(-\frac{ay_1}{b}, -\frac{b}{a}x_1\right)$,

過 P_1 之切線 $b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$, (5)

過 Q_1 之切綫 $b^2x_1x - a^2y_1y = -a^2b^2$, (6)

過 P_2 之切線 $y_1x - x_1y = ab$, (7)

過 Q_2 之切線 $y_1x - x_1y = -ab$, (8)

而 (1) 之漸近線為 $\begin{cases} bx + ay = 0 & (9) \\ bx - ay = 0 & (10) \end{cases}$

對 (5)，(7)，(9) 其係數滿足

$$\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ y_1 & -x_1 & -ab \\ b^2x_1 & -a^2y_1 & -a^2b^2 \end{vmatrix} = 0$$

故知 (5)，(7)，(9) 共點， 即 (5)，(7) 二切線之交點在漸近線 (9) 上，同理可證 (6)，(8)，(9) 共點. (5)，(8)，(10) 共點， (6)，(7)，(10) 共點.

4. 求切於拋物線 $y^2 = 4ax$ 之兩切線相交成 θ 角之角頂之軌跡，並討論此軌跡之性質。

解：　設 $y^2=4ax$ 之二切綫爲

$$\begin{cases} y=m_1x+\dfrac{a}{m_1}, & (1) \\ y=m_2x+\dfrac{a}{m_2}. & (2) \end{cases}$$

而
$$\tan\Theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}, \qquad (3)$$

由此三方程式消去 m_1, m_2 得所求之軌跡爲

$$y^2-4ax=(x+a)^2\tan^2\Theta.$$

即
$$x^2\tan^2\Theta-y^2+2ax(2+\tan^2\Theta)+a^2\tan^2\Theta=0, \qquad (4)$$

因 Ⓗ>0. 又$\triangle>0$ 故(4)表一雙曲線。

特別 $\Theta=0$， 所求軌跡爲原拋物線 $y^2=4ax$.

$\Theta=90°$. 所求軌跡爲原拋物線之準線 $x=-a$.

5. 試求由 $x=a\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\Theta$，$y=b\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Sin}\Theta$，$z=c\operatorname{Cos}\phi$ 消去 ϕ 及 Θ 所得之方程式，及由 $x=3\operatorname{Cos}\phi+\operatorname{Cos}3\phi$. $y=3\operatorname{Sin}\phi-\operatorname{Sin}3\phi$， 消去 ϕ 所得之方程式，並分別繪此二種圖形之大概。

解：(A)
$$\begin{cases} x=a\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\Theta, & (1) \\ y=b\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Sin}\Theta, & (2) \\ z=c\operatorname{Cos}\phi. & (3) \end{cases}$$

(1)，(2)，(3)平方和爲

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=\operatorname{Sin}^2\phi+\operatorname{Cos}^2\phi=1$$

即
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

此表中心在原點之橢圓面。

(B)
$$\begin{cases} x=3\operatorname{Cos}\phi+\operatorname{Cos}3\phi, & (4) \\ y=3\operatorname{Sin}\phi-\operatorname{Sin}3\phi, & (5) \end{cases}$$

由公式
$$\begin{cases} \operatorname{Cos}3\phi=4\operatorname{Cos}^3\phi-3\operatorname{Cos}\phi, \\ \operatorname{Sin}3\phi=3\operatorname{Sin}\phi-4\operatorname{Sin}^3\phi, \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x=4\operatorname{Cos}^3\phi, \\ y=4\operatorname{Sin}^3\phi, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \operatorname{Cos}^2\phi=\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} \\ \operatorname{Sin}^2\phi=\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} \end{cases}$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3}=1$$

即 $$x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}$$

此表具四尖點之圓內擺線（圓之半徑爲4）。

6. 設三角形ABC中 a^2, b^2, c^2 成等差級數，則 a SecA, b SecB, c Sec C 成調和級數，試證之。

解： 由餘弦定律得

$$a\operatorname{Sec}A=\frac{2abc}{b^2+c^2-a^2},\quad b\sec B=\frac{2abc}{c^2+a^2-b^2},$$

$$c\operatorname{Sec}C=\frac{2abc}{a^2+b^2-c^2},$$

又 $$b^2=\tfrac{1}{2}(c^2+a^2).$$

因 $$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a\operatorname{Sec}A}+\frac{1}{c\operatorname{Sec}C}\right)=\frac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)}{4abc}$$

$$=\frac{2b^2}{4abc}=\frac{2b^2-b^2}{2abc}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2abc}=\frac{1}{b\operatorname{Sec}B}.$$

∴ a SecA, b SecB, c SecC 成調和級數。

(2)　乙　組

1. 解方程式 $$\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 6x+2 & 9x+3 & 12x \\ 8x+1 & 12x & 16x+2 \end{vmatrix}=0.$$

