代数学

新學制

高級中學教科書

代數學

何魯編輯

New Sys'erm Series
Algebra
For Senior Middle Schools
Commercial Press, Limited

中華民國十二年八月初版

※回（新學制高級中學教科書代數學一冊）
（每冊定價大洋捌角）
（外埠酌加運費匯費）

編輯者　何魯

發行者　商務印書館

印刷所　商務印書館　上海北河南路北首寶山路

總發行所　商務印書館　上海棋盤街中市

分售處　商務印書分館　北京　天津　保定　奉天　吉林　龍江　濟南　太原　開封　鄭州　西安　南京　杭州　蘭谿　安慶　蕪湖　南昌　漢口　長沙　常德　衡州　成都　重慶　瀘縣　福州　廣州　潮州　香港　梧州　雲南　貴陽　張家口　新嘉坡

二三七四何

序

近行代數學教本,多由歐美書直譯,與我國學生程度不合,且於代數意義及方法均付闕如,故習代數者往往不知代數爲何物,卽知者亦不過能爲公式之機械計算而已.歐美學生之深造機會甚多,故中等教科書雖稍嫌不完全,尙不足爲累;我國學生則反是,不於中學奠其基礎,則研究之興趣不生,將至一無所得而止.故余以爲在中國編教科書,其責任更重大,決非率爾操觚者所能勝任.茲余以十餘年之經驗,數閱月之苦思成此書,讀者可以見篇名而知代數之意義.至何處爲算術之推廣;何處爲代數之推廣;何處爲分析之肇始;皆不憚詳言,冀爲讀者一貫之助.吾知此書出,學者研究算學之興趣,必因之增加.得此津梁,自可進窺堂奧,固不無裨益於世也.

本書第三篇得余友向迪瓆教授之助爲多,附及之以誌謝.

中華民國十二年夏　　季曾何魯識於學海室

目　錄

第一篇　代數之基本運算

第二篇　代數推廣之方法

第三篇　分析之基本概念

第四篇　代數之本身問題

新學制高中教科書

代數學

第一篇

代數之基本運算

第一章　正負數及其運算

§1. 代數之目的 Object of Algebra 代數之目的爲解決方程式.方程式者,在代數則爲量與量之關係,如 $f(x, y)=0$;或一量與本量之乘方或方根之關係,如 $x^3+px+q=0$ 或 $2x-\sqrt{x+1}=0$.量分已知未知二種:解決云者,卽就已知量,依一定運算,以求未知量是也.方程式在物理爲天然現象之定量公律.物理以得一定量公律爲難能可貴;旣得公律,而不假之以進研現象;換言之,卽有方程式而不知解,則物理進步爲之阻,此物理之所以必資於代數也.量又分有限與無窮小二種:研究方程式之盡含有限量者,屬代數範圍;方程式之盡含無窮小者,爲微分方程式,本書不論及之.科學發達,觀察爲先,實驗次之,抽相科學如算學 Mathematics,則根據原理或假設,以爲推演.天然界之量,恆有數附之.爲量雖多,而爲數則一

也.研究量與量之關係,必假觀察以成,實驗以證其無訛.若於數,則可以假設或原理以支配之;再根據之,以研究數與數之任何種關係;如整數之名,假設也;$(\sqrt{-1})^2=-1$,亦假設也;於等數加等數和數仍等,原理也.算學雖至極繁頤之境,終不能背原理.是故算學爲研究物理之利器;而物理問題,實爲算學之資料.算學愈進步,則研究物理愈易;物理愈發達,則算學材料益愈多;且可轉移研究算學者之趨向.本書目的,在使讀者深明代數之意義;及能解決有限量方程式;又能爲讀解析幾何及高等分析者之充分預備.

§2. 正負數 *Positive and Negative Numbers* 算術只有正數而無負數;代數則先立正負數之名,乃代數家求推廣公式之第一步.

今設有方程式 $x+b=a$ ……………………(1)

移項,立得 $x=a-b$ ……………………(2)

此時如以數字代 a 及 b,則(2)式與 x 之值.然欲計算可能,必 a 大於 b 乃可.設 a 小於 b,則算術家將對此淺易問題而束手.計算不立,則(2)不得爲(1)之解;換言之,即同一一次方程式,有時有解,而有時無解也.夫算術家之用數不用量,爲其通也,得數之關係,可適用於任何量;代數家之用字不用數,爲其更通也,得字之關係,可適用於任何

數.今既窮於正數之計算,乃不得不創新數以濟其窮,而求公式之推廣.推廣之法若何?

設　　$a<b$

可令　　$b=a+c$

c 即 b 與 a 之較,且爲正數.於是(2)式可書爲

$$x=a-a-c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因 $a-a=0$ 故如以 $-c$ 代 x 則(3)式變爲

$$-c=-c$$

卽此式能合也.於是(1)之解爲 $x=-c$. 減號與字合成一數,謂之負數,如 a, b, c 均爲正數,則 $-a, -b, -c$ 爲負數,a, b, c 又爲其絕對值 *Absolute Value*. 如 a 可正,可負:則 a 爲正時,$-a$ 爲負;a 爲負時,$-a$ 爲正.於是有一正數,必有一負數;有 $1, 2, 3, \cdots\cdots n$, 則有 $-1, -2, -3 \cdots\cdots -n$. 3 可視爲 5 與 2 之較,或 6 與 3 之較,卽

$$3=5-2=6-3$$

則 -3 可視爲 2 與 5,或 3 與 6 之較,卽

$$-3=2-5=3-6$$

餘倣此.

§3. 正負整數之運算 *Operation of Positive and Negative Integers*

算術之初,只就正整數運算;如加,減,乘,除,乘方,及方根等是.繼推之於小數及分數.在代數,則每

創一新數,必求此新數之運算.新數之運算,必有新律以支配之;又與舊律不背,且永不令有矛盾之處發現.此其成功,蓋不在一時也.正負數通稱曰代數數 *Algebraical Numbers.* 欲求兩代數數之和,須先視兩數之號若何?或同號,或異號.若爲同號,則求兩數之算術和,而冠以兩數之號.例如

$$5+3=8$$

$$-5+(-3)=-8$$

若爲異號,則求兩數之較,而冠以絕對值大者之數之號.例如求 5 與 -3 之和.因兩數號不同,求其較,爲 2.因 5 之絕對值比 -3 之絕對值大,故爲正.卽

$$5+(-3)=5-3=2$$

又如求 -5 與 3 之和,其較仍爲 2,但絕對值大者之數爲負,故應冠以負號.卽

$$-5+3=-2$$

推廣言之,如欲求任若干代數數之和,

$$s=a+b+c+\cdots\cdots+l$$

則以各正數相加令爲 α;又以各負數相加,令爲 β.則

$$s=\alpha-\beta$$

以異號數求和法馭之.

§4. 正負數乘除法之公律 Law of Signs

兩代數數相乘;先如算術求其積,再視兩數之號.若爲同號,則積爲正,若爲異號,則於積冠以負號.

以公式表之如次.

$$\left.\begin{aligned}(+a)(+b)&=ab\\(-a)(-b)&=ab\\(+a)(-b)&=-ab\\(-a)(+b)&=-ab\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

卽同號之數相乘,乘積爲正;異號者相乘,其積爲負也.

推廣言之,如欲求 n 代數數之積,須先求其算術積.負數數目爲雙者,則積爲正;負數數目爲單者,則積爲負.

兩代數數相除,其律仍同;卽同號之數相除,其得數爲正;異號之數相除,得數爲負也.

以公式表之如后.

$$\left.\begin{aligned}\frac{+a}{+b}&=\frac{a}{b}\\\frac{-a}{-b}&=\frac{a}{b}\\\frac{+a}{-b}&=-\frac{a}{b}\\\frac{-a}{+b}&=-\frac{a}{b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

中 $b\neq0$. 凡此皆公約,期便於計算者.其價値在使後此運用可合實用,又不互相矛盾而已.

§5. 乘方與方根 Powers and Radicals

設 π 爲 $a, b, \cdots\cdots l$, n 個數之乘積,卽

$$\pi=abc\cdots\cdots l$$

如令 $a=b=c=\cdots\cdots=l$

則 $$\pi=\underbrace{aa\cdots\cdots a}_{n\text{因字}}$$

依定義 $\pi=a^n$

π 爲 a 之 n 次乘方,亦卽 n 個 a 之聯乘積也.此時 n 爲正整數.

又 $-a$ 之 n 次乘方爲

$$\pi'=(-a)^n=(-1)^n a^n$$

$(-1)^n=1$ 若 n 爲雙數

$(-1)^n=-1$ 若 n 爲單數

余謂 $$a^n\times a^m=a^{n+m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

中 n 及 m 均爲正整數.蓋 a^n 爲 n 個 a 之乘積,而 a^m 爲 m 個 a 之乘積.故 $a^n\times a^m$ 爲 $(n+m)$ 個 a 之乘積,依定義爲 a^{n+m}. n 及 m 謂之指數.故一數兩乘方之積,其指數爲原兩指數之和.

又 $$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

如 $n-m=0$ 則有

$$a^0=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

如 $n-m=-p$ 則有

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

此 0 指數及負指數之定義也.

反之,如
$$\pi=a^n$$
n 爲一正整數,則 a 謂之 π 之 n 次方根.以符號表之
$$\sqrt[n]{\pi}=a$$
或
$$\pi^{\frac{1}{n}}=a$$
$\frac{1}{n}$ 爲分數指數,且可以分數運算馭之.詳見第三章.

又
$$(+a)\times(+a)=a^2$$
$$(-a)\times(-a)=a^2$$
$+a$ 及 $-a$ 爲 a^2 之平方根.且任一代數數之平方,必爲正.於是負數無平方根.如令
$$\sqrt{-1}=i$$
$$(\sqrt{-1})^2=i^2=-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$
則 $\sqrt{-1}$ 或 i 謂之虛數,而
$$\sqrt{-a^2}=\sqrt{-1}\sqrt{a^2}=\pm ia$$
於是一二次方程式,如
$$x^2 \quad a^2=0$$
者,亦有解.其解爲 $\pm ia$.計算時,當以 -1 代 i^2.此爲代數家推廣公式之又一步.詳見第十四章.

§ 6. 整數之特性 *Characteristic Properties of Integers*

代數整數對於加法,特性有二:一曰可易性 *Commutative law*,一曰可羣性 *Associative law*.

如式 $$a+b=b+a$$

即 a, b 可互易而結果不變,此可易性也.

又如 $$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$$

即 a, b, c 三數之中任二者可合爲一,仍不變其結果,此可羣性也.

又 $$a+0=a$$

故加零爲無效.

整數對於乘法之特性有三;一曰可易性,一曰可羣性,一曰可分性 *Distributive law*, 以式明之:

$$ab=ba$$

此可易性也;

$$abc=(ab)\cdot c=a\cdot(bc)$$

此可羣性也;

$$a(b+c)=ab+ac$$

此乘法對於加法之可分性也.

又 $$0\times a=0$$

$$1\times a=a$$

故欲一乘積爲零,必至少有一因子爲零;而以 1 乘,則積不變.

應用 余謂

$$a-(b-c+d)=a-b+c-d$$

因 $$a-(b-c+d)=a+(-1)(b-c+d)$$
$$=a+(-1)b+(-1)(-c)+(-1)d$$
$$=a-b+c-d$$

故也.

又 $$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=(a+b)a+(a+b)b$$
$$=a^2+ba+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

同理 $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

分數加法,於通分母後,純為整數之運算.分數乘法,則以分子乘分子,分母乘分母,亦為整數之運算.故上所論者,於分數亦適用.

§7. 實數之比較 *Comparison of Real Numbers*

正負整數及分數,通稱為實數.其實無理數如不盡根 *Surds* $\sqrt{2}$, 及超然數 *Transcendental Numbers* 如 π, 或 e 亦屬焉.計算上,對於此種數,只取其相近值.本書第十章再論之,幷及其比較法.此時僅論正負整數及分數,又稱為有理數 *Rational Numbers*, 以示別於無理數及超然數也.

定義 謂 a 大於 b, 必 $a-b$ 為正.即
$$a-b>0$$

其一 兩正數相較,絕對值大者為大.

其二 兩負數相較,絕對值大者爲小. $-3>-5$

因 $$-3-(-5)=-3+5=2>0$$

故也。

其三 任一正數,恒大於零.因由此數減去零,餘數仍爲正故也.

其四 任一負數,恒小於零.如 $0>-1$, 因

$$0-(-1)=1$$

爲正故也.

如就正負整數論,則其大小次第如

$$-n<-(n-1)<\cdots\cdots<-3<-2<-1<0<1<2<3<\cdots\cdots<(n-1)<n$$

0 可視爲正負數之界,又曰中立數,因

$$\pm 0=0$$

故也.

§8. 等式與不等式 Equality and Inequality

謂 A, B 兩同類量相等,即同以一單位量之時,所含單位次數相等也.以式表之爲

$$A=B$$

謂兩數相等,必此兩數號同,而絕對值又相等.

如 C 爲其同類量,則有

$$A\pm C=B\pm C$$

如 m 爲一數,不爲零者,則有

$$mA=mB$$

及

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{m}$$

此算學之普通原理也.

試取兩數不等者 a 及 b,設 a 大於 b 以式表之爲

$$a>b$$

或爲

$$b<a$$

如 c 爲任一數,則有

$$a\pm c>b\pm c$$

如 c 爲正數,則有

$$ac>bc$$

因

$$a>b$$

又可書爲

$$a-b>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

以正數 c 乘之得

$$c(a-b)>0$$

或

$$ac-bc>0$$

亦即

$$ac>bc$$

如 c 爲負,則以之乘(11)式,當得

$$c(a-b)<0$$

卽

$$ac<bc$$

是故同以一數乘不等式兩端,必審知此數之號而後可也.以一數除不等式之兩端亦然.

又有 $$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$$

§9. 比與比例 *Ratio and Proportion*

比有兩稱.以一同類量除一同類量謂之比,此爲數值.或以同一單位量兩量,而以所得數值相除成之.以式表之爲

$$\frac{A}{B} \text{ 或 } A:B$$

如以 c 爲單位, A 含 a 次單位,而 B 含 b 次,則其比爲

$$\frac{a}{b} \text{ 或 } a:b$$

一量視他量之增減而自爲增減者,亦可成比.此比爲一新量,如在整速運動 *Uniform Motion.*

$$\frac{e}{t}=v$$

e 爲路長, t 爲時間 v 爲速率,此時 v 爲常數.在變速運動 *Non-Uniform Motion*, v 視 t 變,

令 $$v=f(t)$$

知 $f(t)$, 卽知此運動之律.如

$$v=ct$$

則爲加速運動 *Accelerated Motion* 是也.如兩數相乘,亦可視爲一數與他一數倒數 *Reciprocal* 之比.

卽
$$ab=\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{\frac{1}{a}}$$

前者爲正比,此爲反比.兩比相等,成爲比例.如

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

是也

余謂如有
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

則有
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

因令
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda$$

則
$$a=b\lambda;\quad c=d\lambda$$

而
$$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{\lambda(b\pm d)}{b\pm d}=\lambda=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

推廣則有

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots=\frac{p}{q}=\frac{a\pm c\pm\cdots\cdots\pm p}{b\pm d\pm\cdots\cdots\pm q}$$

又由(13)式分之,得

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

以 bd 乘(12)之兩端,得

$$ad=bc$$

又以 cd 除此式之兩端,得

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

余謂如 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}\cdots\cdots\frac{p}{q}$ 各比不等,但分母之號相同,則 $\frac{a+c+\cdots\cdots p}{b+d+\cdots\cdots q}$ 必介於諸比中極大極小者之間.蓋如令 λ 爲極小,λ' 爲極大,則有

$$\lambda \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \lambda'$$

$$\lambda \leqslant \frac{c}{d} \leqslant \lambda'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda \leqslant \frac{p}{q} \leqslant \lambda'$$

設 $b, d, \cdots\cdots q$ 均爲正,則有

$$\lambda b \leqslant a \leqslant \lambda' b$$

$$\lambda d \leqslant c \leqslant \lambda' d$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda q \leqslant p \leqslant \lambda' q$$

相加,得

$$\lambda(b+d+\cdots\cdots+q) \leqslant a+c+\cdots\cdots+p \leqslant \lambda'(b+d+\cdots\cdots+q)$$

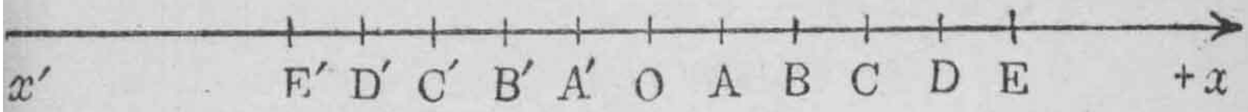
或
$$\lambda \leqslant \frac{a+c+\cdots\cdots+p}{b+d+\cdots\cdots+q}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

§ 10. 正負數圖解 *Graphic Representation of Algebraic Numbers*

試取一直線 $x'x$. 一動點在此線上之任一處,可向兩端運動.取右向者爲正,則左向者爲負.如

就一點 O,向右取 $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\cdots\cdots$

向左取 $\overline{OA'}=\overline{A'B'}=\overline{B'C'}=\cdots\cdots$



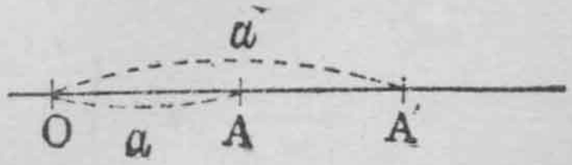
如令 OA 為單位,則 $\overline{OA}=1$; $\overline{OB}=2$; $\overline{OC}=3$;……而

$\overline{OA'}=-1$; $\overline{OB'}=-2$; $\overline{OC'}=-3$;……

$x'x$ 謂之軸. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$,……謂之線節 *Directed Line-segment*. $\overline{OA}$ 為 1 之代表, $\overline{OA'}$ 為 -1 之代表,餘類推.再將 OA 分為若干分,則得若干分之一,或若干分之幾.於是任與一代數,皆可以軸上之一線節代表之.因線節之端 O 為定點,故可以軸上之一點代之.反之任與一點 M,以 $\overline{OA}$ 為單位量 $\overline{OM}$,設為 m.如 M 在 O 之右,則 M 代表 m;在左,則代表 $-m$.既有點與數在一直線上之關係,凡直線幾何,皆可以代數研究之,如四點所成之叢率,其最著者也.數之運算,亦往往可以幾何證明,是為溝通形數之始.

第一章 練習題

1. 設有兩動點 M, M' 在一直線路上, M 由 A 點起每鐘行 V 里, M' 由 A' 點起每鐘行 V' 里,問經過若干鐘二點可相遇?并求其相遇處.



解法 經過 t 鐘時 M 所行路長爲

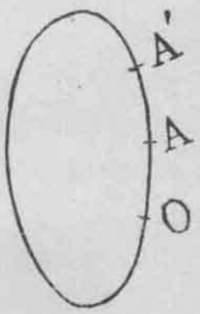
$$x=a+vt$$

而 M' 所行路長爲

$$x'=a'+v't$$

相遇時必有 $x=x'$, 此式即可定 t, 幷討論之.

2. 題同上,但設所經之路爲閉曲線,其全長等於 l.



解法 此時應有

$$x-x'=nl$$

中 n 爲一整數.

應用 求時計分針時針之各相遇處.

3. 如有 $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

試證 $$\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$$

4. 設 a, b, c 爲任一三角形之邊,而 h, h', h'' 爲其高,如 a 爲正角三角形之弦,則

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{h^{2}}+\frac{1}{h''^2}$$

解法 在任一三角形內

$$ah=bh'=ch''$$

如 a 爲弦 $$a^2=b^2+c^2\cdots\cdots$$

5. 試解下之各組聯方程式

$$1^\circ \quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\\ mx+ny+pz=q\end{cases}$$

$$2^\circ\quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\\ xy+yz+zx=m^2\end{cases}$$

$$3^\circ\quad \begin{cases}ax=by=cz\\ mx^2+ny^2+pz^2=r\end{cases}$$

6. 試證兩正數 a, b 之等差中率 $\dfrac{a+b}{2}$,恒大於其等比中率 $\sqrt{ab}$.

7. 試證 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$

8. 如 a, b, c, d 為四正數,則

$$\frac{a+b+c+d}{4}>\sqrt[4]{abcd}$$

9. 設 A, B, C, D 為 $x'x$ 軸上之四點, O 為 $\overline{AB}$ 之中點.如 A, B, C, D 成一調和率,即

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

試證 $1^\circ\quad \overline{OC}\times\overline{OD}=\overline{OA}^2$

$$2^\circ\quad \frac{2}{\overline{AB}}\times\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$$

10. 設 A, B, C, D 為 $x'x$ 軸上之任意四點,試證

$$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AC}\times\overline{DB}+\overline{AD}\times\overline{BC}=0$$

第二章　代數式及其運算

§ 11. 代數式之分類 *Classification of Algebraic Expressions*

代數式者,乃數與字假符號結成之複式也.式分獨項多項,如

$$7a^3b\,;\qquad \frac{5ad^2c}{3d}\,;\qquad 4\times\sqrt{ab}\,;\qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{bc}}$$

皆獨項式也.

$$a^2b-3c+2\,;\qquad \frac{ab+3cd}{a-2}\,;\qquad x^3+px+\sqrt{x^2+1}\,;$$

皆多項式也.多項式爲獨項式之和.上舉獨項式中,第一式爲全式 *Integral Expression*, 字之乘方,盡爲整數;第二式爲有理式 *Rational Expression*, 式爲分數,而字之乘方爲整數;第三及四式爲無理式 *Irrational Expression*, 至少有一字之乘方爲分數.就所舉多項式論:第一爲全式,第二爲有理式,而第三爲無理式.多項式又有對稱式 *Symmetrical Expression* 與齊次式 *Homogeneous Expression* 兩種,如

$$a+b+c\,;\qquad a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

爲 a, b, c 之對稱式,互易三字之位置,其式仍不變.

$$a^2+3ab+c^2;\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2y}{x^2}$$

爲齊次式;第一式各項之乘方次數爲 2,第二式各項之

次數爲 -1. 凡物理幾何公律成爲代數式者,皆對於所用單位爲齊次式. 純粹數之次數爲零.

代數中所用之字,分常數 *Constant* 及變數 *Variable* 二種. 常數恒以

$$a,\ b,\ c,\cdots\cdots\qquad\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\cdots\cdots$$

等字代之,變數以

$$x,\ y,\ z,\cdots\cdots\qquad\qquad \xi,\ \eta,\ \zeta,\cdots\cdots$$

等字代之,如

$$y=ax+b$$

x, y 可以任意變易, a, b 則視爲常數. 如任與 x 一值, y 之値亦定,故 y 爲 x 之倚數 *Function*, 亦可云 x 與 y 互爲倚數. 因任與 y 一值, x 亦定故也. 如

$$3x-9=0$$

式中, x 稱未知數,不稱變數. 數與字成積,則數爲字之係數. 代常數之字,與代變數或未知數之字成積,則代常數之字稱係數.

兩項之係數異而字同者,爲相似項. 如

$$7a^3b,\qquad\qquad -5a^3b$$

爲相似項. 而 $\quad ax,\qquad 2bx,\qquad (b+c)x$

亦爲相似項. 相似項皆可併. 如前者,併之爲

$$2a^3b$$

後者併之為 $(a+3b+c)x$

是也.

§12. 代數式之運算 Operation of Algebraic Expressions

代數式之運算,在加法但將各相似項併之即得.在乘除法,字同者施以指數加減法,字不同者中加乘除號即可.但應注意者,凡代入數時,ab 當視為 a 與 b 相乘之積.而兩數相乘,則必加乘號,如 3×2, 亦可書為 $3\cdot2$, 而不能書為 32 以其與三十二相混也.

加法舉例

1° $$\underbrace{5a^3+7a^2b-4a^2b+2a^3}_{A}=\underbrace{7a^3+3a^2b}_{B}=\underbrace{a^2(7a+3b)}_{C}$$

中 A 為原式, B 為簡式 Simple Form, 而 C 為密式 Condensed Form. 由原式可得簡式或密式,簡密式亦可互得,而由簡密式則不能適得所與之原式.

§13. 乘法 Multiplication

問題一 試求 $(a+b+c)$ 與 $(a^3+b^3+c^3)$ 之乘積.

令 P 為其積.依 §6 乘法之可分性,得

$$P=(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)=a^3s+b^3s+c^3s$$

中 $$s=a+b+c$$

但
$$a^3s=a^4+a^3b+a^3c=a^4+a^3(b+c)$$
$$b^3s=b^3a+b^4+b^3c=b^4+b^3(a+c)$$
$$c^3s=c^3a+c^3b+c^4=c^4+c^3(a+b)$$

故 $\qquad P=a^4+b^4+c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$

或 $\qquad P=a^4+b^4+c^4+a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)$

問題二 試求 $(5a^3b+2a^2b^2-4ab^3)$ 與 $(3a^3-2a^2b+5ab^2)$ 之乘積.

令 P 爲其積;幷以 s 代第一式,則

$$\begin{aligned}P&=s(3a^3-2a^2b+5ab^2)\\&=3a^3\cdot s-2a^2b\cdot s+5ab^2\cdot s\\&=15a^6b+6a^5b^2-12a^4b^3-10a^5b^2-4a^4b^3+8a^3b^4\\&\quad+25a^4b^3+10a^3b^4-20a^2b^5\end{aligned}$$

將相似項合併之,得

$$P=15a^6b-4a^5b^2+9a^4b^3+18a^3b^4-20a^2b^5$$

又式

$$\begin{array}{rrrrrl}
5a^3b+ & 2a^2b^2- & 4ab^3 & & & \longleftarrow s\\
3a^3- & 2a^2b+ & 5ab^2 & & & \\
\hline
15a^6b+ & 6a^5b^2- & 12a^4b^3 & & & \longleftarrow 3a^3\cdot s\\
 & -10a^5b^2- & 4a^4b^3+ & 8a^3b^4 & & \longleftarrow -2a^2b\cdot s\\
 & & 25a^4b^3+ & 10a^3b^4- & 20a^2b^5 & \longleftarrow 5ab^2\cdot s\\
\hline
15a^6b- & 4a^5b^2+ & 9a^4b^3+ & 18a^3b^4- & 20a^2b^5 & \longleftarrow P
\end{array}$$

問題三 求兩順列一元多項式 $f(x)$ 及 $g(x)$ 之乘積.

兩因子均爲一元多項式,可以觀察法求得 x 各乘方之係數.今試舉列以明之,設

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

令 P 爲其積,則

$$P=(ax^3+bx^2+cx+d)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

因第一因子之次數爲 3,而第二因子次數爲 2,故乘積之最高次數爲 5.

x^5 之係數.因第一因子之第一項,乘第二因子之第一項得 x^5,故其係數爲 $a\alpha$

x^4 之係數.f 之一項係數乘 g 之二項加($f_{二}$)乘($g_{一}$)

即 $a\beta+b\alpha$

x^3 之係數.$(f_{一})\times(g_{三})$加$(f_{二}\times g_{二})$加$(g_{一}\times f_{三})$.

即 $a\gamma+b\beta+c\alpha$

x^2 之係數.$(f_{二}\times g_{三})+(f_{三})\times(g_{二})+(f_{四})\times(g_{一})$.

即 $b\gamma+c\beta+d\alpha$

x 之係數.$(f_{三})\times(g_{三})+(f_{四})\times(g_{二})$.

即 $c\gamma+d\beta$

常數 $(f_{四})\times(g_{三})$

即 $d\gamma$

或書爲

$$\left.\begin{array}{llr}
x^5 \text{ 之係數} = f_1\times g_1 & = & a\alpha \\
x^4 \text{ ,, ,, ,, } = f_1\times g_2+f_2\times g_1 & = & a\beta+b\alpha \\
x^3 \text{ ,, ,, ,, } = f_1\times g_3+f_2\times g_2+f_3\times g_1 & = & a\gamma+b\beta+c\alpha \\
x^2 \text{ ,, ,, ,, } = \qquad f_2\times g_3+f_3\times g_2+f_4\times g_1 & = & b\gamma+c\beta+d\alpha \\
x \text{ ,, ,, ,, } = \qquad\qquad f_3\times g_3+f_4\times g_2 & = & c\gamma+d\beta \\
\text{常數} = \qquad\qquad\qquad f_4\times g_3 & = & d\gamma
\end{array}\right\}(1)$$

f_1 代 f 因子中第一項之係數, $f_2, \cdots, g_1, g_2, \cdots$ 等倣此.

故 $$P = a\alpha x^5 + (a\beta + b\alpha)x^4 + (a\gamma + b\beta + c\alpha)x^3 + (b\gamma + c\beta + d\alpha)x^2 + (c\gamma + d\beta)x + d\gamma$$

今就(1)式觀之,其係數成法如次.先將 f 之各係數分 3 行書之,由右而左.後行比前行低一字, 3 適爲 g 之係數數目.即

$$\begin{array}{ccc} & & a \\ & a & b \\ a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & \\ d & & \end{array}$$

再以 α 徧乘右第一行, β 徧乘第二行, γ 徧乘第三行,得

$$\begin{array}{r} a\alpha \\ a\beta + b\alpha \\ a\gamma + b\beta + c\alpha \\ b\gamma + c\beta + d\alpha \\ c\gamma + d\beta \\ d\gamma \end{array}$$

依列加之,則第一列爲 x^5 之係數,第二列爲 x^4 之係數,餘遞推,末列爲常數.

此法余曾加推廣,應用甚便.f 與 g 任何發數次均可.所宜注意者,即當應用時,各因子之缺項,須以 0 代其係數,俾勿紊係數之次第.今舉三例於后,讀者苟加詳覽,必自知會通也.

§ 14 例一 求 x^3+px+q 與 x^2-x+1 之乘積.

