Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SoSe 2026**

Diskrete Mathematik

Vorlesung 6

Relationen

Es sei P eine Menge von Personen und E eine Menge von Eigenschaften, die eine Person haben kann oder auch nicht, und zwar sollen hier nur solche Eigenschaften betrachtet werden, wo es nur die beiden Möglichkeiten des Zukommens oder des Nichtzukommens gibt. Die Gesamtinformation, welche der beteiligten Personen welche Eigenschaft besitzt, kann man dann auf verschiedene Arten ausdrücken. Man kann beispielsweise eine Liste von allen zutreffenden Person-Eigenschafts-Paaren erstellen, also

(Anna, klug), (Hans, schön), (Berta, schön), (Hans, lustig), (Anna, lustig)

oder man kann zu jeder Person die ihr zukommenden Eigenschaften auflisten, also

Anna: klug, lustig

Berta: schön

Hans: schön, lustig

oder umgekehrt zu einer Eigenschaft die Personen auflisten, die diese Eigenschaft erfüllen, also

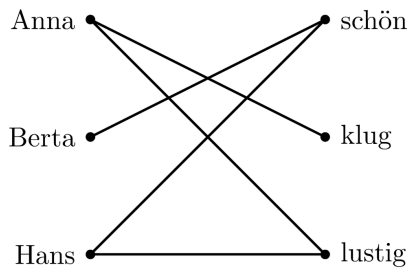
Schön: Berta, Hans

Klug: Anna

Lustig: Anna, Hans

Man kann auch das ganze in eine Tabelle schreiben, wo die eine Leiste die Personen und die andere Leiste die Eigenschaften repräsentiert, und dann diejenigen Kreuzungspunkte, die eine zutreffende Beziehung repräsentieren, ankreuzen, also

	Anna	Berta	Hans
Schön		x	x
Klug	x		
Lustig	x		x



Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Information durch ein Verbindungsdiagramm auszudrücken, bei dem eine Person und eine Eigenschaft genau dann durch eine Strecke oder eine Kurve verbunden werden, wenn die Eigenschaft auf die Person zutrifft.

Der mathematische Begriff, um Beziehungen zwischen den Elementen von zwei Mengen zu beschreiben, heißt Relation.

Definition 6.1. Es seien M und N Mengen. Eine *Relation* R zwischen den Mengen M und N ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times N$, also $R \subseteq M \times N$.

Statt $(x, y) \in R$ schreibt man häufig auch $R(x, y)$ oder xRy und sagt, dass „x in Relation R zu y steht“. Typische mathematische Relationen sind: ist gleich, ist größer als, ist Element von, ist Teilmenge von, ist disjunkt zu, usw.

Wenn $R \subseteq M \times N$ eine Relation ist, so heißt für jedes $m \in M$ die Menge

$$N_m = \{y \in N \mid R(m, y)\}$$

die *Faser* durch m und für jedes $n \in N$ heißt die Menge

$$M_n = \{x \in M \mid R(x, n)\}$$

die Faser durch n.

Beispiel 6.2. Wir betrachten auf einer Auswahl von Speisen und Getränken die Relation, die angibt, ob ein Gericht zu einem Getränk passt. Sei

$$E = \{\text{Hecht}, \text{Nudeln}, \text{Kartoffelgratin}, \text{Zupfkuchen}\}$$

und

$$G = \{\text{Rotwein}, \text{heiße Schokolade}, \text{Wasser}, \text{Kamillentee}, \text{Kaffee}\}.$$

Wasser passt zu allen Gerichten, Kamillentee zu keinem der Gerichte. Rotwein passt zu Nudeln und Kartoffelgratin, aber nicht zu Hecht oder zu Zupfkuchen. Heiße Schokolade und Kaffee passt zu Zupfkuchen, nicht zu den anderen Gerichten.