解： $$\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 6x+2 & 9x+3 & 12x \\ 8x+1 & 12x & 16x+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4x & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -\frac{11}{2} \\ 1 & -\frac{11}{2} & -2 \end{vmatrix} = -(11+97x)=0$$

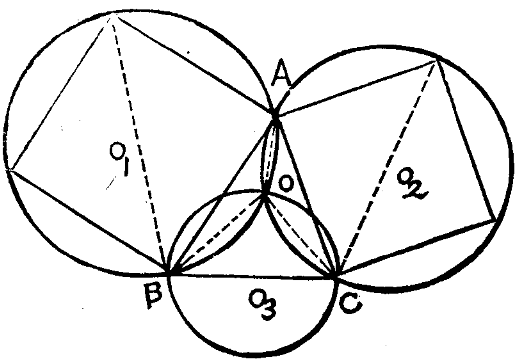
$$\therefore \quad x=-\frac{11}{97}.$$

2. 盤中有五梨，三桃，一蘋果，一香蕉，一石榴，隨意取食，問取法總數(Total number of combinations)有幾？

解：　取法總數有$(5+1)(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)-1=192$種。

3. 分別以三角形之二邊爲邊各作正方形，又以第三邊爲對角線作正方形則此三正方形之三外接圓過同點。

解：



設　△ABC，AB邊上正方形之外接圓爲$\odot O_1$，

AC邊上正方形之外接圓爲$\odot O_2$，

BC對角線上正方形之外接圓爲$\odot O_3$。

二圓$\odot O_1$，$\odot O_2$除A點公共外，另一交點設爲O，

聯結OA，OB，OC，因為

$\angle AOB=135°$　　$\angle AOC=135°$，

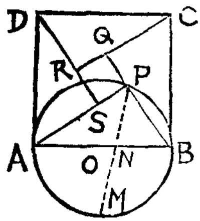
$\therefore\ \angle BOC=360°-2\times135°=90°$。

而BC為$\odot O_3$之直徑，故O在$\odot O_3$之上。

即三圓$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$共點。

4. 試將正方形等分為五，令其四為直角三角形，他一為正方形。

解：



作法：取正方形一邊AB為直經作$\odot O$，在AB上取分點N，使AN:NB＝2：1.

令M為$\overparen{AMB}$之中點，連接MN交$\odot O$於P，連接AP，BP，取AP之中點S，連接DS，取DS之中點R，連接RC，延長BP交RC於Q。即得等積之四個直角三角形及一正方形。

證明：設 $BP=a$.　因 $AP:PB=AN:NB=2:1$，

故 $AP=2a$，　而 $\angle APB=R\angle$　$\therefore\ \triangle APB=a^2$

又 $AS=SP=BP=a$，　$AB=AD$，

$\angle DAS=\angle ABP$　（$\because$AD切於$\odot O$）

$\therefore\ \triangle ASD\backsim\triangle ABP$

$\therefore\ DS=2a$，　$\angle ASD=R\angle$。

同理可證　$CR\perp DS$，　$CR=2a$，

$BQ\perp CR$，　$BQ=2a$.

故 $\triangle APB$，$\triangle BQC$，$\triangle CRD$，$\triangle DSA$ 均為直角三角形面積相等，其值為a^2。正方形PQRS面積亦為a^2。

5. 解方程式 $\sin\theta(\cos2\theta+\cos4\theta+\cos6\theta+\cos8\theta)=\sin4\theta$.

解：$\sin\theta(\cos2\theta+\cos4\theta+\cos6\theta+\cos8\theta)-\sin4\theta$

$=2\sin\theta[\cos3\theta\cos\theta+\cos7\theta\cos\theta]-\sin4\theta$

$=\sin2\theta(\cos3\theta+\cos7\theta)-\sin4\theta$

$=2\mathrm{Sin}^2\theta\,\mathrm{Cos}5\theta\,\mathrm{Cos}^2\theta-\mathrm{Sin}^4\theta$

$=\mathrm{Sin}^4\theta\,(\mathrm{Cos}5\theta-1)=0.$

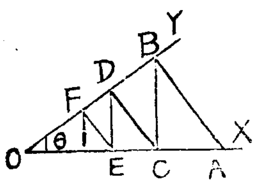
$$\therefore \begin{cases} \mathrm{Sin}\,4\theta=0, & (1) \\ \mathrm{Cos}\,5\theta=1, & (2) \end{cases}$$

解 (1)　$\theta=\frac{n}{4}\pi.$

解 (2)　$\theta=\frac{2}{5}n\pi.$

6. 設作任意銳角$X\hat{O}Y$,設之爲θ,於其一邊OX上取OA＝d,引他邊OY之垂線AB·再引OX之垂線BC,又引OY之垂線CD,再引OX之垂線DE,準是以往繼續引至無窮,則所得折線ABCDE...之長等於 $d\ \mathrm{Cot}\frac{\theta}{2}$ 試證之。

解:



OA＝d

AB＝d Sinθ,　OB＝d Cosθ,

BC＝d Cosθ Sinθ,　OC＝d Cos$^2\theta$,

CD＝d Cos$^2\theta$ Sinθ,　OD＝d Cos$^3\theta$,

DE＝d Cos$^3\theta$ Sinθ,　OE＝d Cos$^4\theta$,

....