令 P 爲其積,因

$$\begin{array}{ccccl} & & 1 & = & 1 \\ & -1 & 0 & = & -1 \\ 1 & 0 & p & = & p+1 \\ 0 & -p & q & = & q-p \\ p & -q & & = & p-q \\ q & & & = & q \end{array}$$

故 $$P=x^5-x^4+(p+1)x^3+(q-p)x^2+(p-q)x+q$$

證
$$\begin{array}{l} x^3+px+q \\ \underline{x^2-\ x\ +1} \\ x^5+px^3+qx^2 \\ \quad -\ x^4-px^2-qx \\ \quad \underline{+\ x^3 \qquad +px+q} \\ x^5-x^4+(p+1)x^3+(q-p)x^2+(p-q)x+q \end{array}$$

例二 求 x^3+x^2-2x+1 與 x^3-2x^2+3x-1 之乘積.

令 P 爲其積,因

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & & & 1 & =1 \\
 & & -1\times2 & 1 & =-1 \\
 & 1\times3 & -1\times2 & -2 & =-1 \\
-1 & 1\times3 & +2\times2 & 1 & =7 \\
-1 & -2\times3 & -1\times2 & & =-9 \\
+2 & 1\times3 & & & =5 \\
-1 & & & & =-1
\end{array}
$$

故 $P=x^6-x^5-x^4+7x^3-9x^2+5x-1$

讀者可以普通乘法自證之.

例三 求 x^4+3x^2-x+1 與 x^2+x+1 之乘積.

令 P 爲其積,因

$$
\begin{array}{rrrl}
 & & 1 & =1 \\
 & 1 & 0 & =1 \\
1 & 0 & 3 & =4 \\
0 & 3 & -1 & =2 \\
3 & -1 & 1 & =3 \\
-1 & 1 & & =0 \\
1 & & & =1
\end{array}
$$

故 $P=x^6+x^5+4x^4+2x^3+3x^2+1$

證之仍合.

§ 15. 除法 Division 代數中最常見者,爲兩個一

元多項式之除法.運算時,必將兩多項式順列.或依元之遞減乘方列之,或依其遞增乘方列之.

設有兩多項式,

$$A=ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots\cdots+a_n$$

$$B=bx^p+b_1x^{p-1}+b_2x^{p-2}+\cdots\cdots+b_kx^{p-k}+\cdots\cdots+b_p$$

皆為遞減順列式.謂 B 能除盡 A 者,即能求得第一多項式 Q,俾

$$A\equiv B\cdot Q \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

也.Q 稱得數,又可書為

$$\frac{A}{B}\equiv Q$$

假令 $Q=cx^q+c_1x^{q-1}+c_2x^{q-2}+\cdots\cdots+c_ex^{q-e}+\cdots\cdots+c_q$

以此代入(2)式,而求其積.其第一項為 bcx^{p+q} 因(2)為全等式,故

$$bcx^{p+q}\equiv ax^n$$

即 $bc=a;\quad p+q=n$

於是 $c=\dfrac{a}{b};\quad q=n-p$

故求得數之第一項,須以除數 B 之第一項,除實數 A 之第一項.蓋

$$\frac{ax^n}{bx^p}=\frac{a}{b}x^{n-p}$$

故也.令 $R_1=A-Bcx^q$

則 R_1 之至多次數爲 $n-1$, 以 n 次者已消去故也. 又

$$A-Bcx^q=BQ-Bcx^q$$
$$=B(Q-cx^q)$$

卽 $$R_1=B(c_1x^{q-1}+c_2x^{q-2}+\cdots\cdots+c_q)$$

R_1 謂之第一分餘數. 以 B 之第一項, 除 R_1 之第一項, 卽得 c_1x^{q-1}. 卽得數之第二項也. 又由 R_1 減去 Bc_1x^{q-1}, 卽

$$R_1-Bc_1x^{q-1}=R_2$$

R_2 謂之第二分餘數. 以 B 之第一項, 除 R_2 之第一項, 卽得 Q 之第三項. 以是遞求至 R_q, 其次數爲 $n-q=p$. 應有

$$R_q-Bc_q=0$$

則 A 乃能爲 B 除盡. 如將各分餘數依次列之

$$\left.\begin{aligned} A-Bcx^q&=R_1\\ R_1-Bc_1x^{q-1}&=R_2\\ R_2-Bc_2x^{q-2}&=R^3\\ R_q-Bc_q\quad\ &=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

兩端各相加而化簡之, 得

$$A-B(cx^q+c_1x^{q-1}+\cdots\cdots+c_q)=0$$

卽 $$A=B\cdot Q$$

卽(2)式也. 如 R_q-Bc_q 不爲零, 令

$$R=R_p-Bc_q$$

則 R 之次數至多為 $p-1$, R 謂之餘數.於是

$$A=BQ+R$$

或
$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

R 之次數,比 B 之次數小.

故在兩遞減順列多項式之除法.欲 A 為 B 除盡,必 A 之次數大於或至少等於 B 之次數.且依上法求時,必得一餘數為零.

§ 16. 例一 令

$$A=x^4+3x^3-x^2-5x+2$$

$$B=x^2+2x-1$$

求 Q 佈式如次

$$\begin{array}{rr|l}
(A)\to & x^4+3x^3-x^2-5x+2 & x^2+2x-1\leftarrow(B) \\ \cline{3-3}
(x^2B)\to & x^4+2x^3-x^2\qquad\quad & x^2\leftarrow\left(\frac{A_1}{B_1}\right)\\ \cline{2-2}
R_1=(A-x^2B)\to & x^3\qquad-5x+2 & +x\leftarrow\left(\frac{R_1^1}{B_1}\right)\\
(xB)\to & x^3+2x^2-x\qquad & {}_{+}\;-2\leftarrow\left(\frac{R_2^1}{B_1}\right)\\ \cline{2-3}
R_2=(R_1-xB)\to & -2x^2-4x+2 & Q\\
(-2B)\to & -2x^2-4x+2 & \\ \cline{2-2}
R & 0 &
\end{array}$$

A_1 代 A 之第一項, B_1 代 B 之第一項, R_1^1 代 R_1 之第一項,餘準此,於是

$$Q=x^2+x-2$$

而 $$x^4+3x^3-x^2-5x+2=(x^2+2x-1)(x^2+x-2)$$

實際上佈式,不如是之繁,或僅書係數,或以心算,求各分餘數.當只用係數時,必以零代各缺項之係數,俾無次第混淆之虞.得數之第一項,亦必全書.準此,則上例可書爲

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrr}
x^4 & & & & & & x^2 & & \\
1 & +3 & -1 & -5 & +2 & & 1 & +2 & -1 \\
1 & +2 & -1 & & & & x^2 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & -5 & +2 & & 1 & & \\
 & 1 & +2 & -1 & & & -2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -2 & -4 & +2 & & & & \\
 & & -2 & -4 & +2 & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

故 $$Q=x^2+x-2$$

例二 令 $$A=x^5+2x^4+3x^3-x^2+\lambda x+\mu$$

$$B=x^2+x-1$$

求 Q

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+2x^4+3x^3-x^2+\lambda x+\mu & x^2+x-1 \\
\underline{x^5+x^4-x^3} & x^3+x^2+3x-3 \\
\qquad x^4+4x^3-x^2 & \\
\qquad \underline{x^4+x^3-x^2} & \\
\qquad\qquad 3x^3 \qquad +\lambda x & \\
\qquad\qquad \underline{3x^3+3x^2-3x} & \\
\qquad\qquad\qquad -3x^2+(\lambda+3)x+\mu & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-3x^2-\quad 3\,x+3} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (\lambda+6)x+\mu-3 &
\end{array}
$$

此時如 R 恒等於零,即

$$\lambda=-6, \qquad \mu=3$$

則 A 可爲 B 除盡,即

$$x^5+2x^4+3x^3-x^2-6x+3=(x^2+x-1)(x^3+x^2+3x-3)$$

如 λ 與 μ 爲任意,則

$$Q=x^3+x^2+3x-3$$

$$R=(\lambda+6)x+\mu-3$$

此時 λ 與 μ 爲未定係數.欲求 B 除盡 A 之情形,須將 R 全等於零.即

$$\lambda+6=0, \qquad \mu-3=0$$

也.推廣言之,如 B 之次數爲 p,則 R 至多爲 $p-1$ 次式.設

$$R=\alpha_1x^{p-1}+\alpha_2x^{p-2}+\cdots\cdots+\alpha_p$$

全等於零,得

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \cdots\cdots\\ \alpha_p=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

故有 p 條件.如 A 含有 p 未定係數,則(4)可以定各係數,俾 A 適可爲 B 除盡.

§ 17. 如兩式爲多元者,則可依任一元將兩式順列之,而以上法馭之.

特例 B 爲一次式

$$B=x-a$$

以之除 A, 得 Q 餘 R, 卽

$$A=(x-a)Q+R$$

令 $x=a$ 則 $$R=A(a)$$

$$=aa^n+a_1a^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

如 $R=0$, 卽 $A(a)=0$. 則 $x-a$ 可除盡 A, a, 又稱 $A(x)=0$ 方程式之根.

如 n 爲偶數; 準上, x^n-1 可爲 $x+1$ 或 $x-1$ 除盡, 如 n 爲奇數; 則 x^n-1 只能爲 $x-1$ 除盡, 而 x^n+1 可爲 $x+1$ 除盡.

同理, 如 n 爲偶數; x^n-y^n 可爲 $x-y$ 或 $x+y$ 除盡.

n 爲奇數, x^n-y^n 可爲 $x-y$ 除盡.

x^n+y^n 可爲 $x+y$ 除盡.

讀者可自求各得數, 以資練習.

§ 18. 遞增順列式之除法 *Division of Polynomials in Ascending Powers* 如一多項式, 能爲他一式所除盡, 無論依遞減或遞增次數列之, 佈算結果均不變. 如 A 不能爲 B 除盡, 則依遞減式佈算者, 至得一餘數, 其次數小於 B 之次數者卽止. 且 A 之次數 n, 必較 p 大, 乃屬可能. 如依遞增式佈算, 則恒可能. 并可任得若干項.

例如以 $1-x$ 除 1, 則有

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-x \\ \underline{1-x} & 1+x+x^2+\cdots\cdots \\ \quad +x & \\ \quad \underline{+x-x^2} & \\ \qquad +x^2 & \\ \qquad \underline{+x^2-x^3} & \\ \qquad\qquad x^3 & \end{array}$$

卽
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

但應注意者,如 x 大於 1,則 n 須有限乃可;如 x 小於 1,則可直書

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$$

§ 19. 求 x^2+1 除一多項式之餘數.

任一多項式 A,可書為

$$A=\phi(x^2)+x\psi(x^2)$$

令 $x^2=t$ 而以 $t+1$ 除 ϕ 及 ψ 得

$$\phi(t)=(t+1)\phi_1(t)+\phi(-1)$$

$$\psi(t)=(t+1)\psi_1(t)+\psi(-1)$$

故
$$A=(x^2+1)[\phi_1(x^2)+x\psi_1(x^2)]+\phi(-1)+x\psi(-1)$$

故
$$R=\phi(-1)+x\psi(-1)$$

如
$$\phi(-1)=0,\qquad \psi(-1)=0$$

則 A 可為 x^2+1 除盡.

§20. 係數除法 Synthetic Division

設以 $x-\alpha$ 除 A

$$A=ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots a_n$$

令 $$A=(x-\alpha)Q+R$$

此時 Q 爲 $n-1$ 次,而 R 爲常數.且等於 $A(\alpha)$. 見 §**17.** 令

$$Q=c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots\cdots+c_n$$

則 $$A=(x-\alpha)(c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots\cdots+c_n)+R$$

全等之,則

$$a=c_1$$

$$a_1=c_2-\alpha c_1$$

$$a_2=c_3-\alpha c_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_k=c_{k+1}-\alpha c_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=-\alpha c_n+R$$

於是得 $c_1=a,\ c_2=\alpha c_1+a_1,\ c_3=\alpha c_2+a_2,\cdots\cdots R=\alpha c_n+a_n$

即 a 爲 Q 之第一係數.欲得第二係數,以 α 乘 c_1,加於 a_1. 再以 α 乘 c_2,加於 a_2,即得第三係數,餘類推.由是得係數除法,舉例如次.

求以 $x-3$ 除 $2x^3-4x^2+5x-10$. 則書爲

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -4 & +5 & -10 & 3 \\ & 6 & 6 & 33 & \\ \hline 2 & 2 & 11 & 23 & \end{array}$$

故 $$2x^3-4x^2+5x-10=(x-3)(2x^2+2x+11)+23$$

第二章 練習題

1. 如令 $S_1=x+x^{-1}=a$

$S_2=x^2+x^{-2}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$S_n=x^n+x^{-n}$

試證 $S_n=aS_{n-1}-S_{n-2}$

特例 $n=3$, $n=4$, 則

$S_3=a^3-3a$

$S_4=\cdots\cdots$

2. 試證下之各全等式

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2\equiv(a\beta-b\alpha)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma)\equiv$$
$$(a\beta-b\alpha)^2+(a\gamma-c\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)\equiv$$
$$(a\beta-b\alpha)^2+(c\delta-d\gamma)^2+(a\gamma-c\alpha)^2+(d\beta-b\delta)^2$$
$$+(a\delta-d\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2$$

(*Lagrange*)

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)[x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz]$$
$$\equiv(x+y+z)\left[\frac{(x-y)^2}{2}+\frac{(x-z)^2}{2}+\frac{(y-z)^2}{2}\right]$$

3. 如 $a+b+c=0$

試證 $$10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$$

$$2(a^7+b^7+c^7)=7abc(a^4+b^4+c^4)$$

$$6(a^7+b^7+c^7)=7(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$$

$$4(a^6+b^6+c^6)=12a^2b^2c^2+(a^2+b^2+c^2)^3$$

4. 試將 x^4+1 分成兩二次因子.

解法 $$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2\cdots\cdots$$

5. 試求 $(x^4-ax^3+bx^2-cx+d)$ 與 $(x^4+ax^3-bx^2+cx-d)$ 之乘積,并用 § 14. 之法求之.

6. 試求下各乘積,并推廣之.

$$(1+ax)(1+a^2x)$$

$$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)$$

$$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)(1+a^4x)$$

7. 試用係數除法,求下各式之餘數.

$$(5x^5-2x^3+7x^2-x-9):(x-2)$$

$$(3x^4+2x^3-5x-11):(x+3)$$

$$(7x^5+4x^4-3x^2+2x-5):(3x+2)$$

8. 試定 m, 俾 $x^3-5x^2+7x+m-5$ 可爲 $x-4$ 除盡.

9. 試定 λ 及 μ, 俾

$$x^4+\lambda x^3+\mu x^2+x+\lambda$$

可爲 x^2+1 除盡.(宜參看 § 19.)

10. 設 $F(x)$, $f(x)$ 爲兩多項式, $R(x)$ 爲 f 除 F 之餘式;如 $f(a)=0$, 則 $F(a)=R(a)$.

應用
$$F(x)=2x^3-3x^2-2x+5$$
$$f(x)=x^2-4x-4$$
$$a=2(\sqrt{2}+1)$$

11. 求依 x 之遞增或遞減乘方展 $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$, 幷推廣之.

解法 命
$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$
先定 A, B 再分求 $\dfrac{A}{x-a}$ 及 $\dfrac{B}{x-b}$ 之展式.

12. 求分 $f=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ 爲壹次因子.

13. 同上 $f=x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

第三章 最高公約式及最低公倍式

§21. 最高公約式及最低公倍式 *H. C. F. and L. C. M.*

設有 $$(x-1)^2(x+1)(x^2+2x+3)=x^5+x^4-4x^2-x+3$$

或簡書爲 $$A^2\cdot B\cdot C=D$$

中 $$A=x-1,\qquad B=x+1,\cdots\cdots$$

A, B, C 謂之 D 式之因子. A 之次數爲 2, 而 B, C 之次數爲 1. A, B, C 等又謂之 D 之約式, 以 D 能爲各式所除盡也. 又

$A^2, A\cdot B, A^2\cdot B, A^2\cdot C, B\cdot C$ 等均爲 D 之約式.

設又有 $$A\cdot B^2\cdot A'\cdot B'^2=D'$$

中, 除 A, B 與前設相同外

$$A'=2-x$$

$$B'=x$$

$$D=-x^6+x^5+3x^4-x^3-2x^2$$

D' 之因子爲 A, B, A', B' 等. 亦稱約式.

就 D 及 D' 論. A, B 爲其公約式, 而 $A\cdot B$ 爲其最高公約式. $D\cdot D'$ 爲 D 及 D' 之公倍式, 而 $A^2\cdot B^2\cdot C\cdot A'\cdot B'^2$ 爲其最低公倍式.

如令 $\triangle$ 爲 D 及 D' 之最高公約式, 而 μ 爲其最低公倍式, 則

$$\mu=\frac{D\cdot D'}{\triangle}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

凡任與兩式,如能求得各式之一二次因子.則就兩式中取公因子之最低次數者聯乘卽得,此兩式之最高公約式.再用(1)求最低公倍式.如令

$$D=0$$

$$D'=0$$

則方程式　$$\triangle=0$$

之根爲上兩式之公根.

實際上D及D'之一二次因子,常不易得.則以下法求$\triangle$.

§ 22. 問題 設A, B爲兩順列遞減一元多項式;試求A, B之最高公約式.

如B能除盡A,則B卽爲A, B之最高公約式

如B不能除盡A,以B除之,得

$$A=B\cdot Q+R_1$$

R_1爲餘式,其次數比B之次數小.

余謂A, B之公因子,亦爲R_1之因子.蓋令

$$A=C\cdot A'$$

$$B=C\cdot B'$$

則　$$R_1=A-BQ=C(A'-B'Q)$$

卽C可除A, B時亦能除盡R_1也.於是欲求A, B之最高公約式,但求B及R_1之公約式卽可.以R_1除B.

設 R_1 能除盡 B, 則 R_1 卽 B 與 R_1 之最高公約式. 亦卽 A 與 B 之最高公約式也.

設 R_1 不能除盡 B, 令

$$B=R_1\cdot Q_1+R_2$$

同理 R_2 能除 R_1, 卽爲 R_2, R_1, 或 R_1, B 之最高公約式. 亦卽 A, B 之最高公約式. 否則, 令

$$R_1=R_2\cdot Q_2+R_3$$

由是展轉得

$$R_2=R_3\cdot Q_3+R_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_{h-1}=R_h\cdot Q_h+R_{h+1}$$

B, R_1, R_2, $\cdots\cdots R_{h-1}$ 爲多項式, 其次數爲遞減者, 至 R_{h+1} 爲常數時而止.

其一 $R_{h+1}\neq 0$, 則 R_h 不能除盡 R_{h-1}, 卽 R_{h-1} 與 R_h 無公約式. 以是遞推至 A, B, 此二式亦無公約式, 或云二式互爲壹式 *Prime to each other.*

其二 $R_{h+1}=0$ 則 R_h 能除盡 R_{h-1}, 而 R_h 卽爲 R_{h-1} 與 R_h 之最高公約式, 亦卽 A, B 之最高公約式也.

例 $$A=x^5-2x^4-8x^3+16x^2-16x-32$$

$$B=5x^4-8x^3-24x^2+32x+16$$

佈式如次:

	$x\quad -1$	$5x+2$
$5x^5-10x^4-40x^3+80x^2+80x-160$	$5x^4-8x^3-24x^2+32x+16$	x^3-2x^2-4x+8
$(5A)$	(B)	$(\triangle)$
$-2x^4-16x^3+48x^2+64x-160$	$2x^3-4x^2-8x+16$	
$(2C)$		
$-5x^4-40x^3+120x^2+160x-400$	0	
$(5C)$		
$-48x^3+96x^2+192x-384$		
$(-48\triangle)$		

準上
$$5A=B\cdot x+2C$$
$$5C=B(-1)-48\triangle$$
又
$$B=(5x+2)\triangle$$
於是
$$25A=\triangle(25x^2-100)$$
$$A=\triangle(x^2-4)$$
卽
$$A=(x^3-2x^2-4x+8)(x^2-4)$$
$$B=(x^3-2x^2-4x+8)(5x+2)$$
故 A, B 之最高公約式爲
$$\triangle=x^3-2x^2-4x+8$$

§ 23. 定理 如以一多項式 C 乘 A 及 B, 則新式之最高公約式爲 $\triangle\cdot C$. 如以 C 除, 則爲 $\dfrac{\triangle}{C}$.

定理 兩多項式爲其最高約式所除之得式, 互爲壹式, 轉言之亦可.

定理 如 C 能除盡 $A\cdot B$ 乘積, 則當 C 與任一式互爲壹式時, C 必能除盡他一式.

§24. 伯楚氏定理 *Bezout's Theorem* 如一 n 次多項式 A, 與一 p 次多項式 B 互爲壹式,則可求兩多項式 U, 其次數小於 p, 及 V 其次數小於 n, 俾有

$$AU+BV=1$$

證. 依 §22 $\qquad A=B\cdot Q+R_1$

於是 $\qquad R_1=A-B\cdot Q$

令 $\qquad U_1=1$

$$V_1=-Q$$

則 $\qquad R_1=AU_1+BV_1$

中 U_1 之次數爲零,而 V_1 之次數爲 $n-p$.

又 $\qquad R_2=B-R_1Q=B-(A-BQ)Q_1$

$$=A(-Q_1)+B(1+QQ_1)$$

令 $\qquad U_2=-Q_1$

$$V_2=1+QQ_1$$

於是 $\qquad R_2=AU_2+BU_2$

中 U_2 之次數爲 $p-p_1$. p_1 爲 R_1 之次數,而 V_2 之次數爲 $n-p_1$.

如是遞推至 $\qquad R_k=AU_k+BV_k$

U_k 之次數爲 $p-p_{k-1}$. 而 V_k 之次數爲 $n-p_{k-1}$. p_{k-1} 爲 R_{k-1} 之次數. p_{k-1} 至少必大於 1, 故 $p-p_{k-1}$ 至多爲 $p-1$, 而 $n-p_{k-1}$ 至多爲 $n-1$.

令 A, B 互爲壹式,最後所得餘數 R_{h+1} 必異於零.

$$R_{h+1}=AU_{h+1}+BV_{h+1}$$

以 R_{h+1} 除之,卽得

$$AU+BV=1$$

中 $$U=\frac{U_{h+1}}{R_{h+1}}, \qquad V=\frac{V_{h+1}}{R_{h+1}}$$

§25. 尤拉氏定理 Euler's Theorem 如 A, B 可公約,則可得 $$R_k=0$$

亦卽 $$AU_k+BV_k=0$$

或 $$AU+BV=0$$

故 如 A, B 可公約時,必可求 U 及 V 其次數各小 B 及 A 之次數,俾有

$$AU+BV=0$$

§26. 問題 設有 n 多項式 $A_1, A_2\cdots\cdots A_n$, 試求其公約式.

先求 A_1, A_2 之最高公約式,令爲 $\triangle_1$. 於是能約 $\triangle_1$ 者,亦能約 A_1 及 A_2. 故可求 $\triangle_1, A_3,\cdots\cdots A_n$ 之公約式.以是遞推至 $\triangle_{n-1}$ 及 A_n. 可馭以 §22 之法.如 n 式中任二式互爲壹式,則無公約式.設 $A_1, A_2,\cdots\cdots A_n$ 之公約式爲 $\triangle_n$, 則方程式

$$\triangle_n=0$$

之根,爲 $A_1=0,\ A_2=0\cdots\cdots A_n=0$ 諸式之公根.

例一 設
$$A=x^4+1$$
$$B=x^3-1$$

則
$$U=\frac{x^2-x+1}{2}$$
$$V=\frac{x^3-x^2+x+1}{2}$$

而
$$(x^4+1)\frac{x^2-x+1}{2}-(x^3-1)\frac{x^3-x^2+x+1}{2}=1$$

例二 設
$$A=x^4-1,\ B=x^3-1$$

則
$$U=x^2+x+1,\ V=-(x^3+x^2+x+1)$$

而
$$(x^4-1)(x^2+x+1)-(x^3-1)(x^3+x^2+x+1)=0$$

讀者可自證明之,以資練習.

第三章 練習題

1. 求下二式之最高公約式及最低公倍式:

$$x^8+x^7-2x^6-3x^5+2x^2-x-1$$
$$8x^7+7x^6-12x^5-15x^4+9x^2+4x-1$$

2. 試證方程式 $x^3-2x+3=0$ 之根,盡爲

$$x^5-x^3+3x^2-2x+3$$
$$x^4+x^3-2x^2+x+3$$

之公根.

3. 已與
$$A=x^4-x^3-7x^2+x+6$$
$$B=2x^4+5x^3-5x^2-5x+3$$

試求二最簡單多項式 U, V 俾有

$$AU+BV=0$$

4. 試求 x^n-1 及 x^p-1 之最高公約式.

幷證如 d 爲 n 及 p 之最高公約數,則 x^d-1 爲上二式之最高公約式.

5. 求

$$x^3+px+q=0$$

$$3x^2+p=0$$

有一公根之條件

答

$$4p^3+27q^2=0$$

6. 求定 p 及 q, 俾下二式

$$x^3-7x+p=0$$

$$x^4+3x^3-3x^2-11x+q=0$$

有二公根.

答 p, q 之整數解爲 $p=6$, $q=-6$

第四章 方根及指數運算

§27. 方根 Radical 方根略論,已見第一章§5.此章目的在表明指數運算仍與普通數運算相同.不及其數值求法,以實際上均用對數求之故也.見下章.

設 p 爲一正整數, a 爲任一正數,

則 $$a^p$$

爲 a 之 p 次乘方, p 謂之指數,而

$$\sqrt[p]{a}$$

爲 a 之 p 次根.設其値爲 α, 當有

$$\alpha^p=a$$

如 $p=1$, 則 $$\alpha^1=a$$

亦卽 $$\sqrt[1]{a}=\alpha$$

如 $p=2$, 則 $$\alpha^2=a$$

$$\alpha=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$$

根號 $\sqrt{\ }$ 卽表二次根.根號所係指數,稱示數.a 之三次根,書如 $\sqrt[3]{a}$, 餘類推.

如 a 爲負數,無論 p 爲奇爲偶, a^p 恒爲實數.而 $\sqrt[p]{a}$ 則當 p 爲奇數時爲實數;當 p 爲偶數時爲虛數.今爲便利計,凡根號內數,皆設爲正.

§28. 定理 已與 $\sqrt[m]{a^p}$ 如同以一數 q 乘指數及示數,其値不變.

即
$$\sqrt[mq]{a^{pq}}=\sqrt[m]{a^p}$$

證. 設 α 爲 a^p 之 m 次根.依定義

$$\alpha^m=a^p$$

兩端同乘 q 次,得

$$\alpha^{mq}=a^{pq}$$

故
$$\alpha=\sqrt[mq]{a^{pq}}$$

例如
$$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[2\cdot 3]{2^3}=\sqrt{2}$$

此法可應用以化簡根號式.

問題. 已與 $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[q]{c}$ 求化同其示數.如 m, p, q 兩兩互爲壹數,則用 $m\cdot p\cdot q$ 爲公示數,準上

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mpq]{a^{pq}}$$

故化同示數後,得

$$\sqrt[mpq]{a^{pq}},\ \sqrt[mpq]{b^{mq}},\ \sqrt[mpq]{c^{pm}}$$

此法可應用以比較根號式.如欲定 $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[q]{c}$ 之大小次第,但定 a^{pq}, b^{mq}, c^{pm} 之大小次第可已.

例. 求定 $\sqrt[3]{3}$ 及 $\sqrt{2}$ 之大小次第.

因 $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$, $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$

而
$$9>8$$

故
$$\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$$

如 m, p, q 不互爲壹數,則可以其小公倍數爲公示數.

§ 29. 定理 一乘積之m次根,等於各因子m次根之乘積.

即 $$\sqrt[m]{abc}=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}$$

證 設 α, β, γ 爲 a, b, c 之 m 次根,

則 $$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^m=\alpha^m\cdot\beta^m\cdot\gamma^m=abc$$

故 $$\sqrt[m]{abc}=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}$$

在除法亦有同樣定理.

即 $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

應用 $$\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{2^3\times 7}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{7}=2\sqrt[3]{7}$$

§ 30. 根號式之乘方及方根 Powers and Roots of Radicals 余謂

$$(\sqrt[m]{a})^p=\sqrt[m]{a^p}$$

蓋 $$(\sqrt[m]{a})^p=\underbrace{\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\cdots\times\sqrt[m]{a}}_{p\text{ 因子}}=\sqrt[m]{\underbrace{a\times a\cdots\times a}_{p\text{ 因子}}}=\sqrt[m]{a^p}$$

又 $$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mp]{a}$$

蓋令 $\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}=\alpha$, 則

$$\sqrt[m]{a}=\alpha^p$$

而 $$a=\alpha^{mp}$$

故 $$\alpha=\sqrt[mp]{a}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}$$

依乘法之可易性,亦有

$$\sqrt[mp]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}$$

推廣之,則有　$\sqrt[m]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}}}=\sqrt[mpqr]{a}$

§31. 不盡根 Surds　凡整數分數之整數乘方,均為有理數;而不盡根如 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$ 等,別成一類,謂之無理數.計算時,不能雜糅.例如 a, b, c, d 均為有理數, x 為無理數,欲

$$a+bx=c+dx$$

必 $a=c,\ b=d$ 乃可.否則

$$x=\frac{a-c}{d-b}$$

是 x 等於一有理數矣,與原設 x 為無理數者不合.

問題　已與兩有理數 a, b, 而 b 非整方;試求兩正有理數 x, y, 俾有

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

解　將兩端平方之,得

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$$

因 $\sqrt{b}$ 為無理數,故應有

$$x+y=a$$

$$4xy=b$$

由此得　$(x+y)^2-4xy=a^2-b$

亦卽　$(x-y)^2=a^2-b$

如 a^2-b 不為整方,則此問題為不可能; a 不為正,亦不可能,因 $x+y$ 為正故也.如 a 為正, a^2-b 又為整方;令為

c^2, 則有

$$x+y=a$$

$$x-y=c$$

於是 $$x=\frac{a+c}{2},\quad y=\frac{a-c}{2}$$

亦即 $$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},\quad y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} \quad \cdots\cdots(1)$$

故 $$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

同理 $$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

例 試證 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 爲一整數.

