JUL 2 1890

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVI.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLIAMS et NORGATE, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez ROBET, libraire, rue Hautefeuille, 10bis.

BERLIN, chez FRIEDLÄNDER u. Sohn, Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 108.

AVRIL 1890.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVI.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLAMS et NORGATE, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez ROBET, libraire, rue Hautefeuille, 10 bis.

BERLIN, chez FRIEDLÄNDER u. Sohn, Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 108.

AVRIL 1890.

[illegible]

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XVI.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 1er AVRIL 1890.

Bureau.

Président,	M. Gravis.
Vice-Président,	» Ubaghs
Secrétaire général,	» le Paige.
Trésorier,	» Neuberg.
Bibliothécaire,	» Fraipont.

Membres effectifs.

1842 Selys Longchamps (baron E. de), membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

1844 Kupfferschlaeger, Is., professeur émérite à l'université de Liège.

1853 Candèze, E., membre de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Glain par Liège.

1853 Pâque, A., ancien professeur de mathématiques à l'athénée de Liège (Flémalle-Grande).
1855 Dewalque, G., professeur de minéralogie, de géologie et de paléontologie à l'université de Liège.
1856 Catalan, C. E., professeur émérite à l'université de Liège.
1860 Gillon, A., professeur de métallurgie à l'université de Liège.
1861 Perard, L., professeur de physique à l'université de Liège.
1865 Folie, F., directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles.
1868 Graindorge, L. A. J., professeur à l'université de Liège.
1870 Masius, V., professeur de pathologie et de clinique à l'université de Liège.
Vanlair, C., professeur de pathologie et de thérapeutique à l'université de Liège.
1871 Van Beneden, Éd., professeur de zoologie, de physiologie et d'anatomie comparées à l'université de Liège.
1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université de Liège.
1875 Spring, W., professeur de chimie à l'université de Liège.
Swaen, A., professeur d'anatomie à l'université de Liège.
1878 le Paige, Constantin, professeur de géométrie supérieure à l'université de Liège.
1879 Jorissen, A., docteur en sciences, à Liège.
1880 Neuberg, J., professeur à l'université de Liège.
1881 Fraipont, J., professeur à l'université de Liège.
1884 Deruyts, J., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.
Ronkar, Ém., chargé de cours à l'université.
Ubaghs, P., répétiteur à l'École des mines.
1885 Gravis, A., professeur de botanique à l'université de Liège.
1887 Lohest, M., assistant de géologie à l'université de Liège.
Forir, H., répétiteur à l'École des mines.
Deruyts, Fr., docteur en sciences.
Lambotte, Er., docteur en médecine, à Verviers.
De Heen, P., chargé de cours à l'université de Liège.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1842 Laguesse, directeur divisionnaire honoraire des mines, à Tournai.

1843 Stas, J. S., membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Bruxelles.

Steichen, membre de l'Académie, à Bruxelles.

1844 Lecointe, ancien professeur de mathématiques supérieures, à Bruxelles.

1845 Maus, inspecteur général des ponts et chaussées, à Bruxelles.

1847 De Cuyper, A. C., professeur émérite à l'université de Liége, à Bruxelles.

1852 Ettingshausen (baron Constantin von), membre de l'Académie des sciences de Vienne, à Graz.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1854 Petrina, professeur de physique, à Prague (Bohême).

Dutreux, receveur général, à Luxembourg.

Weber, professeur de physique à l'université de Gottingue (Prusse).

1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro, maire de Cherbourg.

Tchébycheff, P., membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.

1858 Caligny (marquis de), correspondant de l'Institut, à Versailles (France).

1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.

Terssen, général d'artillerie, à Anvers.

De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.

Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.

1866 Ledent, professeur au collége communal de Verviers.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York (États-Unis).
Boncompagni (prince Balthasar), à Rome.
Helmholtz (von), professeur de physique, à Berlin.
1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.
Schlömilch, professeur d'analyse à l'École polytechnique de Dresde.
1870 Bertrand, J. L. F., membre de l'Institut, à Paris.
1871 Imschenetski, membre de l'Académie, à St-Petersbourg.
Henry, L., professeur à l'université de Louvain.
Durége, professeur à l'université de Prague (Bohême).
Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.
Le Boulengé, P., colonel d'artillerie.
1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.
Garibaldi, professeur à l'université de Gènes (Italie).
Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg (Hongrie).
1873 Bates, H., membre de la Société royale de Londres.
Hermite, Ch., membre de l'Institut, à Paris.
Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.
1874 Winkler, D. C. J., conservateur du Musée de Harlem (Néerlande).
Van Rysselberghe, aide à l'Observatoire royal, à Bruxelles.
1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.
Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).
Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.
Marie, M., examinateur à l'École polytechnique, à Paris.
Mathieu, Em., membre de l'Académie des sciences (Nancy).
1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.
1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 SYLVESTER, J. J., professeur à l'université d'Oxford.
CZUBER, professeur, à Prague.
1880 CREMONA, Luigi, directeur de l'École d'application, à Rome.
WEYR, Ém., professeur à l'université de Vienne (Autriche).
IBAÑEZ, général, directeur de l'Institut cartographique, à Madrid.
STUDNIČKA, F., professeur de mathématiques à l'université de Prague.
VAN DER MENSBRUGGE, Gustave, professeur à l'université de Gand.
LIAGRE, général, secrétaire perpétuel de l'Académie royale des sciences, etc., à Bruxelles.
DE TILLY, J., colonel, membre de l'Académie de Belgique, à Bruxelles.
BONNET, Ossian, membre de l'Institut, à Paris.
1881 SÉBERT, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.
ANGOT, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.
WIEDEMANN, G., professeur à l'université de Leipzig.
PLANTÉ, G., à Paris.
KOHLRAUSCH, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.
QUINCKE, professeur de physique, à Heidelberg.
GIORDANO, inspecteur du corps des mines, à Rome.
GUISCARDI, professeur à l'université de Naples.
LAISANT, C. A., député, à Paris.
BELTRAMI, professeur à l'université de Pavie.
1882 MASCART, membre de l'Institut, à Paris.
BOUNIAKOWSKI, membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.
1883 BREITHOF, N., professeur à l'université de Louvain.
MITTAG-LEFFLER, G., professeur à l'université de Stockholm.
GOMÈS TEIXEIRA, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1884 BIERENS DE HAAN, D., professeur à l'université de Leide.
GERONO, C., rédacteur des *Nouvelles Annales de mathématiques*, à Paris.

1885 SCHUR, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.
PICQUET, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.
DE LONGCHAMPS (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.
VANĚČEK, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).
CESÀRO, E., professeur à l'université, à Palerme.

1887 WALRAS, L., professeur à l'Académie de Lausanne.
MENABREA, marquis de Val-Dora, ambassadeur de S. M. le roi d'Italie, à Paris.
GUCCIA, docteur en sciences, à Palerme.
CASEY, J., professeur à l'université catholique de Dublin.
WÜLLNER, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.
PAALZOW, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 OCAGNE (Maurice D'), ingénieur des ponts et chaussées, à Cherbourg (France).

II. — Sciences naturelles.

1842 VAN BENEDEN, J. P., professeur à l'université de Louvain.

1843 KEYSERLING (comte A. DE), membre de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg.

1845 HAGEN, professeur à l'université de Cambridge (États-Unis).

1848 KLIPSTEIN (VON), professeur à l'université de Giessen.

1852 DANA, J. D., professeur de géologie et d'histoire naturelle, à New-Haven (États-Unis).

1853 WESTWOOD, professeur de zoologie à l'université d'Oxford (Angleterre).
WATERHOUSE, conservateur au Musée Britannique, à Londres.

1854 Kölliker (von), professeur à l'université de Wurzbourg (Bavière).
Drouet, H., naturaliste, à Charleville (France).
Stammer, docteur en médecine, à Dusseldorf (Prusse).
Erlenmeyer, docteur en médecine, à Neuwied (Prusse).
Lucas, H., aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.
Blanchard, E., membre de l'Institut, à Paris.
1855 Geinitz, H.B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.
1859 Marseul (abbé de), entomologiste, à Paris.
Beyrich, professeur à l'université de Berlin.
Marcou, J., géologue, États-Unis.
1860 Du Bois-Reymond, professeur à l'université de Berlin.
Brücke, professeur à l'université de Vienne.
1862 Caspary, professeur de botanique à l'université de Königsberg (Prusse).
1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.
Durieu de Maisonneuve, directeur du Jardin Botanique, à Bordeaux (France).
Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.
1865 Zeis, conservateur au Muséum royal d'histoire naturelle, à Dresde.
Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg (France).
Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.
De Borre, A., ancien conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Bruxelles.
1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.
1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille (France).
Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.
1869 Simon, E., naturaliste, à Paris.
1870 Trautschold, professeur, à Breslau.

1870 MALAISE, C., professeur à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 VAN HOOREN, docteur en sciences, à Tongres.

MÜLLER (baron VON), botaniste du gouvernement, à Melbourne (Australie).

THOMSON, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.

CAPELLINI (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 CLOS, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

HALL, James, paléontologiste de l'État, à Albany (États-Unis).

WHITNEY, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie (États-Unis).

GLAZIOU, botaniste, directeur des Jardins impériaux à Rio de Janeiro.

LADISLAÕ NETTO, botaniste, directeur du Musée de Rio de Janeiro.

DE CARVALHO (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

BURMEISTER, H., directeur du Musée national de Buenos-Ayres.

MORENO, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

ARESCHOUG, professeur adjoint à l'université de Lund (Suède.)

1874 GEGENBAUER, professeur à l'université de Heidelberg.

HÄCKEL, professeur à l'université de Iéna.

WALDEYER, professeur à l'université de Berlin.

HUXLEY, professeur à l'école des mines, à Londres.

1875 EIMER, professeur à l'université de Tubingue.

DE LA VALETTE SAINT-GEORGE, professeur à l'université de Bonn.

RAY-LANKESTER, professeur à l'université de Londres.

PACKARD, professeur à l'université de Salem (États-Unis).

FLEMMING, W., professeur à l'université de Kiel.

1875 PLATEAU, F., professeur à l'université de Gand.
RÖMER, F., professeur à l'université de Breslau.
SAPORTA (Gaston marquis DE), correspondant de l'Institut de France, à Aix (France).
1876 BALFOUR, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.
1877 MAC LACHLAN, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.
1878 HERTWIG, R., professeur à l'université de Munich.
STRASBURGER, professeur à l'université de Bonn.
BRONGNIART, Charles, à Paris.
1879 WETTERBY, professeur à l'université de Cincinnati.
BOLIVAR, I., professeur, à Madrid.
RITSEMA, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.
RENARD, Alphonse, professeur à l'université de Gand.
1881 KEY, AXEL, professeur à l'École de médecine de Stockholm.
RETZIUS, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.
MENEGHINI, professeur à l'université de Pise.
TARAMELLI, professeur à l'université de Pavie.
GESTRO, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.
SALVADORI (comte Th.), professeur à l'université de Turin.
1883 HULL, Edward, directeur du *Geològical Survey* d'Irlande.
SANDBERGER, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.
1884 TRINCHESE, professeur à l'université de Naples.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liège. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeur : P. Mansion, professeur à l'université.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche Geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Paris. — *Société géologique de France.*
Société Philomatique.
Muséum d'histoire naturelle.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Société des sciences physiques et naturelles.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Istituto tecnico.*
Societa di scienze naturali e economiche.
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*

Rome. — *Bullettino di bibliografia delle scienze matematiche*, publié par le prince B. Boncompagni.
Reale Accademia dei Lincei.
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

Delft. — *École polytechnique.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques,* rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.
Société impériale de minéralogie.

SUÈDE ET NORWÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.
Entomologiska föreningen.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Dr H. G. Zeuthen, professeur à l'université.
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schafhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ÉTATS-UNIS.

American Association for advancement of sciences.

Baltimore. — *American Journal of mathematics.* (*Johns Hopkins University.*)

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge. — *Museum of comparative zoology.*

Columbus. — *Ohio State agricultural Society.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

Newport. — *Orleans County Society of natural sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Salem. — *The American Naturalist.*
Essex Institute.
Peabody Academy of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

GUATÉMALA.

Guatémala. — *Sociedad economica.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

AUSTRALIE.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE

PAR

J. GRAINDORGE,

DOCTEUR SPÉCIAL EN SCIENCES PHYSICO-MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

INTRODUCTION.

Le but que je me suis proposé dans ce travail est de présenter un ensemble des recherches les plus importantes sur l'intégration des équations de la Mécanique. Ces travaux qui sont dus à Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi, Donkin, Bertrand, Liouville, etc., sont disséminés dans diverses revues périodiques. J'en ai déjà fait connaître quelques-uns dans un Mémoire publié en 1871 : j'aurai l'occasion de reproduire ici une partie de ce Mémoire en lui donnant plus de développements.

Aucun ouvrage n'a encore été publié jusqu'ici sur cette matière. Cependant ces théories ont pris une telle extension qu'il est nécessaire pour ceux qui désirent les étudier et les approfondir d'avoir un guide qui les dispense de faire un nombre considérable de recherches. Aussi, j'espère que le travail actuel pourra rendre quelques services.

TABLE DES MATIÈRES.

INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE.

I.

Formules de Lagrange. — Équations canoniques.

1. On sait qu'en appliquant le théorème de d'Alembert au mouvement d'un système matériel, on obtient l'équation :

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \sum (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i),$$

en désignant par m_i la masse d'un point du système, x_i, y_i, z_i les coordonnées de ce point à la fin du temps t, X_i, Y_i, Z_i les composantes de la force P_i qui agit sur ce point, δx_i, δy_i, δz_i les projections sur les axes du déplacement virtuel $\delta\sigma_i$ de ce point. Les déplacements δx_i, δy_i, δz_i doivent être *compatibles* avec les liaisons du système *à l'instant considéré.*

C'est l'équation générale de la dynamique : on l'appelle *l'équation de Lagrange.*

2. Dans le cas où il existe une *fonction de force* U, c'est-à-dire une fonction telle que l'on ait :

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

il vient :

$$\sum (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right) = \delta U,$$

et l'équation de Lagrange devient alors :

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta \mathrm{U}.$$

3. Il est évident que, même dans le cas où il n'y a pas de fonction de force, on peut toujours écrire l'équation de Lagrange sous la forme symbolique :

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta \mathrm{U}, \tag{1}$$

mais il faut bien observer que dans cette équation, U n'a de signification que si la fonction de force existe, c'est-à-dire si

$$\sum (\mathrm{X}_i dx_i + \mathrm{Y}_i dy_i + \mathrm{Z}_i dz_i)$$

est une différentielle exacte d'une fonction U. Dans le cas général où il n'existe pas de fonction de force, δU sera une notation abrégée employée pour représenter l'expression

$$\sum (\mathrm{X}_i \delta x_i + \mathrm{Y}_i \delta y_i + \mathrm{Z}_i \delta z_i);$$

en d'autres termes, dans ce cas, U seul ne représentera rien.

4. L'équation (1) a été obtenue en supposant le système rapporté à des coordonnées rectangulaires. Supposons maintenant qu'aux coordonnées x_i, y_i, z_i, on substitue d'autres variables $q_1, q_2, \ldots q_k$, liées à x_i, y_i, z_i d'une manière quelconque, mais de telle sorte cependant que l'on puisse toujours exprimer x_i, y_i, z_i en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_k$: les variables $q_1, q_2, \ldots q_k$, ne sont pas nécessairement au nombre de $3n$, comme les coordonnées x_i, y_i, z_i. Il est même préférable, dans la plupart des cas, de prendre le nombre $k < 3n$, de telle manière que, par le choix même de ces variables nouvelles, les équations de condition soient satisfaites d'elles-mêmes.

Ainsi, par exemple, supposons un point assujetti à demeurer sur une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

on pourra choisir deux variables nouvelles q_1, q_2, définies par les équations

$$x = r \sin q_1 \cos q_2,$$

$$y = r \sin q_1 \cos q_2,$$

$$z = r \sin q_2,$$

et il est évident que, par ce choix de deux nouvelles variables, la liaison sera satisfaite d'elle-même.

Ainsi encore, dans le cas d'un point assujetti à demeurer sur l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

si l'on pose :

$$x = a \sin q_1 \cos q_2,$$

$$y = b \sin q_1 \cos q_2,$$

$$z = c \sin q_2,$$

la liaison sera satisfaite d'elle-même.

En général, si l'on a m équations de liaisons, les $3n$ coordonnées peuvent être exprimées au moyen de $3n - m$ d'entre elles, ou au moyen de $3n - m$ variables nouvelles.

Si nous désignons par $q_1, q_2, \ldots q_k$, ces $3n - m = k$ nouvelles quantités, elles doivent être telles que si l'on exprime x_i, y_i, z_i au moyen de ces quantités, et si l'on substitue les valeurs des x_i, y_i, z_i ainsi obtenues dans les équations de condition :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots \ L_m = 0,$$

les premiers membres de ces équations s'annulent identiquement, c'est-à-dire que l'on aura identiquement :

$$L_1(q_1, q_2, \ldots q_k) = 0, \ \ldots \ L_m(q_1, q_2, \ldots q_k) = 0,$$

sans qu'il existe aucune relation entre les variables q.

5. Cela posé, substituons aux variables x_i, y_i, z_i les k variables nouvelles $q_1, q_2, \ldots q_k$ (le nombre k étant pour le moment tout à fait quelconque), liées aux premières par des équations telles que

$$x_i = \varphi(t, q_1, q_2, \dots q_k);$$

nous aurons, en désignant par x'_i, q'_1, q'_2, ... q'_k, les dérivées de x_i, q_1, q_2, ... q_k par rapport à t :

$$x'_i = \psi(t, q_1, q_2, \dots q_k, q'_1, q'_2, \dots q'_k).$$

6. Avant de faire la substitution, nous allons d'abord transformer l'équation (1).

A cet effet, posons :

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \sum m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2); \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i} = m_i x'_i, \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i} = m_i y'_i, \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i} = m_i z'_i,$$

et, par suite,

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = m_i \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d \cdot \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}}{dt}, \text{ etc.}$$

L'équation (1) devient alors :

$$\sum \left[\frac{d \cdot \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}}{dt} \delta x_i + \frac{d \cdot \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i}}{dt} \delta y_i + \frac{d \cdot \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i}}{dt} \delta z_i \right] = \delta \mathrm{U}. \qquad (2)$$

On peut mettre le premier membre de cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \sum \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i} \delta x_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i} \delta y_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i} \delta z_i \right) \\ &- \sum \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i} \frac{d \cdot \delta x_i}{dt} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i} \frac{d \cdot \delta y_i}{dt} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i} \frac{d \cdot \delta z_i}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i} \delta x_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i} \delta y_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i} \delta z_i \right) \\ &- \sum \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i} \delta x'_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i} \delta y'_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i} \delta z'_i \right). \end{aligned}$$

Or, de la formule

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

il résulte que T est une fonction des x_i', y_i', z_i'; on a donc :

$$\delta T = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial x_i'} \delta x_i' + \frac{\partial T}{\partial y_i'} \delta y_i' + \frac{\partial T}{\partial z_i'} \delta z_i' \right),$$

et, par suite, l'équation (2) devient :

$$\frac{d}{dt} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial x_i'} \delta x_i + \frac{\partial T}{\partial y_i'} \delta y_i + \frac{\partial T}{\partial z_i'} \delta z_i \right) - \delta T = \delta U. \tag{3}$$

7. Cette équation (3) n'est qu'une transformée de l'équation (1) toujours en coordonnées rectangulaires. Nous allons maintenant introduire les variables q, et chercher séparément ce que deviennent les trois termes de l'équation (3) lorsque l'on remplace les x_i, y_i, z_i par les q.

Or, T est une fonction de x_i', y_i', z_i'; mais, x_i, y_i, z_i étant des fonctions de t, $q_1, \ldots q_k$, il en résulte que x_i', y_i', z_i' sont des fonctions de t, $q_1, \ldots q_k$, $q_1', \ldots q_k'$, données par les formules

$$\left. \begin{aligned} x_i' &= \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s} q_s', \\ y_i' &= \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s} q_s', \\ z_i' &= \frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s} q_s'; \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

par conséquent, T sera une fonction de $q_1', \ldots q_k'$, $q_1, \ldots q_k$, et nous aurons :

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s + \sum \frac{\partial T}{\partial q_s'} \delta q_s'.$$

D'autre part, on a :

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta y_i = \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta z_i = \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s \; (*), \tag{5}$$

(*) On ne doit pas, dans ces formules, tenir compte du terme en δt, et, par suite,

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\delta x_i+\frac{\partial T}{\partial y'_i}\delta y_i+\frac{\partial T}{\partial z'_i}\delta z_i\right)$$

$$=\sum_i\sum_s\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\frac{\partial T}{\partial y'_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\frac{\partial T}{\partial z'_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s.$$

D'ailleurs, des équations (4) on tire :

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_s}=\frac{\partial x_i}{\partial q_s},\quad \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s}=\frac{\partial y_i}{\partial q_s},\quad \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s}=\frac{\partial z_i}{\partial q_s};$$

d'où :

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\delta x_i+\frac{\partial T}{\partial y'_i}\delta y_i+\frac{\partial T}{\partial z'_i}\delta z_i\right)$$

$$=\sum_i\sum_s\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial q'_s}+\frac{\partial T}{\partial y'_i}\frac{\partial y'_i}{\partial q'_s}+\frac{\partial T}{\partial z'_i}\frac{\partial z'_i}{\partial q'_s}\right)\delta q_s=\sum_s\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q_s.$$

Mais on a aussi, en général, en remplaçant x_i, y_i, z_i par leurs valeurs en fonction de $q_1, \dots q_k$, et les $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ par les valeurs (5) :

$$\delta U=\sum(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)$$

$$=\sum_i\sum_s\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)=\sum_s Q_s\delta q_s,$$

en posant :

$$Q_s=\sum_i\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right).$$

L'équation (3) devient alors :

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q_s-\sum\frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s-\sum\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q'_s=\sum Q_s\delta q_s. \tag{6}$$

Mais, on a :

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q_s=\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q_s\right)=\sum\frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt}\delta q_s+\sum\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q'_s,$$

puisque t doit rester constant dans les différentiations relatives à la caractéristique δ, les déplacements étant compatibles avec les liaisons.

et l'équation (6) peut être mise sous la forme suivante :

$$\sum \frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt}\delta q_s - \sum \frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s = \sum Q_s \delta q_s,$$

ou bien :

$$\sum \left(\frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s = 0. \qquad (7)$$

8. Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur les variables q, que nous avons supposées en nombre quelconque. Supposons maintenant que les variations δq soient arbitraires, ce qui arrivera lorsqu'il n'existe pas de relations entre les variables q, c'est-à-dire lorsque le nombre k sera le plus petit possible ($k = 3n - m$) ; les coefficients de ces variations seront nuls séparément, et l'équation (7) se décomposera en k équations de la forme

$$\frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s = 0 \text{ (*)}, \qquad (8)$$

s pouvant avoir les valeurs 1, 2, ... k.

Si, au contraire, il existe des relations entre les variables q, c'est-à-dire si $k > 3n - m$, ces liaisons seront exprimées par des équations de condition. On fera alors usage de l'équation (7), et l'on traitera la question de la même manière que dans le cas des variables x_i, y_i, z_i; par exemple, on emploiera la *méthode des multiplicateurs*.

Les formules (7) et (8) sont dues à Lagrange.

(*) M. Bertrand a donné une autre démonstration de ces formules (*Mécanique analytique de Lagrange*, t. I, p. 409). Voir aussi la démonstration de Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, pp. 64 et 65.

9. Lorsqu'il existe une fonction de force U, en y introduisant les variables $q_1, \dots q_k$, on a :

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s;$$

l'équation (7) devient alors :

$$\sum \left(\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} \right) \delta q_s = 0,$$

et les équations (8) nous donnent :

$$\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0. \qquad (9)$$

10. Les équations (9) qui ont lieu seulement dans le cas où il existe une fonction de force, sont du second ordre. Elles ne sont pas faciles à intégrer dans la plupart des cas; mais on peut les simplifier, en introduisant de nouvelles variables. A cet effet, on fait usage d'une transformation imaginée par Poisson et par Hamilton, ce qui réduira les équations à d'autres ne contenant que des dérivées du premier ordre, mais dont le nombre sera double.

Pour effectuer la transformation, nous supposerons que *les liaisons sont indépendantes du temps,* de sorte que les variables x_i, y_i, z_i s'expriment en fonction des q, au moyen d'équations ne renfermant pas explicitement le temps t.

Nous aurons ainsi :

$$x'_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s} q'_s, \quad y'_i = \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s} q'_s, \quad z'_i = \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s} q'_s;$$

par conséquent, x'_i, y'_i, z'_i sont des fonctions homogènes et du premier degré de $q'_1, q'_2, \dots q'_k$. Mais alors il est évident que la fonction

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i),$$

sera une fonction homogène et du second degré de $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, dont les coefficients seront des fonctions connues de $q_1, q_2, \dots q_k$.

Cela établi, posons avec Poisson :

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = p_s, \tag{10}$$

et nous aurons, au lieu de l'équation (9), les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial(T + U)}{\partial q_s}, \\ \frac{\partial T}{\partial q'_s} &= p_s. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mais ce n'est pas la forme définitive des équations du mouvement : les équations (11) subiront encore une autre transformation que nous ferons connaître plus loin.

11. *Remarque.* — Nous pouvons cependant déjà déduire des équations (11) un résultat remarquable (*) :

PROPRIÉTÉ. — *Si l'on peut choisir les variables* q *de telle manière que l'une des variables* q_s *n'entre pas dans la fonction de force* U, *et si, en outre, la fonction* T *ne renferme pas la variable* q_s *elle-même, mais sa dérivée* q'_s, *il en résultera une intégrale du système d'équations différentielles* (11).

Cette intégrale sera :

$$p_s = const., \qquad \text{ou :} \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_s} = const.$$

En effet, puisque, par hypothèse, T et U ne renferment pas la variable q_s, on a :

$$\frac{\partial(T + U)}{\partial q_s} = 0;$$

par suite,

$$\frac{dp_s}{dt} = 0, \qquad \text{ou bien :} \qquad p_s = const.$$

(*) JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 66.

12. Ce cas se présente dans le problème du *mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe.*

En effet, si le centre est pris pour origine, on a les formules

$$x = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \theta,$$

en désignant par r le rayon vecteur, θ l'angle qu'il fait avec l'axe des z, et φ l'angle que sa projection sur le plan des xy fait avec l'axe des x.

Si l'on pose, pour abréger :

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt},$$

on aura, puisqu'il ne s'agit que d'un seul point matériel :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{1}{2} m(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \,.\, \varphi'^2).$$

Comme on le voit, la fonction T ne renferme pas la variable φ, mais elle renferme sa dérivée φ'.

D'autre part, la fonction de force étant :

$$\mathrm{U} = \frac{\mu}{r},$$

elle ne renferme pas la variable φ.

On a donc :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi'} = mr^2 \sin^2 \theta \,.\, \varphi' = const.,$$

ou bien, en faisant entrer le facteur m dans la constante, l'équation

$$r^2 \sin^2 \theta \,.\, \varphi' = const.,$$

sera une intégrale du problème.

Or, il est facile de s'assurer que cette équation n'est autre que l'intégrale des aires dans le plan des xy. En effet, des formules :

$$x = r \cos\varphi \sin\theta,$$
$$y = r \sin\varphi \sin\theta,$$

on tire :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

d'où :

$$\frac{\varphi'}{\cos^2\varphi} = \frac{xy' - yx'}{x^2} = \frac{xy' - yx'}{r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi},$$

ou bien :

$$\varphi' = \frac{xy' - yx'}{r^2 \sin^2\theta};$$

par conséquent, l'équation

$$r^2 \sin^2\theta . \varphi' = const.,$$

est équivalente à l'équation

$$xy' - yx' = const.,$$

ce qui est l'intégrale des aires dans le plan des xy.

13. Reprenons maintenant les équations (11) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial q_s}, \\ p_s &= \frac{\partial T}{\partial q'_s}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Dans la première de ces équations les variables indépendantes sont les q et les q' ; proposons-nous de la transformer en prenant pour variables nouvelles les q et les p.

La fonction T étant une fonction homogène du second degré des q', dont les coefficients dépendent des q, il résulte de la seconde des équations (11) que les p sont des fonctions homogènes et linéaires des q'.

En vertu de la définition des p, on aura donc k équations de la forme

$$p_i = \varpi_i,$$

ϖ_i étant une fonction linéaire de $q'_1, \dots q'_k$.

Si l'on résout ces équations par rapport à $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, on obtient k équations de la forme

$$q'_i = \mathrm{K}_i,$$

K_i étant une fonction linéaire de $p_1, p_2, \dots p_k$, dont les coefficients dépendent des q.

Observons que, par le changement de variables, $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_s}$ ne change pas, puisque U, qui renferme seulement $q_1, q_2, \dots q_k$, est indépendant de $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, et, par suite de $p_1, p_2, \dots p_k$. Au contraire $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_s}$ changera. En effet, T est une fonction de $q_1, q_2, \dots q_k$, $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, et par rapport à ces dernières, T est homogène et du second degré; si, au lieu des q', nous introduisons les p, au moyen des équations linéaires $q'_i = \mathrm{K}_i$, T deviendra une fonction de $q_1, \dots q_k, p_1, \dots p_k$; elle sera homogène et du second degré par rapport aux p, et elle aura changé relativement aux q, puisque les coefficients des K_i, que nous introduisons à la place des q', renferment des q.

Par conséquent, si l'on prend la dérivée partielle de T par rapport à q_s dans la nouvelle hypothèse, cette dérivée ne sera pas la même que dans la première hypothèse.

Pour distinguer, nous désignerons par $\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s}\right)$, $\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_s}\right)$ les quotients différentiels de T, considérée comme fonction de $q_1, \dots q_k, p_1, \dots p_k$, et par $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_s}$, comme ci-dessus, les quotients différentiels de T, considérée comme fonction de $q_1, q_2, \dots q_k, q'_1, q'_2, \dots q'_k$; il résulte de ce que nous venons de dire que $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_s}$ et $\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_s}\right)$ auront des valeurs différentes.

Proposons-nous maintenant de trouver par quoi l'on doit remplacer $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_s}$ dans les formules (11), lorsque T deviendra fonction de $p_1, \dots p_k, q_1, \dots q_k$.

Nous avons, en vertu du théorème des fonctions homogènes :

$$2\mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_k} q'_k \;(^*),$$

(*) Dans cette formule et dans les suivantes, T est considéré comme fonction des q et des q'.

ou bien :

$$2T = p_1q'_1 + p_2q'_2 + \cdots + p_kq'_k,$$

formule que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$T = p_1q'_1 + p_2q'_2 + \cdots + p_kq'_k - T.$$

Prenant la différentielle totale des deux membres, on a :

$$\begin{aligned} dT = {} & p_1dq'_1 + p_2dq'_2 + \cdots + p_kdq'_k \\ & + q'_1dp_1 + q'_2dp_2 + \cdots + q'_kdq_k \\ & - \frac{\partial T}{\partial q_1}dq_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}dq_2 - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q_k}dq_k \\ & - \frac{\partial T}{\partial q'_1}dq'_1 - \frac{\partial T}{\partial q'_2}dq'_2 - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q'_k}dq'_k, \end{aligned}$$

ou bien, en réduisant en vertu de la deuxième équation (11):

$$\begin{aligned} dT = {} & q'_1dp_1 + q'_2dp_2 + \cdots + q'_kdp_k \\ & - \frac{\partial T}{\partial q_1}dq_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}dq_2 - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q_k}dq_k \\ = {} & \sum q'_sdp_s - \sum \frac{\partial T}{\partial q_s}dq_s, \end{aligned}$$

T étant toujours considéré comme une fonction des q et des q'. Mais, si nous introduisons dans T, au lieu des q', les quantités p, au moyen des équations

$$q'_i = K_i,$$

T devient une fonction des p et des q, et l'on a :

$$dT = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right)dp_s + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)dq_s;$$

par conséquent,

$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right)dp_s + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)dq_s = \sum q'_sdp_s - \sum \frac{\partial T}{\partial q_s}dq_s.$$

Cette équation devant être identique, on a :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) = q'_s,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

Si, maintenant, nous remplaçons $\frac{\partial T}{\partial q_s}$ dans la première des équations (11), il vient :

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_s} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right),$$

et alors les équations (11) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial q_s} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right), \\ q'_s &= \frac{dq_s}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

14. Si l'on compare la seconde de ces équations (12) avec la seconde des équations (11)

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s},$$

on en conclut qu'il existe entre les quantités q' et p une sorte de réciprocité.

15. Afin de donner aux équations (12) une forme plus simple, posons :

$$H = T - U,$$

nous aurons :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right),$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial p_s}\right).$$

Mais, comme nous l'avons déjà remarqué, U ne renferme pas $p_1, p_2, \ldots p_k$; par conséquent,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p_s}\right) = 0;$$

d'autre part,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_s},$$

puisque U ne renferme que les q, et par suite, ne change pas quand on remplace les q' en fonction des p.

On a donc :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_s},$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right).$$

et les équations (12) deviennent :

$$\frac{dp_s}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right),$$

$$\frac{dq_s}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right).$$

Comme, dans ces dernières équations, il est évident que p et q sont les variables, on peut supprimer les parenthèses et écrire ces équations sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

dans lesquelles $H = T - U$.

On a autant d'équations semblables à celles-ci qu'il y a de variables p et q.

C'est Hamilton qui a donné la forme (13) aux équations du mouvement (*). Elles s'appellent les *équations canoniques du mouvement,* ou *système hamiltonien.*

La fonction $H = T - U$ a reçu de Jacobi le nom de *fonction caractéristique* (**).

16. *Remarque.* — Il est facile de retrouver au moyen des équations (13) le *principe des forces vives.* En effet, il résulte de ces équations (13) que *la fonction* H *reste constante pendant toute la durée du mouvement.*

Pour démontrer cette propriété, il suffit de prouver que l'on a :

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Or, la fonction H étant, par hypothèse, une fonction de $q_1, \ldots q_k, p_1, \ldots p_k$, qui ne renferme pas *explicitement* le temps (***), on a :

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right).$$

Mais, si l'on multiplie les équations (13) respectivement par $\frac{dq_i}{dt}$ et $\frac{dp_i}{dt}$, et si l'on retranche, il vient :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = 0.$$

Donc, en faisant la somme pour toutes les valeurs de i depuis $i = 1$, jusque $i = k$, on a :

$$\sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

(*) *On a general method in dynamics* (Philosophical Transactions, 1834 et 1835); Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik.*

(**) *Vorlesungen über Dynamik,* p. 70.

(***) En effet, la fonction de force U ne renfermant pas, par hypothèse, explicitement le temps, il en est de même de la fonction $H = T - U$.

Par conséquent, on a :

$$H = const.$$

pendant toute la durée du mouvement.

D'ailleurs, on a posé :

$$H = T - U;$$

par conséquent, l'équation $H = const.$ nous donne :

$$T - U = T_0 - U_0,$$

ou bien :

$$T - T_0 = U - U_0,$$

l'indice 0 indiquant que l'on a fait $t = t_0$ dans T et U.

Or, T est la demi-somme des forces vives du système, et U la fonction de force : il en résulte que la dernière formule n'est autre que l'expression du théorème des forces vives.

17. *Remarque.* — Puisque l'on a $H = const.$ pendant toute la durée du mouvement, on en conclut que l'équation

$$H = const.$$

est *une intégrale des équations canoniques* (*) (13).

18. Dans le cas où il n'y a pas de fonction de force, on doit remplacer $\frac{\partial U}{\partial q_s}$ dans les équations (11) par l'expression

$$Q_s = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right),$$

et alors les équations (13) seront remplacées par les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

(*) On appelle intégrale des équations canoniques une équation telle que $\zeta = \alpha$, jouissant de cette propriété que l'on a identiquement $\frac{d\zeta}{dt} = 0$, en vertu des équations canoniques.

19. Les équations canoniques (13) sont au nombre de $2k$; ce sont des équations différentielles ordinaires. *La fonction* H *ne renferme pas explicitement le temps.* C'est la forme à laquelle on peut ramener les équations d'un problème de mécanique auquel le principe des forces vives est applicable. En les intégrant, on obtient $2k$ intégrales distinctes, contenant $2k$ constantes arbitraires. Ces $2k$ équations serviront à déterminer $p_1, p_2, \dots p_k$, $q_1, q_2, \dots q_k$, en fonction de t et des $2k$ constantes arbitraires.

20. *Application.* — Proposons-nous d'appliquer les équations (13) au cas où les variables $q_1, q_2, \dots q_k$, sont précisément les coordonnées x_i, y_i, z_i, ce qui arrivera lorsqu'il n'y aura pas d'équations de liaisons. Le système est alors un système de n points matériels *entièrement libres*.

Dans ce cas, on a :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

On en tire :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i';$$

d'autre part,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_i} = \frac{\partial T}{\partial (m_i x_i')} = x_i',$$

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = 0.$$

Par suite, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = x_i',$$

et les équations (13) nous donnent :

$$\frac{d(m_i x_i')}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i',$$

ou bien :

$$m_i \frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i'.$$

Or, de ces deux dernières on tire :

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

de même, on a :

$$m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

On retrouve donc ainsi les équations ordinaires du mouvement du point m_i libre.

II.

Méthode de M. Émile Mathieu.

21. On peut obtenir les équations d'Hamilton sans faire usage des équations de Lagrange. La méthode directe que nous allons faire connaître est due à M. Émile Mathieu (*).

Reprenons l'équation

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta U, \qquad (1)$$

(*) *Journal de Liouville*, 2e série, t. XIX.

en supposant qu'il existe une fonction de force U, et soient

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots, \quad L_m = 0, \tag{2}$$

les équations qui expriment les liaisons du système.

Supposons que ces équations, ainsi que la fonction de force U, *ne renferment pas explicitement le temps* t, et posons, comme précédemment :

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = y'_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = z'_i;$$

nous aurons pour l'expression de la demi-force vive :

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i), \tag{3}$$

et l'équation (1) devient :

$$\sum m_i \left(\frac{dx'_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy'_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz'_i}{dt} \delta z_i \right) = \delta U.$$

Or, de l'équation (3) on tire :

$$2\delta T = \delta \sum m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i) = \delta \sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt} \right).$$

Cette même équation (3) nous donne aussi :

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum m_i (x'_i \delta x'_i + y'_i \delta y'_i + z'_i \delta z'_i) \\ &= \sum m_i \left(x'_i \delta \frac{dx_i}{dt} + y'_i \delta \frac{dy_i}{dt} + z'_i \delta \frac{dz_i}{dt} \right). \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux dernières équations, il vient :

$$\begin{aligned} \delta T = \delta \sum m_i & \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt} \right) \\ & - \sum m_i \left(x'_i \delta \frac{dx_i}{dt} + y'_i \delta \frac{dy_i}{dt} + z'_i \delta \frac{dz_i}{dt} \right); \end{aligned}$$

par suite, on a :

$$\begin{aligned} \delta \sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt} \right) - \sum m_i \left(x'_i \delta \frac{dx_i}{dt} + y'_i \delta \frac{dy_i}{dt} + z'_i \delta \frac{dz_i}{dt} \right) \\ - \sum m_i \left(\frac{dx'_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy'_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz'_i}{dt} \delta z_i \right) = \delta T - \delta U, \end{aligned}$$

ou bien, en posant $T - U = H$,

$$\delta \sum m_i \left(x_i' \frac{dx_i}{dt} + y_i' \frac{dy_i}{dt} + z_i' \frac{dz_i}{dt} \right)$$
$$- \frac{d}{dt} \sum m_i \left(x_i' \delta x_i + y_i' \delta y_i + z_i' \delta z_i \right) = \delta H.$$

Si maintenant nous représentons les coordonnées x_i, y_i, z_i par la lettre Q affectée des indices 1, 2, 3, ... $3n$, et les quantités $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$, correspondantes par la lettre P affectée des mêmes indices, la dernière équation devient :

$$\delta \left(P_1 \frac{dQ_1}{dt} + P_2 \frac{dQ_2}{dt} + \cdots + P_{3n} \frac{dQ_{3n}}{dt} \right)$$
$$- \frac{d}{dt} \left(P_1 \delta Q_1 + P_2 \delta Q_2 + \cdots + P_{3n} \delta Q_{3n} \right) = \delta H. \qquad (4)$$

Or, au moyen des m équations (2), on peut réduire le nombre des variables Q à $3n - m$; en d'autres termes, on peut exprimer les $3n$ variables Q en fonction de $3n - m$ nouvelles variables, de telle manière que les équations (2) soient identiquement satisfaites.

Désignons par $q_1, q_2, \ldots q_k$ ces $3n - m = k$ nouvelles variables, et choisissons des variables p_i, en même temps que les q_i, et qui satisfassent à l'équation :

$$p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_k \delta q_k = P_1 \delta Q_1 + P_2 \delta Q_2 + \cdots + P_{3n} \delta Q_{3n}. \qquad (5)$$

Si l'on prend les variations virtuelles égales à celles que subissent effectivement les variables q_i et Q_i pendant le temps dt, ce que l'on peut faire, puisque nous avons supposé que les liaisons et la fonction U ne renferment pas explicitement le temps, l'équation (5) nous donne :

$$p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt} = P_1 \frac{dQ_1}{dt} + \cdots + P_{3n} \frac{dQ_{3n}}{dt}. \qquad (6)$$

et l'équation (4) devient :

$$\delta \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left(p_1 \delta q_1 + \cdots + p_k \delta q_k \right) = \delta H.$$

ou bien, en effectuant les opérations indiquées, et supprimant les termes qui se détruisent :

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \cdots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \cdots - \frac{dp_k}{dt}\delta q_k = \delta H. \quad (7)$$

En remplaçant δH par sa valeur, il vient :

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \cdots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \cdots - \frac{dp_k}{dt}\delta q_k$$
$$= \frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k.$$

Comme il n'existe aucune équation de condition entre les nouvelles variables, nous aurons, en égalant les coefficients des mêmes variations dans les deux membres, les équations suivantes au nombre de $2k$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ce sont les *équations d'Hamilton.*

22. Passons maintenant à la détermination des variables p. Dans l'équation (5) les variations δq sont indépendantes ; cette équation nous donne donc pour la définition de p_s la formule

$$p_s = P_1\frac{\partial Q_1}{\partial q_s} + P_2\frac{\partial Q_2}{\partial q_s} + \cdots + P_{3n}\frac{\partial Q_{3n}}{\partial q_s}, \quad (9)$$

pour les valeurs de s égales à 1, 2, ... k.

Cette formule (9) nous permet de passer des variables de l'équation (4) à celles de l'équation (7) ou des équations (8). Mais, si nous avons égard aux significations particulières des P et des Q, cette équation (9) nous donne :

$$p_s = \sum m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + y_i'\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + z_i'\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right). \quad (9^{\text{bis}})$$

Or, en désignant par $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, les dérivées de $q_1, q_2, \dots q_k$ par rapport à t, on a, en observant que les équations de condition ne renferment pas explicitement le temps :

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q'_k; \tag{10}$$

d'où :

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s},$$

de même,

$$\frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial z_i}{\partial q_s};$$

par conséquent, il vient :

$$p_s = \sum m_i \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} \right) = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_s}. \tag{11}$$

Il résulte de cette dernière formule que l'on aura la quantité p_s, en exprimant T en fonction des variables q, et de leurs dérivées q', et en prenant la dérivée de T par rapport à q'_s.

Mais, dans les équations (8), la fonction $\mathrm{H} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$ doit être exprimée en fonction des variables p_i, q_i. On doit donc exprimer T en fonction de ces mêmes variables.

Or, la formule (11) nous donne k équations linéaires par rapport à $q'_1, q'_2, \dots q'_k$. Si l'on tire de ces équations les valeurs de $q'_1, \dots q'_k$ en fonction des p_i, q_i, et si l'on remplace dans l'équation

$$2\mathrm{T} = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_k q'_k,$$

qui résulte de l'équation (6), nous aurons T en fonction des variables p_i, q_i, et nous pourrons former les équations (8).

On voit donc que la formule

$$p_s = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_s},$$

résulte de la forme particulière des quantités P et Q, puisque pour passer de l'équation (9) à l'équation (9^{bis}), nous avons remplacé P et Q, par mx' et x.

23. *Remarque.* — La démonstration de M. Émile Mathieu est plus simple que la démonstration ordinaire. Elle a aussi l'avantage de remplacer l'équation (1) par l'équation (4) qui est beaucoup plus générale.

24. Nous venons de voir que l'équation :

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s},$$

résulte de la forme particulière des quantités P et Q, puisque, pour la démonstration de cette formule, nous avons remplacé Q par x, y, z, et P par mx', my', mz'.

Or, M. Mathieu a démontré que cette formule a lieu toutes les fois que la fonction H se compose d'une fonction — U ne renfermant que les variables Q, et d'une fonction T homogène et du second degré par rapport aux variables P, cette fonction T pouvant contenir les variables Q d'une manière quelconque.

En effet, la fonction T étant homogène et du second degré par rapport aux quantités P, on a :

$$2T = P_1 \frac{\partial T}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial T}{\partial P_2} + \cdots + P_{3n} \frac{\partial T}{\partial P_{3n}}.$$

Mais l'équation (4) peut être mise sous la forme :

$$\frac{dQ_1}{dt}\delta P_1 + \frac{dQ_2}{dt}\delta P_2 + \cdots + \frac{dQ_{3n}}{dt}\delta P_{3n}$$
$$-\frac{dP_1}{dt}\delta Q_1 - \frac{dP_2}{dt}\delta Q_2 + \cdots - \frac{dP_{3n}}{dt}\delta Q_{3n} = \delta T - \delta U.$$

Or, nous supposons qu'il existe des relations entre les variables Q; mais il n'en existe pas entre les variables P. Par conséquent, les variations δP sont indépendantes. D'ailleurs, T étant une fonction des P_i, Q_i, et U ne renfermant pas les P_i, nous aurons, en égalant les coefficients des δP_i dans les deux membres, les équations :

$$\frac{\partial T}{\partial P_1} = Q'_1, \quad \frac{\partial T}{\partial P_2} = Q'_2, \ldots \frac{\partial T}{\partial P_{3n}} = Q'_{3n};$$

par conséquent, il vient :

$$2T = P_1Q'_1 + P_2Q'_2 + \cdots + P_{3n}Q'_{3n}.$$

Mais, en vertu de l'équation (6), qui a lieu dans le cas actuel comme précédemment (*), on a :

$$P_1Q'_1 + P_2Q'_2 + \cdots + P_{3n}Q'_{3n} = p_1q'_1 + p_2q'_2 + \cdots + p_kq'_k;$$

par conséquent,

$$2T = p_1q'_1 + p_2q'_2 + \cdots + p_kq'_k,$$

d'où :

$$2\delta T = p_1\delta q'_1 + p_2\delta q'_2 + \cdots + p_k\delta q'_k + q'_1\delta p_1 + q'_2\delta p_2 + \cdots + q'_k\delta p_k.$$

D'ailleurs, la première des équations (8) nous donne :

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial T}{\partial p_i};$$

par suite,

$$2\delta T = p_1\delta q'_1 + \cdots + p_k\delta q'_k + \frac{\partial T}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p_k}\delta p_k.$$

Or, en supposant T exprimée en fonction des q_i, p_i, on a :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p_k}\delta p_k + \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k \text{ (**)},$$

et, en retranchant cette équation de la précédente, il vient :

$$\delta T = p_1\delta q'_1 + \cdots + p_k\delta q'_k - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)\delta q_1 - \cdots - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k.$$

Mais, T étant considérée comme une fonction des q_i, q'_i, on a :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial q'_1}\delta q'_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q'_k;$$

(*) Toutes les équations jusque (8) ont lieu sans qu'il soit nécessaire de particulariser P et Q.

(**) Nous désignons par $\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$ la dérivée par rapport à q_i de la fonction T, supposée exprimée en fonction des p_i, q_i.

en égalant les deux valeurs de δT, il vient :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

et l'on voit que cette équation a lieu indépendamment de la forme particulière des Q_i, P_i, c'est-à-dire que pour obtenir cette équation nous n'avons pas, comme précédemment, remplacé les Q_i par x_i, y_i, z_i, et les P_i par $m_i x'_i$, $m_i y'_i$, $m_i z'_i$.

25. *Remarque I.* — L'équation résultant de l'égalité des deux expressions de δT, nous montre que l'on a :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i},$$

$\left(\frac{dT}{dq_i}\right)$ étant la dérivée partielle de T considérée comme fonction des q_i, p_i, tandis que $\frac{dT}{dq_i}$ est la dérivée partielle de T considérée comme fonction des q_i, q'_i (n° **13**).

26. *Remarque II.* — Nous pouvons encore observer que l'équation (7) présente certains avantages sur les équations (8). D'abord, l'équation (7) est applicable dans le cas où il n'y a pas de *fonction de force,* tandis que les équations (8) exigent l'existence d'une fonction de force. En effet, pour obtenir les équations (8), on doit remplacer dans (7) δH par la valeur

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k,$$

ce qui n'est possible que si l'on a H = T — U, c'est-à-dire s'il existe une fonction de force U.

Lorsqu'il n'existe pas de fonction de force, l'équation (7) subsistera encore, pourvu que l'on convienne que dans cette équation on ait :

$$\delta H = \delta T - \delta U,$$

expression dans laquelle δU n'est plus une différentielle exacte d'une fonction des x_i, y_i, z_i, mais une notation pour représenter l'expression (n° **3**)

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i),$$

X_i, Y_i, Z_i étant les composantes des forces. Mais, dans ce cas, δU n'étant plus une différentielle exacte, on ne pourra plus écrire :

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k,$$

et, par conséquent, on ne pourra plus déduire de (7) les équations (8).

Proposons-nous de trouver par quoi l'on devra, dans le cas actuel, remplacer les équations (8). A cet effet, observons que, si l'on remplace les variables Q_i, c'est-à-dire x_i, y_i, z_i par les variables q_1, q_2, ... q_k, il vient :

$$\delta U = G_1\delta q_1 + G_2\delta q_2 + \cdots + G_k\delta q_k,$$

et, en substituant dans le second membre de l'équation (7), on a, pour ce second membre :

$$\begin{aligned}\delta H = {}& \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p_k}\delta p_k \\ & - G_1\delta q_1 - G_2\delta q_2 - \cdots - G_k\delta q_k;\end{aligned}$$

l'équation (7) devient alors la suivante :

$$\left.\begin{aligned}& \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \cdots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \cdots - \frac{dp_k}{dt}\delta q_k \\ & = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p_k}\delta p_k \\ & - G_1\delta q_1 - G_2\delta q_2 - \cdots - G_k\delta q_k,\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

et, en égalant les coefficients des mêmes variables dans les deux membres, on obtient les équations :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial T}{\partial q_i} + G_i.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Ce sont les équations qui remplaceront les équations (5) dans le cas où il n'y a pas de fonction de force (n° **18**).

27. L'équation (7) présente un autre avantage sur les équations (8) : c'est qu'elle a encore lieu, même dans le cas où les variables q_i satisferaient à des équations de condition.

En effet, considérons m' des équations (2), m' étant plus petit que m, ce nombre m' pouvant être nul. On pourra exprimer les variables Q au moyen de $3n - m'$ variables que nous désignerons par $q_1, q_2, \ldots q_k$, en posant $k = 3n - m'$, de manière que ces expressions des variables Q satisfassent identiquement aux m' équations :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots, \quad L_{m'} = 0.$$

En substituant ces expressions dans les $m - m'$ équations (2) qui n'ont pas été employées, nous aurons $m - m'$ équations de condition entre les q_i.

En posant alors :

$$p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_k\delta q_k = P_1\delta Q_1 + \cdots + P_{3n}\delta Q_{3n}, \tag{14}$$

on parviendra comme précédemment à l'équation :

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \cdots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \cdots - \frac{dp_k}{dt}\delta q_k = \delta H; \tag{7}$$

mais, cette fois, les variations δq_i, δp_i ne sont plus indépendantes, et, par conséquent, on ne pourra plus déduire de cette équation (7) les équations (8).

Les variables p_s sont encore déterminées par l'équation :

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}.$$

En effet, les variations δq n'étant plus indépendantes dans l'équation (14), on ne pourra pas déduire de cette équation la suivante :

$$p_s = P_1\frac{\partial Q_1}{\partial q_s} + \cdots + P_{3n}\frac{\partial Q_{3n}}{\partial q_s}.$$

Cependant, on pourra poser *comme définition* de p_s :

$$p_s = P_1\frac{\partial Q_1}{\partial q_s} + P_2\frac{\partial Q_2}{\partial q_s} + \cdots + P_{3n}\frac{\partial Q_{3n}}{\partial q_s}. \tag{15}$$

On aura ainsi k équations, pour $s = 1, 2, \dots k$, et ces k équations entraîneront comme conséquence l'équation (14). D'ailleurs, l'équation (15) nous donnera, comme précédemment,

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}.$$

Mais il est bon d'observer que, dans le cas actuel, l'équation (14) est la conséquence de l'équation (15), tandis que, dans le cas précédent, l'équation (9) était la conséquence de l'équation (5).

28. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les liaisons sont indépendantes du temps, ainsi que la fonction U, ce qui nous a permis de remplacer les déplacements virtuels par les déplacements effectifs. Lorsque les liaisons renfermeront explicitement le temps, cette opération ne sera plus possible, et nous ne pourrons plus déduire l'équation (6) de l'équation (5). Nous allons voir comment on doit, dans ce cas, modifier l'analyse qui précède.

Observons d'abord que les équations de liaisons équivalent aux équations qui expriment les $3n$ variables Q en fonction des $3n - m = k$ variables q, et qui actuellement renferment le temps :

$$Q_1 = \theta_1(t, q_1, q_2, \dots, q_k),$$
$$Q_2 = \theta_2(t, q_1, q_2, \dots, q_k),$$
$$\dots\dots\dots$$

En éliminant $q_1, q_2, \dots q_k$ entre ces $3n$ équations, on obtiendrait un système de m équations équivalent aux m équations de liaisons données.

Or, les variations δQ de l'équation (5) s'obtiennent en faisant varier $q_1, q_2, \dots q_k$, mais t restant constant (*).

On a donc :

$$\delta Q_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k}\delta q_k;$$

(*) C'est ce qui résulte du principe des vitesses virtuelles.

mais, d'autre part, si l'on désigne θ'_i la dérivée partielle de θ_i par rapport à t, il vient :

$$\frac{dQ_i}{dt} = \theta'_i + \frac{\partial\theta_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial\theta_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial\theta_i}{\partial q_k} q'_k;$$

mais, les variations δq étant arbitraires, nous pourrons poser :

$$\delta q_s = q'_s dt,$$

pour toutes les valeurs de s égales à 1, 2, ... k.

Nous aurons alors :

$$\delta Q_i = \left(\frac{dQ_i}{dt} - \theta'_i\right) dt.$$

Par suite, l'équation

$$p_1\delta q_1 + \cdots + p_k\delta q_k = P_1\delta Q_1 + \cdots + P_{3n}\delta Q_{3n}, \tag{5}$$

nous donnera :

$$p_1 \frac{dq_1}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt} = P_1 \frac{dQ_1}{dt} + \cdots + P_{3n} \frac{dQ_{3n}}{dt} - P_1\theta'_1 - \cdots - P_{3n}\theta'_{3n}.$$

L'équation (4) devient alors la suivante :

$$\delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1\delta q_1 + \cdots + p_k\delta q_k)$$
$$= \delta H - \delta(P_1\theta'_1 + P_2\theta'_2 + \cdots + P_{3n}\theta'_{3n}),$$

ou bien :

$$\delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1\delta q_1 + \cdots + p_k\delta q_k)$$
$$= \delta(H - P_1\theta'_1 - P_2\theta'_2 - \cdots - P_{3n}\theta'_{3n}).$$

On déduira de là, en effectuant les opérations du premier membre, comme nous l'avons fait pour obtenir l'équation (7), une équation qui conservera la même forme que (7), pourvu que l'on change H en :

$$H - P_1\theta'_1 - P_2\theta'_2 - \cdots - P_{3n}\theta'_{3n}.$$

Il en résulte donc que les équations d'Hamilton (8) subsisteront dans le cas actuel, pourvu que l'on y fasse le même changement.

Quant aux variables p_s elles seront données par les équations

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s},$$

comme précédemment.

III.

Principe d'Hamilton.

29. Le principe d'Hamilton peut être énoncé de la manière suivante (*) :

Soient T *la demi-somme des forces vives des différents points du système,* δU *l'expression du travail virtuel des forces extérieures, on aura :*

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U) dt = 0, \tag{1}$$

(t_0 *et* t *désignant deux époques données*), *pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons du système, pourvu que l'on donne les positions initiales et finales du système, ou que l'on suppose nuls les déplacements relatifs aux époques* t_0 *et* t.

On exprime quelquefois ce principe par la formule :

$$\delta \int_{t_0}^{t} (T + U) dt = 0.$$

Mais, la première formule est plus générale; car, lorsqu'il n'y a pas de *fonction de force,* U n'a aucun sens.

Le principe d'Hamilton se distingue de celui de la moindre action, en ce que, dans ce principe, U peut renfermer explicitement le temps, ce qui n'a pas lieu pour celui de la moindre action. En effet, le principe de la moindre action exige que le

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* p. 58.

théorème des forces vives existe, et ce théorème des forces vives permet d'éliminer le temps. Or, le théorème des forces vives n'a lieu que si U ne renferme pas explicitement le temps.

Considérons le premier membre de l'équation (1) :

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U) dt.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned}
\int \delta T dt &= \frac{1}{2} \int \delta \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) dt \\
&= \int \sum m_i (x_i' \delta x_i' + y_i' \delta y_i' + z_i' \delta z_i') dt \\
&= \int \sum m_i \left(x_i' \frac{d\delta x_i}{dt} + y_i' \frac{d\delta y_i}{dt} + z_i' \frac{d\delta z_i}{dt} \right) dt \\
&= \sum m_i (x_i' \delta x_i + y_i' \delta y_i + z_i' \delta z_i) \\
&- \int \sum m_i (x_i'' \delta x_i + y_i'' \delta y_i + z_i'' \delta z_i) dt.
\end{aligned}$$

Intégrons entre les limites t_0 et t, en observant que les positions de tous les points étant données à l'instant initial et à l'instant final, δx_i, δy_i, δz_i sont nuls aux deux limites; par conséquent, le terme en dehors du signe $\int$ est nul aux limites, et il vient :

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U) dt = \int_{t_0}^{t} \left\{ \delta U - \sum m_i (x_i'' \delta x_i + y_i'' \delta y_i + z_i'' \delta z_i) \right\} dt,$$

ou bien, en remplaçant δU par sa valeur :

$$\delta U = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i),$$

on a :

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U) dt \\
&= \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) - \sum m_i (x_i'' \delta x_i + y_i'' \delta y_i + z_i'' \delta z_i) \right\} dt \\
&= \int_{t_0}^{t} \sum \left\{ \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right\} dt.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Or, si δx_i, δy_i, δz_i sont des déplacements compatibles avec les liaisons du système, le second membre est nul en vertu des équations du mouvement, et l'on a :

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U)dt = 0. \tag{3}$$

30. *Remarque I.* — Il est facile de déduire de l'équation d'Hamilton les équations de Lagrange sous la forme qui nous a conduit aux équations canoniques (nº 7).

En effet, supposons qu'aux coordonnées x_i, y_i, z_i, on substitue d'autres variables q_1, q_2, ... q_k, et introduisons ce changement de variables dans la formule (3).

D'abord, T qui était primitivement une fonction des x'_i, y'_i, z'_i deviendra, par la substitution, une fonction des q_i et des q'_i, et nous aurons :

$$\delta T = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i \right);$$

d'autre part, on a :

$$\delta U = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \sum Q_i \delta q_i.$$

Par conséquent, la formule (3) nous donne :

$$\int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i + Q_i \delta q_i \right) dt = 0. \tag{4}$$

Mais, en intégrant par parties, on a :

$$\int \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i dt = \int \frac{\partial T}{\partial q'_i} \frac{d.\delta q_i}{dt} dt = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i - \int \frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} \delta q_i dt;$$

d'où, en intégrant entre les limites t_0 et t, et observant que les variations δq_i sont toutes nulles aux deux limites :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i dt = - \int_{t_0}^{t} \frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} \delta q_i dt.$$

On a donc, en substituant dans l'équation (4) :

$$\int_{t_0}^{t'} \sum \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} + Q_i \right\} \delta q_i dt = 0,$$

et, par suite,

$$\sum \left(\frac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0.$$

C'est la formule de Lagrange que nous avons trouvée précédemment (n° 7).

31. *Remarque II.* — Le principe d'Hamilton, comme celui de la moindre action, ne fournit qu'une propriété du mouvement; il ne donne pas d'intégrale du problème.

32. *Remarque III.* — Le théorème d'Hamilton est distinct de celui de la moindre action. L'intégrale dont la variation est nulle, dans ce nouveau principe, diffère seulement, comme nous le verrons plus loin, de celle de la moindre action, dans le cas où le principe de la moindre action a lieu, par l'addition d'un terme proportionnel au temps. Mais, les conditions sous lesquelles la variation est nulle sont ici complètement changées, et le temps du trajet qui, dans le principe de la moindre action, ne jouait aucun rôle, est actuellement une des données de la question, tandis que la constante des forces vives qui était donnée alors, ne l'est plus dans le nouveau principe.

Si l'on applique, par exemple, les deux théorèmes au mouvement elliptique d'une planète, dans le premier (celui de la moindre action) le chemin réellement parcouru est comparé à tous les chemins possibles, ayant les mêmes extrémités, et pour lesquels la vitesse en chaque point est exprimée par l'intégrale des forces vives; dans le second, ce chemin est comparé à tous les chemins parcourus d'une manière arbitraire sous la seule condition que la durée du trajet ait une valeur donnée.

IV.

Équation différentielle partielle d'Hamilton.

33. Le principe d'Hamilton nous apprend que, s'il existe une fonction de forces U, et si l'on donne les valeurs initiales et finales des coordonnées, c'est-à-dire si les positions extrêmes du système restent fixes, la variation de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} (\mathrm{T} + \mathrm{U})dt,$$

doit s'annuler en vertu des équations du mouvement (n° **29**).

Supposons maintenant que les positions initiales et finales ne soient pas fixes (*); alors les variations δq_i ne sont pas nulles pour les limites t_0 et t. Nous allons voir que si l'on développe la variation

$$\delta \int_{t_0}^{t} (\mathrm{T} + \mathrm{U})dt,$$

il n'y a que la partie de cette variation, située sous le signe $\int$ qui soit nulle, en vertu des équations canoniques. Cette variation ne renfermera donc aucun signe $\int$, ou, ce qui est la même chose, la variation de T + U sera une différentielle exacte.

Nous pourrons même supposer, dans la démonstration, que la fonction de force U renferme explicitement le temps.

Supposons les $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i exprimées en fonction des $3n - m = k$ variables nouvelles $q_1, q_2, \ldots q_k$, de manière que les m équations de liaisons soient identiquement satisfaites.

Posons :

$$\mathrm{T} + \mathrm{U} = \varphi, \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \int_{t_0}^{t} \varphi dt;$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 143.

nous aurons, puisque φ est une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_k$, $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$, en prenant la variation de φ, *sans faire varier* t,

$$\delta\varphi = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\delta q_i + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i.$$

Par suite, si t est la variable indépendante,

$$\delta\int \varphi dt = \int \delta\varphi dt = \int \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\delta q_i dt + \int \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i dt.$$

Or, en intégrant par parties, on a :

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i dt = \int \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\frac{d.\delta q_i}{dt}dt = \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \int \frac{d.\dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt}\delta q_i dt;$$

si l'on intègre entre les limites t_0 et t, et si l'on désigne par un indice supérieur 0 les valeurs correspondant à la limite inférieure t_0, il vient :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i dt = \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\right)^0 \delta q_i^0 - \int_{t_0}^{t} \frac{d.\dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt}\delta q_i dt,$$

par suite,

$$\delta V = \delta\int_{t_0}^{t} \varphi dt = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\right)^0 \delta q_i^0$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} - \frac{d\dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt}\right)\delta q_i dt.$$

Mais, la fonction U ne renferme pas les q'_i, puisque l'on a :

$$U = \text{fonct.}(t, q_1, \ldots, q_k).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i};$$

donc, la quantité sous le signe $\int$ se réduit à :

$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} \right) \delta q_i.$$

Or, en vertu des équations différentielles du mouvement de Lagrange (n° **9**), tous les termes de cette somme sont nuls séparément, puisque $k = 3n - m$: par conséquent, l'intégrale disparaît, et il vient :

$$\delta V = \delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \delta q_i - \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \right)^0 \delta q_i^0$$
$$= \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0.$$

34. Dans l'hypothèse précédente (n° **29**), on donnait les positions initiales et finales, c'est-à-dire les valeurs initiales et finales des q_i, et, par suite, $\delta q_i^0 = 0$, $\delta q_i = 0$, et l'on obtenait :

$$\delta V = \delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt = 0;$$

c'est le principe d'Hamilton.

Dans le cas actuel, les positions extrêmes étant arbitraires, les δq_i ne sont pas nuls aux limites, et, par suite, on a :

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0, \qquad (2)$$

et le second membre n'est pas nul.

D'ailleurs, lorsque les positions extrêmes sont données, les variations δq_i sont nulles aux limites t_0 et t, et les constantes arbitraires introduites par l'intégration sont complètement déterminées par les positions extrêmes des points du système, lesquelles sont données. Au contraire, si les positions extrêmes sont arbitraires, les q_i, q'_i, et, par suite, les p_i qui sont liés aux q'_i par l'équation (1), sont des fonctions de t, et des $2k$ constantes arbitraires. La fonction

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

est donc aussi une fonction de t, et de ces $2k$ constantes arbitraires.

Les δq_i sont uniquement les variations des q_i provenant des variations des $2k$ constantes arbitraires.

La formule (2) donne la variation de V, provenant des variations des constantes arbitraires.

Cette formule (2) démontre la proposition énoncée plus haut, que *la variation de* $T + U$ *est une différentielle exacte.* Observons que si l'on ne considérait pas t comme variable indépendante, on devrait ajouter au second membre de (2), le terme $\frac{\partial V}{\partial t}\delta t$.

35. L'expression que nous venons de trouver pour la variation de V, va nous conduire à des résultats importants. En effet, les intégrales des équations du mouvement, au nombre de $2k$, renferment les $2k$ quantités q_i, p_i, le temps t, et les $2k$ constantes arbitraires. On peut donc exprimer les variables q_i, p_i, au nombre de $2k$, et, par conséquent, aussi φ en fonction de t et des $2k$ constantes d'intégration, et, par une quadrature, on aura V en fonction de t et de ces $2k$ constantes d'intégration.

Mais, le choix des quantités qui forment les $2k$ constantes est arbitraire. Si l'on prend, par exemple, les $2k$ valeurs initiales q_i^0, p_i^0, on aura V exprimée en fonction de t, q_i^0, p_i^0. Mais les $2k + 1$ variables t, q_i, p_i, et les $2k$ constantes q_i^0, p_i^0 forment un système de $4k + 1$ quantités reliées les unes aux autres par $2k$ relations qui sont les équations intégrales. On peut donc, au moyen de ces $2k$ relations, exprimer $2k$ quantités en fonction des $2k + 1$ autres. Supposons, par exemple, que l'on exprime les $2k$ quantités p_i, p_i^0, en fonction des $2k + 1$ quantités t, q_i, q_i^0, et substituons les valeurs des p_i^0, ainsi obtenues, dans la fonction V, qui, d'après ce que nous avons dit plus haut, est déjà exprimée en fonction de t, q_i^0, p_i^0. Nous en déduirons la valeur de

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

en fonction de t, q_i, q_i^0.

Cela posé, si nous prenons la variation de V ainsi exprimée, *sans faire varier* t, il vient :

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0$$

En comparant les deux expressions de δV, on obtient les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = - p_i^0, \tag{3}$$

pour $i = 1, 2, \ldots k$.

Ces équations (3) qui donnent p_i et p_i^0 en fonction de t, q_i, q_i^0, peuvent donc remplacer les $2k$ équations qui relient les $4k + 1$ quantités $t, q_i, q_i^0, p_i, p_i^0$. Elles sont, par conséquent, équivalentes aux $2k$ équations intégrales : il sera évidemment facile de les former lorsque la fonction V sera connue en fonction de t, q_i, q_i^0.

36. Il est facile de s'assurer que *la fonction* V *satisfait à une équation différentielle partielle du premier ordre que nous allons obtenir.*

A cet effet, reprenons la formule :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

qui définit la fonction V. On en tire :

$$\varphi = \frac{dV}{dt}.$$

Or, t est contenu dans V d'abord explicitement, et, en outre, implicitement, puisque V est fonction de $q_1, q_2, \ldots q_k$, qui sont des fonctions de t. On a donc l'équation :

$$\varphi = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt},$$

à laquelle doit satisfaire identiquement la fonction V.

Mais, en vertu de (3), cette équation nous donne :

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_i q'_i,$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_i q'_i - \varphi = 0. \qquad (4)$$

Si maintenant l'on pose :

$$\psi = \sum p_i q'_i - \varphi, \qquad (5)$$

l'équation (4) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0. \qquad (6)$$

Telle est l'équation à laquelle doit satisfaire la fonction V. Or, *cette équation est une équation aux dérivées partielles du premier ordre en* V.

En effet, les quantités q'_i et les p_i que nous avons introduites en posant :

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}. \qquad (1)$$

forment deux systèmes de quantités qui peuvent être exprimées les unes en fonction des autres, et, en outre, en même temps en fonction de t, q_i.

Il résulte de cette liaison entre les q'_i et les p_i qu'une expression quelconque donnée des $3k + 1$ quantités t, q_i, q'_i, p_i, peut être exprimée, ou bien en fonction des $2k + 1$ quantités t, q_i, q'_i, ou bien en fonction des $2k + 1$ quantités t, q_i, p_i. C'est ce qui arrivera précisément pour la fonction ψ.

En effet, en vertu de (5), ψ est une fonction des $3k + 1$ quantités t, q_i, q'_i et p_i. Par conséquent, d'après ce que nous venons de dire, on pourra exprimer ψ en fonction des quantités t, q_i, p_i, et, si l'on remplace, en vertu de la première des équations (3), les p_i par les quotients différentiels partiels $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, il en résultera que ψ sera exprimée en fonction de t, q_i, $\frac{\partial V}{\partial q_i}$. L'équation (6) devient alors :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0. \qquad (7)$$

C'est *l'équation différentielle partielle d'Hamilton à laquelle satisfait la fonction*

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi\, dt = \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt,$$

considérée comme fonction de t, q_i, q_i^0. Cette fonction V renferme donc k constantes arbitraires; si l'on augmente V d'une nouvelle constante additive, elle satisfera encore à l'équation (7), et nous aurons ainsi une solution renfermant $k+1$ constantes arbitraires, c'est-à-dire une *solution complète*.

L'intégration des équations canoniques donne donc une solution complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (7).

37. Inversement, si l'on pouvait obtenir cette expression de V, on aurait, en vertu des équations canoniques,

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = - p_i^0,$$

et les secondes de ces équations, au nombre de k, seraient les intégrales finies du problème.

Nous trouvons ainsi une liaison entre les deux problèmes de l'intégration des équations de la mécanique, et de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.

Tout ce que nous venons de dire serait encore vrai, si la fonction φ, au lieu d'être égale à $T+U$, désigne une fonction quelconque des quantités t, q_i, q_i' : c'est ce que nous verrons dans le chapitre suivant.

38. *Remarque.* — Dans les problèmes de mécanique, la fonction ψ prend une forme très simple. Pour trouver cette forme, reprenons l'équation

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi,$$

et remplaçons φ par sa valeur $T+U$, U désignant une fonction des q_i seulement, *ne renfermant pas explicitement le temps*, et T une fonction homogène et du second degré des q_i'.

On a d'ailleurs :

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

d'où :

$$\sum p_i q'_i = \sum q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = 2T;$$

par suite,

$$\psi = 2T - (T + U) = T - U = H.$$

L'équation aux dérivées partielles est alors :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

et l'on a le théorème suivant :

39. Théorème. — *Soient :*

$$H = T - U, \quad \text{et} \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

et supposons que H *soit exprimée en fonction des* p_i, q_i; *les équations différentielles du mouvement sont alors :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Considérons le mouvement pendant l'intervalle de t_0 *à* t, *et introduisons comme constantes arbitraires dans les intégrales les valeurs initiales* p_i^0, q_i^0.

Si l'on remplace ensuite dans H *les* p_i *par* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, *en posant :*

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

on obtient l'équation différentielle partielle du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

qui définit la fonction V *en fonction des variables* t, q_i. *Formons maintenant l'intégrale*

$$\int_{t_0}^{t} (T + U)dt,$$

dans laquelle T + U *est, en vertu des intégrales des équations du mouvement, une simple fonction de* t *et des* 2k *constantes* q_i^0, p_i^0, *et exprimons le résultat de la quadrature en fonction de* t, q_i *et des* k *constantes arbitraires* q_i^0, *en remplaçant les* p_i^0 *par leurs valeurs tirées des intégrales des équations du mouvement. La valeur ainsi obtenue de l'intégrale*

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)dt,$$

est une solution complète de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0.$$

V.

Généralisation de la théorie précédente.

40. On peut étendre tous les raisonnements que nous venons de faire dans le cas d'un problème de mécanique, au cas où la fonction φ serait une fonction quelconque de t, q_i, q_i'; en d'autres termes, nous allons actuellement considérer l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

dans laquelle φ n'est pas égale à T + U (*).

On trouve, dans ce cas, pour la variation de l'intégrale :

$$\delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} \delta q_i - \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i'}\right)^0 \delta q_i^0 + \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'}}{dt} \right) \delta q_i dt$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 148.

Si, dans ce développement de la variation de l'intégrale, on égale à zéro la quantité qui se trouve sous le signe $\int$, les équations que l'on obtiendra sont celles qui, dans l'hypothèse actuelle, remplacent les équations du mouvement de Lagrange.

Ces équations ont pour type :

$$\frac{d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \tag{A}$$

et il vient :

$$\delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \delta q_i - \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\right)^0 \delta q_i^0.$$

Nous nous proposons actuellement, pour rendre l'analogie des deux problèmes plus complète, de mettre les équations différentielles (A) sous la même forme qu'Hamilton a donnée aux équations du mouvement, c'est-à-dire la *forme canonique*. Dans ce but, de même que précédemment (n° **13**), on a remplacé les q'_i par les p_i, en posant $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$, nous remplacerons dans le cas actuel, les q'_i par les p_i, en posant :

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}.$$

On a ainsi k équations qui permettent de calculer les q'_i en fonction des p_i et des q_i.

Introduisons maintenant la fonction

$$\psi = \sum p_i q'_i - \varphi,$$

et opérons comme ci-dessus.

Nous aurons pour la variation de ψ :

$$\delta \psi = \sum p_i \delta q'_i + \sum q'_i \delta p_i - \delta \varphi,$$

et, en remplaçant $\delta\varphi$ par sa valeur, φ étant considérée comme une fonction des q_i et des q'_i :

$$\begin{aligned}\delta \varphi &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \delta q'_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t \\ &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i + \sum p_i \delta q'_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t,\end{aligned}$$

ce dernier terme devant figurer dans $\delta\varphi$, lorsqu'on laisse la variable indépendante arbitraire, il vient :

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \sum p_i \delta q'_i + \sum q'_i \delta p_i - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i - \sum p_i \delta q'_i - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta t \\ &= \sum q'_i \delta p_i - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta t.\end{aligned}$$

Or, la fonction ψ, par sa définition, est une fonction des $3k+1$ quantités t, q'_i, p_i, q_i; mais, à cause de la formule

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i},$$

on peut exprimer les q'_i en fonction des p_i, et ψ devient une fonction de t, q_i, p_i, et en prenant la variation de ψ ainsi exprimée, on a :

$$\delta\psi = \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right)\delta p_i + \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\delta t,$$

en renfermant dans ce cas les quotients différentiels entre parenthèses pour les distinguer. Nous aurons donc en égalant les deux valeurs de $\delta\psi$:

$$q'_i = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right). \qquad (1)$$

Or, en égalant à zéro la quantité sous le signe $\int$, nous avons obtenu les équations différentielles ayant pour type :

$$\frac{d \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial q'_i}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}; \qquad (A)$$

cette équation se transforme en la suivante :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i},$$

et, par suite, en ayant égard à la deuxième équation (1), on a :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right).$$

D'autre part, la première des équations (1) nous donne :

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right).$$

Nous aurons donc pour les équations différentielles du problème :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

équations analogues à celles d'Hamilton (n° **15**).