$\therefore\ \ell=AB+BC+CD+DE+EF+\cdots\cdots$

$=d\,\mathrm{Sin}\theta\,(1+\mathrm{Cos}\theta+\mathrm{Cos}^2\theta+\mathrm{Cos}^3\theta+\cdots\cdots)$

$\because\ |\mathrm{Cos}\theta|<1.$　故此無窮級數收斂。

$\therefore\ \ell=d\,\mathrm{Sin}\theta\,\dfrac{1}{1-\mathrm{Cos}\theta}=\dfrac{d\,\mathrm{Sin}\theta}{1-\mathrm{Cos}\theta}$

$$=d\frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}}{2\,\mathrm{Sin}^2\frac{\theta}{2}}=d\,\mathrm{Cot}\frac{\theta}{2}.$$

文華圖書館學專科學校

1. 設α為$x^5-1=0$的一個虛根，試求

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}+\frac{\alpha^3}{1+\alpha^6}+\frac{\alpha^4}{1+\alpha^8}\text{ 的值}$$

解：　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

故　$\alpha^5=1$，　$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$。

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}+\frac{\alpha^3}{1+\alpha^6}+\frac{\alpha^4}{1+\alpha^8}$$

$$=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}\right)+\left(\frac{\alpha^3}{1+\alpha}+\frac{\alpha^4}{1+\alpha^3}\right)$$

$$=\frac{\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^5}{1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6}+\frac{\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^6}{1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4}$$

$$=\frac{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4}+\frac{1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4}{1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4}$$

$$=1+1/\alpha.$$

2. 證明方程式　$x^4+7x^2+2x-1=0$　恰有一正根，一負根，及兩個虛根。

解：令$f(x)=x^4+7x^2+2x-1$，則$f(-x)=x^4+7x^2-2x-1$，

$f(x)$　之異號數爲一個，　$f(-x)$之異號數亦爲一個。

由 Descartes 符號規則，知 $f(x)=0$　至多有一個正根及一個負根，而至少有二個虛根；

又　$f(0)=-1$，　$f(1)=9$，　$f(-1)=5$。

$f(0)f(1)<0$.　故 $f(x)=0$　恰有一正根。

$f(0)f(-1)<0$。　故 $f(x)=0$　恰有一負根。

而　$f(x)=0$　恰有二個虛根。

附　錄

民國三十五年全國各大學新生入學試題

數學之部

國立浙江大學

(1) 甲　組

1. 在複素數平面圖上，解不等式 $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right|<1$.

2. 設 a[illegible]$=1$,

　解 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$.

3. 有圓錐曲綫方程式爲 $5x^2-4y^2-20x-24y+4=0$，試求其中心，焦點，幾近綫，準綫。

4. 解 $4\sin^2x=1$.

5. 設圓 $x^2+y^2=a^2$ 交橫軸於A，B二點，自圓上任意一點作切綫，自A作直綫垂直於切綫與BQ交於P，求P之軌跡。

(2) 甲組　(備用)

1. 試規定x，y實數之值，使 $(x+iy)^5$ 爲大於8之實數。

2. 方程式 $x^4-3x^3+3x^2-6x+2=0$ 有二根之積爲1，求其四根。

3. 證明經過五點 $(0,0)$，$(1,3)$，$(-1,1)$，$(-2,3)$，$(5,-25)$ 之二次曲綫爲一雙曲綫，並求其中心及幾近綫。

4. 自橢圓之一焦點作一直徑之垂線延長之使與其共軛直徑相交於 P. 試求 P 點之軌跡。

5. 解方程式

$\arcsin x + \arcsin(1-x) = \arccos x.$

(3) 乙丙組

1. 方程式 $x^4+4x^3+5x^2+2x-2=0$ 之一根爲 $-1+i$, 求其餘三根。

2. 設 x 爲任何實數，若$(m-2)x^4+2(2m-3)x^2+(5m-6)$ 常爲正數，問m爲何種數值?

3. 以一定之半徑求作一圓使與相交二直線相切。

4. 兩圓外切於C,一外公切線切兩圓於A,B;試證∠ACB爲一直角。

5. 已知 $\cos A=\frac{3}{4}$, 求 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}$ 之值。

國立北京淸華南開三大學

(甲組作3,4,5,6,7,8; 乙丙組作1,2,3,4,5,6.)