此時 $$a^2-b=49-48=1$$

於是 $$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}}=2+\sqrt{\frac{6}{2}}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

而 $$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

相加,得 $$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=4$$

§ 32. 依 § 17, x^n-y^n 能爲 $x-y$ 除盡. 且

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

令 $$x^n=a$$

$$y^n=b$$

則
$$x=\sqrt[n]{a}$$
$$y=\sqrt[n]{b}$$

而上式變爲
$$a-b=(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots$$
$$+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})$$

特例. $n=2$, 則
$$a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$n=3$, 則
$$a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

右端之第二因子,能將第一因子乘成有理式,謂之補充式.

應用　已與
$$f=\frac{P}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$$

求將此式分母化爲有理式.

以 $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ 之補充式 c 乘 f 之上下項,卽得
$$f=\frac{P\cdot C}{a-b}$$

問題　已與
$$f=\frac{P}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

求將其分母化爲有理式.

令
$$Q=\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

再以 $\sqrt{a}-Q$ 乘 f 之上下項,得

$$f=\frac{P(\sqrt{a}-Q)}{a-Q^2}=\frac{P'}{a-(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}$$

$$=\frac{P'}{a-b-c-2\sqrt{bc}}$$

又以 $a-b-c+2\sqrt{bc}$ 乘其上下項,得

$$f=\frac{P''}{(a-b-c)^2-4bc}$$

此法可推之於

$$f=\frac{P}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\cdots\pm\sqrt{e}}$$

特例. 已知 $ab=cd$, 試將 $f=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ 之分母化爲有理式.

以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d})$ 乘 f 之上下項,得

$$f=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}}{a+b-c-d+2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}}{a+b-c-d}$$

§ 33. 分數指數與負數指數 Fractional and Negative Exponents

余在 § 5. 曾言 $\sqrt[m]{a}$ 又可書爲 $a^{\frac{1}{m}}$.

依 § 28 $\qquad \sqrt[m]{a}=\sqrt[mp]{a^p}$

即 $$a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{p}{m\cdot p}}$$

故指數 $\frac{1}{m}$ 亦可以一數乘其上下項,如分數然.

又 $$(\sqrt[m]{a})^p=(a^{\frac{1}{m}})^p$$

即 $$\sqrt[m]{a^p}=a^{\frac{p}{m}}$$

余謂 $$a^{\frac{p}{m}}\times a^{\frac{p'}{m'}}=a^{\frac{p}{m}+\frac{p'}{m'}}=a^{\frac{pm'+p'm}{mm'}}$$

蓋 $$a^{\frac{p}{m}}\times a^{\frac{p'}{m'}}=\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[m']{a^{p'}}=\sqrt[mm']{a^{pm'}}\times\sqrt[mm']{a^{p'm}}$$

$$=\sqrt[mm']{a^{pm'+p'm}}=a^{\frac{pm'+p'm}{mm'}}$$

同理 $$a^{\frac{p}{m}}:a^{\frac{p'}{m'}}=a^{\frac{p}{m}-\frac{p'}{m'}}=a^{\frac{pm'-p'm}{mm'}}$$

又有 $$(a^{\frac{p}{m}})^{\frac{p'}{m'}}=a^{\frac{pp'}{mm'}}$$

準 §5 $$\frac{1}{a^m}=a^{-m}$$

施以負數運算均合.如

$$(a^{-m})^{-1}=a^m$$

因 $$(a^{-m})^{-1}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{a^m}}=a^m$$

故也.

第四章 練習題

1. 試證 $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ 與 $\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 相等.

2. 試解方程式 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$.

答 $$x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1} \qquad (b>1)$$

3. 試解 $$2x+2\sqrt{a^2+x^2}=-\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

答 $$x=\frac{3}{4}a$$

4. 求將下各式之分母化爲有理數.

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\ \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{4}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$$

5. 試定下三數之大小次第

$$\sqrt[4]{8},\ \sqrt[7]{32}\ \sqrt{2},\ \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}$$

6. 試化簡下二式.

$$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1),\ \sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})$$

7. 試求下二式之值.

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$$

解法 令 x 爲值三方之再求其整數根.

第五章 對數特性及其運用

§ 34. 對數定義 *Definitions of Logarithms* 設有

$$a^x = N$$

中 a, N 均爲正數.

依定義, x 爲 N 之對數 *Logarithm*. a 爲基 *Base*; 換言之,如將基 'x 方之', 則得 N 也.

以符號表之,爲 $x = log_a N$

卽 x 爲 a 基對數中 N 之對數.

$a = 10$ 者,稱普通對數,卽常用之對數 *Common Logarithm*; $a = e$ 者,稱納氏對數 *Napier Logarithms*.

設有 n 個正數因子 $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$ 在 a 基之對數各爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$.

則乘積 $P = y_1 \cdot y_2 \cdots\cdots y_n$ 之對數,等於各因子對數之和,卽

$$log_a (y_1 \cdot y_2 \cdots y_n) = log_a y_1 + log_a y_2 + \cdots + log_a y_n$$

蓋依定義 $y_1 = a^{x_1}$; $y_2 = a^{x_2}, \cdots\cdots y_n = a^{x_n}$

聯乘之,得 $P = a^{x_1} \times a^{x_2} \times \cdots \times a^{x_n} = a^{x_1 + x_2 + \ldots x_n}$

於是 $log_a P = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n$

卽 $log_a (y_1 \cdot y_2 \cdots\cdots y_n) = log_a y_1 + log_a y_2 + \cdots\cdots + log_a y_n \cdots\cdots (1)$

故一乘積之對數,等於其因子對數之和.

余謂 $log_a \left(\frac{y_1}{y_2} \right) = log_a y_1 - log_a y_2$

蓋依定義, $y_1=a^{x_1},\ y_2=a^{x_2}$

相除,得 $\dfrac{y_1}{y_2}=a^{x_1-x_2}$

於是 $log_a\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)=x_1-x_2=log_a y_1-log_a y_2 \cdots(2)$

推廣之. $$log_a\left(\frac{y_1\cdot y_2\cdots y_n}{z_1\cdots\cdots z_p}\right)=log_a y_1+\cdots+log_a y_n-log_a z_1$$

$$-\cdots-log_a z_p\cdots\cdots\cdots(3)$$

余又謂 $log_a(y_1)^m=m\,log_a y_1$

蓋 $y_1=a^{x_1}$

'm 方之',得 $(y_1)m=a^{mx_1}$

於是 $log_a(y_1)^m=mx_1=m\,log_a y_1$

同理,易得 $log_a\sqrt[p]{(y_1)^m}=\dfrac{m}{p}log_a y_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

合上結果,則有

$$log\frac{\sqrt[\alpha]{y_1{}^{\beta}}\times\sqrt[\gamma]{y_2{}^{\delta}}\cdots}{\sqrt[\lambda]{z_1{}^{\mu}}\times\cdots\cdots\cdots}=\frac{\beta}{\alpha}log\,y_1+\frac{\delta}{\gamma}log\,y_2\cdots-\frac{\mu}{\lambda}log\,z_1-\cdots$$

§ 35. 已知一數 N, 在 a 基之對數爲 x; 在 b 基之對數爲 y. 則

$$N=a^x=b^y$$

於是 $x=y\times log_a b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$y=x\times log_b a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

因 $log_a b$, $log_b a$ 均爲常數 (5), (6) 式表明知 y, 卽可求 x; 或知 x, 亦可求 y.

且有 $\log_a b \times \log_b a = 1$ (5)×(6)

§ 36. 指數方程式解法 設

$$a^x = b$$

則

$$x \log a = \log b$$

亦卽

$$x = \frac{\log b}{\log a}$$

此時對數之基爲任何數皆可.

推廣之,亦可解方程式

$$a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n^{x}}}}}} = b$$

§ 37. 對數之運用 普通所用對數,其基爲10.自本節以下,皆用10－基對數,小數至第五位止者.

試列下表:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5

上爲等差級數下爲等比級數.

－1 爲 0,1 之對數,而 0,1 之對數爲 －1.

0 ,, 1 ,, ,, ,, 而 1 ,, ,, ,, ,, 0

1 ,, 10 ,, ,, ,, 而 10 ,, ,, ,, ,, 1

2 ,, 100 ,, ,, ,, 而 100 ,, ,, ,, ,, 2

餘類推.

於是一數之介於10及100之間者,其對數則介於1及2

之間,即等於 $1+d$, d 爲一小數,且爲正.

一數之介於 $\frac{1}{1000}$ 及 $\frac{1}{100}$ 之間者,其對數則介於 -3 及 -2 之間,或爲 $\bar{3}+d'$. $\bar{3}$ 即 -3 而 d' 爲一小數,且爲正.

推廣言之,任一數之對數,皆含兩部:一爲整數部 C,可正可負,謂之定位部 *Characteristic*; 一爲小數部 M,恒爲正,謂之定值部 *Mantissa*.

C 所以稱定位部者,以知 $C=2$, 則知其數必有三位;而 $C=n$, 則有 $n+1$ 位.如知 $C=-3$, 則數於小數點後尙有兩 0; 而 $C=-n$, 則於小數點後尙有 $(n-1)$ 個 0.

M 所以稱定值部者,以同數字之對數,其小數部 M 恒同也.

列如 0,42 之定值部與 42 同,因

$$\log 0{,}42=\bar{1}+M$$

而

$$42=0.42\times 100=0.42\times 10^2$$

取其對數

$$\begin{aligned}\log 42&=\log 0{,}42+2\\&=\bar{1}+M+2\\&=1+M\end{aligned}$$

§ 38. 問題 已與一數 N,試求其對數.

余設所用之表,爲由一至萬者.如 N 之數字僅有四,則其小數部或定值部可於表得之.設

$$N=427{,}3$$

則 $C=2$

次求 4273 之定值部,

$$M=63073$$

於是 $$\log 427{,}3=2{,}63073$$

如 N 有五字, 設

$$N=427.35$$

此時 C 仍爲 2, 而介於 4273 及 4274 之定值部之間.

今 $$4273\text{ 之定值部 } M'=63073$$

$$4273\ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ M''=63083$$

$$\triangle=M''-M'=10$$

卽數增一單位,而定值部增 10;而數增 .5, 則定值部所增者, 爲

$$.5\times10=5$$

卽 $$\log 427{,}35=2.63078$$

也,於是 $$\log 42735=4{,}63078$$

$$\log 0{,}0042735=\bar{3}{,}63078$$

餘類推

§ **39. 問題** 已知一數之對數, 求此數.

其一, 如所與對數在表內,則直書之. 如與

$$2{,}48756$$

48756 所對之數爲 3073, 因 $C=2$, 故有

$$2{,}48756=\log 307.3$$

卽其數爲 307.3

其二,所與對數不在表內,設爲

$$0,31715$$

由表內得 31702 與 31715 相距最近, 31702 所對者爲 2075, 而 2076 所對者爲 31723, 於是

$$\triangle = 31723 - 31702 = 21$$

$$\triangle' = 31715 - 31702 = 13$$

於是得
$$\frac{21}{1} = \frac{13}{x}$$

$$x = 0,62$$

而所求數爲 207562

因 $C=0$ 故 $\log 2.07562 = \bar{1},31715$

卽其數爲 2,07562

實際上佈算如下, $\triangle = 21$

	$\log x = \bar{1},31715$			
	702	對	2075	
第一次較	13			
	12,6		0,6	$(6 \times 21 = 126)$
第二次較	0,4			
	0,42		0.02	$(2 \times 21 = 42)$
			$x = 2075\,62$	

12.6 卽 21 之最大倍數可含於 13 者, 0,42 爲 21 之倍數與 0,4 最近者.

§ 40. 能解決上二問題,卽可運用對數.但結果之精密程度,爲表所限制;故精密計算,必用詳表.

問題一 已與 $\pi=3,1415926\cdots\cdots$

$A=56.2857642\cdots\cdots$

求其積 $\log(\pi A)=\log\pi+\log A$

$\log\pi$ 之計算			$\log A$ 之計算		
	$\triangle=14$			$\triangle=8$	
3141	49707		5628	75035	
5	7	$(0.5\times\triangle)$	5	4	$(0.5\times\triangle)$
9	1.26	$(0.09\times\triangle)$	7	0,56	$(0,07\times\triangle)$
$\log\pi=0.49715$			$\log A=1,75040$		

$\triangle=14$ 爲 3142 與 3141 對數之較 | $\triangle=8$ 爲 5629 與 5628 對數之較

取 π 自 9 以下與第五小數無關,故棄之.於 A 亦然.

$$\begin{aligned} \log\pi&=0.49715 \\ +\log A&=1.75040 \qquad \triangle=25 \\ \hline \log(\pi A)&=2.24755 \end{aligned}$$

48	對	1768
差 7		
5		2
差 2		8
		176828

故 $\pi A=176.828$

§ 41. 問題二 試求

$$x=\sqrt{1-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4\pi}}$$

$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ 之計算

$log\,3=0.47712$

$log\sqrt{3}=0.23856$

$-log\,4=\bar{1}.39794$ †

$-log\,\pi=\bar{1}.50285$ †

$log\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}=\bar{1}.61647$ $\triangle=11$

$\frac{37}{10}$ 對 4134 9

$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}=0.41349$

$1-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}=0.58651$

x 之計算

$\triangle=7$

5865 76827

1 0.7

$log\,x^2=\bar{1}.76828$

$log\,x=\bar{1}.88414$ * $\triangle=5$

$\frac{2}{2}$ 對 7658 4

$x=0.76584$

故 $$\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}=0.76584$$

† 附註一. $-log\,4=-60206=\bar{1}+1-60206$

$=\bar{1}.39794$

$-log\,\pi$ 亦然.

* 附註二. $log\,x=\frac{1}{2}\,log\,x^2=\frac{1}{2}\times\bar{1}.76828$

$=\frac{1}{2}\times(\bar{2}+1.76828)$

$=\bar{1}.88416$

§ 42. 試解方程式:

$$\left.\begin{aligned} x^y &= y^x \\ x^p &= y^q \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$p>q$, 且均爲正.

(7) 式亦可書

$$\left.\begin{aligned} y \log x &= x \log y \\ p \log x &= q \log y \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

由(8)式得

$$\frac{x}{q}=\frac{y}{p}$$

或 $$\log y-\log x=\log\frac{p}{q} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

就(8)之第二式及(9)解之,得

$$\log x=\frac{q \log \frac{p}{q}}{p-q}$$

$$\log y=\frac{p \log \frac{p}{q}}{p-q}$$

或 $$\log\log x=\log q+\log\log\frac{p}{q}-\log(p-q)$$

$$\log\log y=\log y+\log\log\frac{p}{q}-\log(p-q)$$

如 $p=4,5783 \qquad q=1,7598$

則 $x=1,8167 \qquad y=4,7264$

讀者可自求,以資練習.

第五章 練習題

1. 試用對數求 $\dfrac{1}{\pi}$ $(\pi=3{,}1415926\cdots\cdots)$

答 $\dfrac{1}{\pi}=0{,}318308$

2. 試用對數求 $\dfrac{e^2}{\pi}$, $\dfrac{e\sqrt{2}}{\pi^3}$

$$e=2{,}71828\cdots\cdots$$

答 $\dfrac{e^2}{\pi}=2{,}35195$, $\dfrac{e\sqrt{2}}{\pi^3}=0{,}123983$

3. 試用對數求 $\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$ 中

$a=0{,}278592$, $b=3{,}654786$, $c=11{,}74826$

答 $\sqrt{\dfrac{ab}{c}}=0{,}294393$.

4. 試求對數求 $x=\dfrac{(a\pi+b)^2}{\sqrt{2\sqrt{3+c}}}$

中 $a=0{,}11702$, $b=1{,}43115$, $c=5{,}01264$

答 $x=1{,}11136$

5. 試求 $x=\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b}}}{\sqrt[5]{c\cdot d^3}}$

中 $a=234{,}75$, $b=34{,}228$, $c=78{,}543$, $d=0{,}28314$

答 $x=152{,}421$

第二篇

代數推廣之方法

上篇所論者,屬代數基本運算,爲解方程式所必需者也;中除負數及虛數,別有新律以支配之外,餘均與算術運算同.不有負數,虛數,則公式不普通;不有公式,則推算結果無存.是代數卽算術之推廣也.牛頓氏稱代數爲"普徧算術",厥爲確論.此篇所論者,又爲代數之推廣:如二項$(a+b)^n$展式,爲$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$之推廣;行列式爲解壹次聯立式推廣之利器,施偉士特 *Sylvester* 稱行列式爲"代數之代數",卽此意也.級數則所以立推廣倚數之基者,今分四章論之.

第六章　列字分析,二項式展式

§43. 列字分析 *Combinatory Analysis* 取n個不同之字,如將各字次第變換,所成各羣,謂之此n字之互換式 *Permutation*;所有互換式總數,謂之互換數.於是n字之任二互換式中,必至少有二字位置變易,以一字必與他一字對換故也.n字之互換數以P_n代之.

於n字中任取p字而互換之,謂之n字之p-個錯列式 *Arrangement*;所有錯列式總數,謂之n字之p-個錯列數,

以 A_n^p 代之. $p<n$ 依定義 $A_n^n=P_n$. 在 A_n^p 中,凡 p 字所成互換數合爲一組.任取其一,謂之組合式 *Combination.* n 字所成 p- 個組合總數,謂之 n 字 p- 個組合數,以 C_n^p 代之.於是任二組合式必至少有一字不同.

§ 44. 問題一 求 n 字之互換數 (字各不同)

設已得 $(n-1)$ 字之互換數 P_{n-1}; 任取其一式,以所遺之字加諸其首或尾,或二連續字間隔之內,得 $2+(n-2)=n$ 互換式;取 P_{n-1} 所有式,則得 $n\cdot P_{n-1}$ 互換式.余謂依此法所得互換式,卽 n 字所有之互換式,無重複,亦無遺漏.

其一. 無重複:設任取二 n 字互換式;如其由同一 $(n-1)$ 字互換式得者,則所加之字位置不同.如其由二不同 $(n-1)$ 字互換式所成,則所加之字在同一位置,其式亦異;加於不同位置,更無論矣.故曰,無重複.

其二. 無遺漏:將各式所加之字減去,應得 P_{n-1} 之各式.如未全得,則原設 P_{n-1} 之式已取盡.故曰,無遺漏.

於是 $$P_n=nP_{n-1}$$

陸續得 $$P_{n-1}=(n-1)P_{n-2}$$

$$P_{n-2}=(n-2)P_{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_3=3P_2$$

$$P_2=2P_1$$

$$P_1=1$$

將各式相乘,得

$$P_n \quad =1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n=n! \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

故 n 字之互換數等於 n 之聯乘積

§ 45. 問題二 求 n 字之 p- 個錯列數.

設已得 A_n^{p-1}: 將所餘之 $(n-p+1)$ 字,逐一加於任一式之後,可得 $(n-p+1)p$- 個錯列式.盡取 A_n^{p-1} 之式而施以此法,則盡得 n 字 p- 個錯列式.余謂所得之式,無重複,亦無遺漏.

其一. 無重複:因 A_n^p 中之式由 A_n^{p-1} 加所餘 $(n-p+1)$ 之一字而成;如所取 A_n^{p-1} 中之式同,則末一字不同;如所取 A_n^{p-1} 中之式不同,則所成 A_n^p 之二式,至少有一字不同.故曰,無重複.

其二. 無遺漏:任取一 p- 個錯列式,將其末字取消,應得 A_n^{p-1} 中之一式.但成 p- 個錯列式時,已將其餘之 $(n-p+1)$ 各字加入矣.故曰,無遺漏.

於陸續有

$$\begin{aligned}
A_n^p \quad &=(n-p+1)\,A_n^{p-1}\\
A_n^{p-1} &=(n-p+2)\,A_n^{p-2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_n^2 \quad &=(n-1)\,A_n^1\\
A_n^1 \quad &=n
\end{aligned}$$

各式相乘,得

$$A_n^p \quad =n(n-1)\cdots(n-p+1)\cdots\cdots (2)$$

故 n 字 p- 個錯列數,等於自 n 起之 p 個遞減整數之聯乘積.

§ 46. 問題三 求 n 字 p- 個組合數

因 C_n^p 之一組,可變爲 $p!$ 個 n 字 p- 個錯列式.故

$$p!\,C_n^p = A_n^p$$

即

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots p} \quad \cdots(3)$$

上下以 $(n-p)!$ 乘之,得

即

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_n^{n-p} = \frac{n(n-1)\cdots(p+1)}{(n-p)!}$$

上下以 $p!$ 乘之,得

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

故

$$C_n^p = C_n^{n-p} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

例如

$$C_{13}^{11} = C_{13}^{2} = \frac{13\cdot 12}{1\cdot 2} = 78$$

§ 47. 問題一 十二人排隊,有若干不同式?

答 可排 $P_{12} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$

$$= 479001600 \text{ 式}$$

設每分鐘排畢一式,每日排十二鐘,一年以三百六十日計,則須一千八百四十八年,乃可排畢!

問題二. 就五十二張牌中,可取若干次五張異樣者?

答. 可取 $$C_{52}^5=\frac{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=2598960\text{ 次}$$

卽就五十二張中,可取二百五十九萬八千九百六十次不同樣者!

§48 定理 n 字之 p- 個組合數,等於 $(n-1)$ 字之 p- 個組合數,及 $(n-1)$ 字之 $(p-1)$- 個組合數之和.

證. $$C_{n-1}^p=\frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}=\frac{(n-1)!\times(n-p)}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}=\frac{(n-1)!\times p}{p!\,(n-p)!}$$

相加,得 $$C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}=\frac{(n-1)!\,(n-p+p)}{p!\,(n-p)!}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=C_n^p$$

故 $$C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}=C_n^p\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

§49. 重複錯列 Arrangement with Repetition 於 n 不同字中,取 p 個字或有同者,或不同者,而錯列之,俾其所有羣之任二式;同字者,則次序異,或字不盡同;且每字至多可重複至 p 次,則所得之式,謂之重複錯列式. 例如用 a, b, c 三字可成 2- 個之重複錯列式,爲

$$aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc.$$

令 a_n^p 爲 n 字之 p- 個重複錯列數, 余謂

$$a_n^p=n\cdot a_n^{p-1}$$

設已成 a_n^{p-1}, 取其所有各式,於其後逐一加入 n 字之一, 則得 $n\cdot a_n^{p-1}$ 數 p- 個重複錯列式, 中無一式遺漏, 亦無二式重複, 故

$$a_n^p=n\cdot a_n^{p-1}$$

陸續得

$$a_n^{p-1}=n\cdot a_n^{p-2}$$

$$a_n^{p-2}=n\cdot a_n^{p-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n^1=n$$

兩端各項相乘, 得

$$a_n^p=n^p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

令 $p=n$ 則得重複互換數爲

$$a_n^n=n^n$$

§ 50 n 不盡同字之重複互換數 令此數爲 P 如 n 字中 a 之數爲 α, b 之數爲 β, ……l 之數爲 λ, 余謂

$$P_n=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\cdots\cdots\lambda!}$$

因 P_n 中有 $\alpha\cdot a$ 字, 其所佔不同位置數爲 C_n^α.

其餘之 $n-\alpha$ 字中, 有 $\beta\cdot b$ 字, 其所佔不同位置數爲 $C_{n-\alpha}^\beta$.

同理 c 字所佔數爲 $C_{n-\alpha-\beta}^\gamma$.

最後 l 之數爲 $C_{\lambda}^{\lambda}=1$

於是 $$C_n^{\alpha}\times C_{n-\alpha}^{\beta}\times C_{n-\alpha-\beta}^{\gamma}\times\cdots\times C_{\lambda}^{\lambda}=P_n$$

亦卽 $$\frac{n!}{\alpha!\,(n-\alpha)!}\times\frac{(n-\alpha)!}{\beta!\,(n-\alpha-\beta)!}\times\frac{(n-\alpha-\beta)!}{\gamma!\,(n-\alpha-\beta-\gamma)!}\times\cdots\cdots$$

$$\times\frac{\lambda!}{\lambda!}=P_n$$

化簡,得 $$P_n=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\lambda!}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

§51. 重複組合式 *Combination with Repetition*

於 n 不同字中,取 p 字組合之,每字可重複至 p 次,所成各式,謂之 n 字 p- 個重複組合式.

例如二字 a, b 所成之 3- 個重複式爲

$$aaa,\quad aab,\quad abb,\quad bbb$$

故此時 p 可大於 n.

令 K_n^p 爲 n 字之 p- 個重複組合數,欲求 K_n^p,假設已成 K_n^p 各式,繼用兩種方法,求所含一字之數.

其一. 在 K_n^p 表中各字之數相等,其字數總數爲 $p\cdot K_n^p$,因共有 n 字,故表中所含 a 字之數,爲

$$\frac{p}{n}K_n^p$$

其二. 將 K_n^p 表中所有含 a 字者各去一 a 字,則得 K_n^{p-1} 式,卽去 a 字之數爲 K_n^{p-1},在 K_n^{p-1} 表中尚有 $\dfrac{p-1}{n}K_n^{p-1}$ a 字.

故 $$\frac{p}{n}K_n^p=K_n^{p-1}+\frac{p-1}{n}K_n^{p-1}$$

卽 $$K_n^p=\frac{n+p-1}{p}K_n^{p-1}$$

陸續得 $$K_n^{p-1}=\frac{n+p-2}{p-1}K_n^{p-2}$$

$$K_n^{p-2}=\frac{n+p-3}{p-2}K_n^{p-3}$$

……………………………

$$K_n^2=\frac{n+1}{2}K_n^1$$

$$K_n^1=n$$

兩端各相乘,得

$$K_n^p=\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+p-1)}{p!}$$

$$=C_{n+p-1}^p \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

§ 52. 用乘法易求得

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

令 $a=b$, 則 $$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

又 $$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

試推廣以求下 n 因子之乘積:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+l)$$

令依 x 之遞減乘方順列之.

欲得 x^n，當於每因子中取 x 而聯乘之，此種取法只有一，故首項爲 x^n.

欲得 x^{n-1}，當於 $n-1$ 因子中取 x，餘一項取 a，或 b,…或 l 聯乘後相加，故其係數爲 $(a+b+c+\cdots\cdots+l)=\Sigma a$.

同理 x^{n-2} 之係數，爲 Σab. 卽 n 字 2- 個之組合式之和.

公項 x^{n-p} 之係數，爲 n 字 p- 個組合式之和.

末項爲 $$abc\cdots\cdots l$$

如令 $$a=b=c=\cdots\cdots=l$$

則 p- 個組合式均變爲 a^p，且其數適等於 C_n^p.

於是
$$(x+a)^n=x^n+C_n^1\,ax^{n-1}+C_n^2\,a^2\,x^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$+C_n^p\,a^p\,x^{n-p}+\cdots\cdots+a^n\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

以 $-a$ 易 a，則有
$$(x-a)^n=x^n-C_n^1\,ax^{n-1}+C_n^2\,a^2\,x^{n-2}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^p\,C_n^p\,a^p\,x^{n-p}+\cdots\cdots+a^n\cdots\cdots(10)$$

此卽二項式之普通展式也(*Binomial Theorem*).

在(9)式中令 $x=a=1$，則有
$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^p+\cdots\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$$

中 $C_n^0=C_n^n=1$

或 $$2^n-2=C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^{n-1}$$

在(10)式中，如令 $x=a=1$，則有
$$0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots\cdots(-1)^pC_n^p+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^n\,C_n^n$$

於是 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots\cdots$

§ 53. 更推廣以求

$$(a+b+c+\cdots\cdots+l)^n$$

之展式.

此展式公項之形,爲

$$A\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\cdots\cdots l^{\lambda}$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\lambda=n$$

已知 $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$, 試定 A 令

$$b+c+d+\cdots\cdots+l=x$$

則 $$(a+b+c+\cdots\cdots+l)^n=(a+x)^n$$

在此式中 a^{α} 之係數爲 $C_n^{\alpha}\,x^{n-\alpha}$

再展 $x^{n-\alpha}$ 卽

$$(b+c+d+\cdots\cdots l)^{n-\alpha}$$

此展式中 b^{β} 之係數爲 $C_{n-\alpha}^{\beta}\,y^{n-\alpha-\beta}$

中 $$y=c+d+\cdots\cdots+l$$

依此類推,則

$$A=C_n^{\alpha}\times C_{n-\alpha}^{\beta}\times C_{n-\alpha-\beta}^{\gamma}\times\cdots\cdots\times C_{\lambda}^{\lambda}$$

$$=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\lambda!}$$

例. 求 $(2+3x+4x^2)^8$ 展式中 x^5 之係數

準上,得 $$\frac{8!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}2^{\alpha}.3^{\beta}.4^{\gamma}\,x^{\beta+2\gamma}$$

應有
$$\alpha+\beta+\gamma=8$$
$$\beta+2\gamma=5$$
其正整數解為 3, 5, 0; 4, 3, 1; 5, 1, 2.

故其係數為
$$\frac{8!}{3!5!}2^3\cdot3^5+\frac{8!}{4!3!}2^4\cdot3^3\cdot4+\frac{8!}{5!2!}2^5\cdot3\cdot4^2=850,752$$

第六章 練習題

1. 試證 $C_n^p=C_{n-1}^{n-1}+C_{n-2}^{n-1}+\cdots\cdots C_p^{n-1}+C_{p-1}^{p-1}$

2. 試證 $A_8^6=4P_7$

$A_{16}^3=2A_8^4$

3. 已與 n 點同在一平面上者;兩兩盡數連之,求所成直線之交點.

4. 如令 $S_1=1+2+3+\cdots\cdots+n$

$S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$S_n=1^n+2^n+3^n+\cdots\cdots+n^n$

求 $S_1,\ S_2,\cdots\cdots S_n$

解法. 可應用二項式展式.