Or, l'intégration de ces équations nous fournira, en posant, comme précédemment :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

une solution de l'équation différentielle partielle du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

En effet, la variation de l'intégrale V devient, en vertu des équations canoniques (A) (*) :

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t,$$

ce dernier terme devant entrer dans δU, lorsqu'on laisse la variable indépendante indéterminée.

Mais, en vertu des équations différentielles du problème, on obtient $2k$ équations intégrales renfermant t, q_i, q_i' et $2k$ constantes arbitraires; par conséquent, les q_i et les q_i', et, par suite, les q_i et les p_i sont des fonctions de t et des $2k$ constantes.

(*) En effet, en vertu des équations canoniques (A), le terme sous le signe $\int$ dans le second membre de δV est nul, et, par conséquent, δV se réduit à la partie en dehors du signe $\int$.

Il en sera donc de même de φ, et, par suite, de V qui sera une fonction de t et des $2k$ constantes. Prenons pour ces $2k$ constantes les $2k$ valeurs initiales q_i^0, p_i^0; alors φ, et par conséquent, V sont des fonctions de t et des $2k$ constantes q_i^0, p_i^0. Les $2k$ équations intégrales renferment donc les $4k+1$ quantités t, q_i, p_i, q_i^0, p_i^0; on peut, par conséquent, déterminer les $2k$ quantités p_i, p_i^0, en fonction des $2k+1$ quantités q_i, q_i^0 et t, et, par suite, V pourra être exprimée en fonction de t, q_i, q_i^0, et l'on aura :

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0 + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t.$$

En égalant les deux valeurs de δV, on a les $2k$ équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_i} &= p_i, \\ \frac{\partial V}{\partial q_i^0} &= -p_i^0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

qui sont évidemment équivalentes aux $2k$ équations intégrales.

Mais, à cause de :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

on a :

$$\frac{dV}{dt} = \varphi = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} q_i',$$

puisque V est une fonction de t et des q_i qui sont des fonctions de t.

Par conséquent, la fonction V doit satisfaire identiquement à l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_i q_i' - \varphi = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

en posant :

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi,$$

et l'on verra, comme dans le chapitre précédent, que si l'on remplace dans ψ, exprimée en fonction de t, q_i, p_i, les p_i par les quotients différentiels partiels $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, on obtiendra l'équation différentielle partielle du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(t, q_1, q_2, \ldots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

considérée comme fonction de t, q_i, q_i^0, et nous aurons le théorème suivant qui est dû à Jacobi :

41. Théorème. — *Soit φ une fonction quelconque donnée de* t, q_i, q_i', *et remplaçons les quotients différentiels* q_i' *par les nouvelles variables* p_i, *définies par les équations :*

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'};$$

posons ensuite :

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi,$$

et exprimons la fonction ψ au moyen des variables p_i, q_i *et* t.

Les équations différentielles ordinaires :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} (^*) \qquad (B)$$

rendent nulle la partie de la variation

$$\delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

située sous le signe $\int$.

(*) Nous supprimons ici les crochets qui sont devenus inutiles, puisque nous n'avons plus de distinction à faire.

Désignons en outre par p_i^0, q_i^0 *les valeurs des* 2k *variables* p_i, q_i *pour* $t = t_0$, *et introduisons ces quantités au lieu des constantes arbitraires dans les intégrales du système* (B). *Posons ensuite :*

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

et nous aurons l'équation différentielle partielle du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

qui définit V *en fonction de* t *et des* q_i.

Si maintenant l'on forme l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi \right\} dt,$$

φ *étant, en vertu des intégrales, une fonction de* t, *et des* 2k *constantes* q_i^0, p_i^0, *et si l'on exprime le résultat de la quadrature en fonction de* t, q_i, q_i^0, *la valeur ainsi obtenue pour* V *est une solution de l'équation différentielle partielle :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

42. *Remarque I.* — La formule qui relie les fonctions φ et ψ établit entre elles une sorte de réciprocité.

En effet, nous avons posé :

$$\psi = \sum q'_i \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} - \varphi,$$

φ étant une fonction de t, q_i, q'_i.

Or, au moyen de la relation :

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i},$$

on peut exprimer les q'_i en fonction des p_i, et, par conséquent, obtenir ψ en fonction de t, q_i, p_i.

Donc, pour une fonction φ de t, q_i, q'_i, on peut obtenir une fonction ψ de t, q_i, p_i.

Mais, on a aussi :

$$\varphi = \sum p_i q'_i - \psi = \sum p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi,$$

ψ étant une fonction de t, p_i, q_i.

Or, au moyen de la relation :

$$q'_i = \frac{\partial \psi}{\partial p_i},$$

on peut exprimer les p_i en fonction des q'_i, et, par conséquent, obtenir φ en fonction de t, q_i, q'_i.

Il résulte de là que l'on peut, en vertu de la formule

$$\psi = \sum p_i q'_i - \varphi,$$

pour chaque fonction φ de t, q_i, q'_i, trouver une fonction ψ de t, q_i, p_i; et, réciproquement, pour chaque fonction ψ de t, q_i, p_i, trouver une fonction φ de t, q_i, q'_i.

43. *Remarque II.* — La solution trouvée de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

renferme, comme nous l'avons vu, les k constantes arbitraires q_1^0, q_2^0, ... q_k^0. Comme la fonction ψ ne renferme pas la fonction V elle-même, on peut ajouter à cette solution une constante additive, et le résultat satisfera encore à l'équation différentielle partielle. Nous aurons ainsi une solution renfermant $k+1$ constantes arbitraires, c'est-à-dire une *solution complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :* cette solution renfermera autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes dans l'équation différentielle partielle.

44. *Remarque III.* — De même que l'intégration des équations canoniques du mouvement, ou des équations différentielles (B), fournit une solution complète de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

de même, réciproquement, on peut, au moyen de cette solution complète supposée connue, former les intégrales des équations différentielles (B).

En effet, ces intégrales sont, comme nous l'avons vu (n° **40**), équivalentes aux équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0, \tag{2}$$

et nous avons ainsi les intégrales *exprimées par les quotients différentiels d'une même fonction* V.

Observons ici que les équations différentielles du problème étaient exprimées par les quotients différentiels d'une même fonction H, dans le cas de la mécanique (n° **15**), ou d'une même fonction ψ dans le cas plus général (n° **40**).

Cette fonction V a reçu d'Hamilton le nom de *fonction principale*.

La deuxième des équations (2) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0,$$

donne les *intégrales finies* du problème.

La première de ces équations (2) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i,$$

donne les quantités p_i ou q_i' en fonction de t, et des q_i, avec k constantes arbitraires q_i^0. C'est le système des *intégrales premières*.

45. Nous verrons plus loin qu'il n'est pas absolument nécessaire que les k constantes contenues dans V soient les valeurs initiales q_i^0 : mais, si l'on connaît une solution complète V quelconque de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

les constantes étant quelconques, les intégrales des équations canoniques pourront toujours être exprimées par les quotients différentiels partiels de cette fonction V par rapport aux constantes qui y sont contenues. C'est le théorème de Jacobi que nous verrons dans la suite.

46. Hamilton définissait la fonction V au moyen de deux équations différentielles partielles, l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

et une autre (*).

Mais, Jacobi a démontré que cette deuxième équation ne sert à rien pour la solution, et d'ailleurs elle peut se déduire de la première. L'introduction de cette deuxième équation n'apporterait aucune simplification à la solution du problème. En effet, la fonction V devrait alors satisfaire à deux équations différentielles partielles simultanées. Or, le problème de la recherche d'une solution commune à deux équations différentielles partielles simultanées n'est pas plus simple que celui de la recherche d'une solution complète d'une seule équation différentielle partielle.

47. Pour démontrer que la deuxième équation différentielle partielle d'Hamilton peut se déduire de la première, Jacobi fait usage du théorème suivant :

Théorème. — *Soit un système de* n *équations différentielles ordinaires entre les* $n+1$ *variables* $t, x_1, \dots x_n$; *soient* $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ *les valeurs des variables à l'origine* t_0 *du temps, et supposons*

(*) *Philosophical Transactions*, 1834 et 1835.

que l'on ait satisfait au système des équations différentielles ordinaires proposées par le système d'équations intégrales :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(t,\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0), \\ x_2 = f_2(t,\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = f_n(t,\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0). \end{array}\right\} \quad (A)$$

Si l'on remplace dans ce système les variables $t, x_1, \ldots x_n$, *par leurs valeurs initiales* $t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ *et réciproquement, je dis que l'on obtient un système équivalent d'équations intégrales.*

Ce théorème dispense de faire le travail ennuyeux de l'élimination, et il permet d'exprimer facilement les équations intégrales résolues par rapport aux constantes arbitraires de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l} x_1^0 = f_1(t_0,\ t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ x_2^0 = f_2(t_0,\ t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n^0 = f_n(t_0,\ t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n). \end{array}\right\} \quad (B)$$

Démonstration. — Soit le système d'équations intégrales :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = F_1(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \\ x_2 = F_2(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = F_n(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \end{array}\right\} \quad (C)$$

satisfaisant aux équations différentielles données; il en résulte entre les valeurs initiales le même système d'équations, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} x_1^0 = F_1(t_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \\ x_2^0 = F_2(t_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n^0 = F_n(t_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{array}\right\} \quad (D)$$

Le système (A) résulte évidemment de l'élimination de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, entre (C) et (D). Or, ces deux derniers systèmes se transforment l'un dans l'autre, si l'on change t en t_0, et en même temps x_1 en x_1^0, x_2 en x_2^0, ... x_n en x_n^0; par conséquent, on doit pouvoir faire ce changement dans (A), et l'on obtient alors (B) qui est donc équivalent à (A).

48. Voyons maintenant ce que devient la fonction V, quand on change les variables en leurs valeurs initiales.

Supposons que les équations de la mécanique (n° **15**), ou les équations différentielles plus générales (n° **40**), soient intégrées par le système :

$$\begin{array}{ll}
q_1 = \xi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_1 = \varpi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), \\
q_2 = \xi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_2 = \varpi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_k = \xi_k(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_k = \varpi_k(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}).
\end{array}$$

Si l'on remplace t par sa valeur initiale t_0, on a :

$$\begin{array}{ll}
q_1^0 = \xi_1(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_1^0 = \varpi_1(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), \\
q_2^0 = \xi_2(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_2^0 = \varpi_2(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_k^0 = \xi_k(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_k^0 = \varpi_k(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}).
\end{array}$$

Cela posé, considérons l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

φ étant une fonction de t, q_1, q_2, ... q_k, p_1, p_2, ... p_k, qui, après l'introduction des valeurs de q_1, q_2, ... q_k, p_1, p_2, ... p_k, déduites des équations intégrales précédentes, devient une fonction de t, α_1, α_2, ... α_{2k}. On a donc, d'après cela :

$$\int \varphi dt = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}),$$

et, par suite :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}) - \Phi(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}).$$

La quantité V ainsi déterminée sera, d'après ce que nous avons vu (n° **40**) une solution complète de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

pourvu que l'on élimine les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2k}$, au moyen des $2k$ équations ci-dessus pour $q_1, q_2, \ldots q_k, q_1^0, q_2^0, \ldots q_k^0$.

Mais, de ces $2k$ équations, une moitié se transforme dans l'autre, si l'on change t en t_0, et les quantités q_i en q_i^0. Donc, *chacune des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2k}$, sera exprimée en fonction de* $\mathrm{t}, \mathrm{t}_0, \mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \ldots \mathrm{q}_k, \mathrm{q}_1^0, \mathrm{q}_2^0, \ldots \mathrm{q}_k^0$, *de manière qu'elle reste invariable, si l'on change* t *en* t_0, q_i *en* q_i^0.

Par ce changement, la fonction :

$$V = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}) - \Phi(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}),$$

se change en la suivante :

$$\Phi(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}) - \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}),$$

c'est-à-dire en $-V$.

49. Dans tout ce qui précède, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les équations différentielles. Supposons maintenant, pour obtenir le cas considéré par Hamilton, *que φ ne renferme pas explicitement la variable* t. C'est le cas de la mécanique, lorsque t n'entre pas dans la fonction de force U, ni, par suite, dans la fonction $\psi = H = T - U$; alors t n'entre dans les équations différentielles du mouvement que par sa différentielle.

Ces équations peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\begin{gathered} dt : dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_k : dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_k \\ = 1 : \frac{\partial\psi}{\partial p_1} : \frac{\partial\psi}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial\psi}{\partial p_k} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial\psi}{\partial q_k}. \end{gathered}$$

En faisant abstraction de dt et 1, on élimine complètement le temps, et l'on a le système :

$$\begin{gathered} dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_k : dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_k \\ = \frac{\partial\psi}{\partial p_1} : \frac{\partial\psi}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial\psi}{\partial p_k} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial\psi}{\partial q_k}; \end{gathered}$$

par l'intégration de ce système on exprimera toutes les variables en fonction de l'une d'entre elles, q_1 par exemple.

On peut déterminer cette dernière en fonction du temps par l'équation :

$$\frac{dt}{dq_1} = \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial p_1}};$$

d'où :

$$dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial \psi}{\partial p_1}},$$

et, en intégrant,

$$t - t_0 = \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{dq_1}{\frac{\partial \psi}{\partial p_1}}.$$

En résolvant cette dernière équation par rapport à q_1, on a cette variable en fonction de $t - t_0$. Mais, toutes les variables étant déjà exprimées en fonction de q_1, elles dépendent toutes de la différence $t - t_0$. Donc, la fonction V renfermera aussi ces deux quantités t et t_0 par leur différence $t - t_0 = \theta$.

On a donc :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t_0} = \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Mais, si l'on change t, q_1, q_2, ... q_k en leurs valeurs initiales t_0, q_1^0, q_2^0, ... q_k^0, V se transforme en $-$V, θ en $-\theta$, et $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ ne change pas.

Si l'on désigne par ψ_0, la valeur dans laquelle ψ se transforme lorsque les quantités q_i et $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$ se changent en q_i^0 et $p_i^0 = \frac{\partial V}{\partial q_i^0}$, l'équation :

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \psi = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \psi,$$

se transforme en la suivante :

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \psi_0 = -\frac{\partial V}{\partial t_0} + \psi_0.$$

Or, l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t_0} - \psi_0 = 0,$$

est la deuxième équation d'Hamilton, et l'on voit qu'elle se déduit de la première par le changement des variables en leurs valeurs initiales.

VI.

Théorème sur les déterminants fonctionnels.

50. Avant d'aller plus loin, nous devons démontrer un théorème dû à Jacobi sur les déterminants fonctionnels, et dont nous ferons souvent usage.

Soient $f_1, f_2, \ldots f_n$, n fonctions des n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$,

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ f_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

et soit le déterminant fonctionnel :

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Il est facile de démontrer que, *si le déterminant* R *est identiquement nul, les fonctions qui entrent dans sa formation ne sont pas indépendantes les unes des autres; une ou plusieurs d'entre elles peuvent s'exprimer au moyen des autres* (*).

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 102.

De l'une des équations contenant x_1, par exemple la première, tirons la valeur de x_1 en fonction de f_1, x_2, ... x_n, et substituons dans une des autres équations renfermant x_1, x_2, par exemple la seconde : nous aurons f_2 en fonction de f_1, x_2, x_3, ... x_n. Cette équation nous donnera x_2 en fonction de f_1, f_2, x_3, ... x_n, et alors nous aurons f_3 en fonction de f_1, f_2, x_3, ... x_n, et ainsi de suite.

Nous pouvons donc considérer :

f_1 comme une fonction de			$x_1, x_2, \ldots, x_n$,
f_2	»	»	$f_1, x_2, \ldots, x_n$,
f_3	»	»	$f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n$,
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
f_n	»	»	$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, x_n$,

et nous aurons :

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
f_2 &= \psi_2(f_1, x_2, \ldots, x_n), \\
f_3 &= \psi_3(f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n), \\
&\cdots\cdots\cdots \\
f_i &= \psi_i(f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}, x_i, \ldots, x_n). \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Il est évident que l'on retrouvera les valeurs primitives de f_1, f_2, ... f_n, en x_1, x_2, ... x_n, si l'on remplace successivement dans les seconds membres f_1, f_2, ... par leurs valeurs déduites des équations qui précèdent celle que l'on considère.

Nous aurons donc, en différentiant :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \psi_i}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \psi_i}{\partial f_{i-1}}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}.$$

Observons que $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$ est la dérivée partielle par rapport à x_k de $f_i = \psi_i$, considérée comme fonction de f_1, f_2, ... f_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ... x_n, c'est-à-dire dans la deuxième hypothèse, tandis que $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ est la dérivée partielle par rapport à x_k de $f_i = \varphi_i$, considérée comme fonction de x_1, x_2, ... x_n, c'est-à-dire dans la première hypothèse.

On tire de là :

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial\psi_i}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi_i}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} - \dots - \frac{\partial\psi_i}{\partial f_{i-1}}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

Cette équation nous donne successivement :

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} = \frac{\partial f_1}{\partial x_n};$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,$$

puisque ψ_2 ne renferme pas explicitement la variable x_1.

De même,

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial\psi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0,$$

et ainsi de suite.

Elle nous donne aussi :

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3},$$

et ainsi de suite;

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0,$$

puisque ψ_3 ne contient pas explicitement la variable x_2.

On a aussi :

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial\psi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3},$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que, si nous écrivons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial\psi_3}{\partial x_n} & & \dots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

nous pourrons le considérer comme le produit du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial\psi_2}{\partial f_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial\psi_3}{\partial f_1} & -\frac{\partial\psi_3}{\partial f_2} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial\psi_n}{\partial f_1} & -\frac{\partial\psi_n}{\partial f_2} & -\frac{\partial\psi_n}{\partial f_3} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

par le déterminant fonctionnel :

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Or, le premier de ces trois déterminants se réduit à son premier terme

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\,\cdots\,\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n},$$

et le second est égal à l'unité.

On a donc :

$$R = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\,\cdots\,\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}. \tag{A}$$

Cela posé, si le déterminant fonctionnel R des fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$ est identiquement nul, la formule (A) nous permet de démontrer que les fonctions f ne sont pas indépendantes les unes des autres.

En effet, si $R = 0$, il faut que l'un des facteurs :

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\quad \cdots\quad \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n},$$

s'annule identiquement.

Mais, les $n-1$ premiers facteurs sont, en général, différents de zéro, puisque, par hypothèse, ψ_1 contient explicitement x_1, ψ_2 contient x_2, etc. Il faut donc que ce soit le dernier facteur $\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}$ qui s'annule identiquement, c'est-à-dire que, par suite des substitutions successives que l'on a faites, la dernière fonction ψ_n ou f_n ne doit plus renfermer x_n explicitement, et peut, par conséquent, s'exprimer au moyen de $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ seulement. Il s'ensuit donc que, si $R = 0$, il doit exister entre $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n$ une relation indépendante de $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Cependant, il peut aussi se faire que, par suite des substitutions en question, aucune des fonctions $\psi_n, \psi_{n-1}, \ldots \psi_{n-k}$, ne renferme explicitement $x_n, x_{n-1}, \ldots x_{n-k}$. Il est évident que, dans ce cas, l'on aura identiquement :

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} = 0,\quad \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0,\quad \cdots\quad \frac{\partial\psi_{n-k}}{\partial x_{n-k}} = 0, \tag{B}$$

et alors chacune des fonctions ψ_n, ψ_{n-1}, ... ψ_{n-k}, ou f_n, f_{n-1}, ... f_{n-k} s'exprime au moyen de f_1, f_2, ... f_{n-k-1} seulement.

Réciproquement, si les fonctions f_1, f_2, ... f_n ne sont pas indépendantes les unes des autres, si, par exemple, l'une d'entre elles f_n, ou plusieurs d'entre elles f_n, f_{n-1}, ... f_{n-k}, peuvent être exprimées au moyen des fonctions restantes, c'est-à-dire f_n en fonction de f_1, f_2, ... f_{n-1}, ou bien f_n, f_{n-1}, ... f_{n-k} en fonction de f_1, f_2, ... f_{n-k-1}, alors la première des égalités (B), ou toutes ces égalités (B) auront lieu, et, par suite, le déterminant R sera identiquement nul.

VII.

Théorème de Jacobi.

51. Nous avons vu (n° **41**) que la connaissance des intégrales du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

nous a permis de trouver par une quadrature une solution complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème inverse, et faire voir comment, au moyen de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, on peut, par de simples différentiations, trouver les intégrales des équations différentielles ordinaires.

Théorème. — *Soit :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0, \tag{1}$$

une équation différentielle partielle du premier ordre, qui ne renferme pas la fonction V, *la fonction* ψ *étant une fonction de* $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t$, *dans laquelle :*

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Supposons que l'on connaisse une solution complète quelconque V *de cette équation différentielle partielle, c'est-à-dire une solution qui, outre la constante ajoutée, renferme* n *constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. *Si l'on pose :*

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_n} = \beta_n, \tag{2}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ *étant de nouvelles constantes arbitraires, ces équations, jointes aux suivantes :*

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n, \tag{3}$$

seront les intégrales du système d'équations différentielles ordinaires dont le type est :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

pour toutes les valeurs de i *égales à* 1, 2, ... n.

Pour démontrer ce théorème, observons d'abord que, si l'on remplace dans l'équation (1) V par la solution complète supposée connue, le premier membre de cette équation deviendra une fonction identiquement nulle des quantités $q_1, q_2, \ldots q_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, t$. Par suite, les dérivées de ce premier membre, prises par rapport aux q_i ou aux α_i, sont identiquement nulles.

Cela posé, nous allons démontrer que les équations (4) sont des conséquences des équations (2) et (3). Nous démontrerons d'abord que des équations (2) on peut déduire la première moitié des équations (4). A cet effet, nous différentierons complètement les équations (2) par rapport à t, et nous aurons :

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = 0,\\
\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = 0.
\end{array}\right\} (5)$$

Il suffirait de résoudre ces équations linéaires par rapport à $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_n}{dt}$, et de montrer que les valeurs obtenues sont identiques à $\frac{\partial\psi}{\partial p_1}, \frac{\partial\psi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial p_n}$.

Mais, on peut démontrer cette identité très facilement, sans résoudre les équations (5), si l'on parvient à reconnaître que les quantités $\frac{\partial\psi}{\partial p_1}, \frac{\partial\psi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial p_n}$, d'une part, et les quantités $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_n}{dt}$, d'autre part, satisfont à un même système d'équations linéaires.

A cet effet, différentions partiellement l'équation (1) par rapport aux constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, en observant que, parmi les quantités t, q_i et $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, qui entrent dans ψ, il n'y a que les p_i qui renferment les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. En différentiant partiellement par rapport à α_i, il vient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_i} + \frac{\partial\psi}{dp_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_i} = 0;$$

mais, en vertu de la relation :

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

on a :

$$\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \alpha_i}.$$

Par suite, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_i} + \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_i} + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_n \partial \alpha_i} = 0.$$

En donnant successivement à i les valeurs 1, 2, ... n, on en déduit un système de n équations linéaires. Or, ce système ne diffère de (5) qu'en ce que les quantités $\frac{dq_i}{dt}$ sont remplacées par $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$. On en conclut donc :

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_i}.$$

Pour obtenir la seconde moitié des équations (4), nous nous servirons de la seconde moitié des équations intégrales, c'est-à-dire des équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i.$$

En différentiant par rapport à t, il vient :

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_k}=\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_k}}{\partial q_i}=\frac{\partial p_k}{\partial q_i};$$

par conséquent,

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial p_1}{dq_i}\frac{dq_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{dq_n}{dt}.$$

Mais, en vertu de la première moitié des équations (4), on a :

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_1},\quad\cdots\quad\frac{dq_n}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_n};$$

donc,

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial p_2}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_n}. \qquad (6)$$

D'autre part, en différentiant l'équation (1) partiellement par rapport à q_i, il vient, puisque ψ renferme q_i, d'abord explicitement, et implicitement par les p_i :

$$0=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_i}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i}+\frac{\partial\psi}{\partial q_i}. \qquad (7)$$

Retranchant l'équation (7) de l'équation (6), il vient :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

ce qui démontre la seconde moitié des équations (4), et le théorème de Jacobi est démontré.

On voit, par la démonstration précédente, que les n constantes qui entrent dans V peuvent être arbitraires : il n'est donc pas nécessaire de prendre pour ces constantes les valeurs initiales $q_1^0, q_2^0, \ldots q_n^0$.

52. *Remarque.* — Nous avons conclu de l'identité des deux systèmes qui définissent $\frac{dq_i}{dt}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial p_i}$, que ces quantités sont égales. Nous ne pouvons tirer cette conclusion que si ces quantités ont des valeurs finies et déterminées; or, cela a toujours lieu pour un système d'équations linéaires, dès que ces équations ne sont pas incompatibles, ou dès que l'une ou plusieurs d'entre elles ne sont pas la conséquence des autres. Dans le premier cas, les valeurs des quantités sont infinies; dans le second cas, elles sont indéterminées. Ces cas d'exception, dans lesquels notre démonstration cesse d'avoir lieu, se présentent lorsque le déterminant R des équations linéaires est nul (pourvu que les coefficients de ces équations restent finis, ce que nous supposons toujours).

Or, ce déterminant est :

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_n \partial q_n} \end{vmatrix},$$

que l'on peut écrire, en adoptant la notation de Jacobi :

$$R = \sum \pm \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial \alpha_n}}{\partial q_n},$$

ou bien :

$$R = \sum \pm \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_2}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_n}}{\partial \alpha_n}.$$

Or, c'est un *déterminant fonctionnel*, et nous allons démontrer qu'il ne peut être nul.

En effet, si le déterminant R est nul, il résulte de la première expression de R que les quantités $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial \alpha_n}$, considérées comme des fonctions de $q_1, q_2, \ldots q_n$, ne seraient pas indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire qu'il devrait exister une relation entre $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial \alpha_n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, t$, laquelle ne renfermerait pas $q_1, q_2, \ldots q_n$ (n° **50**). De la deuxième expression de R, il résulte qu'il devrait exister une relation entre $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}, q_1, q_2, \ldots q_n, t$, laquelle ne renfermerait pas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

On aurait donc ainsi une équation de la forme :

$$F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

c'est-à-dire une équation différentielle partielle du premier ordre, à laquelle devrait satisfaire la solution V supposée, et cette équation ne renferme pas $\frac{\partial V}{dt}$. Mais, cela est impossible, si V est une *solution complète* de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

En effet, pour qu'une expression :

$$V = f(t, q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) + \gamma,$$

satisfasse à la condition d'être une *solution complète,* on doit se servir, pour éliminer les $n+1$ constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \gamma$ de toutes les $n+1$ équations

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = \frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

Or, s'il existe entre $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}, q_1, q_2, \ldots q_n, t$, une relation qui ne renferme pas les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, et qui ne contienne pas $\frac{\partial V}{dt}$, c'est-à-dire une équation de la forme :

$$F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ \ldots \ \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

il en résulte que pour éliminer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \gamma$, on n'a pas fait usage de l'une des équations, à savoir de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Si l'une des équations est superflue, et si, par conséquent, les n autres :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i},$$

sont seules nécessaires pour éliminer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, il en résultera que l'une de ces constantes reste indéterminée, c'est-à-dire que nous pourrons lui donner une valeur particulière. En effet, entre n équations on ne peut éliminer, en général, que $n - 1$ quantités. Cette constante est donc superflue, et, par conséquent, la fonction f ne renferme que $n - 1$ constantes.

Par suite, la fonction :

$$V = f + \gamma,$$

ne renferme, y compris γ, que n constantes arbitraires. Elle ne peut donc être une solution complète de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

mais, elle est une solution de l'équation :

$$F = 0.$$

Or, cette dernière conclusion est contraire à notre hypothèse qui était que :

$$V = f + \gamma,$$

est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

et de l'équation :

$$F = 0.$$

Donc, le déterminant R ne peut être nul, et, par suite, de l'identité des deux systèmes linéaires, on a pu conclure que l'on a :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}.$$

53. *Application.* — Nous terminerons ce chapitre, en appliquant la théorie précédente au *mouvement d'un système libre de* n *points matériels.*

On doit d'abord calculer l'expression :

$$\psi = T - U,$$

qui entre dans les équations différentielles d'Hamilton, en fonction de t, q_i, p_i.

Or, ici les q_i sont les $3n$ coordonnées rectangulaires x_i, y_i, z_i. On a donc :

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2);$$

par suite,

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i'.$$

Les p étant ici égaux à $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$, on devra dans l'équation

$$\psi = T - U,$$

remplacer les x_i', y_i', z_i' (c'est-à-dire les q') par $\frac{p}{m_i}$, et l'on aura ψ en fonction de q_i, p_i et t.

Mais, pour avoir l'équation différentielle partielle, on devra poser :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i};$$

par conséquent,

$$m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i},$$

$$m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i},$$

et, par suite,

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2 \right].$$

On a donc l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2 \right] = U,$$

U étant une fonction des coordonnées x_i, y_i, z_i.

Telle est l'équation différentielle partielle du premier ordre, de la solution de laquelle dépend l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un système libre, lorsqu'il existe une fonction de force U, qui, outre les coordonnées, peut encore contenir explicitement le temps.

Si l'on peut déterminer une solution complète de cette équation, c'est-à-dire une solution qui, outre la constante additive, renferme $3n$ constantes α_1, α_2, ... α_{3n}, alors les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i,$$

pour $i = 1, 2, \ldots 3n$, seront les intégrales du mouvement.

Les équations du mouvement pourront être mises sous la forme :

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

pour $i = 1, 2, \ldots n$.

Quant aux intégrales premières, elles sont données par les équations :

$$m_i \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_1 \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

VIII.

Fonction caractéristique d'Hamilton.

54. Nous avons vu, dans le cas d'un problème de mécanique auquel le principe des forces vives est applicable, que, T étant la demi-somme des forces vives, et U la fonction de force ne *renfermant pas explicitement le temps,* l'équation des forces vives :

$$T - U = H = const. = h,$$

est une intégrale du problème (n° **17**).

Nous savons aussi que, dans ce cas, l'équation différentielle partielle du premier ordre, à laquelle satisfait la fonction V, est :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = \frac{\partial V}{\partial t} + T\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) - U(q_1, q_2, \dots q_n) = 0, \quad (1)$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0.$$

Outre la fonction principale V, Hamilton considère une autre fonction S définie par l'équation :

$$S = V + H(t - t_0). \quad (2)$$

Cette fonction S jouit de propriétés analogues à celles de la fonction V, et elle peut être substituée à cette dernière avec avantage.

55. Nous allons d'abord démontrer que *la fonction* S *ne renferme pas explicitement le temps.*

En effet, de la formule (2) on tire :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + H.$$

Or, lorsqu'il existe une fonction de force indépendante du temps, on a :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

par suite,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

et, par conséquent, S ne renferme pas explicitement le temps.

56. Ceci posé, prenons la variation de S, nous aurons :

$$\delta S = \delta V + (t - t_0)\delta H + H\delta t,$$

d'où, en remplaçant δV par sa valeur :

$$\delta V = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \dots + p_n\delta q_n$$
$$- p_1^0\delta q_1^0 - p_2^0\delta q_2^0 - \dots - p_n^0\delta q_n^0 + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t,$$

et observant que :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - H,$$

il vient :

$$\delta S = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_n\delta q_n$$
$$- p_1^0\delta q_1^0 - p_2^0\delta q_2^0 - \dots - p_n^0\delta q_n^0 + (t - t_0)\delta H.$$

Si donc on considère S comme une fonction de $q_1, \dots q_n$, $q_1^0, \dots q_n^0$ et de H (*), après avoir éliminé le temps t au moyen de l'équation $H = T - U$, on aura les $2n+1$ équations suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial S}{\partial q_n} = p_n,$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_1^0} = - p_1^0, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2^0} = - p_2^0, \quad \cdots \quad \frac{\partial S}{\partial q_n^0} = - p_n^0, \quad \frac{\partial S}{\partial H} = t - t_0,$$

lesquelles donneront la solution du problème, lorsque la fonction S sera connue.

Or, il est facile de voir que la fonction S satisfait à une équation différentielle partielle plus simple que celle à laquelle satisfait la fonction V.

(*) La fonction $S = V + H(t - t_0)$, mise sous cette forme, parait renfermer explicitement le temps. Nous avons démontré qu'elle ne le contient pas. Si donc on veut la considérer comme une fonction des q_i, q_i^0 et de H, on devra éliminer t au moyen de l'équation $H = T - U$.

En effet, on a l'équation :

$$T - U = H,$$

dans laquelle T est une fonction de $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, et, en remplaçant p_i par $\frac{\partial S}{\partial q_i}$, on a l'équation :

$$T\left(q_1, \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) - U(q_1, \dots q_n) = H. \tag{5}$$

Or, cette équation différentielle partielle du premier ordre, qui ne renferme pas la fonction inconnue S, est plus simple que la précédente (1).

57. Propriété. — La fonction S n'est autre que l'intégrale définie :

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt,$$

que l'on considère dans le *principe de la moindre action.*

En effet, on a :

$$S = V + H(t - t_0);$$

or,

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt;$$

par conséquent,

$$S = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt + H(t - t_0).$$

Puisque H reste constante pendant toute la durée du mouvement, on aura :

$$S = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt + \int_{t_0}^{t} H\,dt = \int_{t_0}^{t} (T + U + H)\,dt,$$

et, en remplaçant H par sa valeur $T - U$,

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt.$$

On voit donc que la fonction principale d'Hamilton :

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt,$$

ne diffère de la fonction S que l'on considère dans le principe de la moindre action que par l'addition d'un terme proportionnel au temps (n° **32**).

La fonction :

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt,$$

a reçu d'Hamilton le nom de *fonction caractéristique*. Elle satisfait à l'équation différentielle partielle (3).

58. Il est facile de s'assurer que le théorème de Jacobi (n° **51**) peut être modifié de la manière suivante quand il existe une fonction de force ne renfermant pas explicitement le temps :

Théorème. — *Si la fonction de force* U *ne renferme pas explicitement le temps, de telle manière que le principe des forces vives ait lieu, et si l'on remplace dans l'intégrale des forces vives :*

$$T - U = h, \qquad (h \text{ étant une constante})$$

laquelle est une des intégrales du problème, les quantités p_i *par* $\frac{\partial S}{\partial q_i}$, *on formera l'équation différentielle partielle :*

$$T\left(q_1, q_2 \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) - U(q_1, q_2, \dots q_n) = h.$$

Si l'on connaît une solution complète quelconque S *de cette équation, c'est-à-dire une solution qui, outre la constante additive, renferme les* $n - 1$ *constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$, *les intégrales du problème seront :*

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \quad \frac{\partial S}{\partial h} = t - t_0,$$

$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}, t_0$ *étant de nouvelles constantes.*

Les intégrales premières étant :

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \dots \frac{\partial S}{\partial q_n} = p_n,$$

nous aurons les 2n *intégrales du problème, et les constantes seront :*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}, h,$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}, t_0.$$

En effet, on sait que la fonction V est une solution complète de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + T\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) - U(q_1, q_2, \dots q_n) = 0. \quad (4)$$

Posons $V = S - ht$, S ne renfermant pas explicitement le temps. Il est évident que S étant connue, on en déduira V en retranchant ht de S.

Cherchons donc l'équation à laquelle satisfait la fonction S. A cet effet, nous allons transformer l'équation (4). On a :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial q_i};$$

par conséquent, l'équation (4) se transforme en la suivante :

$$-h + T\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) - U(q_1, q_2, \dots q_n) = 0, \quad (5)$$

équation qui devra être vérifiée par la fonction S.

Si donc, on connaît une solution S de cette équation (5), on en déduira une solution V de (4) en retranchant ht de S.

Or, d'après le théorème de Jacobi, on sait que, si l'on connaît une solution V de (4), les intégrales des équations du mouvement sont données par les équations (n° **51**) :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i.$$

Les intégrales des équations du mouvement sont donc données par les équations :

$$\frac{\partial(S - ht)}{\partial\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial(S - ht)}{\partial\alpha_2} = \beta_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial(S - ht)}{\partial\alpha_{n-1}} = \beta_{n-1},$$

$$\frac{\partial(S - ht)}{\partial h} = -t_0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial\alpha_2} = \beta_2, \cdots \quad \frac{\partial S}{\partial\alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \quad \frac{\partial S}{\partial h} = t - t_0.$$

Par conséquent, ces dernières équations sont bien les intégrales des équations du mouvement.

59. *Remarque I.* — Dans le cas d'un système libre, on a, en coordonnées rectangulaires, l'équation différentielle partielle :

$$\frac{1}{2}\sum \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] - U = h.$$

60. *Remarque II.* — La *fonction caractéristique* d'Hamilton :

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T dt,$$

peut encore être mise sous une forme différente.

En effet, puisque T est une fonction homogène et du second degré des q'_i, on a :

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_n} q'_n;$$

d'où :

$$\begin{aligned} 2T &= p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_n q'_n \\ &= p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_n \frac{dq_n}{dt}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T dt = \int_{t_0}^{t} (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n).$$

Observons ici que l'expression $p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n$ doit être une différentielle exacte, puisque l'intégrale du second membre doit se réduire à une fonction de t seulement.

61. *Remarque III.* — Hamilton considère encore une autre fonction qui jouit de propriétés analogues à celles des fonctions V et S. Cette fonction est définie par l'équation :

$$Q = \int_{t_0}^{t} \left(H - \sum q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dt,$$

dans laquelle $H = T - U$.

Or, H étant une fonction des q_i, p_i, on a :

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \dfrac{\partial H}{\partial q_n}\delta q_n + \dfrac{\partial H}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\delta p_n \\ - \sum \left(\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + q_i \delta \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \right) \end{array} \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - q_i \delta \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right\} dt;$$

mais, les équations canoniques :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$
$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

nous donnent :

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{dq_i}{dt}\delta p_i + q_i \delta \frac{dp_i}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t} \sum \frac{d(q_i \delta p_i)}{dt} dt$$
$$= \sum (q_i \delta p_i - q_i^0 \delta p_i^0).$$

Si donc on considère la fonction Q comme une fonction des $2n$ quantités p_i, p_i^0, nous aurons les $2n$ équations :

$$q_i = \frac{\partial Q}{\partial p_i},$$
$$q_i^0 = -\frac{\partial Q}{\partial p_i^0},$$

qui seront les intégrales des équations canoniques, et qui résoudront la question lorsque la fonction Q sera connue.

IX.

Applications.

62. *Mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe, par une force dont l'intensité varie en raison inverse du carré de la distance, le mouvement étant rapporté à deux axes rectangulaires.*

Les équations du mouvement sont, en prenant le centre fixe pour origine, et en supposant la masse du point égale à l'unité,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3},$$

μ étant la masse du centre d'action. Nous supposons que l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance est égale à l'unité.

La fonction de force est :

$$U = \frac{\mu}{r}.$$

Comme il n'y a pas d'équations de liaisons, les q_i sont les variables x et y. La demi-force vive est donnée par la formule :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2);$$

or, on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = y',$$

par conséquent (n° **10**),

$$p_1 = x', \quad p_2 = y',$$

et, par suite,

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2).$$

C'est la fonction T exprimée en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2.

La *fonction de force* U *étant indépendante du temps*, l'équation différentielle partielle de laquelle dépend la solution du problème est (n° **58**) :

$$T - U = h,$$

dans laquelle on remplacera p_1, p_2, par $\frac{\partial S}{\partial q_1}$, $\frac{\partial S}{\partial q_2}$, c'est-à-dire par $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$. Nous aurons donc l'équation :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = h,$$

dont il faudra trouver une solution complète.

On simplifie la question en changeant de variables, et posant :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

r et φ étant les nouvelles variables indépendantes.

Or, des équations précédentes on tire :

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial S}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial S}{\partial \varphi}.$$

L'équation aux dérivées partielles est alors :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] = \frac{\mu}{r} + h,$$

et nous aurons à déterminer une solution complète renfermant, outre la constante additive, une constante arbitraire (n° **58**).

Pour intégrer cette équation, nous observerons que S peut être considérée comme la somme de deux fonctions d'une seule variable chacune, savoir une fonction de r et une fonction de φ.

Nous poserons donc :

$$S = R + \Phi,$$

R étant une fonction de r, et Φ une fonction de φ, et nous aurons, en désignant par R' et Φ' les dérivées de R et Φ respectivement par rapport à r et φ :

$$\frac{1}{2}\left[R'^2 + \frac{1}{r^2}\Phi'^2\right] = \frac{\mu}{r} + h.$$

On peut satisfaire à cette équation en posant :

$$\frac{1}{2}\Phi'^2 = \beta,$$

$$\frac{1}{2}R'^2 + \frac{1}{r^2}\beta = \frac{\mu}{r} + h,$$

d'où l'on tire :

$$\Phi' = \sqrt{2\beta},$$

$$R' = \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{2\beta}{r^2}},$$

et, en intégrant,

$$\Phi = \int d\varphi \sqrt{2\beta} = \varphi\sqrt{2\beta},$$

$$R = \int dr \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}};$$

par conséquent, l'expression :

$$S = \int dr \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}} + \varphi\sqrt{2\beta} + \gamma,$$

sera une solution complète de l'équation aux dérivées partielles.

Les intégrales du problème seront alors (n° **58**) :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = k,$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t + g,$$

k et g étant deux nouvelles constantes.

Nous aurons donc pour ces intégrales :

$$k = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{\varphi}{\sqrt{2\beta}},$$

$$t + g = \int \frac{dr}{\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}}},$$

dont la première peut être remplacée par l'équation :

$$k = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

63. *Mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force agissant en raison inverse du carré de la distance, le mouvement étant rapporté à trois axes rectangulaires.*

Désignons par x, y, z les coordonnées du point attiré, dont nous supposons la masse égale à l'unité, l'origine étant au centre fixe, par f l'attraction exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, et par μ la masse du centre d'action. Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f\mu x}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{f\mu y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{f\mu z}{r^3} = 0.$$

Observons que les équations du mouvement auront la même forme, si nous supposons le centre mobile, comme cela arrive dans le cas du *mouvement relatif d'une planète unique autour du soleil,* en tenant compte de l'action de la planète sur le soleil.

Dans ce cas, comme on sait, μ est la somme des masses M et m du soleil et de la planète (*).

La fonction de force est :

$$U = \frac{f\mu}{r}.$$

Comme il n'y a pas d'équations de liaisons, les q_i sont les variables x, y, z. La demi-force vive est donnée par la formule :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

or, on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = y', \quad \frac{\partial T}{\partial z'} = z',$$

par conséquent (n° **10**),

$$p_1 = x', \quad p_2 = y', \quad p_3 = z',$$

et, par suite,

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

C'est la fonction T exprimée en fonction de $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$.

La *fonction de force* U *étant indépendante du temps,* l'équation différentielle partielle de laquelle dépend la solution du problème est (n° **58**) :

$$T - U = h,$$

dans laquelle on remplacera p_1, p_2, p_3 par $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \frac{\partial S}{\partial q_3}$, c'est-à-dire par $\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}$. Nous aurons donc l'équation :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{f\mu}{r} = h, \tag{1}$$

équation dont il faudra trouver une solution complète, renfermant deux constantes arbitraires, outre la constante additive (n° **58**).

D'ailleurs, si nous posons :

$$H_1 = T - U = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{f\mu}{r},$$

(*) Voir *Cours de mécanique analytique, théorie des forces centrales.*

les équations du mouvement peuvent être mises sous la forme suivante (*) :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial x'},\quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial x},$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial y'},\quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial y},$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial z'},\quad \frac{dz'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial z}.$$

Pour simplifier la solution de la question, nous emploierons les coordonnées polaires, et nous poserons :

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi,\\ y &= r\sin\theta\sin\varphi,\\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}\right\}$$

Posons encore :

$$\frac{dr}{dt}=r',\quad \frac{d\theta}{dt}=\theta',\quad \frac{d\varphi}{dt}=\varphi',$$

et nous aurons pour l'expression de la force vive :

$$2T=r'^2+r^2\theta'^2+r^2\sin^2\theta.\varphi'^2;$$

c'est la fonction T exprimée en fonction des q et des q'.

Nous aurons donc :

$$\frac{\partial T}{\partial r'}=r',$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta'}=r^2\theta',$$
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'}=r^2\sin^2\theta.\varphi';$$

(*) En observant que l'on a :

$$x'=\frac{\partial T}{\partial x'}=\frac{\partial(T-U)}{\partial x'}=\frac{\partial H_1}{\partial x'},$$

et

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial x}.$$

par conséquent (n° **10**),

$$p_1 = r', \quad p_2 = r^2\theta', \quad p_3 = r^2 \sin^2\theta . \varphi' ;$$

et il vient alors :

$$T = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + \frac{1}{r^2} p_2^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} p_3^2\right].$$

C'est la fonction T exprimée en fonction de $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$.

L'équation différentielle partielle du problème est donc :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] = \frac{f\mu}{r} + h, \tag{2}$$

et nous aurons à trouver une solution complète de cette équation (2), renfermant, outre la constante additive, deux constantes arbitraires (n° **58**).

Pour intégrer cette équation (2), nous observerons que S peut être considérée comme la somme de trois fonctions d'une seule variable chacune, savoir une fonction de r, une fonction de θ, et une fonction de φ.

Nous poserons donc :

$$S = R + \Theta + \Phi,$$

et nous aurons, en désignant par R', Θ', Φ' les dérivées de R, Θ, Φ respectivement par rapport à r, θ, φ :

$$\frac{1}{2}\left[R'^2 + \frac{1}{r^2}\Theta'^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Phi'^2\right] = \frac{f\mu}{r} + h.$$

On peut satisfaire à cette équation en posant :

$$\left.\begin{aligned} &\Phi' = g, \\ &\Theta'^2 + \frac{g^2}{\sin^2\theta} = b^2, \\ &R'^2 + \frac{b^2}{r^2} = \frac{2f\mu}{r} + 2h. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Ces équations ne contenant chacune qu'une seule variable, on en tire :

$$\Phi = g\varphi,$$

$$\Theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta,$$

$$R = \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}}\, dr;$$

par conséquent, l'expression :

$$S = g\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}}\, dr + \gamma, \tag{3}$$

sera une solution complète de l'équation (2).

Les intégrales premières du problème sont alors (n° **58**) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial r}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial S}{\partial \theta}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{g}{r^2\sin^2\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Les intégrales finies sont :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial b} &= b', \\ \frac{\partial S}{\partial g} &= g', \\ \frac{\partial S}{\partial h} &= t + \tau, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

b', g' et τ étant trois nouvelles constantes arbitraires.

Observons, en passant, que la fonction S donnée par l'équation (3) étant connue, on pourrait revenir aux variables x, y, z, et alors les intégrales (4) pourront être remplacées par les suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Les équations (5) nous donnent :

$$g' = \varphi - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g \dfrac{d\theta}{\sin^2\theta}}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}},$$

$$b' = -\int_{r_0}^{r} \frac{b \dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{\dfrac{2f\mu}{r} + 2h - \dfrac{b^2}{r^2}}} + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{b d\theta}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}},$$

$$t + \tau = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2f\mu}{r} + 2h - \dfrac{b^2}{r^2}}}.$$

Il est facile de trouver la signification des constantes.

La constante h n'est autre que la constante des forces vives, b est la constante des aires dans le plan de l'orbite, et g la constante des aires dans le plan des xy.

On a, en effet,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Or, des formules :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r},$$

on tire :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{zx}{r^3\sin\theta} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dx}{dt} = \sin\theta\cos\varphi\sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}}$$
$$+ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}} - \frac{g\sin\varphi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin\theta\sin\varphi\sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}}$$
$$+ \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}} + \frac{g\cos\varphi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{dz}{dt} = \cos\theta\sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}} - \frac{\sin\theta}{r}\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}}.$$

Élevant au carré et ajoutant, on a :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2f\mu}{r} + 2h;$$

c'est l'équation des forces vives; en faisant $t=0$, cette équation détermine la constante h en fonction de la vitesse initiale et de la distance initiale du point matériel au centre fixe.

D'autre part, il est facile de voir que l'on a :

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=g.$$

On en conclut que g est *la constante des aires dans le plan des* xy ou bien le *double de la vitesse aréolaire en projection sur le plan des* xy.

On trouve de même :

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=-\sin\varphi\sqrt{b^2-\frac{g^2}{\sin^2\theta}}-g\cos\varphi\operatorname{cotg}\theta,$$

$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=\cos\varphi\sqrt{b^2-\frac{g^2}{\sin^2\theta}}-g\sin\varphi\operatorname{cotg}\theta.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient :

$$\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$=g^2+b^2-\frac{g^2}{\sin^2\theta}+g^2\operatorname{cotg}^2\theta=b^2.$$

Or, le premier membre est le carré du double de l'aire dans le plan de l'orbite, ou le carré du double de la vitesse aréolaire dans le plan de l'orbite. Par conséquent, *la constante* b *est la constante des aires dans le plan de l'orbite,* ou le *double de la vitesse aréolaire dans le plan de l'orbite.*

On peut encore dire que la constante b est l'axe du plan invariable, et g la projection de cet axe sur la normale au plan des xy, c'est-à-dire sur la normale à un plan fixe sur lequel on compte les longitudes.

Il résulte de là que, si i est l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe des xy, on a :

$$g=b\cos i.$$

Avant de passer à la recherche de la signification des constantes τ, b', g', nous allons déterminer les limites inférieures r_0 et θ_0 des intégrales qui entrent dans la fonction S.

Nous prendrons pour ces limites inférieures les valeurs de r et θ qui annulent les radicaux : il résulte évidemment des deux dernières formules (A) que ces valeurs de r et θ sont celles pour lesquelles on a : $dr = 0$, $d\theta = 0$, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles r et θ sont minimums.

Nous aurons donc pour déterminer la limite inférieure de r, l'équation :

$$-\frac{b^2}{r^2} + \frac{2f\mu}{r} + 2h = 0,$$

ou bien :

$$-b^2 + 2f\mu r + 2hr^2 = 0.$$

Or, en désignant par $2a$ et e le grand axe et l'excentricité de l'orbite elliptique, on a :

$$-\frac{f\mu}{h} = 2a, \quad -\frac{b^2}{2h} = a^2(1-e^2),$$

ou bien :

$$-\frac{f\mu}{h} = 2a, \quad \frac{b^2}{f\mu} = a(1-e^2) = p,$$

p étant le demi-paramètre.

Ces deux dernières équations déterminent les constantes h et b en fonction de a et de e.

La limite inférieure r_0 de r est donc donnée par la formule :

$$r_0 = a(1-e).$$

Quant à la limite inférieure θ_0 de θ, elle est déterminée par l'équation :

$$b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta_0} = 0,$$

de laquelle on tire :

$$\sin\theta_0 = \frac{g}{b},$$

θ est l'angle que le rayon vecteur r fait avec l'axe des z.

D'ailleurs, en vertu de la formule :

$$g = b \cos i,$$

on a :

$$\sin \theta_0 = \cos i, \quad \text{ou bien :} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} - i.$$

Passons maintenant à la recherche de la signification des constantes g', b' et τ.

Pour trouver la signification de g', prenons l'intégrale :

$$g' = \varphi - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g \dfrac{d\theta}{\sin^2\theta}}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}},$$

et faisons dans cette équation :

$$\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2} - i;$$

l'intégrale du second membre est nulle (*), et l'on a :

$$g' = \varphi_0,$$

en désignant par φ_0 la valeur de φ correspondant à $\theta = \theta_0$.

Or, φ_0 est l'angle de l'axe des x avec la projection du rayon vecteur qui fait le plus petit angle θ_0 avec l'axe des z. Mais, l'inclinaison de ce rayon vecteur sur le plan des xy est la même que celle de l'orbite : il est donc perpendiculaire à la trace de l'orbite sur le plan des xy (c'est la ligne de plus grande pente de l'orbite); par conséquent, sa projection sur le plan des xy est perpendiculaire à cette trace. Donc, l'angle de cette projection avec Ox est égal à $\frac{\pi}{2}$, augmenté de l'angle de la trace avec Ox, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ plus la longitude du nœud de l'orbite.

On a donc, en désignant par α la longitude du nœud ascendant de l'orbite :

$$g' = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

(*) Puisque les limites de l'intégrale sont égales.

Observons encore que l'équation :

$$g' = \varphi - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g \dfrac{d\theta}{\sin^2\theta}}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}},$$

nous donne :

$$g' = \varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g\, d \operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{b^2 - g^2 - g^2 \operatorname{cotg}^2\theta}},$$

ou bien :

$$g' = \varphi + \left(\operatorname{arc\,sin} \frac{g \operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{b^2 - g^2}}\right)_{\theta_0}^{\theta}.$$

Or, de la formule :

$$\sin\theta_0 = \frac{g}{b},$$

on tire :

$$\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{b^2 - g^2}}{b},$$

et, par suite,

$$\operatorname{cotg}\theta_0 = \frac{\sqrt{b^2 - g^2}}{g}.$$

Par conséquent,

$$g' = \varphi + \operatorname{arc\,sin} \frac{g \operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{b^2 - g^2}} - \frac{\pi}{2},$$

ou bien encore :

$$g' = \varphi - \operatorname{arc\,cos} \frac{g \operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{b^2 - g^2}}.$$

Pour trouver la signification de la constante b', nous prendrons l'équation :

$$b' = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{b d\theta}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}} - \int_{r_0}^{r} \frac{b \dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{\dfrac{2f\mu}{r} + 2h - \dfrac{b^2}{r^2}}}.$$

Si, dans cette équation, on fait :

$$r = r_0 = a(1 - e),$$

la seconde intégrale sera évidemment nulle, et il vient :

$$b' = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{b d\theta}{\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2 \theta}}}.$$

Dans cette dernière formule, la limite inférieure θ_0 est la valeur minimum de θ, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - i$, et la limite supérieure θ est la valeur de θ correspondant au rayon vecteur $r_0 = a(1 - e)$, c'est-à-dire au rayon vecteur du périhélie.

D'ailleurs, si l'on remplace g par sa valeur :

$$g = b \cos i,$$

il vient :

$$b' = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2 i}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 i - \cos^2 \theta}} = \left(\arc\cos \frac{\cos \theta}{\sin i}\right)_{\theta_0}^{\theta}.$$

On a donc :

$$b' = \arc\cos \frac{\cos \theta}{\sin i} - \arc\cos \frac{\cos \theta_0}{\sin i}.$$

Or, à cause de la relation $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - i$, on a :

$$\cos \theta_0 = \sin i;$$

par conséquent,

$$b' = \arc\cos \frac{\cos \theta}{\sin i},$$

d'où l'on tire :

$$\cos \theta = \sin i \cos b'.$$

Cherchons à interpréter ce résultat, en ayant soin de remarquer que, dans cette formule, θ est l'angle que fait avec Oz le rayon vecteur mené du point O au périhélie. Imaginons une sphère ayant son centre à l'origine, et soient NP et NK les intersections de cette sphère avec le plan de l'orbite et le plan des xy, N le nœud et P le périhélie (fig. 1).

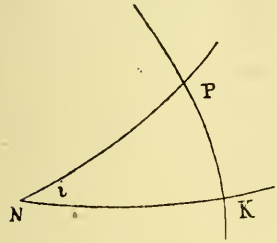


Fig. 1.

Du point P menons l'arc PK perpendiculaire à NK, c'est-à-dire au plan des xy. Il est évident que l'arc PK est le complément de l'angle que fait avec l'axe Oz le rayon vecteur mené du point O au périhélie, c'est-à-dire le complément de l'angle θ de la formule ci-dessus.

On a donc :

$$\mathrm{PK} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Or, le triangle sphérique PNK nous donne :

$$\sin \mathrm{PK} = \sin \mathrm{NP}.\sin i,$$

ou bien :

$$\cos \theta = \sin \mathrm{NP}.\sin i.$$

Comparant cette formule avec la précédente, on a :

$$b' = \frac{\pi}{2} - \mathrm{NP}.$$

Donc, la *constante* b' *est le complément de la distance angulaire du périhélie au nœud.*

Enfin, pour trouver la signification de la constante τ, faisons $r = r_0 = a(1 - e)$ dans la dernière équation :

$$t + \tau = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}}},$$

nous aurons :

$$t = -\tau.$$

Donc, la *constante* $-\tau$ *représente le temps du passage de la planète au périhélie.*

64. *Mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère.*

Prenons pour axes la verticale dirigée dans le sens de la pesanteur et deux horizontales menées par le centre de la sphère. Les coordonnées du point M sont (fig. 2) :

$$x = OQ, \quad y = PQ, \quad z = MP.$$

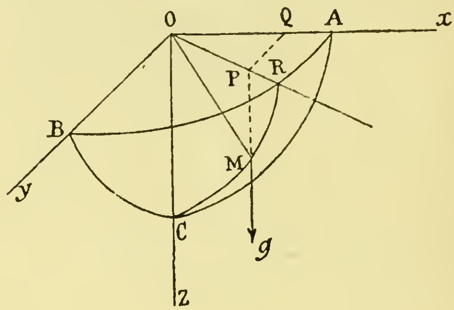


Fig. 2.

Remplaçons ces coordonnées par des variables q_1, q_2, telles que l'équation de condition soit vérifiée.

Soient :

$$q_1 = AOR, \quad q_2 = MOR,$$

et supposons le rayon de la sphère égal à l'unité. Nous aurons :

$$x = \cos q_2 \cos q_1,$$

$$y = \cos q_2 \sin q_1,$$

$$z = \sin q_2.$$

Si nous supposons la masse du point égale à l'unité, nous aurons pour la fonction de force :

$$U = gz = g \sin q_2;$$

d'ailleurs, la demi-force vive T est donnée par la formule :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Or, on a :

$$x' = -\cos q_2 \sin q_1 \, . \, q'_1 - \sin q_2 \cos q_1 \, . \, q'_2,$$

$$y' = \quad \cos q_2 \cos q_1 \, . \, q'_1 - \sin q_2 \sin q_1 \, . \, q'_2,$$

$$z' = \quad \cos q_2 \, . \, q'_2 ;$$

d'où il vient pour la fonction T exprimée en fonction des q et des q' :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\cos^2 q_2 \, . \, q'^2_1 + q'^2_2).$$

On en tire :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2} = -\cos q_2 \sin q_2 \, . \, q'^2_1,$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} = \cos^2 q_2 \, . \, q'_1, \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2} = q'_2.$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_2} = g \cos q_2.$$

Par conséquent, les équations de Lagrange (n° 9) :

$$\frac{d \, . \, \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i},$$

nous donnent pour les équations du mouvement :

$$\frac{d(\cos^2 q_2 \, . \, q'_1)}{dt} = 0,$$

$$\frac{dq'_2}{dt} + \cos q_2 \sin q_2 \, . \, q'^2_1 = g \cos q_2 .$$

De la première on tire :

$$q'_1 \, . \, \cos^2 q_2 = c,$$

d'où, en substituant dans la seconde, il vient :

$$\frac{dq'_2}{dt} + \sin q_2 \, . \, \frac{c^2}{\cos^3 q_2} = g \cos q_2,$$

ou bien :

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} = g \cos q_2 - \frac{c^2 \sin q_2}{\cos^3 q_2}.$$

En intégrant, on a :

$$\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 = 2g \sin q_2 - \frac{c^2}{\cos^2 q_2} + c',$$

d'où :

$$dt = \frac{dq_2}{\sqrt{2g \sin q_2 - \frac{c^2}{\cos^2 q_2} + c'}}.$$

C'est l'équation que l'on obtient par la méthode ordinaire.

Appliquons maintenant le théorème de Jacobi, et, à cet effet, reprenons l'expression :

$$T = \frac{1}{2}(\cos^2 q_2 \cdot q_1'^2 + q_2'^2),$$

et posons :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \cos^2 q_2 \cdot q_1',$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = q_2';$$

d'où :

$$q_1' = \frac{p_1}{\cos^2 q_2},$$

$$q_2' = p_2.$$

Par conséquent,

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{\cos^2 q_2} + p_2^2\right).$$

C'est la fonction T exprimée en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2.

La *fonction de force ne renfermant pas explicitement le temps*, l'équation différentielle partielle de laquelle dépend la solution du problème est (n° **58**) :

$$T - U = h,$$

dans laquelle on remplacera p_1, p_2, par $\frac{\partial S}{\partial q_1}$, $\frac{\partial S}{\partial q_2}$, ce qui nous donne l'équation :

$$\frac{1}{2\cos^2 q_2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 - g \sin q_2 = h,$$

dont il faudra trouver une solution complète, renfermant, outre la constante additive, une constante arbitraire.

D'ailleurs, si nous posons :

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{\cos^2 q_2} + p_2^2\right) - g \sin q_2,$$

nous aurons :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{p_1^2 \sin q_2}{\cos^3 q_2} - g \cos q_2,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{\cos^2 q_2}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2,$$

et les équations du mouvement pourront être mises sous la forme :

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{p_1}{\cos^2 q_2}, \quad \frac{dq_2}{dt} = p_2,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = 0, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{p_1^2 \sin q_2}{\cos^3 q_2} + g \cos q_2.$$

Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles, nous observerons que S peut être considérée comme la somme de deux fonctions d'une seule variable chacune, savoir une fonction de q_1 et une fonction de q_2.

Posons donc :

$$S = Q_1 + Q_2,$$

et nous aurons, en désignant par Q'_1, Q'_2 les dérivées de Q_1, Q_2 respectivement par rapport à q_1, q_2 :

$$\frac{1}{2\cos^2 q_2} Q_1'^2 + \frac{1}{2} Q_2'^2 - g \sin q_2 = h.$$

On peut satisfaire à cette équation, en posant :

$$\frac{1}{2} Q_1'^2 = \beta,$$

$$\frac{1}{\cos^2 q_2}\beta + \frac{1}{2} Q_2'^2 - g \sin q_2 = h;$$

d'où l'on tire, puisque ces équations ne renferment chacune qu'une seule variable :

$$Q_1 = q_1 \sqrt{2\beta},$$

$$Q_2 = \int dq_2 \sqrt{2h + 2g \sin q_2 - \frac{2\beta}{\cos^2 q_2}}.$$

Par conséquent, l'expression :

$$S = q_1 \sqrt{2\beta} + \int dq_2 \sqrt{2h + 2g \sin q_2 - \frac{2\beta}{\cos^2 q_2}} + \gamma,$$

sera une solution complète de l'équation aux dérivées partielles.

Les intégrales du problème seront alors :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = k,$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t - t_0,$$

ou bien :

$$k = \frac{q_1}{\sqrt{2\beta}} - \int \frac{dq_2}{\cos^2 q_2 \sqrt{2h + 2g \sin q_2 - \frac{2\beta}{\cos^2 q_2}}},$$

$$t - t_0 = \int \frac{dq_2}{\sqrt{2h + 2g \sin g_2 - \frac{2\beta}{\cos^2 q_2}}}.$$

65. *Mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse des carrés des distances, le point se mouvant dans un plan passant par les deux centres.*

Prenons le centre O pour origine de deux axes rectangulaires, et soient a, b les coordonnées du second centre C. Le point mobile m est attiré vers le centre O par une force $\frac{\mu_1}{q_1^2}$, et par le centre C par une force $\frac{\mu_2}{q_2^2}$, en posant $Om = q_1$, et $Cm = q_2$.

La fonction de force est donc :

$$U = \frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2}.$$

La demi-somme des forces vives T a pour valeur :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2).$$

Cherchons à exprimer T en fonction des variables q_1, q_2, et de leurs dérivées q_1', q_2'. On a :

$$x^2 + y^2 = q_1^2, \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = q_2^2;$$

d'où :

$$xx' + yy' = q_1q_1', \quad (x-a)x' + (y-b)y' = q_2q_2'.$$

On en tire :

$$x' = \frac{q_1q_1'(y-b) - q_2q_2'y}{ay - bx}, \quad y' = \frac{q_2q_2'x - q_1q_1'(x-a)}{ay - bx}.$$

Par conséquent,

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{q_1^2q_2^2q_2'^2 + q_1^2q_2^2q_1'^2 - 2q_1q_2q_1'q_2'\left\{y(y-b) + x(x-a)\right\}}{(ay-bx)^2};$$

or, si nous désignons par l la distance OC, on a :

$$2\left[y(y-b) + x(x-a)\right] = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by = q_1^2 + q_2^2 - l^2,$$

et, par suite,

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{q_1^2q_2^2q_2'^2 + q_1^2q_2^2q_1'^2 - q_1q_2q_1'q_2'(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4A^2},$$

puisque l'on a :

$$2A = ay - bx,$$

A étant l'aire du triangle OCm.

Mais, on a aussi :

$$A^2 = \frac{1}{16}(q_1 + q_2 + l)(q_1 + q_2 - l)(q_1 + l - q_2)(q_2 + l - q_1)$$
$$= \frac{1}{16}\left\{4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)\right\};$$

d'où :

$$T = 2\,\frac{q_1^2q_2^2(q_1'^2 + q_2'^2) - q_1q_2q_1'q_2'(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2}.$$

C'est la valeur de T en fonction de q_1, q_2, q_1', q_2'.

Si nous posons :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'},$$

nous aurons :

$$p_1 = 2\,\frac{2q_1^2q_2^2q_1' - q_1q_2q_2'(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2},$$

$$p_2 = 2\,\frac{2q_1^2q_2^2q_2' - q_1q_2q_1'(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2}.$$

En représentant le dénominateur par D, il vient :

$$q_1' = \frac{Dp_1q_1^2q_2^2 + \frac{Dp_2}{2}q_1q_2(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^4q_2^4 - q_1^2q_2^2(q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2},$$

$$q_2' = \frac{Dp_2q_1^2q_2^2 + \frac{Dp_1}{2}q_1q_2(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^4q_2^4 - q_1^2q_2^2(q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2},$$

ou bien, en observant que $D = 4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2$ est facteur commun aux deux termes, et divisant par $q_1^2q_2^2$:

$$q_1' = p_1 + \frac{p_2}{2q_1q_2}(q_1^2 + q_2^2 - l^2),$$

$$q_2' = p_2 + \frac{p_1}{2q_1q_2}(q_1^2 + q_2^2 - l^2).$$

Substituant ces valeurs dans T, nous aurons T en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2 :

$$T = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + p_2^2 + \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}(q_1^2 + q_2^2 - l^2)\right].$$

La fonction de force U ne renfermant pas explicitement le temps, l'équation de laquelle dépend la solution du problème est :

$$T - U = h,$$

en remplaçant dans T les quantités p_1, p_2, respectivement par $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}$. On obtient ainsi l'équation aux dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial q_2}\cdot\frac{q_1^2 + q_2^2 - l^2}{q_1 q_2} = 2\left(\frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2}\right) + 2h. \quad \text{(A)}$$

Remarque. — On peut obtenir cette équation de la manière suivante :

L'équation $T - U = h$ nous donne, en coordonnées rectangulaires :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2} + h, \quad \text{(B)}$$

q_1, q_2 étant des fonctions de x et de y.

Transformons cette équation de manière à prendre q_1, q_2 pour variables indépendantes. Nous aurons :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{x}{q_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} + \frac{x-a}{q_2}\frac{\partial S}{\partial q_2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{y}{q_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} + \frac{y-b}{q_2}\frac{\partial S}{\partial q_2},$$

et en substituant dans l'équation précédente (B), on trouve facilement l'équation (A).

Il s'agit maintenant de trouver une solution complète de l'équation (A), renfermant une constante arbitraire, outre la constante additive.

Or, on peut la mettre sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned}&q_1q_2\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2\right]+\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial q_2}(q_1^2+q_2^2-l^2)\\&=2\mu_1q_2+2\mu_2q_1+2hq_1q_2;\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{C})$$

posons :

$$q_1+q_2=f,\quad q_1-q_2=g,$$

d'où :

$$q_1=\frac{f+g}{2},\quad q_2=\frac{f-g}{2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_1}=\frac{\partial S}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1}+\frac{\partial S}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial q_1}=\frac{\partial S}{\partial f}+\frac{\partial S}{\partial g},$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2}=\frac{\partial S}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_2}+\frac{\partial S}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial q_2}=\frac{\partial S}{\partial f}-\frac{\partial S}{\partial g}.$$

L'équation (C) nous donne alors la suivante :

$$(f^2-l^2)\left(\frac{\partial S}{\partial f}\right)^2+(l^2-g^2)\left(\frac{\partial S}{\partial g}\right)^2=\mu_1f+\mu_2f+\frac{h}{2}f^2-\mu_1g+\mu_2g-\frac{h}{2}g^2.$$

Pour trouver une solution de cette équation, nous poserons $S=F+G$, F et G étant deux fonctions respectivement de f et g, qui seront déterminées par les équations :

$$(f^2-l^2)\,F'^2=(\mu_1+\mu_2)f+\frac{hf^2}{2}+\beta,$$

$$(l^2-g^2)\,G'^2=(\mu_2-\mu_1)g-\frac{h}{2}g^2-\beta,$$

et nous aurons :

$$S=\int\frac{\sqrt{(\mu_1+\mu_2)f+\dfrac{hf^2}{2}+\beta}}{\sqrt{f^2-l^2}}\,df$$
$$+\int\frac{\sqrt{(\mu_2-\mu_1)g-\dfrac{hg^2}{2}-\beta}}{\sqrt{l^2-g^2}}\,dg+C.$$

Les intégrales du problème sont alors :

$$\frac{\partial S}{\partial\beta}=\gamma,\quad\frac{\partial S}{\partial h}=t-t_0,$$

et l'on voit que la solution dépend des fonctions elliptiques.

X.

Théorème de M. Darboux.

66. Le premier théorème de Jacobi (n° **41**) peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant donnée l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t_1, q_1, \dots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{1}$$

remplaçons dans la fonction H *les* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ *par* p_i, *et intégrons le système des* 2k *équations différentielles ordinaires :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{2}$$

L'intégration de ces équations (2) *nous donnera les variables* p_i, q_i *en fonction de* t *et des valeurs initiales* p_i^0, q_i^0 *des* p_i, q_i *pour* $t = t_0$.

Formons ensuite l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \int_{t_0}^{t} \left(\sum p_i \frac{\partial q_i}{dt} - H\right) dt = \int_{t_0}^{t} \left(\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right) dt.$$

Nous pourrons exprimer V *en fonction de* t *et des* 2k *quantités* q_i^0, p_i^0; *mais des* k *formules qui donnent* $q_1, q_2, \dots q_k$, *on peut tirer* $p_1^0, p_2^0, \dots p_k^0$, *en fonction de* $t, q_1, q_2, \dots q_k, q_1^0, \dots q_k^0$, *et par suite exprimer* V *en fonction des* 2k+1 *quantités :*

$$t, q_1, q_2, \dots q_k, q_1^0, \dots q_k^0.$$

La fonction V *ainsi obtenue sera une intégrale, contenant* k *constantes arbitraires* $q_1^0, q_2^0, \dots q_k^0$, *de l'équation aux dérivées partielles* (1), *et alors, les intégrales du système* (2) *pourront être mises sous la forme :*

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i. \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0.$$

La démonstration de Jacobi repose sur la considération suivante :

Supposons que l'on fasse varier infiniment peu les valeurs des constantes qui figurent dans les expressions des p_i et des q_i; la variation de V, considérée comme fonction de ces arbitraires, est donnée par la formule :

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0.$$

Or, si l'on exprime V en fonction des q_i et q_i^0, on a aussi :

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0.$$

De ces deux formules on déduit la suivante :

$$\sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} - p_i\right) \delta q_i + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i^0} + p_i^0\right) \delta q_i^0 = 0,$$

de laquelle Jacobi conclut les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = - p_i^0.$$

Mais, comme l'a remarqué M. Mayer, cette conclusion n'est exacte que si les variations δq_i et δq_i^0 sont indépendantes les unes des autres, comme le sont les δq_i^0 et les δp_i^0. Cherchons donc quelle est la condition qui doit être vérifiée pour que cela ait lieu, c'est-à-dire pour que le théorème de Jacobi soit applicable.

On a :

$$q_i = f(t, q_i^0, p_i^0);$$

par suite, si les δq_i sont indépendants des δq_i^0, il vient :

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial p_1^0} \delta p_1^0 + \frac{\partial q_i}{\partial p_2^0} \delta p_2^0 + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial p_k^0} \delta p_k^0,$$

pour $i = 1, 2, \ldots k$.

Mais, les δp_i^0 sont indépendants les uns des autres, ce qui ne peut avoir lieu que si le déterminant des coefficients :

$$R = \sum \frac{\partial q_1}{\partial p_1^0} \frac{\partial q_2}{\partial p_2^0} \cdots \frac{\partial q_k}{\partial p_k^0},$$

est différent de zéro.

Mais, si R est différent de zéro, les q_i s'exprimeront en fonction des p_i^0 sans qu'il existe aucune équation de condition entre les q_i (n° **50**). Donc, si R est différent de zéro, il n'existe aucune équation de condition entre les q_i, et par conséquent les δq_i sont indépendants les uns des autres.

Donc, la condition pour que les δq_i soient indépendants les uns des autres et indépendants des δq_i^0, est que le déterminant R soit différent de zéro.

D'ailleurs, les p_i^0 peuvent être exprimés en fonction de t, des q_i et des q_i^0. Or, si l'on reprend les équations (2), les $2k$ constantes arbitraires des intégrales de ces équations pourront être exprimées en fonction des q_i^0 et des p_i^0; mais, les p_i^0 étant exprimés en fonction de t, q_i et q_i^0, il en résulte que les $2k$ constantes d'intégration peuvent être exprimées en fonction de t, q_i et q_i^0.

C'est ce qui arrivera lorsque la fonction H est telle que le déterminant :

$$R' = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_1} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} \cdots \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_k},$$

est différent de zéro. Car, en posant :

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = f_1, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = f_2, \ldots \frac{\partial H}{\partial p_k} = f_k,$$

on a :

$$R' = \sum \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial p_k}.$$

Or, si R′ est différent de zéro, les f_i s'exprimeront en fonction des p_i, sans qu'il existe aucune relation entre les f_i : ces fonctions f_i sont donc indépendantes les unes des autres (n° **50**). Par conséquent, les équations :

$$q_1' = f_1, \quad q_2' = f_2, \ldots q_k' = f_k,$$

ou, ce qui est la même chose, les équations :

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

sont compatibles, et serviront à déterminer les p_i en fonction de t, $q_1, \dots q_k, q'_1, \dots q'_k$. On en déduira donc pour les p_i des expressions de la forme :

$$p_i = fonct. (t, q_1, \dots q_k, q'_1, \dots q'_k);$$

par conséquent, $\frac{dp_i}{dt}$ est une fonction du second ordre, et les équations canoniques (2) nous donneront k équations du second ordre entre $t, q_1, \dots q_k$.

Mais, ces k équations du second ordre nous donneront k intégrales renfermant $2k$ constantes arbitraires, c'est-à-dire des relations entre t, $q_1, \dots q_k$ et les $2k$ constantes arbitraires. On pourra donc, en faisant $t = t_0$ dans ces k intégrales, en déduire k relations entre les $2k$ constantes arbitraires et $q_1^0, \dots q_k^0$. Nous aurons ainsi $2k$ équations entre les $2k$ constantes, les q_i et les q_i^0, et, par suite, nous pourrons déterminer ces $2k$ constantes arbitraires en fonction de t, q_i, q_i^0. Donc, si R' est différent de zéro, on peut déterminer les $2k$ constantes d'intégration en fonction de t, q_i, q_i^0.

Au contraire, si $R' = 0$, les fonctions f_i ne sont pas indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire qu'il existera entre les fonctions f_i une ou plusieurs relations indépendantes des p_i. On pourra donc éliminer un certain nombre des p_i entre les équations :

$$q'_1 = f_1, \quad q'_2 = f_2, \dots q'_k = f_k,$$

et l'on obtiendra ainsi entre t, q_i, q'_i un certain nombre de relations sans constantes arbitraires. Il en résultera, par conséquent, que les expressions des q_i ne renfermeront plus $2k$ constantes arbitraires.

Ainsi donc, la condition pour que les q_i et les q_i^0 soient indépendants les uns des autres, et, par conséquent, les δq_i et les δq_i^0, est que le déterminant R' soit différent de zéro. Si $R' = 0$, les q_i et les q_i^0 ne sont pas indépendants les uns des autres, et alors on ne peut plus écrire les $2k$ équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0,$$

et, par conséquent, la méthode de Jacobi est en défaut.

M. Mayer a remplacé cette méthode par une autre qui ne présente pas les mêmes objections, et que nous exposerons plus loin.

67. Mais, M. Darboux (*) a montré qu'en faisant subir une modification à la méthode de Jacobi, on peut la rendre applicable dans tous les cas.

Supposons que l'on ait intégré les équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{2}$$

c'est-à-dire que l'on ait trouvé $2k$ relations entre les quantités t, q_i, p_i, q_i^0 et p_i^0.