1. 證明若△ABC中過B,C二頂點之二中線等長，則 △ABC爲等腰，並證明其逆定理。

2. 從半圓之直徑AB兩端各引此半圓弦AC,BD交於E,求證
$AC\cdot AE+BD\cdot BE=AB^2$。
設：AB爲直徑，AC,BD交於E,
求證：$AC\cdot AE+BD\cdot BE=AB^2$。

3. 解右之聯立三角方程式：$\tan x+\tan y=1$, $\cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

4. 兩圓外切，其半徑各爲R及r 設兩圓之二外公切線之交角爲θ，試證

$$\sin\theta=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}$$。

設：SAB,SCD爲互外切之⊙O(R),⊙O'(r)之外公切線，

又$\angle S=\Theta$，

求證：$\sin\Theta=\dfrac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(Rr)^2}$。

5. 求下列行列式之值：

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+1 & x+2 & x+3 & x \\ x+2 & x+3 & x & x+1 \\ x+3 & x & x+1 & x+2 \end{vmatrix}.$$

6. a. 解：$\begin{cases} x^2+16xy+3y^2=2 & (1) \\ 4x^2+5xy+7y^2=6 & (2) \end{cases}$

b. 有一元票、二元票、十元票各三張，問可付出若干種不同款額？（此題用算術做爲簡。解一係用算術做者）

7. 求過直線$2x-y+4=0$與圓$x^2+y^2+2x-4y+1=0$之二交點並點（1,1）之圓之方程式。

8. 試證在拋物線正焦弦兩端點所作切綫互相垂直，又若此拋物線之方程式爲$y^2=2px$，試求其在上述二切線爲坐標軸時之新方程式。

國立中央大學

（一） 變換方程式

$x^4+16x^3+89x^2+200x+156=0$

使其缺第二項，因而求原方程式之根。

（二） 有相交之二直綫 a 及 b，自 a 上之一點作 b 之垂綫復自其在上之垂足向 a 作垂綫，更自第二個垂足作 b 之垂綫，如此繼續作成無數根垂綫，設第一垂綫之長爲 7，第二垂綫之長爲 6，求此無數垂綫長之和。

（三） 若$A+B+C=\pi$，求證

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan A & \tan B & \tan C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix}=0。$$

（四）　求橢圓 $x^2+5y^2=5$

及圓 $(x+2)^2+y^2=5$

之實公切綫之方程式。

（五）　於雙曲綫

$$\frac{4}{3}(x-2)^2-(y+1)^2=1$$

中，已知其一直徑之斜度爲 $1/3$，試求此直徑及其共軛直徑之方程式，若以此二共軛直徑爲新坐標軸，試求雙曲綫之新方程式。

國立交通大學

(1)　管理學院

1. 求解方程式：

$$a^3(b-c)(x-b)(x-c)+b^3(c-a)(x-c)(x-a)+c^3(a-b)(x-a)(x-b)=0;$$

且求其有等根之條件。

2. 若w爲1之兩立方虛根之一，試示

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & 1 \\ w & w^2 & 1 & 1 \\ w^2 & 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}=3\sqrt{-3}.$$

3. 若整數 $m=p^aq^br^c$ 其 p,q,r 爲質數，（Primes）試求m所有約數之個數。

4. 於圓內接四邊形內，若兩對角綫成垂直，求證對角綫交點與一邊中點之距離，等於自圓心至對邊之距離。

5. 於三角形ABC之BC邊上任取X點，作ABX及ACX兩圓，求證此兩圓直徑之比爲AB:AC.

6. 於題5,若BX:XC＝m:n,試示

(a) $(m+n)\cot AXC = n\cot B - m\cot C$.

(b) $(m+n)^2 AX^2 = (m+n)(mb^2+nc^2) - mna^2$.

其中$a=BC, b=CA, c=AB$.

(2) 理工學院

(1) 若$l+m+n=0$,試示方程式

$$lx^2+2nxy+my^2+2mx+2ly+n=0$$

表兩直線,若此二直線與x軸交於A及B,與y軸交於C及D,試示AD,BC兩直線之連合方程式爲

$$lx^2+\frac{2lm}{n}xy+my^2+2mx+2ly+n=0.$$

(2) 橢圓$x^2/a^2+y^2/b^2=1$上三點P,Q,R之離心角(eccentric angles)順次爲θ,ϕ,ψ,試示P,Q,R處三切綫所成三角形之面積(不計符號)爲

$$ab\tan\frac{\theta-\phi}{2}\tan\frac{\phi-\psi}{2}\tan\frac{\psi-\theta}{2}.$$

(3) 證明:對於一組共軸圓(co-axial circles)一定點之諸極綫(polars)必通過一定點,且一定直綫之諸極(poles)必在一直綫上。

(4) 若$|x|<1$,m爲正整數,試示$(1-x)^{-m}$可以展開作

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots$$

之形式,求C_k之值,且證明

$$c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots+C_k=\frac{(m+k)!}{m!\,k!}.$$

(5) 以n角形之頂點爲頂點,而不以n角形之邊爲邊之三角形共有若干?