5. 求 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots n(n+1)$

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$

6. 求 $\Sigma(n+a)(n+b)(n+c)$

$n=1,2,3,\cdots\cdots n$

第七章 行列式

§54. 行列式 <u>*Determinant*</u> 取四字 a_1, a_2, b_1, b_2 依兩行排齊,得表如

$$\begin{array}{cl} \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{一列} \\ \rightarrow \text{二列} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\ \downarrow & \downarrow \\ \quad\ \text{一行} & \text{二行} \end{array} & \end{array}$$

或依兩列排,得表如

$$\delta'=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

δ 或 δ' 謂之行列式,每字謂之元.

每行每列僅取一字,以所得各字聯乘之,此各乘積之代數和,謂之行列式之展式.

如 δ 之兩項,爲(先取一行之元)

$$a_1\,b_2 \qquad a_2\,b_1$$

δ' 之兩項爲 $\qquad a_1\,b_2 \qquad b_1\,a_2$

δ 中第二項元之指數次序爲21,反其大小次序,謂之逆式(*Inversion*).依定義,項之有逆式者,冠以負號.於是

$$\delta=a_1\,b_2-a_2\,b_1$$

δ' 中各項指數均無逆式,惟第二項字母次第爲 ba,成一逆式,故應冠以負號,卽

$$\delta'=a_1 b_2-b_1 a_2$$

但 $$a_2 b_1=b_1 a_2$$

故 $$\delta=\delta'$$

卽在一行列式中,如將行作列,或將列作行,并無區別.

δ有四元,每項均爲二次式,故δ謂之四元行列式,亦稱二次行列式.如取元相乘以成項時,恒按行之次第取,則項數等於指數之互換式,卽P_2也;依列取之,則爲字之互換數,亦等於P_2.

§ 55. 推廣之,如有九元$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$排成方式如次:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

依定義,δ之展式爲

$$\delta=\Sigma \pm a_\alpha\ b_\beta\ c_\gamma$$

$\alpha\beta\gamma$爲1,2,3三字之任一互換式,因三字互換式有六,卽

123 132, 213, 231, 312, 321

故 $$\delta=+a_1b_2c_3\pm a_1b_3c_2\pm a_2b_1c_3\pm a_2b_3c_1\pm a_3b_1c_2\pm a_3b_2c_1$$

今試依下法定各項之號:凡互換式之逆式爲雙數者,冠以加號(零爲雙數);互換式之逆式爲單數者,冠以減號.

$+a_1\ b_2\ c_3$	無逆式
$-a_1\ b_3\ c_2$	1 逆式 (32)

$$-a_2\, b_1\, c_3 \qquad 1\text{ 逆式 }(21)$$

$$+a_2\, b_3\, c_1 \qquad 2\text{ 逆式 }(21,31)$$

$$+a_3\, b_1\, c_2 \qquad 2\text{ 逆式 }(31,32)$$

$$-a_3\, b_2\, c_1 \qquad 3\text{ 逆式 }(32,31,21)$$

故 $\delta=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$

更推廣之,如令

$$\delta\begin{vmatrix} a_1 & b_1\cdots\cdots l_1 \\ a_2 & b_2\cdots\cdots l_2 \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_n & b_n\cdots\cdots l_n \end{vmatrix} \to n\text{ 列}$$

$$\downarrow\ n\text{ 行}$$

依定義 $\delta=\Sigma(-1)^i a_\alpha b_\beta\cdots\cdots l_\lambda$

$\alpha\beta\cdots\lambda$ 爲 $12\cdots n$ 之任一互換式,i 爲其逆式之數,因 n 字之互換數爲 $n!$ 故 δ 有 $n!$ 項.

§56. 逆式與雙誌元 Inversion, Elements with Double Index

今任取一互換式,余謂任以其二字互易,則互換式之類必變.

葢設有互換式

$$PaQbR\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

P 代表 p 字在 a 前者,Q 代表 q 字介於 ab 之間者,R 代表 r 字之在 b 後者.

互易 ab 二字,則得一新式

$$PbQaR\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

當證明(1) (2)式不同類.因在二式中 ab 對 P, R 之各字相對位置不變易,但較 ab 對 Q 之各字位置可矣.以 a 陸續與 Q 之各字易位,得

$PQabR$　類凡 q 變

以 ab 互易,得

$PQbaR$　類又 1 變

又以 b 與 Q 之各字易位,則得

$PbQaR$　類又 q 變

於是由(1)而(2),類凡$(2q+1)$變,爲奇數,故 (1) (2) 式之類不同.

雙誌元　取一字 a 而繫以兩指數,如 $a_{\alpha}^{\alpha'}$ 者,謂之雙誌元.行列式用雙誌元最便.如以下指數表列,則 $a_{\alpha}^{\alpha'}$ 爲 α' 行 α 列之元.

設有 n 次行列式:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2\cdots\cdots & a_1^q\cdots\cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2\cdots\cdots & a_2^q\cdots\cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_p^1 & a_p^2 & a_p^q & a_p^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^q & a_n^n \end{vmatrix}$$

依定義　$\delta=\Sigma(-1)^{i+i'}a_{\alpha}^{\alpha'}a_{\beta}^{\beta'}\cdots\cdots a_{\lambda}^{\lambda'}$

i' 爲 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 互換式之逆式數, i 爲下指數互換式之逆式數.意卽在每行每列只取一字而聯乘之.再求所有積之代數和,卽得其展式.如每次依列取,則

$$\delta=\Sigma(-1)^{i'}a_1^{\alpha'}a_2^{\beta'}\cdots\cdots a_n^{\lambda'}.$$

故有 $n!$ 項,卽上指數之互換數也.依行取亦可

§ 57. 行列式之特性

定理　在一行列式中,如易行爲列,或易列爲行,則此行列式不變.

證. 設 δ 爲一行列式,易行爲列,後得一新行列式 δ',

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & & a_2^n \\ & & & \\ a_n^1 & a_n^2 & & a_n^n \end{vmatrix} \quad \delta'=\begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & & b_2^n \\ & & & \\ b_n^1 & b_n^2 & & b_n^n \end{vmatrix}$$

中　$$a_1^1=b_1^1,\quad a_2^1=b_1^2,\cdots\cdots a_n^1=b_1^n,$$

$$a_1^2=b_2^1,\quad a_2^2=b_2^2,\cdots\cdots a_n^2=b_2^n$$

依此推之,其普通式爲 $a_\alpha^{\alpha'}=b_{\alpha'}^{\alpha}$.

余謂　$$\delta=\delta'$$

蓋 δ 之展式爲

$$\delta=\Sigma(-1)^{i'+i}a_\alpha^{\alpha'}a_\beta^{\beta'}\cdots\cdots a_\lambda^{\lambda'}$$

而 δ' 之展式爲

$$\delta'=\Sigma(-1)^{i+i'}b_{\alpha'}^{\alpha}b_{\beta'}^{\beta}\cdots\cdots a_{\lambda'}^{\lambda}$$

因 $a_{\alpha}^{\alpha'}=b_{\alpha'}^{\alpha}$, ……$a_{\lambda}^{\lambda'}=b_{\lambda'}^{\lambda}$ 故二展式各項之絕對値相等,且

$$i'+i=i+i'.$$

故各項之號亦相等,故

$$\delta=\delta'$$

例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

是故一行列式中之行云列云者,實無區別焉.

§58 定理 互換一行列式之兩行或兩列,則行列式之號變.

證. 設 δ 爲一行列式,將 δ 之 p 行與 q 行互易,則得一新式 δ'.

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2\cdots a_1^p\cdots a_1^q\cdots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2\cdots a_2^p\cdots a_2^q\cdots a_2^n \\ \\ a_n^1 & a_n^2\cdots a_n^p\cdots a_n^q\cdots a_n^n \end{vmatrix}$$

$$\delta'=\begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2\cdots b_1^p\cdots b_1^q\cdots b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2\cdots b_2^p\cdots b_2^q\cdots b_2^n \\ \\ b_n^1 & b_n^2\cdots b_n^p\cdots b_n^q\cdots b_n^n \end{vmatrix}.$$

中
$$a_{\alpha}^{p}=b_{\alpha}^{q}$$
$$b_{\alpha}^{p}=a_{\alpha}^{q}$$

$\alpha=1, 2, \cdots\cdots n$

且 r 不為 p, q 則

$$a^r_\alpha=b^r_\alpha$$

余謂 $$\delta=-\delta'$$

因 δ 中之任一項形,為

$$\epsilon\, a^p_\alpha\, a^q_\beta\, A \qquad (\epsilon=\pm 1)$$

A 代表其餘 $n-2$ 字之乘積.

δ' 中之相當項,為

$$\epsilon' b^q_\alpha\, b^p_\beta\, B \qquad (\epsilon'=\pm 1)$$

因 $a^r_\alpha=b^r_\alpha$ 故 A, B 相等,如以此兩項相比,則知其絕對値相等.惟上指數互換式因互易二字 pq 變類,故在 δ 中為正者,在 δ' 中為負.各項皆然,故

$$\delta=-\delta'$$

例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

是也,讀者宜直接證之.

系. 一行列式中如兩行或兩列之元均分別相等者,則此行列式為零.

例如:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

蓋以一行與二行互換,則行列式變號.因一二行之各元均分別相等,故互換此二行後,行列式仍未變,於是

$$\delta=-\delta$$

而 $$2\delta=0$$

卽 $$\delta=0$$

§ 59. 問題 求依一行或一列之元,展行列式 δ.

令

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2\cdots\cdots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2\cdots\cdots a_2^n \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_n^1 & a_n^2\cdots\cdots a_n^n \end{vmatrix}$$

以 $A_\alpha^{\alpha'}$ 代 $a_\alpha^{\alpha'}$ 元之係數,

依第一行展之.

$$\delta=A_1^1\ a_1^1\ +A_2^1\ a_2^1+\cdots\cdots+A_n^1\ a_n^1\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

依第 α' 行展者,爲

$$\delta=A_1^{\alpha'}\ a_1^{\alpha'}\ +A_2^{\alpha'}\ a_2^{\alpha'}+\cdots\cdots+A_n^{\alpha'}\ a_n^{\alpha'}\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

依第 α 列展者,爲

$$\delta=A_\alpha^1\ a_\alpha^1\ +A_\alpha^2\ a_\alpha^2+\cdots\cdots+A_\alpha^n\ a_\alpha^n\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

試求 A_1^1, A_1^1 各項爲 $n-1$ 次式，且無一含第一行及第一列之元．若就 δ 中將一行及一列棄去，則得一子行列式(*Minor Determinant*)．

$$\delta_1^1=\begin{vmatrix} a_2^2 & & a_2^n \\ & & \\ a_n^2 & & a_n^n \end{vmatrix}$$

δ_1^1 之各項，盡爲 $n-1$ 次，又無一含第一行及第一列之元者，A_1^1 及 δ_1^1 之項數均爲 $(n-1)!$，且號亦同，故

$$A_1^1=\delta_1^1$$

令 δ_α^1 爲剪去 δ 中之一行及 α 列所得之子行列式．則 δ_α^1 與 A_α^1 之絕對值相同．欲定其號，則將 α 列與前列陸續易位至佔第一列爲止，斯時號凡 $(\alpha-1)$ 變．故

$$A_\alpha^1=\delta_\alpha^1\times(-1)^{\alpha-1}$$

準此，(3)式可書爲

$$\delta=\delta_1^1 a_1^1-\delta_2^1 a_2^1+\cdots+(-1)^{\alpha-1}\delta_\alpha^1 a_\alpha^1+\cdots+(-1)^{n-1}\delta_n^1 a_n^1$$

任依一行或一列展之亦可．

於是一 n 次行列式，可變爲 n 個 $n-1$ 次行式．以此遞推至二次行列式爲止．

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)$$
$$+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

且

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中 x, y, z 任爲何數,依第一行展之卽得.

§ 60. 系一

$$A_\alpha^1 a_\alpha^1 + A_\alpha^2 a_\alpha^2 + \cdots\cdots + A_\alpha^n a_\alpha^n = \delta$$

$$A_\alpha^1 a_\beta^1 + A_\alpha^2 a_\beta^2 + \cdots\cdots + A_\alpha^n a_\beta^n = 0 \cdots\cdots\cdots (6)$$

中 $\alpha \neq \beta$

第一式係 δ 依 α 列之展式.(6)式爲依 β 列之展式.但 A_α^1 爲翦去一行及 α 列之子行列式,尙含有 β 列之元.故(6)式表一行列式有兩列相同者,故爲零.

系二. 如以一數徧乘一行列式任一行,或一列之元,則行列式爲此數所乘.

如

$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

依第一行展之卽得.

系三. 如一行或一列之元爲 p 數之和,則可將行列式分爲 p 個同次行列式.

例如:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2+b_2+c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3+b_3+c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix}.$$

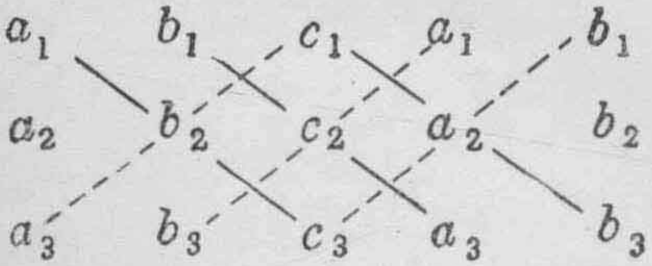
欲證明之,但依第一行展之卽可.

系四.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm m\,b_1 \pm n\,c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm m\,b_2 \pm n\,c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm m\,b_3 \pm n\,c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因將後式分爲三式時,其一與前式同.其餘二式均有兩行成比例,均爲零故也.

§ 61. 沙氏律 __*Rule of Sarrus*__ 欲展一三次行列將一二行書於三行之後,依所畫之線求其積,實線上者,冠以正號;虛線上者,冠以負號,卽得其展式.



§ 62. 例一。求展

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\Big[(c-b)(b-c)-(a-c)(a-b)\Big]$$

$$=(a+b+c)\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\Big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Big]$$

如直接展 δ, 則有

$$\delta=a^3+b^3+c^3-3\,abc$$

故 $a^3+b^3+c^3-3\,abc\equiv\tfrac{1}{2}(a+b+c)\Big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Big]$

例二. 求展

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

令 $a=b$ 則 δ 有兩行相同爲零,故 δ 可以 $(a-b)$ 除盡.於是 δ 可爲 $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ 除盡,因 δ 爲六次式.故可令

$$\delta=A(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

任比較 δ 及右端之一項,得

$$A=1$$

此式亦可推廣,讀者宜參攷余與段調元教授合著之行列式詳論.

第七章 練習題

1. 求展

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

2. 求展

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

3. 求展

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

答: $-(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

4. 求展

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}(a-b) & \cos\frac{1}{2}(b-c) & \cos\frac{1}{2}(c-a) \\ \cos\frac{1}{2}(a+b) & \cos\frac{1}{2}(b+c) & \cos\frac{1}{2}(c+a) \\ \sin\frac{1}{2}(a+b) & \sin\frac{1}{2}(b+c) & \sin\frac{1}{2}(c+a) \end{vmatrix}$$

答: $-2\sin\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sin\frac{1}{2}(b-c)\cdot\sin\frac{1}{2}(c-a)$

5. 求下各式之數值

$$a)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad d)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

6. 試證

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \equiv (a+b+c)^3$$

7.

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \equiv 2(bc+ca+ab)^3$$

8.

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \equiv a(b-a)(c-b)(d-c)$$

9.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x\cdots\cdots x \\ x & -1 & x\cdots\cdots x \\ x & x & 1\cdots\cdots x \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x & x & x\cdots -1 \end{vmatrix} \equiv (-1)^n (x+1)^{n-1} \Big[(n-1)x-1$$

10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 \\ -1 & 0 & 1\cdots\cdots 1 \\ -1 & -1 & 0\cdots\cdots 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -1 & -1 & -1\cdots\cdots 0 \end{vmatrix} \equiv 1$$

第八章 一次聯立方程式

§63. 聯立一次方程式 *Simultaneous Equations of First Degree*

先設爲三式三元者.

$$\left.\begin{aligned}E_1=a_1^1x_1+a_1^2x_2+a_1^3x_3-b_1=0\\E_2=a_2^1x_1+a_2^2x_2+a_2^3x_3-b_2=0\\E_3=a_3^1x_1+a_3^2x_2+a_3^3x_3-b_3=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

令

$$\delta=\begin{vmatrix}a_1^1 & a_1^2 & a_1^3\\a_2^1 & a_2^2 & a_2^3\\a_3^1 & a_3^2 & a_3^3\end{vmatrix}$$

以 A_1^1 代 δ 展式中 a_1^1 之係數, A_2^1 代 a_2^1 之係數,餘倣此.

以 A_1^1 乘(1)之第一式, A_2^1 乘第二式, A_3^1 乘第三式相加,得

$$A_1^1E_1+A_2^1E_2+A_3^1E_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同理,得 $$A_1^2E_1+A_2^2E_2+A_3^2E_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$A_1^3E_1+A_2^3E_2+A_3^3E_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(2)式中 x_1 之係數,爲

$$a_1^1A_1^1+a_2^1A_2^1+a_3^1A_3^1=\delta$$

而 x_2 及 x_3 之係數,爲

$$a_1^2A_1^1+a_2^2A_2^1+a_3^2A_3^1=0\quad(\text{參看 §60})$$

$$a_1^3A_1^1+a_2^3A^1+a_3^3A_3^1=0$$

常數項爲 $b_1A_1^1+b_2A_2^1+b_3A_3^1=\delta_1$

$$\delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ b_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ b_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

卽以常數易 δ 中 x_1 之係數,卽得 δ_1.

於是(2)式變爲

$$\delta\, x_1-\delta_1=0$$

同理,(3),(4)兩式可書爲

$$\delta\, x_2-\delta_2=0$$

$$\delta\, x_3-\delta_3=0$$

中

$$\delta_2=\begin{vmatrix} a_1^1 & b_1 & a_1^3 \\ a_2^1 & b_2 & a_2^3 \\ a_3^1 & b_3 & a_3^3 \end{vmatrix} \qquad \delta_3=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & b_3 \end{vmatrix}$$

設 $\delta\neq 0$, 則得一組獨解爲

$$x_1=\frac{\delta_1}{\delta},\quad x_2=\frac{\delta_2}{\delta},\quad x_3=\frac{\delta_3}{\delta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

次設 $\delta=0$, 而子行列式 $A_3^3\neq 0$

$$A_3^3=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

以 $E_1\ E_2\ E_3$ 緣 A_3^3 之第三行 $a_3^1\ a_3^2$ 緣第三列,則有

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & E_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & E_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & E_3 \end{vmatrix}$$

分之, x_1 之係數爲零,以有兩行同也; x_2 之係數亦爲零; x_3 之係數爲 δ, 亦假設爲零者. 如(1)式有解以之代入上行列式 $E_1=E_2=E_3=0$, 故

$$\Delta=0$$

此時

$$\Delta=-\left|\begin{array}{cc:c} a_1^1 & a_1^2 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \\ \hdashline a_3^1 & a_3^2 & b_3 \end{array}\right|$$

Δ 稱絕行列式 (*Characteristic Determinant*).

如 $\Delta\neq0$, 則(1)式爲不可能.

如 $\Delta=0$, 則能合(1)之前二式者,亦合第三式. 但解前二式足矣,且任與 x_3 一值, x_1 及 x_2 均有其相當值. 故此時(1)爲無定式.

再設所有之子行列式均爲零,而有一元 a_1^1 不爲零.

此時有絕行列式:

$$\left|\begin{array}{c:c} a_1^1 & b_1 \\ \hdashline a_2^1 & b_2 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c:c} a_1^1 & b_1 \\ \hdashline a_3^1 & b_3 \end{array}\right|$$

如任有一式不爲零,則(1)式爲不可能; 如均爲零,則能合(1)之第一式者,亦能合二三兩式. 故解第一式即可. 任與 x_2 及 x_3 以某數値,則 x_1 恒有一相當値,故(1)爲無定式.

§ 64 推廣上法,於 n 式 n 元者甚易.

設

$$\left.\begin{array}{l} E_1=a_1^1\,x_1+a_1^2\,x_2+\cdots\cdots+a_1^n\,x_n-b_1=0 \\ E_2=a_2^1\,x_1+a_2^2\,x_2+\cdots\cdots+a_2^n\,x_n-b_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n=a_n^1\,x_1+a_n^2\,x_2+\cdots\cdots+a_n^n\,x_n-b_n=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(6)$$

此時

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^n \\ & & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^n \end{vmatrix}$$

如 $\delta\neq 0$ 則(6)式有一組獨解,其公式爲

$$x_1=\frac{\delta_1}{\delta},\quad x_2=\frac{\delta_2}{\delta},\cdots\cdots x_n=\frac{\delta_n}{\delta}$$

中

$$\delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_1^2 & a_1^n \\ b_2 & a_2^2 & a_2^n \\ & & \\ b_n & a_n^2 & a_n^n \end{vmatrix},\cdots\cdots\delta_n=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \\ & & \\ a_n^1 & a_n^2 & b_n \end{vmatrix}$$

如 $\delta=0$ 則(6)可爲無解式,亦可爲不定式.

§ 65. 再推廣於 n 式 p 元者.

設

$$\left.\begin{array}{l} E_1=a_1^1\,x_1+a_1^2\,x_2+\cdots\cdots+a_1^p\,x_p-b_1=0 \\ E_2=a_2^1\,x_1+a_2^2\,x_2+\cdots\cdots+a_2^p\,x_p-b_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n=a_n^1\,x_1+a_n^2\,x_2+\cdots\cdots+a_n^p\,x_p-b_n=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(7)$$

其一. $n<p$ 如 $\delta\neq$ 則 $x_1\cdots\cdots x_n$ 可以其餘之 $p-n$ 個變數表之, 任與 $x_{n+1},\cdots\cdots x_p$ 一組值, 則 $x_1\cdots\cdots x_n$ 恒有其相當值, 故爲無定式.

其二. $n=p$ 與 §64 同.

其三. $n>p$

令

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^p \\ & \cdot & \\ a_p^1 & a_p^2 & a_p^p \end{vmatrix}$$

如 $\delta\neq 0$ 緣 δ 成行列式

$$\delta_{p+\alpha}=\left|\begin{array}{cc|c} a_1^1 & a_1^p & b_1 \\ a_2^1 & a_2^p & b_2 \\ & (\delta) & \\ a_p^1 & a_p^p & b_p \\ \hline a_{p+\alpha}^1 & a_{p+\alpha}^p & b_{p+\alpha} \end{array}\right|$$

$p+\alpha$ 至多等於 n, $\alpha=1, 2,\cdots\cdots(n-p)$

$\delta_{p+\alpha}$ 謂之絕行列式,如($-p$)式中有一式異於零, 則(7)式爲不可能. 如盡爲零時,則前 p 式之解,亦合其餘之 $n-p$ 式.因 $\delta\neq 0$ 前 p 式只有一組解. 如 $\delta=0$, 可依 §63 推論.

§ 66. 齊次式 一次方程式無常數項者, 謂之齊次式. 三式三元者如下式:

$$\left.\begin{array}{l}a_1^1\,x_1+a_1^2\,x_2+a_1^3\,x_3=0\\a_2^1\,x_1+a_2^2\,x_2+a_2^3\,x_3=0\\a_3^1\,x_1+a_3^2\,x_2+a_3^3\,x_3=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$\delta\neq 0$ 時,則 $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$. 故(8)式除 x_1, x_2, x_3, 盡爲零外,未有他解.如 $\delta=0$ 而 $A_3^3\neq 0$, 則由前二式易得

$$A_3^3\,x_1=A_3^1\,x_3$$

$$A_3^3\,x_2=A_3^2\,x_3$$

於是

$$\frac{x_1}{A_3^1}=\frac{x_2}{A_3^2}=\frac{x_3}{A_3^3}$$

如 λ 爲任一數,則(8)式之普解,爲

$$x_1=\lambda\,A_3^1,\quad x_2=\lambda\,A_3^2,\quad x_3=\lambda\,A_3^3\ \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

推於 n 式 n 元者亦易.

§67 消去法 Elimination

問題一. 求下式能有公解之情形

$$\left.\begin{array}{l}ax+by-c\ \ =0\\a'x+b'y-c'=0\\a''x+b''y-c''=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

如

$$\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\neq 0$$

則(10)之前二式有一組獨解 $x_0\,y_0$, 欲 $x_0\,y_0$ 可合第三式,必經行式爲零乃可,即

$$\delta^1=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0$$

$\delta'=0$, 爲(10)式中消去 x, y 之結式.

問題二. 求消去下式中之 x, y

$$\left.\begin{aligned} & f=A\,x^2+2\,B\,xy+C\,y^2+2\,D\,y+2\,E\,y+F=0 \\ & \phi=A\,x+B\,y+D=0 \\ & \psi=B\,x+C\,y+E=0 \end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

(11)式可以下式代之

$$f-x\,\phi-y\,\psi=0$$

$$\phi=0$$

$$\psi=0$$

亦卽

$$\left.\begin{aligned} & D\,x+E\,y+F=0 \\ & A\,x+B\,y+D=0 \\ & B\,x+C\,y+E=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

故結式爲

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0$$

問題三. 求

$$\left.\begin{aligned} & a\,x^2+b\,x+c=0 \\ & a'x^2+b'x+c'=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

有一公根之情形,視 x^2 爲未知數,則

$$\frac{x^2}{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}=\frac{x}{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

於是 $$x^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$$

$$x=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

故 $$\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\left(\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)^2$$

亦卽 $$(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0 \cdots\cdots(14)$$

如此,條件旣合,則(13)至少有一公根.

餘宜參看行列式詳論,及本書第十六章.

第八章 練習題

1. 求解下式幷討論之.

$$ax+by+c=0$$

$$a'x+b'y+c'=0$$

2. 討論下式 $$x+my=1$$

$$mx+y=1$$

3. 討論下式 $$mx+2y+3z=10$$

$$2x+my+2z=5$$

$$3x+3y+5z=15$$

4. 求解

$$x+y+z=a$$
$$t+x+y=b$$
$$z+t+x=c$$
$$y+z+t=d$$

5. 求下式能有公解之條件

$$bz-cy=\alpha$$
$$cx-\ z=\beta$$
$$ay\quad bx=\gamma$$

6. 求將下式之 x 消去

$$a\sin x+b\cos x=c$$
$$a'\sin x+b'\cos x=c'$$

7. 試討論下式

$$ax+by+z=1$$
$$x+aby+z=b$$
$$x+by+az=1$$

8. 討論下式

$$\lambda x+y+z=1$$
$$x+\lambda y+z=\lambda$$
$$x+y+\lambda z=\lambda^2$$

9. 試解下式并討論之.

$$x_1=a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n$$

$$x_2 = a_3x_3 + a_4x_4 + \cdots + a_1x_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$$

第九章　級數，e 之定義及其數値

§ 68 級數 Series　初等代數所論級數有二：一爲等差級數 *Arithmetic Progression*，一爲等比級數 *Geometric Progression*.

設 a 爲一數，d 爲又一數，則

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\cdots\cdots a+(n-1)d$$

爲等差級數，因兩連接項之差恒爲 d，故 d 稱公差. a 爲第一項，$a+(n-1)d$ 爲第 n 項，亦稱公項.

令　$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+\Big[a+(n-1)d\Big]$$

S_n 又可書爲.

$$S_n=\Big[a+(n-1)d\Big]+\Big[a+(n-2)d\Big]$$
$$+\Big[a+(n-3)d\Big]+\cdots\cdots+a$$

相加，得

$$2S_n=n\Big[a+a+(n-1)d\Big]$$

故　$$S_n=\frac{n}{2}\Big[a+a+(n-1)d\Big]$$

以 l 代第 n 項，則

$$S_n=\frac{n}{2}(a+l)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

例如：　$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

問題　求於 a, b 二數之間插入 n 數,俾成等差級數.

此時 b 爲第 $n+2$ 項,故令 d 爲公差,則

$$b=a+(n+1)d$$

於是

$$d=\frac{b-a}{n+1}$$

而所求級數爲

$$a,\ a+\frac{b-a}{n+1},\quad a+2\frac{b-a}{n+1},\cdots\cdots\cdots b$$

§69. 等比級數

等比級數之形,爲

$$a,\quad ar,\quad ar^2,\cdots\cdots ar^{n-1}$$

r 謂之公比, ar^{n-1} 謂之公項.

令

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

$$rS_n=\qquad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+r^n$$

相減,得

$$(1-r)S_n=a-ar^n$$

如 $r\neq 1$, 則

$$S_n=a\frac{1-r^n}{1-r}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

如 $r>1$, r^n 與 n 俱增, S_n 亦與之俱增無止極.此時 S_n 稱發級數 *Divergent Serie*.

如 $r<1$, 則 r^n 於 n 爲無窮時爲零,故 S_n 之限爲

$$S=\frac{a}{1-r}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此時級數爲歛級數(*Convergent Serie*).

問題　求於 a, b 二數之間插入 n 數,俾成等比級數.

b 應爲第 $n+2$ 項,故令 r 爲公比,則

$$b=ar^{n+1}$$

於是

$$r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

§ 70. 推廣言之,如有若干數相續

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\cdots\cdots u_n$$

且依一定法則,與其位,則知其數;與數亦得其位者,則此諸數成一級數. u_n 謂之公項,成級數之法亦寓於公項.

令 S_n 爲級數前 n 項之和,卽

$$S_n=\Sigma u_n=u_1+u_2+\cdots\cdots u_n$$

如 S_n 於 n 增至無窮時,亦爲無窮,則 u_n 爲發級數.發級數普通致用甚少,本書不加深研.

如 S_n 於 n 增至無窮時,趨進一極限 S, 則 u_n 爲歛級數.歛級數致用較廣,且倚數能展爲級數者甚多,(見十三章)實爲推廣倚數之初步.本書對於級數先爲定性的研究,以別其歛發之性,次對於歛級數再加定量的研究,或求其和,或求其和之相近值,皆實用之最要者也.

§ 71. 歛性之必要條件 Necessary Condition of Convergence 歛級數之必要條件,爲公項之極限爲零.