Supposons que n de ces relations puissent s'exprimer indépendamment des p_i, p_i^0, et soient :

$$\left.\begin{array}{l} F_1(t, q_1, \dots q_k, q_1^0, \dots q_k^0) = 0, \\ F_2(t, q_1, \dots q_k, q_1^0, \dots q_k^0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_n(t, q_1, \dots q_k, q_1^0, \dots q_k^0) = 0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

ces n équations.

On peut, de ces n équations, tirer les valeurs de n des quantités q_i^0, par exemple $q_1^0, \dots q_n^0$, et l'on aura :

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = f_1(t, q_1, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0) - q_1^0 = 0, \\ F_2 = f_2(t, q_1, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0) - q_2^0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n = f_n(t, q_1, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0) - q_n^0 = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

(*) *Comptes rendus*, 18 janvier 1875, p. 160.

Alors les $2k$ quantités q_i, q_i^0 ne peuvent plus être considérées comme indépendantes les unes des autres, n d'entre elles pouvant être exprimées en fonction des autres.

Considérons maintenant, comme dans la méthode de Jacobi, l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \left(\sum p_i q_i' - H\right) dt,$$

et exprimons la fonction V en fonction des q_i, q_i^0. Nous aurons, comme dans la méthode de Jacobi :

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0,$$

et

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0,$$

d'où l'on tire, comme précédemment :

$$\sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} - p_i\right) \delta q_i + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i^0} + p_i^0\right) \delta q_i^0 = 0. \tag{5}$$

Or, les δq_i et δq_i^0 n'étant pas indépendants, on ne peut pas égaler les coefficients à zéro. Mais on a, entre ces variations, les n relations :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_1^0} \delta q_1^0 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial q_k^0} \delta q_k^0 = 0, \\
\frac{\partial F_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F_2}{\partial q_1^0} \delta q_1^0 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial q_k^0} \delta q_k^0 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial F_n}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F_n}{\partial q_1^0} \delta q_1^0 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial q_k^0} \delta q_k^0 = 0;
\end{gathered}$$

par conséquent, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ des multiplicateurs, et raisonnant comme d'ordinaire, il viendra :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} - p_i + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i^0} + p_i^0 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i^0} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i^0} = 0. \tag{7}$$

Ces équations, au nombre de $2k$, jointes aux équations (4), permettront de déterminer les $2k+n$ quantités :

$$q_1^0, \dots q_n^0, p_1^0, \dots p_k^0, p_1, \dots p_k,$$

en fonction des $2k$ quantités :

$$q_1, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n.$$

Elles donneront donc les intégrales des équations (2).

Or, ces $2k$ quantités en fonction desquelles toutes les autres sont déterminées sont indépendantes les unes des autres ; par conséquent, il ne peut exister aucune relation entre ces $2k$ quantités, et, par suite, *toute relation où elles entreront seules devra être identiquement satisfaite.*

Cela posé, suivons pas à pas la marche de Jacobi. Nous aurons :

$$\frac{dV}{dt} = p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \dots + p_k \frac{dq_k}{dt} - H;$$

or,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}.$$

Par suite,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = p_1 \frac{dq_1}{dt} + \dots + p_k \frac{dq_k}{dt} - H.$$

Remplaçant les $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ par leurs valeurs déduites de l'équation (6) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} - \dots - \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i},$$

on a, en supprimant les termes semblables :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &- \lambda_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \right) \\ &- \lambda_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \right) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &- \lambda_n \left(\frac{\partial F_n}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \right) = -H, \end{aligned}$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \lambda_\alpha \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \right) = - H(t, q_i, p_i).$$

Or, de l'équation :

$$F_\alpha(t, q_1, \ldots q_k, q_\alpha^0, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0) = 0,$$

on tire :

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = 0.$$

Par suite, le coefficient de λ_α est égal à $-\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}$, et l'on a :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + H(t, q_i, p_i) = 0.$$

Si maintenant nous remplaçons dans H, p_i par sa valeur (6) :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i},$$

il viendra :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial t} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial t}$$
$$+ H\left(t, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i}\right) = 0,$$

ou bien, si l'on observe que les dérivées de F_α qui entrent dans cette équation sont précisément les mêmes que celles de f_α :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{dt} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{dt} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial t} \\ &+ H\left(t, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial q_i}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Actuellement, si l'on imagine qu'au moyen des équations (4) on ait éliminé de la fonction V les quantités $q_1^0, \ldots q_n^0$, l'équation (8) a lieu entre les $2k$ arbitraires

$$q_1, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0, \lambda_1, \ldots \lambda_n.$$

Il en résulte, d'après ce que nous avons dit plus haut, que *cette équation* (8) *sera identiquement satisfaite.*

Or, si l'on considère $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ comme des constantes, l'équation (8) exprime que la fonction :

$$V + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n,$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = 0;$$

elle sera, par conséquent, une intégrale de cette équation, et nous aurons le théorème suivant qui est dû à M. Darboux :

Théorème. — *Étant données les équations différentielles ordinaires :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

supposons qu'on les ait intégrées, et que des intégrales on puisse déduire n *relations distinctes, et* n *seulement, entre les variables* $q_1, q_2, \ldots q_k$, *et leurs valeurs initiales. On mettra ces relations sous la forme :*

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_1(t, q_1, q_2, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0) - q_1^0 = 0, \\
F_2 &= f_2(t, q_1, q_2, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0) - q_2^0 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_n &= f_n(t, q_1, q_2, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0) - q_n^0 = 0,
\end{aligned}$$

et l'on calculera l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt} - H\right) dt.$$

Cette intégrale pourra toujours s'exprimer en fonction des variables $q_1, q_2, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0$. *Cette expression de* V *étant obtenue, les intégrales générales du système des équations différentielles pourront être mises sous la forme :*

$$\begin{aligned}
p_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i}, \\
p_i^0 + \frac{\partial V}{\partial q_i^0} &= -\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i^0} - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_i^0} - \cdots - \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i^0},
\end{aligned}$$

et, en outre, la fonction :

$$V + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n,$$

dans laquelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *sont des constantes arbitraires, sera une intégrale de l'équation différentielle partielle :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H + 0,$$

où l'on a remplacé dans H, p_i *par* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$.

XI.

Théorème de M. Mayer.

68. Soit $H(t, q_1, \ldots q_k, p_1, \ldots p_k)$ une fonction donnée des $2k+1$ variables t, q_i, p_i, et soient données entre ces variables les $2k$ équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{1}$$

Supposons que l'on ait intégré complètement ces $2k$ équations; on aura ainsi $2k$ intégrales renfermant $2k$ constantes arbitraires. Exprimons ces $2k$ constantes en fonction des valeurs initiales q_i^0, p_i^0, que prennent les variables q_i, p_i, pour la valeur choisie arbitrairement t_0 de t.

Nous aurons ainsi les équations :

$$q_i = \text{fonct.}\,(t, t_0, q_1^0, q_2^0, \ldots q_k^0, p_1^0, \ldots p_k^0),$$
$$p_i = \text{fonct.}\,(t, t_0, q_1^0, q_2^0, \ldots q_k^0, p_1^0, \ldots p_k^0).$$

Nous les représenterons par :

$$\left.\begin{aligned} q_i &= [q_i], \\ p_i &= [p_i], \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où les $[q_i]$ et les $[p_i]$ sont des fonctions déterminées de t, t_0, q_i^0, p_i^0, telles que, pour $t = t_0$, elles se réduisent respectivement à q_i^0 et p_i^0.

Nous emploierons dorénavant les crochets pour indiquer les résultats que l'on obtient en remplaçant p_i, q_i par les valeurs (2).

Il est d'abord évident que le déterminant :

$$R = \sum \frac{\partial [q_1]}{\partial q_1^0} \frac{\partial [q_2]}{\partial q_2^0} \cdots \frac{\partial [q_k]}{\partial q_k^0},$$

qui, pour $t = t_0$, se réduit à l'unité, ne peut jamais être nul.

Il en résulte donc que les équations :

$$[q_i] = q_i, \tag{3}$$

sont compatibles, et, par suite, en les résolvant par rapport aux k quantités q_i^0, on en déduira les valeurs de ces k quantités.

Cela établi, posons :

$$V = \sum_{i=1}^{i=k} q_i^0 p_i^0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=1}^{i=k} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right\} dt, \tag{4}$$

et calculons la fonction V en fonction de :

$$t,\ t_0,\ q_1^0, \ldots\ q_k^0,\ p_1^0, \ldots\ p_k^0,$$

ce qui se fera évidemment au moyen des équations (2).

Nous aurons donc, en vertu des notations adoptées :

$$V = \sum q_i^0 p_i^0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] - [H] \right\} dt. \tag{4'}$$

Désignons par c une quelconque des constantes q_i^0, p_i^0, et nous aurons, en différentiant par rapport à c :

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \sum q_i^0 p_i^0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] - [H] \right\} dt.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial}{\partial c}\left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] - [H] \right\} = \sum \left\{ \frac{\partial [p_i]}{\partial c} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] + [p_i] \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] \right\} - \frac{\partial}{\partial c}\ [H].$$

Mais [H] n'est autre que la fonction primitive H dans laquelle on a remplacé les p_i, q_i, en fonction des p_i^0, q_i^0; nous aurons donc :

$$\frac{\partial}{\partial c}[\mathrm{H}] = \sum \left\{ \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} + \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] \frac{\partial [p_i]}{\partial c} \right\} \ (^*);$$

par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial c}\left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] - [\mathrm{H}] \right\} = \sum \frac{\partial [p_i]}{\partial c} \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] + \sum [p_i] \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right]$$
$$- \sum \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} - \sum \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] \frac{\partial [p_i]}{\partial c}$$
$$= \sum \left\{ [p_i] \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] - \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} \right\}.$$

D'autre part, en vertu des équations (1), on a :

$$\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right] = -\frac{d[p_i]}{dt},$$
$$\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] = \frac{\partial}{\partial c}\frac{d[q_i]}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial [q_i]}{\partial c};$$

par suite,

$$\frac{\partial}{\partial c}\left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] - [\mathrm{H}] \right\} = \sum \left\{ [p_i] \frac{d}{dt}\frac{\partial [q_i]}{\partial c} + \frac{d[p_i]}{dt} \cdot \frac{\partial [q_i]}{\partial c} \right\}$$
$$= \frac{d}{dt} \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c}.$$

En intégrant entre les limites t_0 et t, il vient, pour le second terme du second membre de $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial c}$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial c}\left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] - [\mathrm{H}] \right\} dt = \int_{t_0}^{t} d \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c}$$
$$= \left\{ \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} \right\}_{t_0}^{t} = \sum \left\{ [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} - p_i^0 \frac{\partial q_i^0}{\partial c} \right\},$$

(*) On doit, dans le second membre de cette formule, renfermer toutes les quantités entre crochets, puisque ce second membre doit comme [H] être exprimé en fonction des q_i^0, p_i^0.

en observant que, pour $t = t_0$, $[p_i]$ et $[q_i]$ se réduisent, par hypothèse, à p_i^0 et q_i^0.

On a donc enfin :

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \sum q_i^0 p_i^0 + \sum \left\{ [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} - p_i^0 \frac{\partial q_i^0}{\partial c} \right\}.$$

Or, si, dans cette dernière formule, on fait $c = q_r^0$, il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial q_r^0} = p_r^0 + \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial q_r^0} - p_r^0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial q_r^0} = \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial q_r^0}.$$

Si, dans la même formule, on fait $c = p_r^0$, on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial p_r^0} = q_r^0 + \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial p_r^0}.$$

D'autre part, si dans la fonction V, exprimée en fonction de t, t_0, q_1^0, ... q_k^0, p_1^0, ... p_k^0, on remplace les q_i^0 par leurs valeurs tirées des équations (3), elle devient une fonction de t, t_0, q_1, ... q_k, p_1^0, ... p_k^0, que nous pouvons représenter par (V). Il est d'ailleurs évident que la fonction (V) se réduit inversement à la fonction V primitive, si l'on remplace dans (V) les quantités q_1, ... q_k par leurs valeurs (3), c'est-à-dire par :

$$q_i = [q_i].$$

Par suite, on a, en appliquant le théorème des fonctions de fonctions :

$$\frac{\partial V}{\partial q_r^0} = \sum \left[\frac{\partial (V)}{\partial q_i} \right] \frac{\partial [q_i]}{\partial q_r^0} \text{ (*)},$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_r^0} = \left[\frac{\partial (V)}{\partial p_r^0} \right] + \sum \left[\frac{\partial (V)}{\partial q_i} \right] \frac{\partial [q_i]}{\partial p_r^0}.$$

(*) Les crochets des seconds membres indiquent que ces seconds membres doivent être exprimés comme les seconds membres des valeurs trouvées plus haut pour $\frac{\partial V}{\partial q_r^0}$, $\frac{\partial V}{\partial p_r^0}$, en fonction des p_i^0, q_i^0.

En comparant ces valeurs de $\frac{\partial V}{\partial q_r^0}$, $\frac{\partial V}{\partial p_r^0}$ avec les valeurs trouvées plus haut, on en conclut que l'on doit avoir identiquement :

$$\sum \left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i} - p_i\right] \frac{\partial[q_i]}{\partial q_r^0} = 0, \tag{5}$$

$$\sum \left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i} - p_i\right] \frac{\partial[q_i]}{\partial p_r^0} + \left[\frac{\partial(V)}{\partial p_r^0}\right] - q_r^0 = 0, \tag{6}$$

pour $r = 1, 2, \ldots k$.

Les équations (5), au nombre de k, sont linéaires et homogènes par rapport aux k quantités :

$$\left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i} - p_i\right];$$

or, le déterminant des coefficients de ces équations est différent de zéro, d'après ce que nous avons vu précédemment ; par conséquent, le système des équations (5) ne peut exister que si l'on a séparément :

$$\left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i} - p_i\right] = 0, \tag{7}$$

pour $i = 1, 2, \ldots k$.

Le système des équations (6) nous donne alors :

$$\left[\frac{\partial(V)}{\partial p_r^0}\right] - q_r^0 = 0, \tag{8}$$

pour $r = 1, 2, \ldots k$.

Il résulte de là que les solutions complètes :

$$\left.\begin{aligned} q_i &= [q_i], \\ p_i &= [p_i], \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

des équations (1) doivent satisfaire identiquement aux $2k$ équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(V)}{\partial q_i} &= p_i, \\ \frac{\partial(V)}{\partial p_i^0} &= q_i^0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

En effet, les expressions (7) et (8) doivent être des identités, c'est-à-dire que, par la substitution dans les équations (9) des solutions complètes (2), ces équations (9) doivent devenir les identités (7) et (8).

Les équations (9) ne sont pas elles-mêmes des identités : en effet, puisque (V) est une fonction de t, t_0, q_1, ... q_k, p_1^0, ... p_k^0, il en résulte que les premiers membres des équations (9) ne renferment ni les p_i, ni les q_i^0, et comme les seconds membres ne renferment que les p_i et les q_i^0, il s'ensuit que les équations (9) ne sont pas des identités; elles ne le deviennent que par la substitution des p_i et des q_i tirées des équations (2).

Ces équations (9) sont donc équivalentes aux équations (2), et, par conséquent, ce sont des intégrales des équations (1). D'ailleurs, le nombre de ces équations est $2k$, et elles renferment $2k$ constantes arbitraires q_1^0, ... q_k^0, p_1^0, ... p_k^0; enfin, aucune de ces équations (9) ne peut être une conséquence des autres; car, dans chacune d'elles, il entre une quantité p_i ou q_i^0 qui ne se trouve pas dans les autres.

Il s'ensuit donc que les équations (9) forment un système d'intégrales complètes des équations (1).

Cherchons maintenant l'équation différentielle partielle à laquelle satisfait la fonction (V).

A cet effet, de même que tantôt nous avons trouvé $\frac{\partial V}{\partial q_r^0}$ et $\frac{\partial V}{\partial p_r^0}$ de deux manières différentes, nous allons former $\frac{dV}{dt}$ de deux manières différentes.

De l'équation (4') on tire :

$$\frac{dV}{dt} = \left[\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right];$$

d'autre part, si l'on substitue dans (V) à la place de q_1, ... q_k, leurs valeurs (3), cette fonction devient V. Par conséquent, nous aurons, en vertu du théorème des fonctions de fonctions :

$$\frac{dV}{dt} = \left[\frac{\partial(V)}{\partial t}\right] + \sum \left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i}\right] \frac{d[q_i]}{dt},$$

ou bien, à cause de la première équation (9) et de la première équation (1) :

$$\frac{dV}{dt} = \left[\frac{\partial(V)}{\partial t} + \sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\right].$$

En comparant les deux valeurs de $\frac{dV}{dt}$, on obtient l'identité :

$$\left[\frac{\partial(V)}{\partial t} + H\right] = 0, \tag{10}$$

c'est-à-dire que, par la substitution dans l'équation :

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} + H = 0, \tag{11}$$

des solutions complètes :

$$\left.\begin{aligned} q_i &= [q_i], \\ p_i &= [p_i], \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

cette équation (11) doit devenir l'identité (10).

On conclut de là que les solutions complètes (2) des équations (1) doivent satisfaire identiquement à l'équation (11). Or, les solutions complètes (2) des équations (1) sont équivalentes aux équations (9).

Donc, si (V) est connue, les équations (9) satisferont à l'équation :

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} + H = 0 \tag{11}$$

Il s'ensuit que, si, dans cette dernière équation, on remplace les p_i par $\frac{\partial(V)}{\partial q_i}$, en vertu de la première des équations (9), on aura l'équation différentielle partielle suivante :

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots q_k, \frac{\partial(V)}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial(V)}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{12}$$

à laquelle doit satisfaire la fonction (V).

Or, si, à cette fonction (V) qui satisfait à (12), on ajoute une constante additive, on aura une solution complète de cette équation (12). En effet, cette solution renferme k constantes arbitraires $p_1^0, \dots p_k^0$, et ces constantes ne peuvent pas être éliminées entre les quotients différentiels partiels $\frac{\partial(V)}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial(V)}{\partial q_k}$, car alors une des k premières équations (9) serait une conséquence des autres, ce qui est impossible. Nous aurons donc le théorème suivant qui est dû à M. Mayer (*) :

THÉORÈME. — *Étant donnée l'équation différentielle partielle :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{A}$$

on remplace dans la fonction H, *les* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ *par* p_i, *et l'on forme les* $2k$ *équations différentielles ordinaires :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{B}$$

On intègre ce système, et l'on exprime les $2k$ *constantes d'intégration en fonction des valeurs initiales* p_i^0, q_i^0 *des* p_i, q_i *pour* $t = t_0$. *On substitue ces solutions dans l'expression :*

$$\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H,$$

et l'on détermine l'intégrale :

$$V = \sum q_i^0 p_i^0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right\} dt,$$

en fonction de t, t_0, q_i^0, p_i^0.

Cela posé, si de la fonction V *on élimine les* q_i^0 *au moyen des valeurs des* q_i *tirées des intégrales des équations* (B), *la fonction résultante* (V) *sera une fonction de* $t, q_1, \dots q_k, p_1^0, \dots p_k^0$.

La fonction :

$$V = (V) + const.,$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. III.

sera une solution complète de l'équation differentielle partielle (A), *et les* 2k *équations :*

$$\frac{\partial(V)}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial(V)}{\partial p_i^0} = q_i^0,$$

seront les intégrales complètes du système (B) (*).

XII.

Théorème de M. Liouville.

69. Nous allons d'abord démontrer un théorème de M. Donkin (**) dont on fait un fréquent usage dans les théories de l'intégration des équations canoniques, et de l'intégration des équations différentielles particlles du premier ordre.

Ce théorème exige l'emploi de notations nouvelles introduites par Poisson, et par M. Donkin, et que nous devons faire connaître.

Si l'on suppose que α et β sont des fonctions des quantités $p_1, p_2, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$, on doit à Poisson la notation suivante (***) :

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \beta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \right).$$

M. Donkin (iv), de son côté, a introduit une notation symbolique pour représenter la quantité entre parenthèses.

Il pose :

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(q_i, p_i)} = \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \beta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \beta}{\partial q_i},$$

(*) On peut encore consulter sur cette question une Note de M. Bertrand, insérée dans les *Comptes rendus* du 20 mars 1876, p. 641.

(**) *Philosophical Transactions,* 1854, p. 83.

(***) *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires* (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 15e Cahier, p. 281).

(iv) *Philosophical Transactions,* 1854, p. 72.

et l'on a ainsi :

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(q_i, p_i)}.$$

70. Cela posé, supposons que l'on ait n équations :

$$a_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dans lesquelles $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont des constantes arbitraires, les fonctions des seconds membres pouvant renfermer des quantités quelconques autres que les a_i.

Ces équations pourront servir à déterminer $p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$, et des constantes, et nous nous proposons de démontrer que la *condition d'intégrabilité de l'expression :*

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 + \cdots + p_ndq_n,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

n'est autre que :

$$(a_i, a_k) = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\varphi_i, \varphi_k) = 0.$$

En effet, si dans l'expression :

$$a_\mu = \varphi_\mu(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

on remplace $p_1, p_2, \ldots p_n$ par leurs valeurs en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, a_2, \ldots a_n$, on aura une identité; par suite, en différentiant par rapport à q_i, il vient :

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial q_i} + \frac{\partial a_\mu}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial a_\mu}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0;$$

de même,

$$\frac{\partial a_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial a_\nu}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial a_\nu}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0.$$

Multipliant la première par $\frac{\partial a_\nu}{\partial p_i}$, la seconde par $\frac{\partial a_\mu}{\partial p_i}$, et retranchant, on trouve :

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial q_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial a_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_k} - \frac{\partial a_\mu}{\partial p_k}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_i}\right),$$

ou bien, d'après la notation de M. Donkin,

$$\frac{\partial(a_\mu, a_\nu)}{\partial(q_i, p_i)} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\frac{\partial(a_\mu, a_\nu)}{\partial(p_i, p_k)}.$$

Faisons la somme des expressions analogues que l'on obtiendrait en donnant à i les valeurs 1, 2, ... n ; le coefficient de $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}$ étant le même que celui de $\frac{\partial p_k}{\partial q_i}$, pris en signe contraire, nous aurons :

$$(a_\mu, a_\nu) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)\frac{\partial(a_\mu, a_\nu)}{\partial(p_i, p_k)}. \tag{1}$$

De cette formule on conclut déjà que la *condition nécessaire* pour avoir :

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_k},$$

pour toutes les valeurs de i et k égales à 1, 2, ... n, c'est que les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations :

$$(a_\mu, a_\nu) = 0,$$

soient vérifiées pour les mêmes valeurs de μ et ν.

Pour démontrer que *cette condition est suffisante*, multiplions les deux membres de l'équation (1) par $\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(a_\mu, a_\nu)}$, et faisons la somme pour toutes les valeurs de μ et ν égales à 1, 2, ... n. Il viendra :

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(a_\mu, a_\nu)\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(a_\mu, a_\nu)}\\ &+\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(a_\mu, a_\nu)}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial(a_\mu, a_\nu)}{\partial(p_i, p_k)} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Le coefficient de $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i}$ est évidemment :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left(\frac{\partial p_r}{\partial a_\mu}\frac{\partial p_s}{\partial a_\nu} - \frac{\partial p_s}{\partial a_\mu}\frac{\partial p_r}{\partial a_\nu}\right)\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_k} - \frac{\partial a_\mu}{\partial p_k}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_i}\right). \tag{3}$$

Il est facile de simplifier ce coefficient. En effet, puisque p_r et p_s sont des fonctions de $a_1, a_2, \ldots a_n$, on a :

$$\frac{\partial p_r}{\partial p_i} = \frac{\partial p_r}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_r}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial p_r}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial p_k} = \frac{\partial p_r}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \frac{\partial p_r}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial p_r}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k},$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial p_i} = \frac{\partial p_s}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_s}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial p_s}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial p_k} = \frac{\partial p_s}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \frac{\partial p_s}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial p_s}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k}.$$

La somme double (3) est une somme de produits de deux déterminants. En appliquant les règles de la multiplication et de l'addition des déterminants, on trouve que cette somme double se réduit au déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_r}{\partial p_i} & \frac{\partial p_r}{\partial p_k} \\ \frac{\partial p_s}{\partial p_i} & \frac{\partial p_s}{\partial p_k} \end{vmatrix} = \frac{\partial p_r}{\partial p_i}\frac{\partial p_s}{\partial p_k} - \frac{\partial p_r}{\partial p_k}\frac{\partial p_s}{\partial p_i} = \frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(p_i, p_k)}.$$

L'équation (2) se réduit donc à la suivante :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\tau=1}^{\tau=n}(a_\mu, a_\tau)\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(a_\mu, a_\tau)} + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(p_i, p_k)} = 0.$$

Mais, on voit facilement que, si l'on développe le second terme, il n'y a que le coefficient de $\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}$ qui ne soit pas nul, et il se réduit à l'unité. En effet, le coefficient de $\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}$ s'obtient en faisant $i = r$, $k = s$, ce qui nous donne pour ce coefficient :

$$\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(p_r, p_s)} = \frac{\partial p_r}{\partial p_r}\frac{\partial p_s}{\partial p_s} - \frac{\partial p_r}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial p_r} = 1,$$

puisque :

$$\frac{\partial p_r}{\partial p_r} = 1, \quad \frac{\partial p_s}{\partial p_s} = 1, \quad \frac{\partial p_r}{\partial p_s} = 0, \quad \frac{\partial p_s}{\partial p_r} = 0.$$

Il est évident que si i et k sont différents de r et s, par exemple $i = r'$, $k = s'$, le coefficient de :

$$\frac{\partial p_{r'}}{\partial q_{s'}} - \frac{\partial p_{s'}}{\partial q_{r'}},$$

sera nul.

Nous aurons donc :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\mu, a_\nu) \frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(a_\mu, a_\nu)} + \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right) = 0,$$

ou bien, en remplaçant les lettres r et s par i et k :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\mu, a_\nu) \frac{\partial(p_i, p_k)}{\partial(a_\mu, a_\nu)} + \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0.$$

Il résulte de cette dernière formule que si l'on a :

$$(a_\mu, a_\nu) = 0,$$

pour toutes les valeurs de μ et ν égales à $1, 2, \ldots n$, on aura :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

pour toutes les valeurs de i et k égales à $1, 2, \ldots n$.

71. On en conclut le théorème suivant :

Théorème. — *Si les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *équations* :

$$(a_\mu, a_\nu) = 0,$$

sont vérifiées identiquement, les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, *en fonction de* $q_1, q_2, \ldots q_n$, *déduites des* n *équations :*

$$\varphi_1 = a_1, \ \varphi_2 = a_2, \ \ldots \ \varphi_n = a_n,$$

satisfont à la condition :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

en d'autres termes, ce sont les quotients différentiels d'une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$, *et l'expression :*

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n,$$

est une différentielle exacte.

72. Ce théorème étant démontré, revenons au problème de l'intégration des équations canoniques :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

H étant une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, ne renfermant pas explicitement t.

Nous avons vu (nº **17**) que l'*intégrale des forces vives :*

$$H = h,$$

est une intégrale de ces équations.

73. Ceci rappelé, démontrons le théorème suivant :

Théorème de M. Liouville. — *Si, par un moyen quelconque, on parvient à trouver* $n-1$ *autres intégrales des équations* (4), *savoir :*

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \ldots \quad \varphi_{n-1} = a_{n-1},$$

et si les premiers membres de ces équations sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, *ne contenant pas explicitement le temps, et satisfaisant à la condition :*

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i *et* k *égales à* 1, 2, ... n, *le problème sera résolu.*

Il suffira de résoudre les n *équations :*

$$H = h, \quad \varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \ldots \quad \varphi_{n-1} = a_{n-1}, \tag{5}$$

par rapport à $p_1, p_2, \ldots p_n$, *et de substituer ces valeurs dans l'expression :*

$$dV' = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - (\mathrm{H}) dt, \tag{6}$$

laquelle est alors une différentielle exacte. On intégrera cette expression, et l'on obtiendra les n *autres intégrales du problème en égalant à des constantes les dérivées de la fonction* V', *prises par rapport aux* n *premières constantes.*

Il est d'abord facile de voir que l'expression :

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - (\mathrm{H}) dt,$$

est une différentielle exacte, lorsque l'on substitue à $p_1, p_2, \ldots p_n$, leurs valeurs tirées des équations (2); en d'autres termes, que les conditions :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial (\mathrm{H})}{\partial q_i},$$

sont vérifiées, (H) désignant le résultat de la substitution de $p_1, p_2, \ldots p_n$ dans H.

Nous avons vu (n° **71**) que la condition :

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0,$$

équivaut à la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}.$$

Il nous reste donc à démontrer que l'on a aussi :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial (\mathrm{H})}{\partial q_i}.$$

Or, les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$ ayant été déterminées en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$ et des constantes, au moyen des équations (5), le premier membre de l'équation $\mathrm{H} = h$, qui est l'une de ces équations (5), devient, par la substitution de ces valeurs, identiquement égal à la constante h; par conséquent, on a identiquement :

$$(H) = h,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial(H)}{\partial q_1} = 0.$$

D'autre part, p_1 ne renfermant pas explicitement le temps, on a identiquement :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = 0,$$

et la seconde condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial(H)}{\partial q_1},$$

est satisfaite.

En intégrant l'expression (6), on a :

$$V' = V - ht, \tag{7}$$

V désignant l'intégrale de l'expression :

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n.$$

Cela posé, les n autres intégrales du problème sont données par les équations :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V'}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \varepsilon_1,\\
\frac{\partial V'}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \varepsilon_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial V'}{\partial \alpha_{n-1}} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} = \varepsilon_{n-1},\\
\frac{\partial V'}{\partial h} &= \frac{\partial V}{\partial h} - t = \varepsilon_n,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ étant des constantes arbitraires.

Il suffit pour s'en assurer de démontrer que les dérivées totales par rapport à t de ces équations se réduisent identiquement à zéro en vertu des équations (4).

Or, en désignant par i un quelconque des nombres $1, 2, \ldots n-1$, nous aurons :

$$\frac{d \cdot \dfrac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial a_i} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_n}}{\partial a_i} \frac{dq_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial a_i} = \frac{\partial (H)}{\partial a_i}.$$

Mais, comme (H) est identiquement égal à h, il en résulte que l'on a :

$$\frac{d \cdot \dfrac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = 0.$$

Si maintenant nous prenons la dérivée totale par rapport à t de la dernière des équations (8) :

$$\frac{\partial V'}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial h} - t = \alpha_n,$$

nous verrons que cette dérivée est aussi identiquement nulle, en vertu des équations (4). En effet, on a :

$$\frac{d \cdot \dfrac{\partial V'}{\partial h}}{dt} = \frac{d \left[\dfrac{\partial V}{\partial h} - t \right]}{dt} = -1 + \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial h}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial h}}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt}$$

$$= -1 + \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial h} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_n}}{\partial h} \frac{dq_n}{dt}$$

$$= -1 + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial h} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial h}$$

$$= -1 + \frac{\partial (H)}{\partial h} = 0.$$

La seconde partie du théorème est donc démontrée.

74. *Remarque I.* — Il n'est même pas nécessaire de déterminer la fonction V, donnée par l'équation :

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n). \tag{9}$$

En effet, si l'on prend la dérivée par rapport à a_μ de l'équation :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

il vient :

$$\frac{\partial \dfrac{\partial p_i}{\partial q_k}}{\partial a_\mu} = \frac{\partial \dfrac{\partial p_k}{\partial q_i}}{\partial a_\mu},$$

ou bien :

$$\frac{\partial \dfrac{\partial p_i}{\partial a_\mu}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dfrac{\partial p_k}{\partial a_\mu}}{\partial q_i}. \tag{10}$$

Par suite, on pourra remplacer les n équations (8) par les suivantes dont les premiers membres sont, en vertu de (10), des différentielles exactes :

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_1} dq_n\right) = \alpha_1,$$

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_2} dq_n\right) = \alpha_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_{n-1}} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_{n-1}} dq_n\right) = \alpha_{n-1},$$

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial h} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial h} dq_n\right) = \alpha_n + t.$$

75. *Remarque II.* — Il est facile d'obtenir l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction V', définie par l'équation :

$$dV' = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - H dt,$$

ou la fonction V définie par l'équation :

$$dV = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n.$$

En effet, les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, déduites des équations (5), sont celles qui vérifient identiquement les équations :

$$\frac{\partial V'}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V'}{\partial q_2} = p_2, \ \ldots \ \frac{\partial V'}{\partial q_n} = p_n, \quad \frac{\partial V'}{\partial t} = -\,H;$$

par conséquent, la fonction V′ doit réduire à une identité l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + H\left(q_1, \ q_2, \ \ldots \ q_n, \ \frac{\partial V'}{\partial q_1}, \ \frac{\partial V'}{\partial q_2}, \ \ldots \ \frac{\partial V'}{\partial q_n}\right) = 0;$$

ou bien, la fonction V doit vérifier l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$H\left(q_1, \ q_2, \ \ldots \ q_n, \ \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ \ldots \ \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = h.$$

76. *Application.* — Comme application du théorème de M. Liouville, reprenons le problème du *mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.*

Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\frac{\mu x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\,\frac{\mu y}{r^3}.$$

L'intégrale des forces vives est :

$$H = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{\mu}{r} = h.$$

On a donc :

$$\frac{\partial H}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\mu x}{r^3},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y'} = y', \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\mu y}{r^3}.$$

Par suite, les équations du mouvement peuvent être mises sous la forme canonique :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Ces équations renferment quatre fonctions inconnues x, y, x', y' de la variable t. Nous devons donc chercher, outre l'intégrale des forces vives, une autre intégrale ne renfermant pas explicitement le temps.

Or, cette intégrale est fournie par le principe des aires, qui nous donne l'équation :

$$\varphi = xy' - yx' = \alpha.$$

On vérifie facilement que la condition :

$$(H, \varphi) = 0$$

est satisfaite ; en effet, on a :

$$(H, \varphi) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$= -\frac{\mu x}{r^3} \cdot y - x'y' + \frac{\mu y}{r^3} \cdot x + y'x' = 0.$$

De ces deux intégrales H et φ, nous pouvons tirer les valeurs de x' et y' qui rendent l'expression $x'dx + y'dy$ une différentielle exacte. Nous aurons :

$$x' = \frac{-\alpha y \pm x\sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right)r^2 - \alpha^2}}{r^2},$$

$$y' = \frac{\alpha x \pm y\sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right)r^2 - \alpha^2}}{r^2};$$

par suite, on a :

$$dV = \alpha \cdot \frac{xdy - ydx}{r^2} \pm \frac{xdx + ydy}{r^2} \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) r^2 - \alpha^2},$$

d'où, en intégrant,

$$V = \alpha \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \pm \int \frac{dr}{r} \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) r^2 - \alpha^2}.$$

Les deux autres intégrales du problème sont :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \mp \int \frac{\alpha dr}{r \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) r^2 - \alpha^2}} = k,$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pm \int \frac{rdr}{\sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) r^2 - \alpha^2}} = t + g,$$

k et g étant deux nouvelles constantes.

Ce sont les intégrales que nous avons trouvées précédemment (n° **62**) : la première est l'équation de la trajectoire, la seconde donne la relation entre le rayon vecteur et le temps.

XIII.

Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

77. Soient l'origine des coordonnées au point fixe, ξ, η, ζ trois axes fixes rectangulaires, x, y, z les axes principaux du corps pour le point fixe, A, B, C les moments d'inertie principaux, p, q, r les vitesses angulaires autour des axes principaux.

Soient φ l'angle que fait l'axe Oξ avec l'intersection OA des plans xy et $\xi\eta$, ψ l'angle de cette intersection OA avec l'axe Ox, θ l'angle des deux plans (fig. 3).

Nous aurons pour la somme des forces vives :

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Or, la vitesse angulaire de la rotation peut être considérée comme la résultante de trois rotations p, q, r autour des axes x, y, z, ou comme la résultante de trois rotations dont les vitesses angulaires sont :

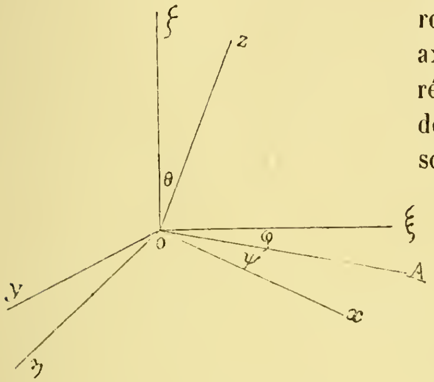


Fig. 3.

$\dfrac{d\theta}{dt}$ autour de OA,

$\dfrac{d\varphi}{dt}$ autour de Oζ,

$\dfrac{d\psi}{dt}$ autour de Oz,

et l'on a les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} p &= \cos\psi.\theta' + \sin\psi\sin\theta.\varphi', \\ q &= -\sin\psi.\theta' + \cos\psi\sin\theta.\varphi', \\ r &= \psi' + \cos\theta.\varphi', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

en posant :

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \psi' = \frac{d\psi}{dt}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt}.$$

En remplaçant p, q, r par ces valeurs (1) dans l'expression de T, nous aurons T en fonction des variables φ, ψ, θ et de leurs dérivées φ', ψ', θ'.

Si nous posons maintenant d'après Poisson (*) (n° **10**) :

$$s = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad u = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad v = \frac{\partial T}{\partial \theta'},$$

(*) *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires* (Journal de l'École polytechnique, 15e Cahier).

nous aurons, puisque ψ' n'entre pas dans p et q :

$$s = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \psi'} = Cr;$$

de même, φ' entrant dans p, q, r, il vient :

$$u = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi'}$$

$$= Ap \sin\theta \sin\psi + Bq \sin\theta \cos\psi + Cr \cos\theta,$$

et, comme θ' n'entre pas dans r, on a :

$$v = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \theta'} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \theta'} = Ap\cos\psi - Bq\sin\psi.$$

On a donc les équations :

$$\begin{aligned} Cr &= s,\\ Ap\sin\psi + Bq\cos\psi &= \frac{u - s\cos\theta}{\sin\theta},\\ Ap\cos\psi - Bq\sin\psi &= v. \end{aligned}$$

On en tire :

$$\left.\begin{aligned} Ap &= (u - s\cos\theta)\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + v\cos\psi,\\ Bq &= (u - s\cos\theta)\frac{\cos\psi}{\sin\theta} - v\sin\psi,\\ Cr &= s. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Par suite,

$$\left.\begin{aligned} 2T = &\frac{1}{A}\left[(u - s\cos\theta)\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + v\cos\psi\right]^2\\ &+ \frac{1}{B}\left[(u - s\cos\theta)\frac{\cos\psi}{\sin\theta} - v\sin\psi\right]^2\\ &+ \frac{1}{C}s^2. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si nous remplaçons dans le second membre de cette équation s, u, v par $\frac{\partial V}{\partial \psi}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, et si nous désignons par U la fonction de force, et par h la constante des forces vives, le problème sera ramené à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (n° **58**) :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi}\cos\theta\right)\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\cos\psi\right]^2 \\ &+ \frac{1}{B}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi}\cos\theta\right)\frac{\cos\psi}{\sin\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}\sin\psi\right]^2 \\ &+ \frac{1}{C}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 = 2(U + h). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Les équations différentielles du problème sont alors, en posant $H = T - U$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v},$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

78. La solution du problème se simplifie lorsque la fonction de force U est nulle, c'est-à-dire *lorsque le corps, soumis à une impulsion momentanée, est abondonné à lui-même.*

En effet, si l'on désigne (fig. 3) par a, b, c les cosinus des angles que l'axe des x fait avec les axes ξ, η, ζ, a', b', c' les cosinus relatifs à l'axe des y, et a'', b'', c'' les cosinus relatifs à l'axe des z, nous aurons, pour les équations de la conservation des aires :

$$\left.\begin{aligned} Ap.a + Bq.a' + Cr.a'' &= \alpha, \\ Ap.b + Bq.b' + Cr.b'' &= \beta, \\ Ap.c + Bq\ c' + Cr.c'' &= \gamma, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ap, Bq, Cr étant les sommes des moments des quantités de mouvement relatives aux axes principaux x, y, z, c'est-à-dire les aires décrites dans chacun des trois plans coordonnés Ox, y, z.

Or, les formules d'Euler nous donnent :

$$
\begin{aligned}
a &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
b &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
c &= \sin\psi\sin\theta,\\
a' &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
b' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c' &= \cos\psi\sin\theta,\\
a'' &= \sin\varphi\sin\theta,\\
b'' &= -\cos\varphi\sin\theta,\\
c'' &= \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Les équations (5) prendront la forme suivante :

$$
\left.
\begin{aligned}
v\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(u\cos\theta - s) &= \alpha,\\
v\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(u\cos\theta - s) &= \beta,\\
u &= \gamma.
\end{aligned}
\right\} \tag{6}
$$

En faisant la somme des carrés, et posant :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2,$$

on a :

$$v^2 + u^2 + \frac{(u\cos\theta - s)^2}{\sin^2\theta} = k^2.$$

Cette équation, étant une combinaison des équations (6), peut remplacer l'une de ces équations : elle sera une des intégrales du problème. D'ailleurs, l'intégrale des forces vives $H = h$ est aussi une intégrale du problème.

Nous pourrons donc prendre pour intégrales du problème les trois équations :

$$\left.\begin{array}{l} u = \gamma, \\ v^2 + u^2 + \dfrac{(u\cos\theta - s)^2}{\sin^2\theta} = k^2, \\ 2h = \dfrac{1}{A}\left\{ v\cos\psi + (u - s\cos\theta)\dfrac{\sin\psi}{\sin\theta}\right\}^2 \\ \quad + \dfrac{1}{B}\left\{ -v\sin\psi + (u - s\cos\theta)\dfrac{\cos\psi}{\sin\theta}\right\}^2 \\ \quad + \dfrac{1}{C}s^2 \ (^*). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Il est facile de voir que ces trois intégrales satisfont aux conditions :

$$(\gamma, h) = 0, \ (h, k) = 0, \ (k, \gamma) = 0.$$

Nous pourrons donc appliquer le théorème de M. Liouville (n° **73**). Les équations (7) serviront à déterminer u, v, s en fonction de θ, φ, ψ ; nous pourrons alors déterminer la fonction V par une simple intégration, et nous aurons :

$$V = \int (s d\psi + u d\varphi + v d\theta).$$

(*) Il est d'ailleurs évident (n° **11**) que l'équation :

$$u = const.,$$

est une intégrale du problème.

En effet, si l'on exprimait T en fonction de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', au moyen des formules (1), T ne renfermerait pas la variable φ, mais elle renfermerait sa dérivée φ'. D'ailleurs, la fonction de force U étant nulle, elle ne contient pas la variable φ. Par conséquent, l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = const.,$$

ou bien :

$$u = const.,$$

est une intégrale du problème.

Les trois autres intégrales du problème seront données par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = \alpha_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial k} = \alpha_2,$$

t_0, α_1, α_2 étant des constantes arbitraires.

Nous aurons donc les trois intégrales :

$$\int \left(\frac{\partial s}{\partial h} d\psi + \frac{\partial u}{\partial h} d\varphi + \frac{\partial v}{\partial h} d\theta \right) = t - t_0,$$

$$\int \left(\frac{\partial s}{\partial \gamma} d\psi + \frac{\partial u}{\partial \gamma} d\varphi + \frac{\partial v}{\partial \gamma} d\theta \right) = \alpha_1,$$

$$\int \left(\frac{\partial s}{\partial k} d\psi + \frac{\partial u}{\partial k} d\varphi + \frac{\partial v}{\partial k} d\theta \right) = \alpha_2.$$

Les équations (7) ne peuvent, en général, être résolues par rapport à u, v, s. Car, l'élimination de s et de u conduit à une équation du quatrième degré en v.

Mais, si l'on suppose $B = A$, la difficulté disparaît, et les équations (7) nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} u &= \gamma, \\ s^2 &= \frac{C}{C - A}(k^2 - 2Ah), \\ v &= \frac{1}{\sin\theta}(k^2 - u^2 - s^2 + 2us\cos\theta - k^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

79. La théorie précédente est applicable au mouvement de rotation de la terre autour de son centre de gravité. En effet, on sait qu'un corps solide libre dans l'espace tourne autour de son centre de gravité comme si ce point était fixe. Alors A, B, C seront les moments d'inertie principaux de la terre.

Soit OZ l'axe polaire dirigé vers le pôle nord, la rotation s'effectuant des x vers les y. Le plan $\xi\eta$ est l'écliptique fixe, l'axe des ξ l'origine des longitudes, θ l'obliquité, φ la longitude de l'équinoxe du printemps (point vernal), ψ l'ascension droite de l'axe des x.

Soient i l'inclinaison du *plan invariable* (plan du maximum

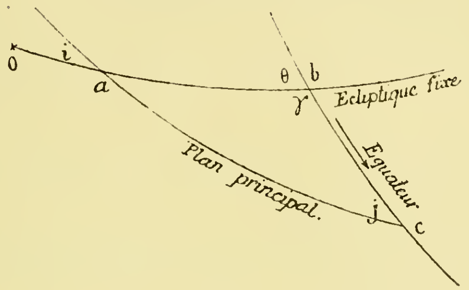


Fig. 4.

des aires) sur l'écliptique fixe, j l'inclinaison de l'équateur sur le plan invariable, que l'on appelle aussi *plan principal* (fig. 4).

Dans le cas de la terre, A ne diffère presque pas de B, θ ne diffère guère de i, et j est toujours très petit. Nous supposerons que C est le plus grand moment d'inertie.

Il est évident, à cause de :

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

que k est *la somme des aires sur le plan invariable.*

En outre, dans l'équation :

$$u = \gamma,$$

γ est *la somme des aires sur le plan des* $\xi\eta$, c'est-à-dire *sur le plan de l'écliptique.*

Enfin, la formule :

$$s = Cr,$$

nous donne *la somme des aires sur le plan des* xy, c'est-à-dire *sur l'équateur.*

On a donc, en vertu des théorèmes sur les projections :

$$\gamma = k \cos i,$$
$$s = k \cos j,$$

et l'on pourra remplacer γ et s par ces valeurs dans les équations (8), i et j étant supposés constants.

On a ainsi les équations suivantes :

$$u = \gamma' = k \cos i,$$
$$s = k \cos j,$$
$$v = \frac{k}{\sin \theta}(1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2 \cos i \cos j \cos \theta - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}},$$

dans lesquelles les constantes seront k, $\cos i$ et $\cos j$.

Nous aurons alors :

$$\mathrm{V} = k(\psi \cos j + \varphi \cos i) + \int v d\theta$$
$$= k(\psi \cos j + \varphi \cos i) + k\int \frac{\mathrm{Q} d\theta}{\sin \theta},$$

en posant :

$$\mathrm{Q} = (1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2 \cos i \cos j \cos \theta - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}.$$

80. Lorsque nous aurons déterminé l'intégrale $\int \frac{\mathrm{Q}d\theta}{\sin \theta}$, nous pourrons trouver les trois dernières intégrales du problème.

On peut prendre pour *éléments normaux*, c'est-à-dire pour les trois constantes arbitraires :

$$h, \cos i \quad \text{et} \quad \cos j.$$

On appelle *éléments normaux* les quantités γ, h, k qui satisfont aux conditions :

$$(\gamma, h) = 0, \ (h, k) = 0, \ (\gamma, k) = 0;$$

toute combinaison de ces trois éléments forme aussi des éléments normaux.

Il est facile de s'assurer que k est une fonction des éléments h, $\cos i$ et $\cos j$: en effet, l'équation :

$$s^2 = \frac{C}{C - A}(k^2 - 2Ah) = k^2 \cos^2 j,$$

nous donne :

$$k^2 = \frac{2ACh}{C - (C - A)\cos^2 j}. \tag{9}$$

Lorsque la fonction V sera connue, les intégrales du problème seront données par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0, \quad \frac{\partial V}{\partial . \cos i} = \alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial . \cos j} = \beta,$$

α, β, t_0 étant de nouvelles constantes que l'on appelle les *éléments conjugués* respectivement à $\cos i$, $\cos j$ et h.

81. Cherchons maintenant l'intégrale $\int \frac{Qd\theta}{\sin\theta}$ qui entre dans V. On a :

$$\int \frac{Qd\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\sin\theta d\theta}{Q} \cdot \frac{1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2\cos i \cos j \cos\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta},$$

ou bien :

$$\int \frac{Qd\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\sin\theta d\theta}{Q} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\frac{(\cos j - \cos i)^2}{1 - \cos\theta} - \frac{1}{2}\frac{(\cos j + \cos i)^2}{1 + \cos\theta} \right\}.$$

Nous aurons donc à calculer les trois intégrales suivantes :

$$1^\circ \quad \int \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2\cos i \cos j \cos\theta - \cos^2\theta}}.$$

En posant $\cos\theta = u$, cette intégrale se ramène à la suivante :

$$\int \frac{-du}{\sqrt{\sin^2 i \sin^2 j - (u - \cos i \cos j)^2}} = \text{arc cos}\,\frac{u - \cos i \cos j}{\sin i \sin j}$$

$$= \text{arc cos}\,\frac{\cos\theta - \cos i \cos j}{\sin i \sin j}.$$

2° $\displaystyle\int \frac{\sin\theta d\theta}{(1-\cos\theta)\sqrt{1-\cos^2 i-\cos^2 j+2\cos i\cos j\cos\theta-\cos^2\theta}}$.

En posant $1-\cos\theta = z$, cette intégrale se ramène à la suivante :

$$\int \frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{-\frac{(\cos j-\cos i)^2}{z^2}-\left\{1-\frac{2}{z}(1-\cos i\cos j)\right\}}},$$

ou bien, en posant $\frac{1}{z} = v$:

$$\int \frac{-dv}{\sqrt{-1+\left(\frac{1-\cos i\cos j}{\cos j-\cos i}\right)^2-\left\{v(\cos j-\cos i)-\frac{1-\cos i\cos j}{\cos j-\cos i}\right\}^2}},$$

ou bien encore, en posant :

$$v(\cos j-\cos i)-\frac{1-\cos i\cos j}{\cos j-\cos i} = t\sqrt{\left(\frac{1-\cos i\cos j}{\cos j-\cos i}\right)^2-1},$$

il vient :

$$\int \frac{-dt}{(\cos j-\cos i)\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{1}{\cos j-\cos i}\,\text{arc cos}\,\frac{v(\cos j-\cos i)^2-1+\cos i\cos j}{\sqrt{(1-\cos i\cos j)^2-(\cos j-\cos i)^2}}$$

$$= \frac{1}{\cos j-\cos i}\,\text{arc cos}\,\frac{\frac{(\cos j-\cos i)^2}{1-\cos\theta}-1+\cos i\cos j}{\sin i\sin j}.$$

3° $\displaystyle\int \frac{\sin\theta d\theta}{(1+\cos\theta)\sqrt{1-\cos^2 i-\cos^2 j+2\cos i\cos j\cos\theta-\cos^2\theta}}$.

En opérant de la même manière que pour la précédente, on trouve que cette intégrale se réduit à :

$$-\frac{1}{\cos j+\cos i}\,\text{arc cos}\,\frac{\frac{(\cos j+\cos i)^2}{1+\cos\theta}-1-\cos i\cos j}{\sin i\sin j}.$$

On a donc :

$$
\left.
\begin{aligned}
\int \frac{Q d\theta}{\sin\theta} &= \arc\cos \frac{\cos\theta - \cos i \cos j}{\sin i \sin j} \\
&- \frac{1}{2}(\cos j - \cos i) \arc\cos \frac{\dfrac{(\cos j - \cos i)^2}{1 - \cos\theta} - 1 + \cos i \cos j}{\sin i \sin j} \\
&+ \frac{1}{2}(\cos j + \cos i) \arc\cos \frac{\dfrac{(\cos j + \cos i)^2}{1 + \cos\theta} - 1 - \cos i \cos j}{\sin i \sin j} + K,
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
$$

K étant une fonction arbitraire de h, i, j.

82. On peut simplifier cette expression de l'intégrale par la considération du triangle sphérique *abc*. En effet, en désignant par Θ, I, J les trois côtés opposés aux angles $\pi - \theta$, i, j, nous aurons :

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos I &= \frac{\cos i - \cos j \cos\theta}{\sin j \sin\theta}, \\
\cos J &= \frac{\cos j - \cos i \cos\theta}{\sin i \sin\theta}, \\
\cos\theta &= \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos\Theta.
\end{aligned}
\right\} \quad (11)
$$

On tire de cette dernière :

$$\frac{\cos\theta - \cos i \cos j}{\sin i \sin j} = -\cos\Theta.$$

D'autre part, on a dans un triangle sphérique, en désignant par α, β, γ les angles, et par a, b, c les côtés opposés :

$$\cos(a+b) = \frac{\dfrac{(\cos\alpha + \cos\beta)^2}{1 - \cos\gamma} - 1 - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta},$$

$$\cos(a-b) = \frac{-\dfrac{(\cos\alpha - \cos\beta)^2}{1 + \cos\gamma} + 1 - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

Pour appliquer ces formules au triangle abc, on doit poser :

$$\alpha = j, \quad \beta = i, \quad \gamma = \pi - \theta,$$
$$a = \mathrm{J}, \quad b = \mathrm{I}, \quad c = \Theta;$$

par suite,

$$\cos \gamma = -\cos \theta.$$

On a alors :

$$\frac{\dfrac{(\cos j - \cos i)^2}{1 - \cos \theta} - 1 + \cos i \cos j}{\sin i \sin j} = -\cos(\mathrm{I} - \mathrm{J}),$$

$$\frac{\dfrac{(\cos j + \cos i)^2}{1 + \cos \theta} - 1 - \cos i \cos j}{\sin i \sin j} = \cos(\mathrm{I} + \mathrm{J}).$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{Q}d\theta}{\sin \theta} &= \operatorname{arc} \cos(-\cos \Theta) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\cos j - \cos i) \operatorname{arc} \cos\big(-\cos(\mathrm{I} - \mathrm{J})\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\cos j + \cos i) \operatorname{arc} \cos\big(\cos(\mathrm{I} + \mathrm{J})\big) + \mathrm{K} \\ &= \pi - \Theta - \frac{1}{2}(\cos j - \cos i) \{ \pi - (\mathrm{I} - \mathrm{J}) \} \\ &\qquad + \frac{1}{2}(\cos j + \cos i)(\mathrm{I} + \mathrm{J}) + \mathrm{K}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

83. Dans la suite des calculs que nous venons de faire, nous avons conservé au radical le signe +. En réalité, nous aurions dû prendre le signe ±. Il nous reste à examiner maintenant quel est celui des deux signes que nous devons adopter.

Mais, avant de faire cette discussion, nous devons observer que l'on peut encore donner aux expressions de u, v, s que nous avons trouvées précédemment (n° **77**), savoir :

$$u = \mathrm{A}p \sin \theta \sin \psi + \mathrm{B}q \sin \theta \cos \psi + \mathrm{C}r \cos \theta,$$
$$v = \mathrm{A}p \cos \psi - \mathrm{B}q \sin \psi,$$
$$s = \mathrm{C}r,$$

une forme remarquable qui nous sera utile dans quelques instants pour la discussion du signe de Q.

On a, en effet,

$$\left.\begin{aligned}
v &= Ap\cos\psi - Bq\sin\psi \\
&= A\cos\psi\,(\cos\psi\,.\,\theta' + \sin\psi\sin\theta\,.\,\varphi') \\
&\quad + B\sin\psi\,(\sin\psi\,.\,\theta' - \cos\psi\sin\theta\,.\,\varphi') \\
&= A\cos^2\psi\,.\,\theta' + B\sin^2\psi\,.\,\theta' + (A-B)\sin\psi\cos\psi\sin\theta\,.\,\varphi' \\
&= A\theta'\frac{1+\cos 2\psi}{2} + B\theta'\frac{1-\cos 2\psi}{2} + \frac{A-B}{2}\sin 2\psi\sin\theta\,.\,\varphi' \\
&= \frac{A+B}{2}\theta' + \frac{A-B}{2}\left\{\theta'\cos 2\psi + \varphi'\sin 2\psi\sin\theta\right\};
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$s = Cr = C(\psi' + \varphi'\cos\theta); \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}
u &= Ap\sin\theta\sin\psi + Bq\sin\theta\cos\psi + Cr\cos\theta \\
&= A\sin\theta\sin\psi(\cos\psi\,.\,\theta' + \sin\psi\sin\theta\,.\,\varphi') \\
&\quad + B\sin\theta\cos\psi(-\sin\psi\,\theta' + \cos\psi\sin\theta\,.\,\varphi') \\
&\quad + C\cos\theta(\psi' + \varphi'\cos\theta) \\
&= A\theta'\sin\psi\cos\psi\sin\theta - B\theta'\sin\psi\cos\psi\sin\theta + A\varphi'\sin^2\theta\sin^2\psi \\
&\quad + B\varphi'\sin^2\theta\cos^2\psi + C\cos\theta(\psi' + \varphi'\cos\theta) \\
&= \frac{A+B}{2}\sin^2\theta\,.\,\varphi' - \frac{A-B}{2}\sin^2\theta\cos 2\psi\,.\,\varphi' \\
&\quad + \frac{A-B}{2}\sin 2\psi\sin\theta\,.\,\theta' + C\cos\theta(\psi' + \varphi'\cos\theta) \\
&= \frac{A+B}{2}\varphi'\sin^2\theta + C\cos\theta(\psi' + \varphi'\cos\theta) \\
&\quad + \frac{A-B}{2}\sin\theta(\theta'\sin 2\psi - \varphi'\cos 2\psi\sin\theta).
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Cela posé, revenons à la discussion du signe de Q. A cet effet, observons d'abord que, d'après l'hypothèse que nous avons admise, k est une quantité positive, puisque c'est une aire.

D'autre part, la formule (13) nous donne, en y faisant $A = B$

$$v = A\theta'.$$

Par conséquent, v a le même signe que θ'.

Or, de la formule :

$$\cos \theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos \Theta,$$

où l'on suppose, comme dans la figure 4, que les angles i et j sont tous les deux aigus, il résulte évidemment que θ est compris entre $i - j$ et $i + j$, puisque $\cos\,\Theta$ est compris entre $+ 1$ et $- 1$. En effet, pour $\cos \Theta = + 1$, on a :

$$\cos \theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j = \cos (i + j),$$

et pour $\cos \Theta = - 1$, on a :

$$\cos \theta = \cos i \cos j + \sin i \sin j = \cos (i - j).$$

Or, θ étant compris entre $i - j$ et $i + j$, il en résulte, puisque i et j sont aigus, que $\sin \theta$ est toujours positif.

Par suite, dans l'expression de v :

$$v = \frac{kQ}{\sin \theta},$$

le radical Q aura le même signe que v. Donc, Q aura le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que θ' sera positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que θ croît ou décroît.

Or, si nous reprenons la formule :

$$\cos \theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos \Theta,$$

nous en concluons que θ décroît ou croît, suivant que Θ est compris entre 0 et π, ou non.

En effet, lorsque Θ augmente de 0 à π :

1° De $\Theta = 0$, à $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \Theta$ diminue; donc $\cos \theta$ augmente, et, par conséquent, θ diminue;

2° De $\Theta = \frac{\pi}{2}$, à $\Theta = \pi$, $\cos \Theta$ est négatif, et il augmente en valeur numérique; donc $\cos \theta$ augmente encore, et, par suite, θ diminue.

Il résulte de là que, dans le cas de la figure, puisque Θ est $< \pi$, θ décroît; par suite, θ' est négatif, et, par conséquent, Q sera négatif. Donc, dans ce cas, le radical doit avoir le signe $-$.

Nous aurons donc alors :

$$\int \frac{Q\,d\theta}{\sin\theta} = -\pi + \Theta + \frac{\cos j - \cos i}{2}\left\{\pi - (I - J)\right\}$$
$$- \frac{\cos j + \cos i}{2}(I + J) + K.$$

On peut choisir la quantité arbitraire K, de manière à détruire la partie constante, et l'on aura :

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{Q\,d\theta}{\sin\theta} &= \Theta + \frac{\cos j - \cos i}{2}(J - I) - \frac{\cos j + \cos i}{2}(I + J)\\ &= \Theta - J\cos i - I\cos j.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}V &= k(\psi\cos j + \varphi\cos i) + k(\Theta - J\cos i - I\cos j)\\ &= k\left\{(\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Les intégrales du problème sont alors :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0, \quad \frac{\partial V}{\partial \cos i} = \alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial \cos j} = \beta.$$

84. Pour former les premiers membres de ces équations nous devons remarquer que I, J, Θ ne renferment pas h; k contient h et $\cos j$, et ne renferme pas $\cos i$:

On a donc, en vertu de l'équation :

$$k^2 = \frac{2ACh}{C - (C - A)\cos^2 j}, \quad (9)$$

$$k\frac{\partial k}{\partial h} = \frac{AC}{C - (C - A)\cos^2 j};$$

d'où :

$$\frac{\partial k}{\partial h} = \frac{k}{2h}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial k}{\partial \cos i} = 0,$$

$$k\frac{\partial k}{\partial \cos j} = \frac{2ACh(C - A)\cos j}{\left\{C - (C - A)\cos^2 j\right\}^2},$$

d'où :

$$\frac{\partial k}{\partial \cos j} = \frac{2ACh(C-A)\cos j}{k.\dfrac{4A^2C^2h^2}{k^4}} = \frac{(C-A)k^3\cos j}{2ACh}.$$

On a donc :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \Big[(\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta\Big]\frac{\partial k}{\partial h},$$

et la première intégrale du problème est :

$$t - t_0 = \frac{k}{2h}\left\{(\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta\right\}.$$

On a aussi, pour les deux autres intégrales :

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial \cos i} = k(\varphi - J) - k\cos i\frac{\partial J}{\partial \cos i} - k\cos j\frac{\partial I}{\partial \cos i} + k\frac{\partial \Theta}{\partial \cos i},$$

et

$$\beta = \frac{\partial V}{\partial \cos j} = k(\psi - I) - k\cos i\frac{\partial J}{\partial \cos j} - k\cos j\frac{\partial I}{\partial \cos j} + k\frac{\partial \Theta}{\partial \cos j}$$
$$+ \left\{(\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta\right\}\frac{\partial k}{\partial \cos j}.$$

Afin de transformer ces deux dernières intégrales, nous avons besoin de certaines formules que nous allons faire connaître.

De la formule :

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha,$$

on tire, en considérant les côtés comme des fonctions des angles α, β, γ :

$$-\sin a\frac{\partial a}{\partial \cos\beta} = -\sin b\cos c\frac{\partial b}{\partial \cos\beta} - \cos b\sin c\frac{\partial c}{\partial \cos\beta}$$
$$+ \sin b\cos c\cos\alpha\frac{\partial c}{\partial \cos\beta} + \cos b\sin c\cos\alpha\frac{\partial b}{\partial \cos\beta};$$

d'où :

$$\sin a\frac{\partial a}{\partial \cos\beta} = (\sin b\cos c - \sin c\cos b\cos\alpha)\frac{\partial b}{\partial \cos\beta}$$
$$+ (\sin c\cos b - \sin b\cos c\cos\alpha)\frac{\partial c}{\partial \cos\beta}.$$

Or, on a :

$$\sin b \cos c - \sin c \cos b \cos \alpha = \sin a \cos \gamma,$$

$$\sin c \cos b - \sin b \cos c \cos \alpha = \sin a \cos \beta.$$

En effet, de la formule :

$$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma,$$

on tire :

$$\cos c \sin b = \cos b \cos \alpha \sin c + \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\sin \gamma} \sin c;$$

mais, on a :

$$\frac{\sin \alpha \sin c}{\sin \gamma} = \sin a,$$

donc :

$$\cos c \sin b = \cos b \cos \alpha \sin c + \sin a \cos \gamma;$$

donc, enfin,

$$\frac{\partial a}{\partial \cos \beta} = \cos \gamma \frac{\partial b}{\partial \cos \beta} + \cos \beta \frac{\partial c}{\partial \cos \beta}.$$

De même,

$$\frac{\partial a}{\partial \cos \gamma} = \cos \gamma \frac{\partial b}{\partial \cos \gamma} + \cos \beta \frac{\partial c}{\partial \cos \gamma}. \tag{18}$$

En vertu de ces formules, on a :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \cos i} &= \cos i \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \cos i} + \cos j \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \cos i}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \cos j} &= \cos i \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \cos j} + \cos j \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \cos j}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Les trois intégrales du problème sont donc :

$$\left.\begin{aligned} &t - t_0 = \frac{k}{2h} \left\{ (\varphi - \mathrm{J}) \cos i + (\psi - \mathrm{I}) \cos j + \Theta \right\}, \\ &\alpha = k(\varphi - \mathrm{J}), \\ &\beta = k(\psi - \mathrm{I}) + \frac{(\mathrm{C} - \mathrm{A}) k^3 \cos j}{2\mathrm{AC}h} \left\{ (\varphi - \mathrm{J}) \cos i + (\psi - \mathrm{I}) \cos j + \Theta \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

dont la dernière peut être mise sous la forme suivante :

$$\beta = k(\psi - \mathrm{I}) + \left(\frac{1}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{C}}\right) k^2 \cos j \,.\, (t - t_0).$$

On en tire :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi - \mathrm{J} &= \frac{\alpha}{k}, \\
\psi - \mathrm{I} &= \frac{\beta}{k} - \left(\frac{1}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{C}}\right) k \cos j \,.\, (t - t_0), \\
\frac{2h}{k}(t - t_0) &= (\varphi - \mathrm{J}) \cos i + (\psi - \mathrm{I}) \cos j + \Theta \\
&= \frac{\alpha}{k} \cos i + (\psi - \mathrm{I}) \cos j + \Theta \\
&= \frac{\alpha}{k} \cos i + \frac{\beta}{k} \cos j - \left(\frac{1}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{C}}\right) k \cos^2 j \,.\, (t - t_0) + \Theta.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

La dernière nous donne successivement :

$$\left.\begin{aligned}
\Theta &= -\frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} + (t - t_0) \left\{ \frac{2h}{k} + \left(\frac{1}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{C}}\right) k \cos^2 j \right\} \\
&= -\frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} + (t - t_0) \left\{ \frac{2\mathrm{AC}h + (\mathrm{C} - \mathrm{A}) k^2 \cos^2 j}{\mathrm{AC}k} \right\} \\
&= -\frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} + (t - t_0) \frac{k^2 \mathrm{C}}{\mathrm{AC}k} \\
&= -\frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} + \frac{k}{\mathrm{A}} (t - t_0).
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Les trois équations :

$$\varphi - \mathrm{J} = \frac{\alpha}{k},$$

$$\psi - \mathrm{I} = \frac{\beta}{k} - \left(\frac{1}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{C}}\right) k \cos j \,.\, (t - t_0),$$

$$\Theta = -\frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} + \frac{k}{\mathrm{A}} \,.\, (t - t_0),$$

forment une solution normale du problème.

La dernière nous donne, en la combinant avec la formule :

$$\cos\theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos \Theta,$$

$$\cos\theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos\left[\frac{k}{A}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k}\right],$$

équation qui nous fait connaître θ en fonction explicite de t, et comme I et J sont donnés en fonction explicite de θ, par les formules :

$$\cos \mathrm{I} = \frac{\cos i - \cos j \cos\theta}{\sin j \sin\theta},$$

$$\cos \mathrm{J} = \frac{\cos j - \cos i \cos\theta}{\sin i \sin\theta},$$

il s'ensuit que les trois variables θ, φ, ψ peuvent être déterminées en fonction explicite du temps t.

L'équation :

$$\varphi - \mathrm{J} = \frac{\alpha}{k},$$

exprime que le *plan invariable coupe le plan de l'écliptique suivant une droite fixe,* dont la longitude est $\frac{\alpha}{k}$. En effet, on a (fig. 4) :

$$oa = o\gamma - a\gamma = \varphi - \mathrm{J}.$$

85. *Remarque.* — Il est facile de trouver les trois intégrales précédentes par un moyen plus simple.

En effet, de la formule :

$$\mathrm{V} = k(\varphi \cos i + \psi \cos j) + k\int \frac{\mathrm{Q}d\theta}{\sin\theta},$$

on tire les trois intégrales du problème :

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial h} = \frac{k}{2h}\left(\varphi \cos i + \psi \cos j + \int \frac{\mathrm{Q}d\theta}{\sin\theta}\right) = t - t_0, \tag{A}$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \cos i} = k\left(\varphi + \int \frac{\cos j \cos\theta - \cos i}{\mathrm{Q}\sin\theta}d\theta\right) = \alpha, \tag{B}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \cos j} = {} & \frac{(\mathrm{C} - \mathrm{A})k^3 \cos j}{2\mathrm{AC}h}\left(\varphi \cos i + \psi \cos j + \int \frac{\mathrm{Q}d\theta}{\sin\theta}\right) \\ & + k\left(\psi + \int \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{\mathrm{Q}\sin\theta}d\theta\right) = \beta. \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

On peut facilement éliminer $\int \frac{Q d\theta}{\sin\theta}$ entre (A) et (C), et il vient :

$$\psi + \int \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{Q \sin\theta} d\theta = \frac{\beta}{k} - \frac{C - A}{AC} k \cos j . (t - t_0); \quad \text{(D)}$$

en éliminant φ entre (A) et (B), on a :

$$\cos j \left\{ \psi + \int \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{Q \sin\theta} d\theta \right\} + \int \frac{\sin\theta d\theta}{Q} = \frac{2h}{k}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i}{k},$$

et, en combinant cette dernière équation avec (D), on a :

$$\int \frac{\sin\theta d\theta}{Q} = \frac{k}{A}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k}. \quad \text{(E)}$$

Nous pouvons prendre les équations (B), (D) et (E) pour les trois intégrales du problème.

Si maintenant nous reprenons la formule :

$$\cos I = \frac{\cos i - \cos j \cos\theta}{\sin j \sin\theta},$$

nous en tirons :

$$-\sin I \frac{dI}{d\theta} = \frac{\sin j \sin^2\theta \cos j - (\cos i - \cos j \cos\theta) \sin j \cos\theta}{\sin^2 j \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cos j - \cos i \cos\theta}{\sin j \sin^2\theta},$$

d'où :

$$dI = \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{\sin I \sin j \sin^2\theta} d\theta.$$

Or, on a :

$$\sin I = \sqrt{1 - \cos^2 I} = \sqrt{\frac{\sin^2 j \sin^2\theta - (\cos i - \cos j \cos\theta)^2}{\sin^2 j \sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2 \cos i \cos j \cos\theta - \cos^2\theta}}{\sin j \sin\theta};$$

donc,

$$\sin I \sin j \sin\theta = -Q,$$

puisque Q est négatif.

Donc enfin,

$$-dI = \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{Q \sin\theta} d\theta;$$

de même,

$$-dJ = \frac{\cos j \cos \theta - \cos i}{Q \sin \theta}\, d\theta,$$

$$d\Theta = \frac{\sin \theta d\theta}{Q}.$$

Les formules (B), (D), (E) deviennent alors :

$$\frac{\alpha}{k} = \varphi - \int' dJ,$$

$$\frac{\beta}{k} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k \cos j . (t - t_0) = \psi - \int' dI,$$

$$\frac{k}{A}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} = \int' d\Theta.$$

Pour déterminer les limites, nous supposerons que l'on prenne pour limite inférieure de θ une valeur qui vérifie l'équation $Q=0$, c'est-à-dire :

$$(\cos \theta - \cos i \cos j)^2 - \sin^2 i \sin^2 j = 0;$$

or, on satisfait à cette équation en posant :

$$\theta = i + j,$$

ce qui nous donne :

$$I = 0, \qquad J = 0, \qquad \Theta = 0,$$

et alors les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\alpha}{k} = \varphi - J,$$

$$\frac{\beta}{k} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k \cos j . (t - t_0) = \psi - I,$$

$$\frac{k}{A}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} = \Theta.$$

Ce sont les formules que nous avons trouvées précédemment par un calcul beaucoup plus long.

Nous ferons cependant observer que la première méthode nous permet de déterminer la fonction V, ce qui ne fait pas la méthode actuelle.

XIV.

Travaux de M. Donkin.

86. Désignons par X une fonction de $q_1, q_2, \dots q_n$ (*), et supposons $p_1, p_2, \dots p_n$ définies par les équations :

$$p_1 = \frac{\partial X}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial X}{\partial q_2}, \quad \dots \quad p_n = \frac{\partial X}{\partial q_n}, \tag{1}$$

de telle sorte que l'on ait les conditions :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}. \tag{2}$$

Nous allons démontrer que, si l'on tire des équations (1) les valeurs de $q_1, q_2, \dots q_n$, en fonction de $p_1, p_2, \dots p_n$, on aura la relation :

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial p_i}.$$

En effet, si l'on remplace dans les seconds membres des équations (1), $q_1, q_2, \dots q_n$, par leurs valeurs en fonction de $p_1, p_2, \dots p_n$, ces équations deviennent des identités, et si l'on prend les dérivées par rapport à p_i, il vient :

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial p_i},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1 = \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial p_i},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(*) *Philosophical Transactions*, 1854, p. 75; *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 1857, p. 32.

ou bien, en vertu des équations (2) :

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_2}{\partial q_1}\frac{\partial q_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial q_n}{\partial p_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1 = \frac{\partial p_1}{\partial q_i}\frac{\partial q_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_2}{\partial q_i}\frac{\partial q_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial q_n}{\partial p_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

multipliant ces équations respectivement par :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_k}, \quad \ldots \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_k}, \quad \ldots \quad \frac{\partial q_n}{\partial p_k},$$

et ajoutant, on trouve :

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial p_i}. \tag{3}$$

Puisque entre q_i, q_k, il existe cette relation (3) analogue à la relation (2), on en conclut le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on déduit des équations* (1) *les quantités* $q_1, q_2, \ldots q_n$, *en fonction de* $p_1, p_2, \ldots p_n$, *les expressions ainsi obtenues seront les coefficients différentiels d'une fonction* Y *de* $p_1, p_2, \ldots p_n$, *et l'on aura :*

$$q_1 = \frac{\partial Y}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial Y}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad q_n = \frac{\partial Y}{\partial p_n}. \tag{4}$$

87. Il est facile de trouver la relation qui existe entre les fonctions X et Y.

En effet, les équations (1) et (4) nous donnent :

$$dX = p_1dq_1 + p_2dq_2 + \cdots + p_ndq_n,$$

$$dY = q_1dp_1 + q_2dp_2 + \cdots + q_ndp_n;$$

d'où :

$$d(X+Y) = d(p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n),$$

ou bien, en intégrant et en négligeant la constante ajoutée :

$$X + Y = p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n. \tag{5}$$

La valeur de Y est donc :

$$Y = -(X) + (q_1)p_1 + (q_2)p_2 + \cdots + (q_n)p_n, \tag{6}$$

les crochets indiquant que X, $q_1, \ldots q_n$, sont exprimées en fonction de $p_1, p_2, \ldots p_n$; par conséquent, Y sera exprimée en fonction de ces quantités seulement.

88. Si la fonction X, outre les variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, renferme encore explicitement une autre quantité quelconque p, il en sera évidemment de même des expressions $(q_1), (q_2), \ldots (q_n)$.

En effet, si X renferme p, il en est de même de $\frac{\partial X}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial X}{\partial q_n}$; par conséquent, si des équations (1) :

$$p_i = \frac{\partial X}{\partial q_i},$$

on tire $(q_1), (q_2), \ldots (q_n)$, c'est-à-dire les valeurs de $q_1, \ldots q_n$, en fonction de $p_1, p_2, \ldots p_n$, ces quantités (q_i) renfermeront aussi p.

Nous aurons donc, en observant que (X) est la valeur de X, dans laquelle on remplace $q_1, q_2, \ldots q_n$ en fonction de $p_1, p_2, \ldots p_n, p$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (X)}{\partial p} &= \frac{\partial X}{\partial p} + \frac{\partial X}{\partial q_1}\frac{\partial (q_1)}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial X}{\partial q_n}\frac{\partial (q_n)}{\partial p} \\ &= \frac{\partial X}{\partial p} + p_1 \frac{\partial (q_1)}{\partial p} + \cdots + p_n \frac{\partial (q_n)}{\partial p}. \end{aligned}$$

Si nous différentions l'équation (6) par rapport à p, qui y est contenue explicitement, il vient :

$$\frac{\partial Y}{\partial p} = -\frac{\partial (X)}{\partial p} + p_1 \frac{\partial (q_1)}{\partial p} + \cdots + p_n \frac{\partial (q_n)}{\partial p},$$

et, à cause de l'équation précédente, on a :

$$\frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial X}{\partial p} = 0. \tag{7}$$

89. Supposons maintenant que X renferme explicitement, outre les n variables $q_1, q_2, \dots q_n$, une autre variable t, et n constantes $a_1, a_2, \dots a_n$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$X = \text{fonct.}\,(t, q_1, q_2, \dots q_n, a_1, a_2, \dots a_n).$$

Supposons de plus que les n équations :

$$\frac{\partial X}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial X}{\partial a_2} = b_2, \quad \dots \quad \frac{\partial X}{\partial a_n} = b_n, \tag{8}$$

soient suffisantes pour déterminer $a_1, a_2, \dots a_n$, en fonction de $b_1, b_2, \dots b_n, q_1, q_2, \dots q_n$.