(6) 路旁有塔CD,塔底D與路最近處爲路上之A點。於路上B點測得塔頂C之仰角爲α又測得BC與路成角β.已知$AD=\lambda$,求塔高。

(2) 理工學院

(1) 若橢圓內接於一正方形，試證其兩軸必與正方形之對角綫重合。

(2) 試示$(ay-bx)^2+k(x-a)(y-b)=0$表通過(a,b)之兩直綫，並證明此二直綫均切於雙曲綫

$$4xy-k=0.$$

(3) 若不論m之值如何，而$y=mx+c$恆爲拋物綫$y^2=4ax$之法線，試示

$$c=-2am-am^3.$$

據此示通過某一定點，一拋物線通常有三法線；且若經過此三法線與拋物線成直交處之三點作圓，此圓與拋物線之第四交點必爲拋物線之頂點。

(4) 求解下之方程式：

$$\begin{vmatrix} x^2-a^2 & x^2-b^2 & x^2-c^2 \\ (x-a)^3 & (x-b)^3 & (x-c)^3 \\ (x+a)^3 & (x+b)^3 & (x+c)^3 \end{vmatrix}=0.$$

(5) 試示$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$可以分解爲二個一次因子，並證明$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$爲一完全平方。

(6) 高h尺之旗杆立於屋上。於屋前某點，測得旗杆支(substends)角爲ϕ；直進k尺，則又見旗杆支角B，求第二測點與屋之距離。

國立武漢大學

(1) 若多項式$f(x)$之係數皆爲整數，且$f(0)$及$f(1)$又均爲奇數，試證$f(x)=0$決無整數根。

(2) 解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=\dfrac{4}{3} \\ xyz=12 \end{cases}$$

(3) 設R爲三角形之外接圓半徑，試證

$a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$.

（4）試求經過二曲線 $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$ 及 $y^2+xy-8=0$ 之交點且與x軸相切之圓錐曲線方程式。

國立中山大學

1. 求 $(1-x^2)^{\frac{2}{3}}$ 之展式的第五項。

2. 解方程式 $\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+2}-x}+\dfrac{1+x}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$.

3. 化 $\dfrac{2}{x^4-1}$ 為部分分式。

4. 試定下列級數之收斂間隔（Interval of Convergence）

$$1+\frac{x}{1^3+1}+\frac{x^2}{2^3+1}+\frac{x^3}{3^3+1}+\cdots\cdots$$

又當 $x=\pm1$，級數是否仍然收斂？

5. 解 $\operatorname{Sin} x+\cos x+\tan x=\operatorname{Sec} x$，
求 x 之通值。

6. 甲乙兩塔知其相距125呎，今於塔基聯線上距甲塔100呎之處，測得甲塔頂之仰角為 60°，乙塔頂之仰角為 30° 試求甲乙兩塔頂之距離。

7. 設有兩定點A，B各以（0，1）及（0，−1）為其正軸位標，及有一動點C。若C與A，B之距離之比為一常數k（即k不因C變而變）則C畫一圓P，若AC直線之斜角，與BC直線之斜角之差為一常角Θ（即Θ不因C變而變）則C畫一圓Q。

1. 求P之方程式并指出當k改變時圓系P之根軸；
2. 求Q之方程式并指出當Θ改變時Q之圓心之軌跡；
3. 證明P與Q正交。

國立政治大學

（1）解 $3x^2-2x-5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0$.

（2） 求：$\frac{a^3}{b}$ 及 $\frac{b^3}{a}$ 之正等比中項。

（3） 求圓$x^2+y^2=17$之切線，使平行於直線$x+4y=5$.

（4） 求原軸平移至（2，−5）後，曲線$7x^2+8y^2-28x+80y+172=0$之方程式。

國立四川大學

（1） 解 $\frac{A^{x+1}}{B^{x-1}}=C^{2x}$.

（2） 解 $2x-3x^2-3x+2=0$.

（3） 設 ABCD爲一平行四邊形，AC爲對角線，由 B作任意直線各交AC，CD及AD於F，G及E，求證

$$\overline{EF}\cdot\overline{FG}=\overline{BF}^2.$$

（4） 證明

$$\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B).$$

國立復旦大學

(1) 甲 組

（1） 求方程式$y^5-5y^4+9y^3-9y^2+5y-1=0$之五根。

（2） 解聯立方程式：

$$\begin{cases}(ay)^{\log x}=\left(\frac{b}{x}\right)^{\log\frac{1}{y}}, \\ (ax)^{\log a}=(by)^{\log b}。\end{cases}$$

（3） A，B，C 爲共線之三定點，動點P至 A，B與B，C所張之角恆相等，試求P點之軌跡。

（4） 已與一圓及一直線，求作該圓之切線，使其自切點至該直線間之線段，等於已知長。

（5）設自A地量得敵人砲台所在地B及另一地C間之角 ∠ABC爲70°20'，自C地量得 ∠ACB 爲 62°50'，且量得A，C兩地之距離爲 10.6公里，問A地至敵人砲台之距離爲若干？

$$\left(\begin{array}{l}\sin 62°50' = 0.8897 \\ \cos 70°20' = 0.3365\end{array}\right)$$