設
$$u_1,\quad u_2,\cdots\cdots u_n,\cdots\cdots$$

爲一歛級數, S_n 爲前 n 項之和, S_{n+1} 爲前 $n+1$ 項之和.

因所設爲歛級數,故

$$lim\ S_n = S$$

而 $$lim\ S_{n+1} = S$$

於是 $$lim(S_{n+1} - S_n) = 0$$

卽 $$lim\ u_n = 0 \qquad (n = \infty)$$

故一級數之公項極限不爲零者,必非歛級數.然一級數之公項極限爲零,此級數亦不定爲歛級數.換言之,卽公項極限爲零,乃歛級數之必要條件,而非其充足條件也(*Sufficient Condition*).

何以故?因轉理不盡確故.

§ 72. 調和級數 *Harmonic Serie*

級數公項爲

$$u_n = \frac{1}{n}$$

稱調和級數,此時公項之限爲零;而此級數實非歛級數.令 S_n 爲前 n 項之和,則

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}$$

如盡以 $\frac{1}{2n}$ 代各項,則右端變小,故

$$S_{2n} - S_n > \frac{n}{2n}$$

或 $$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$$

於是陸續得 $$S_2 - S_1 > \frac{1}{2}$$

$$S_{2^2} - S_2 > \frac{1}{2}$$

$$S_{2^3}-S_{2^2}>\frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{2^p}-S_{2^{p-1}}>\frac{1}{2}$$

相加,得 $$S_{2^p}-S_1\quad>\frac{p}{2}$$

或 $$S_{2^p}>1+\frac{p}{2}$$

當 n 增至無窮時,恒可得

$$2^p \leqslant n < 2^{p+1}$$

故 p 亦可增至無窮,於是

$$S_{2^p}$$

之極限爲無窮,而 S_n 亦爲無窮.故 $u_n=\frac{1}{n}$ 爲發級數.

於此得級數定性研究法之初步:先觀級數公項之限爲零與否.如不爲零,則級數必爲發級數,再無繼續研究之必要;如爲零,則級數可發可歛,以下列舉各律進究之,

§ 73. 普通級數可別爲兩種,一爲正項級數,一爲正負項雜列級數,簡稱雜級數.如取雜級數各項之絕對值,成一新級數,(爲正項級數)此新級數爲歛時,則前雜級數爲絕對歛性級數.如雜級數爲發級數時,則以其各項模所成之正項級數亦爲發級數.如:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

本爲歛級數,而各項模所成者

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

爲發級數,此時(4)爲半歛級數 (*Semi-Converqent*)

注意. 在絕對歛性級數內,吾人可任意顚倒各項之次第,而在半歛級數則不能.

§ 74. **定理** 1°. 已與兩正項數,如當 n 增大時,恒有 $S_n^1<S_n$. S_n^1 及 S_n 各代表一級數前 n 項之和,則 S_n 爲歛級數時,S_n^1 亦爲歛級數.

設所與級數爲

$$u_1,\quad u_2,\cdots\cdots u_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$v_1,\quad v_2,\cdots\cdots v_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

而 $$S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$$

$$S_n^1=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n$$

原設(5)爲歛級數,故 S_n 有一極限 S.

$$S_n<S$$

又設 $$S_n^1<S_n$$

故 $$S_n^1<S$$

於是 S_n^1 亦有一極限 S^1, 卽(6)亦爲歛級數,且

$$S^1\leqslant S$$

2°. 如當 n 增大時,恒有 $S_n^1>S_n$, 則(5)爲發級數時,(6)亦爲發.

例如 Σu_n Σv_n 爲歛級數時,則 $\Sigma\sqrt{u_n v_n}$ 亦爲歛級數,因

$$\sqrt{u_n v_n}<\frac{u_n+v_n}{2}$$

故也.

§75. 系

已與(5)(6)兩級數,如其公項之比 $\frac{v_n}{u_n}$ 有一定限,或恒介於二正數 ab 之間,則(5)(6)兩級數有同性.

設於 $n>n'$ 時,有

$$a<\frac{v_n}{u_n}<b$$

於是 $$S_n^1<b\,S_n$$

故(5)爲歛時,(6)亦爲歛.又

$$S_n^1>a\,S_n$$

故(5)爲發時,(6)亦爲發.

§76. 歛性判定律 Criteria of Convergence

1° $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 律. 已與一正項級數,如自某項起,一項與其前一項之比恒小於一定數,又小於一者,則所與級數爲歛級數,如其比恒大於一,則爲發級數.

設 k 爲一正數,又小於一者,自一項起卽有

$$\frac{u_2}{u_1}<k,\quad \frac{u_3}{u_2}<k,\ \cdots\cdots\frac{u_{n+1}}{u_n}<k$$

兩端各相乘,得

$$\frac{u_{n+1}}{u_1}<k^n$$

於是
$$u_2<k\,u_1$$
$$u_3<k^2u_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n+1}<k^nu_1$$

故 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n<u_1+ku_1+k^2u_1+\cdots\cdots+k^{n-1}u_1$

右端為斂性等比級數,(因 $k<1$) 故 $\Sigma\,u_n$ 亦為斂級數.

且
$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots$$
小於
$$k\,u_n+k^2u_n+k^3u_n+\cdots\cdots$$

其限為 $\dfrac{k\,u_n}{1-k}$.

故令
$$S=S_n+R_n$$

以 S_n 為 S 之相近值,則過數 R_n 小於

$$R_n<\frac{k\,u_n}{1-k}$$

次設 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 則公項恒較前一項大,不能趨進於零,故為發級數.(見 §71.)

系. 如 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 於 n 增至無窮時之極限為 λ, 則

$\lambda<1$ 時, $\Sigma\,u_n$ 為斂級數;

$\lambda>1$ 時, $\Sigma\,u_n$ 為發級數;

$\lambda=1$ 時, Σu_n 可發可歛.

此律對於雜級數亦適用,取各項之絕對值可矣.

§ 77. 例一. 已與級數

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdots\cdots\cdots(7)$$

此時公項與前項之模之比,爲

$$\frac{x^2}{2n(2n+1)}$$

於 n 增至無窮時,無論 x 爲何數時,此比趨進於零,故(7)無論 x 爲何數,恒爲歛級數.

例二. 試究級數

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots(8)$$

此時 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n}x=\left(1+\frac{1}{n}\right)x$$

當 n 增至無窮時, $\frac{1}{n}$ 之極限爲零, 故 $\lambda=x$.

$|x|<1$ (8) 爲歛級數.

$|x|>1$ (8) 爲發級數.

$|x|=1$ (8) 爲發級數.

例三. 級數

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

其公約與前項之比,爲

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+2}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{n}}$$

故 $\lambda=1$

但
$$\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$$

(9)可書為

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}$$

故
$$lim\ S_n=\mathbf{1}\qquad(n=\infty)$$

故(9)為歛級數.

§ 78. 2°. $\sqrt[n]{u_n}$ 律 已與一級數,如自某項起,第 n 項之 n 次根恆小於一定數,小於一者,則所與級數為歛級數.如其 n 次根大於一,則為發級數.

蓋由
$$\sqrt[n]{u_n}<k<1$$
得
$$u_n<k^n$$
於是陸續得 $u_1<k,\ u_2<k^2,\cdots\cdots u_n<k^n$

而
$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n<k+k^2+\cdots\cdots+k^n$$

右端為歛性等比級數,故 Σu_n 亦為歛級數,且令

$$S=S_n+R_n$$

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots$$

$$R_n < \frac{k_{n+1}}{1-k}$$

故以 S_n 爲 S 之相近值，其過數小於 $\frac{k_{n+1}}{1-k}$.

次設 $\sqrt[n]{u_n}>1$，則 $u_n>1$，公項極限不爲零，故爲發級數.

實際上可求 $\sqrt[n]{u_n}$ 當 n 趨進於無窮時之極限，設爲 λ，則

$\lambda<1$ 爲斂，

$\lambda>1$ 爲發，

$\lambda=1$ 可斂可發.

§ 79. 例. 試研究下級數，其公項爲

$$u_n=\left[tg\left(a+\frac{a}{n}\right)\right]^n \qquad \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

此時 $$\sqrt[n]{u_n}=tg\left(a+\frac{a}{n}\right)$$

其限 $\lambda=tga$

故 $a<\frac{\pi}{4}$， 級數爲斂級數，

$a>\frac{\pi}{4}$， 發級數，

$a=\frac{\pi}{4}$， u_n 之限爲 e^{2a}. 不爲零，故爲發級數. 讀者可自證 (§ 86).

§ 80. 以上兩律，皆以斂性等比級數爲標準. 斂度速者，均可以此二律馭之. 其斂度較遲者，則當另覓標準

級數.研究斂度遲速,屬增性論範圍,本書不論及之.近之作者,能依斂性速度成無數標準級數,不患無從以較.實際上,卽此二律,亦已足用.否則可用§72之法,直接研究之,下舉者,其一例也.

§81. 級數 $u_n=\frac{1}{n^p}$ 之研究.

其一. $p=1$, Σu_n 爲調和級數.

其二. $p<1$, $\Sigma\frac{1}{n^p}>\Sigma\frac{1}{n}$ 故變爲發級數.

其三. $p>1$, 余謂 $\Sigma\frac{1}{n^p}$ 爲斂級數.

蓋設 μ 爲一整數合下之條件者,

$$2^\mu<n<2^{\mu+1}$$

依2之乘方集合各項,則有

$$S_{2^{\mu+1}-1}=\frac{1}{1^p}+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{1}{(2^\mu)^p}+\frac{1}{(2^\mu+1)^p}+\frac{1}{(2^\mu+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{\mu+1}-1)^p}\right]$$

又

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{2^{2p}}\times2^2=\frac{1}{2^{2(p-1)}}$$

$$\frac{1}{(2^\mu)^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2^{\mu+1}-1)^p}<\frac{1}{(2^\mu)^p}\times2^\mu=\frac{1}{2^{\mu(p-1)}}$$

於是 $$S_n<\frac{1}{1}+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{2(p-1)}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{\mu(p-1)}}$$

$\frac{1}{2^{p-1}}<1$, 故 S_n 爲歛級數.

§ 82. 3°. $n^p u_n$ 律 已與一級數 u_n, 如 $n^p u_p$ 於 n 增至無窮時, 有一定限 k, 則

$p>1$ 時, u_n 爲歛級數.

設 A 爲一數大於 k 者, 則自某項起時, 恒有

$$n^p u_n< A$$

故 $$u_n<\frac{A}{n^p}$$

$p>1$ 時, 右端爲歛級數之公項. 故 u_n 亦爲歛級數.

$p\leqslant 1$ 時, u_n 爲發級數.

例如: $$u_n=\frac{A\,n^r+A_1\,n^{r-1}+\cdots\cdots}{B\,n^q+B_1\,n^{q-1}+\cdots\cdots}$$

設 $$q=r+p$$

則 $$lim\;n^p\,u_n=\frac{A}{B}$$

如 $q-r>1$, 則 u_n 爲歛級數.

$q-r\leqslant 1$ 時, u_n 爲發級數.

§ 83 **間號級數** 一級數自某項起時, 其項之正負號相間者, 謂之間號級數.

定理. 一間號級數之項遞減, 而趨進於零者, 則此級數爲歛級數.

設 $$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots$$

爲一間號級數,且 $u_1>u_2>u_3\cdots\cdots$

$$S_{2p}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots\cdots+(u_{2p-1}-u_{2p})$$

$$S_{2p+2}=S_{2p}+(u_{2p+1}-u_{2p+2})$$

故 $$S_{2p+2}>S_{2p}$$

又 $$S_{2p}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)\cdots\cdots$$

故 $$S_{2p}<u_1$$

S_{2p} 常增,而又小於一定數,故 S_{2p} 必有一限,令爲 S. 余謂 S_{2p+1} 之限亦同.因

$$S_{2p+1}=S_{2p}+u_{2p+1}$$

u_{2p+} 之限爲零,故

$$lim\ S_{2p+1}=lim\ S_{2p}$$

例如: $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

爲歛級數,而各項模所成者,則爲發級數.

§84. 級數求和法 *Summation of Series* 凡等比等差級數之和均可求,如爲歛級數,或可求得其和,或可得其相近值.

例如: $$u_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

則 $$S_n=\Sigma u_n=1-\frac{1}{n+1}$$

故 $$S=1.$$

又如:
$$u_n=\frac{1}{n(n+2)}$$

則
$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

而
$$2S_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

於是
$$S=\frac{3}{4}$$

級數之不能直接得其和者,則以相近值代之,如以 S_n 代 S. 則過數有兩種,一為

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots$$

為棄去各項之和,一為

$$\epsilon=\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots\cdots+\epsilon_n$$

為取各項相近值過數之和. 欲 S_n 之精密達 $\frac{1}{10^p}$, 必

$$R_n+\epsilon<\frac{1}{10^p}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

乃可. 實際上欲達 $\frac{1}{10^p}$ 之精密, 可每項取 $p+2$ 位小數, 至前 p 位盡為零而止. 再驗(10)式合否. 合則止,不合則多取一位小數, 再驗至合而止.

§ 85. 求 e 之值，至第三位小數.

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

用第一律，得

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{1}{n}$$

其限為零，故 e 為歛級數，且

$$R_n<\frac{ku_n}{1-k}=u_n\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n!}\times\frac{1}{n-1}<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}$$

又 $$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=2.5$$

$$\frac{1}{3!}=0.16666 \qquad (\text{以 } 3 \text{ 除 } 2.5)$$

$$\frac{1}{4!}=0.04166$$

$$\frac{1}{5!}=0.00833$$

$$\frac{1}{6!}=0.00138$$

$$\frac{1}{7!}=0.00019$$

此時 $$\epsilon=\frac{5}{10^5}$$

$$R_n<\frac{1}{7!}\times\frac{1}{7}<\frac{3}{10^5}$$

故 $$\epsilon+R_n=\frac{5}{10^5}+\frac{3}{10^5}<\frac{1}{10^3}$$

於是 $$e=2.718$$

§ 86. 用二項式展式,可以證明

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

之極限 ($m\to\infty$) 爲

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

初設 m 爲正整數,繼可推之於任何數,卽

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

亦可書爲 $$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

e 爲納氏對數之底,在分析中致用甚多.讀者愼勿忽焉.

又 $$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \qquad (m\to\infty)$$

之限爲 $$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

第九章 練習題

1. 試證下各級數均爲歛級數,并求其和.

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \qquad u_n=arctg\,\frac{1}{n^2+n+1};$$

$$u_n=\frac{L\,\frac{n+1}{n}}{L\,n\,L(n+1)}. \qquad \text{(}L\text{ 代納氏對數)}$$

解法. 將 u_n 分成 $\phi(n)-\phi(n+1)$ 形,於是 $S_n=\phi(1)-\phi(n+1)\cdots\cdots$

2. 試研究下各級數:

$$\frac{x^n}{n!}, \quad nx^{n-1}, \quad \frac{1+n^2}{n!}, \quad \frac{(n^2+1)x^n}{(n+1)!}, \quad \frac{n}{1+x^n}, \quad n^2 e^{-n}$$

用 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 律.

3. 試研究下各級數(用 $\sqrt[n]{u_n}$ 律)

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}, \left(\frac{x}{Ln}\right)^n, \frac{1}{n^n}, \left[sin\left(a+\frac{a}{n}\right)\right]^n. \quad \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

4. 試研究下各級數:

$$\frac{3n-1}{n^4+1}, \qquad \frac{n+1}{3n^2-1}, \qquad \frac{n^3-1}{n^5+2}$$

5. 試研究下各級數:

$$\frac{1}{n}\,sin\,\frac{\pi}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\,tg\,\frac{\pi}{n}, \qquad \frac{n\,sin\,\frac{1}{n}}{\sqrt{n^3+1}}$$

6. 試證級數:

$$u_n=L\left[1+\phi(n)\right] \qquad V_n=\phi(n)$$

有同性.

應用 研究 $L\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $L(1+x^n)$.

7. 試求 e^2, $\sqrt{e}$, $\sqrt[4]{e}$, $\sqrt[5]{e}$ 至第五位小數.

答 $e^2=7.38905$ $\sqrt{e}=1.64872$

$\sqrt[4]{e}=1.28402$ $\sqrt[5]{e}=1.22140$

第三篇

分析之基本概念

用純粹代數法解方程式,至爲艱深,非初學者所能明.本書於解方程式前,所以加入分析基本概念者;葢欲應用分析方法於代數之本身問題也.如樂爾氏定理之於方程式討論;戴氏公式之於解數字方程式,其最著者也.應用此法,厥有二利:其一,此法較純粹代數法易於明了,且實際致用亦便;其二,可啓學者習高等分析之門徑.摘其要理,列爲四章.

第十章 初等倚數分論

§87. 倚數定義 *Definition of a Function* 兩量相倚,物理之例爲多:如墜體路長與時間相倚;同溫度氣體之壓力與其容積相倚之類,是也.云何相倚?此量定時,彼量亦隨之俱定;或彼量定時,此量亦然,是謂兩量相倚.其在代數,如 x, y 代表兩量,與 x 一定値, y 亦有一定値,或數定値,反之亦然,則 x, y 互爲倚數.如只令 x 獨立變易,因其各値以定 y 之相當各値,則 y 爲 x 之倚數.用符號表之如次,或爲

$$f(x, y)=0$$ 此時 x, y 互爲倚數

或爲 $$y=g(x)$$ 此時 y 爲 x 之倚數

例如: $$x+y-4=0$$

當 $x=1$ 時,則 $y=3$; $y=-3$, 則 $x=7$;……

又如 $$y=x^2$$

當 $x=\pm 1$ 時, $y=1$; $x=\pm 2$, $y=4$; $x=\pm 3$, $y=9$;……

而當 $y=1$, 則 $x=\pm 1$……x 此時有兩值.

又如 $$y=\sin x$$

當 $x=\frac{\pi}{2}$ 時 $y=1$; $x=\frac{5\pi}{2}$, $y=1$,……

如視 x 爲 y 之倚數,則 $y=1$ 時, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots)$ 故 y 可視爲 x 之有定倚數 (*Definite Function*), 而 x 只能在某間隔內爲 y 之有定倚數. 余將於論反圓倚數時再論及之.

他如幾何公式, $C=2\pi R$ 表示圓周長爲半徑之倚數, $S=\pi R^2$ 表示圓面積爲半徑之倚數等,皆明例也.

一量又可爲兩量或多量之倚數,或多量互爲倚數 以符號表之,如次:

$$z=f(x, y); \qquad x=\phi(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n);$$

$$\psi(x, y, z)=0; \qquad F(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n=0$$

§ 88. 極限 Limit 設 x 爲一整數 n 之倚數,於 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots n$ 時, x 爲

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots\cdots x_n$$

如任與一正數 α, 吾人可求得一整數 n', 且於 $n>n'$ 時, 恆有

$$|x_n-a|<\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(中 a 爲一定數 $|x_n-a|$ 表 x_n-a 之絕對值)

則依定義 a 爲 x_n 之極限. n 趨近於無窮大.

(1)式之意義,與下式相同.

$$a-\alpha < x_n < a+\alpha$$

卽無論 n 若何增加時, x_n 恆介於 $a-\alpha$ 及 $a+\alpha$ 之間也.

例如: 變數 $\quad \frac{9}{10},\ \frac{99}{100},\ \frac{999}{1000}, \cdots\cdots \frac{10^n-1}{10^n}$

之限爲 1, 因與 $\alpha=\frac{1}{100}$, 當 $n>2$ 時,

$$1-x_n=\frac{1}{10^n}$$

恆小於 $\frac{1}{100}$ 故也.

$\alpha=\frac{1}{1,000}$, 則 $n'=3$.

$\alpha=\frac{1}{10,000}$, 則 $n'=4$.

餘倣此.

又如 $\quad x_n \quad \frac{n-1}{n} \quad \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}, \cdots\cdots \frac{n-1}{n}\right)$

之限亦爲 1, 因

$$1-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$

令 $\alpha=\frac{1}{100}$ 則 $n'=100$ 乃可.

$\alpha=\frac{1}{1,000}$ 則 $n'=1000$ 乃可.

§ 89. 設兩有變數 x, y 其極限各爲 a, b.

余謂 $x+y$ 之限爲 $a+b$.

蓋 x 之限爲 a, 吾人必可求得 n', 俾有

$$\left|x-a\right|<\frac{\alpha}{2}$$

同理於 n 大於 n' 時, 亦有

$$\left|y-b\right|<\frac{\alpha}{2}$$

相加, 得 $$\left|(x+y)-(a+b)\right|<\alpha$$

故 $x+y$ 之限爲 $a+b$

同樣 可證得 $x-y$ 之限爲 $a-b$

復次, 余謂 xy 之限爲 ab.

蓋 $$\left|xy-ab\right|=x\left|y-b\right|+b\left|x-a\right|$$

令 A 爲 x 及 b 兩數之大者, 欲

$$\left|xy-ab\right|<\alpha$$

但取
$$|x-a|<\frac{a}{2A}$$
$$|y-b|<\frac{a}{2A}$$
卽可,此恒可能者也.

同樣 如 y 之限 $\neq 0$ 亦可證得 $\frac{x}{y}$ 之限爲 $\frac{a}{b}$

§ 90. 定理 1°. 一增變數 x_n 恒小於一定數者,必有一限小於此定數,或等於此定數.

2°. 一減變數恒大於一定數者,必有一限大於此定數,或與之等.

例如: §88所擧二例,皆增變數之小於一定數者,故均有限.證從略,初讀者知其應用卽可.

§ 91. 無理數 Irrational Number 設有兩有理變數 x_n, y_n, x_n 爲增變數,而 y_n 爲減變數,且 y_n 中之最小者,恒大於 x_n 中之任何數,卽有
$$x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n<y_n<\cdots\cdots<y_2<y_1$$
幷設
$$y_n-x_n<\epsilon \qquad (n>n')$$
ϵ 爲一正數,可小至吾人所欲小者;換言之,卽 y_n-x_n 之極限於 n 大於 n' 時爲零也.

依 §90. x_n 有一限 a, y_n 有一限 b, 余謂
$$a=b$$
非然者,如 $a-b$ 不爲零,則
$$y_n-x_n>a-b$$

而 y_n-x_n 不為零，與原設相背，令 λ 為 x_n 及 y_n 之公限，

x_n 稱第一類數，

y_n 稱第二類數，

λ 稱第三類數，

第一類數之特性，為任一數必小於同類之一數，因其恒增也；第二類之特性，為任一數必大於同類之一數，因其恒減也；而第三類特性，則為既不小於第一類之任何數，亦不大於第二類之任何數，當 λ 為有理數時，則可為第一類之最大者，亦可為第二類之最小者。

例如：以小於 2 之各有理數，依其遞增次第列之，成為第一類；以大於 2 之各數，依其遞減次第列之，成為第二類，則 2 為第三類，亦可屬於一類或二類。

余謂 x_n 及 y_n 有時不能以一有理數為公限。此時第三類數劃然為第三類數，謂之無理數。例如 2 非整方，以各數其平方小於 2 者，列為第一類；而以平方大於 2 者，列為第二類，則 x_n 及 y_n 不能以一有理數 a 為其公限，非然者，x_n 之限為有理數 a，而 x_n^2 之限為 a^2，是

$$2=a^2$$

如是則 2 為整方矣，與原設不合。故此時 $x_n\ y_n$ 定一數 λ，

$$\lambda=\sqrt{2}$$

λ 謂之無理數，凡不盡根皆無理數也。無理數之數字無窮，實際上取其相近值可也。故無理數運算與小數運算

同.最奇者,如以一單位長代 1,則 $\sqrt{2}$ 可以幾何製圖法得之,因 $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$. $\sqrt{2}$ 卽正角三角形兩小邊均等於 1 者之弦也.

§92. 無理數比較法 Comparison of Irrational Numbers

設 λ 及 λ' 爲兩無理數.

λ 爲 x_n 及 y_n 所定,λ' 爲 x'_n 及 y'_n 所定.

其一. 如 n 任如何增加時,恒有

$$x_n < y'_n$$

$$x'_n < y_n$$

則
$$\lambda=\lambda'$$

其二. 如有
$$x_n > y'_n$$

則
$$\lambda > \lambda'$$

其三. 如有
$$y_n < x'_n$$

則
$$\lambda < \lambda'$$

§93. 倚數之特性—連續性 Continuity

設 $y=f(x)$,當 x 在 a, b 間隔內爲有定倚數,令 $x=x_0$ $(a<x_0<b)$

則有
$$y_0=f(x_0)$$

如與 x 一增量 h,則 y 亦有一增量 k,

$$k=f(x_0+h)-f(x_0)$$

任與一正數 β,如能於 $|h|<\alpha$ 時,α 亦一正數,有

$$|k|<\beta$$

則 y 謂之 x 在 $a\,b$ 間隔內之連倚數,意卽 x_0 所增減者微,而 y_0 所增減者亦微也,亦謂兩增能同時趨近於零.

增性 *Increasing.* 如 x_0 增, y_0 亦隨之而增; x_0 減, y_0 亦隨之而減者,則 y 謂之 x $(a\,b)$間隔內之增倚數,以式表增性,則有

$$\frac{k}{h}>0$$

減性 *Decreasing.* 如在 $a\,b$ 間隔內,恒有

$$\frac{k}{h}<0$$

則 y 謂之 x 之減倚數.

斷性 *Discontinuity.* 斷性有二種;其一,任與一正數 A, 當

$$|h|<\alpha$$

時,恒有

$$|k|>A$$

卽 x 愈趨近於 x_0, 而 y 趨近於一數,可大至吾人所欲,此時 y 當 $x=x_0$ 時爲斷倚數.於是 y 在$(x_0-\alpha,\ x_0+\alpha)$間隔內無數值.故 y 不能稱爲 $a\,b$ 間隔內之有定倚數.間隔當至少分爲二,卽 $(a,\ x_0-\alpha)$ 與 $(x_0+\alpha,\ b)$ 是也.

其二. 當 x 趨近於 x_0 時, y 爲無定式;而當 α 由負數趨近於零時, y 之限爲 y_1; α 由正數趨近於零時, y 之限爲 y_2, 此時 y 亦爲 x 之斷倚數.凡所論者,可推之於 $z=f(x,y)$.

§94. 倚數分論 *Classification of Elementary Function*

初等倚數可分二類:

I. 代數倚數 *Algebraic Functions.*

a. 整式 $y=ax^2+bx+c,\quad y=x^3+px+q,\cdots\cdots$

b. 有理式 $y=\dfrac{x}{x-1},\qquad y=\dfrac{2+x}{x^2+1},\cdots\cdots$

c. 無理式 $y=\pm\sqrt{x+1},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\cdots\cdots$

II. 超然倚數 *Transcendental Functions.*

a. 指數倚數 $y=a^x,\qquad y=e^x,\cdots\cdots$

對數倚數 $y=log_a x,\quad y=L\,x$

b. 圓倚數 $y=sin\,x,\quad y=cos\,x,\quad y=tan\,x$

反圓倚數 $y=arc\,sin\,x,\cdots\cdots\quad y=arc\,tan\,x$

c. 雙曲線倚數 $y=sh\,x,\quad y=ch\,x$

反雙曲線倚數 $y=argsh\,x$

c. 可屬於 a.

§ 95. 定理 凡整式無論在何間隔內,均為連倚數.

例如: $y=ax^2+bx+c\qquad(a>0)$

令 $x=x_0$, 則 $y_0=ax_0{}^2+bx_0+c$

與 x_0 一增量 h, 則 y_0 之增量為

$$k=a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c-(ax_0^2+bx_0+c)$$

$$=ax_0^2+bx_0+c+2\,ahx_0+bh+ah^2-(ax_0^2+bx_0+c)$$

$$=2\,ah\,x_0+bh+ah^2$$

$$=h(2\,a\,x_0+b+ah)$$

欲 $$|k|<\beta$$

但取 $$|h|<\frac{\beta}{2\,ax_0+b+ah}$$

卽可.

且 $$\frac{k}{h}=2\,ax_0+b \qquad (h\ \text{趨近於零})$$

故 $2\,ax_0+b>0$; 或 $x_0>-\dfrac{b}{2a}$ y 爲增倚數

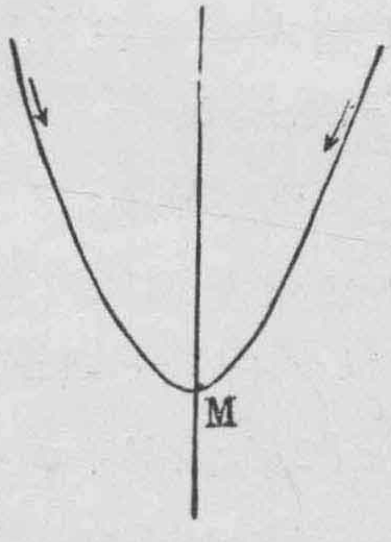
$2\,ax_0+b<0$; 或 $x_0<-\dfrac{b}{2a}$ y 爲減倚數

以表示其變值.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$ 減	M	$\nearrow$ 增	$+\infty$

M 爲 y 之極小.

以圖表其變跡如次:



$$x=-\frac{b}{2a}$$

此曲線對 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 成對稱,謂之拋物線.

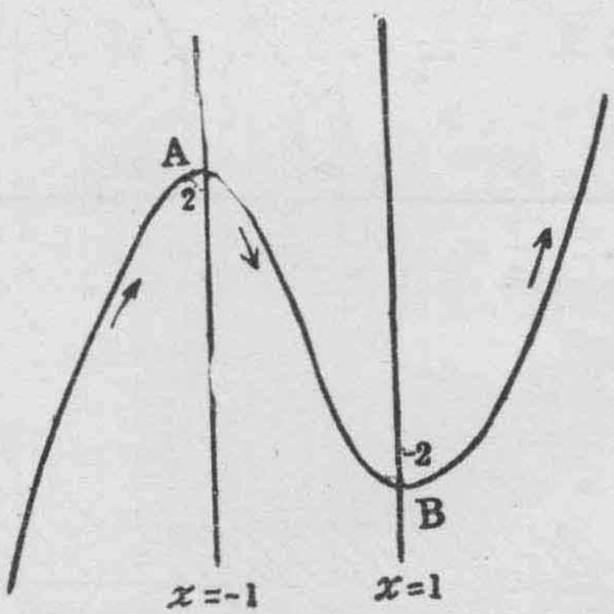
又例:
$$y=x^3-3x$$

此時
$$\frac{k}{h}=3x^2-3$$

故得表如下:

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+2$ 極大		-2 極小	$\nearrow$	$+\infty$

以圖表之如次:



§ 96. **定理** 凡有理式分母無根者爲連倚數;而分母有根者,則當 x 趨近於此根時,爲斷倚數.(假設分母分子無公根.)