Beispiel 6.3. Es sei S die Menge der Städte und A die Menge der Autobahnen. Dann ist die Beziehung „liegt an“ eine Relation L zwischen S und

A. Zwischen einer Stadt $s \in S$ und einer Autobahn $a \in A$ bedeutet

$$sLa \text{ oder } L(s,a)$$

einfach, dass die konkrete Stadt s an der Autobahn a liegt. Zu s ist dann die Menge

$$A_s = \{a \in A \mid L(s,a)\}$$

die Menge der Autobahnen, an denen s liegt, und zu $a \in A$ ist

$$S_a = \{s \in S \mid L(s,a)\}$$

die Teilmenge der Städte, an denen die Autobahn a vorbeifährt. Für $s =$ Osnabrück ergibt sich also

$$A_{\text{Osnabrück}} = \{A1, A30, A33\}$$

und für die $A1$ ergibt sich

$$S_{A1} = \{\ldots, \text{Hamburg}, \text{Bremen}, \text{Osnabrück}, \ldots\}.$$

Diese Relation wird vollständig beschrieben, wenn man zu jeder Stadt die daran vorbeiführenden Autobahnen oder aber wenn man zu jeder Autobahn die daran liegenden Städte aufführt. Genauso gut kann man die Relation durch eine Tabelle ausdrücken mit einer Leitzeile für die Autobahnen und einer Leitspalte für die Städte, und wo im Kreuzungspunkt (s,a) genau dann ein Kreuz gemacht wird, wenn $L(s,a)$ gilt. Die Aussage

$$\forall s(\exists a L(s,a))$$

bedeutet, dass jede Stadt an einer Autobahn liegt (wohl falsch) und die Aussage

$$\forall a(\exists s L(s,a))$$

bedeutet, dass jede Autobahn an mindestens einer Stadt vorbeiführt (wohl wahr).

Beispiel 6.4. Es sei $E = \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene und G die Menge aller Geraden in der Ebene. Die Produktmenge

$$E \times G$$

besteht aus allen Paaren (P,g), wobei P ein Punkt der Ebene und g eine Gerade ist. Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Gerade zu beschreiben, und damit auch mehrere Möglichkeiten, ein solches Paar zu beschreiben. Beispielsweise ist

$$((2,-5), \{(u,v) \mid 4u - 3v = 6\})$$

ein Paar, wobei der Punkt vorne durch die beiden Koordinaten und die Gerade hinten durch eine Geradengleichung angegeben wird. Bei einem solchen Paar besteht keine Bedingung zwischen dem Punkt und der Geraden.

Die *Inzidenzrelation* zwischen Punkten und Geraden wird ausgedrückt durch

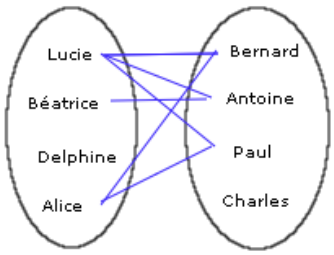
$$I = \{(P,g) \in E \times G \mid P \text{ liegt auf } g\}.$$

Statt „liegt auf“ kann man auch einfach $P \in g$ schreiben.

Beispiel 6.5. Es sei M eine Menge und P die Potenzmenge von M. Dann wird auf $M \times P$ die *Inzidenzrelation* I erklärt durch

$$I(x, T) \text{ genau dann, wenn } x \in T\,.$$

Die Inzidenzrelation drückt also aus, ob ein Element x zu einer bestimmten Teilmenge T gehört oder nicht. Die Faser zu einem Element besteht aus sämtlichen Teilmengen, die dieses Element enthalten, und die Faser zu einer Teilmenge besteht aus allen Elementen dieser Teilmenge.



Relationen und Abbildungen

Abbildungen kann man als spezielle Relationen auffassen.

Definition 6.6. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon\ L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma\ =\ \Gamma_F\ =\ \{(x, F(x)) \mid x \in L\}\ \subseteq\ L \times M$$

den *Graphen* der Abbildung F.

Abbildungen und ihre Graphen sind im wesentlichen äquivalente Objekte. Um Abbildungen innerhalb der Relationen herauszustellen, sind die folgenden Begriffsbildungen sinnvoll (die Begriffe sind sinnvoll, ob die gewählten Bezeichnungen sinnvoll sind, ist eine andere Frage).