Si nous posons :

$$p_1 = \frac{\partial X}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial X}{\partial q_2}, \quad \dots \quad p_n = \frac{\partial X}{\partial q_n}, \tag{9}$$

et si nous résolvons ces équations par rapport à $q_1, q_2, \dots q_n$, les a_i restant constantes, nous verrons, comme précédemment (n° **86**), que les q_i sont les dérivées par rapport aux p_i d'une fonction :

$$Y = \text{fonct.}\,(t, p_1, p_2, \dots p_n, a_1, a_2, \dots a_n),$$

et l'on a :

$$q_1 = \frac{\partial Y}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial Y}{\partial p_2}, \quad \dots q_n = \frac{\partial Y}{\partial p_n}. \tag{10}$$

D'ailleurs, dans cette transformation, les a_i sont analogues à la quantité p (n° **88**), et nous aurons, en vertu de la formule (7) :

$$\frac{\partial Y}{\partial a_i} + \frac{\partial X}{\partial a_i} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\partial Y}{\partial a_i} = -\frac{\partial X}{\partial a_i} = -b_i. \tag{11}$$

90. Si des équations (8) :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

on tire les valeurs de $a_1, a_2, \ldots a_n$, en fonction de $b_1, b_2, \ldots b_n$, nous aurons, de la même manière que ci-dessus (n° **87**) :

$$X_b = -(X) + (a_1)b_1 + (a_2)b_2 + \cdots + (a_n)b_n,$$

les crochets indiquant que X, $a_1, a_2, \ldots a_n$, sont exprimées en fonction de $b_1, b_2, \ldots b_n, q_1, q_2, \ldots q_n$. On a donc :

$$X_b = \text{fonct.}\,(t, q_1, q_2, \ldots q_n, b_1, b_2, \ldots b_n),$$

et l'on voit que l'on passe de X à X_b, en exprimant les a_i en fonction des b_i, et en conservant les q_i, de même que l'on passe (n° **89**) de X à Y en exprimant les q_i en fonction des p_i, et en conservant les a_i. Dans cette transformation les a_i, b_i jouent le rôle des q_i, p_i de tantôt (n° **89**) et les q_i le rôle des a_i.

Il s'ensuit que l'on aura :

$$\frac{\partial X_b}{\partial b_i} = a_i, \qquad (12)$$

de même que l'on a (n° **89**) :

$$\frac{\partial Y}{\partial p_i} = q_i. \qquad (10)$$

D'ailleurs, puisque les q_i jouent ici le rôle des a_i (n° **89**), c'est-à-dire de p (n° **88**), on a, d'après la formule (7) :

$$\frac{\partial X_b}{\partial q_i} + \frac{\partial X}{\partial q_i} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\partial X_b}{\partial q_i} = -\frac{\partial X}{\partial q_i} = -p_i. \qquad (13)$$

On a aussi, en vertu de la formule (7) :

$$\frac{\partial X_b}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial t}. \qquad (14)$$

91. Considérons la fonction X_b :

$$X_b = \text{fonct.}\,(t, q_1, q_2, \ldots q_n, b_1, b_2, \ldots b_n),$$

et les équations :

$$\frac{\partial X_b}{\partial q_i} = -p_i.$$

Si, de ces dernières, on tire les q_i en fonction des p_i, les b_i restant constantes, nous aurons la fonction :

$$Y_b = \text{fonct.}\,(t, p_1, p_2, \ldots p_n, b_1, b_2, \ldots b_n).$$

Or, les fonctions X_b et Y_b sont analogues aux fonctions X et Y (n° **89**) à la condition de remplacer p_i par $-p_i$, et a_i par b_i.

Nous aurons donc, en vertu des formules (10) et (11) :

$$\frac{\partial Y_b}{\partial p_i} = -q_i, \tag{15}$$

et

$$\frac{\partial Y_b}{\partial b_i} = -\frac{\partial X_b}{\partial b_i} = -a_i. \tag{16}$$

92. Cela posé, les $2n$ équations (8) et (9), savoir :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i, \quad \frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i,$$

nous permettent de déterminer les $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction des $2n$ constantes $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$, et de t, ou réciproquement, les $2n$ constantes en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ et t.

Dans le premier cas, les variables p_i, q_i sont données *explicitement* en fonction de la variable t, que nous pouvons considérer comme indépendante ; dans le second cas, elles sont données *implicitement* en fonction de t.

93. Il résulte de ce qui précède que nous pourrons, dans la suite, faire l'une des quatre hypothèses suivantes :

1° Les $2n$ variables p_i, q_i, sont exprimées en fonction de a_i, b_i, t ;

2° Les $2n$ constantes a_i, b_i, sont exprimées en fonction de p_i, q_i, t ;

3° Les n variables p_i sont exprimées en fonction des n variables q_i, des n constantes a_i, et de t, comme dans :

$$p_i = \frac{\partial X}{\partial a_i}.$$

4° Les n constantes b_i sont exprimées en fonction des n variables q_i, des n constantes a_i, et de t, comme dans :

$$b_i = \frac{\partial X}{\partial q_i}.$$

XV.

Nouvelle démonstration du théorème de Jacobi.

94. Voyons maintenant comment l'on peut obtenir le théorème de Jacobi, en se basant sur les théorèmes qui précèdent.

Soit (Z) une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, a_2, \ldots a_n, t$ définie par l'équation :

$$(Z) = -\frac{\partial X}{\partial t},$$

et désignons par Z le résultat que l'on obtient en remplaçant dans (Z), $a_1, a_2, \ldots a_n$ par leurs valeurs en fonction des variables, tirées des équations :

$$p_i = \frac{\partial X}{\partial q_i}.$$

Il est facile de démontrer que le système des équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial Z}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

exprime le résultat de l'élimination des constantes a_i, b ,entre les équations :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial q_i} &= p_i,\\ \frac{\partial X}{\partial a_i} &= b_i,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et leurs dérivées par rapport à t.

En d'autres termes, les équations (1) forment un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre dont les équations (2) sont les intégrales.

En effet, si l'on différentie l'équation :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

totalement par rapport à t, il vient :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = 0.$$

Mais, on a :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial X}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial p_j}{\partial a_i};$$

par suite, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial a_i}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_i}\frac{dq_n}{dt} = 0; \tag{3}$$

les quantités $\frac{\partial p_1}{\partial a_i}$, $\frac{\partial p_2}{\partial a_i}$, ... sont prises en considérant $p_1, p_2, \ldots p_n$, comme des fonctions de $a_1, a_2, \ldots a_n, q_1, q_2, \ldots q_n$ (n° **93**, 3°).

Or, (Z) étant une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, a_2, \ldots a_n, t$, définie par l'équation :

$$(Z) = -\frac{\partial X}{\partial t}, \tag{4}$$

on a :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial a_i} = -\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial t}:$$

et l'équation (3) nous donne :

$$\frac{\partial(\mathrm{Z})}{\partial a_i} = \frac{\partial p_1}{\partial a_i}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_i}\frac{dq_n}{dt}.$$

Multipliant par $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, et faisant la somme depuis $i = 1$, jusque $i = n$, il vient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathrm{Z})}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p} + \frac{\partial(\mathrm{Z})}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial(\mathrm{Z})}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j} \\
&= \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}\right)\frac{dq_1}{dt} \\
&+ \left(\frac{\partial p_2}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_2}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}\right)\frac{dq_2}{dt} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(\frac{\partial p_j}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_j}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial p_j}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}\right)\frac{dq_j}{dt} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(\frac{\partial p_n}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_n}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}\right)\frac{dq_n}{dt}.
\end{aligned}$$

Or, tous les coefficients du second membre sont nuls, excepté celui de $\frac{\partial q_j}{dt}$ qui est égal à l'unité. Quant au premier membre, il est égal à $\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial p_j}$, si l'on observe que Z est le résultat que l'on obtient en remplaçant dans (Z) les constantes $a_1, a_2, \ldots a_n$, par leurs valeurs en fonction des variables (n° **93**, 2°), de sorte que Z est une fonction des variables seulement.

On a donc :

$$\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial p_j} = \frac{dq_j}{dt},$$

ou bien, en remplaçant la lettre j par la lettre i :

$$\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}, \tag{5}$$

équation qui ne renferme pas les constantes.

On a aussi, en considérant p_i comme une fonction de $t, q_1, q_2, \dots q_n$ (n° **93**, 3°) :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\right)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(Z)}{\partial q_i};$$

par conséquent,

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(Z)}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt},$$

ou bien, à cause de l'équation (5) :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(Z)}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{\partial Z}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{\partial Z}{\partial p_n},$$

ou bien encore, en vertu des équations (2) :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(Z)}{\partial q_i} + \frac{\partial p_1}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_n}.$$

Mais, puisque (Z) n'est autre que Z où l'on a remplacé $p_1, p_2, \dots p_n$ par leurs valeurs (n° **93**, 3°), on a :

$$\frac{\partial(Z)}{\partial q_i} = \frac{\partial Z}{\partial q_i} + \frac{\partial Z}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i}.$$

Par suite, il vient :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i}, \tag{6}$$

équation qui ne renferme pas les constantes.

Le système des $2n$ équations (5) et (6) exprime donc le résultat de l'élimination des $2n$ constantes entre les équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial q_i} &= p_i, \\ \frac{\partial X}{\partial a_i} &= b_i, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et leurs quotients différentiels par rapport à t. Ces équations (2) sont donc les intégrales des équations (5) et (6).

D'ailleurs, la fonction Z sera définie par l'équation :

$$Z = -\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right),$$

$\frac{\partial X}{\partial t}$ étant le quotient différentiel partiel de X par rapport à t, et les crochets indiquant que dans ce quotient différentiel, on a remplacé les constantes $a_1, a_2, \dots a_n$, par leurs valeurs en fonction des variables, déduites des équations :

$$\frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i.$$

XVI.

Formules de Jacobi.

95. Nous venons de voir (n° **94**) que les équations :

$$\frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

donnent la solution des équations canoniques. Elles sont équivalentes aux équations :

$$a_i = \varphi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t),$$
$$b_i = \psi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t).$$

Ces équations peuvent être considérées comme exprimant les

$2n$ variables $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction des $2n$ constantes a_i, b_i et de t, ou bien les $2n$ constantes a_i, b_i en fonction des $2n$ variables p_i, q_i et de t.

Il est facile de démontrer les relations suivantes qui ont été énoncées pour la première fois par Jacobi (*) :

$$\frac{\partial q_k}{\partial a_j} = -\frac{\partial b_j}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial b_j} = \frac{\partial a_j}{\partial p_k},$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial a_j} = \frac{\partial b_j}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial b_j} = -\frac{\partial a_j}{\partial q_k}.$$

p_k, q_k étant deux variables correspondantes, et a_j, b_j deux constantes correspondantes.

Pour démontrer la première de ces relations, reprenons l'équation :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

dont le premier membre est une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, a_2, \ldots a_n, t$. Les quantités $q_1, q_2, \ldots q_n$ peuvent être considérées comme des fonctions de $t, a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$, déduites des n équations :

$$\frac{\partial X}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial X}{\partial a_2} = b_2, \ldots \quad \frac{\partial X}{\partial a_n} = b_n.$$

Si l'on suppose $q_1, q_2, \ldots q_n$, remplacées par leurs valeurs, l'équation :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

devient une identité, et sa dérivée prise par rapport à a_j sera nulle. Nous aurons donc :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial a_j} + \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial a_j} + \cdots + \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial a_j} = 0.$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, pp. 395 et suivantes.

Remplaçant $\frac{\partial X}{\partial a_j}$ par b_j, et $\frac{\partial X}{\partial q_i}$ par p_i, il vient :

$$\frac{\partial b_j}{\partial a_i} + \frac{\partial p_1}{\partial a_i}\frac{\partial q_1}{\partial a_j} + \frac{\partial p_2}{\partial a_i}\frac{\partial q_2}{\partial a_j} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_i}\frac{\partial q_n}{\partial a_j} = 0,$$

équation qui a lieu pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \ldots n$.

Dans cette équation $\frac{\partial b_j}{\partial a_i}$ se rapporte à l'hypothèse 4° (n° **93**), puisque, en vertu de la formule $b_j = \frac{\partial X}{\partial a_j}$, b_j est une fonction de t, q_i, a_i; $\frac{\partial p_1}{\partial a_i}$, $\frac{\partial p_2}{\partial a_i}$, ... se rapportent à l'hypothèse 3° (n° **93**), puisque, en vertu de la formule $p_i = \frac{\partial X}{\partial q_i}$, p_i est une fonction de t, q_i, a_i; enfin, $\frac{\partial q_1}{\partial a_j}$, $\frac{\partial q_2}{\partial a_j}$, ... se rapportent à l'hypothèse 1° (n° **93**), puisque, en vertu de l'équation $b_i = \frac{\partial X}{\partial a_i}$, q_i est une fonction de t, a_i, b_i.

Multipliant l'équation précédente par $\frac{\partial a_i}{\partial p_k}$, se rapportant à l'hypothèse 2° (n° **93**), et faisant la somme pour toutes les valeurs de i, les indices j et k restant les mêmes, le premier terme du premier membre sera :

$$\frac{\partial b_j}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial b_j}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k} = \frac{\partial b_j}{\partial p_k}. \qquad (\text{n° } \mathbf{93},\ 2°)$$

Dans le second terme, le coefficient de $\frac{\partial q_1}{\partial a_j}$ est :

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k} = \frac{\partial p_1}{\partial p_k} = 0.$$

Tous les autres coefficients sont également nuls, excepté le coefficient de $\frac{\partial q_k}{\partial a_j}$, qui sera :

$$\frac{\partial p_k}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k} = \frac{\partial p_k}{\partial p_k} = 1.$$

On a donc :

$$\frac{\partial b_j}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k}{\partial a_j} = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial b_j}{\partial p_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial a_j},$$

ce qui est la première formule de Jacobi. Le premier membre se rapporte à l'hypothèse 2° (n° **93**), le second membre à l'hypothèse 1° (n° **93**).

Si nous opérons de la même manière sur les équations (10) et (11) (n° **89**) :

$$\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p_i} = q_i, \quad \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial a_i} = -b_i,$$

nous obtiendrons évidemment un résultat qui se déduit du précédent en changeant p en q, et réciproquement, et en changeant le signe de b. Nous aurons donc :

$$\frac{\partial b_j}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial a_j},$$

c'est la deuxième formule de Jacobi.

De même, les équations (12) et (13) (n° **90**) :

$$\frac{\partial \mathrm{X}_b}{\partial q_i} = -p_i; \quad \frac{\partial \mathrm{X}_b}{\partial b_i} = a_i,$$

nous donnent, en changeant dans la première formule le signe de p, et en changeant a en b, et réciproquement :

$$\frac{\partial a_j}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial b_j},$$

c'est la troisième formule de Jacobi.

Enfin, les équations (15) et (16) (n° **91**) :

$$\frac{\partial \mathrm{Y}_b}{\partial p_i} = -q_i, \quad \frac{\partial \mathrm{Y}_b}{\partial b_i} = -a_i,$$

nous donnent, en changeant dans la troisième formule le signe de a, et en changeant p en q, et réciproquement :

$$\frac{\partial a_j}{\partial q_k} = -\frac{\partial p_k}{\partial b_j}.$$

c'est la quatrième formule de Jacobi.

La démonstration que nous venons de donner est due à M. Donkin (*). La démonstration de Jacobi est différente (**).

Remarque. — Dans les équations :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \quad \frac{\partial Z}{\partial p_i},\\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial Z}{\partial q_i},\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

les premiers membres se rapportent à l'hypothèse 1° (n° **93**); les seconds membres à l'hypothèse 2° (n° **93**).

Mais les équations :

$$\frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i,$$

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

renferment a_i, b_i exactement de la même manière que p_i, q_i. Il est donc évident que les raisonnements qui nous ont conduits aux équations (A), nous conduiront aux suivantes (***) :

$$\left.\begin{aligned}\frac{da_i}{dt} &= \quad \frac{\partial Z}{\partial b_i},\\ \frac{db_i}{dt} &= -\frac{\partial Z}{\partial a_i}.\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Dans les premiers membres, a_i, b_i se rapportent à l'hypothèse 2° (n° **93**), et sont exprimées en fonction de q_i, p_i, et t; les seconds membres se rapportent à l'hypothèse 1° (n° **93**).

Observons que, dans les équations (B), Z est la fonction Z des équations (A) dans laquelle on remplace p_i, q_i par leurs valeurs en fonction des a_i, b_i.

(*) *Philosophical Transactions,* 1854, p. 79; *Report of the British Association for the Advancement of Science,* 1857, p. 33.

(**) *Vorlesungen über Dynamik,* pp. 395 et suivantes.

(***) *Philosophical Transactions,* 1855, p. 303.

XVII.

Théorèmes de M. Donkin.

96. Théorème I. — *Si* p *et* q *désignent deux des variables* p_i, q_i, *et si l'on suppose ces variables* p *et* q *exprimées en fonction des* 2n *constantes* a_i, b_i, *et de* t, *nous aurons :*

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = \sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p, q)} = \left\{ \begin{array}{c} \pm 1 \\ 0, \end{array} \right.$$

suivant que p *et* q *sont conjuguées ou non* (*).

En effet, si q_i est une fonction des $2n$ constantes et de t, et si l'on remplace les constantes par leurs valeurs (n° **93**, 2°), en fonction de q_1, q_2, ... q_n, p_1, p_2, ... p_n, t, on obtient une équation identique. Par suite, si l'on différentie par rapport à q_i, q_k et p_k, il vient :

$$1 = \sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial b_j}\frac{\partial b_j}{\partial q_i}\right),$$

$$0 = \sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial q_k} + \frac{\partial q_i}{\partial b_j}\frac{\partial b_j}{\partial q_k}\right),$$

$$0 = \sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial p_k} + \frac{\partial q_i}{\partial b_j}\frac{\partial b_j}{\partial p_k}\right);$$

on trouvera des équations analogues, si l'on opère de la même manière sur p_i.

Or, si nous appliquons aux six équations ainsi obtenues les formules de Jacobi (n° **95**), en éliminant les dérivées de a_j et b_j, nous aurons pour la première :

$$1 = \sum_j \left(-\frac{\partial q_i}{\partial a_j}\frac{\partial p_i}{\partial b_j} + \frac{\partial q_i}{\partial b_j}\frac{\partial p_i}{\partial a_j}\right) = \sum_j \frac{\partial(p_i, q_i)}{\partial(a_j, b_j)}.$$

(*) On dit que p et q sont *conjuguées*, lorsqu'elles sont de la forme p_i, q_i; elles ne sont pas conjuguées, si elles sont de la forme p_i, q_k.

Par conséquent, on a :

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = +1, \quad \text{pour} \quad p = p_i, \ q = q_i,$$

et

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = -1, \quad \text{pour} \quad p = q_i, \ q = p_i.$$

On trouvera de la même manière que la deuxième équation nous donne :

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = 0, \quad \text{pour} \quad p = p_k, \ q = q_i,$$

et la troisième nous donne :

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = 0, \quad \text{pour} \quad p = q_i, \ q = q_k,$$

et ainsi de suite.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, il suffira d'éliminer, au moyen des formules de Jacobi (n° **95**), les dérivées de q_i.

La première formule nous donne :

$$1 = \sum_j \left(-\frac{\partial b_j}{\partial p_i}\frac{\partial a_j}{\partial q_i} + \frac{\partial a_j}{\partial p_i}\frac{\partial b_j}{\partial q_i} \right) = \sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p_i, q_i)}.$$

On a donc :

$$\sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p, q)} = +1, \quad \text{pour} \quad p = p_i, \ q = q_i,$$

et

$$\sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p, q)} = -1, \quad \text{pour} \quad p = q_i, \ q = p_i.$$

On trouve, de même, au moyen de la deuxième formule :

$$\sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p, q)} = 0, \quad \text{pour} \quad p = p_i, \ q = q_k,$$

et ainsi de suite.

97. Théorème II. — *Si* h *et* k *sont deux quelconques des constantes normales* (*) a_i, b_i, *et si nous supposons ces quantités exprimées en fonction des* p_i, q_i *et de* t, *nous aurons :*

$$\sum_j \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_j, q_j)} = \sum_j \frac{\partial(p_j, q_j)}{\partial(h, k)} = \begin{cases} \pm 1 \\ 0, \end{cases}$$

suivant que h *et* k *sont conjuguées ou non* (**).

En effet, si nous supposons a_i, b_i exprimées en fonction des variables q_i, p_i et de t (n° **93**, 2°), et si nous remplaçons les variables par leurs valeurs en fonction des a_i, b_i et de t (n° **93**, 1°), on obtient des identités. Par suite, si l'on différentie par rapport à a_i, la valeur de a_i, par exemple, il vient :

$$1 = \sum_j \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial a_i} + \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial a_i}\right),$$

ou bien, en remplaçant les dérivées des q et des p, au moyen des formules de Jacobi (n° **95**) :

$$1 = \sum_j \left(-\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\frac{\partial b_i}{\partial p_j} + \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\frac{\partial b_i}{\partial q_j}\right) = \sum_j \frac{\partial(a_i, b_i)}{\partial(p_j, q_j)}.$$

Par conséquent, on a :

$$\sum_j \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_j, q_j)} = +1, \quad \text{pour} \quad h = a_i,\ k = b_i,$$

et

$$\sum_j \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_j, q_j)} = -1, \quad \text{pour} \quad h = b_i,\ k = a_i.$$

De même, on trouverait :

$$\sum_j \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_j, q_j)} = 0, \quad \text{pour} \quad h = a_i,\ k = b_k,$$

et ainsi de suite.

(*) Nous donnons le nom de *constantes normales* aux constantes a_1, a_2, ... a_n, b_1, b_2, ... b_n, obtenues en appliquant les méthodes précédentes à l'intégration des équations canoniques.

(**) On dit que h et k sont *conjuguées*, lorsqu'elles sont de la forme a_i, b_i; elles ne sont pas conjuguées, si elles sont de la forme a_i, b_k.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, il suffit de remplacer les dérivées de a_i au moyen des formules de Jacobi (n° **95**), et l'on trouve facilement :

$$\sum_j \frac{\partial(p_j, q_j)}{\partial(h, k)} = \pm 1 \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant que h et k sont conjuguées ou non.

98. Il résulte du second théorème que l'on a, en employant la notation de Poisson (n° **69**) :

$$(a_i, b_i) = -(b_i, a_i) = -1,$$
$$(a_i, b_j) = 0, \quad (a_i, a_j) = 0, \quad (b_i, b_j) = 0;$$

d'ailleurs, on a identiquement :

$$(a_i, a_i) = 0, \quad (b_i, b_i) = 0.$$

En d'autres termes, on a :

$$(h, k) = \begin{cases} \mp 1 \\ \quad 0, \end{cases}$$

suivant que h et k sont conjuguées ou non.

99. Désignons maintenant par f, g deux fonctions des $2n$ constantes normales a_i, b_i, et soient :

$$f = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n),$$
$$g = \psi(a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n).$$

Si l'on suppose $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$, remplacées par leurs valeurs en fonction des $2n$ variables et de t (n° **93**, 2°), alors f et g deviendront des fonctions des variables (*), et si l'on désigne par h, k deux quelconques des constantes a_i, b_i, il vient :

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(p_i, q_i)} = \sum \frac{\partial(f, g)}{\partial(h, k)} \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_i, q_i)}$$

(*) f et g seront des intégrales des équations canoniques.

la sommation se rapportant à h, k et s'étendant à toutes les combinaisons binaires des constantes.

Il est facile de vérifier cette formule : en effet, on a :

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(p_i\, q_i)} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Or, on a évidemment :

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial b_2}\frac{\partial b_2}{\partial p_i} + \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial b_2}\frac{\partial b_2}{\partial q_i} + \cdots,$$

etc.,

et il est facile d'en conclure la formule ci-dessus.

Si maintenant nous faisons la somme par rapport à i, il vient :

$$-(f, g) = \sum \left\{ -(h, k)\frac{\partial(f, g)}{\partial(h, k)} \right\},$$

la somme se rapportant à h, k comme ci-dessus.

Mais, à cause des formules de Donkin (n° **97**), on a :

$$(h, k) = 0,$$

à moins que h, k ne soient conjuguées, et alors on a :

$$(h, k) = \mp 1.$$

Par suite,

$$(f, g) = -\sum_i \frac{\partial(f, g)}{\partial(a_i, b_i)},$$

formule que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = -\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\frac{\partial g}{\partial b_i} - \frac{\partial f}{\partial b_i}\frac{\partial g}{\partial a_i}\right).$$

L'expression du second membre étant une fonction des constantes a_i, b_i seulement, l'équation précédente nous donne le théorème suivant :

Théorème. — *Si*

$$f = \varphi(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t),$$

$$g = \psi(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t),$$

sont deux intégrales des équations simultanées :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i},$$

l'expression :

$$(f, g) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right),$$

est constante, c'est-à-dire que si l'on remplace p_i, q_i *par leurs valeurs en fonction des constantes et de* t, *l'expression* (f, g) *se réduit à une fonction des constantes arbitraires, ne renfermant pas le temps* t.

XVIII.

Extension des méthodes d'Hamilton au cas où les liaisons sont des fonctions du temps.

100. Les recherches d'Hamilton exigeaient que la fonction $H = T - U$ fût indépendante du temps, la fonction T étant une fonction homogène et du second degré de q'_1, q'_2, ... q'_n. Nous allons voir maintenant que la fonction T peut renfermer explicitement le temps t (*), sans que l'on ait rien à modifier aux théories précédentes. Il en résultera donc que ces théories s'appliqueront à un problème auquel l'intégrale des forces vives n'est pas applicable.

(*) Donkin, *Philosophical Transactions*, 1854.

Reprenons l'équation du mouvement (n° **9**) :

$$\frac{d\cdot\dfrac{\partial T}{\partial q_i'}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i},\tag{A}$$

U étant une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$, qui peut renfermer explicitement le temps, mais non les q_i'.

Nous avons vu qu'en posant (n° **10**) :

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

on peut ramener les n équations (A) à un système de $2n$ équations du premier ordre (n° **15**). Mais la démonstration que nous avons donnée précédemment exige que T soit une fonction homogène et du second ordre des q_i'.

On peut traiter la question de la manière suivante, sans faire aucune hypothèse sur la forme de la fonction T.

Posons, à cet effet,

$$T+U=W;$$

nous aurons, puisque U ne renferme pas les q_i' :

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'}=\frac{\partial W}{\partial q_i'},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=\frac{\partial W}{\partial q_i};$$

l'équation (A) devient :

$$\frac{d\cdot\dfrac{\partial W}{\partial q_i'}}{dt}=\frac{\partial W}{\partial q_i}.\tag{B}$$

Posons :

$$\frac{\partial W}{\partial q_i'}=p_i\ (^*),$$

(*) Cette formule est analogue aux formules (1) (n° **86**) :

$$\frac{\partial X}{\partial q_i}=p_i^{\,\mathrm{I}},$$

q_i est remplacé par q_i'.

et considérons la fonction :

$$Z = -(W) + p_1(q'_1) + p_2(q'_2) + \cdots + p_n(q'_n), \tag{C}$$

dans laquelle nous supposons (W), (q'_i), ... (q'_n), exprimées en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ (*).

Nous aurons, en appliquant les formules (4), (6) et (7) (nos **86**, **87** et **88**), dans lesquelles nous devrons remplacer q_i par q'_i, et p par q_i (**) :

$$q'_i = \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \tag{D}$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i}.$$

Par suite, l'équation (B) devient :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i}. \tag{E}$$

Les équations (D) et (E) ont donc la même forme que les équations canoniques, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme :

$$\left.\begin{aligned} q'_i &= \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \\ p'_i &= \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i}. \end{aligned}\right|$$

Il en résulte qu'il n'y aura pas de restriction à faire en ce qui concerne la forme de la fonction T.

101. *Remarque.* — Dans le cas particulier où T est une fonction homogène et du second degré de $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$, on a :

$$2T = p_1q'_1 + p_2q'_2 + \cdots + p_nq'_n,$$

d'où :

$$Z = -(T + U) + 2T = T - U.$$

(*) Les q_i jouent ici le rôle que jouait la quantité p dans la formule (7) (n° **88**).

(**) Cela résulte de la comparaison de la formule (C) avec la formule (6) (n° **87**).

102. Considérons maintenant le système de $2n$ équations différentielles simultanées du premier ordre :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial Z}{\partial q_i}, \end{aligned}\right| \tag{1}$$

Z étant une fonction de $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t$.

Une intégrale de ce système est une équation :

$$U = \alpha,$$

dans laquelle α est une constante, et U une fonction de t, q_i, p_i, telle que la dérivée totale $\frac{dU}{dt}$ soit nulle en vertu des équations (1).

Cherchons la condition à laquelle doit satisfaire la fonction U pour être une intégrale. On a :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right).$$

On a donc, en posant $\frac{dU}{dt} = 0$, et ayant égard aux équations (1) :

$$0 = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right),$$

ou bien :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U, Z) = 0. \tag{2}$$

Toute fonction U satisfaisant à cette équation (2), donnera, en l'égalant à une constante, une intégrale du système (1).

103. *Remarque.* — Il est facile de voir que l'*équation* $Z = \text{const.}$, *ne sera une intégrale des équations* (1) *que si la fonction* Z *ne renferme pas explicitement le temps.*

En effet, si $Z = \textit{const.}$ est une intégrale, la fonction Z doit vérifier l'équation (2), et nous aurons :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + (Z, Z) = 0.$$

Or, (Z, Z) est identiquement nulle; par conséquent, on devrait avoir :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire que Z ne devrait pas renfermer explicitement le temps t.

On conclut de là que, dans le cas où Z est une fonction du temps, l'équation $Z = const.$ n'est pas une intégrale des équations (1).

104. Théorème de M. Liouville. — *Si, par un moyen quelconque, on peut déterminer* n *intégrales du système* (1) :

$$\varphi_1 = a_1, \ \varphi_2 = a_2, \ .., \ \varphi_n = a_n, \qquad (3)$$

renfermant n *constantes arbitraires, et satisfaisant aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *conditions :*

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0, \quad \text{ou} \quad (a_i, a_k) = 0, \qquad (4)$$

pour les valeurs 1, 2, ... n *de* i *et de* k, *on pourra facilement obtenir les* n *autres intégrales.*

A cet effet, on déduira des n *équations* (3), *les valeurs de* $p_1, p_2, \dots p_n$, *en fonction de* $q_1, q_2, \dots q_n, a_1, \dots a_n, t$, *et on les substituera dans l'expression :*

$$dV = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n - (Z)dt, \qquad (5)$$

laquelle sera une différentielle exacte, (Z) *désignant comme précédemment le résultat que l'on obtient en substituant dans* Z *les valeurs de* $p_1, \dots p_n$, *tirées des équations* (3), *de sorte que* (Z) *est une fonction de* $q_1, \dots q_n, a_1, \dots a_n, t$.

En intégrant l'expression (5), *on obtient la fonction* V, *et alors les* n *autres intégrales du système* (1) *s'obtiennent en égalant à des constantes les dérivées de la fonction* V, *prises par rapport aux constantes* $a_1, \dots a_n$.

Demonstration. — 1° L'expression :

$$p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n - (Z)\, dt,$$

est une différentielle exacte. En effet, d'après ce que nous avons vu (n° **70**), la condition :

$$(a_i, a_k) = 0,$$

n'est autre que la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}, \tag{6}$$

de l'expression :

$$p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n.$$

Il nous reste à prouver que l'on a :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial (Z)}{\partial q_i}.$$

Or, en vertu de la définition de (Z), on a :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} = \frac{\partial Z}{\partial q_i} + \frac{\partial Z}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \frac{\partial Z}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i},$$

ou bien, en ayant égard aux équations (1) et aux conditions d'intégrabilité (6) :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} + \frac{dq_1}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial q_1} + \frac{dq_2}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{dq_n}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial q_n}. \tag{7}$$

Mais, d'autre part, comme, en vertu des équations (3), p_i est une fonction de t, q_1, ... q_n, on a :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt},$$

et, par conséquent, l'équation (7) nous donne :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial t}.$$

On a donc :

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - (Z)\,dt) + \gamma, \tag{8}$$

γ étant une constante arbitraire.

Cette fonction V nous donne les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \ \cdots \ \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n, \ \frac{\partial V}{\partial t} = -(Z), \tag{9}$$

dont les n premières sont évidemment équivalentes aux équations (3), c'est-à-dire que les valeurs de $p_1, \dots p_n$, déduites de ces équations, sont les mêmes que celles que l'on tire des équations (3). La dernière est une identité.

2° Les n autres intégrales du problème sont données par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \ \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \ \cdots \ \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n. \tag{10}$$

Il suffit de démontrer que leurs dérivées totales par rapport à t sont nulles, en vertu des équations (1).

Or, on a :

$$\frac{d.\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial t}}{\partial a_i} + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial a_i}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_n}}{\partial a_i}\frac{dq_n}{dt}.$$

Si l'on tient compte des équations (1) et (9), il vient :

$$\frac{d.\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = -\frac{\partial (Z)}{\partial a_i} + \frac{\partial Z}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial a_i}.$$

Mais (Z) n'est autre que Z dans laquelle on a remplacé $p_1, \dots p_n$, en fonction de $q_1, \dots q_n, a_1, \dots a_n, t$; et d'ailleurs, Z ne renferme pas explicitement les a_i.

Nous aurons donc :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial a_i} = \frac{\partial Z}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial a_i};$$

par conséquent,

$$\frac{d.\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt}=0.$$

Il en résulte donc que :

$$\frac{\partial V}{\partial a_i}=const.=b_i,$$

est une intégrale des équations (1) pour toutes les valeurs de i égales à 1, 2, ... n. Par suite, les équations (9) et (10) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i,$$

forment la solution complète du problème (*).

105. *Remarque.* — On pourrait résoudre le problème beaucoup plus simplement, même sans connaître les n premières intégrales, si l'on parvenait, par un moyen quelconque, à déterminer la fonction V. Les $2n$ intégrales seraient données par les $2n$ équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i,$$

dont les n premières sont équivalentes aux équations (3).

Or, cette fonction V peut être trouvée comme une *intégrale complète* d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre.

En effet, d'après ce que nous avons vu, l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(Z)=0,$$

doit être identiquement vérifiée par la fonction V.

(*) Ce théorème a été communiqué, en 1853, par M. Liouville au Bureau des longitudes (*Journal de Liouville*, t. XX, p. 137); *Connaissance des temps*, 1853; DONKIN, *Philosophical Transactions*, 1854, p. 85; IMSCHENETSKY, *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, pp. 161 ss.

Dans cette équation, (Z) n'est autre que la fonction Z dans laquelle on aurait remplacé $p_1, \dots p_n$, par leurs valeurs tirées des équations :

$$\varphi_1 = a_1, \quad .. \; \varphi_n = a_n.$$

Mais ces valeurs sont équivalentes à $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}$.

Par conséquent, (Z) n'est autre que Z dans laquelle on aurait remplacé $p_1, p_2, \dots p_n$, par les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}$. Il en résulte donc que la fonction V, renfermant n constantes arbitraires, doit rendre identique le premier membre de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t,\, q_1, \dots q_n,\, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \; \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0. \qquad (11)$$

Par conséquent, V doit être une solution complète de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire. Cette équation est facile à former, puisqu'il suffit de remplacer dans la fonction Z ou F, les quantités $p_1, p_2, \dots p_n$, par les quotients différentiels $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}$.

106. Nous venons de voir que la fonction V qui donne les intégrales du système canonique au moyen des équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

est *une* solution complète de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t,\, q_1, \dots q_n,\, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \; \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0. \qquad (11)$$

Il est facile de démontrer que *toute* solution complète, *quelle qu'elle soit,* de cette équation aux dérivées partielles, satisfait à la question, c'est-à-dire que, si l'on connaît une solution complète *quelconque* V de cette équation, les intégrales du système canonique sont exprimées par les équations (*) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i.$$

(*) Donkin, *Philosophical Transactions,* 1854.

Supposons, en effet, cette solution complète V connue, et posons :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i,$$

l'équation (11) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F(t,\ q_1,\ \ldots\ q_n,\ p_1,\ \ldots\ p_n) = 0 \tag{12}$$

Différentiant par rapport à q_i, il vient :

$$\frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial t}}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0. \tag{13}$$

Or, on a :

$$\frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial t}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_i}}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t};$$

d'ailleurs :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}.$$

Par suite, l'équation (13) nous donne :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_i}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial q_n} = 0; \tag{14}$$

d'autre part, on a :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}. \tag{15}$$

Ajoutant (14) et (15), on trouve :

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\left(\frac{dq_n}{dt} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\right).$$

Par conséquent, les n équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \text{pour} \quad i = 1,\ 2, \ldots n,$$

dans lesquelles :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

renferment comme conséquences les n équations :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots n$$

Il reste à démontrer que les équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i},$$

sont des conséquences des équations :

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i.$$

Or, si nous prenons la dérivée totale de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

par rapport à t, nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = 0;$$

d'autre part, en différentiant l'équation (12) par rapport à a_i, il vient, en ayant égard aux équations $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_n} = 0.$$

De ces deux dernières équations on déduit la suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_1}\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_2}\left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial F}{\partial p_2}\right) + \cdots = 0,$$

laquelle nous donne n équations analogues.

Or, de ces n équations on conclut que l'on a les n relations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots n,$$

ou bien que le déterminant des n^2 quantités :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_k} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_k}}{\partial a_i},$$

est nul. Mais cette dernière condition exprimerait (n° **50**) qu'il existe entre les $\frac{\partial V}{\partial q_k}$ une relation indépendante de $a_1, \dots a_n$, c'est-à-dire que l'on peut éliminer les n constantes $a_1, \dots a_n$, des n équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \psi_k(q_1, \dots q_n, a_1, \dots a_n, t),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que V est une solution complète de l'équation (11) (*).

Donc, si V est une solution complète quelconque de l'équation (11), les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

jointes aux équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i,$$

renferment comme conséquences les équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i},$$

(*) En effet, on sait que si V est une solution complète, elle renfermera, outre la constante additive, n constantes arbitraires $a_1, \dots a_n$, telles que l'on ne puisse les éliminer toutes entre les $n+1$ équations obtenues en différentiant V par rapport à $q_1, \dots q_n, t$, sans faire usage de toutes ces équations (n° **52**).

et celles-ci renferment encore les équations :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i},$$

dans lesquelles :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Donc, si l'on peut trouver une intégrale complète *quelconque* de l'équation (11), la question sera résolue, et l'on aura les $2n$ intégrales du problème par de simples différentiations.

107. *Cas particulier.* — Lorsque Z *ne renferme pas explicitement le temps* t, l'équation $Z = h$ est, comme on sait (n° **103**), une des intégrales du système (1).

On peut alors supposer que l'équation $Z = h$ est une des n intégrales données, au moyen desquelles on définit la fonction principale V, de manière que :

$$h,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1},$$

soient les n constantes arbitraires. Cela étant, si les conditions :

$$(a_i,\ a_j) = 0, \quad (h,\ a_i) = 0,$$

sont satisfaites, nous aurons identiquement :

$$(Z) = h,$$

puisque Z doit se réduire à h, quand on y remplace $p_1, p_2, \ldots p_n$, par leurs valeurs tirées des n intégrales (*).

L'équation :

$$dV = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - (Z)\,dt,$$

(*) (Z) est le résultat que l'on obtient en remplaçant dans Z les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, par leurs valeurs tirées des n équations $\varphi_1 = a_1, \ldots Z = h$. Or, si dans l'une quelconque de ces équations, par exemple $Z = h$, on remplace $p_1, p_2, \ldots p_n$, par leurs valeurs, cette équation devient une identité; donc, (Z) est identiquement égal à h.

nous donne alors :

$$dV = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - h dt;$$

d'où :

$$V = -ht + \psi,$$

ψ étant une fonction ne renfermant pas explicitement le temps; en effet, Z ne renfermant pas explicitement le temps, il en sera de même de $p_1, p_2, \ldots p_n$.

La solution du problème se simplifie alors de la manière suivante :

Les $2n$ équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

sont remplacées par d'autres que nous allons chercher.

De l'équation :

$$V = -ht + \psi,$$

on tire :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi}{\partial q_i};$$

par suite, les n premières intégrales peuvent être remplacées par les n équations :

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_i} = p_i.$$

Les n intégrales restantes, qui sont données, en général, par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \tau, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

τ étant la constante conjuguée à h, deviennent, en remplaçant V par sa valeur :

$$\frac{\partial \psi}{\partial h} = t + \tau, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial a_i} = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1).$$

Quant à la fonction ψ, il est facile de voir qu'elle satisfait à l'équation différentielle partielle :

$$F\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\right) = h,$$

dans laquelle :

$$F(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

est la valeur de Z en fonction des $2n$ variables p_i, q_i.

Cette équation différentielle partielle se déduit facilement de l'équation (11). En effet, de l'équation :

$$V = -ht + \psi,$$

on tire :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h,$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial\psi}{\partial q_i}.$$

Par conséquent, l'équation (11) se transforme, dans le cas actuel, en la suivante :

$$-h + F\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\right) = 0,$$

ou bien :

$$F\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\right) = h.$$

Le cas particulier que nous venons d'examiner se présente lorsque l'*intégrale des forces vives existe*. L'équation $Z = h$ est alors l'intégrale des forces vives, et h est la constante des forces vives.

108. *Remarque I.* — Comme nous l'avons vu précédemment (n° **98**), lorsque les intégrales des équations canoniques sont :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

si l'on met ces équations sous la forme :

$$a_i = \varphi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t),$$
$$b_i = \psi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t),$$

on a :

$$(a_i, b_i) = -1, \ (a_i, b_j) = 0,$$
$$(b_i, a_i) = +1, \text{ etc.}$$

Nous appellerons un système de $2n$ intégrales pour lesquelles ces conditions sont remplies, une *solution normale,* ou un système d'*intégrales normales.* Les $2n$ constantes arbitraires contenues dans un tel système seront appelées *éléments normaux.* Une paire a_i, b_i s'appelle des *éléments conjugués* (n° **97**).

Dans le cas considéré en dernier lieu, où Z ne renferme pas explicitement le temps t, h et τ sont des éléments conjugués, ces lettres étant employées au lieu de a et b uniquement pour des raisons particulières.

109. *Remarque II.* — Il faut encore observer ici que les $2n$ intégrales des équations canoniques (1) peuvent être obtenues sous une autre forme que :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

et alors, si les équations :

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t),$$
$$\beta = \psi(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t),$$

sont deux intégrales obtenues par un moyen quelconque, c'est-à-dire sans employer les théorèmes de M. Liouville et de M. Donkin, on n'aura plus :

$$(\alpha, \beta) = \pm 1 \quad \text{ou} \quad = 0.$$

Mais il est facile de s'assurer, comme nous le verrons plus loin, que l'on aura, en vertu des équations canoniques :

$$(\alpha, \beta) = \mathit{const.},$$

de sorte que, si (α, β) est une fonction de $q_1, q_2, \dots q_n$, $p_1, p_2, \dots p_n, t$, on obtiendra, en posant :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

une nouvelle intégrale des équations (1).

Si l'on a identiquement $(\alpha, \beta) = const.$, alors les intégrales α et β sont des intégrales qui ne diffèrent des intégrales normales que par un multiplicateur. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans les chapitres suivants.

XIX.

Théorèmes de Lagrange et de Poisson.

110. Reprenons les équations canoniques :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dans lesquelles :

$$H = f(t, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n).$$

Les intégrales de ces équations au nombre de $2n$, contiennent $2n$ constantes, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$. On peut résoudre ces équations intégrales par rapport aux variables p_i, q_i, en fonction des α_i, β_i et de t, ou bien par rapport aux constantes α_i, β_i, en fonction des p_i, q_i et de t.

Théorème de Lagrange. — *Les intégrales étant résolues par rapport aux variables* p_i, q_i, *on a la relation :*

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial q_1}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha}\frac{\partial q_n}{\partial \beta} - \frac{\partial p_n}{\partial \beta}\frac{\partial q_n}{\partial \alpha} = const.,$$

ou bien, en employant la notation de M. Donkin (n° **69**) :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial(p_i, q_i)}{\partial(\alpha, \beta)} = const.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme symbolique :

$$[\alpha, \beta] = const.$$

Démonstration. — Considérons la fonction H, et supposons que l'on y remplace les variables q_i, p_i, en fonction de t et des $2n$ constantes, parmi lesquelles se trouvent α et β : cela posé, la démonstration du théorème de Lagrange repose sur l'identité :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 H}{\partial\beta\partial\alpha}.$$

On a :

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha} = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\alpha}\right),$$

ou bien, en vertu des équations canoniques (1) :

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha} = \sum\left(-\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha} + \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial\alpha}\right);$$

par suite,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta} = \sum\left\{\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_i}{\partial\beta}\right)\frac{\partial q_i}{\partial\alpha} - \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha\partial\beta} \\ &+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial\beta}\right)\frac{\partial p_i}{\partial\alpha} + \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial^2 p_i}{\partial\alpha\partial\beta}\end{aligned}\right\}.$$

On trouve de la même manière :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\beta\partial\alpha} = \sum\left\{\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_i}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial q_i}{\partial\beta} - \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha\partial\beta} \\ &+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial p_i}{\partial\beta} + \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial^2 p_i}{\partial\alpha\partial\beta}\end{aligned}\right\}.$$

En égalant ces deux expressions, il vient :

$$\sum\left\{\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_i}{\partial\beta}\right)\frac{\partial q_i}{\partial\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial\beta}\right)\frac{\partial p_i}{\partial\alpha} \\ &+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_i}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial q_i}{\partial\beta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial p_i}{\partial\beta}\end{aligned}\right\} = 0.$$

Or, cette dernière équation n'est autre que :

$$\frac{d}{dt}[\alpha, \beta] = 0;$$

par conséquent, on a :

$$[\alpha, \beta] = const.,$$

et le théorème de Lagrange est démontré.

Remarque. — Dans le cas particulier où α et β sont des constantes normales a_i, b_i, nous avons vu (n° **97**) que l'on a :

$$[\alpha, \beta] = \begin{cases} \pm 1 \\ 0, \end{cases}$$

suivant que α et β sont conjuguées ou non.

111. Théorème de Poisson. — La démonstration du théorème de Poisson repose sur deux lemmes que nous allons faire connaître :

Lemme I. — *Si l'on désigne par* φ, ψ *deux fonctions quelconques des variables* $t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, *et si l'on prend la dérivée partielle de l'expression* (φ, ψ) *par rapport à l'une quelconque de ces variables que nous désignerons par* ξ, *on a :*

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) \text{ (*)}.$$

En effet, de la formule :

$$(\varphi, \psi) = \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right),$$

on tire :

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial \xi} = \sum \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial p_i \partial \xi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi}\right);$$

(*) Donkin, *Philosophical Transactions,* 1854, p. 92; Imschenetsky, pp. 53 et suivantes.

Or,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial\xi} = \sum\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\dfrac{\partial\psi}{\partial p_i} - \dfrac{\partial}{\partial p_i}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\dfrac{\partial\psi}{\partial q_i} \\ + \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i}\dfrac{\partial}{\partial p_i}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) - \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i}\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\end{array}\right\} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},\psi\right) + \left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right).$$

C'est la formule énoncée.

Lemme II. — *Si* φ, ψ, θ *sont trois fonctions quelconques des variables* t, q_1, ... q_n, p_1, ... p_n, *on a la relation :*

$$\big(\varphi,(\psi,\theta)\big) + \big(\psi,(\theta,\varphi)\big) + \big(\theta,(\varphi,\psi)\big) = 0.$$

En effet, le premier membre nous donne, en le développant :

$$\sum\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i}\dfrac{\partial(\psi,\theta)}{\partial p_i} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i}\dfrac{\partial(\psi,\theta)}{\partial q_i} + \dfrac{\partial\psi}{\partial q_i}\dfrac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial p_i} - \dfrac{\partial\psi}{\partial p_i}\dfrac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial q_i} \\ \qquad + \dfrac{\partial\theta}{\partial q_i}\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p_i} - \dfrac{\partial\theta}{\partial p_i}\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q_i}\end{array}\right\}$$

$$= \sum\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i}\left\{\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial p_i},\theta\right) + \left(\psi,\dfrac{\partial\theta}{\partial p_i}\right)\right\} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i}\left\{\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial q_i},\theta\right) + \left(\psi,\dfrac{\partial\theta}{\partial q_i}\right)\right\} \\ + \dfrac{\partial\psi}{\partial q_i}\left\{\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial p_i},\varphi\right) + \left(\theta,\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)\right\} - \dfrac{\partial\psi}{\partial p_i}\left\{\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial q_i},\varphi\right) + \left(\theta,\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right)\right\} \\ + \dfrac{\partial\theta}{\partial q_i}\left\{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i},\psi\right) + \left(\varphi,\dfrac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\right\} - \dfrac{\partial\theta}{\partial p_i}\left\{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i},\psi\right) + \left(\varphi,\dfrac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\right\}\end{array}\right].$$

Or, il est facile de voir que tous les termes se détruisent deux à deux. Ainsi, par exemple, dans le premier terme on trouve des expressions de la forme :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial q_k}\frac{\partial\theta}{\partial p_k} - \frac{d^2\psi}{\partial p_i\partial p_k}\frac{\partial\theta}{\partial q_k} + \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\frac{\partial^2\theta}{\partial p_i\partial p_k} - \frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial^2\theta}{\partial p_i\partial q_k}\right\}.$$

Les deux premiers termes de la parenthèse sont détruits le premier par un terme de $\frac{\partial\theta}{\partial p_i}\left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)$, le second par un terme de $\frac{\partial\theta}{\partial q_i}\left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)$; les deux derniers termes sont détruits respectivement par un terme de $\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\theta}{\partial p_i}, \varphi\right)$ et par un terme de $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q_i}, \varphi\right)$.

On peut résumer ce qui précède en remarquant que l'expression proposée étant développée, chaque terme se compose d'un coefficient différentiel du second ordre de l'une des trois fonctions φ, ψ, θ, multiplié par un coefficient différentiel du premier ordre de chacune des deux autres. Par exemple, les termes où φ est différentié deux fois sont de la forme :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\frac{\partial\theta}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\theta}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i \partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial\theta}{\partial q_k},$$

k pouvant être égal à i; chacun de ces termes provient du second et du troisième terme de l'expression proposée.

Or, on voit facilement que, pour chaque terme provenant du second terme, il y a un terme semblable en signe contraire provenant du troisième terme.

Le même raisonnement s'appliquant aux termes dans lesquels ψ et θ sont différentiés deux fois, l'expression proposée sera identiquement nulle, et la formule est démontrée.

Rappelons encore que si l'on pose :

$$\alpha = \varphi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$
$$\beta = \psi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

on a, en vertu de la notation de Poisson (n° **69**) :

$$(\alpha, \alpha) = 0, \quad (\beta, \beta) = 0, \quad (\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha),$$
$$(-\alpha, \beta) = -(\alpha, \beta).$$

Rappelons aussi que, si u est une fonction de t, q_1, ... q_n, p_1, ... p_n, nous aurons :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right),$$

ou bien, en ayant égard aux équations canoniques (1) :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + (u, H). \qquad (2)$$

Cela posé, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Soient* α, β *deux intégrales quelconques* (*) *du système canonique, contenant chacune une constante, et résolues par rapport à ces constantes :*

$$\alpha = \varphi(t,\ q_1,\ \ldots q_n,\ p_1,\ \ldots p_n),$$
$$\beta = \psi(t,\ q_1,\ \ldots q_n,\ p_1,\ \ldots p_n),$$

l'expression :

$$(\alpha,\ \beta) = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \beta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \right),$$

sera constante pendant toute la durée du mouvement (**).

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que l'on a :

$$\frac{d(\alpha,\ \beta)}{dt} = 0,$$

en vertu des équations canoniques.

Or, on a, en remplaçant u par (α, β) dans la formule (2) :

$$\frac{d(\alpha,\ \beta)}{dt} = \frac{\partial(\alpha,\ \beta)}{\partial t} + \big((\alpha,\ \beta),\ \mathrm{H}\big) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t},\ \beta\right) + \left(\alpha,\ \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) + \big((\alpha,\ \beta),\ \mathrm{H}\big).$$

Mais nous avons vu que, si α, β sont des intégrales des équations canoniques, on a (n° **102**) :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\alpha,\ \mathrm{H}) = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + (\beta,\ \mathrm{H}) = 0.$$

(*) Pour abréger, nous appelons intégrale α, l'intégrale :

$$\alpha = \varphi(t,\ q_1,\ \ldots q_n,\ p_1,\ \ldots p_n).$$

(**) *Mécanique analytique de Lagrange*, t. I, note 7; Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, pp. 421 et 426; Donkin, *Philosophical Transactions*, 1854, p. 93.

Par conséquent,

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = -\big((\alpha, \mathrm{H}), \beta\big) - \big(\alpha, (\beta, \mathrm{H})\big) + \big((\alpha, \beta), \mathrm{H}\big)$$
$$= \big((\mathrm{H}, \alpha), \beta\big) + \big((\beta, \mathrm{H}), \alpha\big) + \big((\alpha, \beta), \mathrm{H}\big).$$

Or, le dernier membre de cette formule est identiquement nul; par conséquent,

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0,$$

et, par suite,

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

ce qui démontre le théorème de Poisson.

112. Ainsi donc, en résumé, si α, β sont deux intégrales des équations canoniques, on a toujours :

$$(\alpha, \beta) = const.$$

Mais, cette équation peut avoir lieu : 1° ou bien identiquement; 2° ou bien non identiquement.

1° L'expression (α, β) peut être identiquement nulle, ou elle peut se réduire identiquement à une constante déterminée, et l'on peut toujours faire en sorte que cette constante soit l'unité : il suffit pour cela de multiplier ou diviser l'une des intégrales α, β par un facteur convenable.

Si α, β sont deux *intégrales normales*, nous avons vu que (α, β) est égale à l'unité ou à zéro, suivant que α et β sont conjuguées ou non (n° **97**).

2° Si l'équation $(\alpha, \beta) = const.$ n'est pas identiquement satisfaite, c'est-à-dire si elle n'a lieu qu'en vertu des équations canoniques, alors la constante du second membre sera une *constante arbitraire*, et l'équation :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

sera, comme nous le verrons dans la suite, une intégrale des équations canoniques. Mais il peut ici se présenter deux cas :

Premier cas : Ou bien la fonction (α, β) peut être seulement une combinaison des seconds membres des intégrales α et β, et alors l'équation :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

n'est pas une intégrale nouvelle, mais seulement une combinaison des deux intégrales α et β.

Second cas : Ou bien la fonction (α, β) est une fonction de $t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, indépendante de α et β, et alors l'équation :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

est une *nouvelle intégrale* qui ne résulte pas d'une combinaison des deux autres.

Dans ce dernier cas seulement, le théorème de Poisson permet de trouver une nouvelle intégrale, lorsque l'on en connaît deux.

113. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, m intégrales quelconques, et soient f, g deux fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, de manière que f, g soient aussi deux intégrales. Il est facile de démontrer que l'on a :

$$(f, g) = \sum \frac{\partial(f, g)}{\partial(\alpha_i, \alpha_j)} (\alpha_i, \alpha_j),$$

la somme s'étendant à toutes les combinaisons binaires des m constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$.

En effet, on a :

$$(f, g) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right);$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial g}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_i} = \frac{\partial g}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial p_i}.$$

En substituant et réduisant, il vient :

$$(f, g) = \sum \frac{\partial(f, g)}{\partial(\alpha_i, \alpha_j)} (\alpha_i, \alpha_j). \tag{3}$$

D'après cela, si $k_1, k_2, \ldots k_m$ sont m fonctions, telles que f, g, des m constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, nous aurons pour une paire de ces fonctions :

$$(k_p, k_q) = \sum \frac{\partial(k_p, k_q)}{\partial(\alpha_i, \alpha_j)} (\alpha_i, \alpha_j), \tag{4}$$

la somme se rapportant aux combinaisons binaires de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, c'est-à-dire aux indices i et j.

114. Nous pouvons déduire de là les équations inverses que l'on obtient en considérant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ comme des fonctions de $k_1, k_2, \ldots k_m$. Nous trouverons ces équations inverses en raisonnant de la même manière que ci-dessus, ou bien en multipliant l'équation (4) par $\frac{\partial(\alpha_r, \alpha_s)}{\partial(k_p, k_q)}$, et faisant la somme par rapport à p, q. Nous aurons :

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \sum \frac{\partial(\alpha_i, \alpha_j)}{\partial(k_p, k_q)} (k_p, k_q), \tag{5}$$

la somme se rapportant aux combinaisons binaires de $k_1, k_2, \ldots k_m$.

Cette réciproque serait en défaut dans le cas où les équations qui expriment $k_1, k_2, \ldots k_m$, en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, ne sont pas indépendantes les unes des autres, hypothèse que nous excluons, en supposant que $k_1, k_2, \ldots k_m$ sont m intégrales distinctes.

115. Les formules que nous venons de trouver conduisent aux conséquences suivantes :

1° Si f est une fonction donnée de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, la détermination d'une autre fonction g, telle que l'on ait $(f, g) = 0$, dépend de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre (*).

(*) Nous reviendrons plus loin sur cette propriété.

2° Il est impossible que l'on ait $(k_i, k_j) = 0$, pour toutes les combinaisons binaires de $k_1, k_2, \dots k_m$, à moins que l'on n'ait $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, pour toutes les combinaisons binaires de $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$.

116. Comme exemple de la première de ces conséquences, considérons un cas qui se présente dans beaucoup de questions de dynamique.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ trois intégrales telles que l'on ait :

$$(\alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1, \quad (\alpha_3, \alpha_1) = \alpha_2, \quad (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_3,$$

et soit proposé de trouver une fonction g de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, telle que l'on ait :

$$(\alpha_1, g) = 0.$$

En faisant $f = \alpha_1$, dans la formule (3), il vient, en ayant égard aux formules précédentes :

$$(\alpha_1, g) = \frac{\partial(\alpha_1, g)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)}\alpha_3 + \frac{\partial(\alpha_1, g)}{\partial(\alpha_2, \alpha_3)}\alpha_1 + \frac{\partial(\alpha_1, g)}{\partial(\alpha_3, \alpha_1)}\alpha_2 = \alpha_3\frac{\partial g}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial g}{\partial \alpha_3}.$$

Par conséquent, la condition $(\alpha_1, g) = 0$ nous donne l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$\alpha_3\frac{\partial g}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial g}{\partial \alpha_3} = 0,$$

de laquelle on tire :

$$g = \psi(\alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

ψ étant une fonction arbitraire qui peut aussi contenir α_1 d'une manière arbitraire.

117. *Remarque.* — Il est facile de voir que si l'on pose :

$$f = \varphi(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

on aura identiquement :

$$(f, g) = 0,$$

quelle que soit la fonction g de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

On a, en effet,

$$(f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial g}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial g}{\partial \alpha_1}\right)\alpha_3$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial g}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}\frac{\partial g}{\partial \alpha_2}\right)\alpha_1$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}\frac{\partial g}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial g}{\partial \alpha_3}\right)\alpha_2.$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = 2\alpha_1 . \varphi', \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = 2\alpha_2 . \varphi', \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = 2\alpha_3 . \varphi';$$

par conséquent, tous les termes du second membre se détruisent deux à deux, et l'on a :

$$(f, g) = 0,$$

quelle que soit la fonction arbitraire g de α_1, α_2, α_3.

118. *Cas particulier.* — Si les constantes α_1, α_2, ... sont des éléments normaux, nous aurons, en les désignant par a_1, a_2, ... a_n, b_1, b_2, ... b_n :

$$(f, g) = -\sum \frac{\partial(f, g)}{\partial(a_i, b_i)},$$

f, g désignant deux fonctions quelconques des éléments normaux, ou deux intégrales quelconques (n° **99**).

Si, dans cette dernière formule, on fait $f = a_i$, on trouve :

$$(a_i, g) = -\frac{\partial g}{\partial b_i};$$

si l'on suppose $f = b_i$, il vient :

$$(b_i, g) = \frac{\partial g}{\partial a_i}.$$

119. *Remarque I.* — Dans le cas où l'intégrale des forces vives existe, nous pouvons supposer que la constante des forces vives h est un des éléments. On sait que l'élément conjugué à h est τ (n° **108**), et que t n'entre explicitement dans aucune des intégrales, excepté une seule, c'est l'intégrale conjuguée à h, qui est :

$$\tau = -t + \frac{\partial V}{\partial h}.$$

Si donc g est une intégrale quelconque ne renfermant pas t explicitement, elle ne peut pas contenir τ, puisque toute combinaison des intégrales normales qui renfermerait la constante τ, devrait la renfermer sous la forme $t + \tau$.

Or, pour chaque intégrale de cette espèce, nous aurons, en vertu de la formule $(a_i, g) = -\frac{\partial g}{\partial b_i}$,

$$(h, g) = -\frac{\partial g}{\partial \tau}.$$

Mais, g ne contenant pas τ explicitement, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = 0,$$

par conséquent,

$$(h, g) = 0.$$

Si, au contraire, g renferme explicitement le temps, elle le contient sous la forme $t + \tau$, et l'on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = 1,$$

et, par suite,

$$(h, g) = -1.$$

120. *Remarque II.* — Il est facile de conclure du théorème de Poisson que, si l'*intégrale des aires a lieu par rapport à deux des plans coordonnés, elle a aussi lieu par rapport au troisième plan.*

En effet, en posant :

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

on a pour deux de ces intégrales :

$$\int (xy' - yx')\,dm = \alpha,$$

$$\int (yz' - zy')\,dm = \beta.$$

Or, l'équation :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

nous donne :

$$\int (zx' - xz')\,dm = const.,$$

ce qui est la troisième intégrale des aires.

XX.

Théorèmes de M. Bertrand.

121. Poisson n'avait tiré aucune conséquence de son théorème. C'est Jacobi qui, trente ans après la découverte de Poisson, a le premier signalé l'utilité de ce théorème qu'il considère comme le plus important du calcul intégral (*). « Cependant, » dit-il, on le croirait complètement inconnu; car, on ne le » trouve dans aucun Traité de mécanique, ni dans aucun » ouvrage sur l'intégration des équations différentielles. » Jacobi n'hésite pas à en conclure que probablement personne, ni Lagrange, ni Poisson lui-même, n'en a soupçonné l'importance.

Le théorème de Poisson conduisit Jacobi au théorème suivant :

Théorème de Jacobi. — *Dans tout problème de mécanique auquel s'applique le principe des forces vives, si l'on connaît deux intégrales autres que celle des forces vives, on pourra trouver toutes les intégrales restantes, sans aucune nouvelle intégration.*

Nous avons démontré le théorème de Poisson étendu au cas

(*) Jacobi, *Nova methodus* (Journal de Crelle, t. LX, pp. 45 et 46); *Comptes rendus*, Paris, 1840; *Journal de Liouville*, t. V, p. 350.

général des équations canoniques, en supposant que H est une fonction de t, $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$.

Il est facile d'en déduire le théorème de Jacobi.

En effet, puisque, en vertu du théorème de Poisson, (α, β) est constante pendant toute la durée du mouvement, il en résulte que cette quantité égalée à une constante arbitraire est une troisième intégrale du système proposé.

Il paraîtrait donc, et c'est en cela que consiste le théorème de Jacobi (*), qu'il suffit de connaître deux intégrales d'un problème de mécanique, ou, en général, d'un système canonique, pour avoir la solution complète par une série de différentiations seulement.

En effet, (α, β) étant une fonction de $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, t, si on l'égale à une constante arbitraire, l'équation :

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$

sera une intégrale du système.

En appliquant de nouveau le théorème, nous aurons une nouvelle intégrale :

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$

et ainsi de suite.

122. Mais l'examen approfondi de cette question a montré à M. Bertrand (**) que la méthode d'intégration fondée sur le théorème de Poisson est loin d'avoir l'importance que Jacobi lui avait attribuée d'abord. *Les cas où ce théorème conduit à une nouvelle intégrale sont plus rares que ceux où il n'atteint pas ce but.*

Quelquefois aucune des combinaisons deux à deux par le théorème de Poisson, des intégrales qui forment la solution complète, ne donne une intégrale nouvelle; dans d'autres cas, une partie de ces intégrales combinées deux à deux ne donne

(*) *Nova methodus*, p. 43.

(**) *Journal de Liouville*, t. XVII; Imschenetsky, p. 182.

pas d'intégrale nouvelle. M. Bertrand, profitant des cas d'exception, a imaginé une méthode spéciale d'intégration des équations canoniques. Il a reconnu que, dans ces cas d'exception, il est souvent possible de trouver un nombre plus ou moins grand d'intégrales nouvelles au moyen des intégrales déjà connues. Si l'on parvient ainsi à connaître la moitié des intégrales, on peut, comme nous l'avons vu (n° **104**), en appliquant le théorème de M. Liouville, compléter la solution du problème au moyen d'une fonction V qui donnera toutes les autres intégrales.

123. Comme nous l'avons vu (n° **112**), les deux intégrales données :

$$\alpha = const., \quad \beta = const.,$$

ne conduisent pas à une nouvelle intégrale par l'application du théorème de Poisson :

1° Lorsque l'expression (α, β) se réduit identiquement à une constante numérique quelconque, laquelle peut être nulle;

2° Lorsque l'expression (α, β) se réduit à une fonction de α et de β, en sorte que l'expression :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

est une combinaison algébrique des intégrales α et β.

124. Ainsi, par exemple, si dans les équations canoniques la fonction H ne renferme pas explicitement le temps t, on sait (n° **17**) que l'équation :

$$H = const.,$$

est une intégrale de ces équations.

Il est facile de voir que, si l'on prend cette intégrale pour l'intégrale α, toute autre intégrale, combinée avec elle par la formule de Poisson, donnera un résultat illusoire.

En effet, soit d'abord :

$$\beta = \varphi(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

une autre intégrale *quelconque* ne renfermant pas explicitement le temps.

En écrivant que β est une intégrale des équations canoniques, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{d\beta}{dt} = 0,$$

en vertu des équations canoniques, il vient :

$$\sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) = 0,$$

ou bien :

$$\sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = 0;$$

or, cette équation n'est autre que :

$$(\beta, H) = 0.$$

Si l'intégrale β renferme explicitement le temps, et si l'on a :

$$\beta = t + \psi(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n),$$

la fonction ψ ne renfermant pas explicitement le temps, nous aurons :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t}\right).$$

Or, si nous écrivons que β est une intégrale des équations canoniques, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{d\beta}{dt} = 0,$$

en vertu des équations canoniques, il vient, en observant que :

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = 1,$$

l'équation :

$$1 + \sum \left(\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = 0,$$

ou bien :

$$1 + (\beta, H) = 0,$$

d'où :

$$(\beta, H) = -1.$$

Ainsi donc, dans le cas où H ne renferme pas explicitement le temps t, il est impossible de former une nouvelle intégrale par la formule de Poisson appliquée à deux intégrales dont l'une serait $H = const.$

C'est ce qui arrivera, en particulier, lorsque l'une des deux intégrales α, β sera l'*intégrale des forces vives*. Nous aurons le théorème suivant :

Théorème. — *Toute intégrale combinée avec celle des forces vives donne à l'équation de Poisson une forme illusoire.*

125. Le théorème de Poisson peut, comme nous venons de le dire, conduire de deux manières différentes à un résultat illusoire. Il peut arriver : ou bien que l'équation de Poisson se réduise à une identité, telle que $0 = 0$, ou $1 = 1$, ou bien qu'elle donne une intégrale qui soit une combinaison de celles dont on l'a déduite.

M. Bertrand a démontré (*) que ces deux cas se rattachent l'un à l'autre; il en conclut, par conséquent, que, pour les étudier, il suffit de considérer les intégrales qui, combinées avec une intégrale donnée, donnent à l'expression de Poisson une valeur identiquement constante. Il indique ensuite le moyen de trouver l'une de ces intégrales lorsque l'autre est connue, et il prouve qu'il en existe toujours.

126. Voici le théorème qui permet de rattacher l'un à l'autre les deux cas d'exception :

Théorème. — *Si $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$ sont deux intégrales d'un même problème, telles que (α, β) est une fonction de α et de β, il existe toujours une fonction de α et de β, qui, égalée à une constante γ, donnera une intégrale telle que (α, γ) soit identiquement égale à l'unité.*

En effet, on a, par définition :

$$(\alpha, \gamma) = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \gamma}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} \right);$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XVII, p. 393.

or, γ étant une fonction de α et de β, on a :

$$\frac{\partial\gamma}{\partial p_i} = \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p_i} + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial q_i} = \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial q_i},$$

par suite, en réduisant,

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta)\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}.$$

Si donc (α, β) est une fonction de α et de β, on pourra déterminer γ par l'équation différentielle partielle :

$$(\alpha, \beta)\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = 1,$$

laquelle nous donne l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d\gamma}{1} = \frac{d\beta}{(\alpha, \beta)}.$$

Par conséquent, on peut toujours faire en sorte que :

$$(\alpha, \gamma) = 1.$$

Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante :

127. Théorème. — *Si $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$ sont deux intégrales d'un même problème, et si, en les combinant par la formule de Poisson, on trouve une troisième intégrale :*

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$

puis une quatrième :

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$

puis une cinquième :

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon,$$

et ainsi de suite; si l'on arrive enfin à une intégrale :

$$(\alpha, \eta) = \zeta,$$

telle que l'on ait :

$$\zeta = F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \eta)\ (^*),$$

il existe toujours une ou plusieurs intégrales de la forme

$$\xi = f(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \eta),$$

qui, combinées avec α, donnent identiquement :

$$(\alpha,\ \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \xi) = 1.$$

Pour démontrer ce théorème, considérons l'expression :

$$(\alpha,\ \xi) = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \xi}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \xi}{\partial q_i} \right),$$

et remplaçons les dérivées de ξ par leurs valeurs obtenues en considérant ξ comme une fonction composée; nous aurons, après quelques réductions :

$$\begin{aligned}(\alpha,\ \xi) &= (\alpha,\ \beta) \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + (\alpha,\ \gamma) \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \cdots + (\alpha,\ \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \\ &= \gamma \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \delta \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \cdots + F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

Si maintenant on veut déterminer ξ de manière que l'on ait :

$$(\alpha,\ \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \xi) = 1,$$

on devra intégrer l'une des deux équations linéaires aux dérivées partielles suivantes :

$$\gamma \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \delta \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \cdots + F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 0,$$

ou bien :

$$\gamma \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \delta \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \cdots + F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 1,$$

(*) Il est évident que l'on doit arriver à une intégrale ζ jouissant de cette propriété d'être une fonction des précédentes; car, la suite des intégrales distinctes ne peut pas se continuer indéfiniment, puisque le nombre total des intégrales des équations canoniques est limité.

dont les intégrales satisferont à l'une ou à l'autre des conditions précédentes.

Donc, les intégrales des systèmes d'équations simultanées ordinaires :

$$\frac{d\beta}{\gamma}=\frac{d\gamma}{\delta}=\frac{d\delta}{\varepsilon}=\dots=\frac{d\eta}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots\eta)}=\frac{d\xi}{0},$$
$$\frac{d\beta}{\gamma}=\frac{d\gamma}{\delta}=\frac{d\delta}{\varepsilon}=\dots=\frac{d\eta}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots\eta)}=\frac{d\xi}{1},$$

nous donneront les intégrales générales des équations linéaires ci-dessus. Or, si l'équation en ξ renferme k variables indépendantes, son intégrale générale sera une fonction arbitraire de $k-1$ fonctions distinctes, et elle contiendra, par conséquent, $k-1$ intégrales distinctes satisfaisant à la condition énoncée.

On conclut de là le théorème suivant :

128. Théorème. — *Une intégrale étant donnée, il y en a une ou plusieurs autres qui, combinées avec celle-ci, conduisent à des équations identiques.*

Soit :

$$\alpha=\varphi(q_1,\ \dots q_n,\ p_1,\ \dots p_n),$$

une intégrale donnée d'un problème de mécanique.

Si l'on prend une seconde intégrale du même problème :

$$\beta=\psi(q_1,\ \dots q_n,\ p_1,\ \dots p_n),$$

et si on la combine avec α, on formera l'expression (α, β).

Si cette expression est identiquement constante, le théorème est démontré; sinon l'expression :

$$(\alpha,\ \beta)=\gamma,$$

sera une nouvelle intégrale.

On formera alors l'expression (α, γ), laquelle sera identiquement constante ou non : si (α, γ) est constante, la proposition est démontrée, sinon l'on posera $(\alpha, \gamma)=\delta$, équation qui sera une nouvelle intégrale, et ainsi de suite.

En continuant ainsi, on arrivera à une fonction ζ qui est :

1° Ou bien une constante, et la proposition est démontrée, puisque la fonction précédente satisfait à la condition énoncée;

2° Ou bien une fonction des précédentes (*) : dans ce cas, comme on sait (n° **127**), en formant une fonction ξ convenable des intégrales successivement obtenues, on aura une intégrale qui, combinée avec α, donnera un résultat identique. On a même vu (n° **127**) que l'on peut obtenir plusieurs intégrales distinctes les unes des autres, telles que l'on ait :

$$(\alpha,\ \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \xi) = 1.$$

Nous avons vu (n° **124**) que l'intégrale des forces vives donne toujours un résultat identique, quelle que soit l'intégrale avec laquelle on la combine. Combinée avec une intégrale α ne contenant pas explicitement le temps, elle donne $(\alpha,\ H) = 0$; et combinée avec une intégrale renfermant explicitement le temps, elle donne $(\alpha,\ H) = -1$.

On pourrait se demander si l'intégrale ξ dont nous venons de démontrer l'existence, et telle que l'on ait :

$$(\alpha,\ \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \xi) = 1,$$

n'est pas ou l'intégrale des forces vives, ou une fonction de cette dernière.

Le théorème suivant prouve que l'intégrale des forces vives n'est pas la seule qui remplisse cette condition, ce qui d'ailleurs est déjà évident, puisqu'il existe un grand nombre de fonctions ξ.

129. Théorème. — *Quelle que soit une intégrale donnée :*

$$\alpha = \varphi(q_1 \dots q_n,\ p_1 \dots p_n),$$

il existe toujours au moins une autre intégrale λ, qui n'est ni l'équation des forces vives, ni une fonction de celle-ci, et qui, combinée avec α, donne un résultat illusoire :

$$(\alpha,\ \lambda) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \lambda) = 1.$$

(*) Car les intégrales distinctes sont en nombre limité.

Soit β une intégrale quelconque différente de celle des forces vives :

$$\beta = \varphi(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n);$$

d'après ce que nous avons vu (nº **127**), si, en combinant α avec β, puis avec les intégrales résultantes, on arrive, après k opérations, à une intégrale rentrant dans les précédentes, la fonction qui, combinée avec α, donne un résultat illusoire, est déterminée par une équation aux dérivées partielles à k variables indépendantes. Cette fonction aura, par conséquent, $k - 1$ formes différentes.

Pour $k = 1$, c'est-à-dire si le cas se présente après une seule opération, l'intégrale sera une combinaison de α et de β; par suite, elle est différente de celle des forces vives.

Pour $k = 2$, nous aurons :

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$

$$(\alpha, \gamma) = f(\alpha, \beta, \gamma);$$

or, si l'on cherche par la méthode indiquée ci-dessus (nº **127**), une intégrale $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ qui, combinée avec α, donne un résultat identique :

$$(\alpha, \psi) = 1, \quad \text{ou} \quad (\alpha, \psi) = 0,$$

cette intégrale sera ou non celle des forces vives.