例一.　$$y=\frac{2+x}{x^2+1}$$

因 x^2+1 不為零,故 y 恒為 x 之連倚數.如以直線 $x=c$ 割曲線,則 y 只有一值;如以 $y=c$ 割之,則 x 之值,為下式之根.

$$c=\frac{2+x}{x^2+1}$$

亦卽　$$cx^2-x+c-2=0$$

欲此式有二實根,必

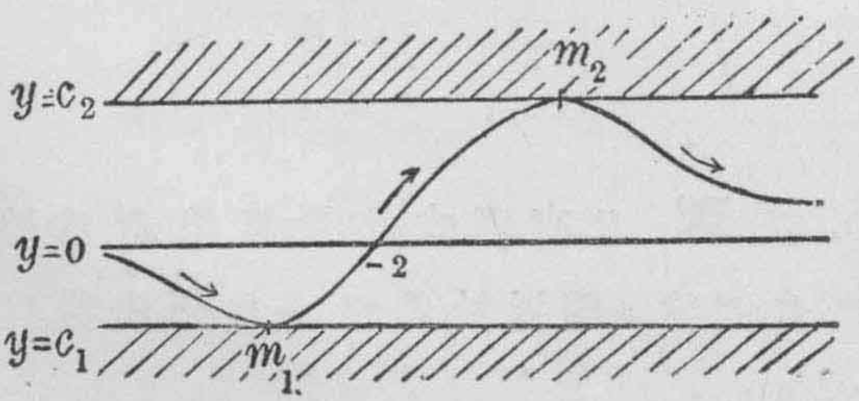
$$\delta=1-4c(c-2)>0$$

而　$$-4c^2+8c+1=0$$

此式恒有二實根,一正,一負,命為 c_1 c_2, 欲 $\delta>0$, 必 c 介於 c_1 及 c_2 乃可;又 $x=\pm\infty$, $y=0$, 故得表如次:

x	$-\infty$		m_1		-2		m_2		$+\infty$
y	$-\varepsilon$	$\searrow$	c_1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	c_2	$\searrow$	$+\varepsilon$

以圖表之如下:



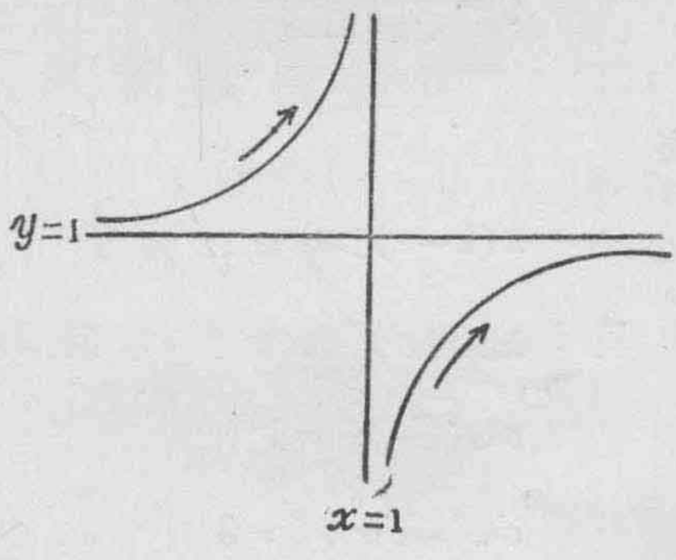
此時 $y=0$ 爲曲線之幾近線.

例二. $$y=\frac{x}{x-1}$$

此時 $x-1=0$ 故 $x=1$, y 爲斷倚數. 於是 y 在 $-\infty, 1-\epsilon$, 及 $1+\epsilon, +\infty$, 兩間隔內爲連倚數. 得表如次:

x	$-\infty$		1			$+\infty$
y	1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	1

以圖表之,如次:



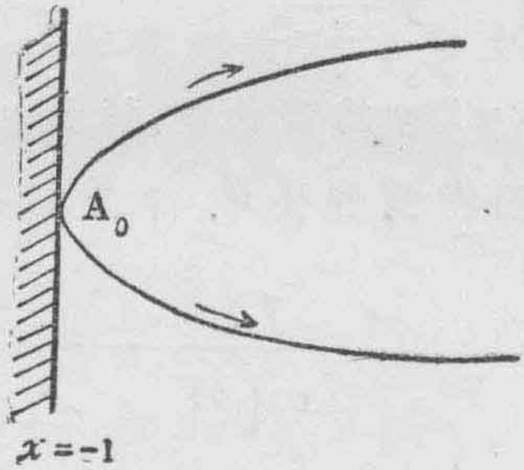
§ 97. 例一. 設

$$y=\pm\sqrt{x+1}$$

欲 y 有實値, 必 $x+1>0$ 或 $x>-1$ 於是得表如次:

x	-1	$+\infty$
y	0	$\pm\infty$

其變跡如下:



例二. $$y=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

欲 y 有實值必

$$x(1-x)>0$$

故 x 必介於 0 及 1 之間乃可. 令 $y=c$, 則

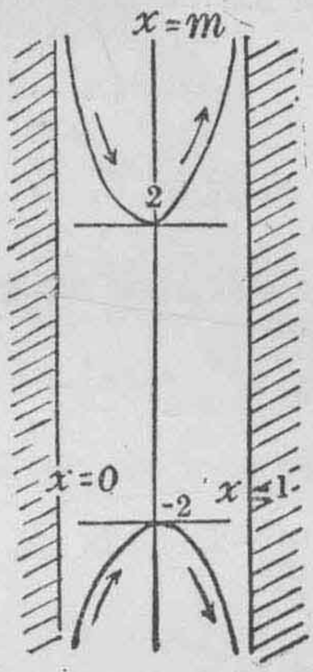
$$c^2x(1-x)=1$$

或 $$c^2x^2-c^2x+1=0$$

此時 δ 爲 $$\delta=c^2-4c^2=c^2(c^2-4)$$

$\delta>0$, 卽 $c^2-4>0$, 卽 c 之絕對值當大於 2, 用正數得表如次:

x	0	m	1
y	$+\infty$	2	$+\infty$



§ 98. 指數倚數 Exponential Function 其形為

$$y=a^x$$

$a>0$ 而異於 1, x 為一實數.

1°. x 為正整數. $a^x=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{x\text{ 因子}}$

2°. x 為分數, $x=\frac{p}{q}$, 則

$$a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$$

3°. x 為無理數, 則 a^x 為 a^{x_n} 之限, x_n 為一有理數,其限為無理數 x 者, n 趨近於無極.

4°. x 為負數, 令 $x=-x'$, x' 為正, 則

$$a^x=a^{-x'}=\frac{1}{a^{x'}}$$

定理. a^x 爲 x 之連倚數,因

$$k=a^{x_0}(a^h-1)$$

當 h 趨近於 0 時, a^h 趨近於 1, 故 k 趨近於零.

如 $a>1$; 則 a^x 恒爲正, 且爲增倚數, 因

$$\frac{k}{h}=a^{x_0}\frac{a^h-1}{h}$$

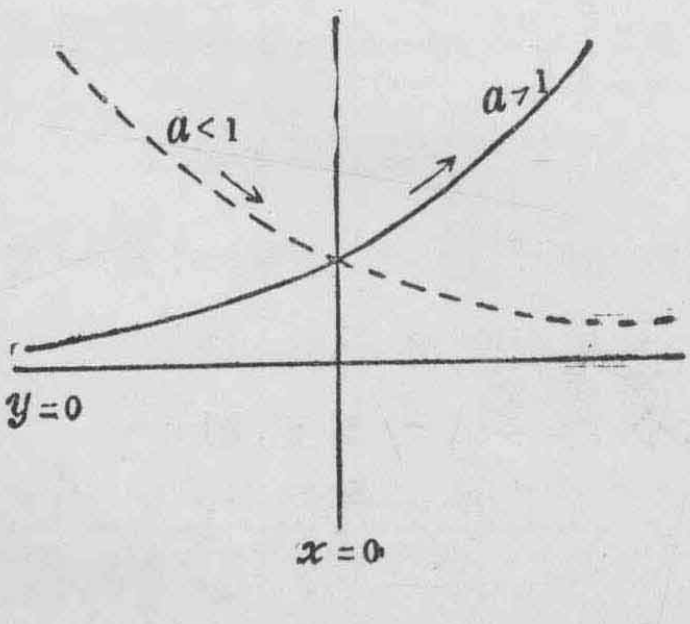
如 h 爲正 $a^h>1$, 故 a^h-1 亦爲正. $\frac{k}{h}>0$

,, h 爲負, $a^h<1$, ,, a^h-1, ,, ,, ,,. $\frac{k}{h}>0$

k, h 恒有同號, 故爲增倚數, 得表如次:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

其變跡如下:



如 $a<1$, 則 a^x 爲 x 之減倚數,如

$$a=e$$

則爲納氏指數倚數.

§ 99. 對數倚數 Logarithmic Function 如令

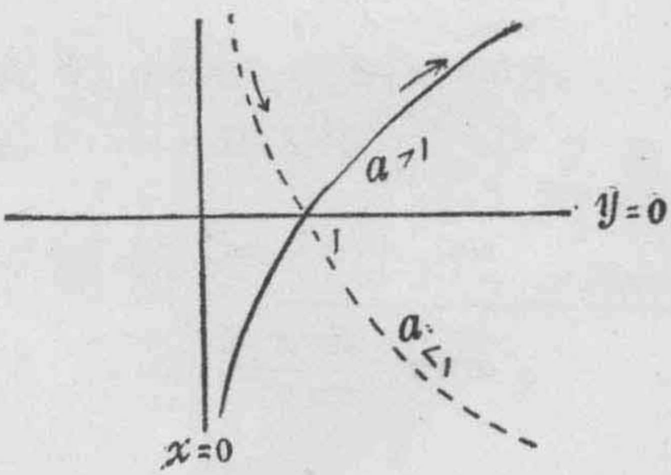
$$x=a^y \qquad \text{(此時 } x \text{ 必爲正)}$$

則 y 亦可視爲 x 之倚數,此倚數謂之對數倚數,以符號表之如次:

$$y=log_a x$$

$a>1$ 時,變值表如次:

x	0		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

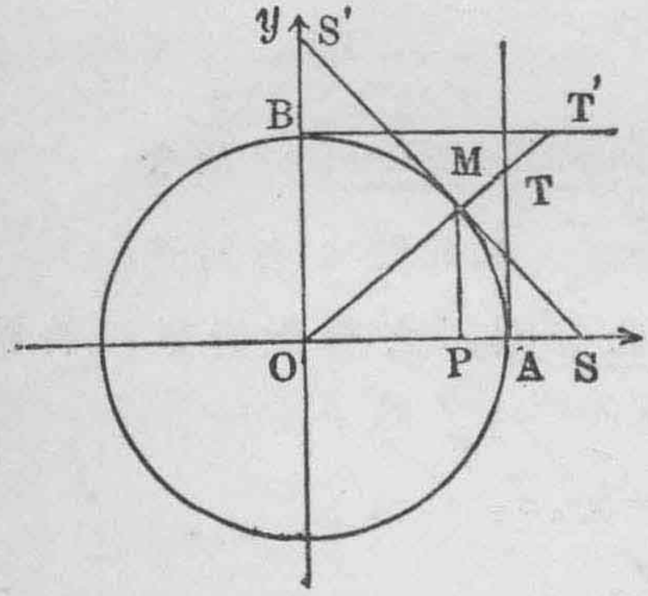


§ 100. 圓倚數 Circular Functions 令 O 爲一圓,其

半經 $OA=1$. OA, OB 爲由圓心所作之兩正交軸.

令 $$\widehat{AM}=x,$$

作 AT, BT, MS, 諸切線, 又作 MP 正交於 OA.



依定義

$$\overline{MP}=\sin x$$

$$\overline{OP}=\cos x$$

$$\overline{AT}=\tan x$$

$$\overline{BT'}=\cot x$$

$$\overline{OS}=\sec x$$

$$\overline{OS'}=\operatorname{cosec} x$$

當 x 弧變時,正,餘弦 $\sin x$, $\cos x$ 等等亦隨之而變, 故 $\sin x$, $\cos x$ 爲 x 之倚數, 通稱圓倚數. 圓倚數均爲週期倚數, 因

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x$$

$$\tan(x+k\pi)=\tan x \qquad k \text{ 爲正負整數}$$

此各線之關係, 爲

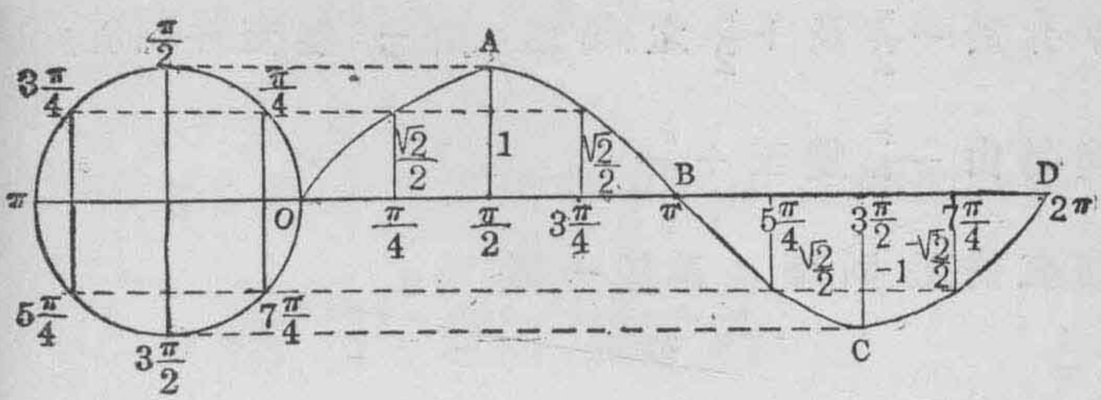
$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sec x \quad \frac{1}{\cos x}$$

....

§ 101. 正弦 $\sin x$ 之變跡 可用下法作圖:



繼續求之,則得同樣之曲線,相連至於無極.

同法可用於 cos, tan, 及 cot. 但 $\tan x$ 於 x 爲 $\frac{\pi}{2}$, $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 時爲斷倚數;而 $\cot x$ 於 $x=k\pi$ 時爲斷倚數.

§ 102. 定理 $\frac{\sin x}{x}$ 當 x 趨近於零時之限爲 1.

因
$$\sin x < x < \tan x$$

或
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

當 x 趨近於零時, $\cos x$ 爲 1, 故 $\frac{x}{\sin x}$ 之限爲 1,

§ 103. 反圜倚數 Inverse Circular Function 正弦弧

倚數. 令
$$x=\sin y$$

$|x|<1$, 則 y 亦可於一定間隔內視爲 x 之倚數,以符號表之,爲
$$y=\text{arc}\sin x$$

如 y 介於 $-\frac{\pi}{2}$ 及 $+\frac{\pi}{2}$ 之間,則 x 由 -1 變至 $+1$ 時,y 亦連續變易由 $-\frac{\pi}{2}$ 變至 $+\frac{\pi}{2}$.

正切弧倚數,同理 x 爲任一數

$$y=arc\ tan\ x$$

表示 y 爲一弧,其正切適爲 x,即

$$x=tan\ y$$

§ 104. 雙曲線倚數 Hyperbolic Function

依定義

$$Ch\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$Sh\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$Th\ x=\frac{Sh\ x}{Ch\ x},$$

且有 $$Ch^2\ x-Sh^2\ x=1$$

故與指數倚數無異.

反雙曲線倚數,令

$$\frac{e^y-e^{-y}}{2}=x$$

則得 $$e^{2y}-2\,x\,e^y-1=0$$

其正根爲 $$e^y=x+\sqrt{1+x^2}$$

於是 $$y=L\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

y 謂之雙曲線倚數,以符號表之如次:

$$y=Arg\,Sh\,x.$$

雙曲線倚數性質,多與圓倚數相同,其週期為虛數.

第十章 練習題

1° 求 $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ 當 $x=a$ 之極限.

解法. 宜將分子分母公根消去.

2° 求 $\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$, 當 $x=a$ 之極限.

答 $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

3° 求 $\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{\sqrt[p]{x}-\sqrt[p]{a}}$, 當 $x=a$ 之極限.

答 $\dfrac{p\sqrt[p]{a^{p-1}}}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$

4° 求 $\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x^2-\sqrt[5]{4x^5-3}}$, 當 $x=1$ 之極限.

答 $-\dfrac{7}{24}$

5° 令 $x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \cdots x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$

求 x_n 之極限.

6° 求比較 π^2 及 $\sqrt{10}$.

7° 試討論 $y=\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$

8° 試討論 $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

9° $\dfrac{a^x}{x}$ 當 x 趨近於無極之限爲無極 $(a>1)$.

10° $x\log_a x$ 當 x 趨近於 0 時爲 0.

11° 求 $Ch\,x$, $Sh\,x$, $Th\,x$, 之變值及變跡.

第十一章　無窮小

§ 105. 無窮小定義　無窮小者,變數之極限爲零者也.故一定數無論如何小,均非無窮小.

設 $f(x)$ 爲 x 之倚數,如當 x 趨近於零時,$f(x)$ 亦趨近於零.則 $f(x)$ 與 x 同爲無窮小.如

$$\frac{f(x)}{x^p}$$

之極限當 x 趨近於零時爲一定數 A,則 $f(x)$ 謂之 p 級無窮小.$p=1$,則 x 及 $f(x)$ 爲同級.於是可令

$$f(x)=A\,x^p+a$$

a 對於 x^p 爲無窮小.$A\,x^p$ 稱 $f(x)$ 之主量.

例如:

$$\frac{\sin x}{x}$$

之極限當 x 趨近於 0 時爲 1.故 $\sin x$ 與 x 爲同級無窮小,且爲等主量無窮小.

又如

$$y=\sin x-x$$

當 x 趨近於 0 時,亦趨近於零,故 y 爲無窮小.但(見十三章)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\cdots\cdots$$

故

$$y=\sin x-x=-\frac{x^3}{6}+\cdots\cdots$$

於是　$$\frac{y}{x^3}=-\frac{1}{6}\qquad(x\to 0)$$

故 y 對於 x 爲第三級無窮小.

又如　$$y=1-\cos x$$

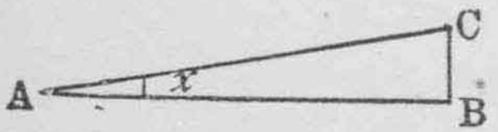
當 x 趨近於 0 時, $\cos x$ 趨近於 1, 而 y 趨近於 0, 故 y 爲無窮小.

但　$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\cdots\cdots$$

而　$$\lim\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad(x\to 0)$$

故 y 爲第二級無窮小.

設 ABC 爲一正角三角形, $\hat{A}$ 爲無窮小, 余謂 $AC-AB$ 爲第二級無窮小, 因



$$AC-AB=AC-AC\cos x$$
$$=AC(1-\cos x)$$

AC 爲定數, 故 $AC-AB$ 與 $1-\cos x$ 同級, 卽對於 x 爲第二級也. 故實際上 AC 與 AB 可謂爲相等. 以其差爲二級無窮小也.

亦有無窮小爲無級者, 如 $x\log x$ 當 x 趨近於 0 爲 0. 而

$$\frac{x\log x}{x^p}\to 0\qquad p>1$$

$$\frac{x\log x}{x^p}\to\infty\qquad p\leqslant 1$$

故 $x\log x$ 無定級.

§ 106. 已與同級無窮小

$$y=(A+\epsilon)x^p$$

$$z=(B+\epsilon_1)x^p$$

相加,得 $$y+z=(A+B+\epsilon+\epsilon_1)x^p$$

其主量為 $(A+B)x^p$; 如 $A+B\neq 0$, 則其和仍為 p 級無窮小,如 $A+B=0$, 則其和至少當為 $p+1$ 級無窮小.

§ 107. 已與

$$y=(A+\epsilon)x^p$$

$$z=(B+\epsilon_1)x^q$$

相乘,得 $$yz=(AB+\epsilon_2)x^{p+q}$$

故兩無窮小相乘,其級等於兩無窮小之級之和.

§ 108. 相除,得

$$\frac{y}{z}=\frac{A+\epsilon}{B+\epsilon_1}x^{p-q}$$

1° 如 $p-q=0$, 則 $\frac{y}{z}$ 有一限為 $\frac{A}{B}$.

2° 如 $p-q>0$, 則 $\frac{y}{z}$ 之限為 0.

3° 如 $p-q<0$, 則 $\frac{y}{z}$ 之限為無極.

§ 109. 等主量無窮小 *Equivalent Infinitely Small.*

兩同級無窮小之比為 1 者,謂之等主量無窮小.

定理. 如兩無窮小之主量相等,則其差爲無窮小;轉言之,如兩無窮小之差爲無窮小,則兩無窮小之主量相等.

證. 設 y 及 z 爲等主量無窮小,依定義

$$\frac{y}{z}=1+\epsilon$$

ϵ 爲無窮小,於是

$$y=z+\epsilon z$$

故
$$\frac{y-z}{z}=\epsilon$$

$y-z$ 對於 z 爲無窮小,

轉理. 如
$$\frac{y-z}{z}=\epsilon$$

由此,得
$$\frac{y}{z}=1+\epsilon$$

故 y 及 z 爲等主量無窮小.

§ 110. 定理. 凡求無窮小之比之限,可以等主量無窮小代之,其比不變.

證. 設 y, z 爲兩無窮小; y', z' 爲其等主量無窮小.

$$\frac{y'}{z'}=\frac{y}{z}\times\frac{y'}{y}\times\frac{z}{z'}$$

於是
$$\lim\frac{y'}{z'}=\lim\frac{y}{z}\times\lim\frac{y'}{y}\times\lim\frac{z}{z'}$$

但
$$\lim\frac{y'}{y}=1$$

$$\lim\frac{z}{z'}=1$$

故 $$\lim\frac{y}{z}=\lim\frac{y'}{z'}$$

例如: $$y=\frac{\sin x+\tan x+x^2}{x}$$

之限當 x 趨近於 0 時, 可以

$$y'=\frac{x+x+x^2}{x}$$

代之 $$\lim y'=2 \qquad x\to 0$$

故 $$\lim y=2$$

又例. 試求 $$y=\frac{\sin x-x+x^4}{3\,x^3}$$

當 x 趨近於 0 時之限. 此時 $\sin x-x$ 如以 x 代 $\sin x$, 則爲零, 但 $\sin x-x=-\frac{x^3}{6}+\epsilon$ 以此代 $\sin x-x$, 則有

$$y=\frac{-\frac{x^3}{6}+\theta\,x^4}{3\,x^3}$$

於 $$\lim y=-\frac{1}{18}. \qquad (x\to 0)$$

在乘積則更易, 如 $x\sin^2 x\cos x$ 可以 x^3 代之. $(x\to 0)$

§ 111. 設有 n 個無窮小:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots\alpha_n$$

其等主量無窮小爲

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\cdots\beta_n$$

令
$$S_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n$$

$$\Sigma_n=\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_n$$

如 S_n 當 n 趨近於無窮大時,有一限 S;則 Σ_n 亦有一限且與之相等.蓋

$$\frac{S_n}{\Sigma_n}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_n}$$

設 $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ 爲各比之小者,$\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ 爲最大者,則

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}<\frac{S_n}{\Sigma_n}<\frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

惟
$$lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=1$$

$$lim\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1$$

故
$$lim\frac{S_n}{\Sigma_n}=1$$

卽
$$lim\ S_n=lim\ \Sigma_n=S$$

按無窮小性質運算與數無異.然不能獨立存在,以均須以零代其極限故也.然其比極重要,因可爲定數,引數卽兩無窮小之比之限也.無數無窮小之和亦重要,蓋積分卽無數無窮小之和之限.是故無窮小實立分析之基.牛頓稱微積爲流數運算,正以無窮小悉爲變數,有類於流動之數也.

第十一章　練習題

1° 問 $x-\tan x$ 爲何級無窮小?　$(x\to 0)$

2° 設 x 爲一無窮小,試求下各式之主量:

$$\arcsin x,\ \arctan x,\ \log(1+x),\ x-\arcsin x$$

$$x-\log(1+x),\ e^x-1,\ \log\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin^3 x\log(1+x)\tan\frac{x}{3},\ \sqrt{\sin x}-\sqrt[4]{x\tan x}$$

3° 求下各式之限:

$$\frac{\sin x}{1-\cos x},\ \frac{\sin x}{\log(1+x)},\ \frac{\sin(\arctan x)-\alpha x-\beta x^3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1+\gamma x+\delta x^2}},\quad 當\ x=0$$

$$\frac{\log\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)}{\sin\left(\dfrac{x+a}{x^2+b}\right)},\qquad 當\ x=\infty$$

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1},\qquad 當\ x=\infty$$

$$\tan x-\tan 3x,\qquad 當\ x=\frac{\pi}{2}$$

第十二章 引數

§ 112. 定義 設 $y=f(x)$ 在 a, b 間隔內爲有定倚數,又爲連倚數.令 $x=x_0$, x_0 在間隔內,則

$$y_0=f(x_0)$$

與 x 一增量 h, 則 y_0 之增量 k. 爲

$$y=f(x_0+h)-f(x_0)$$

因 $f(x)$ 爲連倚數, k, h 同時趨近於零,如

$$\frac{k}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

當 h 趨近於0時,有一限,令爲 $f'(x_0)$, 依定義 $f'(x_0)$ 爲 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 之引數,即

$$f'(x_0)=lim\frac{f(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

如此情形適於 x 在間隔內之各值,則可書爲

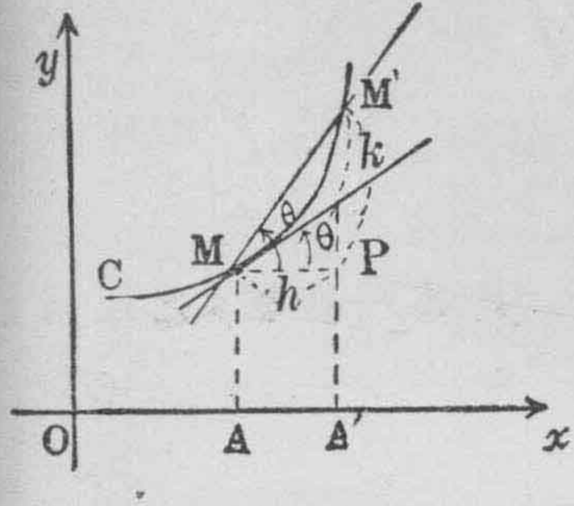
$$f'(x)=lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f'(x)$ 爲一新倚數,謂之 $f(x)$ 之引倚數. $f'(x)$ 亦可作 y'

例如: $y=x^2$

則 $y'=2x$

§ 113. 引數之幾何意義 設曲線 C 代表 $y=f(x)$. M 點之縱橫量爲 x, y.



M'點之縱橫量為$x+h$, $y+k$.

$$\frac{k}{h}=\frac{M'P}{MP}=\tan\theta.$$

即割線MM'之角係數也.

如 $\lim\frac{k}{h}=\tan\theta'$.

$\tan\theta'$為M點切線之角係數.

§114. 倚數之倚數 Function of Function.

設$y=(u)$為u之連倚數,而

$$u=\phi(x)$$

又為x之連倚數,y亦可視為x之倚數,謂之倚數之倚數.

余謂如$f(u)$對於u有一引數$f'(u)$, u對於x有一引數u'_x,則

$$y'_x=f'(u)\,u'_x$$

或簡書為 $$y_x=y_u\,u_x\cdots\cdots\cdots(1)$$

證. 與x一增量Δx,同時u與y亦各有增量為Δu, Δy, y_x為$\frac{\Delta y}{\Delta x}$之限,而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

今 $$\lim\frac{\Delta y}{\Delta u}=y_u$$

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = u_x$$

故 $$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_x = y_u\ u_x$$

§ 115. 令 $y = u \pm v$; y, u, v 均爲一變數 x 之連倚數.

則 $$y_x = u_x \pm v_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

如 $$y = uv$$

余謂 $$y_x = uv_x + vu_x \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

蓋與 x 一增量 Δx, 則得各相當增量 Δy, Δu, Δv

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

$$= u\Delta v + v\Delta u$$

以 Δx 除之, 求其限, 卽得

$$y_x = uv_x + vu_x$$

或書爲 $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad y' = uv' + vu'$$

此式推廣甚易.

§ 116. 令 $y = \dfrac{u}{v}$

余謂 $$y_x = \frac{vu_x - uv_x}{v^2}$$

或 $$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

蓋 $$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$=\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

$$=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v^2)}$$

以 Δx 除之 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

當 Δx 趨近於零時, $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ 均各趨近於零,故其極限爲

$$y_x=\frac{vu_x-uv_x}{v^2}$$

或 $$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

§ 117. 問題 求 $y=x^m$ 之引數, m 爲正整數.

此時 $$\Delta y=(x+\Delta x)^m-x^m$$

$$=mx^{m-1}\Delta x+P\,\overline{\Delta x}^2$$

$$P=C_m^2\,x^{m-2}+\cdots\cdots+\overline{\Delta x}^{m-2}$$

兩端以 Δx 除之,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=mx^{m-1}+\Delta x\cdot P$$

P 當 x 爲定數時,亦爲定數,故 $\Delta x\cdot P$ 之限爲零. $(\Delta x\rightarrow 0)$

於是求其極限,得

$$y'=mx^{m-1}$$

推廣之,如令 $$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$$

則 $$y'=ma_0x^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}$$

常數之引數爲零,以其增量恒爲零也.