(2)　乙、丙組

（1）求方程式$x^5 - 1 = 0$之五根。

（2）證：
$$\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ -a & o & d & e \\ -b & -d & o & f \\ -c & -e & -f & o \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2.$$

（3）設AB爲定圓之直徑，C爲AB弧之中點，求自C作一弦CD，交直徑AB於E，使ED等於定長。

（4）半徑相等之三圓弧圍成一三角形，且其頂點，分別爲其所對弧之中心，設半徑爲r，試求其面積。

（5）試述正切定律，且證明之。

國立同濟大學

（甲組作1.，2.，3.，題；乙組作2.，3.，4.題）

（1）設有一三角形ABC；假定A及B兩頂爲固定不移，其他一頂C在 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \frac{2}{5}\overline{AB}^2$ 之條件下運動，則其軌跡爲何如？

（2）證 $\cos\phi = 4\cos^3\left(\frac{\phi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\phi}{3}\right)$.

（3）用數學歸納法證下列恆等式：

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

（4）設有一三角形，其底爲 7 cm.，高爲 5 cm.，用圓規及尺作一正方

形，其面積與此相等者。

國立北洋大學

1. 試證：(a) $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\csc A$.

(b) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

$A+B+C=180°$.

2. 解 (a) $\begin{cases}6x^2+19xy-7y^2=0,\\ 3x^2-xy+4y^2-5=0.\end{cases}$

(b) $\sqrt{\frac{x}{4}+3}-\sqrt{\frac{2x}{3}}=\sqrt{\frac{x}{4}-3}$.

3. 台高25尺，上有一銅像，在地上距台60丈處，測得銅像視角爲 arc tan 0.125，求銅像之高。

4. 設 a,b,c 爲 $x^3-3x^2-2x+1=0$.之根，試作一方程式令其根爲

$2-\frac{1}{a+b}$, $2-\frac{1}{b+c}$, $2-\frac{1}{c+a}$.

5. 求過$(-2,-2)$而與$2x^2-4xy+2y^2-x=0$相切之直線。

6. 求三角形A(4,1,),B(7,5),C(1,3)之內切圓心。

7. 一動圓與一定圓$x^2+y^2=16$及一定直線$x=6$相切，求此動圓圓心之軌跡。

國立唐山工學院

1. 已知方程式 $2x^3+x^2+3x+5=0$ 之根爲 a,b,c, 試用變換方程式法求以 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$, $c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 爲根之方程式。

2. 用數學歸納法求下列級數

$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$至n項之和。

3. 討論方程式$y=\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$，并繪其軌跡。

4. F點爲拋物線 $y^2=16x$ 之焦點，O點爲頂點，P點爲此拋物線上任一

點，PQ爲切線，自O點至PQ線之垂線與FP線相交於R點，求R點之軌跡之方程式并繪其圖形。

5. P—ABC爲一正三角錐，其底面ABC正三角形之每邊爲10尺，而APB,BPC,CPA三個面角均爲30°,求此三角錐之高。

國立北平鐵道管理學院

1. 解方程式$x^5-5x^4-5x^3+25x^2+4x-20=0$,已知各根爲$a,-a,b,-b,c$,等形式。

2. 有0,1,2,3,4,5,6,7八個數字，間可排得小於10000之數字有幾？

3. 試證三角形之高爲垂足所成三角形之各角的二等分線。

4. 三角形內任意一點至三頂點A,B,C的延長線交對邊於P,Q,R則

$$\frac{BP}{CP}\times\frac{CQ}{AQ}\times\frac{AR}{BR}=1.$$

5. (a)若$A+B+C=180°$,

證$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$。

(b)解$3\cot x+2(\sin x-\cos x)=3$.

國立重慶大學

(1) 甲組

1. 設1，2，3，2，3，4，5，共七字每次取四字間有取法若干？

2. 試解下列方程式

$$\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ \tan x & \cot x\end{vmatrix}=0.$$

3. 試求$Px^3+Qx+S=0$有重根之條件。

4. 試求$6x^2-24xy-y^2-150=0$之焦點座標。

（2）　乙組

1. 問三男四女坐成一排，男女相間應有坐法若干？
2. 試解下列方程式

   $\log(x+1)+\log(x^2-x+1)=2\log(x+1)+\log(x+2)$.
3. 求過二定點並切於定直線作一圓。
4. 試解　$\mathrm{Tan}\,\theta-\mathrm{Sec}\,2\theta=1$.