Si cette intégrale ψ est précisément l'équation des forces vives, nous aurons :

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{H},$$

d'où l'on tire :

$$\gamma = \zeta(\alpha, \beta, \mathrm{H}).$$

Considérons maintenant une fonction $\xi(\alpha, \beta, \mathrm{H})$ qui, évidemment, sera une intégrale; nous aurons :

$$(\alpha, \xi) = (\alpha, \beta)\frac{\partial\xi}{\partial\beta} + (\alpha, \mathrm{H})\frac{\partial\xi}{\partial\mathrm{H}} = (\alpha, \beta)\frac{\partial\xi}{\partial\beta} = \zeta(\alpha, \beta, \mathrm{H})\frac{\partial\xi}{\partial\beta} \ (^*).$$

(*) Puisque $(\alpha, \mathrm{H}) = 0$.

Cela posé, si l'on détermine ξ par la condition que l'on ait la relation :

$$\zeta(\alpha, \beta, H)\frac{\partial\xi}{\partial\beta} = 1,$$

la fonction ξ ainsi déterminée satisfera à la condition proposée :

$$(\alpha, \xi) = 1;$$

de plus, elle sera distincte de celle des forces vives qui donnerait :

$$(\alpha, H) = 0,$$

puisque α ne contient pas explicitement le temps.

Ayant examiné le cas où l'on suppose $k = 2$, supposons qu'en combinant α avec β, puis avec les intégrales γ, δ, ... que l'on obtient successivement, on trouve une intégrale ε pour laquelle on ait :

$$(\alpha. \varepsilon) = 1,$$

cette intégrale ε sera évidemment différente de celle des forces vives, et la proposition sera encore démontrée.

Si, au contraire, on trouve :

$$(\alpha, \varepsilon) = 0,$$

et que ε soit précisément l'intégrale des forces vives, ou une fonction $\Pi(H)$ de cette intégrale, on aura, en désignant par δ l'intégrale qui, dans la série des opérations, précède immédiatement ε,

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon = \Pi(H).$$

Or, il est évident que si, au lieu de l'intégrale β, que nous avons prise pour point de départ, on avait pris $\frac{\beta}{\Pi(H)}$, toutes les intégrales successivement obtenues auraient été divisées par $\Pi(H)$, et l'on aura eu :

$$\left(\alpha, \frac{\delta}{\Pi(H)}\right) = 1,$$

de sorte que $\frac{\delta}{\Pi(H)}$ est une intégrale distincte de celle des forces vives, et qui, combinée avec α, donne un résultat identique.

Des théorèmes précédents, M. Bertrand déduit celui-ci :

130. Théorème. — *Quelle que soit une intégrale donnée α, on peut toujours compléter la solution du problème en y adjoignant d'autres intégrales $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2n-1}$, lesquelles, combinées avec α, donnent à l'équation de Poisson une forme identique :*

$$(\alpha, \beta_1) = 1,\ (\alpha, \beta_2) = 0,\ \ldots (\alpha, \beta_{2n-1}) = 0.$$

Comme nous l'avons vu par le théorème précédent, quelle que soit l'intégrale α, il existe toujours une fonction β_1, telle que :

$$(\alpha, \beta_1) = 1.$$

Nous devons maintenant démontrer qu'il existe $2n - 2$ intégrales distinctes de α et de β_1, qui, combinées avec α, donnent $(\alpha, \beta) = 0$.

Désignons par μ le nombre des intégrales satisfaisant à cette condition, $\beta_2, \ldots \beta_{\mu+1}$, et supposons que l'on ait $\mu + 1 < 2n - 1$. Il existera évidemment alors d'autres intégrales indépendantes de celles-là, ainsi que de α et de β_1.

Si $\beta_{\mu+2}$ est une de ces intégrales, nous aurons :

$$(\alpha, \beta_{\mu+2}) = \beta_{\mu+3},$$

$\beta_{\mu+3}$ étant, par hypothèse, différent de zéro. Je dis que $\beta_{\mu+3}$ sera aussi différent de l'unité; car, sans cela, des équations :

$$(\alpha, \beta_{\mu+2}) = 1, \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta_1) = 1,$$

on déduirait évidemment :

$$(\alpha, \beta_{\mu+2} - \beta_1) = 0;$$

d'où il résulterait que $\beta_{\mu+2} - \beta_1$ serait une fonction de β_2, $\beta_3, \ldots \beta_{\mu+1}$, et, par suite, que $\beta_{\mu+2}$ ne serait pas une nouvelle intégrale. Par conséquent, $\beta_{\mu+3}$ est différent de l'unité.

Puisque $\beta_{\mu+3}$ est différent de zéro et de l'unité, posons :

$$(\alpha, \beta_{\mu+3}) = \beta_{\mu+4},$$

$$(\alpha, \beta_{\mu+4}) = \beta_{\mu+5}, \text{ etc.}$$

Nous finirons évidemment par trouver une intégrale β qui sera identiquement constante, ou bien une fonction des précédentes.

Soit :

$$\beta_{\mu+i} = \mathrm{F}(\alpha, \beta_{\mu+2}, \beta_{\mu+3}, \ldots \beta_{\mu+i-1}),$$

cette intégrale.

Cela posé, désignons par γ une fonction des intégrales α, $\beta_{\mu+2}$, $\beta_{\mu+3}$, ... $\beta_{\mu+i-1}$, et posons :

$$\gamma = \varpi(\alpha, \beta_{\mu+2}, \ldots \beta_{\mu+i-1});$$

nous aurons :

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta_{\mu+2})\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+2}} + (\alpha, \beta_{\mu+3})\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+3}} + \cdots + (\alpha, \beta_{\mu+i-1})\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}}$$

$$= \beta_{\mu+3}\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+2}} + \beta_{\mu+4}\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+3}} + \cdots + \beta_{\mu+i}\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}},$$

ou bien :

$$(\alpha, \gamma) = \beta_{\mu+3}\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+2}} + \beta_{\mu+4}\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+3}} + \cdots + \mathrm{F}(\alpha, \beta_{\mu+2}, \ldots \beta_{\mu+i-1})\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}}.$$

Si l'on pose :

$$(\alpha, \gamma) = 0,$$

on a l'équation différentielle partielle :

$$\beta_{\mu+3}\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+2}} + \beta_{\mu+4}\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+3}} + \cdots + \mathrm{F}(\alpha, \beta_{\mu+2}, \ldots \beta_{\mu+i-1})\frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}} = 0,$$

qui pourra servir à déterminer la fonction ϖ ou γ en fonction de :

$$\alpha, \beta_{\mu+2}, \beta_{\mu+3}, \ldots \beta_{\mu+i-1}.$$

Or, γ sera une intégrale nouvelle; car, sans cela, γ serait une fonction des intégrales primitives α, β_1, ... $\beta_{\mu+1}$, et l'on aurait une relation telle que :

$$\gamma = f(\alpha, \beta_1, \ldots \beta_{\mu+1});$$

mais, γ satisfaisant à l'équation :

$$(\alpha, \gamma) = 0,$$

on aurait :

$$(\alpha, f) = 0,$$

et, par conséquent, il existerait une relation entre les intégrales α, β_1, β_2, ... $\beta_{\mu+1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que toutes les intégrales :

$$\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_{\mu+1},$$

sont différentes entre elles.

Nous avons donc fait une hypothèse impossible en supposant $\mu+1 < 2n-1$. Par conséquent, $\mu+1 = 2n-1$, et le théorème est démontré.

131. Les théories précédentes peuvent donc être résumées de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Étant donnée une intégrale α, autre que celle des forces vives, et indépendante du temps, la solution du problème se composera :*

1° *De* 2n — 2 *intégrales comprenant α, qui sont indépendantes du temps, et telles que, combinées avec α, elles donnent :*

$$(\alpha, \lambda) = 0,$$

λ étant l'une quelconque d'entre elles;

2° *D'une autre intégrale μ, également indépendante du temps, et telle que :*

$$(\alpha, \mu) = 1;$$

3° *D'une intégrale ν de la forme :*

$$\nu = \varphi(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n) - t,$$

telle que :

$$(\alpha, \nu) = 0.$$

132. *Remarque I.* — Si l'on se rappelle la définition que nous avons donnée des intégrales conjuguées (n° **97**), on verra que les deux intégrales α et μ qui nous donnent :

$$(\alpha, \mu) = 1,$$

sont conjuguées.

On verra aussi que l'intégrale ν qui contient le temps, est le conjuguée de l'intégrale des forces vives. En effet, on aura, comme il est facile de s'en assurer :

$$(\nu,\ H) = 1.$$

133. *Remarque II.* — Pour appliquer la théorie de M. Bertrand, il faut connaître une intégrale α, et alors on a à déterminer $2n - 1$ intégrales satisfaisant à l'équation différentielle partielle linéaire du premier ordre :

$$(\alpha,\ \lambda) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \lambda) = 1, \tag{A}$$

λ étant la fonction inconnue.

Mais la fonction λ doit aussi satisfaire à l'équation :

$$(\lambda,\ H) = 0. \tag{B}$$

Si donc on peut intégrer l'équation (B), il suffira de chercher, parmi les solutions de (B), celles qui satisfont à l'équation (A); sinon, on aura à chercher les solutions communes aux équations (A) et (B).

134. Nous avons vu (n° **130**) qu'une intégrale α étant donnée, on peut compléter la solution du problème au moyen des intégrales β_1, β_2, ... β_{2n-1}, qui, combinées avec α, donnent toutes à la formule de Poisson une forme identique.

Il ne faut cependant pas en conclure que toutes les intégrales du problème soient dans le même cas.

Soit, par exemple, l'intégrale la plus générale :

$$\eta = f(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2n-1});$$

nous aurons :

$$(\alpha,\ \eta) = (\alpha,\ \beta_1)\frac{\partial\eta}{\partial\beta_1} + (\alpha,\ \beta_2)\frac{\partial\eta}{\partial\beta_2} + \cdots + (\alpha,\ \beta_{2n-1})\frac{\partial\eta}{\partial\beta_{2n-1}}$$

$$= (\alpha,\ \beta_1)\frac{\partial\eta}{\partial\beta_1} = \frac{\partial\eta}{\partial\beta_1}.$$

Par suite, l'expression $(\alpha,\ \eta)$ ne sera identiquement constante que si $\frac{\partial\eta}{\partial\beta_1}$ est constant lui-même.

Il en résulte que toutes les intégrales η, en nombre infini, provenant de la combinaison de α, β_2, β_3, ... β_{2n-1}, donneront un résultat identiquement nul, si on les combine avec α. Au contraire, les intégrales qui contiennent β_1 peuvent conduire à des résultats non identiques.

135. Comme application de la méthode de M. Bertrand, nous reprendrons le problème du *mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force en raison inverse du carré de la distance.*

Les équations du mouvement étant :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{dy}{dt} &= y', \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\mu y}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

le principe des aires nous donne l'intégrale :

$$xy' - yx' = const. = \alpha. \tag{2}$$

Cherchons une seconde intégrale :

$$\beta = \psi(x, y, x', y', t), \tag{3}$$

satisfaisant à l'une des conditions :

$$(\beta, \alpha) = 0, \quad \text{ou} \quad (\beta, \alpha) = 1.$$

Nous aurons les deux équations différentielles partielles linéaires :

$$-y'\frac{\partial\beta}{\partial x'} - y\frac{\partial\beta}{\partial x} + x'\frac{\partial\beta}{\partial y'} + x\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$-y'\frac{\partial\beta}{\partial x'} - y\frac{\partial\beta}{\partial x} + x'\frac{\partial\beta}{\partial y'} + x\frac{\partial\beta}{\partial y} = 1. \tag{5}$$

Pour intégrer la première, nous devons intégrer le système d'équations simultanées ordinaires :

$$\frac{dx'}{-y'} = \frac{dx}{-y} = \frac{dy'}{x'} = \frac{dy}{x} = \frac{d\beta}{0};$$

on trouve facilement que les quatre intégrales de ce système sont :

$$\beta = a_1, \quad x^2 + y^2 = a_2, \quad x'^2 + y'^2 = a_3, \quad xx' + yy' = a_4,$$

et, par conséquent, l'intégrale la plus générale de l'équation (4) est :

$$\beta = \mathrm{F}(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy'),$$

ou bien, si le temps t doit y figurer :

$$\beta = t + \mathrm{F}(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy').$$

On verra de même que l'intégration de l'équation (5) se ramène à l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx'}{-y'} = \frac{dx}{-y} = \frac{dy'}{x'} = \frac{dy}{x} = \frac{d\beta}{1};$$

on en tire :

$$\frac{dx}{d\beta} = -y, \quad \frac{dy}{d\beta} = x, \quad \frac{dx'}{d\beta} = -y', \quad \frac{dy'}{d\beta} = x',$$

d'où l'on déduit les intégrales :

$$x = \mathrm{A} \cos(\beta + k), \qquad y = \mathrm{A} \sin(\beta + k),$$
$$x' = \mathrm{A}' \cos(\beta + k'), \qquad y' = \mathrm{A}' \sin(\beta + k'),$$

A, A′, k, k' étant des constantes arbitraires. Ces dernières nous donnent :

$$x^2 + y^2 = b_1, \quad x'^2 + y'^2 = b_2, \quad xx' + yy' = b_3,$$
$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \beta = b_4.$$

L'intégrale la plus générale de l'équation (5) est, par conséquent :

$$\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \mathrm{F}_1(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy'),$$

ou bien, si t doit figurer dans l'intégrale,

$$\beta = t + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \mathrm{F}_1(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy').$$

Si maintenant nous posons :

$$x^2+y^2=u,\quad x'^2+y'^2=v,\quad xx'+yy'=w,$$

ces deux systèmes d'intégrales pourront s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}\beta&=F(u,\ v,\ w),\\ \beta&=t+F(u,\ v,\ w),\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+F_1(u,\ v,\ w),\\ \beta&=t+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+F_1(u,\ v,\ w).\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

136. Il nous reste maintenant à déterminer quelles sont les intégrales du problème comprises dans les formes (6) et (7). Pour cela, nous devons exprimer que les dérivées totales par rapport à t sont nulles, en vertu des équations du mouvement.

Considérons d'abord la première équation (6) :

$$\beta=F(u,\ v,\ w).$$

La condition $\frac{d\beta}{dt}=0$, nous donne :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\beta}{\partial x'}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial\beta}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}=0.\qquad(8)$$

Or, on a :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=2x\frac{\partial F}{\partial u}+x'\frac{\partial F}{\partial w},$$

de même :

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}=2y\frac{\partial F}{\partial u}+y'\frac{\partial F}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x'}=2x'\frac{\partial F}{\partial v}+x\frac{\partial F}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y'}=2y'\frac{\partial F}{\partial v}+y\frac{\partial F}{\partial w}.$$

Substituant dans l'équation (8), et ayant égard aux équations (1), il vient :

$$2w\frac{\partial F}{\partial u} - 2\frac{\mu w}{r^3}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(v - \frac{\mu u}{r^3}\right)\frac{\partial F}{\partial w} = 0,$$

ou bien, en remplaçant r par sa valeur en fonction de u :

$$2w\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\partial F}{\partial w} = 0.$$

Or, l'intégration de cette équation différentielle partielle se ramène à l'intégration du système ordinaire :

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{-\frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}} = \frac{dw}{v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}} = \frac{dF}{0};$$

on en déduit les équations suivantes :

$$dF = 0, \quad \mu u^{-\frac{3}{2}}du + dv = 0, \quad 2wdw = vdu + udv,$$

dont les intégrales sont :

$$F = c, \quad v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}} = c', \quad uv - w^2 = c''.$$

Par suite, la valeur générale de β est :

$$\beta = \varphi\left(v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}}, \quad uv - w^2\right),$$

ou bien :

$$\beta = \varphi\left(x'^2 + y'^2 - \frac{2\mu}{r}, \quad (xy' - yx')^2\right).$$

Cette intégrale n'est autre qu'une combinaison de l'intégrale des forces vives et de l'intégrale des aires; par conséquent, elle ne peut former une nouvelle intégrale du problème.

Si nous prenons maintenant la seconde équation (6) :

$$\beta = t + F(u, v, w),$$

et si nous exprimons qu'elle est une intégrale, nous trouvons l'équation suivante :

$$1+2w\frac{\partial F}{\partial u}-2\frac{\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial v}+\left(v-\frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\partial F}{\partial w}=0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut poser :

$$\frac{dF}{-1}=\frac{du}{2w}=\frac{dv}{-\frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}}=\frac{dw}{v-\frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}};$$

nous concluons de là :

$$dF=-\frac{du}{2w},\quad v-2\mu u^{-\frac{1}{2}}=c_1,\quad uv-w^2=c_2,$$

d'où l'on tire :

$$dF=\frac{-du}{2\sqrt{-c_2+u\left(c_1+2\mu u^{-\frac{1}{2}}\right)}},$$

et, en intégrant,

$$F=-\int\frac{du}{2\sqrt{-c_2+u\left(c_1+2\mu u^{-\frac{1}{2}}\right)}}+c_3.$$

Par suite, la valeur générale de β est :

$$\beta=t-\int\frac{du}{2\sqrt{-c_2+u\left(c_1+2\mu u^{-\frac{1}{2}}\right)}}+\varphi\left(v-2\mu u^{-\frac{1}{2}},\ uv-w^2\right).$$

En égalant la fonction arbitraire φ à zéro, et remplaçant u par r^2, on trouve :

$$\beta=t-\int\frac{dr}{\sqrt{-\frac{c_2}{r^2}+\frac{2\mu}{r}+c_1}};\qquad(9)$$

c'est l'*équation qui détermine le temps en fonction du rayon vecteur.*

Cherchons maintenant si le problème admet des intégrales de la forme :

$$\beta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} + F_1(u,\ v,\ w).$$

La condition $\frac{d\beta}{dt} = 0$, nous donne :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial x'}\,\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial y'}\,\frac{dy'}{dt} = 0.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = -\frac{y}{u} + 2x\frac{\partial F_1}{\partial u} + x'\frac{\partial F_1}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{x}{u} + 2y\frac{\partial F_1}{\partial u} + y'\frac{\partial F_1}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x'} = 2x'\frac{\partial F_1}{\partial v} + x\frac{\partial F_1}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y'} = 2y'\frac{\partial F_1}{\partial v} + y\frac{\partial F_1}{\partial w}.$$

Par suite, en substituant, et ayant égard aux équations (1) :

$$\frac{xy'-yx'}{u} + 2w\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{2\mu}{r^3}(xx'+yy')\frac{\partial F_1}{\partial v} + \left(x'^2+y'^2-\frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial F_1}{\partial w} = 0,$$

ou bien, en introduisant les quantités u, v, w :

$$\frac{\sqrt{uv-w^2}}{u} + 2w\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F_1}{\partial v} + \left(v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\partial F_1}{\partial w} = 0.$$

La fonction F_1 est donc déterminée par l'intégration du système ordinaire suivant :

$$\frac{dF_1}{-\dfrac{\sqrt{uv-w^2}}{u}} = \frac{du}{2w} = \frac{dv}{-\dfrac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}} = \frac{dw}{v - \dfrac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}};$$

on en tire :

$$v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}} = c_1, \quad uv - w^2 = c_2,$$

$$\frac{du}{2w} = -\frac{u dF_1}{\sqrt{uv - w^2}}.$$

On a donc :

$$dF_1 = -\frac{\sqrt{uv - w^2}}{2uw}\, du,$$

ou bien :

$$dF_1 = -\frac{\sqrt{c_2}\,du}{2u\sqrt{c_1 u + 2\mu u^{\frac{1}{2}} - c_2}}.$$

Par suite,

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{c_2}\,du}{2u\sqrt{c_1 u + 2\mu u^{\frac{1}{2}} - c_2}} + \varphi_1\left(v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}},\ uv - w^2\right).$$

En égalant à zéro la fonction arbitraire φ_1, et remplaçant u par r^2, il vient :

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{c_2}\,dr}{r^2\sqrt{c_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{c_2}{r^2}}}; \tag{10}$$

c'est précisément l'*équation de la trajectoire.*

Il est facile de voir que la quatrième intégrale (7) :

$$\beta = t + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + F_1(u, v, w),$$

n'est autre qu'une combinaison des intégrales (9) et (10), et, par conséquent, elle ne fournit pas une nouvelle solution du problème.

Les intégrales (9) et (10), jointes à celle des aires et à celle des forces vives donnent la solution complète du problème.

137. La marche que nous avons suivie est la suivante :

Après avoir trouvé une intégrale autre que celle des forces vives, nous en obtenons une troisième, *qui contient le temps*, par la condition que, combinée avec la première, elle donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$; puis, nous trouvons une quatrième intégrale, ne renfermant pas explicitement le temps, et qui complète la solution, en exprimant que l'équation de Poisson se réduit à $1 = 1$.

Il est facile de démontrer que cette marche sera toujours la même, lorsqu'il s'agira du mouvement d'un point dans un plan, ou, plus généralement, toutes les fois que les coordonnées des points du système peuvent être exprimées en fonction de deux variables indépendantes. Nous allons donc démontrer que, dans le cas d'un tel problème, connaissant l'intégrale des forces vives et une intégrale α, il sera impossible d'en trouver une autre β, distincte des deux premières, ne renfermant pas explicitement le temps, et telle que l'on ait $(\alpha, \beta) = 0$; mais, il y en a une autre telle que l'on ait $(\alpha, \beta) = 1$. Au contraire, on peut toujours trouver une intégrale renfermant explicitement le temps, et telle que l'on ait $(\alpha, \beta) = 0$.

Soient, en effet,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

les équations différentielles du mouvement.

Soient $H = h$, l'intégrale des forces vives, et :

$$\varphi(q_1, q_2, p_1, p_2) = \alpha,$$

une deuxième intégrale. Cherchons s'il existe une troisième intégrale :

$$\psi(q_1, q_2, p_1, p_2) = \beta,$$

qui, combinée avec la seconde $\varphi = \alpha$, donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$.

En écrivant que la condition $(\alpha, \beta) = 0$ est satisfaite, on a :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2} = 0; \tag{12}$$

en outre, si β est une intégrale des équations (11), il vient, en supposant qu'elle ne contienne pas le temps :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2} = 0; \tag{13}$$

enfin, l'identité $(\beta, \beta) = 0$, nous donne :

$$\frac{\partial\beta}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1} - \frac{\partial\beta}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1} + \frac{\partial\beta}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2} - \frac{\partial\beta}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2} = 0. \tag{14}$$

Si l'on considère les quantités $\frac{\partial\beta}{\partial p_1}, \frac{\partial\beta}{\partial q_1}, \frac{\partial\beta}{\partial p_2}, \frac{\partial\beta}{\partial q_2}$, comme des inconnues, les équations (12), (13) et (14) seront des équations du premier degré par rapport à ces inconnues, pourvu que, dans l'équation (14), on regarde les coefficients comme égaux aux inconnues elles-mêmes. Ces équations feront connaître les rapports :

$$\frac{\partial\beta}{\partial p_1} : \frac{\partial\beta}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial p_2} : \frac{\partial\beta}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial q_2} : \frac{\partial\beta}{\partial q_1}.$$

Or, ces équations seront aussi vérifiées, si l'on remplace les dérivées $\frac{\partial\beta}{\partial p_1}, \frac{\partial\beta}{\partial p_2}, \frac{\partial\beta}{\partial q_1}, \frac{\partial\beta}{\partial q_2}$, par les dérivées $\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}, \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}, \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}, \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}$ (*). Il est, en effet, facile de voir que, par cette transformation, la première équation devient identique, la deuxième exprimera que α est une intégrale des équations (11), cette intégrale ne renfermant pas le temps, et la troisième devient la première (12).

Il résulte de là que les nouvelles quantités ont les mêmes rapports que les premières; par suite, on a :

$$\frac{\frac{\partial\beta}{\partial p_1}}{\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial p_2}}{\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial q_1}}{\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial q_2}}{\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}}.$$

(*) Bien entendu, la substitution ne doit pas être faite dans les coefficients de l'équation (14).

De cette suite de rapports égaux on conclut que β doit être une fonction de α, et, par conséquent, l'équation :

$$\beta = const.,$$

supposée indépendante du temps, ne sera pas une intégrale nouvelle.

138. Le raisonnement que nous venons de faire serait en défaut, si l'une des équations (12), (13) et (14) rentrait dans les autres, c'est-à-dire si ces trois équations se réduisaient à deux. Or, on aurait alors, d'après la théorie des équations du premier degré, des relations de la forme suivante (*) :

$$\frac{\partial \beta}{\partial q_1} = M\frac{\partial \alpha}{\partial q_1} + N\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial p_1} = M\frac{\partial \alpha}{\partial p_1} + N\frac{\partial H}{\partial p_1},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial q_2} = M\frac{\partial \alpha}{\partial q_2} + N\frac{\partial H}{\partial q_2},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial p_2} = M\frac{\partial \alpha}{\partial p_2} + N\frac{\partial H}{\partial p_2},$$

M et N étant des fonctions quelconques de p_1, p_2, q_1, q_2.

Or, de ces équations on tire, en les multipliant par dq_1, dp_1, dq_2, dp_2 et ajoutant :

$$d\beta = Md\alpha + NdH.$$

Par conséquent, β doit être une fonction de α et de H, c'est-à-dire que cette intégrale β doit encore rentrer dans celles que l'on avait déjà.

139. Cela posé, observons que le problème ne comporte que

(*) On obtient ces équations, en multipliant les équations (12), (13) et (14) respectivement par M, N, — 1, et ajoutant. Si les trois équations se réduisent à deux, l'équation résultante devra être une identité, et les coefficients devront être nuls séparément.

quatre intégrales distinctes : une qui renferme explicitement le temps, et trois qui ne le renferment pas explicitement. Il y a donc *trois intégrales distinctes,* et pas davantage, *qui sont indépendantes du temps.* Or, de ce que nous venons de voir, il résulte que, *parmi ces trois intégrales distinctes, il y en a nécessairement qui ne donnent pas* (*) *à l'équation de Poisson la forme identique* $0=0$. Mais nous allons voir qu'*il y en a nécessairement une qui donne à l'équation de Poisson la forme* $1=1$.

Soit donc γ une des intégrales qui ne donne pas :

$$(\alpha,\ \gamma)=0,$$

et soit :

$$(\alpha,\ \gamma)=\delta,$$

δ étant une constante numérique ou non.

Si δ est une constante numérique, nous pourrons multiplier ou diviser γ par une constante, de façon que l'on ait $\delta=1$, et il est ainsi prouvé qu'il existe une intégrale qui, combinée avec α, donne à l'équation de Poisson la forme $1=1$.

Si δ n'est pas une constante numérique, l'équation :

$$\delta=const.,$$

est une intégrale indépendante du temps. Cette intégrale est évidemment une fonction des trois intégrales précédentes : en effet, puisqu'il y a seulement trois intégrales distinctes, qui ne renferment pas explicitement le temps, toute intégrale nouvelle ne contenant pas t, sera une fonction des trois autres. Nous aurons donc :

$$(\alpha,\ \gamma)=\varpi(\alpha,\ \gamma,\ h).$$

Ceci établi, posons :

$$\zeta=f(\alpha,\ \gamma,\ h),$$

ζ sera une intégrale des équations proposées.

(*) Puisque, connaissant l'intégrale des forces vives et une autre α, il n'y en a plus d'autre indépendante du temps qui donne $(\alpha,\ \beta)=0$.

Or, on a :

$$(\alpha,\ \zeta)=(\alpha,\ \gamma)\frac{\partial f}{\partial \gamma}+(\alpha,\ h)\frac{\partial f}{\partial h},$$

et, comme $(\alpha,\ h)=0$, il vient :

$$(\alpha,\ \zeta)=(\alpha,\ \gamma)\frac{\partial f}{\partial \gamma}=\varpi(\alpha,\ \gamma,\ h)\frac{\partial f}{\partial \gamma}.$$

Si donc nous posons :

$$\varpi(\alpha,\ \gamma,\ h)\frac{\partial f}{\partial \gamma}=1,$$

cette équation nous permettra de déterminer la forme de la fonction ζ qui, combinée avec l'intégrale α, donne à l'équation de Poisson la forme identique $1=1$, et la proposition est démontrée.

140. Il nous reste à prouver maintenant qu'il existe une intégrale de la forme :

$$\eta=t+\mathrm{F}(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2),$$

qui, combinée avec α, donne à l'équation de Poisson la forme $0=0$, c'est-à-dire telle que l'on ait :

$$(\alpha,\ \eta)=0.$$

A cet effet, considérons l'une quelconque des intégrales dans lesquelles figure le temps, par exemple :

$$\varepsilon=t+\mathrm{F}(q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2),$$

et combinons cette intégrale ε avec α. Nous aurons l'expression $(\alpha,\ \varepsilon)$, qui ne renfermera pas le temps.

Or, cette expression $(\alpha,\ \varepsilon)$ sera zéro, et le théorème sera démontré, ou une constante numérique, ou une intégrale nouvelle.

Dans ces deux derniers cas, nous pouvons poser :

$$(\alpha,\ \varepsilon)=\mathrm{H}(\alpha,\ \beta,\ h);$$

car, toute intégrale indépendante du temps [c'est le cas pour $(\alpha,\ \varepsilon)$], peut être considérée comme une combinaison des trois intégrales α, β, h.

Dans le cas où (α, ε) est une constante numérique, la fonction Π se réduira à une constante.

Cela posé, nous pouvons ajouter au second membre de l'intégrale ε une fonction quelconque de (α, β, h), et nous formons ainsi une intégrale nouvelle :

$$\varepsilon_1 = t + F(q_1, q_2, p_1, p_2) + f(\alpha, \beta, h) = \varepsilon + f(\alpha, \beta, h).$$

Nous aurons évidemment :

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + \big(\alpha, f(\alpha, \beta, h)\big).$$

Or, on a :

$$(\alpha, f) = (\alpha, \alpha)\frac{\partial f}{\partial \alpha} + (\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta} + (\alpha, h)\frac{\partial f}{\partial h} = (\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta};$$

par conséquent,

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + (\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta},$$

et, comme $(\alpha, \beta) = 1$, il vient :

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \beta}.$$

Or, si l'on détermine la fonction f par la condition que l'on ait :

$$(\alpha, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

on aura :

$$(\alpha, \varepsilon_1) = 0.$$

De l'équation :

$$(\alpha, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

on tire :

$$\frac{df}{-(\alpha, \varepsilon)} = \frac{d\beta}{1},$$

d'où :

$$df = -(\alpha, \varepsilon)\,d\beta = -\Pi(\alpha, \beta, h)\,d\beta;$$

on aura donc l'expression de f en fonction de α, β, h, par une quadrature.

En adoptant cette expression de f, l'intégrale ε_1, combinée avec α, donne à l'expression de Poisson la forme identique $0=0$.

141. Il est facile de voir qu'il n'existe pas d'intégrale nouvelle, contenant explicitement le temps, qui donne à l'expression de Poisson la forme $1=1$.

En effet, l'équation :

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \beta},$$

nous donne, en faisant $(\alpha, \varepsilon_1) = 1$, l'équation :

$$\Pi(\alpha, \beta, h) + \frac{\partial f}{\partial \beta} = 1,$$

d'où l'on tire l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d\beta}{1} = \frac{df}{1 - \Pi(\alpha, \beta, h)},$$

et, en intégrant,

$$f = \beta - \int \Pi(\alpha, \beta, h)\, d\beta.$$

On voit donc que l'intégrale qui, combinée avec α, donnerait à l'équation de Poisson la forme $1=1$, est une combinaison des intégrales précédentes : elle est une combinaison de la précédente avec β.

XXI.

Travaux de Bour.

142. Avant d'exposer les travaux de Bour, rappelons le théorème de M. Bertrand (n° **131**) duquel il résulte que la solution complète d'un problème de mécanique peut être formée de $2n$ intégrales du genre suivant :

1° L'intégrale des forces vives $\alpha = H$;

2° Une intégrale qui contient le temps $\beta = G - t$;

3° $2n-2$ autres intégrales, indépendantes du temps, α_1,

$\alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2}, \alpha_1$ étant une intégrale quelconque indépendante du temps, et autre que celle des forces vives.

Ces diverses intégrales doivent donner, d'après le théorème de M. Bertrand :

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1, \quad (\alpha_1, G) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_i) = 0,$$

la dernière équation pour toutes les valeurs de i égales à 3, 4, ... $2n - 2$, c'est-à-dire pour i différent de 2.

D'après ce que nous savons, les intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2}$, doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles :

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right) = 0, \qquad (1)$$

ou bien :

$$(H, \zeta) = 0,$$

laquelle est aussi vérifiée par $\zeta = H$, et dont la solution la plus générale est donc :

$$\zeta = f(H, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2}).$$

Au contraire, pour $\zeta = G$, le premier membre de l'équation (1) se réduit à l'unité, c'est-à-dire que l'on a :

$$(H, G) = 1.$$

Il est évident, d'après ce que nous venons de voir, que l'équation aux dérivées partielles (1), qui est linéaire, peut remplacer les équations canoniques.

Les travaux de Bour (*) consistent à montrer comment *on peut abaisser l'ordre de cette équation :*

$$(H, \zeta) = 0, \qquad (1)$$

quand on en connaît une ou plusieurs intégrales.

143. Examinons d'abord le cas ou l'on ne connaît que l'intégrale des forces vives :

$$H = h.$$

(*) *Mémoires des Savants étrangers*, t. XIV.

On se servira de cette intégrale pour éliminer l'une des inconnues, par exemple p_n, qui sera exprimée en fonction de H, $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_{n-1}$; il s'ensuit qu'une fonction quelconque de $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$, deviendra une fonction de H, $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_{n-1}$. C'est ce qui arrivera pour la fonction ζ.

Or, si nous distinguons par un accent les dérivées prises dans la nouvelle hypothèse, nous aurons :

$$\frac{\partial'\zeta}{\partial p_i} = \frac{\partial\zeta}{\partial p_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial'\zeta}{\partial q_i} = \frac{\partial\zeta}{\partial q_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i}.$$

D'autre part, si nous remplaçons dans l'équation :

$$H = h,$$

p_n par sa valeur, cette équation devient une identité; par conséquent, on a :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial p_i} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Donc,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial p_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial p_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\frac{\partial H}{\partial p_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial q_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial q_i} - \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial q_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\frac{\partial H}{\partial q_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}.$$

Remplaçant dans l'équation (1), il est facile de voir que les termes qui renferment $\frac{\partial\zeta}{\partial p_n}$ se détruisent deux à deux, et il reste :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial'\zeta}{p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial'\zeta}{\partial p_n} - \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_n} = 0.$$

Si nous divisons les deux membres par $-\frac{\partial H}{\partial p_n}$, et si nous observons que $\frac{\partial' \zeta}{\partial p_n}$ est nulle, puisque les dérivées affectées d'un accent se rapportent à l'expression de ζ ne renfermant plus p_n, il vient, en vertu des équations (2) :

$$\frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial' \zeta}{\partial p_1} - \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_1} + \cdots - \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_{n-1}} + \frac{\partial' \zeta}{\partial q_n} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial' \zeta}{\partial q_n} = 0,$$

ou bien, en supprimant les accents qui sont devenus inutiles :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0. \tag{3}$$

En appliquant les mêmes calculs à l'équation :

$$(H, G) = 1,$$

il vient :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial q_n} = -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_n}},$$

et, en observant que l'on a :

$$\frac{\partial p_n}{\partial H} = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_n}},$$

on obtient l'équation :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial H}. \tag{4}$$

L'équation (3) a les mêmes intégrales que l'équation (1), à l'exception de celle des forces vives $H = h$. C'est cette équation (3) qu'il faudra intégrer lorsque l'intégrale des forces vives sera seule connue.

144. Supposons ensuite qu'outre l'intégrale des forces vives :

$$H = h,$$

on connaisse une autre intégrale :

$$\alpha_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n).$$

Si l'on exprime qu'une fonction :

$$\zeta = f(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

donne identiquement (théorème de M. Bertrand) :

$$(\alpha_1, \zeta) = 0,$$

nous aurons une équation de la même forme que l'équation (1) :

$$(\alpha_1, \zeta) = \sum_1^n \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) = 0. \tag{5}$$

Cette équation est vérifiée par :

$$\zeta = \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{2n-2}, \mathrm{H}, \mathrm{G},$$

mais elle n'est pas vérifiée par :

$$\zeta = \alpha_2,$$

puisque l'on a :

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1.$$

Cela résulte du théorème que nous avons énoncé ci-dessus (n° **142**), en vertu duquel on a :

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1,$$
$$(\alpha_1, \alpha_i) = 0, \quad (\text{pour } i = 1, 3, 4, \dots 2n-2.)$$
$$(\alpha_1, \mathrm{G}) = 0,$$
$$(\alpha_1, \mathrm{H}) = 0.$$

Or, l'équation (5) étant vérifiée par $\zeta = \mathrm{H}$, on pourra lui faire subir la même transformation qu'à l'équation (1). Il arrivera ainsi que cette opération qui a pour but d'enlever la solution connue $\zeta = \mathrm{H}$, conduira à deux équations différentes, suivant que ζ sera égal à G, où à l'*une quelconque des autres intégrales de l'équation* (5).

Il résultera donc de là que, si l'on prend la deuxième forme, c'est-à-dire celle qui correspond aux intégrales autres que G, on aura éliminé l'intégrale inconnue $\zeta = G$, la seule qui ne vérifie pas l'équation (1).

Pour transformer l'équation (5), on devra opérer comme nous l'avons fait pour transformer l'équation (1), c'est-à-dire que l'on devra remplacer dans (5) $\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_i}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial q_i}$, etc., par les valeurs suivantes :

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_i} = \frac{\partial'\alpha_1}{\partial q_i} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = \frac{\partial'\alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial p_n}\frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial q_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial q_i} - \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial q_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}},$$

etc.

Nous aurons ainsi :

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \zeta) = {} & \sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial'\alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial'\zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial'\alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial'\alpha_1}{\partial q_n}\frac{\partial'\zeta}{\partial p_n} - \frac{\partial'\alpha_1}{\partial p_n}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_n}\right) \\
& + \frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial p_n}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}}\left[\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\frac{\partial'\alpha_1}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\frac{\partial'\alpha_1}{\partial p_i}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}\frac{\partial'\alpha_1}{\partial q_n} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_n}\frac{\partial'\alpha_1}{\partial p_n}\right)\right] \\
& + \frac{\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial p_n}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}}\left[\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\frac{\partial'\zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_n}\frac{\partial'\zeta}{\partial p_n} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_n}\right)\right] \\
& + \frac{\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial p_n}\dfrac{\partial\zeta}{\partial p_n}}{\left(\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}\right)^2}\sum_1^{n}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Or, les termes de la dernière somme se détruisent deux à deux ; en outre, puisque, comme nous l'avons dit précédemment, les dérivées $\frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_n}$, $\frac{\partial' \zeta}{\partial p_n}$ sont nulles, les termes qui contiennent ces dérivées sont nuls, et il nous reste l'équation :

$$(\alpha_1, \zeta) = \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right)$$

$$+ \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial p_n}}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}} \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_n} \right]$$

$$+ \frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}} \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_n} \right] = 0,$$

ou bien :

$$(\alpha_1, \zeta) = \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right)$$

$$+ \frac{\partial \zeta}{\partial p_n} \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_n} \right]$$

$$- \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n} \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial' \zeta}{\partial q_n} \right] = 0.$$

Mais, le coefficient de $\frac{\partial \zeta}{\partial p_n}$, c'est-à-dire,

$$\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_n},$$

est identiquement nul, puisque α_1 est une intégrale de l'équation (3).

Quant au coefficient de $\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}$, lequel est :

$$\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial' \zeta}{\partial q_n},$$

il est nul, en vertu de l'équation (3), lorsque ζ représente une quelconque des quantités :

$$\alpha_1, \quad \alpha_3, \quad \ldots \alpha_{2n-2};$$

au contraire, lorsque $\zeta = G$, il résulte de l'équation (4), que ce coefficient sera égal à $-\frac{\partial p_n}{\partial H}$.

Par conséquent, dans le cas où $\zeta = G$, le dernier terme de (α_1, ζ) sera :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial H} = \frac{\partial' \alpha_1}{\partial H}.$$

Il résulte donc de là que la transformation de l'équation (5) nous conduit à la forme suivante :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_i}\right) = 0,$$

lorsque ζ représente l'une des intégrales :

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{2n-2};$$

tandis que, si ζ est égal à G, la transformation nous conduit à la forme:

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial' G}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial' G}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial' \alpha_1}{\partial H}.$$

En supprimant les accents, ces deux équations deviennent :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right) = 0, \tag{6}$$

pour $\zeta = \alpha_1,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{2n-2}$;

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial H}. \tag{7}$$

On trouverait de même que l'intégrale α_2 satisfait à l'équation :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i}\right) = 1. \tag{8}$$

L'équation (6) est tout à fait semblable à l'équation (1), et elle aura pour intégrales :

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{2n-2},$$

qui sont des intégrales du problème, et qui donnent :

$$(\alpha_1,\ \alpha_i) = 0.$$

L'équation (6) contient deux termes de moins que l'équation (1); elle a, comme on voit, les mêmes intégrales que l'équation (1), sauf α_2 et H. Cette équation (6) est déduite de l'équation (5), et l'on voit qu'en éliminant l'intégrale $\zeta = H$, on a aussi éliminé l'intégrale $\zeta = G$, c'est-à-dire la conjuguée de H.

En résumé donc, l'équation :

$$(H, \zeta) = 0, \tag{1}$$

est vérifiée par :

$$H,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{2n-2}.$$

Connaissant, outre l'intégrale des forces vives $H = h$, une autre intégrale α_1, on cherche à déterminer une équation plus simple que l'équation (1). On détermine une équation, qui est l'équation (6), laquelle a la même forme que l'équation (1), mais qui a deux termes de moins, et qui a pour intégrales :

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{2n-2}.$$

En d'autres termes, la connaissance de l'intégrale α_1 nous permet de déterminer une nouvelle équation à laquelle satisfont les intégrales α_3, ... α_{2n-2}. La connaissance de α_1 permet d'éliminer sa conjuguée α_2, qui n'est pas une intégrale de l'équation réduite, et la question est ramenée à intégrer une équation plus simple que (1).

145. Soit α_3 une intégrale de l'équation (6). On peut concevoir que l'on complète (théorème de M. Bertrand) la solution du problème au moyen de l'intégrale α_1, et d'intégrales α_4, α_5, ... α_{2n-2}, qui, avec α_3, forment $2n - 3$ intégrales de (6), et telles que l'on ait :

$$(\alpha_3, \alpha_i) = 0,$$

pour $i = 5, 6, \ldots 2n - 2$, mais que l'on ait :

$$(\alpha_3, \alpha_4) = 1.$$

De plus, on aura :

$$(\alpha_1, \alpha_i) = 0,$$

pour $i = 3, 4, 5, \ldots 2n - 2$, puisque toutes ces intégrales satisfont à l'équation (5).

Cela admis, au moyen de l'intégrale :

$$\alpha_1 = \varphi(\mathrm{H}, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_{n-1}),$$

on tire :

$$p_{n-1} = f(\mathrm{H}, \alpha_1, q_1 . q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_{n-2}).$$

Si l'on substitue cette valeur dans α_3, et si l'on calcule les coefficients de l'équation :

$$(\alpha_3, \zeta) = 0,$$

c'est-à-dire les dérivées :

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial p_i},$$

qui entrent dans l'équation :

$$\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) = 0,$$

on arrivera à l'équation :

$$\sum_1^{n-2} \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) = 0, \qquad (9)$$

qui a deux termes de moins que l'équation (6) et qui aura pour intégrales :

$$\alpha_3, \alpha_5, \dots \alpha_{2n-2},$$

c'est-à-dire que l'on a éliminé en même temps les intégrales α_1 et α_4.

L'intégrale α_4 satisfait à l'équation :

$$\sum_1^{n-2} \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_i} \frac{\partial \alpha_4}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha_4}{\partial q_i} \right) = 1, \qquad (10)$$

analogue à l'équation (8), mais qui a deux termes de moins.

L'équation (9) a donc les mêmes intégrales que l'équation (6), sauf α_1 et α_4.

146. On peut, comme on voit, au moyen de chaque intégrale connue, diminuer de deux unités le nombre des termes, et le nombre des variables. Cette diminution provient de ce que *chaque intégrale connue permet d'éliminer sa conjuguée, qui est étrangère à l'équation réduite.*

On peut ainsi de proche en proche (du moins en théorie) obtenir une série d'équations analogues à (1), (6), (9), etc., et l'on parvient ainsi à mettre la solution du problème sous la forme de $2n$ intégrales conjuguées deux à deux :

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,$$

$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n,$$

telles que l'on ait :

$$(a_i,\ b_i) = 1,\quad (a_i,\ a_{i'}) = 0,\quad (a_i,\ b_{i'}) = 0.$$

147. Voici maintenant comment on doit transformer les intégrales du problème, telles qu'elles sont immédiatement obtenues (*), pour obtenir des solutions des équations (1), (6), (9), etc.

Si l'on connaît une intégrale quelconque β_1, indépendante du temps, on peut poser $\alpha_1 = \beta_1$, et rien n'empêche de supposer que les autres intégrales, qui sont inconnues, forment un système du genre de celles dont le théorème de M. Bertrand démontre la possibilité.

On calculera au moyen de l'équation $\alpha_1 = \beta_1$ les coefficients de l'équation (6) qui a pour intégrales :

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{2n-2}.$$

Supposons maintenant que l'on connaisse encore une seconde intégrale du problème β_2, aussi indépendante du temps; cette intégrale β_2, quoiqu'étant une intégrale du problème, peut fort bien n'être pas une intégrale α, et, par conséquent, on ne peut

(*) En général, les intégrales obtenues par un procédé quelconque ne seront pas des intégrales α, c'est-à-dire ne seront pas des intégrales telles que l'on ait $(\alpha_i,\ \alpha_{i'}) = 0$.

pas poser, en général, $\beta_2 = \alpha_3$. On ne pourra le faire, comme nous allons le voir, que si l'on a identiquement :

$$(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_2) = 0.$$

Pour continuer l'abaissement, lorsque l'on connaîtra cette seconde intégrale β_2, on formera la quantité (β_1, β_2), et il peut se présenter trois cas :

1° Si l'on a identiquement $(\beta_1, \beta_2) = 0$, on peut poser :

$$\alpha_3 = \beta_2,$$

et l'on formera l'équation (9) qui a deux termes de moins que l'équation (6);

2° Si (β_1, β_2) est une constante numérique que l'on peut toujours supposer égale à l'unité, alors β_2 est la conjuguée de β_1, et ne peut pas servir à continuer l'abaissement : en effet, la méthode qui a conduit à l'équation (6) consistait à éliminer de la solution l'intégrale conjuguée de α_1, qui est alors étrangère à l'équation réduite;

3° Si $(\beta_1, \beta_2) = \beta_3$ est une fonction de $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, cette fonction, égalée à une constante, est une nouvelle intégrale du problème.

On formera les expressions :

$$(\beta_1, \beta_3) = \beta_4, \quad (\beta_1, \beta_4) = \beta_5, \quad \ldots,$$

jusqu'à ce que l'on obtienne une fonction :

$$(\beta_1, \beta_{k-1}) = \beta_k = f(\mathrm{H}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}),$$

c'est-à-dire qui soit fonction des précédentes et de H.

On cherchera alors une fonction :

$$\varpi(\mathrm{H}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}),$$

telle que l'on ait :

$$(\beta_1, \varpi) = 0,$$

et l'on trouvera l'équation différentielle partielle linéaire :

$$\beta_3 \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_2} + \beta_4 \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_3} + \cdots + \beta_k \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_{k-1}} = 0.$$

Cette équation nous permettra de trouver $k-3$ intégrales du problème, fonctions de β_1, β_2, ... β_{k-1} et de H, et dont l'une quelconque peut être prise pour l'intégrale α_3. Les autres satisfont à l'équation (6), et pourront être employées pour l'abaissement de cette équation, de la même manière que les premières ont servi à l'abaissement de (1).

148. Nous avons vu comment au moyen des intégrales qui sont connues, on peut abaisser l'ordre de l'équation aux dérivées partielles du problème. Cette ressource épuisée, nous allons voir l'usage que l'on peut faire des équations réduites pour continuer l'intégration.

Si, par exemple, on ne connaît pas d'autre intégrale que α_1, on appliquera à l'équation (6) la méthode qui nous a servi à former l'équation (3), c'est-à-dire que l'on éliminera p_{n-1}, exprimée en fonction de α_1, H, q_1, q_2, ... q_n, p_1, p_2, ... p_{n-2}.

On opérera de la même manière sur les équations (7) et (8), et l'on aura ainsi :

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial \zeta}{\partial q_{n-1}}=0, \tag{11}$$

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_{n-1}}=-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}, \tag{12}$$

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial G}{\partial q_{n-1}}=\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial H}. \tag{13}$$

Or, il est facile de voir que l'on a :

$$\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial H}=-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial H}.$$

En effet, de l'équation :

$$\alpha_1=\varphi(H, p_1, p_2, \cdots p_{n-1}, q_1, q_2, \dots q_n),$$

on tire :

$$p_{n-1}=f(\alpha_1, H, p_1, p_2, \dots p_{n-2}, q_1, q_2, \dots q_n).$$

Mais, si l'on remplace dans le second membre de cette dernière équation α_1 par sa valeur en fonction de $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$, $q_1, q_2, \dots q_n$, H, on obtiendra une identité.

En différentiant cette identité par rapport à H, il vient :

$$\frac{\partial p_{n-1}}{\partial H} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial H} = 0.$$

L'équation (13) se réduit donc à la suivante :

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial q_{n-1}} = -\frac{\partial p_{n-1}}{\partial H}. \tag{14}$$

Nous pouvons encore transformer les équations (3) et (4), en remplaçant la variable p_{n-1} en fonction de α_1, et l'équation (3) nous donnera deux équations différentes, suivant que ζ sera égal à α_2, ou à une autre quelconque des quantités $\alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{2n-2}$ (*).

On obtiendra ainsi trois équations analogues à (11), (12) et (14) avec cette différence que p_{n-1} et q_{n-1} seront remplacés par p_n et q_n, et l'on aura :

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0, \tag{15}$$

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1}, \tag{16}$$

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial H}. \tag{17}$$

Or, il résulte des raisonnements précédents que l'équation (3) a les mêmes intégrales que (1), sauf H; l'équation (11) a les mêmes intégrales que (6), sauf α_1; l'équation (15) a les mêmes intégrales que (3), sauf α_1 et α_2.

L'équation (1) ayant pour intégrales :

$$H, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2n-2},$$

(*) Dans cette transformation, p_{n-1}, α_1 et α_2 joueront le même rôle que p_n, H et G dans la transformation de l'équation (3).

il en résulte que (3) aura pour intégrales :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-2}.$$

L'équation (6) ayant pour intégrales :

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{2n-2},$$

l'équation (11) aura pour intégrales :

$$\alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \ldots \alpha_{2n-2}.$$

Enfin, l'équation (15) aura pour intégrales :

$$\alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \ldots \alpha_{2n-2}.$$

Les équations (11) et (15) admettent donc toutes les deux pour intégrales α_3, α_4, ... α_{2n-2}. Ces fonctions, étant au nombre de $2n - 4$, forment la solution complète de chacune de ces équations, et toutes sont des intégrales du problème. Cependant, comme q_n est considérée comme constante dans l'intégration de (11), et q_{n-1} dans l'intégration de (15), il s'ensuit qu'une intégrale de la première, par exemple, ne satisfait pas nécessairement au problème (*).

En d'autres termes, toutes les intégrales du problème :

$$\alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \ldots \alpha_{2n-2},$$

satisfont aux équations (11) et (15). Mais il n'en résulte pas réciproquement que toute solution de (11) ou de (15) est une intégrale du problème.

En effet, supposons que l'on connaisse :

$$\alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \ldots \alpha_{2n-2},$$

qui sont des intégrales du problème, et, par conséquent, de (11). Si l'on pose :

$$\zeta = \psi(\alpha_3, \ \alpha_4, \ \ldots \alpha_{2n-2}, \ q_n),$$

(*) Ainsi, $q_n = const.$ est une intégrale de (11), et $q_{n-1} = const.$ une intégrale de (15), et ces deux intégrales ne sont pas des solutions du problème.

ψ étant une fonction arbitraire, cette équation ne sera plus une intégrale du problème, et cependant elle sera encore une intégrale de (11).

Il résulte de là que l'on ne peut pas remplacer purement et simplement l'équation (3) par les équations (11) et (15), puisque ces dernières admettent des solutions étrangères au problème, quoique l'on puisse former leur intégrale générale uniquement avec les intégrales de (1) et (3).

Nous pouvons remarquer que les intégrales du problème sont les seules intégrales communes aux équations (11) et (15).

149. Nous allons maintenant montrer quelle est la marche à suivre pour résoudre la question.

Supposons que l'on connaisse les deux intégrales :

$$H = f(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

$$\alpha_1 = f_1(q_1, q_2, \dots q_n; p_1, p_2, \dots p_n).$$

Résolvons ces deux équations par rapport à p_n et p_{n-1}, et calculons les coefficients des équations :

$$\sum_1^{n-2} \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_{n-1}} = 0, \tag{11}$$

$$\sum_1^{n-2} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0. \tag{15}$$

Cela posé, cherchons à intégrer l'une de ces équations.

Soit ζ_1 une intégrale de la première, par exemple; remplaçons ζ par ζ_1 dans la seconde (15). Si le premier membre est identiquement nul, ζ_1 sera une intégrale du problème.

Si le premier membre de (15) n'est pas identiquement nul, soit Z_1 le résultat de la substitution. Je dis que $Z_1 = const.$ sera une nouvelle intégrale de (11). En effet, d'après la théorie des équations différentielles partielles linéaires, ζ_1 doit être de la forme :

$$\zeta_1 = \varphi(\alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{2n-2}, q_n).$$

Si nous remplaçons ζ par cette valeur dans l'équation (15), nous aurons à remplacer $\frac{\partial\zeta_1}{\partial p_i}$, $\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_i}$, etc., par les valeurs suivantes :

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial p_i} = \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_3}\frac{\partial\alpha_3}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_{2n-2}}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_i} = \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_3}\frac{\partial\alpha_3}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_{2n-2}}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n} = \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_3}\frac{\partial\alpha_3}{\partial q_n} + \cdots + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_{2n-2}}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial q_n} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}.$$

Substituant dans le premier membre de (15), il vient :

$$\begin{aligned} Z_1 = {} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_3}\left[\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\alpha_3}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial\alpha_3}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\alpha_3}{\partial q_n}\right] \\ & + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_4}\left[\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\alpha_4}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial\alpha_4}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\alpha_4}{\partial q_n}\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_{2n-2}}\left[\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial q_n}\right] \\ & + \frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}. \end{aligned}$$

Or, tous les coefficients du second membre sont nuls, puisque $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{2n-2}$ sont des intégrales de (15), et il vient :

$$Z_1 = \frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}.$$

Mais, $\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}$ sera une fonction de $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{2n-2}, q_n$, puisque ζ_1 est une fonction de ces quantités. Par suite, $\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}$ ou Z_1 est une intégrale de l'équation (11). Cette intégrale en fournira d'autres, soit par une nouvelle application du théorème, c'est-à-dire en remplaçant dans (15) ζ par Z_1, soit par la combinaison de Z_1 avec ζ_1 pour former la fonction de Poisson :

$$(\zeta_1,\ Z_1).$$

Nous aurons ainsi une série d'intégrales distinctes de l'équation (11), dont le nombre sera limité au plus tard lorsqu'elles formeront la solution complète de (11).

Nous pouvons donc considérer ces intégrales de l'équation (11) comme formant un système canonique partiel :

$$\begin{array}{ccc} a_1, & a_2, & \dots a_k, \\ b_1, & b_2, & \dots b_k, \end{array}$$

c'est-à-dire tel que l'on ait :

$$(a_i,\ b_i) = 1,\quad (a_i,\ b_{i'}) = 0,\quad (a_i,\ a_{i'}) = 0,$$

pour des valeurs des indices comprises entre 1 et k, le nombre k pouvant d'ailleurs être égal ou inférieur à $n - 2$.

Cela posé, si nous remplaçons successivement dans (15), ζ par a_1, b_1, a_2, b_2, ... a_k, b_k, nous obtiendrons des résultats qui seront des fonctions de ces mêmes quantités seulement et de q_n; sans cela, d'après ce que nous venons de voir, ces résultats fourniraient de nouvelles intégrales de (11), ce qui n'est pas possible, puisque nous avons épuisé ce procédé qui nous a fourni les intégrales a_1, b_1, ... a_k, b_k.

Désignons ces résultats respectivement par A_1, B_1, A_2, B_2, ... Cela posé, je dis qu'il existe $2k$ intégrales du problème qui sont des fonctions des variables a et b, et de q_n; en effet, si nous substituons dans (15) :

$$\zeta = \varphi(a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \dots a_k,\ b_k,\ q_n),$$

et si nous exprimons que le résultat est nul, il est facile de voir que l'on a :

$$A_1 \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} + B_1 \frac{\partial \zeta}{\partial b_1} + \cdots + A_k \frac{\partial \zeta}{\partial a_k} + B_k \frac{\partial \zeta}{\partial b_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0. \qquad (18)$$

Or, cette équation différentielle partielle admet $2k$ intégrales. Ces $2k$ intégrales sont des intégrales du problème : en effet, elles satisfont à l'équation (15); en outre, elles sont des fonctions des variables a et b et de q_n, donc, elles satisfont aussi à l'équation (11). Ce sont donc des intégrales communes à (11) et (15), et, par conséquent, des intégrales du problème.

150. Il est facile de s'assurer que l'équation (18) a précisément la même forme que les équations (3), (11) et (15), c'est-à-dire que l'on a (n° **151**) :

$$A_i = \frac{\partial L}{\partial b_i}, \quad B_i = -\frac{\partial L}{\partial a_i},$$

L étant une fonction de $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots b_k$ que l'on détermine par une quadrature.

L'équation (18) prend alors la forme suivante :

$$\sum_1^k \left(\frac{\partial L}{\partial b_i}\frac{\partial \zeta}{\partial a_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i}\frac{\partial \zeta}{\partial b_i}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0. \tag{19}$$

Cette dernière équation n'admet plus d'intégrale étrangère au problème : elle est, au plus, de l'ordre $n-2$, c'est-à-dire du même ordre que les équations (11) et (15). Elle peut être d'un ordre inférieur, suivant la valeur de k, c'est-à-dire que l'intégrale ζ_1, étrangère au problème, permettra d'abaisser son degré.

151. Proposons-nous maintenant de démontrer que l'on a :

$$A_i = \frac{\partial L}{\partial b_i}, \quad B_i = -\frac{\partial L}{\partial a_i};$$

à cet effet, nous allons prouver que l'on a :

$$\frac{\partial A_1}{\partial b_2} = \frac{\partial A_2}{\partial b_1}.$$

En différentiant par rapport à q_n l'équation :

$$(a_1, a_2) = \sum \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_i}\frac{\partial a_2}{\partial p_i} - \frac{\partial a_1}{\partial p_i}\frac{\partial a_2}{\partial q_i}\right) = 0,$$

il vient :

$$\sum \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_i}\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_n \partial p_i} - \frac{\partial a_1}{\partial p_i}\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_n \partial q_i}\right) = \sum \left(\frac{\partial a_2}{\partial q_i}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial p_i} - \frac{\partial a_2}{\partial p_i}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial q_i}\right). \tag{20}$$

Or, A_1 étant le résultat que l'on obtient en remplaçant ζ par a_1 dans l'équation (15), il s'ensuit que A_1 est définie par l'équation :

$$A_i = \frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1} - \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial q_{n-2}}\frac{\partial a_1}{\partial p_{n-2}} - \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-2}}\frac{\partial a_1}{\partial q_{n-2}} + \frac{\partial a_1}{\partial q_n}.$$

Différentiant par rapport à p_i et à q_i, il vient :

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial p_i} = \frac{\partial A_1}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial p_1 \partial p_i} + \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial p_i \partial q_1} - \cdots$$
$$- \frac{\partial a_1}{\partial p_1}\frac{\partial^2 p_n}{\partial q_1 \partial p_i} + \frac{\partial a_1}{\partial q_1}\frac{\partial^2 p_n}{\partial p_i \partial p_1} + \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial q_i} = \frac{\partial A_1}{\partial q_i} - \frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial p_1 \partial q_i} + \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_i \partial q_1} - \cdots$$
$$- \frac{\partial a_1}{\partial p_1}\frac{\partial^2 p_n}{\partial q_1 \partial q_i} + \frac{\partial a_1}{\partial q_1}\frac{\partial^2 p_n}{\partial q_i \partial p_1} + \cdots$$

On obtiendrait de la même manière les dérivées :

$$\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_n \partial p_i}, \quad \frac{\partial^2 a_2}{\partial q_n \partial q_i},$$

en opérant sur l'équation qui définit A_2, c'est-à-dire sur le résultat de la substitution de a_2 à la place de ζ dans l'équation (15).

Substituant dans l'équation (20), on a :

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1).$$

En effet, il est facile de voir que, par cette substitution, il ne reste que les premiers termes des dérivées $\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial p_i}$, $\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial q_i}$, etc., tous les autres termes se détruisant. Ainsi, si nous cherchons d'abord ce qui multiplie une des dérivées secondes de p_n, par exemple $\frac{\partial^2 p_n}{\partial p_1 \partial q_1}$, nous trouvons dans le premier membre :

$$-\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\frac{\partial a_2}{\partial p_1} - \frac{\partial a_2}{\partial q_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1},$$

et dans le second membre les mêmes termes avec les mêmes signes.

Si nous cherchons ensuite le coefficient d'une dérivée première de p_n, par exemple le coefficient de $\frac{\partial p_n}{\partial q_1}$, nous trouverons que ce coefficient est, en faisant passer tous les termes dans le premier membre :

$$\sum\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 a_2}{\partial p_i \partial p_1}+\frac{\partial a_2}{\partial p_i}\,\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_i \partial p_1}-\frac{\partial a_1}{\partial p_i}\,\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_i \partial p_1}-\frac{\partial a_2}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 a_1}{\partial p_i \partial p_1}\right).$$

Or, cette expression est précisément la dérivée par rapport à p_1 de $(a_1,\ a_2)$: cette somme est donc nulle, puisque $(a_1,\ a_2)$ est identiquement nulle. Par suite, l'équation (20) se réduit à :

$$(a_1,\ A_2) = (a_2,\ A_1). \tag{21}$$

Mais, A_2 étant une fonction de a_1, b , ... a_k, b_k, q_n, on a :

$$(a_1,\ A_2) = (a_1,\ a_1)\frac{\partial A_2}{\partial a_1} + (a_1,\ b_1)\frac{\partial A_2}{\partial b_1} + \cdots = \frac{\partial A_2}{\partial b_1},$$

puisque tous les coefficients sont nuls, excepté $(a_1,\ b_1)$ qui est égal à l'unité (n° **149**).

De même, on a :

$$(a_2,\ A_1) = \frac{\partial A_1}{\partial b_2};$$

par conséquent, l'équation (21) nous donne :

$$\frac{\partial A_2}{\partial b_1} = \frac{\partial A_1}{\partial b_2}.$$

On aurait de même :

$$\frac{\partial A_1}{\partial b_1} = -\frac{\partial B_1}{\partial a_1},$$

le signe — provenant de ce que, si l'on a $(a_1,\ b_1) = 1$, on a $(b_1,\ a_1) = -1$.

152. *Remarque.* — Nous avons supposé que les variables a et b formaient un système canonique; mais, ce système peut être incomplet. Si la variable a_k, par exemple, n'a pas de conjuguée, c'est-à-dire si l'on s'était trouvé arrêté avant d'obtenir b_k, on aurait pour tout indice i, compris entre 1 et $k-1$:

$$(a_k, a_i) = 0, \quad (a_k, b_i) = 0.$$

On en déduirait, par la méthode qui précède :

$$\frac{\partial A_k}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial A_k}{\partial b_i} = 0,$$

c'est-à-dire que A_k serait une fonction de a_k et de q_n seulement.

L'équation (19) devient alors :

$$\sum_1^{k-1} \left(\frac{\partial L}{\partial b_i} \frac{\partial \zeta}{\partial a_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} \frac{\partial \zeta}{\partial b_i} \right) + A_k \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0,$$

et l'on en obtiendrait une intégrale en intégrant l'équation du premier ordre :

$$A_k \frac{\partial \zeta}{\partial a_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0.$$

153. Quand on connaîtra la moitié des intégrales du problème, les équations telles que (11) et (15) deviendront illusoires. Il ne nous restera plus alors à trouver que des intégrales conjuguées, lesquelles seront données par les équations (4), (12), (14), (16), (17), etc., qui se réduisent à :

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial q_{n-1}} = -\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}, \quad \ldots$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial H}, \quad \frac{\partial G}{\partial q_{n-1}} = -\frac{\partial p_{n-1}}{\partial H}, \quad \ldots$$

Les sommes ont disparu, puisque la connaissance de $n-1$ intégrales autres que celle des forces vives a fait disparaître successivement un nombre de termes égal à $2(n-1)=2n-2$.

Des équations qui précèdent, on tire :

$$d\alpha_2 = -\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1} dq_n \right),$$

expression qui est une différentielle exacte.

On peut donc calculer les intégrales conjuguées par les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= -\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1} dq_n\right), \\ \alpha_4 &= -\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_3} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_3} dq_n\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G &= -\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial H} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial H} dq_n\right). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Mais, ces équations peuvent être mises sous une forme plus simple; en effet, nous avons supposé identiquement nulles les quantités telles que :

$$(\alpha_1, \alpha_3) = 0,$$

qui résultent de la combinaison deux à deux des intégrales α_1, α_3, α_5, ... α_{2n-3}. Or, M. Liouville a démontré (n° **71**) que, dans ces conditions, l'expression :

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n,$$

est toujours la différentielle exacte d'une fonction de q_1, q_2, ... q_n (*). Donc, en désignant par V cette intégrale, on pourra écrire les intégrales (22) sous la forme suivante :

$$\alpha_2 = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \quad \alpha_4 = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_3}, \quad \cdots \quad G = -\frac{\partial V}{\partial H}. \qquad (23).$$

154. *Remarque I.* — Ce résultat est d'ailleurs conforme au théorème de M. Liouville (n° **73**). En effet, d'après ce théorème, on sait que, connaissant la moitié des intégrales du problème, satisfaisant à la condition $(\alpha_\mu, \alpha_\nu) = 0$, on peut tirer des intégrales connues les valeurs de p_1, p_2, ... p_n; la quantité :

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n,$$

est la différentielle exacte d'une fonction V.

(*) En effet, α_1, α_3, α_5, ... α_{2n-3}, H forment la moitié des intégrales du problème.

Les intégrales qui complètent la solution du problème sont alors données par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -\alpha_2, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} = -\alpha_4, \quad \dots \quad G = -\frac{\partial V}{\partial H}.$$

155. *Remarque II.* — Nous avons supposé jusqu'ici que le principe des forces vives était applicable, c'est-à-dire que la quantité H ne renfermait pas explicitement le temps : c'est ce que Bour avait supposé dans son mémoire. Mais M. Liouville (*) a fait remarquer que la théorie de Bour s'étend au cas où l'on considère les équations canoniques, abstraction faite de la dynamique, c'est-à-dire lorsque H est une fonction de t, $q_1, q_2, \dots q_n$, $p_1, p_2, \dots p_n$.

En effet, l'équation qui exprime que α est une intégrale des équations canoniques, c'est-à-dire que la dérivée totale $\frac{d\alpha}{dt}$ est nulle, en vertu des équations canoniques, est :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum_1^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\right) = 0.$$

Or, cette équation a précisément la même forme que les équations (3), (11), (15), (19), ...

Toutes les équations sont ramenées à un type uniforme, H et t jouent ici le même rôle que deux variables conjuguées p_i, q_i.

Si H est indépendant du temps t, le problème admet pour intégrale $H = const.$, de même qu'il admettrait pour intégrale $p_i = const.$, si H était indépendant de q_i.

(*) *Journal de Liouville*, t. XX, p. 136; *Rapport de M. Liouville.*

XXII.

Variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique.

156. Supposons que la fonction H puisse être décomposée en deux fonctions H_1 et Ω, de sorte que les équations à intégrer :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

deviennent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial p_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Supposons que les équations canoniques :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

puissent être intégrées, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$, les constantes d'intégration, telles que l'on ait :

$$\alpha_i = \varphi(t, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n). \tag{4}$$

La fonction Ω est, en général, très petite par rapport à H_1 : on l'appelle *fonction perturbatrice.* Les équations (2) s'appellent les *équations du mouvement troublé;* les équations (3) sont les *équations du mouvement non troublé.* Dans la plupart des cas, la fonction Ω ne dépend que des positions des points mobiles, c'est-à-dire des variables q_i; elle est indépendante des p_i.

Nous considérerons le cas général où la fonction Ω dépend des p_i, q_i et de t.

Nous supposerons que les intégrales des équations (2) aient la même forme (4) que les intégrales des équations (3); mais nous supposerons que les α_i qui étaient constantes dans les intégrales des équations (3), c'est-à-dire dans le mouvement non troublé, deviennent des fonctions de t dans les intégrales du mouvement troublé (2). Ainsi, d'après cela, les dérivées de p_i, q_i par rapport à t, en considérant les α_i comme des constantes, satisfont aux équations (3), tandis que les dérivées, prises en considérant les α_i comme des fonctions de t, satisfont aux équations (2).

157. Nous nous proposons de *déterminer à quelles fonctions de* t *il faut égaler les* α_i *pour satisfaire aux équations* (2).

Nous allons d'abord démontrer une formule due à Lagrange et dont nous aurons à faire usage.

Des $2n$ équations (4) :

$$\alpha_i = \varphi(t, q_i, p_i),$$

on tire :

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \psi(t, \alpha_i), \\ q_i &= \psi_1(t, \alpha_i). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Mais, les équations (2) nous donnent :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p_i}.$$

D'ailleurs, des équations (5) on tire, en considérant les α_i comme des variables, fonctions de t :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt};$$

par suite,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p_i}.$$

Or, $\frac{\partial q_i}{\partial t}$ est la dérivée de q_i par rapport à t, que l'on obtiendrait en considérant les α_i comme des constantes : c'est donc la dérivée de q_i qui satisfait aux équations (3), et l'on a, par conséquent, en ayant égard à ces équations (3) :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = \sum \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt};$$

de même,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} = -\sum \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt}.$$

D'ailleurs, puisque Ω est une fonction des p_i, q_i, lesquelles sont des fonctions des α_i, on a :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \sum \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right);$$

d'où, en remplaçant $\frac{\partial \Omega}{\partial p_i}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial q_i}$ par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \sum_k \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \frac{d\alpha_k}{dt},$$

et, en posant (n° **110**) :

$$[\alpha_k, \alpha] = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right),$$

on a la formule :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \sum_k [\alpha_k, \alpha] \frac{d\alpha_k}{dt}. \tag{6}$$

C'est la *formule de Lagrange :* le signe Σ se rapporte à l'indice k, tandis que α est un élément déterminé.

158. Propriété. — Il est facile de démontrer que l'*expression* $[\alpha_k, \alpha]$ *est une fonction des éléments seulement, c'est-à-dire qu'elle ne renferme pas explicitement le temps.*

On a donc à démontrer que l'on a :

$$\frac{\partial[\alpha_k, \alpha]}{\partial t} = 0.$$

A cet effet, reprenons l'expression :

$$[\alpha_k, \alpha] = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial q_n}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha}$$
$$- \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_k}\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right).$$

On a évidemment :

$$[\alpha_k, \alpha] = \frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha_k}\right)}{\partial \alpha}$$
$$- \frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right)}{\partial \alpha_k};$$

par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial[\alpha_k, \alpha]}{\partial t} &= \frac{\partial^2\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha_k}\right)}{\partial \alpha \partial t}\\ &- \frac{\partial^2\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right)}{\partial \alpha_k \partial t}.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

On a d'ailleurs :

$$\left.\begin{aligned} q'_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} &= \frac{\partial H_1}{\partial p_i},\\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_i};\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

par suite,

$$\frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)}{\partial t}$$

$$=-\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$+\left(p_1\frac{\partial q'_1}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial q'_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial q'_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$=p_1\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_1}}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_2}}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_n}}{\partial\alpha_k}$$

$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$=p_1\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_1}}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_2}}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_n}}{\partial\alpha_k}$$

$$+\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$=\frac{\partial\left(p_1\frac{\partial H_1}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H_1}{\partial p_2}+\cdots+p_n\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\right)}{\partial\alpha_k}-\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_k}$$

$$=\frac{\partial\left(p_1\frac{\partial H_1}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H_1}{\partial p_2}+\cdots+p_n\frac{\partial H_1}{\partial p_n}-H_1\right)}{\partial\alpha_k}.$$

Si l'on différentie de nouveau par rapport à α, on obtient une expression dans laquelle on peut changer α_k et α l'une dans l'autre. On a donc :

$$\frac{\partial^2\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha_k}\right)}{\partial\alpha\partial t}$$

$$= \frac{\partial^2\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right)}{\partial\alpha_k\partial t};$$

par suite, le second membre de l'équation (7) est identiquement nul, et l'on a :

$$\frac{\partial[\alpha_k, \alpha]}{\partial t} = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

159. *Remarque I.* — On peut encore démontrer la propriété précédente d'une autre manière. A cet effet, nous ferons usage d'une formule qu'il est facile de vérifier.

Soient p_i, q_i des fonctions des trois variables α, β, t, il est facile de voir que l'on a identiquement :

$$\frac{\partial[\alpha, \beta]}{\partial t} + \frac{\partial[\beta, t]}{\partial \alpha} + \frac{\partial[t, \alpha]}{\partial \beta} = 0.$$

Pour appliquer cette formule au cas actuel, supposons que les quantités q_i, p_i soient des fonctions telles que l'on ait :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} &= \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

lorsque l'on remplace dans les expressions $\frac{\partial H_1}{\partial q_i}$, $\frac{\partial H_1}{\partial p_i}$ les quantités p et q par leurs valeurs en fonction de α, β, t et des autres éléments.

Cela posé, on a :

$$[\beta, t] = \frac{\partial q_1}{\partial \beta}\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial q_1}{\partial t}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_2}{\partial \beta}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\partial q_2}{\partial t}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} + \cdots$$

$$= -\frac{\partial q_1}{\partial \beta}\frac{\partial H_1}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} - \frac{\partial q_2}{\partial \beta}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \beta}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} - \cdots$$

$$= -\frac{\partial H_1}{\partial \beta};$$

de même,

$$[t, \alpha] = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial [\beta, t]}{\partial \alpha} + \frac{\partial [t, \alpha]}{\partial \beta} = 0.$$

Par suite, en vertu de l'identité précédente, on a :

$$\frac{\partial [\alpha, \beta]}{\partial t} = 0,$$

ce qui est la propriété énoncée.

160. *Remarque II.* — Si α, β, γ sont trois éléments arbitraires, et si l'on remplace t par γ dans l'identité ci-dessus, on a la relation :

$$\frac{\partial [\alpha, \beta]}{\partial \gamma} + \frac{\partial [\beta, \gamma]}{\partial \alpha} + \frac{\partial [\gamma, \alpha]}{\partial \beta} = 0.$$

161. Proposons-nous maintenant de trouver l'expression des $\frac{d\alpha_k}{dt}$, c'est-à-dire les valeurs que l'on obtiendrait en résolvant les équations (6) par rapport aux $\frac{d\alpha_k}{dt}$.

Des équations (4) :

$$\alpha = \varphi(t, q_i, p_i),$$

on tire :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \right),$$

ou bien, en remplaçant $\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dp_i}{dt}$, par leurs valeurs (2) :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum \left[\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\frac{\partial (H_1 + \Omega)}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{\partial (H_1 + \Omega)}{\partial q_i} \right],$$

ou bien encore, d'après la notation de Poisson (n° **69**) :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\alpha, H_1 + \Omega).$$

Or, si l'on suppose $\Omega = 0$, α est une intégrale des équations (3), et l'on a :

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\alpha, H_1) = 0 \; (^*).$$

Par suite, en soustrayant, il vient :

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha, \Omega);$$

en développant le second membre, on a :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \right),$$

et, si l'on remplace $\frac{\partial \Omega}{\partial p_i}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial q_i}$ par leurs valeurs :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = \sum \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} \; (^{**}),$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i},$$

il vient :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k} (\alpha, \alpha_k). \tag{8}$$

Cette *formule* est due à *Poisson*. Elle permet de déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$, en fonction de t ; le signe Σ se rapporte à l'indice k.

(*) C'est la formule que nous avons trouvée précédemment (n° **102**).

(**) Ω étant considérée comme une fonction des α, lesquelles sont des fonctions des p_i, q_i.