§ 118. a^x 之引數,此時

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\,\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

欲求其限,令

$$a^{\Delta x}-1=\alpha$$

α 同時與 Δx 趨近於零,而

$$a^{\Delta x}=1+\alpha$$

$$\Delta x=\log_a(1+\alpha)=L\,(1+\alpha)\times\frac{1}{La}$$

於是 $$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{\alpha}{L(1+\alpha)}\times La=\frac{L\,a}{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

當 α 趨近於零,$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 之限爲 e, $L\,e=1$, 故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L\,a}{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}=L\,a$$

而 $$y'=a^x\,L\,a$$

如 $$y=e^x$$

則亦有 $$y'=e^x$$

§ 119. $y=\log_a x$ 之引數

此時 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

令
$$\frac{\Delta x}{x}=a$$

a 與 Δx 同時趨近於零,於是

$$\Delta x=a\cdot x$$

上式變爲 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\log_a(1+a)^{\frac{1}{a\cdot x}}=\frac{1}{x}\log_a(1+a)^{\frac{1}{a}}$$

求其限,則 $$y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\,La}$$

如 $$y=Lx$$

$$y'=\frac{1}{x}$$

§ 120. 求 $y=u^m$ 之引數, m 爲任意的

兩端取其對數,得

$$Ly=m\,Lu$$

$$y=e^{m\,Lu}$$

$$y'=e^{m\,Lu}\times m\frac{u'}{u}=mu^{m-1}u'$$

應用 如 $$y=\frac{1}{x^m}$$

$$y=x^{-m}$$

故 $$y'=-mx^{-m-1}=-\frac{m}{x^{m+1}}$$

§ 121. 求 $y=\sin x$ 之引數

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

當 Δx 趨近於零時,第一因子之限爲 1, 第二因子之限爲 $\cos x$, 故

$$y'=\cos x$$

同理,可求 $y'=\cos x$ 之引數爲

$$y'=-\sin x$$

於是欲求 $y=\tan x$

但應用(4)式可矣.因

$$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

故

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

§ 122. 如 y 爲 x 之倚數, x 亦可爲 y 之倚數;於是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

故

$$y'=\frac{1}{x'}$$

應用 $y=arc\ sin\ x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<1-\frac{\pi}{2},\ |x|<1\right)$

依定義 $x=sin\ y$

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{cos\ y}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

又 $y=arc\ tan\ x$

依定義 $x=tan\ y$

準上 $y'=\frac{1}{x'}=\cos^2 y=\frac{cos^2 y}{cos^2 y+sin^2 y}$

$$=\frac{1}{1+tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

卽 $y'=\frac{1}{1+x^2}$

§123. 雙曲線倚數之引數

如 $y=ch\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

則 $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=sh\ x$

如 $y=sh\ x$

則 $y'=ch\ x$

又令 $y=th\ x$

則 $y'=\frac{1}{ch^2 x}$

雙曲線反倚數,亦易求其引數,如:

$$y = arg\, sh\, x$$

$$x = sh\, y$$

$$y' = \frac{1}{ch\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

即 $$L(x + \sqrt{1 + x^2})$$

之引數,爲 $$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

依此可求 $y = arg\, ch\, x$, $y = arc\, th\, x$,……

第十二章 練習題

1° 求 $y = arc\tan \dfrac{x + a}{1 - a x}$ 之引數,并直接證明 y 與 $arc\tan x$ 之引數相同.

2° 求下各倚數之引數:

$$y = arc\cos(2x^2 - 1), \quad y = arc\sin(3x - 4x^3)$$

$$y = arc\tan x \frac{1}{x}, \qquad y = arc\sin(\cos x)$$

$$y = arc\tan \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$$

3° 求 $y = L\cos x + i\sin x$ 之引數

4° 求下各式之 n 次引數:

$$y = (a + b x)^m$$

$y=\cos^2 x$

$y=\log x$

$y=\frac{1+x}{1-x}$

$y=e^x \sin x$

$y=\arctan x$

第十三章 倚數展式,極大與極小

§ 124. 樂爾氏定理 Roll's Theorem 設 $f(x)$ 在 a, b 間隔內,為連續有定倚數,又賦有有定引數者;如 $f(a)=0$, $f(b)=0$, 則亦有 $f'(c)=0$. c 介於 a, b 之間者.

證. $f(x)$ 在間隔內不能增至無窮,故必有一極大,或極小,介於 a, b 之間.設 c 為是值,$f(c)$ 比左右鄰值 $f(c-h)$ $f(c+h)$ 均大,故

$$f(c+h)-f(c); \qquad f(c-h)-f(c)$$

二式之號相同,於是

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}; \qquad \frac{f(c-h)-f(c)}{h}$$

二式之號不同,但此二式之限即為 $f'(c)$. 故 $f'(c)=0$. 否則 $f(x)$ 在 c 點有二引數矣.與原設引數為有定者不合.

§ 125. 定理 設 $f(x)$ 在 a, b 及其間隔內各有定值,且賦有引數為有定者,則當有

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

c 介於 a, b 之中

令 $$\Phi=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

於是 $$f(b)-f(a)-\Phi(b-a)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又令 $$\psi(x)=f(x)-f(a)-\Phi(x-a)$$

則 $\psi(a)=0$

$\psi(b)=0$ [準(1)式]

故有 $\psi'(c)=0$

c 介於 $a\ b$ 之間

但 $\psi'(x)=f'(x)-\Phi$

於是得 $f'(c)-\Phi=0$

故 $\Phi=f'(c)$

故 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

令 $b-a=h$

$c=a+\theta h \qquad (0<\theta<1)$

則上式變爲

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

是謂有限增量公式.

§ 126. 戴氏公式 Taylor's Formula 設 $f(x)$ 爲某間隔內之連倚數,其各次引數 $f'(x), f''(x)\cdots\cdots f^{(n)}(x)$ 亦名爲連倚數.

令 a 及 $a+h$ 爲此間隔內之兩點,則有

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h'}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n\cdots\cdots\cdots(3)$$

中 $R_n=\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h) \qquad (0<\theta<1)$

此式卽爲上式之推廣,證法亦同.

令 h x, $a=0$ 則得馬氏公式 (*Formulas of Taylor*).

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

§ 127. 倚數展式 Expansion of Functions

令 $$f(x)=(1+x)^m$$

m 爲任意實數.

陸續得
$$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$$
$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(p)}(x)=m(m-1)\cdots(m-p+1)(1+x)^{m-p}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

令 $x=0$, 則得 $f'(0)=m$, $f''(0)=m(m-1)$, ……以之代入馬氏公式,則得 $(1+x)^m$ 之倚式.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots p}x^p+\cdots\cdots+R_n\cdots\cdots(5)$$

此級數當 $|x|<1$ 時爲歛級數.

§ 128. 1°. 令

$$f(x)=e^x$$

則 $f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x$

而 $f'(0)=f''(0)=\cdots\cdots=1$

故 $$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{\theta^n x^n}{n!}\cdots\quad(6)$$

此為斂級數. n 至無窮,則餘可以不書,即

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\frac{x^p}{p!}+\cdots\cdots$$

2°. 令 $f(x)=a^x$

則得 $$a^x=1+\frac{x\,La}{1}+\frac{x^2(La)^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x^p(La)^p}{p!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(7)$$

依此式易證明 $\frac{a^x}{x^p}$ 當 x 趨近於無極之限為 ∞.

3°. 令 $f(x)=L(1+x)$

則 $f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$

$f''(x)=-(1+x)^{-2}$

$f'''(x)=+1\cdot 2(1+x)^{-3}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

而 $f'(0)=1$

$f''(0)=-1$

$$f'''(0)=+2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots(-1)^p\frac{x^p}{p}+\cdots+R_n\cdots\cdots(8)$

此級數亦當 $|x|<1$ 時爲歛級數.

以 $-x$ 易 x, 則得

$$L(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\cdots\cdots$$

相減,得 $L\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\cdots\cdots\right)$

§ 129. 命

$$f(x)=\sin x$$

則

$$f'(x)=\cos x$$

$$f''(x)=-\sin x$$

$$f'''(x)=-\cos x$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=\sin x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

此級數恒爲歛級數

2°. 同理,得 $\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$

亦易證 $e^{ix}=\cos x+i\sin x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$

此式稱尤拉氏公式 *Euler's Formula*.

§ 130. 無定式 *Indetermined Forms* 無定式之形爲 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ${}_0\infty$, ${}_1\infty$. 設 $f(x)$ 爲一倚數, 如當 $x=x_0$ 時, $f(x_0)$ 爲無定, 其眞值爲 $f(x_0+h)$ 之限, h 趨近於零.

例如:
$$f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$$

如令 $x=a$ 時,有
$$\phi(a)=0$$
$$\psi(a)=0$$

則
$$f(a)=\frac{0}{0}$$

爲無定式,但

$$f(a+h)=\frac{\phi(a)+h\phi'(a)+\cdots}{\psi(a)+h\psi'(a)+\cdots}$$

當 h 趨近於零, $f(a+h)$ 之限爲

$$\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}$$

如 $\phi'(a)$, $\psi'(a)$ 均不爲零, 則 $\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}$ 卽所求之限.

如 $\phi'(a)=0$, 而 $\psi'(a)\neq 0$, 則限爲零.

如 $\phi'(a)\neq 0$, 而 $\psi'(a)=0$, 則限爲無極.

如 $\phi'(a)=\psi'(a)=0$, 則 $f(a+h)$ 之限等於

$$\frac{\phi''(a)}{\psi''(a)}$$

餘依此遞推.

例如:
$$f(x)=\frac{L(1+x)}{x}$$

當 x 趨於零時爲 $\frac{0}{0}$,但

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{1}$$

當 x 趨近於零時爲 1, 故

$$\lim_{x\sim 0}\frac{L(1+x)}{x}=1$$

又如求當 $x=\infty$ 時,

$$f(x)=x(\sqrt[x]{a}-1)$$

之限. 此時 $f(x)$ 爲 $\infty\times 0$ 形, 但令

$$b=\sqrt[x]{a}$$

$$Lb=\frac{1}{x}La$$

故
$$b=\sqrt[x]{\ }=e^{\frac{1}{x}La}$$

於是
$$x(\sqrt[x]{\ }-1)=x\left(\frac{La}{x}+\frac{1}{2}\ \frac{(La)^2}{x^2}+\cdots\cdots\right)$$

當 $x=\infty$ $f(x)$ 之限 $=La$.

§ 131. 1^∞, 0^0, ∞^0 無定形求限法. 對於此種形, 當求其對數.

例: 求當 $x=\frac{\pi}{4}$ 時 $(tg\, x)^{tg\, 2x}$

之限.

$$(tg\, x)^{tg\, 2x}=e^{tg\, 2x\, L\, tg\, x}=e^{\frac{2\, tg\, x\, L\, tg\, x}{1-tg^2 x}}$$

$\frac{2\, tg\, x\, L\, tg\, x}{1-tg^2 x}$ 之限爲 -1, 故與式之限爲 $\frac{1}{e}$.

§ 132. 偏引數 Partial Derivatives

設 $z=f(x+y)$ 爲 x, y 之倚數, 令 y 等於常數, 而令 x 變. 所得引數, 爲

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ 或 } f_x$$

令 x 爲常, y 爲變, 則所得者爲

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ 或 } f_y$$

謂之偏引數. 如 x, y 同時變易而求 Δz 之主量, dz

$$dz=f_x\, dx+f_y\, dy$$

dz 謂之 z 之全微分

如 $$f(x, y)=0$$

則 $$f_x\, dx+f_y\, dy=0$$

故 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$$

此時視 y 爲 x 之倚數.

§ 133. 極大與極小 Maxima and Minima

設 $y=f(x)$, 如在某間隔內 $f(a)$ 比左右鄰值均大, 則 $f(a)$

謂之極大;如比左右鄰値均小,則 $f(a)$ 謂之極小.

但 $$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{1\cdot2}f''(a)+\cdots\cdots$$

此時左端無論 h 爲正爲負號恒不變.故當有 $f'(a)=0$ 乃可,故能令 $f(x)$ 爲極大或極小者,必爲 $f'(x)$ 之根.

例如: $$f(x)=ax^2+bx+c$$

其引數爲 $$f'(x)=2ax+b$$

而 $$f''(x)=2a$$

此時 $$x=-\frac{b}{2a}$$

$f(x)$ 爲極大或極小:如

$$f''(x)=2a>0$$

$f(x)$ 爲極小;如

$$f''(x)<0$$

$f(x)$ 爲極大.

如 $f'(a)$, $f''(a)$ 以至 $f^{(p-1)}(a)$ 均爲零時,則

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(a)+\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(a)+\cdots\cdots$$

p 爲奇數,則 $f(a)$ 非極大極小.

p 爲偶數,則 $f(a)$ 當 $f^{p+1}(a)>0$ 時爲極小.

而 $f(a)$ 當 $f^{(p+1)}(a)<0$ 時爲極大.

注意. $f'(x)$ 於 $x=a$ 時而不變號者,$f(a)$ 非極大極小.

例如: $$f(x)=(ax+b)^3$$

$$f'(x)=3a(ax+b)^2$$

此時 $x=-\frac{b}{a}$ $f(x)$ 非極大極小.

§ 134. 倚數變跡 Variation of Functions 設

$$y=f(x)$$

爲 x 之倚數,先求

$$f'(x)=0$$

之根,此值可使 y 爲極大或極小, $f'(x)>0$ 間隔內, y 爲增倚數. $f'(x)<0$ 間隔內, y 爲減倚數.

例如: $$y=x^x$$

須設 $x>0$, y 乃爲有定倚數.

求其引數 $$y'=x^x+x^x Lx$$

簡之 $$1+Lx=0$$

$$x=\frac{1}{e}$$

$x=0$, y 爲無定式,但

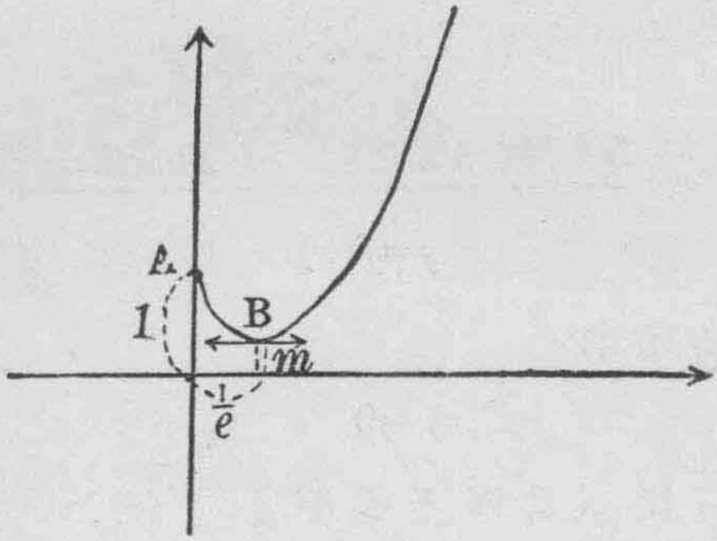
$$y=e^{xLx}$$

當 $x=0$, xLx 爲 0, 故 $y=1$. 此時 y' 爲無窮,故切線爲 oy.

又 $x=+\infty$; $y=+\infty$, 得表如次:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

以圖表之爲



A 謂之停點,惟超然式曲線乃有也.

§135. 戴氏公式推廣

令 $f(x, y)$ 爲二元倚數,求 $f(x+h, y+k)$ 之展式.令

$$f(t)=f(x+ht, y+kt)=f(u, v) \quad \begin{cases} u=x+ht \\ v=y+kt \end{cases}$$

準馬氏公式,得

$$f(t)=f(0)+\frac{t}{1}f'(0)+\frac{t^2}{1\cdot2}f''(0)+\cdots\cdots+R_n$$

$$f'(t)=f_u u_t+f_v v_t=hf_u+kf_v$$

$$f''(t)=h^2 f_{u^2}+2kf_{uv}+k^2 f_{v^2}$$

餘類推.令 $t=0$, $u=x$, $v=y$

$$f(t)=f(x, y)+\frac{t}{1}(hf_x+kf_y)$$

$$+\frac{t^2}{1\cdot2}(h^2 f_{x^2}+2hkf_{xy}+k^2 f_{y^2})+\cdots\cdots$$

令 $t=1$, 則有

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+(hf_x+kf_y)$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2}(h^2f_{x^2}+2hkf_{xy}+k^2f_{y2})+\cdots\cdots$$

第十三章　練習題

1. 無論 x 爲何實數時, 恒有

$$ch\,x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$

$$sh\,x=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$$

2. 求 $tg\,x$ 展式之前三項.

3. 求展 $y=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

4. 求展 $y=4\sin^2 x\cos x$.

解法　先證明 $4\sin^2 x\cos x=\cos x-\cos 3x$.

5. 求　$y=\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$

之限, 當 x 趨近於零.

6. 求 $x=\infty$ 時, 下各式之限

$$\sqrt{x^2+4x-1}-x,\quad \sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x-1}}-x,\quad x\left[\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right]$$

7. 求 $x=0$ 時, 下各式之限

$$\frac{2\,tg\,x-tg\,2x}{x(1-\cos 3x)},\quad \frac{\sin ax}{1-(1-x)^b},\quad \frac{x-\sin x}{(1-\cos x)^3},\cdots\cdots$$

8. 求下各式之變跡:

$$y=\frac{3x^2-4}{(x-2)^2(x+1)}, \qquad y=x-\frac{x^3}{3!}, \qquad y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

$$y=\sqrt[3]{x^3-3x+2}, \qquad y=x\sqrt{(x-a)(b-x)}$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \qquad y=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$$

$$y=\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}, \qquad y=x^{\frac{1}{x}}$$

$$y=\frac{Lx-x^2-1}{x}, \qquad y=x^2+\frac{1}{Lx}$$

第四篇

代數之本身問題

第十四章 方程式論

§136 虛數 Imaginary Numbers. 虛數普通之形為 $a+bi$. 中 a, b 均為實數. 而 $i=\sqrt{-1}$. 在計算中, 凡 i^2 均以 -1 代之. 知此則運算虛數與實數無異.

虛數 $a+bi$ 為零, 必 $a=0$, $b=0$ 乃可.

二虛數 $a+bi$, $a'+b'i$ 之和, 仍為一虛數. 蓋

$$\begin{aligned}(a+bi)+(a'+b'i)&=a+a'+(b+b')i\\&=A+Bi\end{aligned}$$

如 $A=0$, 則得一純虛數. 如 $B=0$, 卽 $b=-b'$ 則其和為實數.

二虛數相乘, 如

$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'-bb'+(ab'+ba')i$$

仍為一虛數.

$+\sqrt{a^2+b^2}$ 謂之虛數 $a+bi$ 之模. 虛數之大小, 以其模之大小判之.

二虛數相除仍為一虛數. 如

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\frac{aa'+bb'+(ba'-ab')i}{a'^2+b'^2}$$

$$=A+Bi$$

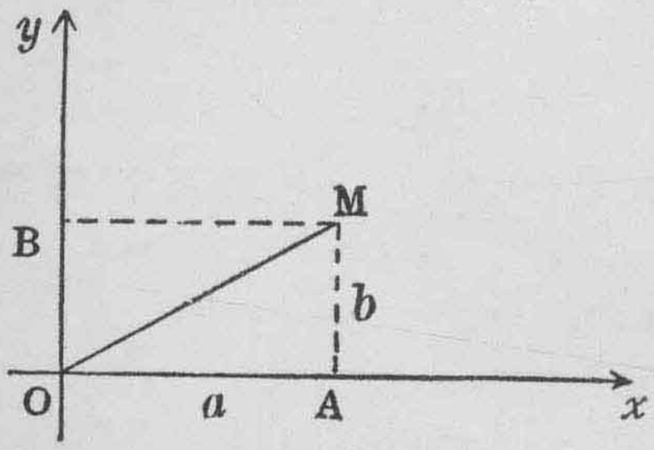
中 $$A=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2},\quad B=\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}$$

$a'+a'i$, $a'-b'i$ 謂之交錯虛數,兩交錯虛數之模相等,其積等於其模之方,爲一實數.

兩虛數之乘方及方根均可求,可參看余與段調元教授合編之虛數詳論.

§ 137. 虛數跡及其別形 Geometric Form of Imaginary Numbers.

取兩正交軸 ox 及 oy. 以 a 爲橫量, b 爲縱量之點,代表虛數 $a+bi$, 則此點謂之虛數跡,如 M 是也.



$OM=\sqrt{a^2+b^2}=\rho$

故 OM 爲虛數之模.

令 $MOA=\omega$

ω 謂之虛數之幅

就幾何言 a,b 爲定 M 點之直線位標. ρ 及 ω 爲定 M 點之極位標. 且

$$a=\rho\cos\omega$$

$$b=\rho\sin\omega$$

故 $$a+bi=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$$

是謂虛數別形.

凡虛數乘除法乘方方根用別形最便.

例如: 已與二虛數,其模各爲 ρ_1 ρ_1, 其幅各爲 ω, ω_1, 求其積.

$$\rho(\cos\omega+i\sin\omega)\times\rho_1(\cos\omega_1+i\sin\omega_1)$$

$$=\rho\rho_1\Big[(\cos\omega\cos\omega_1-\sin\omega\sin\omega_1)+i(\sin\omega\cos\omega_1+\sin\omega_1\cos\omega)\Big]$$

$$=\rho\rho_1\Big[\cos(\omega+\omega_1)+i\sin(\omega+\omega_1)\Big]$$

故其積仍爲一虛數,其模等於兩因子之模之積,其幅等於兩因子之幅之和.

推廣則有

$$\rho_1(\cos\omega_1+i\sin\omega_1)\times\rho_2(\cos\omega_2+i\sin\omega_2)\times\cdots\cdots$$

$$\times\rho_n(\cos\omega_n+i\sin\omega_n)$$

$$=\rho(\cos\omega+i\sin\omega).$$

中 $\rho=\rho_1\cdot\rho_2\cdots\cdots\rho_n$

$\omega=\omega_1+\omega_2+\cdots\cdots+\omega_n$

令 $\rho_1=\rho_2=\cdots\cdots\rho_n=\rho;\ \omega_1=\omega_2\cdots\cdots=\omega_n=\omega$

則有 $\rho^n(\cos\omega+i\sin\omega)^n=\rho^n(\cos\omega+i\sin n\omega)$

謂之嘉氏公式 *Moivre's Formula.*

§ 138 求一虛數之 n 次根. 令 $\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$ 爲虛數,而 $r(\cos\theta+i\sin\ )$ 爲其 n 次根. 則

$$r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$$

或 $$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$$

於是 $$r=\sqrt[n]{\rho}$$

$$n\theta=\omega+2k\pi$$

或 $$r=\sqrt[n]{\rho}$$

$$\theta=\frac{\omega}{n}+\frac{2k\pi}{n}$$

與 k 以 n 個連整數値,則盡得其根.且只有 n 個根.用此法可求得實數之 n 個 n 次根.

例如: 1 之三次根,爲

$$\begin{cases}\cos 0+i\sin 0\\ \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\\ \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

亦卽

$$\begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{cases}$$

餘宜參看虛數詳論.

§ 139. 代數方程式 Algebraic Equation.

一元代數方程式之形,爲

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_px^{m-p}+\cdots+A_m=0$$

中 m 爲一正整數,此式又稱 m 次方程式, $A_0 \cdots A_m$ 各係數爲實數,以 a 代 x, 如有

$$f(a)=0$$

則 a 謂之方程式之根,例如

$$x^2+3x-4=0$$

之一根爲 1 因以 1 代 x, 得

$$1+3-4=0$$

故也.

如以虛數 $\alpha+\beta i$ 代 x, 則 $f(x)$ 變爲

$$f(\alpha+\beta i)=P+Qi$$

欲此式爲 0, 必

$$P=0$$

$$Q=0$$

於是亦有 $\quad f(\alpha-\beta i)=P-Qi=0$

故 $\alpha-\beta i$ 亦爲其根,是故虛根恆偶見.

§ 140. 基本定理 *Fundamental Theorem* 凡一元 m 次方程式,至少必有一根,或爲虛數,或爲實數.

此定理證最繁難,故從略.

系. 凡一元 m 次方程式,必有 m 根.

準上令其一根爲 a, 則 $f(x)$ 可以 $x-a$ 除之,於是

$$f(x)=(x-a)\phi(x)$$

$\phi(x)$ 爲 $m-1$ 次,令其一根爲 b, 則

$$\phi(x)=(t-b)\psi(x)$$

以次遞推,得

$$f(x)=A_0(x-a)(x-b)\cdots\cdots(x-l)$$

$a, b, \cdots\cdots l$ 諸數可虛可實,可同可異,可有限可無極,虛者爲虛根,恒偶見;實者爲實根;二根同者稱雙根,如

$$x^2-8x+16=0$$

之雙根爲 4 是也.三根同者爲三倍根,餘遞推.

$$ax+b=0$$

之根爲 $$x=-\frac{b}{a}$$

如 $b\neq 0$. 而 a 趨近於零,則 x 趨近於無極.即其根爲無窮大.

§ 141. 倍根 Multiple Roots. 準戴氏公式

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(a)$$

令 $$x=a+h$$

則 $$h=x-a$$

如 a 爲根, $f(a)=0$, 上式可以 h 或 $x-a$ 除盡.

如 a 爲 $f'(a)$ 之根,卽 $f'(a)=0$, 則上式可以 h^2 或 $(x-a)^2$ 除盡,故 a 爲雙根.卽

$$f(a)=0,\ f'(a)=0$$

爲 $f(x)=0$ 有雙根之條件也. 推廣言之, 如

$$\begin{cases} f(a)=0 \\ f'(a)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(p)}(a)=0 \end{cases}$$

則 a 爲 $(p+1)$ 倍根.

例如:
$$f(x)=x^3+px+9=0$$
$$f'(x)=3x^2+p=0$$

之公根, 卽爲一式之雙根. 由第二式得

$$x^2=-\frac{p}{3}$$

代入上式化簡, 得

$$4p^3+27q=0$$

爲 $x^3+px+q=0$, 有雙根之條件.

§ 142. 笛嘉爾定理 *Descartes' Theorem*

定義. 在一方程式內, 兩鄰項之號相同者稱常式 *Permanence*; 兩鄰項之號相反者, 稱變式 *Variation*. 例如:

$$x^3-2x^2-x+1=0$$

有兩變式一常式.

小引. 如 $f(x)$ 爲一數字方程式, 如以 $x-a$. (a 爲一正數) 乘之, 則 $(x-a)f(x)$ 之變式較 $f(x)$ 之變式所多者爲單數.

例如:
$$f(x)=x^2-3x+1$$

以 $x-a$ 乘之,得

$$\begin{array}{l} x^3-3x^2+x \\ \quad -ax^2+3ax-a \\ \hline x^3-(3+a)x^2+(3a+1)x-a \end{array}$$

因 a 爲正,故前三項之號未變,而最後多一變式.

定理. 1°. 一實係數代數方程式之正根,不能較其變式多; 2° 變式數與正根數之較爲雙數.

證. 設 $f(x)=0$ 爲一方程式有 v 個變式, p 正根 $a_1\ a_2\cdots a_p$, 方程式可書爲 $f(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_p)\phi(x)$.

準上小引 $(x-a_1)\phi(x)$ 至少有一變式,故 $(x-a_1)\cdots(x-a_p)\phi(x)$ 至少有 p 變式.

如 $f(x)$ 首末項之號相同,則 p, v 均爲雙,如 $f(x)$ 之首末項之號相反.則 $p\ v$ 均爲單,故

$$v=p+2h.$$

h 爲正數,亦可爲零.

關於負根可研究 $f(-x)$

§ 143. 方程式之變換式 Transformation of Equations

問題一. 已與 $f(x)=0$

求一方程式以 $x-h$ 爲根者.令

$$y=x-h$$

則 $$x=y+h$$

於是 $$f(y+h)=0$$

或 $$f(x+h)=0$$

亦爲所求,例如 $$x^2-3x+2=0$$

之根爲 1, 2 而

$$(x+1)^2-3(x+1)+2=0$$

或 $$x^2+2x+1-3x-3+2=0$$

$$x^2-x=0$$

其根爲 $1-1=0$; $2-1=1$.

用戴氏公式,得

$$f(x+h)=f(h)+\frac{x}{1}f'(h)+\cdots\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(h)+A_0x^n$$

$f(x+h)=0$ 之根等於 $f(x)$ 之根減一常數 h

如令 $$f^{(n-1)}(h)=0$$

則方程式無第二項例如

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f''(x)=2a$$

而 $$f(x+h)=(ah^2+bh+c)+x(2ah+b)+ax^2$$

令 $$h=-\frac{b}{2a}$$

則 $$4a^3x^2+4a^2c-ab^2=0$$

又如與 $$f(x)=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$$

$$f'(x)=3a_0x^2+6a_1x+3a_2$$

$$f''(x)=6a_0x+6a_1$$

令
$$h=-\frac{a_1}{a_0}$$

則
$$f(x+h)=a_0x^3+xf'\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)+f\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)=0$$

無第二項其簡單形式爲

$$x^3+px+q=0$$

§ **144.** 問題二. 已與 $f(x)=0$.

求一方程式,其各根爲原式各根之 m 倍者.令

$$y=mx$$

則
$$x=\frac{y}{m}$$

於是原式變爲

$$f\left(\frac{y}{m}\right)=0$$

或
$$f\left(\frac{x}{m}\right)=0$$

此種變換式用以變整係數者.

§ **145.** 問題三. 已與 $f(x)=0$

求一方程式以 $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ 爲根者.

令
$$y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$$

如 $ab'-a'b\neq 0$ 則

$$x=\frac{b-b'y}{a'y-a}$$

於是得式爲

$$f\left(\frac{b'-b'x}{b'x-a}\right)=0$$

§ 146. 方程式解法 *Resolution of Equations.* 普通方程式可解決者.至四次而止.其高次能解決者,皆特形也.