國立江蘇醫學院

1. 求下列各式之最小公倍數

   $a^2-2ab-15b^2$，a^3+27b^3，$a^2+6ab+9b^2$.
2. 解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-z=2 \\ 3x+2y-3z=0, \end{cases}$$

3. 過圓之直徑兩端A,B各作切線AC,BD若C與D為此兩切線與另一切線之交點而該另一切線切於圓周上任意點P,試證P與AD,BC之交點Q相聯時當與AC平行（$PQ \parallel AC$）.
4. 求證 $\tan x+\cot x=2\csc 2x$.

國立福建師範專修科

1. 方程式$x^4-x^3-22x^2+51x-9=0$有等根求解之。
2. 正三角形內一點至三邊距離之和為常數。
3. 平行四邊形一對角上取一點作二直線平行於邊分原形為四個平行四邊形不合此對角線之二個平行四邊形必等積。
4. 設$A+B+C=\pi$求證

   $\mathrm{Tan}+\mathrm{Tan}B+\mathrm{Tan}C-\mathrm{Tan}A\,\mathrm{Tan}B\,\mathrm{Tan}C=0$.
5. 過二點（3,2），（−1,4）作直線方程式。
6. 求$x^{12}-y^{12}$的因式。

上海大同大學

1. 已知$x^6-4x^5-11x^4+40x^3+11x^2-4x-1$之一根爲$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，解此方程式。

2. 決定下列級數爲收斂抑爲發散，

$$\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\frac{4^4}{5^5}+\cdots+\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}+\cdots。$$

3. 求$y^2=2ax$及$x^2=4by$之公共切線方程式。

4. 已知$A\alpha$,$B\beta$,$C\gamma$中線，作三角形$A'B'C'$。

5. 求證 $\sin 3\theta+\sin 5\theta=8\sin\theta\ \cos^2\theta\ \cos^2\theta$.

北平燕京大學

下列諸題，試擇其易解者先塡答之，然後盡力之所能以解其餘。

1. $|a|\ |b|$與$|a\cdot b|$二者孰大？

2. 求$\cos 150°$及$\cos 510°$之值。

3. 下列二式，何者爲可能？

(i) $\tan A=-2$,　　(ii) $\sin B=\frac{3}{2}$

4. 是否坐標軸之原點與$(3,-2)$點在直線$x-y+1=0$之同側？

5. 求經過$(0,-1)$及$(1,0)$兩點之直線方程式。

6. 若O爲△ABC內一點

(i) $(OA+OB+OC)$與$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$二者孰大？

(ii) $(OA+OB+OC)$與$(AB+BC+CA)$二者孰大？

7. 已知二三角形ABC及A'B'C'且$AB=A'B'$,$BC=B'C'$.及$\angle A=\angle A'$;是否此二三角形全等？何故？

8. $(2,2)$點在圓$x^2+y^2-2x=0$之內，抑在圓外？

9. 用極坐標試繪

(i) $\rho=2$,　　(ii) $\theta=60°$.

10. 求下列各乘積：

(i) $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z)$.

(ii) $(a^2-ab+b^2)(a+b)^2$.

11. 解

$$\begin{cases} x+y+z+u=8 \\ y+z+u+v=3 \\ z+u+v+x=7 \\ u+v+x+y=2 \\ v+x+y+z=4. \end{cases}$$

12. 等角多邊形之一外角爲45°求其邊數。

13. 何謂三角形之外心，內心，垂心，及重心？其中那三點在一直線上？

14. 下列答案中，於正確答案下，畫一直線。

$$\frac{\mathrm{Sin}3A}{\mathrm{Sin}A} = \text{(i)}\ \mathrm{Sin}2A,\quad \text{(ii)}\ \mathrm{Sin}^2A,$$

$$\text{(iii)}\ 3+4\mathrm{Sin}^2A,\quad \text{(iv)}\ 4\cos^2A-1.$$

15. 若 $\tan x = {}^4/_3$, $3\cos x-4\sin x=$

16. (i) $\log_2 4=$ (ii) $\log_2 2=$

(iii) $\log_2 1=$ (iv) $\log_2 \frac{1}{2}=$

17. 若 $C^m_n = C^m_{n-1}$ 且 $3n=2m-4$ 求m及n之值。

18. $kx^2+4y^2-8x=0$一式表示何種曲線若(i) $k=0$, (ii) $k=1$, (iii) $k=-1$.

19. 求直線 $4x-3y-1=0$及$3x-4y+2=0$ 二交角之平分線之方程式。

20. 若 $\tan^{-1}p+\tan^{-1}q=\pi/2$, 試證$pq=1$.

21. 於三角形ABC中，若 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$, 試證此三角形必爲直角三角形。

22. 作方程式令其根爲$-3\pm2\sqrt{2}$.

23. k爲何值時，下行列式之值爲零？

$$\begin{vmatrix} 3 & k & -4 \\ 2 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

24. 設ABCD爲圓內接四邊形，且AB＝5,BC＝3,CD＝3,DA＝8,AC＝7,求BD.