Definition 6.7. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt *linkseindeutig*, wenn es zu jedem $y \in N$ maximal ein $x \in M$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Definition 6.8. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt *rechtseindeutig*, wenn es zu jedem $x \in M$ maximal ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Definition 6.9. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt *linksvollständig*, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Definition 6.10. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt *rechtsvollständig*, wenn es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Wenn ein Paar $(x, y) \in R$ gegeben ist, so meint rechtseindeutig, dass (bei gegebenem) x die rechte Seite, also das y, eindeutig bestimmt ist. Wenn man sich aber die Relation auf $M \times N$ dadurch gegeben denkt, dass zwischen den Elementen der linken Menge M und den Elementen der rechten Menge N genau dann eine verbindende Strecke (kein Pfeil) vorliegt, wenn das entsprechende Paar zu R gehört, so hat rechtseindeutig die Auswirkung, dass von jedem Punkt der linken Seite (!) aus maximal eine Verbindungsstrecke abgeht.

Lemma 6.11. *Eine Relation $R \subseteq M \times N$ ist genau dann eine (der Graph einer) Abbildung, wenn sie linksvollständig und rechtseindeutig ist.*

Beweis. Eine Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

ordnet jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zu, das ist nach Definition die Linksvollständigkeit und die Rechtseindeutigkeit. □

Eine rechtseindeutige Relation, die nicht unbedingt linksvollständig ist, nennt man auch manchmal eine „partielle Abbildung“, eine (insbesondere linksvollständige) Relation nennt man manchmal auch eine „mehrdeutige Abbildung“.

Bemerkung 6.12. Eine Abbildung $f\colon\ M \to N$ ist genau dann surjektiv, wenn der Graph der Abbildung (als Relation aufgefasst) rechtsvollständig ist, und genau dann injektiv, wenn der Graph linkseindeutig ist.

Relationen auf einer Menge

Im eingangs erwähnten Beispiel gab es einerseits Personen und andererseits Eigenschaften, die diese Personen haben konnten oder nicht. Die beiden beteiligten Mengen hatten also eine unterschiedliche Funktion. Wenn man aber z.B. zwischenmenschliche Beziehungen ausdrücken möchte, so stimmen die beiden Mengen häufig überein, und es ergeben sich neuartige strukturelle Möglichkeiten, da ein Element sowohl vorne als auch hinten stehen kann. Betrachten wir in der studentischen Dreier-WG die Relation „kann gut leiden“. Die zugehörige Relationstabelle sieht vielleicht so aus.

	Anna	Berta	Hans
Anna		x	x
Berta	x	x	
Hans	x	x	x

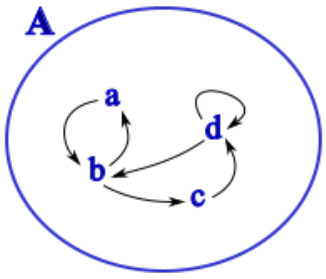
Hier ist zunächst wichtig, die Bedeutung der Spalte und der Zeile festzulegen; sagen wir, dass die Tabelle so zu verstehen ist, dass in der Leitspalte das grammatische Subjekt und in der Leitzeile das grammatische Objekt steht. Damit besagt die Tabelle, dass Hans alle Personen der WG gut leiden kann, dass Berta sich und Anna gut leiden kann, aber nicht Hans, und dass Anna ihre beiden Mitbewohner gut leiden kann, aber nicht sich selbst. Die Relation ist also weder „reflexiv“, da sich Anna nicht gut leiden kann, noch „symmetrisch“, da Hans zwar Berta gut leiden kann, aber nicht umgekehrt.

Definition 6.13. Eine *Relation* R auf einer Menge M ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times M$, also $R \subseteq M \times M$.