一次方程式 其普通之形爲

$$ax+b=0$$

如 $a\neq 0$, 立得

$$x=-\frac{b}{a}$$

二次方程式 其普通之形爲

$$ax^2+bx+c=0$$

以 a 乘之,得

$$a^2x^2+abx+ac=0$$

或 $$a^2x^2+abx+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}-ac=\frac{b^2-4ac}{4}$$

於是 $$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4}$$

$$ax+\frac{b}{2}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

其二根為 $$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

討論,如 $b^2-4ac>0$　x_1, x_2 為實數

$b^2-4ac=0$　$x_1=x_2$ 為雙根

$b^2-4ac<0$　x_1, x_2 為交錯虛數

§ 147. 三次方程式. 其簡單形式為

$$x^3+px+q=0$$

令 $$x=y+z$$

則方程式變為

$$(y+z)(3yz+p)+y^3+z^3+q=0$$

因 y 及 z 可任意取,故可令

$$3yz+p=0$$

於是亦有 $$y^3+z^3+q=0$$

或 $$yz=-\frac{p}{3}$$

$$y^3+z^3=-q$$

由第一式得 $$z=-\frac{p}{3y}$$

代入第二式得

$$y^6+qy^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

於是 $$y^3=-\frac{q}{2}+\epsilon\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\quad \epsilon=\pm 1$$

如取 $\epsilon=1$ 令 y' 爲其三次根之一則

$$y_1=y';\ y_2=y'\alpha;\ y_3=y'\alpha^2$$

α, α^2 爲單位三次虛根.

而 $$z_1=-\frac{p}{3y'},\qquad z_2=-\frac{p\alpha^2}{3y'},\qquad z_3=-\frac{p\alpha}{3y'}$$

用減號所得結果相同故 $x^3+px+q=0$ 只有三根爲

$$x_1=y'-\frac{p}{3y'};\quad x_2=y'\alpha-\frac{p\alpha^2}{3y'};\quad x_3=y'\alpha^2-\frac{p\alpha}{3y'}$$

討論 1°. $$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$$

一實根

2°. $$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

一雙根餘一根亦爲實

3°. $$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$$

三實根(詳見下章)

§ 148. 四次代數方程式解法有 *Descartes* 及 *Ferrari* 等法.實際上無甚大用,故從畧.解高次方程式數字式最要,見下章

第十四章 練習題

1. 試化簡下各數

$$\frac{(i+3)^2}{4+i},\qquad \frac{i-1)^5}{(i+1)^4},\qquad (2+i)(i-1)+(2i+1)^2.$$

2. 令 $x=\frac{1-uv}{u-v},\qquad y=i\frac{1+uv}{u-v},\qquad z=\frac{u+v}{u-v}$

試證當有　$x^2+y^2+z^2=1$

求 x, y, z 均爲實數之條件.

3. 試求下各根

$$\sqrt[3]{8},\quad \sqrt[3]{2i-\sqrt{3}},\quad \sqrt[6]{i},\quad \sqrt[6]{i+\sqrt{3}},\quad \sqrt[5]{-1}$$

4. 試解方程式

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^4=\frac{1+ia}{1-ia}$$

5. 試討論方程式

$$ax^4+2bx^2+c=0$$

6. 已與方程式

$$x^4+x^3-4x^2-4x+1=0$$

求 $y=2-x^2$ 之變式

答　$y^4+y^3-4y^2-4y+1$

於是方程式四根之形爲 $\alpha,\ \beta,\ 2-\alpha^2,\ 2-\beta^2$

其四根之數値爲 $x_1=-1{,}82,\ x_2=-1{,}34,\ x_3=0{,}21,\ x_4=1{,}95$

7. 已與方程式

$$x^3+px+q=0$$

求 $y=x^2+mx+n$ 之變式并定 m 及 n 俾所得變式爲二項式,并由此可得解原與三次方程式之法

8. 試研究 $y=ax^2+bx+c$ 當 x 由 $-\infty$ 變至 $+\infty$ 時之號

α) $b^2-4ac<0$ y 與 a 同號

β) $b^2-4ac=0$ y 與 a 同號

γ) $b^2-4ac>0$ 當 x 在二根之間, y 與 a 異號當 x 在二根之外則與 a 同號

第十五章 數字方程式解法

§ 149. 設 $f(x)$ 爲一 m 次多項式,如 α, β 爲二實數.幷有

$$f(\alpha)f(\beta)<0$$

則 $f(x)=0$ 至少有一根介於 α 及 β 之間.因 $f(x)$ 在 $\alpha\beta$ 間隔內爲連續的,則 $f(x)$ 由負而正,必經過零乃可.

余謂 $f(x)=0$. 在 $\alpha\beta$ 間隔內實根爲單數,當 $f(\alpha)f(\beta)<0$. 而其根爲雙數,當 $f(\alpha)f(\beta)>0$.

證令 $a, b, c\cdots\cdots h$ 爲 $\alpha\beta$ 間隔內之根. $f(x)$ 可書爲

$$f(x)=(x-a)(x-b)\cdots\cdots(x-h)\phi(x)$$

$\phi(x)=0$ 在 $\alpha\beta$ 間隔內無根.設 $\alpha\beta$ 均非根,則

$$f(\alpha)f(\beta)=\Big[(\alpha-a)(\beta-a)\Big]\Big[(\alpha-b)(\beta-b)\Big]\cdots\cdots$$
$$\Big[(\alpha-h)(\beta-h)\Big]\phi(\alpha)\phi(\beta)$$

$\phi(\alpha)\phi(\beta)$ 爲正.否則 $\alpha\beta$ 之間 $\phi(x)=0$ 至少當有一根,與原設不合.而乘積 $(\alpha-x)(\beta-x)$ 之號當 x 在 $\alpha\beta$ 間隔外爲正,而當 x 在 $\alpha\beta$ 間隔內爲負.今 $a, b,\cdots\cdots h$ 均介於 $\alpha\beta$ 之間.故 $\Big[(\alpha-a)(\beta-a)\Big]$ 各項均爲負.於是 $f(\alpha)f(\beta)<0$, 則根之數爲單.而當 $f(\alpha)f(\beta)>0$, 則根之數爲雙.

§ 150. 定理 1°. 方程式 $f(x)=0$ 兩相鄰實根能含 $f'(x)=0$ 之根之數爲單數

2°. $f'(x)=0$ 兩相鄰實根,至多能含 $f(x)=0$ 之一實根.

3°. $f(x)=0$ 至多有一根大於 $f'(x)=0$ 最大之根,有一根小於其最小之根.

證 1° 設 a, b 爲 $f(x)=0$ 之兩鄰根.吾人可求得一正數 k

俾
$$a+k<b-k$$

且使 $f'(x)=0$ 在 $a, a+k$ 間隔及 $b-k, b$ 間隔內無根.設 h 爲一正數小於 k 者,當有

$$\frac{f'(a+h)}{f(a+h)}>0 \quad \frac{f'(b-h)}{f(b-h)}<0$$

因 $f(x)=0$ 在 $a+h, b-h$ 間隔內無根,故 $f(a+h)f(b-h)>0$

於是
$$f'(a+h)f'(b-h)<0$$

故 $f'(x)=0$ 在 $a\,b$ 間隔內之根爲單數.

2°. 設 $\alpha\,\beta$ 爲 $f'(x)=0$ 之二相鄰實根.如令 x 由 α 變至 β. $f'(x)$ 之號在此間隔內不變,於是 $f(x)$ 增則恆增,減則恆減,故只能在此間隔內爲零一次.卽至多只有一根,介於 $\alpha\,\beta$ 之間也.且此根爲單根,因 $f'(x)$ 不能爲零故也.

3°. 證法同上.

§ 151. 系 如 $\alpha\,\beta$ 爲 $f'(x)=0$ 之兩相鄰實根.

1°. $f(\alpha)f(\beta)<0$ $f(x)$ 必能一根在 $\alpha\,\beta$ 間隔內.

2°. $f(\alpha)f(\beta)>0$ $f(x)$ 在 $\alpha\,\beta$ 間隔內無根.

3°. $f(\alpha)f(\beta)=0$ 則至少有一根爲雙根.

例如:
$$f(x)=ax^2+bx+c=0$$

$$f'(x)=2ax+b=0$$

此時　$f'(x)=0$

之根爲 $-\frac{b}{2a}$

而 $-\infty$, $-\frac{b}{2a}$, $+\infty$ 稱樂爾氏級數,如設 a 爲正,則 $f(x)=0$

有二實根之條件爲

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)<0.$$

即　$$a\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c<0$$

或　$$-\frac{b^2}{4a}+c<0$$

因 a 爲正,此條件與

$$4ac-b^2<0$$

同.與前得者相符.

§ **152.** 又例　已與

$$f(x)=x^3+px+q=0$$

$$f'(x)=3x^2+p=0$$

下式之根爲　$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$

p 必爲負,乃爲實根.

得表如次

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$		$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$		$f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$		$+$

余謂 $$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)<0$$

爲 $f(x)=0$ 有三實根之條件,且必有$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)>0$,而$f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)<0$.否則$f(x)$在$-\infty,-\sqrt{-\frac{p}{3}}$間隔爲增倚數,由負數增至負數,再由負數減至$f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$,是$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$,$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$間隔內無根矣.此爲不合.

而 $$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$$

$$=-\left(-\frac{p}{3}\right)^3-2p\left(-\frac{p}{3}\right)^2-p^2\left(-\frac{p}{3}\right)+q^2$$

$$=\frac{p^3}{27}-\frac{2p^2}{9}+\frac{p^3}{3}+q^2$$

$$=\frac{4p^2}{27}+q^2$$

即 1° $4p^3+27q^2<0$ 三實根.

2° $4p^3+27q^2>0$ 一實根.

3° $4p^3+27q^2=0$ 一雙根,一實根.

§ 153. 此法不僅可用於代數方程,卽任何方程式亦可用之.

例如: $$f(x)=x-3\,Lx=0$$

求其引數 $$1-\frac{3}{x}=0$$

故其根爲 $$x=3$$

此時 x 當爲正.得表如次

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$		$f(3)<0$		$+$

$f(3)=3-3\,L3$

因 $L3>1$ 故 $$f(3)<0$$

於是 $f(x)=0$ 有二實根一大於 3, 一小於 3.

§ 154. 整根及有理數根 Integral Roots and Rationnal Roots.

設 $$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots\cdots+A_{m-1}x+A_m=0$$

(中係數均爲整數) 爲一 m 次方程式,如此式有一整數 a 爲根,則可書爲

$$a(A_0a^{m-1}+\cdots\cdots+A_{m-1})=-A_m$$

前項可以 a 除盡,故 A_m 亦可以 a 除盡.於是凡整根皆爲常數項之因子.

如 $f(x)=0$ 有一分數根. $\frac{p}{q}$, p, q 皆爲整數且互爲壹數則 p 爲 A_m 之因子,而 q 爲 A_0 之因子.

例如:
$$x^3-2x^2-9=0$$

此式如有整根必爲 $\pm1, \pm3, \pm9$. 用係數除法.可證明 3 爲其根.因

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & 0 & -9 & 3 \\ & 3 & 3 & 9 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$f(3)=0$ 故 3 爲根,

且有
$$x^3-2x^2-9=(x-3)(x^2+x+3)$$

故其餘二根爲虛數.

又如方程式
$$4x^3-8x^2+5x-3=0$$

無整根,其有理根當爲 $\pm\frac{1}{4}$ $\pm\frac{3}{4}$ $\pm\frac{1}{2}$ $\pm\frac{3}{2}$用係數除法,易證得 $\frac{3}{2}$ 爲其根.

又法以 $\frac{x}{2}$ 代 x 再將分母消去,得

$$x^3-4x^2+5x-6=0$$

因 x^3 之係數爲 1. 故無分數根,其整根當爲 ±1 ±3 ±2 ±6. 用係數除法易證 3 爲其根.蓋

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & +5 & -6 & 3 \\ & 3 & -3 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

於是　　$x^3-4x^2+5x-6=(x-3)(x^2-x+2)$

而 $\dfrac{3}{2}$ 爲原式之有理根.

又如　　$3x^5-8x^4+x^2+12x+4=0.$

其整數根爲雙根 2. 而有理根爲 $-\dfrac{1}{3}$. 讀者可自證,以資練習.

§ 155. 無理根 Irrationnal Roots. 如求正根則先以正整數代 x, 而觀其號,設所與方程式爲

$$f(x)=0$$

如得　　$f(n)f(n+1)<0$

則其根必介於 n 及 $n+1$ 之間,再將 n, $n+1$ 間隔分爲若干等分,施以同法,以此遞推,可得其相近值.

例如:　　$f(x)=x^4-6x^3+x^2+12x-6=0$

此時　　$f(0)=-6$

$$f(1)=\ \ 2$$

故有一根介於 0 及 1 之間. 又

$$f(2)=-10$$

$$f(3)=-42$$

$$f(4)=-70$$

$$f(5)=-46$$

$$f(6)=102$$

故有一根介於 1 及 2, 而他一根介於 5, 6 之間, 原與式只有三變式. 故只有三正根. 其餘一根爲負

又如 $$f(x)=x^3-3x+1=0$$

此時 $$f(1)=-1$$

$$f(2)=3$$

故有一根介於 1 及 2 之間, 以 1.1, 1.2,……代之得

$$f(1.5)=-0,125$$

$$f(1.6)=-0,296$$

故此根介於 1.5 及 1.6 之間, 再以 1.51, 1.52,……代之

得 $$f(1.53)=-0.008423$$

$$f(1.54)=\quad 0.036264$$

故此根又介於 1.53 及 1.54, 以此遞推可得其相近值至任何精密程度, 但計算愈趨愈繁難耳.

§ 156. 洪來氏法 <u>*Horner's Method.*</u>

問題 試求 $$f(x)=2x^3+x^2-15x-59=0$$

之正根. 此式只有一變式, 故只有一正根.

因 $$f(3)f(4)<0$$

故其根介於 3, 4 之間. 於是其根之形當爲 $3\cdot\beta\gamma\delta\cdots$ β,γ,δ 代表小數位上之數字. 將與式變爲一式, 其根爲原式之根減 3 者.

得 $$\phi(x)=2x^3+19x^2+45x-41=0$$

此式可以係數除法得之.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & +1 & -15 & -59 & 3 \\
 & 6 & 21 & 18 & \\
\cline{2-4}
 & 7 & 6 & -41 & \\
 & 6 & 39 & & \\
\cline{2-3}
 & 13 & 45 & & \\
 & 6 & & & \\
\cline{2-2}
 & 19 & & &
\end{array}
$$

此時 $\phi(x)$ 之根介於 0.6 及 0.7 之間. 故 $\beta=6$.

再將 $\phi(x)$ 變爲一式其根爲 $\phi(x)$ 之根減 0.6 者, 則得

$$\psi(x)=2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0$$

其根介於 0 及 0.1 之間, 再試 0.01, 0.02,……得

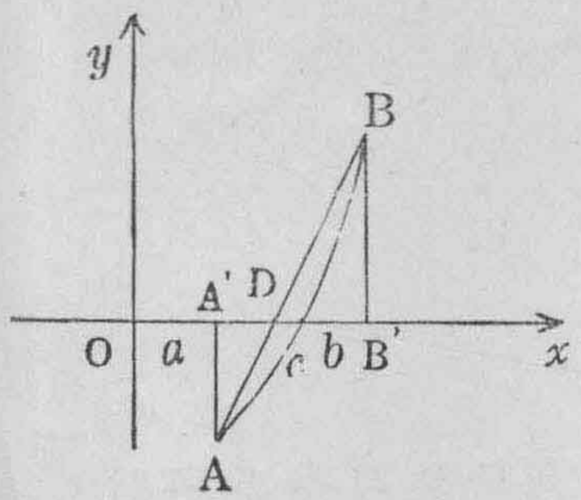
$$\psi(0.09)\ 爲負$$

$$\psi(0.1)\ 爲正$$

故 $\gamma=9$. 於是 3.69 爲其 $\frac{1}{100}$ 之相近値.以此遞推,可多求任若干小數.

De Morgan 氏盛稱此法. 其徒解 $x^3-2x=5$ 方程式, 有至 150 位小數者, 但至 76 位時卽錯. (餘可參看 *Fine's College Algebra*) 則未免過於重視矣.

§ 157. 設與方程式 $f(x)=0$. 如 $f(a)f(b)<0$. 且 a, b



均甚小.則可求得 $y=f(x)$ 曲線之相近兩點.

$A_{a,\,f(a)}$ $B_{b,\,f(b)}$

設 ACB 爲曲線.則 $OC=c$ 爲其根.因 $f(c)=0$. 如以直線 AB 代之.

則得其相近根爲 $OD=d$.

AB 直線之方程式爲

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

令 $y=0$, 則得

$$x=d=a-\frac{f(a)\times(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

例如 $$x^3-3x+1=0$$

之正根介於 1.53 及 1.54 之間且

$$f(1.53)=-0.008423$$

$$f(1.54)=\ \ 0.032264$$

於是其相近根,爲

$$d=1.53+\frac{0.01\times0.008423}{0.040687}$$

§ 158. 牛頓氏法 Newton's Method.

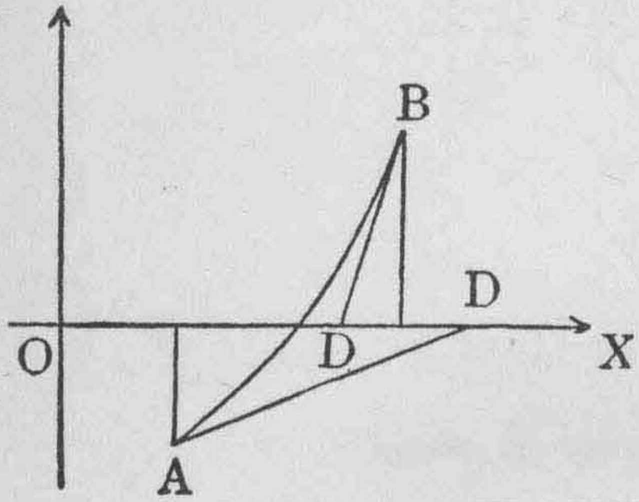
設 a 爲 $f(x)$ 之相近根,令 $a+h$ 爲其更相近值,則有

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\cdots\cdots$$

因 h^2 對於 h 爲小,故設

$$f(a+h)=0$$

則有 $$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}$$



用此法可得其過數 ϵ 之限.且須畫圖乃不致大錯.因就幾何言.乃以 A 點或 B 點之切線代 AB 線也.如下圖當用 BD 而不當用 AD'.

第十五章 練習題

1. 試討論方程式

$$x\cos x-2\sin x+m=0$$

幷求 $m=2$ 時之最小根

2. 試討論下各式

$4x^3+3x^2-6x+m=0,\qquad x^3+mx^2-3x+2=0,$

$x^4+px+q=0,\qquad x^5+px+q=0$

$3x^4+4x^3+4mx^2+1=0,\qquad 4x^6-27(x-a)^2=0$

$$\frac{x^m}{m!}+\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}+\cdots\cdots+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1}+1=0$$

3. 設 $a, b, \cdots\cdots l$ 爲不同之數而 $A, B, \cdots\cdots L$ 均爲正,試證方程式

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots\cdots+\frac{L}{x-l}=0$$

之根盡爲實根

4. 試研究下各式

$x-e\sin x=m \quad (0<e<1), \quad Lx=\operatorname{arc}\sin x,$

$(x^2+1)\,Lx=x+m$

5. 求方程式　$x^3+x+1=0$

之根至 $\frac{1}{1000}$

6. 求　$x^6+x^2-x-2=0$

之正數最小根至 $\frac{1}{100}$

7. 求　$x-3\,Lx=0$

之二根至 $\frac{1}{100}$

8. 用洪來氏法求 $x^3-2x=5$ 之正根至 $\frac{1}{10000}$

并用牛頓氏法解之以爲比較

9. 試解方程式 $x^3+3x^2-x-3=0$

第十六章　對稱倚數及消去法

§159. 根與係數之關係 *Relations Between Coefficients and Roots.*

令 $f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots\cdots+A_m=0$

爲一 m 次方程其根爲 $a, b, c\cdots\cdots l$

於是 $A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\cdots+A_m$

$$=A_0(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-l)$$

令
$$s_1=\Sigma a=a+b+c+\cdots\cdots+l$$
$$s_2=\Sigma ab=ab+ac+\cdots\cdots$$
$$s_3=\Sigma abc$$
$$s_m=abc\cdots\cdots l$$

則得
$$s_1=-\frac{A_1}{A_0}$$
$$s_2=\frac{A_2}{A_0}$$
$$s_3=-\frac{A_3}{A_0}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_m=(-1)^m\frac{A_m}{A_0}$$

特例　如 $ax^2+bx+c=0$

之根爲 α, β 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

§ 160. 對稱式 a, b, c 之對稱式爲

$$a+b+c,\ a^2+b^2+c^2+m(ab+ac+bc),\cdots\cdots$$

卽在此種式中互易 abc 之位置,其式仍不變也.余謂知 $a, b, c\cdots l$ 爲 $f(x)=0$ 之根,則 $a, b, c\cdots l$ 之對稱式均可求,如

$$\Sigma a^2=(\Sigma a)^2-2\Sigma ab$$

$$=\frac{A_1^2}{A_0^2}-2\frac{A_2}{A_0}$$

易證得 $$\Sigma a^\alpha b^\beta=S_\alpha S_\beta-S_{\alpha+\beta}$$

$$\Sigma a^\alpha b^\alpha=\frac{1}{2}\left[S_\alpha^2-S_{2\alpha}\right]$$

中 $$S_\alpha=\Sigma a^\alpha$$

$$S_\beta=\Sigma b^\beta$$

α, β 爲正負整數均可.

至求 $S_\alpha=a^\alpha+b^\alpha+\cdots+l^\alpha$ 則用牛頓氏公式.下節卽是.

§ 161. 牛頓氏公式 Newton's Formula.

由 $$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\cdots\cdots+\frac{1}{x-l}$$

得 $$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\cdots\cdots+\frac{f(x)}{x-l}$$

令 $$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots\cdots+A_m$$

但 $\dfrac{f(x)}{x-a}=A_0x^{m-1}+(A_0a+A_1)x^{m-2}+(A_0a^2+A_1a+A_2)x^{m-3}+\cdots$

$$+(A_0a^p+A_1a^{p-1}+\cdots\cdots+A_p)x^{m-p-1}+\cdots$$

$$+(A_0a^{m-1}+A_1a^{m-2}+\cdots\cdots+A_{m-1})$$

$$\frac{f(x)}{x-b}=A_0x^{m-1}+(A_0b+A_1)x^{m-2}+(A_0b^2+A_1b+A_2)x^{m-3}+\cdots$$

$$+\cdots\cdots$$

....

$$\frac{f(x)}{x-l}=A_0x^{m-1}+(A_0l+A_1)x^{m-2}+(A_0l^2+A_1l+A_2)x^{m-3}+\cdots$$

相加得

$$f'(x)=mA_0x^{m-1}+(A_0S_1+mA_1)x^{m-2}$$

$$+(A_0S_2+A_1S_1+mA_2)x^{m-3}+\cdots$$

$$+(A_0S_p+A_1S_{p-1}+\cdots\cdots mA_p)x^{m-p-1}+\cdots$$

$$+(A_0S_{m-1}+A_1S_{m-2}+\cdots\cdots+mA_{m-1})$$

但 $f'(x)=mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\cdots$

$$+(m-p)A_px^{m-p-1}+\cdots\cdots+A_{m-1}$$

全等此二式得

$$A_0S_1+A_1=0$$

$$A_0S_2+A_1S_1+2A_2=0$$

$$A_0S_3+A_1S_2+A_2S_1+3A_3=0$$

....

....

此公式謂之牛頓氏公式至 S_{m-1} 止欲求 S_m 則可以 x 乘 $f(x)$ 得 $xf(x)$ 再陸續代入各根相加卽得同理可推之於 $S_{m+\mu}$

例如: $$f(x)=x^3+p\,x+q$$

則 $$S_1=0,\ S_2=-2p,\ S_3=-3q,\ S_4=2p^2$$

$$S_5=5pq,\ S_6=-2p^3+3q^2,\cdots\cdots$$

§ 162. 例 如與

$$f(x)=x^3+px+q=0$$

其根爲 a, b, c 則

$$\Sigma a^2b=3q,\ \Sigma a^2b^2=p^2,\ \Sigma a^3b=-2p^2,$$

$$\Sigma a^3b^2=pq,\ \Sigma a^4b^2=-(2p^3+3q^2)$$

$$\Sigma\frac{a}{b}=-3,\ \Sigma\frac{a^2}{b}=\frac{2p^2}{q},\ \Sigma a^2b^{-2}=-\frac{2p^3+3q^2}{q^2},\cdots\cdots$$

§ 163. 方程式根含有特別關係者 此種

方程式可利用上之係數與根之關係公式,往往直接可求得其一根或二根.

問題一. 已知方程式 $36x^3-12x^2-5x+1=0$ 之一根爲他二根之和,求解此式.

設 α, β, γ 爲三根當有

$$\alpha=\beta+\gamma$$

但 $$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{3}.$$

由此二式得
$$2\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\alpha=\frac{1}{6}.$$

而　$$36x^3-12x^2-5x+1\equiv(6x-1)(6x^2-x-1).$$

由是易得其餘二根為　$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$.

問題二. 已與方程式　$ax^3+bx^2+cx+d=0$ 求三根成等差級數之情形.

令　$\alpha-\delta$, α, $\alpha+\delta$ 為其三根則

$$\alpha-\delta+\alpha+\alpha+\delta=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha(\alpha-\delta)+\alpha^2-\delta^2+\alpha(\alpha+\delta)=\frac{c}{a},$$

$$\alpha(\alpha^2-\delta^2)=-\frac{d}{a}$$

由第一式得　$$3\alpha=-\frac{b}{a}$$

或　$$\alpha=-\frac{b}{3a}$$

代入第三式　$$-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b}{3a}\delta^2=-\frac{d}{a}$$

於是　$$\delta^2=\left(\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{a}\right)\frac{3a}{b}$$

$$=\frac{b^3-27a^2d}{27a^3}\times\frac{3a}{b}$$

$$=\frac{b^3-27a^2d}{9a^2b}$$

以 α 及 δ 之值代入二式卽得其係數應合之條件.

§164. 消去法 Elimination.

就 $f(x)=0,\ g(x)=0$ 二式中消去 x, 所得之式爲二式有一公根之情形.

例如:
$$ax+b=0$$
$$a'x+b'=0$$

消去 x 之結式爲
$$ab'-a'b=0$$

乃前二式有公根之情形也.

設 $f(x)$ 爲 m 次式, 其根爲 $a, b, c, \cdots l$; $g(x)$ 爲 p 次式其根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \rho$. 依定義
$$R=B_0^p f(\alpha)f(\beta)\cdots\cdots f(\rho)$$

或
$$R=A_0^m g(a)g(b)\cdots\cdots g(l)$$

爲 f 及 g 消去 x 之結式
$$R=0$$

乃 f 及 g 至少有一公根之情形. 因 R 爲各根之對稱式故可以計算.

例如:
$$f+ax^2+bx+c=0 \quad g=a'x^2+b'x+c'=0$$

令 α, β 爲 $g=0$ 之根, 則

$$R=a'^2(a\alpha+b\alpha+c)(a\beta^2+b\beta+c)$$

但 $$a'(a\alpha^2+b\alpha+c)=(ba'-ab')\alpha+ca'-ac'$$

$$a'(a\beta^2+b\beta+c)=(ba'-ab')\beta+ca'-ac'$$

於是

$$\begin{aligned}a'^2(a\alpha^2+b\alpha+c)(a\beta^2+b\beta+c&=(ba'-ab')^2\alpha\beta\\&\quad+(ba'-ab')(ca'-ac')(\alpha+\beta)\\&\quad+(ca'-ac')^2\\&=(ba'-ab')\frac{c}{a}-(ba'-ab')(ca'-ac')\frac{b}{a}\\&\quad+(ca'-ac')^2\end{aligned}$$

化簡得 $$R=(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')$$

如 $$R=0$$

則 f 及 g 至少有一公根.

至求公根法仍以求 f 及 g 之最高公約式爲便,設 $\Delta(x)$ 爲此式.

則 $$\Delta(x)=0$$

之根盡爲 f 及 g 之公根.

第十六章 練習題

1. 已與 $x^3+px+9=0$ a, b, c 爲其根,試求

$$\Sigma a^4bc,\ (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2),\ \Sigma\frac{1}{a^3}$$

2. 已知 α, β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根,求一方程式其根爲 $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^{-2}+\beta^{-2}$ 者.

3. 求 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有一雙根之情形

4. 試定 m 俾下式

$$3x^4+4x^3-6x^2-12x+m=0$$

有一雙根

5. 試定 m 及 n 俾下式有一三倍根

$$x^4+mx^3+2x+n=0$$

6. 已與 $ax^3+bx^2+cx+d=0$, α, β, γ 爲其三根,求係數能合之條件俾有

1°) $\alpha\beta=-1$

2°) $\alpha+\beta=m\gamma$

3°) $\gamma=\sqrt{\alpha\beta}$

4°) $\dfrac{2}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

5°) $\alpha+\beta=\alpha\beta+m\gamma \qquad (m\neq-1)$

6°) $\alpha^2=\beta$

7. 已與 $x^3+px+q=0$ 令 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 爲其三根,求有 $2A+B+C=0$ 之條件

此條件既合,復令 $1-b=y$, $a-c=z$, 求 B, C 爲實數之情形,當 y, z 在 yoz 平面內變易

令 $y=3$, $z=3$. 求 A, B, C.

8. 已與 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 令 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲其四根

如有 $$\alpha+\beta=\gamma+\delta$$

試解上式

9. 已與 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 問何時 a, b, c 卽爲此式之根

完