162. Propriété. — Il est facile de s'assurer que *les coefficients* (α, α_k) *sont de simples fonctions des éléments seulement, c'est-à-dire qu'ils ne renferment pas explicitement le temps.*

On a donc à démontrer que l'on a :

$$\frac{\partial(\alpha, \alpha_k)}{\partial t} = 0.$$

A cet effet, reprenons l'expression :

$$(\alpha, \alpha_k) = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} \right),$$

qui nous donne :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha, \alpha_k)}{\partial t} = & \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} \frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial q_i}}{\partial t} \right) \\ & - \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} \frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial p_i}}{\partial t} \right). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Or,

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial q_i}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial q_{k'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial p_{k'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial t} \right);$$

d'ailleurs, les équations (3) du mouvement non troublé nous donnent :

$$\frac{\partial q_{k'}}{\partial t} = \frac{\partial H_1}{\partial p_{k'}},$$

$$\frac{\partial p_{k'}}{\partial t} = - \frac{\partial H_1}{\partial q_{k'}};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial q_i}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial q_{k'}} \frac{\partial H_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial p_{k'}} \frac{\partial H_1}{\partial q_{k'}} \right),$$

de même,

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial p_i}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial q_{k'}} \frac{\partial H_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial p_{k'}} \frac{\partial H_1}{\partial q_{k'}} \right).$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\alpha, \mathrm{H}_1) = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_{k'}}\right) = 0.$$

Différentions cette équation successivement par rapport à q_i, p_i, il viendra :

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\partial q_{k'}}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\partial p_{k'}}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_{k'}}\right)$$
$$+ \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial q_i\partial p_{k'}} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial q_i\partial q_{k'}}\right) = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\partial q_{k'}}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\partial p_{k'}}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_{k'}}\right)$$
$$+ \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial p_i\partial p_{k'}} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial p_i\partial q_{k'}}\right) = 0.$$

Retranchant ces deux équations respectivement des deux précédentes, on a les deux équations :

$$\frac{\partial\dfrac{\partial\alpha}{\partial q_i}}{\partial t} = \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(-\frac{\partial\alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial q_i\partial p_{k'}} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial q_i\partial q_{k'}}\right),$$

$$\frac{\partial\dfrac{\partial\alpha}{\partial p_i}}{\partial t} = \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(-\frac{\partial\alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial p_i\partial p_{k'}} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial p_i\partial q_{k'}}\right).$$

Multiplions la première par $\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_i}$, la seconde par $\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_i}$, et retranchons, puis faisons la somme par rapport à l'indice i. Nous aurons ainsi la valeur de l'expression :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_i}\frac{\partial\dfrac{\partial\alpha}{\partial q_i}}{\partial t} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_i}\frac{\partial\dfrac{\partial\alpha}{\partial p_i}}{\partial t}\right).$$

Or, il est évident, puisque les indices i et k' doivent recevoir toutes les valeurs 1, 2, ... n, que l'on obtiendra la même valeur pour l'expression :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_i}}{\partial t}-\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_i}}{\partial t}\right).$$

Par conséquent, le second membre de l'équation (9) est identiquement nul, et l'on a :

$$\frac{\partial(\alpha,\alpha_k)}{\partial t}=0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

163. *Remarque I.* — Cette propriété résulte d'ailleurs de ce que les équations (8) peuvent être obtenues par la résolution des équations (6). Il est évident que si les coefficients $[\alpha, \alpha_k]$ ne renferment pas explicitement le temps, il en sera de même des coefficients (α, α_k).

164. *Remarque II.* — Remarquons aussi que les formules perturbatrices de Lagrange et de Poisson (6) et (8) ne changent pas, si la fonction H_1, outre les q_i, p_i, renferme explicitement le temps. Dans ce cas encore, les expressions $[\alpha, \alpha_k]$ et (α, α_k) sont des fonctions des éléments seulement.

165. Si le système est tout à fait libre, et si l'on prend pour les variables q_i les coordonnées rectangulaires elles-mêmes, alors les q_i sont les x_i, y_i, z_i et les p_i sont égaux à $m_ix'_i$, $m_iy'_i$, $m_iz'_i$.

Il est évident que, dans ce cas, les expressions :

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial p_k},$$

sont nulles; les expressions :

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial p'_k},$$

sont aussi nulles, excepté pour $k' = i$: dans ce dernier cas, ces dernières se réduisent à $\frac{1}{m_i}$. Mais alors la formule :

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}}{\partial t} = \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(- \frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}} \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial p_{k'}} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}} \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial q_{k'}} \right),$$

nous donne :

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial x'_i}}{\partial t} = - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i};$$

de même,

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial y'_i}}{\partial t} = - \frac{\partial \alpha}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial z'_i}}{\partial t} = - \frac{\partial \alpha}{\partial z_i}.$$

Ces trois dernières formules ont été trouvées par Lagrange. On en déduit que, si une intégrale (c'est-à-dire une fonction de t et des $6n$ quantités x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, égalée à une constante arbitraire, sans que cette expression contienne d'autres constantes arbitraires) renferme une coordonnée, elle devra aussi renfermer le quotient différentiel de cette coordonnée par rapport au temps (*).

Réciproquement, si la dérivée d'une coordonnée par rapport au temps n'entre pas dans l'intégrale, ou y entre seulement au premier degré, multipliée par une constante, la coordonnée correspondante n'entrera pas dans l'intégrale.

En effet, si α ne contient pas x', on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = 0,$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 425.

et si α contient x' au premier degré, multipliée par une constante, on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = const.;$$

donc, dans les deux cas,

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial x'}}{\partial t} = 0;$$

par suite,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

et, par conséquent, α ne contient pas la coordonnée x.

166. Observons encore que, si le théorème des forces vives est applicable, $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ sera toujours une simple fonction des éléments seulement. En effet, dans ce cas, la solution du problème se compose de $2n - 1$ équations avec $2n - 1$ constantes arbitraires entre les $2n$ quantités q_i, p_i, ne renfermant pas le temps t, et une $2n^e$ équation qui donne $t + \tau$ exprimé en fonction des q_i, p_i, la quantité τ étant la $2n^e$ constante arbitraire.

Si donc α est une des $2n - 1$ premières constantes arbitraires, on aura :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0.$$

Si $\alpha = \tau$, on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -1;$$

en effet, de l'équation :

$$t + \tau = f(q_i, p_i),$$

on déduit :

$$1 + \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1$$

XXIII.

Formules de perturbations.

167. Nous avons vu (nos **158** et **162**) que les expressions $[\alpha, \beta]$ et (α, β) ne renferment pas explicitement le temps. Il s'ensuit qu'elles ne changent pas, lorsque l'on y fait $t=0$, et que l'on remplace les variables p_i, q_i par leurs valeurs pour $t=0$.

Si donc on désigne par c_i, b_i, les valeurs de q_i, p_i, pour $t=0$, on aura :

$$\left.\begin{aligned}
[\alpha, \beta] = {} & \frac{\partial c_1}{\partial \alpha}\frac{\partial b_1}{\partial \beta} + \frac{\partial c_2}{\partial \alpha}\frac{\partial b_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial c_n}{\partial \alpha}\frac{\partial b_n}{\partial \beta} \\
& - \left(\frac{\partial c_1}{\partial \beta}\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial c_2}{\partial \beta}\frac{\partial b_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial c_n}{\partial \beta}\frac{\partial b_n}{\partial \alpha}\right), \\
(\alpha, \beta) = {} & \frac{\partial \alpha}{\partial c_1}\frac{\partial \beta}{\partial b_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial c_2}\frac{\partial \beta}{\partial b_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial c_n}\frac{\partial \beta}{\partial b_n} \\
& - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial b_1}\frac{\partial \beta}{\partial c_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial b_2}\frac{\partial \beta}{\partial c_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial b_n}\frac{\partial \beta}{\partial c_n}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Il résulte de ces deux dernières formules que, si l'on prend pour éléments α, β, les quantités c_i, b_i elles-mêmes, on aura, pour i et k différents :

$$[c_i, b_k] = 0, \quad (c_i, b_k) = 0;$$

tandis que, pour $k=i$, on a :

$$[c_i, b_i] = -[b_i, c_i] = 1,$$
$$(c_i, b_i) = -(b_i, c_i) = 1$$

Dans ce cas, chacune des formules (6) et (8) (nos **157** et **161**),

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = \sum [\alpha, \beta] \frac{d\alpha}{dt},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum (\alpha, \beta) \frac{\partial \Omega}{\partial \beta},$$

nous donne les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{dc_1}{dt}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial b_1}, & \dfrac{db_1}{dt}=-\dfrac{\partial\Omega}{\partial c_1},\\ \dfrac{dc_2}{dt}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial b_2}, & \dfrac{db_2}{dt}=-\dfrac{\partial\Omega}{\partial c_2},\\ \cdots & \cdots\\ \dfrac{dc_n}{dt}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial b_n}, & \dfrac{db_n}{dt}=-\dfrac{\partial\Omega}{\partial c_n}.\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Ces équations (2) forment un système analogue au système canonique.

168. *Remarque I.* — Si dans les formules (1), on fait $\beta = b_i$, il vient :

$$[\alpha, b_i] = \frac{\partial c_i}{\partial \alpha}, \quad (\alpha, b_i) = \frac{\partial \alpha}{\partial c_i};$$

si l'on y fait $\beta = c_i$, on a :

$$[\alpha, c_i] = -\frac{\partial b_i}{\partial \alpha}, \quad (\alpha, c_i) = -\frac{\partial \alpha}{\partial b_i}.$$

169. *Remarque II.* — Si l'on prend pour les q_i les coordonnées rectangulaires, et si l'on désigne par a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i les valeurs initiales de x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, les équations précédentes nous donnent :

$$m_i\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a'_i}, \quad m_i\frac{da'_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_i},$$

$$m_i\frac{db_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b'_i}, \quad m_i\frac{db'_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_i},$$

$$m_i\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial c'_i}, \quad m_i\frac{dc'_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial c_i}.$$

Ces formules ont lieu même dans le cas où la fonction Ω renferme les p_i, c'est-à-dire les x'_i, y'_i, z'_i.

170. La théorie que nous venons d'exposer nous permet d'obtenir les éléments en fonction du temps de la manière suivante :

Exprimons Ω, *au moyen des formules du mouvement non troublé, en fonction des éléments* $b_1, \dots b_n, c_1, \dots c_n$; *remplaçons ensuite les quantités* $b_1, b_2, \dots b_n$ *par les expressions :*

$$\frac{\partial W}{\partial c_1}, \frac{\partial W}{\partial c_2}, \dots \frac{\partial W}{\partial c_n},$$

et formons l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Omega = 0.$$

Si W *est une solution complète de cette équation, renfermant, outre la constante additive,* n *constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, *les équations :*

$$\frac{\partial W}{\partial c_1} = b_1, \dots \frac{\partial W}{\partial c_n} = b_n,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \dots \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \beta_n,$$

dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ *sont de nouvelles constantes arbitraires, sont les intégrales qui détermineront les éléments variables.*

171. Nous avons vu (n° **167**) que, si l'on choisit comme éléments les valeurs initiales des quantités q_i, p_i, les équations différentielles qui déterminent ces éléments prennent, dans tous les problèmes de mécanique auxquels le principe des forces vives est applicable, une forme simple analogue aux équations canoniques.

Or, les valeurs initiales des p_i, q_i ne forment pas le seul système d'éléments dont les équations différentielles ont la forme canonique. Nous nous proposons de voir comment l'on pourra trouver les différents systèmes d'éléments pour tout problème de mécanique auquel le principe des forces vives est applicable.

Cette question se résout par le théorème suivant, qui est de la plus grande importance dans la théorie de la variation des constantes arbitraires.

172. Théorème. — *Soit* H_1 *une fonction de* t *et des quantités* q_i, p_i, *et soient :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i},$$

les équations différentielles du problème non troublé, desquelles on déduit les équations différentielles du problème troublé, en remplaçant H_1 *par* $H_1 + \Omega$, Ω *étant une fonction quelconque des* 2n *quantités* q_i, p_i, *et de* t.

Soit W *une solution complète de l'équation :*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H_1 = 0,$$

dans laquelle les p_i *qui entrent dans* H_1, *ont été remplacés par* $\frac{\partial W}{\partial q_i}$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, *les* n *constantes arbitraires qui, outre la constante additive, sont contenues dans* W, *et soient :*

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \beta_n,$$

les intégrales du problème non troublé, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ *étant de nouvelles constantes arbitraires.*

Si, au moyen de ces équations et des équations :

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_n} = p_n,$$

on exprime la fonction perturbatrice Ω *en fonction de* t, *et des éléments* α_i, β_i, *et si l'on considère dans le problème troublé ces* *éléments comme variables, on a, pour déterminer ces éléments les équations différentielles :*

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{d\alpha_1}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}, & \dfrac{d\beta_1}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}, \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d\alpha_n}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\beta_n}, & \dfrac{d\beta_n}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_n}.\end{array}\right\} \quad (5)$$

Dans les formules précédentes (n° **167**) les constantes α des intégrales du problème non troublé étaient les valeurs initiales des q_i, et les constantes β étaient les valeurs initiales des p_i changées de signe. Dans ce cas, le théorème que nous venons d'énoncer donne les formules (2) que nous avons obtenues (n° **167**), et dans lesquelles les valeurs initiales c_i, b_i des q_i et p_i, sont considérées comme les éléments troublés.

Pour démontrer le théorème actuel, nous conviendrons de renfermer entre parenthèses les dérivées partielles de W considérée comme fonction de t et des $2n$ constantes α, β, et d'écrire ces dérivées sans parenthèses, lorsque W est considérée comme une fonction de t, des n quantités q_i et des n quantités α_i.

On a donc, d'après cela :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha_k}\right) = \frac{\partial W}{\partial\alpha_k} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\beta_k}\right) = \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\beta_k} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\beta_k},$$

ou bien, en vertu des intégrales du problème non troublé, qui ont aussi lieu sans altération pour le problème troublé, avec cette différence que les éléments y sont considérés comme variables,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha_k}\right) = \beta_k + p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\beta_k}\right) = p_1\frac{\partial q_1}{\partial\beta_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial\beta_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial\beta_k}.$$

Or, si α, β désignent deux quelconques des $2n$ constantes arbitraires, on a :

$$
\begin{aligned}
[\alpha, \beta] = & \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\frac{\partial p_n}{\partial \beta} \\
& - \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha}\frac{\partial q_n}{\partial \beta}\right) \\
= & \frac{\partial \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_n \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right)}{\partial \beta} \\
& - \frac{\partial \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \beta} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + p_n \frac{\partial q_n}{\partial \beta}\right)}{\partial \alpha}.
\end{aligned}
$$

Faisons maintenant les trois hypothèses :

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_i, \qquad \beta = \alpha_k, \\
\alpha &= \alpha_i, \qquad \beta = \beta_k, \\
\alpha &= \beta_i, \qquad \beta = \beta_k,
\end{aligned}
$$

les éléments α_i, β_i ayant la signification indiquée dans l'énoncé du théorème.

Nous aurons, en observant que les termes provenant de la différentiation double de W, se détruisent :

$$[\alpha_i, \alpha_k] = 0, \quad [\beta_i, \beta_k] = 0, \quad [\alpha_i, \beta_k] = 0;$$

mais, pour $k = i$, on a :

$$[\alpha_i, \beta_i] = -[\beta_i, \alpha_i] = -1.$$

Par conséquent, pour $\beta = \alpha_i$, l'expression $[\alpha, \beta]$ est nulle, excepté dans le cas où $\alpha = \beta_i$, et alors elle est égale à l'unité :

$$[\beta_i, \alpha_i] = 1.$$

D'autre part, pour $\beta = \beta_i$, l'expression $[\alpha, \beta]$ est nulle, excepté pour $\alpha = \alpha_i$, et alors elle est égale à -1 :

$$[\alpha_i, \beta_i] = -1.$$

La formule de Lagrange (n° **157**) :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} = \sum [\alpha, \beta] \frac{d\alpha}{dt},$$

nous donnera, en remplaçant successivement α par les $2n$ éléments, les $2n$ équations différentielles :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i} &= \frac{d\beta_i}{dt}, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_i} &= -\frac{d\alpha_i}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

et le théorème est démontré.

173. *Remarque.* — D'après la formule de Poisson (n° **161**), on a :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum (\alpha, \beta) \frac{\partial\Omega}{\partial\beta};$$

par conséquent, si l'on remplace sous le signe Σ successivement β par les $2n$ éléments, il résulte des équations précédentes (3) que, si l'on prend pour les éléments les constantes arbitraires α_i, β_i du théorème ci-dessus (n° **172**), on aura les équations identiques :

$$(\alpha_i, \alpha_k) = 0, \quad (\beta_i, \beta_k) = 0, \quad (\alpha_i, \beta_k) = 0,$$

tandis que, pour $k = i$, on a :

$$(\alpha_i, \beta_i) = -(\beta_i, \alpha_i) = -1.$$

Les formules que nous venons de trouver sont d'une grande importance dans la théorie de la *variation des constantes arbitraires,* et dans l'intégration des équations différentielles du problème troublé.

Tout système analogue d'éléments s'appelle *système canonique.*

174. Propriétés. — Les fonctions de Poisson (a_i, a_k) dans lesquelles a_i, a_k sont deux éléments ou deux constantes arbitraires, jouissent encore de plusieurs propriétés remarquables.

1° Elles sont indépendantes du choix des variables q, c'est-à-dire qu'elles restent invariables, quelles que soient les positions des points matériels que l'on prend pour les variables q, pourvu que la signification des éléments n'en soit pas changée;

2° Elles dépendent simplement des deux éléments a_i, a_k, de sorte que la valeur de l'expression (a_i, a_k) reste la même, quelles que soient les constantes arbitraires choisies pour les autres éléments.

Pour démontrer la première propriété, remarquons que, d'après la formule de Poisson (n° **161**), les quotients différentiels des éléments variables sont égaux à des fonctions linéaires des dérivées partielles de la fonction perturbatrice Ω, prises par rapport à ces éléments, et la fonction (a_i, a_k) est le coefficient de $\frac{\partial\Omega}{\partial a_k}$ dans l'expression de $\frac{da_i}{dt}$. Pour former ces dérivées, on doit exprimer Ω en fonction des éléments et de t, et l'expression ainsi obtenue est complètement indépendante des fonctions des coordonnées des points du système que l'on a choisies pour les variables q.

La fonction Ω peut être une fonction arbitraire de t et des $2n$ quantités q_i, p_i, laquelle peut, d'après cela, être une fonction arbitraire de t et des $2n$ éléments.

Les fonctions (a_i, a_k) sont enfin tout à fait indépendantes de la fonction perturbatrice Ω, et sont simplement déterminées par les formules du mouvement non troublé.

Supposons que, par un choix des variables q_i on ait trouvé :

$$\frac{da_i}{dt} = A_1\frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + A_2\frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \cdots + A_{2n}\frac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}},$$

et que, par un autre choix, on ait :

$$\frac{da_i}{dt} = B_1\frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + B_2\frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \cdots + B_{2n}\frac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}},$$

on en déduira :

$$(A_1 - B_1)\frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + (A_2 - B_2)\frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \cdots + (A_{2n} - B_{2n})\frac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}} = 0,$$

A_1, B_1, ... A_{2n}, B_{2n} étant des fonctions de t et des éléments a_1, a_2, ... a_{2n}.

Comme, dans cette dernière équation, Ω peut être une fonction *quelconque* de ces mêmes quantités, on doit avoir :

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \ldots \; A_{2n} = B_{2n}. \tag{4}$$

Comme les A_i, B_i sont déterminés uniquement par les formules du mouvement non troublé, et que ces formules du mouvement non troublé n'établissent aucune relation entre a_1, a_2, ... a_{2n} et t, c'est-à-dire entre les constantes arbitraires et le temps t, il s'ensuit que les équations précédentes (*4*) doivent être des identités; et, par suite, les coefficients A_i sont indépendants du choix des variables q_i.

Il est bon d'observer que, dans la démonstration précédente, nous n'avons pas eu à faire usage de la propriété que les coefficients A_i sont indépendants du temps.

La seconde propriété des fonctions (a_i, a_k) résulte immédiatement de la formule :

$$(a_i, a_k) = \frac{\partial a_i}{\partial q_1}\frac{\partial a_k}{\partial p_1} + \frac{\partial a_i}{\partial q_2}\frac{\partial a_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial a_i}{\partial q_n}\frac{\partial a_k}{\partial p_n}$$
$$- \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_1}\frac{\partial a_k}{\partial q_1} + \frac{\partial a_i}{\partial p_2}\frac{\partial a_k}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial a_i}{\partial p_n}\frac{\partial a_k}{\partial q_n}\right).$$

Cette formule nous apprend que pour obtenir (a_i, a_k), il suffit de connaître les expressions de a_i, a_k en fonction de t, q_i, p_i, par conséquent, de connaître seulement deux intégrales du mouvement non troublé. On n'a donc pas besoin de connaître quelles sont les constantes arbitraires, ou les combinaisons de ces constantes que l'on choisit pour les autres éléments, c'est-à-dire quelles sont les fonctions de t, q_i, p_i, qui, égalées à des constantes arbitraires, en vertu des intégrales du problème non troublé, sont prises pour les $2n - 2$ autres des quantités $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$. Il n'est pas nécessaire non plus d'avoir trouvé les autres intégrales du problème non troublé pour obtenir la valeur de (a_i, a_k). Mais, si l'on veut exprimer (a_i, a_k) en fonction des constantes arbitraires seulement, il faudra connaître les autres intégrales.

175. Les fonctions de Lagrange $[a_i, a_k]$ jouissent aussi de la première propriété que nous avons démontrée pour les fonctions de Poisson, c'est-à-dire *qu'elles ne changent pas de valeur quelles que soient les fonctions des coordonnées que l'on prend pour les variables indépendantes* $\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \ldots \mathrm{q}_n$.

Cela résulte évidemment de ce que les formules de perturbations de Lagrange et de Poisson peuvent être déduites les unes des autres par la résolution de $2n$ équations linéaires. Les fonctions $[a_i, a_k]$ et (a_i, a_k) peuvent donc être exprimées les unes en fonction des autres; par conséquent, si les valeurs des unes sont indépendantes du choix des variables q_i, il en sera de même des autres.

Remarque. — On pourrait d'ailleurs démontrer directement cette propriété en raisonnant comme nous l'avons fait pour les fonctions (a_i, a_k) de Poisson (n° **174**).

176. Propriété. — *Les quotients différentiels partiels de la fonction perturbatrice satisfaisant aux formules de Lagrange, ne peuvent être exprimés que d'une seule manière en fonction linéaire des quotients différentiels des constantes, par des équations dont les coefficients sont indépendants du temps.*

Supposons que les quotients différentiels du premier ordre des q_i restent invariables, soit que l'on considère dans leurs expressions en fonction des éléments et du temps, les éléments comme constants ou comme variables.

Nous aurons donc entre les éléments et le temps les n équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial q_1}{\partial a_1}\,da_1+\dfrac{\partial q_1}{\partial a_2}\,da_2+\cdots+\dfrac{\partial q_1}{\partial a_{2n}}\,da_{2n}=0,\\ \dfrac{\partial q_2}{\partial a_1}\,da_1+\dfrac{\partial q_2}{\partial a_2}\,da_2+\cdots+\dfrac{\partial q_2}{\partial a_{2n}}\,da_{2n}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial q_n}{\partial a_1}\,da_1+\dfrac{\partial q_n}{\partial a_2}\,da_2+\cdots+\dfrac{\partial q_n}{\partial a_{2n}}\,da_{2n}=0.\end{array}\right\}\qquad(5)$$

Or, en ayant égard à ces équations, on peut démontrer que l'on ne peut avoir deux équations :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_i}=C_1\frac{da_1}{dt}+C_2\frac{da_2}{dt}+\cdots+C_{2n}\frac{da_{2n}}{dt},$$

et

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_i}=D_1\frac{da_1}{dt}+D_2\frac{da_2}{dt}+\cdots+D_{2n}\frac{da_{2n}}{dt},$$

dans lesquelles les D_i soient différents des C_i, si l'on ajoute la condition que les C_i et les D_i doivent être simplement des fonctions des éléments $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$, ne renfermant pas le temps, propriété qui a été démontrée (n° **158**) pour les $[a_i, a_k]$.

Si nous posons :

$$C_1-D_1=E_1,\quad C_2-D_2=E_2,\quad \ldots C_{2n}-D_{2n}=E_{2n},$$

nous aurons à démontrer que des n équations différentielles (5), on ne peut pas tirer une équation différentielle :

$$E_1da_1+E_2da_2+\cdots E_{2n}da_{2n}=0,\qquad(6)$$

dans laquelle les coefficients E_i ne renferment pas le temps t, mais sont des fonctions de $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ seulement.

Or, en général, on obtient une équation de la forme (6), au moyen des n équations différentielles (5), en multipliant ces équations respectivement par n facteurs $N_1, N_2, \ldots N_n$, qui peuvent être des fonctions quelconques de $a_1, a_2, \ldots a_n, t$, et ajoutant.

On a alors :

$$E_1 = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n}{\partial a_1},$$

$$E_2 = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n}{\partial a_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E_{2n} = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_{2n}} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_{2n}} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n}{\partial a_{2n}}.$$

Pour que les seconds membres de ces équations ne contiennent pas le temps t, on doit avoir les $2n$ équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
0 = N_1' \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + N_2' \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + \cdots + N_n' \frac{\partial q_n}{\partial a_1} \\
+ N_1 \frac{\partial q_1'}{\partial a_1} + N_2 \frac{\partial q_2'}{\partial a_1} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n'}{\partial a_1}, \\
0 = N_1' \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + N_2' \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + N_n' \frac{\partial q_n}{\partial a_2} \\
+ N_1 \frac{\partial q_1'}{\partial a_2} + N_2 \frac{\partial q_2'}{\partial a_2} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n'}{\partial a_2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = N_1' \frac{\partial q_1}{\partial a_{2n}} + N_2' \frac{\partial q_2}{\partial a_{2n}} + \cdots + N_n' \frac{\partial q_n}{\partial a_{2n}} \\
+ N_1 \frac{\partial q_1'}{\partial a_{2n}} + N_2 \frac{\partial q_2'}{\partial a_{2n}} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n'}{\partial a_{2n}},
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

dans lesquelles nous avons posé :

$$q_1' = \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad q_2' = \frac{\partial q_2}{\partial t}, \quad \ldots q_n' = \frac{\partial q_n}{\partial t},$$

$$N_1' = \frac{\partial N_1}{\partial t}, \quad N_2' = \frac{\partial N_2}{\partial t}, \quad \ldots N_n' = \frac{\partial N_n}{\partial t}.$$

Mais, des $2n$ équations (7) on peut éliminer les $2n$ facteurs $N_1, N_1', N_2, N_2', \ldots N_n, N_n'$, et l'on obtient une équation différentielle entre les quotients différentiels partiels de $q_1, q_2, \ldots q_n$, $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ par rapport à $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$. Cette équation dont le premier membre est un déterminant fonctionnel nous apprend (nº **50**) que, entre les quantités $q_1, q_2, \ldots q_n, q'_1, q'_2, \ldots q'_n$, il existe une relation indépendante des $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$, mais qui peut cependant renfermer la quantité t.

Si l'on remplace $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ par leurs valeurs (3) (nº **156**) :

$$q'_1 = \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \quad \ldots q'_n = \frac{\partial H_1}{\partial p_n},$$

on obtient une équation entre les quantités q_i, p_i et t, sans constante arbitraire, laquelle équation résulterait des intégrales complètes du problème non troublé. Mais cela est impossible : car, on ne pourrait obtenir une telle équation au moyen des équations différentielles du problème non troublé, que par une intégration, et cette intégration devrait introduire une constante arbitraire.

Remarque. — Si, considérant les a_i comme variables, l'on pose les fonctions $q_1, q_2, \ldots q_n$ égales à des constantes arbitraires, et si l'on suppose en outre que t est aussi une constante arbitraire, on conclut de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème. — *Soient* 2n *variables* $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$, *et soit l'équation différentielle :*

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2n} da_{2n} = 0;$$

supposons cette équation intégrée par un système de n *équations :*

$$q_1 = c_1, \quad q_2 = c_2, \quad \ldots q_n = c_n,$$

dans lesquelles $c_1, c_2, \ldots c_n$ *sont des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans les fonctions* $q_1, q_2, \ldots q_n$.

Si ces fonctions renferment une constante arbitraire t, *tout à fait indépendante de* $c_1, c_2, \ldots c_n$, *il doit exister une relation entre les* 2n *quantités :*

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots q_n, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t}, \quad \ldots \frac{\partial q_n}{\partial t}.$$

177. Propriété. — *Les quotients différentiels des constantes dans les formules de perturbations de Poisson, ne peuvent être exprimés que d'une seule manière par une fonction linéaire des dérivées partielles de la fonction perturbatrice* Ω, *dont les coefficients sont indépendants du temps.*

Nous allons démontrer que, même dans le cas ordinaire, où la fonction Ω ne renferme pas les p_i, on ne peut pas obtenir les deux équations :

$$\frac{da_i}{dt} = A_1 \frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \cdot \cdot + A_{2n} \frac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}},$$

$$\frac{da_i}{dt} = B_1 \frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \cdots + B_{2n} \frac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}},$$

dans lesquelles les A_i, B_i sont différents, si l'on ajoute la condition que les coefficients soient simplement des fonctions des a_i, ne renfermant pas t.

Puisque Ω peut être une fonction quelconque de $a_1, a_2, \ldots a_{2n}, t$, telle que, par la substitution des expressions de a_1, a_2, ... a_{2n}, en fonction de q_1, q_2, ... q_n, p_1, p_2, ... p_n, t, les p_i disparaissent d'elles-mêmes, on peut considérer Ω comme une fonction de a_1, a_2, ... a_{2n}, t satisfaisant aux équations :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\Omega}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial p_1} + \cdots + \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}}\dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_1} = 0, \\
\dfrac{\partial\Omega}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial p_2} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial p_2} + \cdots + \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}}\dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_2} = 0, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\dfrac{\partial\Omega}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial p_n} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial p_n} + \cdots + \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}}\dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_n} = 0.
\end{array}\right\} \quad (8)$$

Si l'on pose :

$$A_1 - B_1 = F_1, \quad A_2 - B_2 = F_2, \quad \ldots A_{2n} - B_{2n} = F_{2n},$$

nous aurons à démontrer que des n équations différentielles (8), on ne peut pas tirer une équation différentielle :

$$F_1 \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial \Omega}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial \Omega}{\partial a_{2n}} = 0, \tag{9}$$

dans laquelle les F_i soient simplement des fonctions des a_i, ne renfermant pas t.

Or, on obtient une équation de la forme (9), au moyen des équations (8), en multipliant ces dernières par des multiplicateurs k_1, k_2, ... k_n, qui peuvent être des fonctions des a_i et de t, et ajoutant. Nous aurons ainsi les $2n$ équations :

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= k_1 \frac{\partial a_1}{\partial p_1} + k_2 \frac{\partial a_1}{\partial p_2} + \cdots + k_n \frac{\partial a_1}{\partial p_n}, \\ F_2 &= k_1 \frac{\partial a_2}{\partial p_1} + k_2 \frac{\partial a_2}{\partial p_2} + \cdots + k_n \frac{\partial a_2}{\partial p_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{2n} &= k_1 \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_1} + k_2 \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_2} + \cdots + k_n \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_n}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Imaginons q_1, q_2, ... q_n exprimées en fonction de a_1, ... a_{2n}, t, et différentions ces expressions par rapport à p_1, ... p_n, nous aurons, pour chaque q_i les n équations :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial q_i}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1} + \frac{\partial q_i}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial a_{2n}}\frac{\partial a_{2n}}{\partial p_1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial q_i}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_n} + \frac{\partial q_i}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_n} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial a_{2n}}\frac{\partial a_{2n}}{\partial p_n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Multipliant les équations (11) respectivement par $\frac{\partial q_i}{\partial a_1}, \frac{\partial q_i}{\partial a_2}, \ldots \frac{\partial q_i}{\partial a_{2n}}$, et ajoutant, en ayant égard aux équations (10), il vient :

$$F_1 \frac{\partial q_i}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_i}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q_i}{\partial a_{2n}} = 0. \tag{12}$$

Or, si, comme on le suppose, F_1, F_2, ... F_{2n} sont des fonctions de a_1, a_2, ... a_{2n} seulement, ne renfermant pas t, on obtient, en différentiant la dernière équation par rapport à t, et faisant $i = 1, 2, \dots n$, les $2n$ équations suivantes :

$$F_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q_1}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$F_1 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q_2}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_1 \frac{\partial q_n}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_n}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q_n}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$F_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_1}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q'_1}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$F_1 \frac{\partial q'_2}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q'_2}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_1 \frac{\partial q'_n}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_n}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q'_n}{\partial a_{2n}} = 0.$$

Mais, de ces $2n$ équations il résulte : ou bien que les F_i doivent être nuls séparément, ou bien que le déterminant des coefficients est nul.

Or, si ce déterminant est nul, il existe (n° **50**) entre les quantités q_i, q'_i et t une relation ne renfermant pas les a_i; mais une telle équation serait une intégrale du problème non troublé, sans constante arbitraire, ce qui est impossible.

On doit donc avoir :

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_{2n} = 0,$$

ou bien :

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \dots A_{2n} = B_{2n},$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

XXIV.

Formules de perturbations pour le mouvement d'une planète.

178. Considérons un système matériel soumis à des forces données, et supposons que l'on ait formé les équations différentielles et les intégrales du mouvement.

Si, à un instant quelconque du mouvement, des forces d'impulsion viennent à agir sur le système, après cet instant, les équations différentielles du mouvement seront encore les mêmes : les valeurs des constantes d'intégration seules auront changé dans les intégrales.

Pour obtenir les valeurs nouvelles des constantes, il faudra calculer la vitesse de chaque point provenant des impulsions, et, d'après les positions de ces points à l'instant où ces impulsions agissent, et leurs vitesses modifiées par les impulsions, on pourra déterminer les valeurs nouvelles des constantes arbitraires.

Si un système matériel est sollicité par des forces perturbatrices, on peut imaginer que l'on remplace ces forces perturbatrices par des impulsions infiniment petites agissant pendant chaque instant.

Au commencement de chaque instant, les positions des points seront les mêmes que s'il n'y avait pas d'impulsions pendant cet instant, les vitesses seront aussi les mêmes, les accélérations seules seront changées. Les constantes arbitraires varient de quantités infiniment petites à la fin de chaque instant, et, par conséquent, deviennent des quantités variables.

On conclut de là que les formules qui donnent les positions des points matériels, et les composantes de leurs vitesses resteront les mêmes que s'il n'y avait pas de forces perturbatrices; mais, les constantes arbitraires contenues dans ces formules seront changées en quantités variables.

Dans le cas d'un point matériel attiré par un centre fixe, et soumis à d'autres forces perturbatrices, les éléments de l'orbite qui formaient les constantes arbitraires du problème deviendront variables.

A chaque instant l'ellipse variable aura pour foyer le centre d'attraction, elle passera par le point attiré et sera tangente à la trajectoire du point matériel.

179. Supposons donc que le point matériel soit non seulement sollicité par le centre fixe, mais encore par d'autres actions, et que la fonction de force soit augmentée de $-\Omega$; nous aurons pour les équations différentielles du mouvement troublé :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f\mu x}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{f\mu y}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{f\mu z}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}=0.$$

Les équations du mouvement non troublé ont été mises sous la forme (n° **63**) :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial x'},\quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial y'},\quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial y},$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial z'},\quad \frac{dz'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial z},$$

dans lesquelles nous avons posé :

$$H_1=T-U,$$

U étant la fonction de force $\frac{f\mu}{r}$, et T la demi-force vive du point matériel.

Les équations du mouvement troublé pourront être mises sous la même forme que celles du mouvement non troublé, pourvu que la fonction de force U soit augmentée de $-\Omega$. Si nous posons alors :

$$H = T - U + \Omega = H_1 + \Omega,$$

les équations du mouvement troublé seront :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z'}, \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Si nous considérons les équations du mouvement non troublé, nous avons vu qu'en désignant par S la solution complète de l'équation différentielle partielle de laquelle dépend la solution du problème, et par h, b, g les trois constantes arbitraires renfermées dans S, les intégrales du mouvement seront données par les trois équations :

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial S}{\partial g} = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

τ, α, β étant trois autres constantes arbitraires.

Comme nous l'avons vu (n° **63**), h est la constante des forces vives, b l'axe du plan invariable, g la projection de cet axe sur la normale au plan fixe sur lequel on compte les longitudes, α la longitude du nœud de la planète, β la distance angulaire du périhélie au nœud, $-\tau$ le temps du passage de la planète au périhélie.

Dans le cas du mouvement troublé, les intégrales auront la même forme que pour le mouvement non troublé, mais on devra considérer comme variables les six éléments h, g, b, α, β, τ.

D'après la théorie générale, les valeurs de ces quantités seront données par les formules suivantes :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial h},$$

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial g},$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b}.$$

180. On peut remplacer les six équations précédentes par l'équation :

$$\delta\Omega = -\frac{dh}{dt}\delta\tau - \frac{dg}{dt}\delta\alpha - \frac{db}{dt}\delta\beta + \frac{d\tau}{dt}\delta h + \frac{d\alpha}{dt}\delta g + \frac{d\beta}{dt}\delta b.$$

Or, en désignant par f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, par $2a$ le grand axe de l'orbite, par e l'excentricité et i l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe, on a :

$$h = -\frac{f\mu}{2a}, \quad b = \sqrt{f\mu a(1-e^2)}, \quad g = b\cos i.$$

Nous allons substituer aux quantités h, b, g, les quantités a, e, i. En différentiant les formules précédentes, on a :

$$dh = \frac{f\mu}{2a^2}\,da,$$

$$db = \frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)da - 2ae\,de\right\},$$

$$dg = \frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)\cos i\,da - 2ae\cos i\,de\right\} - b\sin i\,di.$$

On en déduit trois équations analogues en remplaçant la caractéristique d par δ. Cela posé, remplaçons dans l'expression de $\delta\Omega$ les quantités :

$$dh,\ db,\ dg,\ \delta h,\ \delta b \text{ et } \delta g,$$

par ces valeurs, nous aurons :

$$\delta\Omega = -\frac{f\mu}{2a^2}\frac{da}{dt}\delta\tau - \frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)\cos i\frac{da}{dt} - 2ae\cos i\frac{de}{dt}\right\}\delta\alpha$$

$$+ b\sin i\frac{di}{dt}\delta\alpha - \frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt}\right\}\delta\beta$$

$$+ \frac{d\tau}{dt}\cdot\frac{f\mu}{2a^2}\delta a + \frac{d\alpha}{dt}\left[\frac{f\mu}{2b}\cos i\left\{(1-e^2)\delta a - 2ae\delta e\right\} - b\sin i\,\delta i\right]$$

$$+ \frac{d\beta}{dt}\cdot\frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)\delta a - 2ae\delta e\right\}.$$

Mais, on a aussi, Ω étant exprimé en fonction des quantités $a, e, i, \tau, \alpha, \beta$:

$$\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\Omega}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\Omega}{\partial i}\delta i + \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\delta\tau + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\delta\beta.$$

En égalant les coefficients des variations δa, δe, ... dans les seconds membres, on a les équations suivantes :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{f\mu}{2a^2}\frac{d\tau}{dt} + \frac{f\mu}{2b}(1-e^2)\cos i\frac{d\alpha}{dt} + \frac{f\mu}{2b}(1-e^2)\frac{d\beta}{dt}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial e} = -\frac{f\mu ae}{b}\cos i\frac{d\alpha}{dt} - \frac{f\mu ae}{b}\frac{d\beta}{dt}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial i} = -b\sin i\frac{d\alpha}{dt}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} = -\frac{f\mu}{2a^2}\frac{da}{dt}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} = b\sin i\frac{di}{dt} - \frac{f\mu}{2b}(1-e^2)\cos i\frac{da}{dt} + \frac{f\mu ae}{b}\cos i\frac{de}{dt}, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} = -\frac{f\mu}{2b}(1-e^2)\frac{da}{dt} + \frac{f\mu ae}{b}\frac{de}{dt}. \qquad (6)$$

On en tire :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \tag{7}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{f\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i}, \tag{8}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{a(1-e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{f\mu a}\,.\,e}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \tag{9}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{f\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} - \frac{\cos i}{\sqrt{f\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \tag{10}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{f\mu a}\,.\,e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} + \frac{\cos i}{\sqrt{f\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i}, \tag{11}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2a^2}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial a} + \frac{a(1-e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e}. \tag{12}$$

Les éléments a, e, i, α, β et τ étant supposés varier très peu, si on les regarde comme constants dans les seconds membres de ces dernières équations, et si l'on considère t, qui entre dans Ω, comme seule variable, on pourra calculer ces quantités avec une grande approximation pendant un temps assez considérable à l'aide des quadratures indiquées dans ces équations.

181. On peut remplacer la dernière formule (12), qui donne τ, par une autre d'une grande utilité. A cet effet, on remplacera la quantité τ par l'*anomalie moyenne :*

$$\lambda = n(t + \tau),$$

dans laquelle :

$$n = \sqrt{f\mu}\,.\,a^{-\frac{3}{2}}.$$

Observons que τ n'entre dans Ω que par λ qui le renferme.

Or, si l'on remplace τ par λ, a entrera dans Ω par n qui le renferme, et nous aurons :

$$\begin{aligned}\delta\Omega &= \frac{\partial\Omega}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\Omega}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\Omega}{\partial i}\delta i + \frac{\partial\Omega}{\partial \tau}\delta\tau + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\delta\beta \\ &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)\delta a + \frac{\partial\Omega}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\Omega}{\partial i}\delta i + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\delta\beta.\end{aligned}$$

Nous désignons par $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)$ la dérivée de Ω par rapport à a, en supposant constant λ, qui renferme a.

Or, de la formule :

$$\lambda = n(t + \tau),$$

on tire :

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= n\delta\tau + (t+\tau)\delta n \\ &= n\delta\tau + (t+\tau)\frac{\partial n}{\partial a}\delta a.\end{aligned}$$

D'où, en remplaçant $\delta\lambda$ dans l'équation précédente, et égalant les coefficients de δa et $\delta\tau$ dans les deux membres, il vient :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} = n\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) + (t+\tau)\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial n}{\partial a};$$

mais, d'autre part, on a :

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + n\frac{d\tau}{dt} + (t+\tau)\frac{\partial n}{\partial a}\frac{da}{dt}\cdot$$

Des formules précédentes, il résulte que l'on a :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} = -\frac{2a^2 n}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt} &= \frac{2a^2}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial a} + \frac{a(1-e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} \\ &= \frac{2a^2}{f\mu}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) + \frac{2a^2}{f\mu}(t+\tau)\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial n}{\partial a} + \frac{a(1-e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e};\end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{2a^2n}{f\mu}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) + \frac{2a^2n}{f\mu}(t+\tau)\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial n}{\partial a}$$
$$+ \frac{an(1-e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} - (t+\tau)\frac{\partial n}{\partial a}\cdot\frac{2a^2n}{f\mu}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda},$$

ou bien :

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{2a^2n}{f\mu}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) + \frac{an(1-e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e},$$

ou bien encore, en ayant égard à la formule :

$$n = \sqrt{f\mu}\,.\,a^{-\frac{3}{2}},$$

il vient :

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{f\mu}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) + \frac{1-e^2}{\sqrt{f\mu a}\,.\,e}\frac{\partial\Omega}{\partial e}. \tag{14}$$

Les formules (13) et (14) peuvent remplacer les formules (7) et (12).

ERRATA.

Page 160, ligne 3, au lieu de : $p_i = \frac{\partial V}{\partial a_i}$, lisez : $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$.

— — — 6, — $b_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, — $b_i = \frac{\partial V}{\partial a_i}$.

SUR

LA DROITE ET LE CERCLE D'EULER

PAR

M. A. GOB,

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN.

SUR

LA DROITE ET LE CERCLE D'EULER.

1. Soit un triangle quelconque $T \equiv ABC$. Les pieds des hauteurs sont les sommets d'un triangle $T \equiv A'B'C'$, appelé *triangle orthique;* les tangentes menées par A, B, C au cercle ABC sont les sommets d'un triangle $T'' \equiv A''B''C''$, appelé *triangle tangentiel.* Désignons par H l'orthocentre de T, par O le centre du cercle circonscrit à T, par O' le centre du cercle circonscrit à T' (*cercle d'Euler*).

Les triangles T' et T'' sont, évidemment, homothétiques. Les points H, O en sont des points homologues, car ce sont les centres des cercles inscrits (cercles exinscrits, lorsque T est obtusangle); donc HO passe par le centre d'homothétie. D'où le théorème :

Les droites A'A'', B'B'', C'C'' *qui joignent les sommets homologues du triangle orthique et du triangle tangentiel d'un triangle donné* ABC, *concourent en un même point* P *de la droite d'Euler de* ABC.

Pour préciser la position de P, observons que

$$\frac{PH}{PO} = \frac{HA'}{OA''} = \frac{2R\cos B\cos C}{R\sec A} = 2\cos A\cos B\cos C.$$

Les coordonnées normales de H et O étant (2R cos B cos C, ...), (R cos A, ...), celles de P seront

$$\frac{2R\cos B\cos C - R\cos A \,.\, 2\cos A\cos B\cos C}{1 - 2\cos A\cos B\cos C} = \frac{2R\cos B\cos C\sin^2 A}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}\ \cdots;$$

elles sont donc proportionnelles aux quantités

$$\frac{\sin^2 A}{\cos A},\quad \frac{\sin^2 B}{\cos B},\quad \frac{\sin^2 C}{\cos C}.$$

On conclut, de ces expressions, que *le centre d'homothélie des triangles* T', T'', *et l'anticomplémentaire* Λ *du point de Lemoine de* T *sont deux points inverses par rapport à* T.

Nous croyons utile de rappeler que Λ est le centre de perspective du triangle T, et du triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle formé par les milieux des côtés de T (*).

2. Le centre O' du cercle A'B'C' a pour homologue le centre O'' du cercle A''B''C''. O' étant situé sur HO, on peut énoncer le théorème suivant :

Le centre du cercle circonscrit au triangle tangentiel d'un triangle donné T, *est situé sur la droite d'Euler de* T.

La position du point O'' sur la droite HO résulte des égalités

$$\frac{PH}{PO}=\frac{PO'}{PO''}=\frac{PO'-PH}{PO''-PO}=\frac{HO'}{OO''},$$

d'où

$$\frac{HO''}{OO''}=1+4\cos A\cos B\cos C.$$

Si l'on considère T'' comme étant le triangle *fondamental*, les résultats trouvés, après un changement de notations, peuvent être énoncés ainsi :

Soit I *le centre de l'un des cercles touchant les trois côtés d'un triangle* T, *et soit* t *le triangle qui a pour sommets les points de contact de ces côtés.* O *étant le centre du cercle circonscrit à* T, *le triangle* T *et le triangle orthique de* t *sont perspectifs, et le centre de perspective* (**) *est situé sur la droite* OI ; *le centre*

(*) Voir *Mathesis,* t. VII, p. 105.

(**) Les coordonnées normales de ce point sont $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$ ou $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C$, ...

du cercle des neuf points de t *est situé sur la même droite* OI.

OI étant la droite d'Euler de t contient également le centre de gravité de ce triangle (*).

3. Les hauteurs de T rencontrent la circonférence circonscrite en trois nouveaux points A''', B''', C''', sommets d'un triangle T''' qui est homothétique au triangle tangentiel T''. Les points H et O étant des points homologues de T'' et T''', on voit que *les droites* A'''A'', B'''B'', C'''C'' *concourent en un même point* P' *de la droite d'Euler de* ABC.

On trouve aisément

$$\frac{P'H}{P'O} = \frac{2HA'}{OA''} = 4 \cos A \cos B \cos C,$$

d'où les coordonnées normales de P', à un facteur de proportionnalité près,

$$\frac{\cos 2A}{\cos A}, \quad \frac{\cos 2B}{\cos B}, \quad \frac{\cos 2C}{\cos C}.$$

Au moyen de ces coordonnées, on vérifie facilement que P' *est le centre perspectif de* T, *et du triangle orthique du triangle orthique de* T.

Considérant dans la figure précédente T''' comme étant le triangle fondamental, on peut, après un changement de notations, énoncer le théorème suivant :

Par les points de rencontre des bissectrices intérieures d'un triangle acutangle T *avec la circonférence circonscrite, on mène à celle-ci des tangentes. On obtient ainsi un triangle* T_1. *En opérant de la même façon sur* T_1, *on obtient un nouveau triangle* T_2, *et ainsi de suite. Les centres des cercles circonscrits aux triangles* T, T_1, T_2, ... *et les centres d'homothéthie de deux quelconques de ces triangles sont sur une même droite.*

(*) Comparer NEUBERG, *Educational Times*, Question 9386, et *Math. élém.* (JOURNAL DE LONGCHAMPS, 1888, p. 25).

4. Soient α, β, γ, les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle $T \equiv ABC$. Supposons que

$$\begin{array}{llll} O\alpha & \text{rencontre CA en } \alpha', & \text{AB en } \alpha''; \\ O\beta & \text{» AB en } \beta', & \text{BC en } \beta''; \\ O\gamma & \text{» BC en } \gamma', & \text{CA en } \gamma''. \end{array}$$

O sera, évidemment, l'orthocentre de chacun des triangles $A\beta'\gamma''$, $B\gamma'\alpha''$, $C\alpha'\beta''$.

AO est perpendiculaire à $\beta'\gamma''$; soit α_1 le point d'intersection de ces droites. Désignons par m, n, p, les milieux de $\beta'\gamma''$, $A\gamma''$, $A\beta'$. Les points α_1, β, γ, m, n, p, appartiennent au cercle d'Euler du triangle $A\beta'\gamma''$.

Soumettons la figure à une inversion en prenant pour pôle le point A, pour module la quantité

$$A\beta \,.\, A\gamma'' = A\gamma \,.\, A\beta' = AO \,.\, A\alpha_1.$$

Les points β, γ, α_1, n, p, auront pour inverses les points γ'', β', O, C, B. Donc :

La circonférence qui passe par deux sommets B, C, *d'un triangle* ABC *et par le centre* O *du cercle* ABC, *rencontre les côtés* AB, AC *aux mêmes points que les médiatrices* (*) *de* AC, AB (**).

BC et $\beta'\gamma''$ étant antiparallèles par rapport à l'angle BAC, Am est une symédiane du triangle ABC, et, par suite, passe par le point A″, pôle de BC par rapport au cercle ABC. On voit facilement que A″ est situé sur la circonférence OBC. OA″ étant un diamètre, la projection A_2 de O sur la symédiane AA″ appartient à la même circonférence, c'est l'inverse de m; on sait que A_2 est un sommet du deuxième triangle de Brocard de T.

Les circonférences $\alpha_1\beta\gamma$, OCB sont également des figures

(*) Les médiatrices d'un triangle sont les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés.

(**) La démonstration directe de ce théorème se fait sans difficulté.

homothétiques par rapport au point A, le rapport de similitude étant égal à $\frac{1}{2}$. De là, on peut conclure que la circonférence BOC passe par les symétriques de A par rapport aux milieux des droites $\beta'\gamma''$, $O\beta'$, $O\gamma''$; le premier de ces points est A'', de sorte que $A''\beta'A\gamma''$ *est un parallélogramme.*

5. Le milieu de AA_2 est un point de la circonférence *mnp*; c'est aussi un sommet du deuxième triangle de Brocard de $A\beta\gamma$. Mais β, γ, sont les pieds de deux hauteurs de $A\beta'\gamma'$; donc, si l'on considère $A\beta'\gamma''$ comme étant le triangle fondamental, on peut énoncer le théorème suivant :

Soient A', B' C' *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC. *Le cercle d'Euler de ce triangle passe par un sommet du second triangle de Brocard de chacun des triangles* $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, $HB'C'$, $HC'A'$, $HA'B'$, $AA'C'$, $AA'B'$, ...

Ce qui fait douze nouveaux points de ce cercle.

Pour trouver les neuf derniers points, on observe que les triangles HBC, HCA, HAB ont même cercle d'Euler que le triangle ABC.

6. La circonférence OBC est aussi l'inverse de la droite BC, le cercle d'inversion étant le cercle circonscrit à ABC. Cette remarque conduit aux relations

$$R^2 = O\alpha' \,.\, O\alpha'' = O\beta' \,.\, O\beta'' = O\gamma' \,.\, O\gamma'' \qquad (1)$$

$$R^2 = OA_2 \,.\, OA'_2 = OB_2 \,.\, OB'_2 = OC_2 \,.\, O'C'_2, \qquad (2)$$

où A_2, B_2, C_2 sont les sommets du second triangle de Brocard de ABC, et A'_2, B'_2, C'_2 les points de rencontre de OA_2, OB_2, OC_2 avec BC, CA, AB. Les relations (1) résultent aussi de ce que les triangles $OB\beta''$, $O\beta'B$ sont équiangles; les autres, de ce que le cercle de Brocard passe par A_2, B_2, C_2 et a pour inverse la droite de Lemoine A'_2 B'_2 C'_2.

SUR

LES CERCLES DE NEUBERG

PAR

M. A. GOB,

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN.

SUR

LES CERCLES DE NEUBERG.

Bibliographie.

J. NEUBERG, *Mathesis,* 1882, pp. 94, 157 et 186.
Journal de Mathématiques élémentaires, 1882, p. 24, et 1886, p. 75.

J. CASEY, *A Treatise on Analytical Geometry,* 1885, pp. 75, 107, 120, 248, 256, 258, 259, 326.
A Sequel to Euclid, 4e édition, 1886, pp. 207, 208, 213, 214.

M'CAY, *Transactions of the Royal Irish Academy,* vol. XVIII, pp. 453-470.

E. VIGARIÉ, *Journal de Mathématiques élémentaires,* 1887, pp. 121, 145, 169.

SIMMONS, *Companion to Weekly Papers by J. Milne,* 1888.

1. Soit un triangle ABC. Sur BC comme base, du même côté que A, construisons des triangles de même angle de Brocard V que ABC (triangles *équibrocardiens* avec ABC) ; le lieu des sommets est la circonférence (N_a) représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 - ay \cot V + \frac{3}{4} a^2 = 0, \qquad (1)$$

les axes étant BC et la perpendiculaire au milieu de BC. Ce lieu a reçu le nom de *Cercle de Neuberg*, du nom du géomètre qui, le premier, en a fait mention. Nous en désignerons le centre par N_a, le rayon par ρ_a.

Si l'on prend pour base commune des triangles équibrocardiens avec ABC, soit le côté BC, soit le côté CA, on obtient deux autres cercles de Neuberg (N_b), (N_c).

Soient A', B', C' les milieux des côtés ABC, O le centre et R le rayon du cercle circonscrit. De l'équation (1), on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

$$a)\quad A'N_a = \frac{1}{2} a \cot V, \quad B'N_b = \frac{1}{2} b \cot V, \quad C'N_c = \frac{1}{2} c \cot V; \qquad (2)$$

$$\textit{angle}\ BN_aC = CN_bA = AN_cB = 2V, \quad \textit{angle}\ CBN_a = \frac{1}{2}\pi - V.$$

$$b)\quad \rho_a = \frac{1}{2} a\sqrt{\cot^2 V - 3}, \quad \rho_b = \frac{1}{2} b\sqrt{\cot^2 V - 3}, \quad \rho_c = \frac{1}{2} c\sqrt{\cot^2 V - 3}.$$

c) Les tangentes menées de B et C au cercle (N_a) sont égales à BC. Autrement dit, le cercle (N_a) coupe orthogonalement les cercles décrits des points B, C comme centres, avec un rayon égal à BC.

Cette remarque conduit à l'équation du cercle (N_a) en coordonnées barycentriques :

$$a^2(y+z)(x+y+z) - (a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0; \qquad (3)$$

car, dans l'équation générale

$$(xP_a + yP_b + zP_c)(x+y+z) - (a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0,$$

les coefficients P_a, P_b, P_c sont égaux aux puissances des sommets du triangle de référence par rapport au cercle.

2. Les égalités (2) donnent

$$ON_a = A'N_a - A'O = \frac{1}{2} a(\cot V - \cot A) = \frac{1}{2} a(\cot B + \cot C)$$
$$= \frac{a \sin A}{2 \sin B \sin C} = \frac{a^3}{4S}.$$

On en conclut

$$\frac{ON_a}{a}+\frac{ON_b}{b}+\frac{ON_c}{c}=\cot V,$$

$$ON_a \,.\, ON_b \,.\, ON_c = R^3,$$

$$a^2 \,.\, ON_bN_c = b^2 \,.\, ON_cN_a = c^2 \,.\, ON_aN_b. \qquad (4)$$

La dernière relation montre que O *est le centre de gravité des points* N_a, N_b, N_c, *chargés de masses inversement proportionnelles à* a^2, b^2, c^2, de sorte que ON_a, par exemple, divise N_bN_c dans le rapport b^2, c^2.

Soient A_1, B_1, C_1 les sommets du premier triangle de Brocard. On sait que les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un même point D, ayant pour coordonnées barycentriques $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. En combinant cette propriété avec l'interprétation géométrique des égalités (4), on voit que *les points qui divisent les droites* AN_a, BN_b, CN_c, DO *dans un même rapport sont tels que le quatrième point est le centre de gravité des trois autres chargés de masses inversement proportionnelles à* a^2, b^2, c^2.

Un théorème analogue s'applique, d'une part aux droites AN_c, BN_a, CN_b, $\Omega'O$, d'autre part aux droites AN_b, BN_c, CN_a, ΩO; Ω désigne ici le point rétrograde, Ω' le point direct de Brocard du triangle ABC.

3. On peut trouver immédiatement six points de la circonférence (N_a). En effet, construisons les angles CBE, BCF égaux à BAC et situés du même côté de BC que A; soient E, F les points de rencontre de BE avec AC, et de CF avec AB. Les triangles BEC, CBF, équiangles avec ABC, ont même angle de Brocard V. Donc, les points A, E, F et leurs symétriques α, ε, φ par rapport à la droite A'O sont situés sur la circonférence (N_a).

Le groupe de ces six points jouit de propriétés très intéressantes qui ont été signalées par M. Neuberg. Pour l'énoncé et la démonstration de ces propositions, nous nous contentons de renvoyer le lecteur à la Note de M. Vigarié.

Nous ferons cependant une remarque nouvelle, qui nous sera utile dans la suite. De l'égalité des angles CBE, BAC, on déduit que la circonférence ABE touche BC en B.

Appelons *cercles adjoints* (Beikreise) les cercles qui passent par les extrémités d'un côté du triangle ABC et touchent un autre côté. Tel est, par exemple, le cercle qui passe par A, B et touche BC en B ; nous le désignons par la notation *cercle adjoint* (AB). Le cercle adjoint (BA) passe par B, A et touche en A le côté AC.

La remarque faite ci-dessus peut être énoncée ainsi : *Les cercles adjoints* (AB), (AC) *rencontrent* AC *et* AB *en deux points du cercle* (N_a).

Rappelons que les cercles adjoints (AB), (BC), (CA) se rencontrent au point Ω, que les trois autres cercles se rencontrent en Ω', que les deux cercles (BA), (CA) passent par le sommet A_2 du deuxième triangle de Brocard.

4. Soient αBC, βCA, γAB trois triangles directement semblables. Les droites Aα, Bβ, Cγ ne concourent en un même point que dans les deux cas suivants:

1° Les triangles αBC, ... sont isoscèles. Alors le point d'intersection des droites Aα, Bβ, Cγ parcourt une hyperbole équilatère Γ, appelée *hyperbole de Kiepert* (*).

2° Les triangles αBC, ... sont équibrocardiens avec ABC. Dans ce cas, les droites Aα, Bβ, Cγ sont parallèles, et les points α, β, γ ont pour lieu géométrique, respectivement, les cercles (N_a), (N_b), (N_c).

Le premier cas a été signalé par M. Kiepert, le second par M. Neuberg. Nous ne nous arrêtons pas à la démonstration de ces propositions, mais nous allons en indiquer quelques conséquences.

Soient (n_a, n'_a), (n_b, n'_b), (n_c, n'_c) les points de rencontre des

(*) Les propriétés de cette conique ont été étudiées par MM. Brocard (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884, pp. 197-209, et 1885, pp. 12, 30, 58, 76, 104, 125), Neuberg (*ibidem*, 1886, p. 75) et M'Cay (*Mathesis*, 1887, pp. 208-220).

cercles (N_a), (N_b), (N_c), respectivement, avec les médiatrices de BC, CA, AB. Les deux groupes (n_a, n_b, n_c), (n'_a, n'_b, n'_c) sont les sommets de deux groupes de trois triangles semblables construits sur les côtés BC, CA, AB; comme ces triangles sont isoscèles et équibrocardiens avec ABC, les droites An_a, Bn_b, Cn_c se rencontrent sur l'hyperbole de Kiepert et sont parallèles entre elles; donc elles sont parallèles à une asymptote de cette courbe. De même, les droites An'_a, Bn'_b, Cn'_c sont parallèles à la seconde asymptote.

Les points (N_a, N_b, N_c), (A_1, B_1, C_1) sont les sommets de deux groupes de triangles semblables isoscèles construits sur BC, CA, AB, dont les angles à la base N_aBC, A_1BC sont complémentaires. Donc : 1° *les droites* AN_a, BN_b, CN_c *se rencontrent en un point* N (point de Tarry) *de* Γ *et sont perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle* $A_1B_1C_1$; 2° *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent en un point* D *de* Γ *et sont perpendiculaires aux côtés du triangle* $N_aN_bN_c$ (*).

D'après un théorème connu, les parallèles aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$ menées par A, B, C, concourent au point de Steiner R. ; autrement dit :

Les tangentes menées par A, B, C, *respectivement aux cercles* (N_a), (N_b), (N_c) *se rencontrent au point de Steiner* (*).

5. Nous allons retrouver l'une des propositions précédentes et parvenir à quelques nouveaux théorèmes, en soumettant la figure à une transformation par rayons vecteurs réciproques.

D'abord, *si l'on prend le sommet* A *pour pôle d'inversion et*

(*) Cette Remarque n'a pas été faite explicitement dans le beau Mémoire de M'Cay sur l'hyperbole Γ, auquel nous empruntons le principe sur lequel elle repose (voir *Mathesis*, 1887, p. 216). M. Neuberg a donné une démonstration très simple de ce principe, dans une Note qui accompagne le travail de M. Cay. Il résulte de cette Note que

$$AN_a = B_1C_1 \cot V, \quad AA_1 = N_bN_c \operatorname{tg} V;$$

donc les côtés du triangle $N_aN_bN_c$ sont à la fois perpendiculaires et proportionnels aux droites AA_1, BB_1, CC_1.

que B_i, C_i *désignent les inverses des sommets* B, C, *le cercle* (N_a) *se transforme en la droite de Lemoine du triangle* AB_iC_i, *et les transformés des cercles* (N_b), (N_c) *sont deux cercles de Neuberg de ce triangle.*

Pour simplifier la transformation, adoptons comme module de transformation le produit AB . AC; alors les triangles ABC, AC_iB_i sont symétriquement égaux. On a vu (§ **3**) que le cercle (N_a) passe par le point α situé sur le cercle ABC, et par les points E, F situés sur les cercles adjoints (AB), (AC). Donc l'inverse du cercle (N_a) passe par les points de rencontre de B_iC_i, AC, AB, respectivement avec les tangentes menées par A, B_i, C_i. On démontre, d'une manière semblable, la seconde partie du théorème.

La droite AN_a est donc perpendiculaire à la droite de Lemoine du triangle AB_iC_i. Mais les droites homologues des triangles ABC, AC_iB_i sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BAC ; par conséquent, AN_a est conjuguée isogonale avec une parallèle menée par A à la droite OK (K est le point de Lemoine de ABC) du triangle ABC, ce qui démontre de nouveau que AN_a passe par le point de Tarry.

6. Les tangentes en B, A, C, aux cercles (N_b), (N_a), $N_c)$, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, passent au point de Steiner. Appliquons cette propriété au triangle AB_iC_i pour la transformer par inversion, le pôle de la transformation étant placé en A. Nous aurons le théorème suivant :

Dans tout triangle ABC, *le cercle mené par* A *et touchant en* B *la droite* BR, *le cercle mené par* B *et touchant en* C *la dvoite* CR, *se coupent en un point* M *du côté* BC; *la droite* AM *est parallèle à la droite de Lemoine de* ABC.

Les centres des cercles dont il est question dans ce théorème, sont à l'intersection de ON_c avec BN et de ON_b avec CN; la droite qui joint ces points est donc perpendiculaire au milieu de AM.

On peut, de même, transformer par inversion la propriété que les droites AN_a, BN_b, CN_c se coupent en un point N du cercle ABC.

7. Cherchons le centre radical des cercles de Neuberg.

Les parallèles menées par A, B, C aux côtés opposés du triangle ABC déterminent un triangle $A_aB_aC_a$, appelé *anticomplémentaire* de ABC.

Le point C_a est le centre radical des trois cercles (N_a), (N_b), (O) (*); car les droites C_aA, C_bB sont les axes radicaux des deux premiers cercles comparés au troisième.

L'axe radical des cercles (N_a), (N_b) est donc la perpendiculaire abaissée de C_a sur la droite $N_a N_b$; cet axe est donc parallèle à la droite CD (§ 4). Par suite, *le centre radical des trois cercles de Neuberg est l'anticomplémentaire* D_a *de* D.

Une démonstration analytique de ce théorème se déduit très simplement de l'équation (3).

La figure $D\Omega D_a\Omega'$ *est un parallélogramme.* En effet, le centre de gravité G de ABC est aussi le centre de gravité du triangle $D\Omega\Omega'$ (**); D_a est situé sur la droite DG, et $GD_a = 2DG$.

8. Cherchons encore l'axe radical d'un cercle de Neuberg et d'un sommet du triangle fondamental.

L'axe radical du cercle (N_a) et du point A est la droite AR passant par le point de Steiner. Celui du cercle (N_a) et du sommet B est la droite $C\Omega'$ menée par le point Ω' de Brocard; car C est un point d'égale puissance et $C\Omega'$ est perpendiculaire à BN_a. Enfin, l'axe radical de (N_a) et de C est la droite $C\Omega$.

De là résultent les théorèmes suivants :

1° *Le centre radical des sommets* B, C *et du cercle* (N_a) *est le sommet* A_1 *du premier triangle de Brocard*, de sorte que $\overline{A_1B}^2 = A_1n_a \cdot A_1n'_a = \overline{A_1N_a}^2 - \rho_a^2$, égalité que l'on peut vérifier immédiatement.

(*) (O) désigne le cercle circonscrit au triangle ABC.

(**) Au Congrès de Rouen (*Association française pour l'avancement des sciences*, 1883), M. Brocard a démontré que le milieu S de $\Omega\Omega'$ est sur GD et que $DG = 2GS$, de sorte que S est le complémentaire de D.

Les expressions des coordonnées barycentriques des points D, Ω, Ω' conduisent facilement au même théorème.

2° *Le centre radical du sommet* A *et des cercles* (N_b), (N_c) *est l'inverse triangulaire du point* A_1;

3° *Le cercle décrit de* Ω' *comme centre avec le rayon* $\Omega'B$ *coupe orthogonalement le cercle* (N_a).

Ces propositions déterminent plusieurs points remarquables situés sur la droite A_aD_a, axe radical des cercles (N_a), (N_b), (N_c), à savoir :

Le pied de la symédiane AK, l'inverse de A_1, les points de rencontre de CR avec $A\Omega'$, de BR avec $A\Omega$, de la droite de Lemoine avec la conjuguée isogonale de AD_a (voir § 5).

9. *Cercles de similitude des cercles de Neuberg.* Désignons T_c, T'_c les centres de similitude des cercles (N_b), (N_c), et par (N'_c) le cercle décrit sur la distance T_c, T'_c comme diamètre. La circonférence (N'_c) est la *circonférence de similitude* de (N_b), (N_c); elle a même axe radical avec chacune de celles-ci, et est le lieu des points d'où on les voit sous un même angle.

Les points T_c, T'_c sont situés sur les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle BAC; car les droites AN_b, AN_c sont également inclinées sur AC, AB, et sont dans le rapport $AC : AB = \rho_b : \rho_c$.

Il résulte de là que la circonférence (N'_c) passe par le sommet A. Elle passe aussi par le centre de similitude A_2 de deux figures semblables construites sur CA et AB. Son second point de rencontre avec la circonférence ABC appartient à la médiane du triangle ABC; car le sommet A_a du triangle anticomplémentaire, intersection des axes radicaux des cercles (O) et (N_b), (O) et (N_b), est sur l'axe radical des cercles (O) et (N'_c).

Considérons maintenant les trois cercles de similitude (N'_a), (N'_b), (N'_c) du groupe (N_a), (N_b), (N_c). Ils se coupent en deux points U, U' d'où l'on voit les trois cercles de Neuberg sous le même angle. Ils ont donc un même axe radical UU' passant par le centre radical D_a de (N_a), (N_b), (N_c). Comme ils coupent orthogonalement le cercle mené par les centres des cercles de Neuberg, UU' passe par le centre du cercle $N_aN_bN_c$. Cette droite passe aussi par l'intersection G des droites AA_a, BB_a, CC_a, axes radicaux du cercle (O) combiné, successivement, avec les trois cercles de similitude. Enfin, observons que G est le centre de gravité des points N_a, N_b, N_c, qui se correspondent dans les figures semblables construites sur BC, CA, AB. En résumé :

La droite GD *est la droite d'Euler du triangle* $N_aN_bN_c$ *et contient les deux points d'où l'on voit les trois cercles de Neuberg sous un même angle.*

10. Revenons à la transformation par rayons vecteurs réciproques, indiquée au § **5**. Le pôle d'inversion étant en A et la puissance égale à bc, le cercle (N_a) se transforme en la droite de Lemoine du triangle AB_iC_i. Or, cette droite est l'axe radical du cercle AB_iC_i et du cercle de Brocard de AB_iC_i. Le premier de ces cercles ayant pour inverse la droite BC, celle-ci doit être l'axe radical du cercle (N_a) et de l'inverse du cercle de Brocard de AB_iC_i. Ce dernier passe par le centre O′ du cercle AB_iC_i; AO′ est perpendiculaire à BC, et le point diamétralement opposé à A a pour inverse un point de la droite BC, inverse du cercle AB_iC_i. Il résulte de là que l'inverse de O′ est symétrique de A par rapport à BC. Par conséquent :

Le cercle (ν_a) *symétrique du cercle* (N_a) *par rapport à* BC, *et le cercle symétrique du cercle de Brocard par rapport à la bissectrice de l'angle* BAC *sont deux figures inverses l'une de l'autre, le pôle d'inversion étant en* A *et la puissance égale à* bc.

Soient ν_a, ν_b, ν_c les symétriques de N_a, N_b, N_c, respectivement, par rapport à BC, CA, AB, et soit Z le milieu de OK (centre du cercle de Brocard). D'après ce qui précède, les droites $A\nu_a$, AZ sont conjuguées isogonales par rapport à l'angle ABC; donc :

Les droites $A\nu_a$, $B\nu_b$, $C\nu_c$ *se coupent au point* Z′, *inverse du centre* Z *du cercle de Brocard* (*).

11. Les notations restant les mêmes, *la figure* $AN_b\nu_cN_a$ *est un parallélogramme.* Nous avions vérifié cette proposition au

(*) Théorème connu. Voir *Mathesis*, 1887, p. 210.

moyen des coordonnées normales des points N_b, ν_c, N_a. M. Neuberg nous a fait remarquer qu'elle peut être généralisée en ces termes :

Sur les côtés d'un triangle ABC, *on construit six triangles isoscèles semblables, quelconques; soient* N_a, N_b, N_c *les sommets de ceux de ces triangles qui sont tournés vers l'intérieur de* ABC, *et* ν_a, ν_b, ν_c *les sommets des trois autres. Les figures* $AN_a\nu_cN_b$, $A\nu_aN_c\nu_b$, ... *sont des parallélogrammes.*

Voici la démonstration géométrique proposée par ce mathématicien : Si A′, B′, C′ sont les milieux des côtés de ABC, la droite $C\nu_c$ est la résultante de CC′ et $C'\nu_c$; mais CC′ est la résultante de CB′ et CA′, $C'\nu_c$ est celle de $B'N_b$, $A'N_a$ (*), donc $C\nu_c$ est la résultante de CB′, $B'N_b$, CA′, $A'N_a$ ou celle de CN_b, CN_a.

Les deux triples de droites (AN_a, BN_b, CN_c), ($A\nu_a$, $B\nu_b$, $C\nu_c$) déterminent deux points N, ν de l'hyperbole de Kiepert; *la droite* $N\nu$ *passe par le point de Lemoine* (**).

12. La première partie du théorème du 5° suggère une généralisation des cercles de Neuberg.

Soient d une droite quelconque du plan ABC; d_a, d_b, d_c, les symétriques de d par rapport aux bissectrices intérieures du triangle ABC. L'inverse de d_a, si l'on prend pour pôle d'inversion le sommet A et pour module le produit AB . AC, est une circonférence (M_a) passant par A. Soient (M_b), (M_c) les circonférences qui se déduisent par un procédé analogue des droites d_b, d_c. Les cordes que déterminent dans les trois cercles (M_a), (M_b), (M_c) respectivement les angles A, B, C du triangle ABC, sont parallèles à d.

Si l'on prend pour d la droite de Lemoine de ABC, les cercles (M_a), (M_b), (M_c) deviennent les cercles de Neuberg.

(*) $A'N_a$, BN'_b, $C'\nu_c$ sont perpendiculaires et proportionnelles aux côtés du triangle ABC.

(**) Théorème dû à M. Lemoine (Congrès de Grenoble, 1885). Voir aussi le Mémoire de M'Cay, *Mathesis*, 1887, p. 215.

Adoptons pour d la droite représentée en coordonnées normales par l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0;$$

c'est la polaire trilinéaire du point $T(\alpha, \beta, \gamma)$.

Le cercle (M_a) aura pour équation

$$\frac{\alpha}{\beta\gamma}(\beta y + \gamma z)(ax + by + cz) - (ayz + bzx + cxy) = 0.$$

Les coordonnées du centre radical des trois cercles (M_a), (M_b), (M_c) sont

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right), \quad \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right), \quad \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right).$$

Les tangentes menées à ces cercles, respectivement, par A, B, C, concourent en un point R′ de la circonférence ABC; R′ est l'inverse du point à l'infini sur d.

On démontre aisément les théorèmes suivants analogues aux théorèmes démontrés antérieurement pour les cercles de Neuberg:

Les droites AM_b, AM_c sont isogonales, les cercles M_b et M_c sont vus de A sous le même angle, et le produit des tangentes menées de A à ces cercles est égal à bc. Les points d'où l'on voit les cerles M_a, M_b, M_c sous le même angle, le centre du cercle $M_aM_bM_c$ et l'inverse triangulaire de T sont en ligne droite.

13. Prenons pour T le centre I du cercle inscrit. Alors le cercle (M_a) coupe AB et AC en deux points situés, respectivement, sur les cercles décrits de B et C comme centres avec BC pour rayon. Les cercles (M_a), (M_b), (M_c) ont pour rayon commun $\sqrt{R(R - 2r)}$; leur centre radical se confond avec le centre du cercle inscrit à ABC; les tangentes en A, B, C concourent au point de la circonférence ABC qui a pour coordonnées normales

$$\frac{1}{b - c}, \quad \frac{1}{c - a}, \quad \frac{1}{a - b};$$

enfin, les droites AM_b, AM_c sont égales et isogonales.

Nous avons obtenu la valeur du rayon de (M_a) par le calcul. M. Neuberg nous en communique la démonstration suivante :

Les bissectrices AI, BI, CI rencontrent la circonférence (O) aux sommets d'un triangle LMN dont ces droites sont les hauteurs. Il suit de là que trois forces représentées par OL, OM, ON ont une résultante représentée par OI. Si, maintenant, nous prenons sur BA, CA les longueurs BP = CQ = BC, la droite PQ est la résultante des trois droites PB, BC, CQ, égales entre elles et perpendiculaires, respectivement, à ON, OL, OM ; donc PQ est également perpendiculaire à OI, et

$$\frac{PQ}{OI} = \frac{BC}{OL} = 2 \sin A.$$

On conclut de là que OI est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle APQ.

Le même géomètre observe que, si l'on prend sur les prolongements de AB, AC des longueurs BP′ et CQ′ égales à BC, les rayons des cercles circonscrits aux triangles AP′Q′, APQ′, AP′Q sont égaux aux droites joignant O aux centres I_a, I_b, I_c des cercles circonscrits à ABC et que les bases P′Q′, PQ′, P′Q sont perpendiculaires aux droites OI_a, OI_b, OI_c.