25. 菱形二對角線之比爲3:4,面積爲48,求其周界之長。

26. 求雙曲線$4x^2-9y^2=36$漸近線之方程式。

27. 試證圓上任意一點之法線必通過圓心。

28. 於任意三角形ABC中，試證$a\cos B+b\cos A=c$.

29. 解：

$$\sin A+\cos A=\sqrt{2}.$$

30. 直角三角形ABC之內切圓切其弦AB於T點，若CA＝6,CB＝8求AT.

31. 試述Desargues'定理，並作圖以表明之。

32. 求下列各級數n項之和：

(i) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots,$

(ii) $\frac{1}{(1+x)(1+2x)}+\frac{1}{(1+2x)(1+3x)}+\frac{1}{(1+3x)(1+4x)}+\cdots.$

杭州之江大學

(1) 甲 組

1. Find the following values:

(A) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x},$

(B) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)},$

(C) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$.

2. Solve

$$\begin{cases} x^2-2y^2-x=0, \\ 2x^2-5y^2+3y=0. \end{cases}$$

3. Two persons A and B are to draw alternately one ball at a time from a bag contaning 3 white and 2 black balls, the balls drawn not being replaced.
If A begins, what chances has each of being the first to draw a white ball? What are the respective chances of A and B, if the balls are replaced as they are drawn?

4. At a distance a feet from the foot of a tower, the angle of elevation A of the top of the tower is the complement of the angle of elevation of a flagstaff on top of it. Show that the length of the staff is 2 a cot2A feet.

5. Solve for x between 0° and 360°

$$\sin x+\cos x=\sec x.$$

6. A line is drawn from a fixed point O meeting a fixed line in Q. Find the locus of a point P on the line such that $OP\times OQ$ is a constant.

(2) 乙組

1. Two Points A and B lie on the same side of a straight line L on this line.
   a. determine the position of a point P such that the sum $PA+PB$ is a minimum.
   b. determine the position of a point Q such that the difference $QA\sim QB$ is a maximum.

2. Prove that $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$ where A, B, C, D are four

successive points on a straight line.

3. Solve lhe system of equations

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{17}{4}xy, \\ x-y=\frac{3}{4}xy. \end{cases}$$

4. In how many ways can 18 books be divided equally into 3 sets of of 6 books each?

5. The length of the perimeter of a triangle is 100 feet and the angles are in the ratio 7:3:2. Find the lengths of the sides.

6. Prove that.

(a) $\tan 18^\circ=\frac{\sin 33^\circ+\sin 3^\circ}{\cos 33^\circ+\cos 3^\circ}$.

(b) $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

7. Show that the tangents at the ends of a focal chord of a parabola intersect orthogonally on the directrix.

北平輔仁大學

投考文教兩院學生作1—5五題。

投考理學院學生作3—8六題。

1. 分解下列二式爲因數：

(a) x^4-23x^2+1; (b) $y^2z^2(x^4-1)+x^2(y^4-z^4)$.

2. 若x_1, x_2爲方程式$2x^2-5x+3=0$之二根，試求以

$\frac{x_1}{x_2}$ 與 $\frac{x_2}{x_1}$ 爲根之方程式。

3. 試將下式分爲分項分數：

$$\frac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}.$$

4. 試證下列恆等式：

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$$=4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

5. 已知底邊頂角及底邊上之高，求作一三角形。

6. 試論下列函數並繪其圖形：

$$\rho=2(1-\cos\theta).$$

7. 試證雙曲線之兩漸近線及任一切線所成之三角形之面積等於一常數。

8. 若a，b，c，爲方程式$x^3+px^2+qx+r=0$之根，試求以

$a-\frac{1}{bc}$，$b-\frac{1}{ca}$，$c-\frac{1}{ab}$爲根之方程式。

福建協和大學

1. 設 $3\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$，試求x之值。

2. 某城街路爲棋盤式走向南北者有a條而走向東西者有b條，一行人欲由西北隅向最短之路走到東南隅，問共計有若干方法？

3. 求$\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$之最大值。

4. 求已知圓 $x^2+y^2-6x+4y=12$ 之兩切線方程式與一已知直線 $4x+3y+5=0$平行。

華南大學

1. 證從平行四邊形之一頂點作線至對邊之中點三等分四邊形之對角線。

2. $\sin A=\frac{4}{5}$求 $\sin A/2$, $\cos A/2$, $\tan A/2$, $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$.

3. 鷄蛋每個80元鵝蛋每個90元鴨蛋每個70元用9700元買三種蛋共有120個求各種蛋的個數。

4. 解下列之聯立方程

$$x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1.$$

5. AO爲圓之半徑過垂直於此之直徑上一點B,引任意弦BP，從此弦之一端P引切線PC與OB之延線會於C證CB＝CP。

6. 兩樹相距50呎在此樹距地5呎處觀他樹之樹頂與樹根適成90°之角又觀他樹頂之仰角爲60°，求他樹之高。