Wenn ein Paar (x, y) zu R gehört, so sagt man auch, dass x und y in der Relation R stehen. Statt $(x, y) \in R$ verwendet man häufig suggestivere Schreibweisen wie xRy, $x \sim y$ oder $x \leq y$. Dabei werden manche Symbole nur verwendet, wenn die Relation gewisse zusätzliche Eigenschaften erfüllt. Die wichtigsten Eigenschaften fasst die folgende Definition zusammen (die bei zwei verschiedenen Mengen keinen Sinn ergeben).

Definition 6.14. Es sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M. Man nennt R

- *reflexiv*, wenn $(x, x) \in R$ gilt für alle $x \in M$.
- *transitiv*, wenn für beliebige $x, y, z \in M$ aus $(x, y) \in R$ und aus $(y, z) \in R$ stets $(x, z) \in R$ folgt.
- *symmetrisch*, wenn für beliebige $x, y \in M$ aus $(x, y) \in R$ auch $(y, x) \in R$ folgt.
- *antisymmetrisch*, wenn für beliebige $x, y \in M$ aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

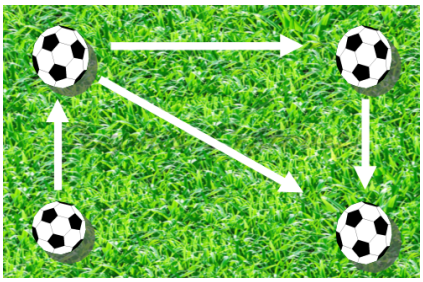


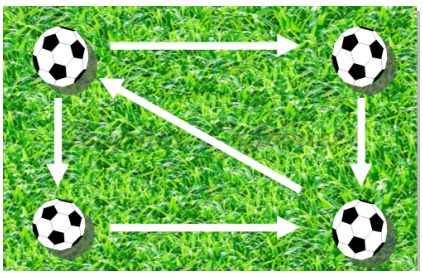
Ein Pfeildiagramm ist eine Möglichkeit, eine Relation darzustellen.

Eine wichtige Darstellungsmöglichkeit für eine Relation auf einer Menge ist durch ein Pfeildiagramm gegeben, man spricht auch von einem *gerichteten*

Graphen. Dabei werden die Elemente der Grundmenge M als Punkte (Knoten) gezeichnet, und es wird genau dann ein Pfeil von Punkt x zu Punkt y gezeichnet, wenn xRy gilt. Die Richtung des Pfeiles ist dabei wichtig. Wenn allerdings die Relation symmetrisch ist, so gibt es zu jedem Pfeil den entsprechenden Rückpfeil. Daher drückt man symmetrische Relationen direkt durch ungerichtete Pfeile (Kanten, Verbindungsstrecken) aus und spricht von *ungerichteten Graphen*.

Beispiel 6.15.





Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die Gewinnrelation in einer Spielgruppe, die man durch

einen gerichteten Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von A über B durch einen Pfeil von A nach B (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.

Relationserhaltende Abbildungen

Definition 6.16. Es seien (M, R) und (N, S) Mengen mit darauf erklärten Relationen R bzw. S. Man nennt eine Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

relationstreu (oder *relationserhaltend*), wenn für alle $x, y \in M$ mit xRy auch $\varphi(x)S\varphi(y)$ gilt.

Definition 6.17. Es seien (M, R) und (N, S) Mengen mit Relationen. Eine relationserhaltende Abbildung

$$\varphi\colon\ (M, R) \longrightarrow (N, S)$$

heißt *Isomorphismus*, wenn es eine relationserhaltende Abbildung

$$\psi\colon\ (N, S) \longrightarrow (M, R)$$

derart gibt, dass

$$\psi \circ \varphi\ =\ \mathrm{Id}_M$$

und

$$\varphi \circ \psi\ =\ \mathrm{Id}_N$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = AnnaBertaHans.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-da 4.0 2

Quelle = Relation binaire.png , Autor = Benutzer HB auf fr. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 4

Quelle = Relación binaria 11.svg , Autor = Benutzer HiTe auf Commons, Lizenz = PD 6

Quelle = Fussball1.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 7

Quelle = Fussball2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 7

Quelle = Fussball3.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 7

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9