14. Lorsque la base BC est fixe et l'angle de Brocard V constant, le sommet A, d'après ce que nous avons vu, décrit un cercle (N_a). Considérons les cercles (N_b) des triangles variables ABC. L'angle ACN_b et le rapport CA : CN_b étant constants, *le point* N_b *décrit une circonférence;* il est facile de voir que N_c décrit la même ligne. L'enveloppe de (M_b) est la podaire de B par rapport à cette circonférence; c'est donc un limaçon de Pascal dont le point double est en A.

Transformons ce résultat par inversion en plaçant le pôle en B. On verra que *la droite de Lemoine de tous les triangles équibrocardiens construits sur* BC, *enveloppe une conique ayant* B *et* C *pour foyers.*

RÉPERTOIRE ALPHABÉTIQUE

DES

NOMS SPÉCIFIQUES ADMIS OU PROPOSÉS

DANS LA

SOUS-FAMILLE DES LIBELLULINES

AVEC INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES, ICONOGRAPHIQUES
ET GÉOGRAPHIQUES

PAR

Alfred PREUDHOMME DE BORRE,

Conservateur au Musée royal d'histoire naturelle de Belgique,
Membre de plusieurs Sociétés savantes.

AVANT-PROPOS.

Ce travail a été entrepris à l'occasion du classement que j'avais à faire des Libellulines du Musée royal de Belgique, dont les spécimens avaient été déterminés par l'autorité la plus compétente, notre savant compatriote, M. de Selys Longchamps.

J'avais, dans le cours des années précédentes, classé les Cordulines, les Gomphines et les Caloptérygines, travail que rendait très aisé l'existence des beaux Synopsis monographiques de notre éminent maître sur ces divers groupes d'Odonates.

Pour les Libellulines, le Synopsis correspondant n'est pas encore fait. Malheureusement, si j'en crois M. de Selys Longchamps lui-même, il ne se fera pas, par lui du moins, qui craint d'aborder, dans ce travail, fort ardu d'ailleurs, une œuvre que son âge ne lui permettrait pas d'achever. Certes, la verte, vigoureuse et active vieillesse de notre vénérable doyen de l'entomologie belge est de nature à faire espérer à tous de lui voir atteindre et dépasser les années de son illustre beau-père, le géologue d'Omalius; mais il est juste de remarquer qu'il est plus que septuagénaire, et engagé dans plusieurs grands travaux, ce qui ne permet pas de l'importuner de sollicitations pour le faire revenir sur sa résolution.

Si elle est définitive, tous ceux qui s'occupent d'Odonates dans le monde entier, le déploreront avec moi profondément.

Pour en revenir aux Libellulines, je me suis donc trouvé forcé, pour les classer, de me baser sur le dernier travail général l'énumération publiée en 1868 par M. le Dr Brauer (*Verhandl. zool.-bot. Ges. Wien,* XVIII), qui est d'ailleurs resté un assez bon travail, quoiqu'il laisse en dehors, sans parler de ce qui est postérieur, bien des espèces, surtout parmi celles qui sont nommées dans les collections, sans avoir leur description publiée.

Je n'avais pas seulement à classer des Libellulines, j'avais à en dresser un Catalogue manuscrit. Or le Dr Brauer se borne à l'énumération des espèces de chacun de ses genres et à l'indication de la patrie. Cela ne me suffisait pas; il aurait fallu y trouver, comme dans les Catalogues du Dr Hagen (1) pour les espèces américaines seulement, les indications bibliographiques. J'ai donc dû faire la patiente et soigneuse recherche de cette bibliographie et de la synonymie pour toutes les espèces de l'Ancien-Continent, et reprendre, pour les espèces du Nouveau-Continent, les données recueillies par M. Hagen.

Pour réunir les sources de mon Catalogue administratif, je me trouvais avoir fait un travail de compilation qui me semblait pouvoir être très utile, non seulement à moi-même, mais à tous ceux qui s'occupent d'Odonates; ce que j'ai été très heureux de voir confirmer par M. de Selys Longchamps, qui m'a engagé à persister dans le dessein que j'avais de le présenter à publier.

Ces sortes de Catalogues sont, de l'avis de tous, extrêmement utiles partout, et indispensables surtout là où un travail monographique au niveau de la science actuelle est encore à faire.

L'essentiel est qu'ils soient élaborés avec une patience et une

(1) *Synopsis of the Neuroptera of North America, with a list of the South American species,* Washington, 1861 (Smithsonian Miscellaneous Collections). — *Synopsis of the Odonata of America* [Proceed. Boston Soc. of Nat. History, XVIII (1875)].

attention extrêmes, et j'ai cherché à ne pas faillir à cette condition.

Je n'avais pas d'ailleurs à compulser une littérature aussi complexe que j'eusse dû le faire pour d'autres ordres d'insectes. Comme on peut le voir dans la liste, la description des espèces est ici le fait d'un très petit nombre d'auteurs.

Nous avons d'abord les anciens, ceux qui, dans des ouvrages généraux, comme Linné, Fabricius, de Geer et quelques autres de la même époque, embrassaient l'entomologie tout entière. Ils ont connu relativement peu d'espèces d'Odonates et en ont sans doute parfois confondu plusieurs sous un même nom, ce que leurs successeurs ont eu à débrouiller.

L'odonatologie a eu ensuite un moyen âge, où nous trouvons encore bien peu de noms à citer comme descripteurs d'espèces nouvelles : un Belge, Vanderlinden, Boyer de Fonscolombe, Toussaint de Charpentier, Rambur, Burmeister. Notre éminent confrère, M. de Selys Longchamps, a aussi débuté dans cette période, ainsi que son ancien collaborateur, le Dr Hagen. On peut considérer la période moyen âge de la science des Odonates comme venant se clôturer avec la première moitié du siècle, dans la *Revue des Odonates d'Europe* de ces deux auteurs, publiée en 1850, dans les *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège* (1re série, VI). J'ai cru inutile d'énumérer ici tous les ouvrages qui s'y rapportent, car on les trouvera cités et analysés dans la Préface de cette importante *Revue*.

Quant aux temps modernes de l'odonatologie, ils se résument dans les travaux d'un triumvirat composé de MM. de Selys, Hagen et Brauer. Bien peu d'autres entomologistes ont concouru dans ces dernières années à la description des Libellulines avec ces trois savants et c'est dans leurs publications que se trouvent presque exclusivement les matériaux les plus récents de cette monographie qu'il eût été si désirable de voir paraître le plus tôt possible.

On voit que mon travail était fort simplifié par ces circonstances.

J'y énumère, par ordre alphabétique, les espèces du genre *Libellula,* avec l'extension qu'il avait à l'époque où Rambur, entreprenant son *Histoire des Névroptères* (1842) en démembrait les genres *Zyxomma, Palpopleura, Polyneura* (aujourd'hui *Neurothemis* Br.), *Acisoma, Nannophya, Uracis* et *Diastatops.* Ainsi compris, il répond à l'ensemble desdits genres, des *Libellula* actuelles et des nouveaux genres démembrés ensuite, la plupart par Hagen et Brauer, ensemble qui constitue la SOUS-FAMILLE DES LIBELLULINES, l'une des deux divisions de la famille des Libellulines.

Pour chaque espèce, j'ai indiqué au moins une citation de description, souvent celle d'une figure, l'habitat géographique et enfin le genre récent où l'espèce est classée, non pas évidemment par moi, qui n'aurais pas cette présomption, mais par les auteurs faisant autorité (*secundum* Hagen, comme je le dis, par exemple). Ceux-ci ne sont pas du reste toujours d'accord, et la limitation desdits genres paraît être la difficulté la plus considérable avec laquelle aura à se mesurer le monographe futur. Il est bien entendu que la responsabilité de cette attribution incombe, lorsque je ne l'ai pas expressément indiquée de la manière que je viens de dire, à l'auteur de la description citée, ou de la publication du nom *in litt.,* sans description.

Il est quelques anciennes espèces pour lesquelles je n'ai pas trouvé d'autorité récente leur assignant une place dans un genre actuel. Ce que j'exprime par : (*Libellulinar. gen.*?).

Je n'ai pas invoqué d'autorité spéciale pour l'assignation aux genres *Libellula, Diplax, Leucorhinia,* etc., de nos espèces communes d'Europe. Tout le monde est d'accord en cela, et il n'y a pas lieu d'en rendre personne plus spécialement responsable. Au besoin, on pourrait dire que c'est M. de Selys qui fait pour cela autorité.

Un nombre relativement considérable de noms-synonymes ont été énumérés à leur rang alphabétique, en *caractères italiques,* avec indication de la synonymie. Je m'empresse de déclarer que je n'y ai d'autre mérite que de l'avoir puisée dans les ouvrages des autorités en Odonates, citées plus haut.

Ce n'est pas pour les Lépidoptères, pour les Coléoptères, pour des groupes auxquels il y a abondance de spécialistes descripteurs que j'aurais donné rang parmi les espèces décrites à d'autres qui ne le sont pas encore, bien qu'ayant reçu un nom. Là, c'eût été consacrer le chaos. Ici, au contraire, je le pouvais et je le devais, car le triumvirat Selys-Hagen-Brauer a une autorité tellement incontestée dans la science que les noms proposés par l'un ou l'autre de ces trois auteurs, même avant description (*in litteris,* par conséquent), ont déjà une notoriété telle que leur omission dans un Catalogue comme celui-ci serait une lacune fort regrettable. On remarquera que la plupart des Libellulines de l'Amérique méridionale sont ainsi nommées sans description.

J'avais d'abord compris dans ma liste un certain nombre d'espèces fossiles, indiquées par Brauer (*Verh. zool.-bot. Ges.*, 1868, p. 738), et je comptais en rechercher d'autres dans les ouvrages paléontologiques. Après réflexion, j'y ai renoncé. Mon opinion est que l'attribution à un genre, ou même à une famille d'insectes vivants, des vestiges souvent fort peu déchiffrables des insectes fossiles, a un caractère un peu trop aléatoire. En réalité, les groupes que nous avons fondés pour les insectes vivants seulement, peuvent-ils servir aussi simplement à classer les fossiles? Si, à travers les temps, l'évolution s'est faite dans les caractères spécifiques des êtres, pourquoi se figurerait-on que les caractères génériques et supérieurs seraient restés immuables de leur côté? Cela n'est pas logique. Donc, rigoureusement, nos classifications, telles que nous les avons établies, ne sont adaptées qu'aux vivants, auxquels elles ne s'appliquent même pas toujours si facilement. Laissons les paléontologistes classer leurs morts de leur côté, au moins provisoirement. Il est déjà parfois très téméraire d'affirmer qu'une empreinte est celle d'un Orthoptère ou d'un Névroptère; il l'est bien davantage de dire que c'est une *Libellula* ou une *Cordulia*. J'ai renoncé donc à cette complication de mon travail.

J'ai fait de mon mieux et consciencieusement pour le rendre le moins imparfait possible. Il n'est guère probable cependant qu'il ne s'y trouve pas quelques lacunes, quelques erreurs même. J'en sollicite la correction. Le travail m'a été à moi-même d'une grande utilité; j'espère qu'il le sera à d'autres.

5 juillet 1888.

abbreviata Rambur, *Hist. des Névropt.*, 119 (g. **Erythrodiplax** *sec.* Hagen) . . . . Cayenne.
abdominalis Ramb., *ibid.*, 37 (g. **Tramea** *sec.* Brauer). Antilles.
abjecta Ramb., *ibid.*, 83 (g. **Diplax** *sec.* Brauer) . . . Colombie, Cuba.
abnormis Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 170 (g. **Onychothemis**) . . . . Philippines.
acigastra Selys, *Mitth. Zool. Mus. Dresden*, III, 309 (g. **Lyriothemis**) . . . . Thibet.
acuta Say = **vesiculosa** Fabr.
adelpha Selys, *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 316 (g. **Trithemis**) . . . . Philippines.
adusta Hoffmans, *in litt.* = **fulva** Muller.
advena Sel., *C. R. Soc. Ent. Belg.*, 1878, p. LXIV (g. **Urothemis**) . . . . Catalogne.
æqualis Hagen, *Syn. Neur. N. Am.*, 167 (g. **Dythemis**). Cuba, Mexique.
affinis Ramb., *H. Névr.*, 94. — Selys, *in* Pollen, *Rech. s. l. f. de Madag.*, *Ins.*, 16 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer) . Madagascar.
affinis Brittinger, *in litt.* = **vulgata** L.
africana Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 814 (g. **Trithemis**) . . . . Sierra-Leone.
agricola Hagen, *in litt.* (g. **Diplax**). . . . . . . Bahia.
albicauda Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 905 = **albistyla** Selys var. . . . . Shanghaï.
albifrons Burmeister, *Handb. d. Entom.*, II, p. II, 851. — Sel., *Rev. Odon.*, 59 (g. **Leucorhinia**) . . . . Europe sept.
albifrons Charpentier, *Libell. europ.*, 14, pl. XI, f. 3 (g. **Diplax**) . . . . Géorgie, Missouri.
albifrons Sel., *Bull. Ac. Belg.*, 1840. — Rambur, *H. Névr.* = **caudalis** Charp.
albipuncta Ramb., *H. Névr*, 93. — Selys, *in* Pollen, *Rech. s. l. f. de Mad.*, *Ins.* (g. **Trithemis** *sec.* Brauer). Sénégal.

albistyla Sel., *Rev. Zool.*, 1847. — *Rev. Odon.*, 13 (g. **Libella**) . . . . Europe mér., Asie occid., Japon.
aliena Sel., *Mitth. Zool. Mus. Dresd.*, III, 305 (g. **Urothemis**) . . . . N.-Guinée.
Amanda Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 185 (g. **Leucorhinia** *sec.* Brauer, **Diplax** *sec.* Hagen) . . . . Géorgie, N.-Jersey.
Amaryllis Sel., *Mitth. Zool. Mus. Dresd.*, III, 299 (g. **Rhyothemis**) . . . . Menado.
ambigua Ramb. = **rubicundula** Say.
ambusta Hagen, *Proc. Boston Soc.*, XVIII (1875), 81 (g. **Diplax**) . . . , ... Cuba.
americana Linné, *Syst. Nat.*, II, 904 (g. **Palpopleura** *sec.* Brauer, **Zenithoptera** *sec.* Bates) . . . . . Brésil.
Amphithea Sel., *in litt.* (g. **Uracis** *sec.* Brauer) . . Para.
ampullacea Schneider, *Stett. Ent. Zeit.*, 1845, 110. — Sel., *Rev. Od.*, 288 = **Sabina** Drury.
Anacharis Hag., *in litt.* (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer). Halmaheira.
analis Burm. = **flavescens** Fabr.
anceps Schneider, *Stett. Ent. Zeit.*, 1845, 111. — Sel., *Rev. Odon.*, 291 (g. **Libella**) . . . . Asie-Mineure.
angelina Sel., *Ann. Soc. Ent Belg.*, XXVII, 99 (g. **Libellula**). . . . . Yokohama.
angustipennis Ramb., *H. Névr.*, 65 (g. **Libellula** *sec.* Brauer). . . . . Cuba.
angustipennis Steph. = **sanguinea** Muller.
angustiventris Ramb., *H. Névr.*, 59 (g. **Libella?** *sec.* Brauer) . . . . Sénégal.
annulata Pal. de Beauv., *Ins. Afr. et Amér.*, 58. — Ramb., *H. Névr.*, 78 (g. **Mesothemis** *sec.* Brauer). Brésil.
annulosa Sel., *in litt.* (g. **Mesothemis** *sec.* Hagen) . . Brésil, Guyane
anomala Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 504 (g. **Erythrodiplax**). . . . . Brésil.
apicalis Ramb., *H. Névr.*, 127 = **fluctuans** Fabr., race, *sec.* Selys . . . . Java.
apicalis Guér.-Mén., *Voy. de la* Coquille, *Ins.*, 194 (Libellulinar. gen.?) . . . . Amboine.
apicalis Hagen, *in litt.* = **Phryne** Perty.

apicalis Brauer, *Novara Exped., Neuropt.* = **ceylanica** Brauer.

Apollina Sel., *in litt* = **credula** Hagen.

appendiculata Sel., *in litt.* (g. **Libella** ? *sec.* Brauer) . Vénézuela.

arabica Hagen, *in litt.* (g **Lepthemis**) an = ? **Sabina** Drury, var., *sec.* Brauer . . . . Arabie, Syrie.

Argo Hagen, *Stett. Ent. Z.*, XXX, 268 (g. **Tramea**) . . Rio Janeiro.

armeniaca Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVIII, 36 et XXXI, 55 (g. **Diplax**) . . . . Arménie.

Arria Drury = **variegata** L.

arteriosa Burm., *Handb.* II, II, 850. — Lucas, *Expl. Alg.* pl. I, f. 6 (*conjuncta* Sel.) (g. **Trithemis** *sec.* Brauer). Afrique.

ascalaphoïdes Ramb., *H. Névr.*, 29 (g **Acisoma**) . . Madagascar.

assignata Selys, *Rev. et Mag. Zool.*, 1872, 177 (g. **Urothemis**) . . . . Madagascar.

assimilata Uhler, *Proc. Ac. Phil.*, 1857, 88 (g. **Diplax** *sec.* Brauer). . . . . États-Unis.

assimilata Hagen = **decisa** Hag.

atripes Hagen, *Hayden's Rep.*, 1873, 588 (g. **Diplax**) . Yellowstone.

Attala Sel., *Ins. Cuba*, 445. — Hagen, *Syn. Neur. N. Amer*, 92 (g. **Mesothemis** *sec.* Hagen) . . . . Mexique, Antilles.

attenuata Erichs, *Voy. Schomb.*, III, 583. — Hag. *Stett. Ent. Z.*, XXX, 263 (g. **Dythemis** *sec.* Brauer, **Lepthemis** *sec.* Hagen) . . . . Colombie, Guyane, Brésil.

aurantiaca Buchecker = **flaveola** L.

aurea Scop. = **flaveola** L.

auripennis Burm., *Hand.*, II, II, 861 (g. **Libellula** *sec.* Hagen) . . . . États-Unis, Antilles.

Aurora Burm., *ibid.*, 859. — Brauer, *Verh z.-b. G. Wien*, XVIII, 177 (g. **Trithemis**). . . . . Manille.

australis Hagen, *Stett. Ent. Z.*, XXVIII, 229 (g. **Tramea**). Cuba.

australis Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 502 (g. **Nannodythemis**) . . . . Sidney.

Axillena Westwood, *Duncan's Introd.*, 292, pl. XXIX, f. 1. — Drury, *Exot. Ins.*, II, 96, pl. 47, f. 1 (g **Libellula** *sec.* Hagen) . . . . Géorgie, Floride, Louisiane.

azurea Ramb., *H. Névr.*, 68 (g. **Libella** *sec.* Brauer). . Madagascar.

baccha Selys, *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVIII, 29 (g. **Diplax**). Chine.

bœtica Ramb. = **nitidinervis** Selys.

barbara Sel., *Expl. Alg.*, n° 6, pl. I, f. 2. — *Rev. Od.*, 306. = **chrysostigma** Burm.

basalis Burm., *Handb.*, II, II, 852 (g. **Tramea** *sec.* Brauer). Brésil.

basalis Say, *Journ. Acad. Phil.*, VIII, 23 (g. **Libellula** *sec.* Hagen) . . . . États-Unis, Canada.

basalis Steph. = **sanguinea** Muller.

basalis Sel., *in* Sagra, *Ins. Cuba*, 441 = **abdominalis** Ramb.

basilaris Pal. de Beauv. *Ins. Afr. et Amér. Névr.*, pl. II, n° 1. — Ramb. *H. Névr.*, 35 (g. **Tramea** *sec.* Brauer). Sénégal, Madagascar.

bella Uhler, *Proc. Ac. Phil.*, 1857, 87. — Hagen, *Stett. Ent. Z.*, XXIV, 375 (g. **Nannothemis** *sec.* Hagen). . États-Unis, Canada.

bella Hagen, *in litt.* (g. **Perithemis**) . . . . Para.

Berenice Drury, *Exot. Ent.*, I, 118, pl. 48, f. 3. — Ramb. *H. Névr.*, 88 (g. **Diplax** *sec.* Hagen) . . . . . . États-Unis.

biappendiculata Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 307 (g. **Calothemis**) . . . . Bornéo.

bicolor Erichs., *Voy. Schomb.*, III, 583. — Hagen, *Stett. Ent. Z*, XXX, 263 (g. **Erythemis**) . . . . . Brésil, Guyane, N.-Grenade.

bifasciata Fabr. = **pulchella** Drury.

biguttata Donovan = **cœrulescens** Fabr.

bilineata Hagen, *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . . . Brésil.

bimaculata Steph = **fulva** Muller **var.**

binotata Ramb., *H. Névr.*, 36 (g. **Tramea** *sec.* Brauer). Brésil.

bipunctata Brauer, *Verh. z.-b Ges. Wien*, XV, 503 (g. **Diplax**). . . . . Taïti, N.-Calédonie.

biserialis Sel., *Ann. Mus. Genova*, XIV, 304 = **longitudinalis** Sel, **var.** . . . . N.-Guinée.

bisignata Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 175 (g. **Urothemis**) . . . . Philippines.

bispina Hagen, *in litt.* (g. **Brachydiplax**) . . . . . Morotai, Halmaheira.

bistigma Uhler = **quadrupla** Say.

bivittata Ramb., *H. Névr.*, 75. — Selys, *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 306 (g. **Calothemis**) . . . . Malacca.

Blackburni Mac Lachlan, *Ann a. Mag. Nat. H. ser.* V, XII, 229 (g. **Lepthemis**) . . . . I. Hawaï.

Bolivari Sel., *An. Soc. Esp. Hist. nat.*, XI, 14 (g. **Diplacina**) . . . . Philippines.

borealis Hagen, *in litt.* (g. **Leucorhinia**) . . . . . Amérique anglaise.

brachialis Pal. de Beauv., *Ins. d'Afr. et d'Amér.*, pl. II, f. 3. — Ramb., *H. Névr.*, 62 (g. **Libella** *sec.* Brauer). Afrique.

bramina Guér.-Mén., *Voy. de la Coquille, Ins.*, 193 (Libellulin. gen.?). . . . . N.-Irlande.

braminea Fabr., *Ent. syst. Suppl.*, 284. — Ramb., *H. Névr.*, 126 (g. **Orthemis** *sec.* Brauer). . . . . Indes orientales.

brasiliana Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 812 (g. **Tramea**) . . . . Brésil

Braueri Selys, *An. Soc. Esp. Hist. nat.*, XI, 13 (g. **Diplacina**) . . . . Philippines.

Braueri Kaup., *in litt.* = **Rosenbergi** Brauer.

Bremii Ramb. = **trinacria** Selys.

brevipennis Ramb., *H. Névr.*, 114 (g. **Diplacina** *sec.* Brauer). . . . . ?

brevistyla Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 978 (g. **Tramea**) . . . . Melbourne.

brunnea Fonscol., *Ann. Soc. Ent. France*, VI, 141. — Sel., *Rev. Od.*, 18 (g. **Libella**) . . . . Europe.

cæsia Ramb., *H. Névr.*, 93 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer) . Bombay.

caffra Burm., *Handb.*, II, II, 856 (g. **Orthemis** *sec.* Brauer) . . . . Natal.

caledonica Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 505 (g. **Libella**). . . . . N.-Calédonie.

Camilla Ramb. = **Eponina** Drury.

cancellata Linn., *Syst. Nat.*, II, 902. — Sel., *Rev. Od.*, 12. — Charp., *Lib. eur.*, Tab. V (g. **Libella**). . . Europe, Asie sept., Algérie.

cancellata Muller = **scotica** Don.

carcerata Hag., *in litt.* (g. **Libella**) . . . . ?

cardinalis Erichs., *Voy. Schomb.*, III, 583 (g. **Lepthemis** *sec.* Brauer). . . . . Panama, Guyane, Para.

carolina Linn., *S. Nat.*, II, 904. — Drury, *Ex. Ins.*, I, 117, Pl. 48, f. 1. — Burm., *Handb.*, II, II, 852 (g. **Tramea**) . . . . Amér. du Nord, Amér. centrale.

carolina Sel., *in* Sagra, *Ins. Cuba*, 440 = **onusta** Hagen.
castanea Burm., *Handb.*, II, II, 854 (g. **Diplax** *sec.* Hag.). Bahia.
catenata Hagen, *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . . . Minas Geraes.
Catharina Sel., *in litt.* (g. **Diplax**). . . . . Brésil.
caudalis Charp., *Lib. eur.*, 89, Tab. 44 et 47, f. 16. — Sel., *Rev. Od.*, 62 (g. **Leucorhinia**) . . . . . . Europe moyenne.
Celæno Sel., *in* Sagra, *Ins. Cub.*, 454 (g. **Macrothemis** *sec.* Hagen) . . . . Antilles.
ceylanica Brauer *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 11 = **palliata** Ramb., **var.** . . . . Ceylan.
chalcoptilon Brauer, *Ibid.*, XVII, 25 (g. **Rhyothemis**). I. Samoa.
chalybea Brauer, *Ibid.*, XVIII, 175 (g. **Brachydiplax**). Philippines.
chinensis De Geer, *Mém.*, III, 556, pl. 26, f. 1. — Burm., *Handb.*, II, II, 852 (g. **Tramea** *sec.* Brauer) . Indes orient., Chine, Caroline, Virginie.
chlora Ramb. = **Domitia** Drury.
chloropleura Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 504 (g. **Erythrodiplax**). . . . . Chili.
Chrysis Hagen, *in litt.* (g. **Rhyothemis**) . . . . . I. Pelew.
chrysoptera Selys, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 95 (g. **Diplax**). . . . . Terr. Washington.
chrysostigma Burm., *Handb.*, II, II, 857. — Mac Lachl., *Journ. Linn. Soc. Zool.*, XVI, 177 (g. **Lepthemis** *sec.* Brauer). . . . . Ténériffe.
circumcincta Hagen, *in litt.* (g. **Palpopleura**) . . . Brésil.
citrina Hag., *Stett. Ent. Z.*, XXVIII, 218 (g. **Tholymis**). Cuba, Panama, Para.
clathrata Ramb. = **trinacria** Sel.
Cleis Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 181 (g. **Lyriothemis**) . . . . Philippines.
Clelia Selys, *Mitth. Zool. Mus. Dresden*, III, 313 (g. **Libella**). . . . . Menado.
Cloë Hagen, *in litt.* (g. **Perithemis**) . . . . Brésil.
Clymene Hagen, *in litt.* (g. **Uracis**) . . . . Pernambuco.
coarctata Ramb., *H. Névr.*, 61 (g. **Libella** *sec.* Brauer). I. Maurice.
coccinea Charp. = **erythræa** Brullé.
cœlebs Sundev., *in litt.* = **scotica** Don.
cœrulans Ramb. = **simplicicollis** Say.
cœrulea Brullé = **cœrulescens** Fabr.

cœrulescens Fabr., *Ent. syst. Suppl.*, 285. — Sel., *Rev. Od.*, 22. — Charp., *Lib. europ.*, t. VI (g. **Libella**). Eur. mérid., Asie mineure, Algérie.

cœrulescens Sel., *Mon. Libell.*, 38. — Ramb., *H. Névr.*, 65 = **brunnea** Fonscol.

cognata Ramb., *H. Névr.*, 41 (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer) . . . . Madagascar, Amboine.

collocata Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 171 (g. **Mesothemis**). . . . . Texas, Californie.

columba Hagen, *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . . . Vénézuéla.

columbiana Selys, *in litt.* (g. **Macrothemis**) . . . . Colombie.

commixta Selys, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVIII, 38 (g. **Diplax**). . . . . Inde septentr.

communimacula Ramb. = **feralis** Burm.

communis Ramb., *H. Névr.*, 93 (g. **Erythrodiplax** *sec.* Hagen). . . . . Chili.

composita Hagen, *Hayden's Report*, 1872, 728 (g. **Libellula** *sec.* Hagen, 1873) . . . . Yellowstone.

concinna Ramb., *H. Névr*, 120 (g. **Diplacina** *sec.* Brauer) . . . . I. Maurice.

confusa Ramb., *Ibid.*, 133, pl. 3, f 3 (g. **Palpopleura**). Madagascar.

confusa Uhler = **pulchella** Drury.

congener Ramb., *H. Névr.*, 70 (g. **Orthemis** *sec.* Brauer). Ceylan, Philippines.

conjuncta Ramb. = **rufinervis** Burm.

conjuncta Selys = **arteriosa** Burm.

connata Burm., *Handb.*, II, II, 855 (g. **Erythrodiplax** *sec.* Brauer). . . . . Chili.

conspurcata Fabr. = **fulva** Muller.

constricta Selys, *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . . . Brésil.

contaminata Fabr., *Ent. Syst.*, II, 382. — Burm., *Handb.*, II, II, 859. — Rambur, *H. Névr.*, 99 (g. **Brachythemis** *sec.* Brauer) . . . . Inde, Philippines.

contracta Ramb., *H. Névr.*, 60 (Libellulinar. gen.?) . . Madagascar, Maurice.

contusa Hagen, *in litt.* (g. **Erythrodiplax** *sec.* Brauer, **Diplax** *sec.* Hagen) . . . . Brésil, Vénézuéla.

Cophysa Kollar, *in litt.* (g. **Tramea** *sec.* Hagen) . . . Brésil.

Cora Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 20 (g. **Macrodiplax**) . . . . Ceram, Philippines.

corallina Brauer = **plebeja** Ramb.
cordofana Brauer, *in litt.?* (g. **Libella**) . . . . . . Afrique orientale.
cordulegastra Selys, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 139 (g. **Diplax**). . . . . Amur, Chine.
coronata Brauer, *Verh. z.-b. G. Wien*, XVI, 565 (g **Orthemis**). . . . . Ceram, N.-Guinée.
coronata Selys, *in* Poll. et Van Dam, *Rech s. la f. de Mad. Ins.* 17 (g. **Libellula**) . . . . Madagascar.
corrupta Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 171 (g **Mesothemis** *sec.* Brauer, **Diplax** *sec.* Hagen). . . . États-Unis, N.-Est de l'Asie.
costalis Ramb., *H. Névr.*, 59 (Libellulinar. gen.?). . . . Amérique septentr.
costifera Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.* 175 (g. **Diplax**). Maine, Massachus., N.-York.
crapula Hagen, *in litt.* (g. **Rhyothemis**). . . . . . N.-Hollande.
credula Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 184 (g. **Diplax**). St-Thomas, Brésil.
crocea Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 813 (g. **Tramea**) . . . . Philippines, Célèbes.
croceipennis Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XI, LXVII (g. **Libellula**). . . . . Californie, Mexique, Guatemala.
croceola Sel., *Ibid.*, XXVII, 94 (g. **Diplax**). . . . . Japon.
cruentata Hagen, *in litt.* (g. **Crocothemis** *sec.* Brauer). Célèbes.
cubensis Scudder, *Proc. Boston Soc.*, XI, 293 (g. **Erythemis** *sec.* Brauer). . . . . Cuba.
cultriformis Hagen, *in litt.* (g. **Lepthemis**) . . . . Brésil.
cupida Hagen, *in litt.* (g. **Libella** *sec.* Brauer). . . . Angola.
cyanea Fabr. = **quadrupla** Say.
cyanifrons Hagen, *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . . . Brésil.
cycnos Selys, *Rev. Zool.*, 1847. — *Rev. Odon.*, 17 = **brunnea** Fonscol. **var.** . . . . Corse.
Cydippe Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**). . . . . . . Brésil.
cyprica Hag , *in litt.* (Libellulinar. gen.?) . . . . . Chypre.

debilis Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 168 (g. **Dythemis**). Cuba.
decisa Hagen, *Hayden's Rep.*, 1873, 588 (g. **Diplax**). . Colorado, Dakota.
decolorata Selys, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVIII, 35 = **vulgata** L. **var.** . . . . Arménie, Anatol., Mésopot., Perse.
decora Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVI, 567 et XVII, 13 = **palliata** Ramb. **var.** . . . . Amboine.

degener Sel., *Ann. Mus. Gen.*, XIV, 296 (g. **Neurothemis**) . . . . Bengale.

Delesserti Selys, *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 314 (g. **Libella**). . . . . Cochinchine, Neelgherries

denticauda Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 301 (g. **Brachydiplax**) . . . . N.-Guinée.

denticulata Pal. de Beauv. = **marginata** Fabr.

deplanata Ramb., *H. Névr.*, 75 (g. **Libellula** *sec.* Hagen). Géorgie, Pennsylvanie.

depressa Linné, *S. Nat.*, II, 902. — Selys, *Rev. Od*, 8. — Charp., *Lib. eur.*, tab. IV (g. **Libellula**) . . . . . Europe, Asie mineure.

depressa Latr. = **cancellata** L.

depressiuscula Sel., *Rev. Zool.*, 1841, 244. — *Rev. Odon.*, 30 (g. **Diplax**) . . . . Europe moyenne et mérid., Asie septentr.

Desjardinsi Sel. = **Wrightii** Sel.

dicrota Hag., *Proc. Bost. Soc.*, 1875, 75 (g. **Dythemis**). Cuba, Mexique.

dicrota Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 166 = **didyma** Sel.

didyma Selys, *in* Sagra, *Ins. Cuba*, 453 (g. **Dythemis** *sec.* Hagen) . . . . Cuba.

didyma Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 165 = **dicrota** Hag.

difficilis Sel., *Ann. Mus. Gen.*, XIV, 301 (g. **Agrionoptera**) . . . . Archipel malais.

dimidiata Linné, *S. Nat.*, II, 908. — Burm., *Handb.*, II, II, 854 (g. **Diastatops**). . . . . Surinam.

diplax Brauer, *Verh. z.-b. G. Wien*, XVII, 18 = **oculata** Fabr. **var.**

discolor Burm., *Handb.*, II, II, 856 (g. **Orthemis** *sec.* Hagen) . . . . . . Floride, Texas, Mexique, Antilles, Amér. mérid.

dispar Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 107 = **Phaon** Sel., **var.** . . . . Japon.

dispar Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 815 (g. **Rhyothemis**). . . . . I. Viti.

disparata Ramb. = **hemihyalina** J. Desjardins.

distincta Ramb. = **arteriosa** Burm.

distinguenda Ramb., *H. Névr.*, 81 (g. **Erythrodiplax** *sec.* Hagen) . . . . Cayenne.

divisa Selys, *Mitth. Zool. Mus. Dresden*, III, 302 (g. **Lepthemis**) . . . . Menado.

Domitia Drury, *Exot. Ent.*, II, 95, pl. 45, f. 4. — Burm., *Handb*, II, II, 855. — Ramb., *H. Névr.*, 124 (g. **Perithemis** *sec.* Hagen) . . . . Amér. du Nord, Antilles.

Donovani Leach. = **cœrulescens** Fabr.

dorsalis Ramb., *H. Névr.*, 89 (Libellulin. gen.?) . . . Cap de B.-Espér.

dubia Vanderl, *Monogr.*, 16. — Sel., *Rev. Odon.*, 50 (g. **Leucorhinia**) . . . . Europe centr. et sept.

dubia Ramb. = **cœrulescens** Fabr.

Duivenbodei Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVI, 569 (g. **Microthemis**) . . . . Philipp., Célèbes, Halmah., N.-Guin.

Edwardsi Selys, *Expl. Algér.*, III, 124, pl. II, f. 3. — *Rev. Od.*, 315 (g. **Urothemis**) . . . . Algérie.

effrenata Hag., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.

elata Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XV, 27 et XXVII, 94 = **pedemontana** All. var. . . . . Japon.

elegans Guér.-Mén., *Voy. de la Coqu*, *Ins.*, 194, pl. 10, f. 3. — Ramb., *H. Névr.*, 127. — Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 114 (g. **Neurothemis**) . Amboine, Céram, N.-Guinée.

elegantissima Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 141, et XXXI, 57 (g. **Lyriothemis**) . . . . Chine.

Elisa Hag, *Syn. Neur. N. Amer.*, 182 (g **Leucorhinia** *sec.* Brauer, **Celithemis** *sec.* Hagen) . . . . États-Unis, Canada.

Eponina Drury, *Ex. Ent.*, II, 96, pl. 47, f. 2. — Burm., *Handb.*, II, II, 853. — Ramb., *H. Névr.*, 45 (g. **Celithemis** *sec.* Brauer et Hagen) . . . . Amér. septentr, Cuba.

equestris Fabr., *Ent. Syst.*, II, 379. — Burm., *Handb.*, II, II, 855. — Drury, *Exot. Ent.*, II, 95, pl. 46, f. 3 (*Tullia*) (g. **Neurothemis** *sec.* Brauer) . . . . . Madras.

erotica Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 90 (g. **Diplax**). Japon, Chine.

erratica Erichs, *Voy. Schomb.*, III, 584 (Libellulin. gen.?). Guyane.

erythræa Brullé, *Exp. Morée*, III, *Ent.* 102, pl. 32, f. 4. — Sel., *Rev. Od.*, 24 (g. **Crocothemis**) . . . . . Europe mérid.

erythræa Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 814 (g. **Trithemis**) . . . . Ile Maurice.

erythronevra Schneider = **Fonscolombii** Sel.

Euphrosyne De Haan, *in litt.* = **Phyllis** Sulzer.

Euryale Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 298 (g. **Tramea**). . . . . Menado, Java.
Eurybia Sel., *ibid.* (g. **Tramea**) . . . . Menado.
exhausta Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . . . Cuba.
exigua Hag., *in litt.* (g. **Nannophya** *sec.* Brauer) . . Célèbes, Halmaheira.
exsudans Sel., *Mitth. Z. M. Dresd.*, III, 309 = **pulcherrima** Brauer.
extensa Hag., *in litt.*, (g. **Lepthemis**) . . . . . . Brésil.
extranea Hag., *in litt.* = **crocea** Brauer.
exul Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 96 (g. **Diplax**). . Afrique australe.
exusta Say, *Journ. Acad. Phil.*, VIII, 29 (g. **Libellula** *sec.* Hagen). . . . . États-Unis, Canada.
exusta Hagen, *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.
exusta Sundev., *in litt.* = **albifrons** Burm.

fallax Eversm. = **albifrons** Burm. et **caudalis** Charp.
fallax Burm. = **umbrata** L.
familiaris Hag., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Bahia.
famula Erichs., *Voy. Schomb.*, III, 584 (g. **Diplax** *sec.* Hagen). . . . . Guyane.
fasciata Linné, *S. Nat.*, II, 903. — Burm., *Handb.*, II, II, 854. — Ramb., *H. Névr.*, 134 (g. **Palpopleura**) . . Brésil, Surinam.
fasciolata Ramb., *H. Névr.*, 69 (g. **Libella** *sec.* Brauer). Cap de Bonne Espér.
fastigiata Burm., *Handb.*, II, II, 850 (g. **Uracis** *sec.* Brauer) . . . . Bahia.
fastigiata Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 91 = **erotica** Sel., **var.** . . . . Japon.
Fausta Sel., *in litt.* (g. **Diplax**). . . . . Brésil.
Faustina Sel., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.
fenestrata Hagen = **dimidiata** L.
fenestrina Ramb., *H. Névr.*, 40 (Libellulinar. gen.?). . ?
feralis Burm., *Handb.*, II, II, 855 (g. **Neurothemis** *sec.* Brauer). . . . . Moluques, Sumatra.
ferrugaria Ramb., *H. Névr.*, 82 (Libellulinar. gen.?). . Cap de Bonne-Espér.
ferruginata Fabr. = ? **erythræa** Brullé.
ferruginea Ramb. = **erythræa** Brullé.
ferruginea Fabr., *Ent. syst.*, II, 380 = **Servilia** Drury.

ferruginea Fabr., *Syst. Entom.*, 425. — *Spec. Ins.*, I, 523
= **discolor** Burm.

ferruginea Hagen = **rubrinervis** Sel.

fervida Erichs. = **ochracea** Burm.

festa Sel., *Ann. Mus. Gen.*, XIV, 300 (g. **Agrionoptera**). Queensland.

festiva Ramb., *H. Névr.*, 92 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer). Bombay.

flaveola Linné, *S. Nat.*, II, 901. — Sel., *Rev. Od.*, 33. —
Charp., *Lib. eur.*, t. IX (g. **Diplax**). . . . . . . Europe, Asie sept.

flaveola Fonscol. = **Fonscolombii** Selys.

flaveolata Curtis = **flaveola** L.

flaveolata L. = **scotica** Donov.

flavescens Fabr., *Ent. syst. Suppl.*, 285 (g. **Pantala**). Zone torride des deux mondes.

flavescens Fischer = **flaveola** L.

Flavia Sel., *in litt.* = **basalis** Burm.

flavicans Ramb. = **umbrata** L.

flavicosta Hagen, *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . San Diego.

flavida Ramb., *H. Névr.*, 58 (g. **Libellula** *sec.* Hagen). Texas, Yellowstone, Montana.

flavidorsis Eversm., *in litt.* = ? **pectoralis** Charp.

flavilatera Hag., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.

flavipennis Sel., *in* Pollen et Van Dam, *Rech. s. la f. d. Mad. Ins.*, 16 = **hæmatina** Ramb. **var.** . . . . . Madagascar.

flavistyla Ramb., *H. Névr.*, 117. — Selys, *Rev. Od.*, 312.
— *Explor. Alg.*, pl. I, f. 7 (g. **Diplacina** *sec.* Brauer). Afrique, Asie min.

flavostigma Buchecker = ? **depressiuscula** Sel.

fluctuans Fabr., *Ent. syst.*, II, 26. — Burm., *Handb.*,
II, II, 853. — Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 16
(g. **Neurothemis**) . . . . Java, Célèbes.

Fonscolombii Sel., *Mon. Libell.*, 49. — *Rev. Odon.*, 37.
— Rambur, *H. Névr.*, 102 (g. **Diplax**) . Europe moy. et mérid., Asie mineure, Afrique.

forensis Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 154 (g. **Libellula**) . . . . Californie, Amér. anglaise.

fraterna Hag., *Proc. Boston Soc.*, XV, 375 (g. **Diplax**) . Cuba.

frequens Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 93 (g. **Diplax**). Japon.

Friedrichsdaliensis Muller = **fulva** Muller.

frigida Hag., *in litt.* (g. **Leucorhinia**) . . . . États-Unis, Canada.

frontalis Burm., *Handb.*, II, II, 857 (g. **Dythemis** *sec.* Hagen) . . . . Cuba, Haïti.

frumenti Muller = **cancellata** L.

frumenti Villers = **albistyla** Sel.

fugax Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 163 (g. **Dythemis**). Texas.

fugax Harris = **fulva** Muller.

fuliginea Ramb. = **obscura** Fabr.

fuliginosa Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 88 (g. **Rhyothemis**). . . . . Japon.

fulva Muller, *Act Curios.*, III (1767), 122. — Sel., *Rev. Odon.*, 9, — Charp., *Libell. eur.*, II (*conspurcata*) (g **Libellula**). . . . . Europe.

Fulvia Donov., *Ins of China*, pl. 46. Burm., *Handb.*, II, II, 853. — Ramb., *H. Névr.*, 129 = **Sophronia** Drury . Chine.

funerea Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 158 (g. **Libellula**). Mexique, Panama.

furcata Hagen, *ibid.*, 169 (g. **Erythemis**) . . . Cuba, Mexique, Bahia.

fusca Ramb., *H. Névr.*, 78 (g. **Erythrodiplax** *sec.* Brauer) . . . . Cayenne.

fuscofasciata Blanchard = **umbrata** L.

fuscopalliata Sel, *Ann. S. Ent. Belg.*, XXXI, 23 (g. **Trithemis**) . . . . Mésopotamie.

geminata Ramb., *H. Névr.*, 90 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer) . . . . Indes orientales.

Genei Ramb. = **depressiuscula** Sel.

gerula Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**). . . . . Brésil.

gibba Fabr. = **Sabina** Drury.

gigantea Brauer, *Verh z.-b. Ges. Wien*, XVII, 8 (g. **Neurothemis**) . . . . Amboine, Célèbes.

gilva Hag., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Colombie.

glacialis Hag., *in litt.* (g. **Leucorhinia**) . . . . . . États-Unis, Canada.

glauca Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 1012 (g **Libella**) . . . . Ceylan, Moluques, Malaisie.

glauca Hoffmans, *in litt.* = **cœrulescens** Fabr.

globulata Muller. = ? **vulgata** L.

gonypennis Buchecker = ? **rubicunda** L. ou **dubia** Vanderl.

gracilis Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXXI, 15 (g. **Libellula**). Perse, Mésopotamie.

gracilis Brauer, *Sitz.-Ber. Ak. Wiss. Wien*, LXXVIII, 195 (g. **Microthemis**). . . . . Bornéo.

graphiptera Ramb., *H. Névr.*, 45 (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer). . . . . N.-Hollande.
Gundlachi Scudder = **simplicicollis** Say.
guttata Erichs., *Voy. Schomb.*, III, 584 (g. **Uracis** *sec.* Brauer). . . . . Brésil.

hæmatina Ramb., *H. Névr.*, 84 (*pro parte*). — Sel., *Rev. Od.*, 27 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer). . . . . . . Maurice, Bourbon.
hæmatina Ramb., *ibid.* (*pro parte*) = **rubrinervis** Sel.
hæmatodes Burm., *Handb.*, II, II, 849 (g. **Erythemis** *sec.* Brauer). . . . . N.-Hollande.
hæmatodes Mus Berol., *in litt.* = **rubrinervis** Sel.
hæmatogastra Burm., *Handb.*, II, II, 857 (g. **Lepthemis** *sec.* Brauer). . . . . Géorgie, Surinam Brésil.
Harpedone Roemer = **pedemontana** Allioni.
Hellmanni Eversm. = **albifrons** Burm. et **caudalis** Charp.
helvetica Buchecker = **cancellata** L.
hemichlora Burm., *Handb.*, II, II, 849 (g. **Dythemis** *sec.* Brauer). . . . . Brésil.
hemihyalina J. Desjardins, *Ann. Soc. Ent. France*, 1835, Bull. IV (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer). . . . Afrique, Madagascar, Maurice.
herbida Hagen, *in litt.* (g. **Lepthemis**) . . . . Cuba.
histrio Burm., *Handb.*, II, II, 849 = **Berenice** Drury var. New-York.
Hova Ramb., *H. Névr.*, 92 (g. **Onychothemis**? *sec.* Brauer) . . . . Madagascar.
hudsonica Sel., *Rev. Odon.*, 53 (g. **Leucorhinia**). . . Saskatchewan, N.-Brunswick.
hyalina Kirby, *Proc. Zool. Soc.*, 1886, 326, pl. 32, f. 5, 6 (g. **Libella**) . . . . Inde nord-ouest.
hybrida Ramb. = **meridionalis** Sel.
Hymenæa Say, *Journ. Acad. Philad.*, VIII, 19 (g. **Pantala** *sec.* Hagen) . . . . Etats-Unis, Cuba, Mexique.
hypomelas Selys, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVIII, 37 (g. **Diplax**). . . . . Bengale.

icterica Hagen, *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . Brésil.
illota Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 172 (g. **Mesothemis** *sec.* Brauer, **Diplax** *sec.* Hagen) . Mexique, ouest des États-Unis, Vancouver, Kamtschatka.

imbuta Burm., *Handb.*, II, II, 850. — Ramb., *H. Névr.*, pl. II, f. 5 (*quadra*) (g. **Uracis**) . . . . . . Colombie, Surinam, Bahia.
imbuta Say, *Journ. Acad. Phil.*, VIII, 32 (g. **Diplax** *sec.* Hagen) . . . . Maryland.
imitans Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXX, CLXXIX et XXXI, 56 (g. **Diplax**) . . . . Pékin, Amur.
immaculata Brauer, *in litt.?* (g. **Mesothemis**) . . . Vénézuéla.
imperatrix Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXXI, 53 (g. **Rhyothemis**). . . . . I. Loo Choo.
incerta Ramb., *H. Névr.*, 34 (g. **Tramea** *sec.* Brauer) . ?
incerta Brauer = **palliata** Ramb. **var.**
incesta Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 155 (g. **Libellula**). Caroline.
incompta Ramb. = **distinguenda** Ramb.
incrassata Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . . . Cuba.
indica Fabr., *Ent. syst.*, II, 376. — Burm., *Handb.*, II, II, 853 (Libellulin. gen.?) . . . . Indes orientales.
indigna Hag., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.
inermis Sel., *in litt.* = **prodita** Hag.
infamis Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . Brésil.
infernalis Brauer = **festiva** Rambur.
inflata Sel. = **panorpoïdes** Ramb. **var.** . . . . . . Algérie.
infumata Ramb., *H. Névr.*, 74 (g. **Uracis**). . . . . Brésil.
infuscata Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 90 (g. **Diplax**). Japon, Chine.
infuscata Eversm. = **rubicunda** L.
innominata Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 17 = **oculata** Fabr. **var.** . . . . N.-Guinée, Céram.
inquinata Ramb., *H. Névr.*, 86 (g. **Crocothemis** *sec.* Brauer) . . . . Madagascar.
insignata Sel., *Rev. et Mag. de Zool.*, 1872 (g. **Urothemis**) . . . . Borneo
insignis Ramb., *H. Névr.*, 125 (g. **Agrionoptera** *sec.* Brauer) . . . . Java, Amboine
insignis Brauer = **sexlineata** Selys.
insignis Brittinger, *in litt.* = **Fonscolombii** Selys.
insularis Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 146 (g. **Tramea**). Cuba, Haïti, Floride.
insularis Scudder = **abdominalis** Ramb.
intacta Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 179 (g. **Leucorhinia**) . . . . États-Unis, Canada.

intermedia Ramb, *H. Névr.*, 91 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer) . . . . Bombay.

intermedia Rudow, *Giebel Zeitschr.*, sér. 3, III, 242 (*verisimiliter species jam descripta*) . . . . . . Allemagne.

intermedia Hansem., *in litt.* = **cancellata** L.

interna Hag., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . États-Unis, Canada.

interrogata Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 312 (g. **Agrionoptera**) . . . . N.-Guinée.

inversa Hag., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.

Iphigenia Hag., *Stett. Ent. Z.* XXVIII, 230 (g. **Tramea**). N.-Grenade.

Iris Hag. = **Domitia** Drury var.

Iris Sel. *in litt.*, = **Attala** Selys.

irregularis Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 183 (g. **Tetrathemis**) . . . . Moluques, Philipp.

irrorata Hag., *in litt.* (g. **Uracis**) . . . . Bahia.

japonica Uhler, *Proc. Acad. Philad.*, 1858 (?) — Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 100 (g. **Libella**) . . . . Japon.

jucunda Ramb., *H. Névr.*, 134 (g. **Palpopleura**). . . Cap de B.-Espér.

Julia Uhler = **exusta** Say.

Juliana Sel., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.

Justina Sel., *Ins. Cuba*, 450 = **ochracea** Burm.

Justiniana Sel., *ibid.*, 450 (g. **Diplax**) . . . . Cuba.

Justiniana Hag. = **ambusta** Hagen.

Künckeli Selys, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 39 (g. **Diplax**). . . . . Amur.

lacerata Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 145 (g. **Tramea**). États-Unis, Mexique.

Laïs Perty, *Del. an. artic.*, 125, t. 25, f. 2. — Ramb., *H. Névr.*, 115 (g. **Perithemis** *sec.* Hagen) . . . . Amérique mérid.

lateralis Burm., *Handb.*, II, II, 850 (Libellulinar. gen.?) Comores.

latimacula Sel., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.

lavata Hag., *in litt.* (g. **Erythemis**) . . . . Vénézuéla.

Leda Say = **Lydia** Drury et **Axillena** Westwood.

Lefebvrei Ramb. = **flavistyla** Ramb.

Leontina Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 505 (g. **Erythrodiplax**). . . . . Chili.

lepida Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . Brésil.

leptoptera Sel., *in* Pollen et Van Dam, *Rech. s. la f. de Madag. Ins.*, 19 (g. **Tetrathemis**). . . . . Moluques.

leptura Burm., *Handb.*, II, II, 858 (g. **Lepthemis** *sec.* Brauer). . . . . Comores.

leucorhinus Charp. = **dubia** Vanderl. et **albifrons** Burm.

leucosticta Burm. = **unifasciata** Oliv.

leucozona Imhoff, *in litt.* = **caudalis** Charp.

Lewisi Selys, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 96 (g. **Lyriothemis**) . . . . Japon.

lineata Fabr., *Ent. Syst.*, II, 375. — Ramb., *H. Névr.*, 73 (Libellulinar. gen.?) . . . . Indes.

lineata Brauer, *Sitz.-Ber. Kais. Ak. Wiss. Wien*, LXXVII, 201 (g. **Agrionoptera**). . . . . Philippines, Malacca, Sumatra.

lineolata Charp. = **cancellata** L.

lineostigma Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXX, 170 (g. **Libella**) . . . . Pékin.

Liriope Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . Brésil.

Loewi Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVI, 563 (g. **Tramea**) . . . . Céram.

longicauda Brauer, *ibid.*, XVII, 812 (g. **Tramea**). . . Brésil.

longipennis Burm., *Handb.*, II, II, 850 (g. **Pachydiplax** *sec.* Brauer). . . . . Mexique.

longipes Hagen, *Syn. Neur. N. Amer*, 169 (g. **Erythemis**). . . . . Brésil.

longipes Hagen, *ibid.* (*pro parte*) = **cubensis** Scudder.

longitudinalis Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 312 (g. **Agrionoptera**) . . . . N.-Guinée

Lorquini Selys, *in* Pollen et Van Dam, *Rech. s. la f. d. Madag. Ins.*, 19. — *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 316 (g. **Nannophlebia**) . . . . Moluques.

Lucia Drury, *Exot. Ent.*, II, 92, pl. 45, f. 1. — Ramb. *H. Névr.*, 131 (g. **Palpopleura**). . . . . Benin.

Luciana Sel., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.

Lucilla Ramb. = **Eponina** Drury.

luctuosa Burm. = **basalis** Say.

luteola Hansem., *in litt.* = **flaveola** L.

luzonica Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 169 (g. **Libella**). . . . . Philippines.

Lycoris Sel., *Rev. et Mag. Zool.*, 1872, 176 (g. **Urothemis**). . . . . Madagascar?

Lydia Drury, *Exot. Ent.*, éd. 1, II, 85, pl. 47, f. 1. — Ramb, *H. Névr.*, 55 (g. **Libellula** *sec.* Hagen et Brauer) . . . . Amérique du Nord.

Lydia Drury, *Ex. Ent.*, I, 116, pl. 47, f. 4. = **trimaculata** De Geer.

macrocephala Sel. = **striolata** Charp.

macrostigma Ramb. = **discolor** Burm.

maculata Harris = **quadrimaculata** L.

maculata Ramb. = **semifasciata** Burm.

maculiventris Ramb. = **simplicicollis** Say.

maculosa Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 187 (g. **Nannothemis**) . . . . Géorgie.

madagascariensis Ramb., *H. Névr.*, 56 (g. **Orthemis** *sec.* Brauer). . . . . Madagascar.

madida Hagen, *Syn. N. Amer.*, 174 (g. **Diplax**) . . . États-Un., Vancouver

magnificata Sel, *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 311 (g. **Lyriothemis**) . . . . Malacca.

manadensis Boisduv., *Voy. Astrol. Ent.*, 5, pl. XII. — Rambur., *H. Névr.*, 128 (g **Neurothemis**) . . . . Sénégal?

Marcella Hag., *Stett. Ent. Z.*, XXVIII, 227 (g. **Tramea**). Cuba, Mexique, N.-Grenade, Brésil.

Marchali Ramb., *H. Névr.*, 62 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer). Ile Maurice.

Marcia Drury, *Ex. Ent.*, II, 95, pl. 45, f. 5. — Ramb., *H. Névr.*, 42 (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer). . . . Inde.

marginata Fabr., *Ent. syst*, II, 380. — Burm., *Handb*, II, II, 861. — Ramb., *H. Névr.*, 131 (g. **Palpopleura**). Benin, Natal.

marginata De Geer = **dimidiata** L

marginata Pal. de Beauv. = **Portia** Drury.

Maria Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 305 (g. **Brachydiplax**) . . . . Celèbes. Bornéo.

marmorata Hag., *in litt.* (g. **Macrothemis**) . . . . Brésil.

Marnois Brauer, *in litt.?* (g. **Trithemis**) . . . . . Afrique.

mauriciana Ramb., *H. Névr*, 54 (g. **Tramea** *sec.* Brauer) . . . . I.-Maurice.

Medea Hag., *in litt.* (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer). . . Halmaheira.

Melania Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 103 (g. **Libella**) . . . . Japon.

melanosticta Herr.-Sch., *in litt.* = **scotica** Donov.

melanostigma Eversm. = **dubia** Vanderl., **rubicunda** L. et **pectoralis** Charp.

melanostoma Sundev., *in litt.*, = **pectoralis** Charp.

mendax Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 164 (g. **Dythemis**). Texas.

Merida Sel. = **vibex** Hag.

meridionalis Sel., *Rev. Zool.*, 1841, 245. — *Rev. Od.*, 39 (g. **Diplax**) . . . . . . Eur. temp et méridion., Algérie, Asie mineure.

mesoleuca Imhoff, *in litt.* = **caudalis** Charp.

metallica Brauer, *Sitz.-Ber. K Akad. Wiss. Wien* LXXVII, 199 (g. **Orthemis**) . . . . Malacca, Bornéo.

Metella Sel. = **Domitia** Drury.

Meyeri Sel, *Mitth. Z. Mus. Dresd*, III, 308 (g. **Calothemis** . . . . N.-Guinée.

micans Hag. = **pygmæa** Brauer.

minuscula Ramb., *H. Névr*, 115 (g. **Diplax** *sec.* Hagen). Amérique septentr.

Mithra Sel. = **Attala** Selys.

morio Schneider = **flavistyla** Ramb.

Murcia Fabr. = **Marcia** Drury.

musiva Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . Brésil.

Mysis Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 311 (g. **Agrionoptera**) . . . . Mysol.

næva Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 167 (g. **Dythemis**) . Cuba.

nana Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 174 (g. **Diplacina**) . . . . Philippines.

nebulosa Fabr., *Ent. syst.*, II, 379 (g. **Diplax** *sec.* Brauer). Bengale, Ceylan.

neglecta Ramb. = **pruinosa** Burm.

nicobarica Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 978 (g. **Agrionoptera**) . . . . I. Nicobar.

nicobarica Brauer, *ibid.*, XVII, 12 (g. **Neurothemis**) . I. Nicobar, Singapore.

nigra Vanderlinden, *Monogr.*, 16 — Selys, *Rev. Od*, 65 (g. **Urothemis**) . . . . Italie méridionale.

nigra Charp. = **scotica** Don.

nigricans Ramb., *H. Névr.*, 97 (g. **Diplax** *sec.* Hagen). Buenos-Ayres.

nigricula Eversm. = **scotica** Don.
nigrifemur Sel., *Ann. Soc, Ent. Belg.*, XXVIII, 55
= **striolata** Charp. var. . . . . Madère, Canaries.
nigrilabris Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresden*, III, 304
(g. **Urothemis**) . . . . Menado.
nigripes Charp. = **sanguinea** Muller.
nigrostigma Buchecker = ? **sanguinea** Muller.
nitidinervis Sel., *Rev. Zool.*, 1841, 243. — *Expl. Alg.*,
III, pl. I, f. 4. — *Rev. Odon.*, 15 (g. **Libella**). Sicile, Algérie, Espagne mérid.
nodisticta Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 151 (g. **Libellula**). Mexique, Montana.
notata Fabr., *Ent. syst.*, II, 379. — Ramb., *H. Névr.*, 125
(Libellulinar. gen.?) . . . . Sierra-Leone.
nubecula Ramb., *H. Névr.*, 122 (g. **Dythemis** *sec.* Hagen). Brésil.
nudicollis Hag. = **meridionalis** Selys.

obesa Hag., *in litt* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.
oblita Ramb., *H. Névr.*, 123 (g. **Erythemis** *sec.* Brauer). Australie.
obscura Fabr., *Ent. syst.*, II, 377. — Burm., *Handb.*, II,
II, 854 (g. **Diastatops**). . . . . Bahia.
obscura Ramb., *H. Névr*, 64 (Libellulin. gen.? — an
= spec. sequ.?) . . . . Indes.
obscura Brauer, *in litt.?* (g. **Rhyothemis**) . . . . . Amboine.
obsoleta Ramb., *H. Névr.*, 83 = **hæmatina** Ramb. var. Madagascar.
obtrusa Hag., *Syn. Neur. N. Amer*, 177 (g. **Diplax**) . États-Unis, Canada.
obtusa Albarda, *Midden-Sumatra*, IV, v, 1, pl. I, f. 1, 2
(g. **Zyxomma**) . . . . Sumatra, Célèbes.
ochracea Burm., *Handb.*, II, II, 854 (g. **Diplax** *sec.*
Hagen) . . . . Brésil, Colombie, Mexique, Cuba.
ochracea Scudder = **fraterna** Hagen.
oculata Fabr., *Ent. syst.*, II, 376. — Ramb., *H. Névr.*,
125 (g. **Neurothemis** *sec.* Brauer) . . . . Céram, Australie sept.
oculata Brauer, *Sitz.-Ber. Ak. Wiss. Wien*, LXXVII,
194 (g. **Neophlebia**) . . . . Bornéo.
odiosa Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 152 (g. **Libellula**). Texas.
oligoneura Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 976
(g. **Neurothemis**) . . . . Cap York.
Olympia Fonscol. = **cœrulescens** Fabr.

Olympia Brullé = **chrysostigma** Burm.

onusta Hag., *Syn. Neur. N. Am.*, 144 (g. **Tramea**). Texas, Floride, Antilles, Mexique.

opalina Charp. = **cœrulescens** Fabr.

opalizans Charp., *in litt.* = **brunnea** Fonscol.

orientalis Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 140 (g. **Diplax**). . . . . Indes, Chine.

orientalis Sel., *Ann Soc. Ent. Belg.*, XXXI, 54 (g. **Leucorhinia**) . . . . Japon.

ornata Ramb., *H. Névr.*, 96 (g. **Leucorhinia** *sec.* Brauer, **Diplax** *sec.* Hagen) . . . . Amérique septentr.

ornata Brittinger = **caudalis** Charp.

osculans Hagen, *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.

ovata Hagen, *in litt.* (g. **Uracis**). . . . . Brésil.

pachygastra Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 310 (g. **Lyriothemis**) . . . . Shanghaï.

pacifica Kirby, *Ann. a. Mag. Nat. Hist.*, 5e sér., XIII, 455 (g. **Diplax**). . . . . Tongatabu.

palatina Herr.-Sch., *in litt.* = **scotica** Don.

pallens Klug, *in litt.* = **erythræa** Brullé.

palliata Ramb., *H. Névr.*, 129. — Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 10 (g. **Neurothemis**) . . . . Sumatra, Célèbes, Céram.

pallida Pal. de Beauvois = **Tillarga** Fabr.

pallidistigma Steph. = **scotica** Don.

pallipes Hagen, *Hayden's Rep.*, 1873, 589 (g. **Diplax**). Colorado, Texas.

panorpoïdes Ramb., *H. Névr.*, 28, pl. 2, f. 2. — Selys, *Rev. Od.*, 316. — *Expl. Alg.*, pl. II, f. 4 (g. **Acisoma**). Algérie, Asie mineure, Malaisie.

papuensis Sel., *Ann. Mus. Gen.*, XIV, 303. = **insignis** Ramb., var. . . . . N.-Guinée.

parvula Muller = ? **dubia** Vanderl.

parvula Ramb. = **flavistyla** Ramb.

paucinervis Hag., *in litt.* (g. **Macrodiplax**) . . . . Java.

pectoralis Charp., *Hor. entom.*, 46. — Sel., *Rev. Od.*, 56. — Charp., *Lib. europ.*, t. XIII (g. **Leucorhinia**) . . Europe tempérée.

pectoralis Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 19 (g. **Agrionoptera**) . . . . Céram, I. Viti

pedemontana Allioni, *Act. Soc. sc. Taurin*, 1762-65. —

Sel., *Rev. Od.*, 28. — Charp., *Libell. eur.*, tab. VIII (g. **Diplax**). . . . . Europe moyenne, Sibérie, Asie centrale.

pertinax Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 166 (g. **Dythemis**). Mexique.

peruviana Ramb., *H. Névr.*, 81. — Selys, *Rev. Odon.* (g. **Erythemis** *sec.* Brauer) . . . . Pérou.

petalura Brauer, *Verh. z.-bot. Ges. Wien*, XV, 506 (g. **Libella**). . . . . Hong-Kong.

petiolata Ramb., *H. Névr.*, 27, pl. 2, f. 1 (g. **Zyxomma**). Java, Célèbes, Bombay.

phalerata Uhler = **trivialis** Rambur.

Phaon Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 106 (g. **Trithemis**) . . . . Japon, Chine.

Phryne Perty, *Del. an. art.*, etc., t. 25, f. 5 (g. **Nannothemis** *sec.* Brauer) . . . . Brésil.

Phryne Ramb. = **didyma** Sel.

Phyllis Sulzer, *Abgek. Gesch. d. Ins.*, t. 24, f. 2. — Ramb., *H. Névr.*, 42. — Burm. *Handb.*, II, II, 855 (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer) . . . . Java.

picta Hag., *in litt.* (g. **Lepthemis**) . . . . Brésil?? ou Afrique?

platyptera Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 316 (g. **Tetrathemis**). . . . . Bengale.

platyura Sundev., *in litt.* = **caudalis** Charp.

plebeja Burm., *Handb.*, II, II, 856 (Libellulin. gen.?) . . Amérique du Sud

plebeja Ramb., *H. Névr.*, 107 (g. **Erythrodiplax** *sec.* Brauer) . . . . Chili.

pleurosticta Burm., *Handb.*, II, II, 849 (g. **Macrothemis** *sec.* Hagen) . . . . Brésil.

pleurosticta Hag. = **Celeno** Sel.

plumbea Uhler, *Proc. Acad. Phil.*, 1857, 87 (g. **Libellula** *sec.* Hagen) . . . . États-Unis.

Plutonia Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 89, = **fuliginosa** Sel. var. . . . . Japon.

Poeyi Scudder = **didyma** Sel.

Polleni Sel., *in* Poll. et Van Dam, *Rech. s. la f. d. Mad. Ins.*, 18, pl. II, f. A (g. **Neophlebia**) . . . . . . Madagascar.

polysticta Burm., *Handb.*, II., 856 = ? **superba** Hagen .

pontica Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXXI, 12, = **fulva** Mull. var. . . . . Asie mineure, Syrie.

Portia Drury, *Ex. Ent.*, II, 96, pl. 47, f. 3. — Ramb., *H. Névr.*, 130 (g. **Palpopleura**) . . . . Sierra-Leone.
postica Hag., *in litt.* (g. **Diplax**) . . . . Brésil.
præcox Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 164 (g. **Dythemis**). Mexique.
prænubila Newm. = **quadrimaculata** L. **var.**
pretiosa Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 299 (g. **Rhyothemis**). . . . . Ternate.
Priapea Sel., *ibid.*, 310 (g. **Lyriothemis**) . . . . . Singapore.
prodita Hag., *in litt.* (g **Nannothemis**). . . . . . Brésil.
Proserpina Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, 314 (g. **Trithemis**). . . . . Moluques.
proxima Hag., *in litt.* (g. **Leucorhinia**) . . . . . . États-Unis.
pruinans Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 308 (g. **Orchithemis**). . . . . Banka.
pruinosa Burm., *Handb.*, II, II, 858. — Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien.*, XV, 1013 (g. **Libella**) . . . Inde, Chine, Java, Philipp.
pruinosa Kaup., *in litt.* = **Duivenbodei** Brauer.
Pseudosophronia Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 15 = **oculata** Fabr. **var.** . . . . Céram, Chine?
pulchella Drury, *Exot. Ent.*, I, 119, pl. 48, f. 5. — Ramb., *H. Névr.*, 54 (g. **Libellula** *sec.* Hagen). . . États-Unis, Canada.
pulchella Burm. = **Amanda** Hag.
pulcherrima Brauer, *Sitz.-Ber. K. Ak. d. Wiss. Wien*, LXXVII, 198 (g. **Orchithemis**). . . . . Malacca.
pulla Burm., *Handb.*, II, II, 855 (g. **Diplax** *sec.* Brauer) . Surinam.
pullata Burm., *ibid.*, 854. — Ramb., *H. Névr.*, 136, pl. 3, f. 4 (g. **Diastatops**) . . . . »
pygmæa Ramb., *H Névr.*, 27, pl. 2, f. 1 (g. **Nannophya**) . Malacca, Amboine.
pygmæa Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 297 (g. **Rhyothemis**). . . . . N.-Guinée.

quadra Ramb., *H. Névr.*, 31, pl. 2, f. 5. = **imbuta** Burm.
quadrifasciata Donov. = **fulva** Muller.
quadrimaculata Linné, *S. Nat.*, II, 901. — Sel., *Rev. Od.*, 7. — Charpent., *Lib. europ.*, t. III (g. **Libellula**). Europe, Sibérie.
quadripunctata Fabr. = **quadrimaculata** L.
quadrivittata Hag., *in litt.* (g. **Tramea** *sec.* Brauer). Célèbes, Amboine.

quadrupla Say, *Journ. Ac. Philad.*, VIII, 23 (g. **Libellula** *sec.* Hagen) . . . . États-Unis.
quatuornotata Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 298 (g. **Agrionoptera**) . . . . Menado.

Ramburi Sel., *Rev. Zool.*, 1847. — *Expl. Alg.*, pl. I, f. 7. — *Rev. Odon.*, 20 (g. **Libella**). Sardaigne, Sicile, Algérie, Candie, Égypte.
Ramburi Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien.*, XVI, 568 = **palliata** Ramb. var. . . . . Céram.
Ransonneti Brauer, *ibid.*, XV, 1009. — Sel., *Ann. S. E. Belg.*, XXXI, 20 (g. **Libella**) . . . . Sinaï.
rapax Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**). . . . . Vénézuéla.
regia Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 24 (g. **Rhyothemis**). . . . . Amboine
resplendens Sel., *Mitth. Zool. Mus. Dresd.*, III, 300 (g. **Rhyothemis**). . . . . N.-Guinée, Batchian.
reticulata Kirby, *Proc. Zool. Soc.*, 1886, 328, pl. 33, f. 8, 9 (g. **Crocothemis**) . . . . Inde nord-ouest.
rhætica Buchecker = ? **Fonscolombii** Selys.
Roeseli Curtis = **sanguinea** Muller.
Rosenbergi Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVI, 564 (g. **Tramea**) . . . . Céram.
rubella Brullé = **Fonscolombii** Selys.
rubicunda Linné, *S. Nat.*, II, 902. — Sel., *Rev. Od.*, 53 (g. **Leucorhinia**) . . . . Europe tempérée.
rubicunda Steph. = **fulva** Muller.
rubicunda Curtis = **dubia** Vanderl.
rubicunda Ramb. = **pectoralis** Charp.
rubicundula Say, *Journ. Acad. Philad.*, VIII, 26 (g. **Diplax** *sec.* Hagen) . . . . États-Unis, Amérique anglaise.
rubiginosa Hoffmans., *in litt.* = **fulva** Muller.
rubra Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 556 (g. **Nannodiplax**) . . . . Australie.
rubra Fuessly = **pedemontana** Allioni.
rubra Muller = **flaveola** L.
rubrinervis Selys, *Rev. Zool.*, 1841, 244. — *Expl. Alg.*, pl. I, f. 5. — *Rev. Odon.*, 26 (g. **Trithemis**). Sicile, Algérie, Sénégal, Syrie.

rubriventris Blanchard, *Voy. de d'Orb.*, 217, pl. 28, f. 4 (g. **Erythemis** *sec.* Brauer) . . . . Corrientes.
rufa Ramb., *H. Névr.*, 71 (g. **Erythemis** *sec.* Brauer). Java.
rufa Oliv., *in litt.* = **erythræa** Brullé.
ruficollis Hag. = **Fonscolombii** Selys.
ruficollis Charp. = **striolata** Charp.
rufinervis Burm., *Handb.*, II, II, 850 (g. **Dythemis** *sec.* Brauer) . . . . Cuba, St-Domingue.
rufostigma Newm. = **sanguinea** Muller.
ruralis Burm. = **umbrata** L.

Sabina Drury, *Ex. Ent.*, I, pl. 48, f. 4. — Ramb., *H. Névr.*, 47 (g. **Lepthemis** *sec.* Brauer. Indes, Chine, archipel malais, Australie septentr.
Sallei Sel. = **pertinax** Hagen.
samoensis Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 22 (g. **Tramea**) . . . . I. Samoa.
sanguinea Muller, *Faun. Friedrichsd.*, n° 547. — Sel., *Rev. Odon.*, 31. — *Expl. Alg.*, pl. II, f. 3 (g. **Diplax**). Eur. temp., Asie mineure, Algérie.
sanguinea Burm., *Handb.*, II, II, 858 (g. **Urothemis** *sec.* Brauer) . . . . Madras.
sanguinolenta Burm., *Handb.*, II, II, 859 (g. **Crocothemis** *sec.* Brauer) . . . . Cap de B.-Espér.
sardoa Ramb., *H. Névr.*, 68. — Sel., *Rev. Od.*, 16 = **brunnea** Fonscol., var. . . . . Sardaigne.
saturata Uhler, *Proc. Acad. Philad.*, 1857, 88 (g. **Libellula** *sec.* Hagen) . . . . Yellowstone, Montana, Arizona.
scotica Donov., *Nat. Hist. of Brit. Ins.*, t. p. . — Sel., *Rev. Od.*, 48. — Charp., *Lib. eur.*, t. XII (*nigra*) (g. **Diplax**). . . Eur. temp. et septentr., Asie septentr., Amérique boréale.
Selika Sel., *in* Pollen et Van Dam, *Rech. s. l. f. d. Mad.*, *Ins.*, 16 (g. **Trithemis**). . . . . Madagascar.
semiaurea Hag., *in litt.* (g. **Nannothemis**) . . . . . Para.
semicincta Say, *Journ. Acad. Philad.*, VIII, 27 (g. **Diplax** *sec.* Hagen) . . . . États-Unis.
semifasciata Burm., *Handb.*, II, II, 862 (g. **Libellula** *sec.* Hagen) . . . . Amérique du Nord.
semivitrea Burm. = **Portia** Drury.

separata Sel. = hemihyalina J. Desjard.

serva Fabr. = trimaculata De Geer.

Servilia Drury, *Exot. Ent.*, I, 117, pl. 47, f. 6. — Ramb., *H. Névr.*, 80 (g. **Crocothemis** *sec.* Brauer). Indes orientales, Chine, Australie.

sexlineata Sel., *Ann. Mus. Genov.*, XIV, 304 (g. **Agrionoptera**) . . . . Malacca.

sexmaculata Fabr., *Ent. syst.*, II, 381. — Burm., *Handb.*, II, II, 860. — Ramb., *H. Névr.*, 126 (g. **Palpopleura**). Chine.

sibirica Gmelin = pedemontana Allioni.

sicula Hag. = striolata Charp.

signata Ramb., *H. Névr.*, 117 (Libellulinar. gen.?). . . ?

similata Ramb., *H. Névr.*, 36 (g. **Tramea** *sec.* Brauer). Calcutta.

similis Sel., *Ann. Mus. Gen.*, XIV, 303 = insignis Ramb., var . . . . Halmaheira, Ternate, Amboine.

simplex Ramb., *H. Névr.*, 121 (g. **Tramea** *sec.* Brauer). Cuba.

simplex Hag. = Marcella Sel.

simplicicollis Say, *Journ. Ac. Philad.*, VIII, 28 (g. **Mesothemis** *sec.* Hagen) . . . . États-Unis, Mexique, Cuba.

simulans Sel., *Ann. Mus. Gen.*, XIV, 300 (g. **Agrionoptera**) . . . . Malacca, Ceylan

sinensis Sel., *Ann. Soc. Ent. Belg.*, XXVII, 140 (g. **Diplax**). . . . . Chine.

sinuata Fabr. = Portia Drury.

smaragdina Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 320. — *Ann. Mus. Gen.*, XIV, 306 (g. **Diplacina** ?). . . . N.-Guinée.

Snelleni Sel., *ibid.*, 299 (g. **Rhyothemis**) . . . . . Célèbes.

sobrina Ramb., *H. Névr.*, 114 (g. **Diplax** *sec.* Brauer). Brésil.

socia Ramb. = longipennis Burm.

Sophronia Drury, *Ex. Ent.*, II, 97, pl. 47, f. 4. — Ramb., *H. Névr.*, 128. — Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 9 (g. **Neurothemis**) . . . . Chine.

soror Ramb., *H. Névr.*, 82 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer). ?

soror Brauer = adelpha Sel.

Sparshalli Curtis = flavescens Fabr.

speciosa Uhler, *Proc. Acad. Phil.*, 1858 (?) = albistyla Sel., var . . . . Japon.

spectabilis Brittinger, *in litt.* = depressiuscula Selys.

specularis Hag. = **cubensis** Scudder.

splendida Ramb., *H. Névr.*, 43 (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer) . . . . Chine.

stemmalis Burm., *Handb.*, II, II, 857 (g. **Libella** *sec.* Brauer) . . . . Ile Maurice.

sterilis Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . Amérique méridion.

stictica Burm., *Handb.*, II, II, 850 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer) . . . . Natal.

stigmatizans Fabr., *Ent. syst.*, II, 375. — Ramb., *H. Névr.*, 123 = **oculata** Fabr. var. . . . . . . N.-Hollande.

striolata Charp., *Libell. eur.*, 78, t. X, f. 2. — Sel., *Rev. Odon.*, 40. — *Expl. Alg.*, pl. II, f. 2 (g. **Diplax**). Eur. occid. et mérid., Alg., Asie min.

stylata Ramb., *H. Névr.*, 37 (g. **Tramea** *sec.* Brauer). Célèbes, Bombay.

subbinotata Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 811 (g. **Tramea**) . . . . Brésil.

subfasciata Burm. = **umbrata** L.

subfasciolata Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XV, 506 (g. **Libella**) . . . . Cap de B.-Espérance.

subornata Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 149 (g. **Libellula**). . . . . Texas, N.-Mexique, San Diego.

subphyllis Sel., *An. Soc. Esp. Hist. nat.*, XI, 9 = **Phyllis** Sulzer var. . . . . Philippines.

subpruinosa Kirby, *Proc. Zool. Soc.*, 1886, 326, pl. 33, f. 7 (g. **Diplax**) . . . . Inde nord-ouest.

superba Hagen, *Syn. Neur. N. Amer.*, 148 (g. **Erythrodiplax**) . . . . Mexique.

sylvatica Hansem., *in litt.* = **scotica** Don.

sylvicola Hag., *in litt.* = **albifrons** Burm.

tabida Hagen, *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . Bahia.

tæniolata Schneider, *Stett. Ent. Z.*, 1845, 111. — Sel., *Rev. Odon.*, 290 (g. **Libella**). . . . . Rhodes.

tenera Say = **Domitia** Drury.

tenerrima Buchecker = ? **scotica** Don.

tenuicincta Say = **Domitia** Drury.

tenuis Hag., *in litt.* (g. **Macrothemis**) . . . . Brésil.

terminalis Burm. = **flavescens** Fabr.

ternaria Say = **quadrimaculata** L. et **semifasciata** Burm.

tessellata Burm., *Handb.*, II, II, 849 (g. **Dythemis** *sec.* Brauer). . . . . Brésil.

tessellata Ramb. = **sterilis** Hag.

testacea Burm., *Handb.*, II, II, 859 (g. **Libella** *sec.* Brauer) . . . . Java, Bornéo, Philipp.

tetra Ramb., *H. Névr.*, 119 (g. **Diplacina** *sec.* Brauer) . I. Maurice.

Thais Hag., *in litt.* (g. **Perithemis**) . . . . Amazone.

thoracantha Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 299. — Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 302 (g. **Brachydiplax**) . . . . N.-Guinée, Céram, Halmaheira.

Tillarga Fab., *Ent. syst. Suppl.*, 285. — Ramb., *H. Névr.*, 59. — Burm., *Handb.* II, II, 852. — Pal. de Beauv., *Ins. d'Afr. et Am.*, pl. 2 (*pallida*) (g. **Tholymis** *sec.* Brauer). . . . . Indes orient., Malaisie.

tincta Ramb., *H. Névr.*, 135 (g. **Diastatops**) . . . . Brésil, Guyane.

transmarina Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVII, 21 (g. **Tramea**) . . . . I. Viti, Samoa.

triangularis Sel., *Mitt. Z. Mus. Dresd.*, III, 314 (g. **Libella**) . . . . Ceylan, Himalaya.

triedra Muller = ? **albifrons** Burm.

trimaculata De Geer, *Ins.*, III, 556, t. 26, f. 23. — Burm., *Handb.*, II, II, 861. — Ramb., *H. Névr.*, 52. — Drury, *Ex. Ent.*, I, 116, pl. 47, f. 4 (*Lydia*) (g. **Libellula** *sec.* Hagen) . . . . Amérique du Nord.

trinacria Sel., *Rev. Zool.*, 1841, 244. — *Rev. Od.*, 4. — Ramb., *H. Névr.*, pl. 3, f. 1 (*Bremii*) (g. **Lepthemis**). Égypte, Sénégal, Sicile.

tripartita Burm. = **umbrata** L.

triquetra Hoffmanns., *in litt.* = **cœrulescens** Fabr.

trivialis Ramb., *H. Névr.*, 115 (g. **Diplax** *sec.* Brauer) . . . Java, Philippines, Japon, Ceylan, Bombay, N.-Guin., Seych.

trivirgata Mus. Berol., *in litt.* (Libellulinar. gen.?) . . ?

truncatula Ramb. = **longipennis** Burm.

Tullia Drury = **equestris** Fabr.

typographa Hag., *in litt.* (g. **Dythemis**) . . . . . . Chili.

umbrata Linn., *S. Nat.*, II, 903. — Burm, *Handb*, II, II, 856. — De Geer, *Mém.*, III, t. 26, f. 4 (*unifasciata*) (g. **Erythrodiplax** *sec.* Brauer) . . . . Brésil, Surinam.

unicolor Sel. *Milth. Z. Mus Dresd.*, III, 301 = **oculata** Fabr., var. . . . . Célèbes.

unifasciata Oliv. (in op. ?) — Ramb., *H. Névr.*, 108 (g. **Trithemis** *sec.* Brauer) . . . . Algérie, Égypte, Sénégal.

unifasciata De Geer = **umbrata** L.

uniformis Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 92 et XXVIII, 42 (g. **Diplax**) . . . . Japon.

unimaculata De Geer, *Mém.*, III, pl. 26, f. 5. — Burm, *Handb.*, II, II, 855. — Ramb., *H. Névr.*, 111 (g **Diplax** *sec.* Brauer). . . . . Brésil, Surinam.

vacua Hag., *Stett. Ent. Z.*, XXVIII, 91 (g. **Diplax**). . . Saskatchewan.

vacua Hag., *in litt.* (g. **Nannodiplax** *sec.* Brauer). . . Java.

variegata Linné, *S. Nat.*, II, 903. — Ramb., *H. Névr.*, 44. — Drury, *Ex. Ent.*, II, 94, pl. 46, f. 1 (g. **Rhyothemis** *sec.* Brauer) . . . . Indes, Chine.

variegata Fabr., *Ent. syst.*, II, 382 (g. **Palpopleura** *sec.* Brauer) . . . . Benin.

variegata Muller = ? **striolata** Charp.

velox Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 163 (g. **Dythemis**). Texas.

venosa Burm., *Handb*, II, II, 848 (g. **Diplax** *sec.* Brauer). Bahia.

verbenata Hag. = **Attala** Sel.

veronensis Steph, *in litt.* = **striolata** Charp.

veronensis Curtis = **vulgata** L.

veronensis Charp. = **scotica** Don.

versicolor Fabr. = **pulchella** Drury.

vesiculosa Fabr., *Ent. syst.*, II, 377. — Burm., *Handb.*, II, II, 857. — Ramb., *H. Névr.*, 50 (g. **Lepthemis** *sec.* Brauer). . . . . Brésil, Antilles.

vestita Ramb., *H. Névr.*, 132, pl. 3, f. 2 (g. **Palpopleura**). Madagascar.

vibex Hag., *Syn. Neur. N. Amer.*, 159 (g. **Libellula**). . Mexique.

vibrans Fabr., *Ent. syst.*, II, 380. — Ramb., *H. Névr.*, 126 (Libellulinar. gen.?). . . . . ?

vicina Hag., *Syn. Neur. N. Amer*, 175 (g. **Diplax**) . . États-Unis, Canada *victoria* Fourcroy = **flaveola** L.

vidua Sel., *Mitth. Z. Mus. Dresd.*, III, 300 (g. **Libellula**). Menado.

vilis Ramb., *H. Névr.*, 98 (g. **Diplax** *sec.* Brauer) . . . Buenos-Ayres.

villosovittata Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 167 (g. **Libella**). . . . . Amboine, N.-Guinée, Cap York.

vinosa Scudder = **rufinervis** Burm.

violacea De Geer = **fasciata** Fabr.

virginia Ramb. = **chinensis** De Geer.

virgula Sel., *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVIII, 44 = **illota** Hag. var. . . . . Mexique, Amérique centrale.

viridula Pal. de Beauv. = **flavescens** Fabr.

vitellina Brauer, *Verh. z.-b. Ges. Wien*, XVIII, 184 (g. **Rhyothemis**) . . . . I. Pelew.

vulgata Linné, *S. Nat.*, II, 901. — Sel., *Rev. Od.*, 45. — Charp., *Lib. europ.*, t. XI (g. **Diplax**) . . Europe centr. et septentr., Sibérie.

vulgata Selys, *Mon. Libell.*, 50 = **striolata** Charp.

vulgata Scopoli = **cœrulescens** Fabr.

vulgatissima Hansem., *in litt.* = **sanguinea** Muller.

Wrightii Selys, *Ann. S. Ent. Belg.*, XII, 96 (g. **Libellula**). Seychelles.

Zephyra Selys *in litt.* (g. **Macrothemis**). . . . . . Brésil.

zonata Burm., *Handb.*, II, II, 859. — Selys, *Ann. S. Ent. Belg.*, XXVII, 97 (g. **Libellula**) . . . . Chine, Japon.

SUR

LES FIGURES AFFINEMENT VARIABLES;

PAR

M. J. NEUBERG,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

SUR

LES FIGURES AFFINEMENT VARIABLES.

1. Soit M le centre de gravité de trois points M_1, M_2, M_3 chargés, respectivement, des masses m_1, m_2, m_3. Supposons que les points M_1, M_2, M_3 décrivent, simultanément, les lignes A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, situées dans un même plan; M décrira, dans le même temps, une ligne AB. Le système des points M, M_1, M_2, M_3, à chaque instant du mouvement est, suivant une expression employée par Euler et par Möbius, *affine* à lui-même, et on peut lui adjoindre de nouveaux points en considérant les centres de gravité d'autres masses attachées aux points mobiles M_1, M_2, M_3.

Soit O un point fixe du plan $A_1B_1A_2B_2$. Le rayon vecteur OM, en tournant autour de O dans un certain sens, engendre une *aire positive;* lorsqu'il tourne en sens contraire, il engendre une *aire négative;* lorsqu'il tourne, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, la somme algébrique des aires qu'il aura engendrées successivement, sera ce que nous appellerons *aire déterminée par le mobile* M. Dans certains cas, cette aire est nulle.

Rapportons la figure à deux axes rectangulaires OX, OY. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x, y) les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M; nous les regardons comme des fonctions du temps t. On sait que

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Désignons par S, S_1, S_2, S_3 les aires déterminées par les vecteurs OM, OM_1, OM_2, OM_3 pendant le temps $t_1 - t_0$ du mouvement. Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} 2dS &= (xdy - ydx) \\ &= \frac{(m_1x_1 + \cdots)(m_1dy_1 + \cdots) - (m_1y_1 + \cdots)(m_1dx_1 + \cdots)}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Le numérateur de la dernière fraction est une fonction du second degré en m_1, m_2, m_3. Les coefficients de m_1^2, m_2^2, m_3^2 sont égaux à $2dS_1$, $2dS_2$, $2dS_3$. Celui de m_1m_2 peut prendre la forme

$$\begin{gathered} -(x_1 - x_2)\,d(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)\,d(x_1 - x_2) \\ + x_1dy_1 - y_1dx_1 + x_2dy_2 - y_2dx_2. \end{gathered}$$

Appelons *aire relative déterminée par le segment* M_1M_2, l'aire S_{12} que détermine une droite ON_3 égale et parallèle à M_1M_2; les coordonnées de N_3 étant égales à $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, on a

$$2dS_{12} = (x_2 - x_1)\,d(y_2 - y_1) - (y_1 - y_2)\,d(x_2 - x_1),$$

et le coefficient de m_1m_2 est égal à $2(dS_1 + dS_2 - dS_{12})$. En intégrant les deux membres de (2) entre les limites t_1 et t_0, on obtient la formule

$$\left.\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3)^2S &= (m_1 + m_2 + m_3)(m_1S_1 + m_2S_2 + m_3S_3) \\ &\quad - (m_2m_3S_{23} + m_3m_1S_{31} + m_1m_2S_{12}), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

déjà signalée par M. Leudesdorf (voir *Messenger*, t. VIII, p. 11).

2. Représentons par $\varphi(m)$ le second membre de cette égalité, et considérons m_1, m_2, m_3 comme étant les coordonnées barycentriques de M par rapport au triangle de référence $M_1M_2M_3$.

Nous remarquons d'abord que *le lieu des points* M *qui, pendant le mouvement du triangle* $M_1M_2M_3$, *de la position* $A_1A_2A_3$ *à la position* $B_1B_2B_3$, *déterminent une aire nulle, est la conique, réelle ou imaginaire, ayant pour équation* $\varphi(m) = 0$.

Pour abréger le langage, nous désignons cette courbe par la lettre φ.

Les points situés à l'infini sur φ sont définis par les équations

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0, \quad m_2 m_3 S_{23} + m_3 m_2 S_{31} + m_1 m_2 S_{12} = 0.$$

On conclut de là que la conique des aires nulles appartient au genre ellipse, hyperbole ou parabole, suivant que la quantité

$$S_{23}^2 + S_{31}^2 + S_{12}^2 - 2S_{23}S_{12} - 2S_{31}S_{12} - 2S_{12}S_{31}$$

est négative, positive ou nulle.

La forme de l'équation (3) montre que *les points* M *qui déterminent des aires égales, sont situés sur une conique concentrique et homothétique à la conique des aires nulles.*

Les coordonnées (μ_1, μ_2, μ_3) du centre μ de la conique φ résultent des équations

$$\frac{d\varphi(\mu)}{d\mu_1} = \frac{d\varphi(\mu)}{d\mu_2} = \frac{d\varphi(\mu)}{d\mu_3}.$$

Soient δ, δ' les distances des points M et μ à la polaire de M par rapport à φ; si l'on suppose $m_1 + m_2 + m_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, on trouve aisément

$$\begin{aligned} \delta : \delta' &= \sum m_1 \frac{d\varphi(m)}{dm_1} : \sum \mu_1 \frac{d\varphi(m)}{dm_1} \\ &= \sum m_1 \frac{d\varphi(m)}{dm_1} : \sum m_1 \frac{d\varphi(\mu)}{d\mu_1}. \end{aligned}$$

Il résulte de là que

$$\delta : \delta' = k\varphi(m),$$

k étant une constante, indépendante de M. Par conséquent :

L'aire déterminée par un point M *d'une figure affinement variable, est proportionnelle au quotient des perpendiculaires abaissées de ce point et du centre de la conique des aires nulles, sur la polaire de* M *par rapport à cette conique.*

3. Pour définir le système affinement variable, nous pouvons choisir trois points quelconques du système. Prenons pour ces points les sommets d'un triangle $M_1M_2M_3$ autopolaire par rapport à la conique φ. Les coefficients des rectangles m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1, dans la fonction $\varphi(m)$, devront être nuls. Par conséquent

$$S_1 + S_2 = S_{12}, \quad S_2 + S_3 = S_{23}, \quad S_3 + S_1 = S_{31}, \tag{4}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 S = m_1^2 S_1 + m_2^2 S_2 + m_3^2 S_3. \tag{5}$$

On peut prendre arbitrairement le sommet M_1 du triangle conjugué; les sommets M_2, M_3 sont deux points conjugués d'une certaine involution ayant pour support la polaire de M_1. Combinant cette remarque avec les relations (4), on arrive à la proposition suivante :

Si l'on considère une figure affinement variable, on peut trouver une infinité de couples de points M_2, M_3 *tels, que l'aire relative déterminée par le segment* M_2M_3 *entre deux positions données de la figure, soit égale à la somme des aires déterminées par les points* M_2, M_3. *A chacun de ces couples, on peut adjoindre un troisième point* M_1, *tel que les couples* M_1M_2, M_1M_3 *jouissent de la même propriété que le couple* M_2M_3.

Plus généralement, prenons pour $M_1M_2M_3$ un triangle autopolaire par rapport à une conique dont tous les points déterminent une aire donnée S. L'équation (3) représente une telle courbe; en exprimant que les rectangles m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1 y manquent, on trouve

$$2S = S_1 + S_2 - S_{12} = S_2 + S_3 - S_{23} = S_3 + S_1 - S_{31},$$

$$(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)S = \Sigma m_1^2 S_1.$$

De là, on conclut le théorème suivant :

Dans le mouvement d'une figure affinement variable, d'une première position à une autre, il existe une infinité de triangles $M_1M_2M_3$ *tels, que l'excès de la somme des aires déterminées par deux sommets sur l'aire relative déterminée par le côté correspondant, a une valeur constante* 2S. *Tous ces triangles sont* *conjugués par rapport à une conique fixe, et les points de cette conique déterminent une aire égale à* S. *L'équation de la courbe, en coordonnées barycentriques, est*

$$\Sigma m_1^2(\mathrm{S} - \mathrm{S}_1) = 0.$$

Pour l'équation (3), nous pourrons également écrire :

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 (\mathrm{S} - \mathrm{S}') = \varphi(m) - (m_1 + m_2 + m_3)^2\mathrm{S}'. \qquad (6)$$

Le deuxième membre de cette égalité étant égalé à zéro représente la conique dont tous les points déterminent l'aire S′. Si $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est un triangle autopolaire par rapport à cette courbe, on a, d'après ce qu'on vient de voir,

$$2\mathrm{S}' = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_{12} = \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3 - \mathrm{S}_{23} = \mathrm{S}_3 + \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_{31},$$

et l'équation (6) se réduit à

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 (\mathrm{S} - \mathrm{S}') = m_1^2(\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}') + m_2^2(\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}') + m_3^2(\mathrm{S}_3 - \mathrm{S}').$$

Nous ne nous arrêtons pas à l'interpréter géométriquement.

4. La conique des aires nulles peut se réduire à une droite. Cette circonstance se présente lorsque $\mathrm{S}_{12} = \mathrm{S}_{23} = \mathrm{S}_{31} = 0$; alors la formule (3) devient

$$(m_1 + m_2 + m_3)\mathrm{S} = m_1\mathrm{S}_1 + m_2\mathrm{S}_2 + m_3\mathrm{S}_3.$$

Le lieu des points qui déterminent une aire nulle, est la droite représentée par

$$m_1\mathrm{S}_1 + m_2\mathrm{S}_2 + m_3\mathrm{S}_3 = 0.$$

Tous les points d'une droite parallèle à la précédente déterminent une même aire; cette aire est proportionnelle à la distance des deux droites.

5. Supposons maintenant que le triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ se déplace en restant toujours semblable à lui-même. Ses trois côtés, à chaque instant, ont même vitesse angulaire, et les extrémités de trois droites ON_1, ON_2, ON_3 constamment égales et parallèles à M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 décrivent des courbes homothétiques. Par conséquent, les aires S_{12}, S_{23}, S_{31} sont proportionnelles à $\overline{M_1M_2}^2$, $\overline{M_2M_3}^2$, $\overline{M_3M_1}^2$. Si donc a_1, a_2, a_3 sont les longueurs des côtés du triangle $A_1A_2A_3$, on peut écrire

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 S = (m_1 + m_2 + m_3)(m_1S_1 + m_2S_2 + m_3S_3) \\ - k(a_1^2 m_2 m_3 + a_2^2 m_3 m_1 + a_3^2 m_1 m_2),$$

k étant une constante. Or, la circonférence $M_1M_2M_3$ a pour équation en coordonnées barycentriques

$$a_1^2 m_2 m_3 + a_2^2 m_3 m_1 + a_3^2 m_1 m_2 = 0;$$

donc l'équation

$$\frac{1}{k} \Sigma m_1 \Sigma m_1 S_1 - \Sigma a_1^2 m_2 m_3 = 0$$

représente également une circonférence, et si l'on suppose $\Sigma m_1 = 1$, le premier membre est égal à la puissance de cette circonférence par rapport au point (m_1, m_2, m_3). Nous déduisons de là le théorème suivant :

Lorsqu'une figure plane se meut en restant toujours semblable à elle-même, l'aire déterminée par l'un de ses points est proportionnelle à la puissance de ce point par rapport à une circonférence fixe; tous les points qui déterminent la même aire appartiennent à une même circonférence.

C'est là une généralisation d'un théorème connu. Pour l'historique de ce théorème et les conséquences, nous renvoyons le lecteur à deux articles intéressants, dus à M. Liguine et à M. Darboux (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. II, 2e série, pp. 306-333, 333-356).

6. Considérons maintenant n points M_1, M_2, ..., M_n, chargés des masses m_1, m_2, ..., m_n et décrivant, dans le même plan, les courbes A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n; leur centre de gravité M décrit une courbe déterminée AB. En adoptant des notations ana-

logues à celles qui ont déjà été employées, on trouve la relation

$$\left.\begin{aligned}(m_1+m_2+\cdots+m_n)^2S = {} & (m_1+m_2+\cdots+m_n)(m_1S_1+m_2S_2+\cdots+m_nS_n) \\ & - (m_1m_2S_{12}+m_2m_3S_{23}+\cdots).\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Menons les droites ON_{rs}, OC_{rs}, OD_{rs} respectivement égales et parallèles aux droites M_rM_s, A_rA_s, B_rB_s. Si nous faisons parcourir aux points M_1, M_2, ..., avec des vitesses uniformes, les droites A_1B_1, A_2B_2, ..., les points M, N_{12}, N_{23}, ... décrivent uniformément les droites AB, $C_{12}D_{12}$, $C_{23}D_{23}$, ... Donc en désignant par T, T_r, T_{rs} les aires des triangles OAB, OA_rB_r, $OC_{rs}D_{rs}$, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}(m_1+m_2+\cdots+m_n)^2T = {} & (m_1+m_2+\cdots+m_n)(m_1T_2+m_2T_2+\cdots+m_nT_n) \\ & - (m_1m_2T_{12}+m_2m_3T_{23}+\cdots).\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

La démonstration directe de cette égalité n'offre aucune difficulté. En effet, si (α, β), (α_1, β_1), ..., (γ, δ), (γ_1, δ_1), .. sont les coordonnées des points A, A_1, ..., B, B_1, ..., on a

$$2T = \frac{1}{(m_1+m_2+\cdots+m_n)^2}\begin{vmatrix} \Sigma m_1\alpha_1 & \Sigma m_1\gamma_1 \\ \Sigma m_1\beta_1 & \Sigma m_1\delta_1 \end{vmatrix},$$

et le dernier déterminant est une fonction du second degré en m_1, m_2, ..., dans laquelle les coefficients de m_1^2, m_1m_2, ... ont pour valeurs $2T_1$, $2(T_1+T_2-T_{12})$, ...

Revenons au cas où les trajectoires des points M_1, M_2, ... sont quelconques. En soustrayant l'une de l'autre les égalités (6) et (7), et en posant

$$S-T=U, \quad S_1-T_1=U_1, \ \ldots, \quad S_{12}-T_{12}=U_{12}, \ \ldots,$$

nous aurons la formule

$$\left.\begin{aligned}(m_1+m_2+\cdots+m_n)U = {} & (m_1+m_2+\cdots+m_n)(m_1U_1+m_2U_2+\cdots+m_nU_n) \\ & - (m_1m_2U_{12}+m_2m_3U_{23}+\cdots).\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

La signification des quantités U, U_1, ..., U_{12}, ... est très simple. Au premier abord, on peut dire que ce sont les aires comprises entre les arcs de courbe AB, A_1B_1, ..., $C_{12}D_{12}$, ... et leurs cordes.

Mais pour mieux préciser, nous dirons que ce sont les aires engendrées par les rayons AM, A_1M_1, ..., $C_{12}N_{12}$, ... entre la position initiale et la position finale du système mobile.

L'égalité (8) peut être démontrée directement. Les coordonnées de A étant

$$\frac{\Sigma m_1\alpha_1}{\Sigma m_1}, \quad \frac{\Sigma m_1\beta_1}{\Sigma m_1},$$

celles de M par rapport à des axes AX', AY' parallèles à OX, OY, seront

$$\frac{\Sigma m_1x_1}{\Sigma m_1} - \frac{\Sigma m_1\alpha_1}{\Sigma m_1} = \frac{\Sigma m_1(x_1 - \alpha_1)}{\Sigma m_1}, \quad \frac{\Sigma m_1(y_1 - \beta_1)}{\Sigma m_1};$$

d'où

$$2(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)^2 dU = \begin{vmatrix} \Sigma m_1(x_1 - \alpha_1) & \Sigma m_1 dx_1 \\ \Sigma m_1(y_1 - \beta_1) & \Sigma m_1 dy_1 \end{vmatrix};$$

le dernier déterminant peut être développé et les coefficients des rectangles m_1m_2, m_2m_3, ... peuvent être transformés comme il a été indiqué déjà plusieurs fois. Une intégration entre les limites t_0 et t_1 conduit ensuite à la formule (8).

Les quantités S_{12}, S_{23}, ..., T_{12}, T_{23}, ... étant indépendantes de la position particulière de l'origine O, on déduit, des formules (6) et (7), que les expressions

$$S - \frac{m_1S_1 + m_2S_2 + \cdots + m_nS_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

$$T - \frac{m_1T_1 + m_2T_2 + \cdots + m_nT_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

ne varient pas avec la position de O.

7. Conservant les notations précédentes et posant

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = -m,$$

on a

$$mx + m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0, \tag{9}$$

$$my + m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n = 0, \tag{10}$$

$$m + m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 0. \tag{11}$$

Le système des points M, M_1, M_2. ..., M_n, chargés respectivement des masses m, m_1, m_2, ..., m_n, constitue ce que l'on a appelé un *système indifférent.*

D'après les égalités (9) et (10), on peut écrire

$$\begin{vmatrix} \Sigma mx & \Sigma mdx \\ \Sigma my & \Sigma mdy \end{vmatrix} = 0,$$

les sommes Σ s'étendant aux indices 0, 1, 2, .., n. Développant ce déterminant et intégrant, on trouve

$$\Sigma m \Sigma m\mathrm{S} - \Sigma mm_1\mathrm{S}_{01} = 0,$$

ou simplement, à cause de (11),

$$\Sigma mm_1\mathrm{S}_{01} = 0. \tag{12}$$

Donc *lorsqu'un système indifférent de masses se meut d'une manière quelconque dans un même plan, la somme de tous les produits de deux masses quelconques du système, multipliés par l'aire relative engendrée par la droite qui les joint, est identiquement nulle.*

On peut mettre l'égalité (12) sous la forme

$$(-m)(m_1\mathrm{S}_{01} + m_2\mathrm{S}_{02} + \cdots + m_{12}\mathrm{S}_{02}) = \Sigma m_1 m_2 \mathrm{S}_{12},$$

la somme Σ étant étendue à toutes les combinaisons des indices 1, 2, ..., n, pris deux à deux. Cette formule établit une relation entre les aires relatives engendrées par les droites joignant, deux à deux, les masses d'un système mobile dans un même plan, et les aires relatives engendrées par les droites joignant ces points à leur centre de gravité.

8. Prenons $n = 3$, et supposons le triangle $M_1M_2M_3$ de forme invariable. Les aires S_{01}, S_{12}, ... sont alors proportionnelles aux carrés des droites MM_1, M_1M_2, ..., et les masses m, m_1, m_2, m_3 sont proportionnelles aux aires

$$M_1M_2M_3, \quad -M_2M_3M, \quad M_3MM_1, \quad -MM_1M_2. \tag{13}$$

L'équation (12), dans ce cas, équivaut à celle-ci :

$$\Sigma \pm M_1M_2M_3 \,.\, M_2M_3M \,.\, \overline{MM_1}^2 = 0.$$

Désignons par R, R_1, R_2, R_3 les rayons des cercles circonscrits aux triangles $M_1M_2M_3$, M_2M_3M, M_3MM_1, MM_1M_2, ces rayons ayant les mêmes signes que les termes correspondants de la ligne (13). Nous pouvons alors écrire

$$MM_1 \,.\, M_2M_3(RR_1 + R_2R_3) + MM_2 \,.\, M_1M_3(RR_2 + R_1R_3) \\ + MM_3 \,.\, M_1M_2(RR_3 + R_1R_2) = 0.$$

Lorsque le quadrilatère $MM_1M_2M_3$ est inscriptible à un cercle, on retrouve un Théorème de Ptolémée.

EXPÉRIENCES

SUR

L'INTENSITÉ RELATIVE DES HARMONIQUES

DANS LES TIMBRES DE LA VOIX,

FAITES

AU LABORATOIRE DE PHYSIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

PAR

M. F. V. DWELSHAUVERS,

EN COLLABORATION

avec M. F. DERUYTS, sous la direction de M. PÉRARD.

EXPÉRIENCES

SUR

L'INTENSITÉ RELATIVE DES HARMONIQUES

DANS LES TIMBRES DE LA VOIX,

FAITES

AU LABORATOIRE DE PHYSIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

Les premiers essais, commencés dans le mois d'octobre 1888, au laboratoire de physique du doctorat, ont été dirigés comme suit :

On a cherché à produire les voyelles et les combinaisons de voyelles :

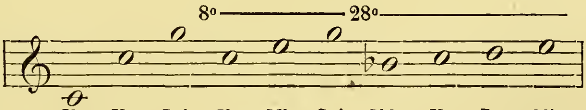
a, é, è, i, o, u, ou, eu,

au moyen de l'appareil de Helmholtz, composé de diapasons vibrant suivant les harmoniques d'un son donné et munis de résonnateurs appropriés, appareil antérieurement exécuté par M. Koenig (*).

Les dix diapasons dont se compose cet appareil sont accordés sur les notes suivantes :

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Not. musicale.



Not. française.	Ut$_2$	Ut$_3$	Sol$_3$	Ut$_4$	Mi$_4$	Sol$_4$	Si b.$_4$	Ut$_5$	Re$_5$	Mi$_5$
Not. adoptée .	C$_2$	C$_3$	G$_3$	C$_4$	E$_4$	G$_4$	B$_4$	C$_5$	D$_5$	E$_5$

(*) Helmholtz, *Théorie physiologique de la Musique,* trad. fr., chap. VI, et *Suppl.,* VII.

On voit que notre notation s'approche de la notation allemande. La notation française se trouve inscrite sur l'instrument même. Le moteur est à l'unisson de C_2.

L'addition des deux harmoniques D_5 et E_5 a eu une grande influence sur certains de nos essais. Ces harmoniques étaient absents de l'appareil employé d'abord par M. Helmholtz, et c'est dans cette circonstance que réside en partie l'intérêt de nos expériences.

Dans nos premiers essais, nous avons voulu, pour éviter l'influence des préventions, faire des combinaisons quelconques des harmoniques, et tâcher de déterminer à quelle voyelle, simple ou composée, se rapportait le mieux chaque combinaison. Mais aucune des personnes de l'assistance n'a pu, d'une façon satisfaisante, pénétrer la confusion qui régnait dans ces combinaisons faites au hasard.

Nous avons reconnu que le manque de guide était la cause de cet échec, et nous avons recherché la direction nécessaire dans un travail analytique préalable.

Nos analyses ont été faites au moyen des résonnateurs correspondant aux capsules manométriques de M. Koenig (*) et dont les flammes de gaz étaient observées par la méthode des miroirs tournants. Cet appareil, composé de huit résonnateurs, est accordé suivant les notes C_2, C_3, G_3, C_4, E_4, G_4, B_4 et C_5. Il manque donc des deux harmoniques D_5 et E_5 que nous avons reconnus importants dans la suite.

Pour faire les expériences, je me plaçais en face de l'appareil et, avec ma voix de basse, j'attaquais fortement C_2. Deux observateurs, M. Pérard et mon ami M. Fr. Deruyts, ont bien voulu noter l'état des flammes pendant la tenue des sons, l'un étant

(*) Wüllner, 4e éd., I, p. 726, fig. 262.

chargé des quatre flammes inférieures, l'autre des quatre flammes supérieures. Les résultats ont été exprimés par un coefficient donné au juger et proportionnel à l'ampleur plus ou moins grande des vibrations des flammes, c'est-à-dire à la longueur des dents ou franges des bandes lumineuses vues dans les miroirs tournants.

Nous avons deux remarques à faire sur cette façon d'observer :

1° Une voix de basse attaquant C_2, chante dans le registre supérieur, qualifié de *voix mixte*, par opposition à la *voix de poitrine*, qui ne s'étend généralement que jusqu'à B_1, soit un ton plus bas que C_2. Il serait intéressant de faire les mêmes analyses sur une voix de ténor, pour laquelle le changement de registre se trouve vers E_2, c'est-à-dire que C_2 serait attaqué en poitrine;

2° Les coefficients marqués à la vue des flammes sont de simples qualifications approximatives, des renseignements pour opérer ensuite sur l'appareil d'Helmholtz.

Voici les résultats moyens obtenus :

Voyelle prononcée.	C_2	C_3	G_3	C_4	E_4	G_4	B_4	C_5
a	1	3	1	3	2	2	1	2
é	1	4	1	2	1	2	1	1
i	1	3	1	2	0	0	0	1
o	2	5	1	3	3	2	1	2
u	1	4	1	2	1	1	1	1
è	2	4	2	4	2	1	1	1
ou. . . .	1	3	2	1	2	0	1	1

D'après ce tableau, on voit que presque tous les huit harmoniques de l'instrument concourent en général à la formation du timbre d'une voyelle et que les différences ne proviennent que des différences d'intensités des divers harmoniques. Chose remarquable, le son fondamental a donné toujours un résultat très faible, ce qui nous force à admettre que ce qui frappe le plus dans la voix, ce sont les harmoniques et non la note chantée. Comme l'addition d'harmoniques supérieurs a pour effet de rendre le timbre plus mordant, comme on le verra plus loin, et que la voix parlée est, en général, bien plus mordante que la voix chantée, employée dans ces expériences, nous sommes induits à croire que ce qui empêche de bien distinguer les notes sur lesquelles notre discours est parlé, c'est non seulement que ces notes ne font pas en général partie de la gamme chromatique, mais encore que *l'intensité du son fondamental est peu appréciable en présence de celle des harmoniques et surtout des harmoniques supérieurs.* Nous croyons cette observation nouvelle et nous nous réservons d'en tirer certaines conclusions relatives à l'étude du chant.

Les résultats précédents sont ceux qui nous ont guidé dans la suite de nos premières expériences.

L'importance de *l'intensité* des harmoniques étant rendue évidente, nous avons voulu déterminer d'une manière fixe la puissance relative des divers harmoniques employés dans l'appareil de Helmholtz. A cet effet, nous nous sommes servi des résonnateurs correspondant aux diapasons, en laissant toujours leurs ouvertures complètement découvertes, mais en réglant les distances des résonnateurs aux diapasons. Nous avons adapté aux planchettes qui supportent les résonnateurs de petites règles, divisées en millimètres, et dont le zéro correspond à la position la plus rapprochée possible, position qui est, du reste, arbitraire et qui dépend seulement de la construction de l'appareil. En mesurant ainsi les distances des résonnateurs aux diapasons, préparés à l'obtention d'un certain effet, on a des points de repère fixes pour l'intensité de chaque son.

Voici les différents résultats obtenus :

N°	DISTANCES DES RÉSONNATEURS AUX DIAPASONS.										CONSONNANCES ENTENDUES.
	C_2	C_3	G_3	C_4	E_4	G_4	B_4	C_5	D_5	E_5	
1	48	21	25	0	0	14	17	16,5	∞	∞	o.
2	61	0	5	1	0	0	14	0	∞	∞	ô ou â.
3	61	0	5	1	0	0	14	0	0	0	a.
4	50	8	25	25	17	0	∞	21	∞	∞	ou.
5	80	11	3	30	22	7	21	10	∞	∞	eu ou ö.
6	65	3	0	8	25	25	25	25	∞	∞	e (muet).
7	60	15	13	35	14	∞	14	0	∞	∞	è.
8	80	25	40	31	18	21	18	19	∞	∞	é.
9	66	26	31	22	∞	∞	∞	15	∞	∞	i.
10	65	0	30	10	25	25	25	25	∞	∞	u.

Le signe ∞ marque que l'on arrêtait le fonctionnement du diapason en dérivant le courant.

Nous avons les remarques suivantes à faire sur ces résultats :

1. L'expérience n° 1 a donné un *o* faible, mais semblable comme timbre à celui que comportent les mots : *o*s, *o*stracisme, p*o*rte, c*o*mme.

Remarquons l'intensité relativement considérable du 7ᵉ harmonique dans cette combinaison.

2 et 3. Ces expériences présentent un intérêt particulier. Le son fondamental étant étouffé et, au contraire, les harmoniques inférieurs, jusque et y compris le 8ᵉ, sonnant fortement, sauf le 7ᵉ, on obtient un $\widehat{o\text{-}a}$ très sombre, assez semblable à l'*a* du mot affect*a*tion prononcé d'une manière très affectée, et à certaines prononciations défectueuses du mot allemand *Ia,* se rapprochant de *Io*.

Si l'on fait entrer D_5 et E_5 ensemble dans la combinaison, et aussi fort que possible, le timbre change et l'on entend un *a* bien franc, comme dans p*a*rtir, rég*a*l, f*a*t*a*l. Voilà donc la confirmation de l'existence d'harmoniques supérieurs dans certaines voyelles. Pour notre part personnelle, nous pensons que des harmoniques plus élevés encore que le 10^e entrent dans la composition de la plupart des timbres et surtout des timbres stridents. Les 11^e, 12^e, 13^e, 14^e et 15^e harmoniques seraient peut-être indispensables pour produire un son perçant. Dans le cas présent surtout, ils se trouveraient dans une région à laquelle notre oreille semble particulièrement sensible.

4. L'*ou* normal comporte les 2^e et 8^e harmoniques fortement, avec renforcement du son fondamental. Ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer, *ou* est la syllabe la plus pauvre en harmoniques, surtout lorsqu'il est un peu sombre.

5. Le mot allemand *hören* marque le mieux la qualité de l'*eu* que nous avons obtenu. Cette syllabe est caractérisée par les 3^e et 6^e harmoniques.

6. On remarque les analogies de *eu* et de *e* (muet). On passe de l'un à l'autre en renforçant les 2^e et 4^e harmoniques, ainsi qu'en diminuant le 6^e et le 8^e. On obtient ainsi l'*e* des mots d*e*, qu*e*. En somme, les harmoniques caractéristiques de cette voyelle sont les 2^e, 3^e et 4^e.

7. *è* semble une consonnance assez mal déterminée, tant dans le langage que par les décompositions en harmoniques. L'addition d'harmoniques supérieurs serait peut-être utile pour rendre ce timbre mordant. Les indications notées se rapportent à un *è* un peu sombre, comme ceux de p*è*re, m*aî*tre (par opposition à p*ai*r, m*e*ttre).

8. Le son *é* comprend les harmoniques supérieurs plus fortement donnés que les inférieurs. Ce fait semble se répéter dans les voyelles dites fermées et trouver son explication dans les résonnances buccales (*) propres aux différentes voyelles, ainsi que dans les positions de la bouche pour les prononcer.

9. On obtient *i* en isolant le 8^e harmonique parmi les supérieurs et en donnant faiblement les harmoniques inférieurs.

10. *u* s'obtient par le renforcement des harmoniques 2^e et 4^e.

(*) Violle, *Cours de Physique*, II, p. 299.

Remarques générales.

Nous avons pu, au moyen des repères numériques adoptés, faire certaines comparaisons fructueuses sur l'intensité relative des harmoniques dans les timbres de la voix. La question nous semblerait résolue si l'on parvenait à exprimer par une mesure certaine l'intensité des sons. On pourrait prendre pour base de cette mesure le *travail* nécessaire pour obtenir un son d'intensité donnée, c'est-à-dire pour faire vibrer avec une certaine intensité l'air atmosphérique à une pression donnée (*). Ce *travail acoustique* pourrait être ensuite exprimé en unités de chaleur, comme on a coutume de le faire pour un travail mécanique quelconque. Pour unité de travail acoustique, on prendrait alors l'intensité sonore correspondant à une fraction suffisamment petite de calorie.

C'est vers ce but que les tentatives doivent être à présent dirigées. Les distances des résonnateurs indiquant des repères pour l'intensité des sons, si cette intensité était exprimée en nombre, on pourrait reproduire toujours un timbre connu par ses harmoniques, ce qui complèterait l'étude du timbre.

Les harmoniques 9 et 10 n'ont été employés que pour la voyelle *a*, quoique nous en ayions parlé au sujet de *è*; nous croyons qu'ils entrent, ainsi que les supérieurs, dans maintes autres voyelles. La question reste ouverte et sera résolue peut-être en surmontant quelques difficultés expérimentales.

Nous croyons qu'il serait avantageux d'accorder la fondamentale plus bas que C_2, par exemple sur C_1 ou B_0, comme l'avait fait M. Helmholtz. Ce qui nous ferait préférer B_0, c'est que les résonnances buccales, pour la plupart des voyelles, sont approchantes de B_0, B_1, etc. (**).

(*) Violle, *loc. cit.*, p. 291.
(**) Idem, *ibid.*, p. 299.

L'analyseur, composé du même nombre de résonnateurs que l'autre appareil, et par exemple de 14 ou 15, serait d'ailleurs accordé au même ton. Enfin, les analyses seraient faites sur un grand nombre de voix. Dans le cas où l'on choisirait B_0, ces voix seraient forcément des basses-tailles; dans le cas de B_1, on pourrait prendre indifféramment des basses, des ténors et même des altos (voix graves de femmes).

Nous espérons pouvoir étudier d'une façon approfondie certaines parties de ces questions.

Liège, 6 décembre 1888.

REMARQUES

SUR UNE

TRANSFORMATION QUADRATIQUE

BIRATIONNELLE RÉCIPROQUE

PAR

M. d'OCAGNE,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

REMARQUES

SUR UNE

TRANSFORMATION QUADRATIQUE

BIRATIONNELLE RÉCIPROQUE.

1. La transformation que nous avons en vue est la suivante : *A chaque point* M *du plan on fait correspondre un point* M′ *tel que le segment* MM′ *soit vu de deux points fixes* A *et* B *sous des angles droits.*

On peut généraliser cette transformation de diverses manières, par exemple en supposant les angles MAM′ et MBM′ constants sans être droits. Nous avons, pour cette dernière transformation, fait connaître (*) la façon dont sont liées la normale en un point d'une courbe et la normale au point correspondant de la transformée. Mais cette transformation généralisée n'est plus réciproque (**).

2. Voici une manière de généraliser la transformation ci-dessus définie en conservant la propriété de la réciprocité :

Remarquons d'abord que la définition peut être ainsi énoncée :

Le transformé M′ *de* M *est le point diamétralement opposé au point* M *dans le cercle passant par les points* M, A *et* B.

(*) *Journ. de Math. spéc.*, 1888, p. 202.

(**) C'est par inadvertance que le mot *réciproque* figure dans le titre de la Note citée. Ce mot n'est d'ailleurs pas prononcé dans le corps de la Note.

3. Dès lors, la généralisation dont nous voulons parler s'offre d'elle-même par application de la méthode homographique et la définition à laquelle on est conduit est la suivante :

Étant donnés, dans un plan, quatre points fixes A, B, C, D, *on prend un point* M *quelconque et, par ces cinq points, on fait passer une conique* σ; *la droite, qui joint le point* M *au pôle de* CD *relativement à* σ, *coupe cette conique en un second point* M' *qui est pris pour transformé de* M.

4. Pour déduire les propriétés de cette transformation de celles de la transformation définie au n° **2**, il est bon de mettre celles-ci sous une forme qui se prête aisément à l'application de la méthode homographique.

Par exemple, la liaison géométrique entre deux normales correspondantes, dont nous avons parlé plus haut, se prêterait mal à cette application, mais on peut y substituer la relation entre les tangentes, que nous allons établir ici.

Les points M et M' étant diamétralement opposés dans le cercle c, on voit bien aisément que l'on a, en prenant pour axe des x la droite AB, pour axe des y la perpendiculaire élevée en son milieu O, désignant par (x, y), (x', y') les coordonnées des points M et M', et posant $AB = 2a$,

$$x + x' = 0, \tag{1}$$

$$xx' + yy' + a^2 = 0. \tag{2}$$

De ces équations on déduit immédiatement

$$y\frac{dy'}{dx'} + x = y'\frac{dy}{dx} + x',$$

égalité qui prouve que *la perpendiculaire abaissée de* M' *sur la tangente en* M *à une courbe décrite par ce point et la perpendiculaire abaissée de* M *sur la tangente en* M' *à la transformée de cette courbe, se coupent sur la droite* AB.

Résultat qui peut encore s'énoncer ainsi :

Si les tangentes en M *et en* M' *à deux courbes transformées* *l'une de l'autre coupent le cercle* c *respectivement aux points* T *et* T′, *les droites* MT′ *et* M′T *se coupent sur la droite* AB.

Ayant mis la relation entre les tangentes MT et M′T′ sous cette forme, il suffit de remplacer dans cet énoncé le cercle c par la conique σ de la définition du n° **3** pour avoir le mode de liaison des tangentes dans la transformation généralisée.

5. Comme autre exemple de généralisation, étudions les transformées de droites.

Dans la transformation du n° **2**, on voit qu'à la droite

$$Ax + By + C = 0$$

correspond la conique

$$Bx^2 - Axy + Cy - Ba^2 = 0.$$

Donc, à une droite quelconque correspond une conique passant par les points A et B et ayant une asymptote perpendiculaire à AB.

On voit, en outre, bien aisément que les asymptotes de cette conique sont, en appelant I le point où la droite d donnée coupe AB et I′ le symétrique de I par rapport au milieu de AB, la perpendiculaire élevée à d en I et la perpendiculaire élevée à AB en I′.

Transformant ces résultats par homographie, en remarquant que deux droites rectangulaires sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes issues de leur point de concours, on a les propositions suivantes :

Dans la transformation du n° **3**, la transformée d'une droite d est une conique k passant par trois points fixes, qui sont les points A, B et le point F, conjugué harmonique, par rapport à C et D, du point E où AB coupe CD. En outre, si J est le point où la droite d coupe CD, I le point où la droite d coupe AB, O le conjugué harmonique de E par rapport à A et B, I′ le conjugué harmonique de I par rapport à O et E, la conique k coupe la droite CD en un second point H, qui est le conjugué harmonique de J par rapport à C et D, et les tangentes à la conique k en F et en H sont les droites FI′ et HI.

6. La définition du n° **2** a encore l'avantage de se prêter à une extension à la géométrie de l'espace. Elle conduit, en effet, immédiatement à la transformation suivante :

On prend pour transformé du point M *le point* M' *diamétralement opposé au premier dans la sphère* s *passant par le point* M *et un cercle fixe* Γ *donné dans l'espace.*

Prenons pour plan des xy le plan du cercle Γ, pour axe des z la perpendiculaire élevée à ce plan par le centre O de ce cercle. Appelant (x, y, z) les coordonnées du point M, (x', y', z') celles du point M', on voit bien aisément que

$$x + x' = 0, \tag{3}$$

$$y + y' = 0, \tag{4}$$

$$xx' + yy' + zz' + a^2 = 0, \tag{5}$$

a étant le rayon du cercle Γ.

Pour plus de simplicité dans le langage, nous admettrons dans ce qui suit que le plan xOy soit pris pour plan horizontal, Oz étant par suite vertical.

Les équations (3) et (4) expriment que *les projections horizontales de deux courbes transformées l'une de l'autre sont symétriques par rapport au point* O.

Par suite, si une courbe est tracée sur un cylindre vertical dont la base ait le point O pour centre, la transformée de cette courbe se trouve aussi sur ce cylindre.

7. Supposons que le point M décrive une courbe quelconque μ; le point M' décrit la courbe transformée μ'. Cherchons comment sont liées les tangentes correspondantes des courbes μ et μ'.

La différentiation des équations (3), (4) et (5) donne

$$dx + dx' = 0, \tag{6}$$

$$dy + dy' = 0, \tag{7}$$

$$x\,dx' + x'dx + y\,dy' + y'dy + z\,dz' + z'dz = 0. \tag{8}$$

Les équations (6) et (7) montrent que *les projections horizontales des tangentes correspondantes sont parallèles*, ce qui était bien évident après ce que nous avons dit au numéro précédent.

Pour interpréter l'équation (8), remarquons que l'orientation des axes Ox et Oy étant quelconque dans le plan du cercle Γ, nous pouvons prendre l'axe Oy parallèle aux projections des tangentes correspondantes sur le plan de ce cercle. Dans ces conditions, on a, pour la position considérée, $dx = 0$, $dx' = 0$, et l'équation (8) devient

$$y dy' + y' dy + z dz' + z' dz = 0. \tag{8'}$$

De cette équation et de (7) on tire

$$z \frac{dz'}{dy'} + y = z' \frac{dz}{dy} + z,$$

égalité qui montre que si, *par les projections* m *et* m' *des points* M *et* M' *sur le plan* zOy *qui vient d'être défini, on abaisse des perpendiculaires sur les projections des tangentes en ces points, ces perpendiculaires se coupent sur l'axe* Oy.

Les résultats précédents peuvent encore s'énoncer ainsi :

Soient, aux points correspondants M *et* M' *de deux courbes gauches transformées l'une de l'autre,* MT *et* M'T' *les tangentes, qui coupent la sphère* s *respectivement aux points* T *et* T' : 1° *les tangentes* MT *et* M'T' *sont parallèles à un même plan vertical* v; 2° *la droite d'intersection des plans menés par* MT' *et* M'T *perpendiculairement à* v, *se trouve dans le plan du cercle* Γ.

8. Supposons maintenant qu'au lieu de faire décrire au point M une courbe gauche, on lui fasse décrire une surface. Pour déduire du plan tangent π au point M le plan tangent π' au point M', il suffira de déduire de deux tangentes quelconques MT et MT_1 contenues dans le plan π les tangentes correspondantes M'T' et $M'T'_1$ par l'emploi du théorème précédent.

Il sera généralement avantageux de prendre pour MT et MT_1 les intersections du plan π par le plan vertical passant par MM', et par le plan tangent en M à la sphère s, parce qu'alors d'une part MT' et $M'T$, toutes deux contenues dans le plan vertical de MM', se coupent sur l'intersection de ce plan et du plan du cercle Γ, de l'autre, MT_1 et $M'T'_1$ sont parallèles.

9. Nous généraliserons cette transformation comme nous avons fait de celle du plan. Nous aurons ainsi la suivante :

On donne dans l'espace deux coniques Γ *et* Δ *provenant de l'intersection d'une même quadrique par les plans* γ *et* δ; *par ces coniques et par le point* M, *on fait passer une quadrique* Σ *et on prend le point d'intersection* M' *de cette quadrique et de la droite qui joint le point* M *au pôle du plan* δ *relativement à la quadrique. Le point* M' *est le transformé du point* M.

10. Voyons comment sont liées les tangentes aux points M et M' correspondants de deux courbes transformées l'une de l'autre.

Pour cela rappelons que si le plan P' est perpendiculaire au plan P et que, par une transformation homographique on fasse correspondre à ces plans les plans P_1 et P'_1, le cercle de l'infini du premier espace étant transformé en une conique Δ du second, située dans un plan δ, le plan P'_1 passe par le pôle relativement à Δ de la droite d'intersection des plans P_1 et δ.

Par application de cette remarque, on transforme le théorème du n° **7** de la manière suivante :

Soient MT *et* $M'T'$ *les tangentes correspondantes, qui coupent la quadrique* Σ *respectivement aux points* T *et* T'; *soit en outre* Ω *le pôle relativement à* Δ *de la droite d'intersection* ω *des plans* γ *et* δ : 1° *les tangentes* MT *et* $M'T'$ *rencontrent le plan* δ *en des points* τ *et* τ' *qui sont en ligne droite avec* Ω ; 2° *si* X *est le pôle relativement à* Δ *de la droite* $\tau\tau'$ (*point qui se trouve nécessairement sur* ω), *la droite d'intersection des plans menés par le point* X *et respectivement par les droites* MT' *et* $M'T$, *se trouve dans le plan* γ.

11. Supposons maintenant que le point M décrive une surface dont π soit le plan tangent, π' étant le plan tangent à la surface transformée, au point M' correspondant.

Par transformation de la construction indiquée au n° **8**, on voit que si les intersections MT et M'T' des plans π et π' avec le plan MM'Ω coupent la quadrique Σ aux points T et T', les droites MT' et M'T se coupent sur l'intersection des plans MM'Ω et γ, et que les intersections des plans π et π' respectivement avec les plans tangents à Σ en M et en M' se rencontrent dans le plan δ.

12. Nous pouvons, au moyen de ce qui a été dit au n° **5**, étudier les transformées de plans dans la transformation dont nous nous occupons ici.

Tout d'abord, il est bien clair, puisque la transformation est quadratique, que ces transformées sont des quadriques ; mais, comme trois conditions déterminent un plan et qu'il en faut neuf pour déterminer une quadrique, ces quadriques transformées de plans devront satisfaire à six conditions communes que nous allons rechercher.

Pour cela, prenons le pôle O de la droite ω par rapport au cercle Γ et coupons le plan p donné qu'il s'agit de transformer par des plans contenant tous la droite OΩ. Chacun de ces plans coupera le plan p et sa transformée q suivant une droite d et une conique k; celle-ci sera, suivant le mode du n° **5**, la transformée de la droite d. Donc, si A et B sont les points d'intersection du plan auxiliaire choisi avec la conique Γ, C et D ses intersections avec la conique Δ, la conique k passe par les points A et B, et aussi par le point Ω, qui, étant le pôle de la droite ω par rapport à Δ, se trouve être le conjugué harmonique par rapport à C et D du point E où le plan auxiliaire ABCD rencontre ω.

Lorsque ce plan auxiliaire varie, le point Ω reste fixe, les points A et B décrivent la conique Γ; donc la quadrique q passe par le point Ω et par la conique Γ, et voilà justement les six conditions cherchées.

Ainsi :

Toutes les quadriques transformées de plans passent par la conique Γ *et par le pôle* Ω, *relativement à la conique* Δ, *de la droite d'intersection des plans* γ *et* δ *contenant les coniques* Γ *et* Δ.

Cherchons maintenant, pour un plan p particulier, à déterminer complètement la quadrique transformée q. Revenons pour cela à la coupe faite par le plan auxiliaire ABCD.

La conique k passe, avons-nous vu au n° **5**, par le conjugué harmonique H relativement à C et D du point J où la droite d rencontre la droite CD. De plus I étant le point où cette droite rencontre la droite AB, I′ le conjugué harmonique de I par rapport à O et E, la tangente en H à la conique k est la droite ΩI′.

Lorsqu'on fait varier le plan auxiliaire ABCD, le point J décrit la droite d'intersection du plan p et du plan δ; donc le point H décrit une conique δ' qui passe évidemment par le point Ω et qui constitue l'intersection de la quadrique q par le plan δ.

En outre, le point I décrit la droite d'intersection du plan p et du plan γ. Soient U et V les points où cette droite coupe la conique Γ. Si les droites OU et OV rencontrent cette conique aux points U′ et V′, il est bien évident que le lieu du point I′ est la droite U′V′. Par suite, le plan tangent en Ω à la quadrique q contient la droite U′V′.

La quadrique q, passant par les coniques γ et δ, et ayant pour plan tangent au point Ω le plan ΩU′V′, est complètement déterminée.

13. Remarquons, pour terminer, que toutes les considérations qui précèdent peuvent être étendues à l'hyperespace où la transformation analogue à celles des n^{os} **2** et **6** est définie par les relations

$$\begin{gathered} x + x' = 0, \\ y + y' = 0, \\ z + z' = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t + t' = 0, \\ xx' + yy' + zz' + \cdots + tt' + uu' + a^2 = 0. \end{gathered}$$

Mais nous n'insisterons pas sur ce sujet.

REMARQUES

SUR UNE

TRANSFORMATION QUADRATIQUE

PAR

M. J. NEUBERG,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

REMARQUES

SUR UNE

TRANSFORMATION QUADRATIQUE.

Soient a et a', b et b' les côtés de deux angles de grandeur constante, situés dans un même plan et mobiles autour de leurs sommets A, B.

Si l'on fait passer les côtés a, b par un point donné M et qu'alors les côtés a', b' se coupent au point M', nous pouvons considérer les points M, M' comme des éléments homologues de deux figures φ, φ'.

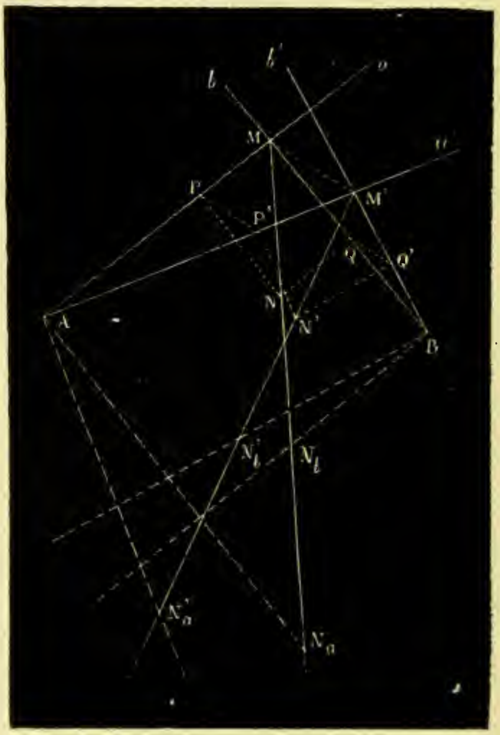
La transformation ainsi définie (*) vient d'être étudiée par M. d'Ocagne (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, t. XVI). Nous allons présenter quelques nouveaux développements sur le même sujet.

1. Soient μ, μ' deux courbes décrites simultanément par les points M, M'; désignons par d, d' les tangentes à ces lignes, par n, n' les normales. Supposons connue la droite d, et cherchons la ligne d' en appliquant la méthode de Roberval. Pour simplifier les constructions, nous faisons tourner toutes les vitesses d'un angle droit autour de leurs points d'application.

(*) Steiner s'en est servi pour étudier les faisceaux de coniques (voir Steiner-Schröter, *Théorie des sections coniques*, chap. III); il la qualifiait plaisamment de *machine à vapeur*. Nous avons emprunté à l'éminent géomètre une partie des développements contenus dans les §§ 2 et 3 de notre Note.

La vitesse de M étant représentée par un segment quelconque MN de la normale n, menons NP, NQ perpendiculaires à MA, MB ; les vitesses de circulation de M autour des pôles A, B seront MP, MQ.

Les droites AM et AM′, BM et BM′ ayant même vitesse angulaire, nous obtenons les vitesses de circulation de M′ relatives aux mêmes pôles, en menant PP′, QQ′ parallèles à MM′. Si, maintenant, les perpendiculaires élevées en P′ sur AM′, en Q′ sur BM′ se rencontrent en N′, M′N′ est la vitesse de M′ et la normale n' est dirigée suivant M′N′.



Soient N_n, N_t les points de rencontre de n avec les perpendiculaires élevées en A sur MA, en B sur MB ; nous appellerons les droites MN_n, MN_t les *normales polaires* de μ. Soient aussi

$M'N'_a$, $M'N'_b$ les normales polaires de μ'. Des proportions

$$\frac{MN}{MN_a} = \frac{MP}{MA} = \frac{M'P'}{M'A} = \frac{M'N'}{M'N'_a},$$
$$\frac{MN}{MN_b} = \frac{MQ}{MB} = \frac{M'Q'}{M'B} = \frac{M'N'}{M'N'_b},$$

on déduit

$$\frac{MN_a}{M'N'_a} = \frac{MN_b}{M'N'_b}, \tag{1}$$

égalité qu'on peut tirer immédiatement des formules de M. Mannheim.

Donc *les normales polaires de μ' relatives aux pôles* A, B *sont dans le même rapport que celles de μ.*

Appelons N_i, N'_i les points situés à l'infini sur n, n'; la proportion (1) peut prendre la forme

$$(MN_aN_bN_i) = (M'N'_aN'_bN'_i).$$

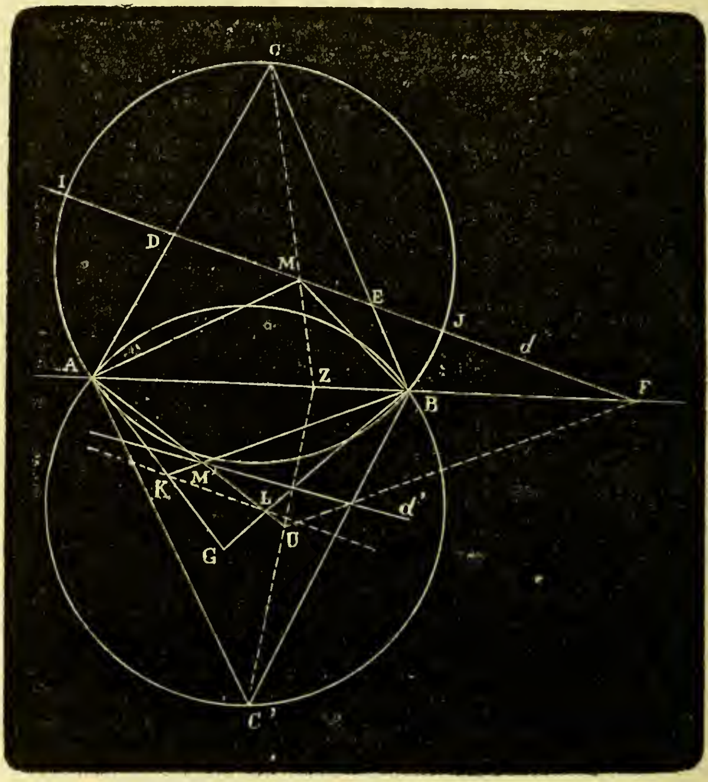
Donc, si l'on projette les deux quaternes $MN_aN_bN_i$, $M'N'_aN'_bN'_i$ à partir de deux points qui sont en ligne droite avec deux points homologues de ces quaternes, on obtient deux faisceaux perspectifs.

Par exemple, les points de rencontre des couples de droites $(M'N_a, MN'_a)$, $(M'N_b, MN'_b)$, $(M'N_i, MN'_i)$ sont en ligne droite. Dans le cas général, ce résultat ne peut servir à construire la ligne n'. Mais, lorsque les angles aa', bb' sont droits, il renferme cette élégante proposition due à M. d'Ocagne : *Les perpendiculaires abaissées de* M *sur* d', *et de* M' *sur* d *se coupent sur la ligne des pôles* AB; d'où un procédé pour déterminer n'.

On obtient un résultat qui est pratique dans tous les cas, en projetant les deux quaternes à partir des points situés à l'infini sur AN_a, AN'_a, ce qui conduit au théorème suivant : *les perpendiculaires menées par* M *et* N_b *sur* MA *rencontrent, respectivement, les perpendiculaires menées par* M' *et* N'_b *sur* M'A, *en deux points qui sont en ligne droite avec* A (*).

(*) Comparer l'article de M. d'Ocagne dans le *Journal de Math. spéc.*, 1888, p. 202.

2. Lorsque le point M se meut sur une droite quelconque d, les rayons AM, BM engendrent deux faisceaux homographiques (a), (b); les droites AM', BM' sont des rayons homologues de deux faisceaux (a'), (b'), égaux aux précédents. Par conséquent, le point M' engendre, en général, une conique Δ' (*). La transformation que nous étudions ici est donc *quadratique* (**). Cherchons-en les *éléments principaux*.



(*) Ce théorème a été donné par Newton sous le titre de *Description organique des coniques*.

(**) Pour les transformations quadratiques, le lecteur peut consulter un article de M. Hirst dans les *Nouvelles Annales*, 1866, p. 213, ou un exposé de la théorie par M. Servais dans *Mathesis*, t. VII et VIII.

Les rayons a', b' coïncident, et le point M′ devient indéterminé, lorsque M se confond avec le sommet C d'un triangle CAB, dont les angles à la base sont égaux aux angles mobiles aa', bb'. De même, si M est un point quelconque de la droite AB, M′ se confond avec le symétrique C′ de C par rapport à AB. Plaçons M en A; alors le rayon a est indéterminé, et b coïncide avec BA; par suite, M′ est un point quelconque de la droite BC′.

Il ressort de là que les points A, B, C sont des points de φ dont les éléments correspondants sont un point quelconque des droites BC′, C′A, AB; de même, aux sommets du triangle ABC′, considérés comme appartenant à φ', correspondent, dans φ, les côtés opposés du triangle ABC. ABC et ABC′ sont donc les *triangles principaux* de la transformation.

Une droite quelconque d rencontre AC, BC, AB en trois points D, E, F dont les homologues sont B, A, C′; donc la conique Δ', transformée de d, est circonscrite au triangle principal ABC′. On sait que la tangente en B est la position du rayon b' qui correspond à a' confondu avec AB; cette droite, que nous désignons par BG, fait donc avec BD l'angle bb'. De même, la tangente AG menée en A fait avec AE l'angle aa'.

Par analogie, la tangente en C′ à Δ' est la transformée de la droite CF; c'est ce qu'on peut confirmer par un raisonnement direct. D'abord, lorsque les rayons a, b se coupent constamment sur la droite CF, les faisceaux projectifs correspondants (a'), (b') ont le rayon uni AB; ils sont donc perspectifs et le point M′ décrit une droite passant par C′, homologue de F. Ensuite, si l'on considère un point M mobile sur la droite DEF, les quatre droites AM, CM, AM′, C′M′ se correspondent dans quatre faisceaux projectifs; la tangente en C′ à Δ' correspond au rayon AM′ confondu avec AC′, ce qui fait coïncider AM avec AB, M avec F, CM avec CF.

On vient de voir que toute droite CF menée par C a pour transformée une droite menée par C′; nous faisons ici abstraction de la droite AB qui correspond au point C de CF. De même, on peut dire que toute droite a ou b, menée par A ou B dans la figure φ, a pour transformée le rayon correspondant a' ou b' du faisceau (a') ou (b').

3. Pour que les points M, M′ coïncident, les droites AM, BM doivent être des rayons doubles des faisceaux projectifs égaux (a) et (a'), (b) et (b'). Soient ω, ω' les points cycliques du plan ABC. Notre transformation a deux *points doubles* en ω, ω' et deux autres points doubles à l'intersection des couples $A\omega$ et $B\omega'$, $A\omega'$ et $B\omega$.

La droite de l'infini passant par les points doubles ω, ω', sa transformée est une conique passant par les mêmes points. Donc cette droite, étant considérée dans l'une des figures φ, φ', correspond, dans l'autre figure, à la circonférence ABC′ ou à la circonférence ABC (*). Désignons les cercles circonscrits aux triangles principaux par Σ et Σ'.

Supposons qu'une droite d rencontre Σ en deux points réels I, J. La conique correspondante Δ' sera une hyperbole dont les asymptotes font avec les droites AI, AJ un angle égal à aa'; car, lorsque a et b coïncident avec AI, BI (ou avec AJ, BJ), les rayons a', b' sont parallèles entre eux. En particulier, les diamètres de Σ se transforment en des hyperboles équilatères. Si la corde IJ se déplace dans la circonférence Σ en conservant une longueur constante, l'angle des asymptotes de l'hyperbole correspondante Δ' reste invariable. On énonce ce résultat sous une forme plus générale en disant que toutes les droites enveloppant un cercle concentrique avec Σ, se transforment en des coniques semblables. Pour que les coniques Δ' aient un axe de symétrie, de direction constante, la bissectrice de l'angle IAJ doit être fixe; donc la droite d doit avoir une direction constante.

La tangente en un point I de Σ se transforme en une parabole dont des diamètres sont parallèles au rayon a' qui correspond à a confondu avec AI.

4. Soit à trouver la tangente d' au point M′ de la conique Δ', transformée de la droite donnée d. Nous indiquons ici deux

(*) C'est ce qu'on peut voir directement : lorsque les rayons a et b sont parallèles, les rayons a' et b' font un angle constant.

solutions de ce problème (*); le lecteur en trouvera une troisième au § 6.

I. On sait déterminer les tangentes AG, BG aux points A, B de la courbe. Soient K, L les points de rencontre des couples de droites AG et BM′, BG et AM′ ; la droite KL coupe AB en un point appartenant à la tangente cherchée. En effet, le triangle inscrit ABM′ et le triangle circonscrit correspondant ont pour axe d'homologie la droite KL.

II. Le faisceau (d) des droites menées par M est homographique avec le faisceau (d') des tangentes menées par M′ aux coniques correspondantes.

Or, on connaît deux ternes homologues M (ABC), M′(ABC′); dès lors, on peut déterminer facilement deux rayons homologues quelconques d, d'. On coupe, par exemple, les deux faisceaux par les droites BA, BC′, ce qui donne deux ponctuelles perspectives; si CM rencontre AB en Z, que C′Z rencontre AM′ en U, U est le centre de perspective des deux ponctuelles, et les points d'intersection de d avec AB, de d' avec BC′, sont en ligne droite avec U.

5. Les triangles principaux ABC, ABC′ étant égaux, on peut les superposer, ce qui rend les figures φ, φ' *involutives*. Notre transformation est ainsi ramenée à une *inversion trilinéaire :* le point M et le symétrique M″ de M′ par rapport à AB sont des points *inverses* (*conjugués isogonaux*) par rapport au triangle ABC.

Ce résultat aurait pu nous dispenser de quelques détails donnés ci-dessus; mais nous avons préféré appliquer complètement la théorie générale des transformations quadratiques à un exemple bien choisi.

6. Passons au cas particulier où les angles aa', bb' sont droits. La transformation devient involutive ; les points C, C′ se transportent à l'infini dans la direction perpendiculaire à AB.

(*) La droite d peut être la tangente en un point donné M d'une courbe μ ; alors d' est la tangente au point correspondant M′ de la transformée de la courbe μ.

La construction de la tangente, que nous avons donnée ci-dessus, d'après M. d'Ocagne, pour ce cas particulier, peut également se déduire de la seconde méthode donnée au § 4. En effet, les perpendiculaires abaissées de M' sur les rayons du faisceau (d) et celles qui sont menées de M sur les rayons du faisceau (d') forment deux nouveaux faisceaux projectifs, qui sont même perspectifs; car trois couples de rayons homologues se coupent sur la droite AB, à savoir ceux qui correspondent aux ternes M(ABC), M'(ABC'). Donc si d et d' sont les tangentes à deux courbes décrites simultanément par les points M et M', les perpendiculaires abaissées de M et M', respectivement sur d' et d se coupent sur AB; autrement dit, l'orthocentre du triangle formé par d, d' et MM' est situé sur AB.

D'autres solutions du problème de la tangente résultent du pentagone de Pascal. On sait que dans tout pentagone simple 12345 inscrit à une conique, les points d'intersection des couples de côtés (12, 45), (23, 51) et le point de rencontre du côté 34 avec la tangente menée au sommet 1 sont situés en ligne droite. Appliquons ce théorème à la conique Δ', transformée de la droite d. Cette courbe est une hyperbole ayant deux points C', Q à l'infini dans les directions perpendiculaires à AB et d.

Considérant le pentagone simple M'C'ABQ, on voit que les perpendiculaires menées par A et M' sur AB, sont rencontrées par les perpendiculaires menées par M' et B sur d, en deux points qui sont en ligne droite avec le point où la tangente d' coupe AB.

Le pentagone M'AC'QB fournit cette autre construction : Marquez le point d'intersection X de M'B avec la perpendiculaire menée en A sur AB, ainsi que le point de rencontre Y de M'A avec la perpendiculaire abaissée de B sur d; la tangente cherchée est parallèle à la droite XY.

Si dans cette nouvelle solution on intervertit les rôles des points M, M', on trouve la règle suivante: Menez sur AB la perpendiculaire AZ, qui rencontre BM en Z; tirez par Z une parallèle à d, qui rencontre AM en U; la droite BU est perpendiculaire à la tangente menée par M' à Δ'.

7. La transformation traitée dans le paragraphe précédent se ramène facilement à une *inversion quadrique* de Hirst.

En effet, soit M_1 l'orthocentre du triangle ABM; les points M′ et M_1 sont symétriques par rapport au milieu de AB. Désignons par AA′, BB′, Mm les hauteurs du triangle ABM; les points A′, B′ se meuvent sur la circonférence Γ qui a pour diamètre AB. La droite MM_1 passe donc par un point fixe C, situé à l'infini sur la direction perpendiculaire à AB, et les points M, M_1 sont conjugués par rapport à Γ.

La seconde méthode exposée au § **5** conduit à une élégante construction de la tangente, due à M. de Longchamps (*Wiskundige Opgaven,* deel III, p. 303). Le faisceau (d) des droites menées par M, et le faisceau (d_1) des tangentes menées par M_1 à leurs transformées sont perspectifs; car ils ont un rayon uni MM_1; il résulte de là que *les tangentes menées par* M *et* M_1 *à deux courbes homologues qui passent en ces points, se coupent sur la droite* A′B′, *qui joint les pieds des hauteurs* AA′, BB′.

Plus généralement, soient M, M_1 deux points conjugués par rapport à une conique fixe Γ, et situés en ligne droite avec un point fixe C. Ces points se correspondent dans une transformation de Hirst, ayant pour pôle principal C, pour conique double Γ. Soient A, B les points de contact des tangentes menées de C à Γ. Le faisceau des droites menées par M est projectif avec celui des tangentes menées par M_1 à leurs transformées; soient d, d_1 deux rayons homologues quelconques de ces faisceaux. La droite MM_1 est un rayon uni; donc les droites d, d_1 se coupent sur une droite fixe t; on détermine celle-ci au moyen des deux couples de rayons homologues AM et BM_1, AM_1 et BM.

Voici une autre démonstration de ce résultat. Soient, sur deux courbes homologues, M et N, M_1 et N_1 des couples de points homologues; désignons par V le point de rencontre des droites MN, M_1N_1 et par W celui des droites MN_1, M_1N. D'après un théorème connu, les points V, W sont également conjugués harmoniques par rapport à Γ. Lorsque N et N_1 tendent à se confondre avec M et M_1, la limite du point W est le point w, conjugué harmonique de C par rapport à MM_1, car le faisceau

V(CWMM$_1$) est harmonique. Il résulte de là que les tangentes en M et M$_1$ se coupent sur la polaire t du point w par rapport à Γ.

8. Revenons au cas où M$_1$ est l'orthocentre du triangle ABM; alors C est à l'infini, son conjugué harmonique par rapport à MM$_1$ est le milieu du segment MM$_1$, point qui a pour polaire par rapport à Γ la droite B′C′.

Soient, dans la même figure, N, N$_1$ deux points infiniment voisins de M, M$_1$, sur deux courbes correspondantes passant par M, M$_1$. On voit que les arcs correspondants MN, M$_1$N$_1$ ont même projection mn sur AB. Mais, si ρ, ω, ν sont le rayon vecteur, l'angle polaire et la normale polaire de M par rapport au pôle A, et ρ_1, ω_1, ν_1 les mêmes éléments relatifs au point M$_1$ et au pôle B, on a pour les arcs infinitésimaux MN, M$_1$N$_1$

$$ds = \nu d\omega, \qquad ds_1 = \nu_1 d\omega_1,$$

d'où, à cause de $d\omega = d\omega_1$, $ds : ds_1 = \nu : \nu_1$. Il résulte de là que les normales polaires ν, ν_1, ont des projections égales sur la droite MM$_1$. Ce qui donne une nouvelle solution du problème de la tangente (*).

9. Pour étendre à l'espace la transformation exposée au § **7**, M. d'Ocagne considère comme points correspondants les extrémités M, M′ de tout diamètre d'une sphère (variable) passant par un cercle fixe Γ. Si M$_1$ est le symétrique de M′ par rapport au centre de Γ, il est facile de voir que les points M, M$_1$ sont sur une même perpendiculaire au plan de Γ, et qu'ils sont conjugués harmoniques par rapport à la sphère qui a pour grand cercle Γ. Nous sommes ainsi ramenés à une transformation de Hirst dans l'espace.

(*) Pour une autre explication de cette solution, voir *Mathesis*, t. VIII, p. 118.

LA

FLORE MYCOLOGIQUE DE LA BELGIQUE.

DEUXIÈME SUPPLÉMENT

COMPRENANT LES

SPHÆROPSIDEÆ — MELANCONIEÆ — HYPHOMYCETES,

ADDITION DE 850 ESPÈCES A LA FLORE DE 1880

ET 250 FIGURES REPRÉSENTANT LES GENRES,

PAR

le Dr E. LAMBOTTE.

PRÉLIMINAIRES.

D'une part, la découverte des organes de fécondation sur le mycelium des *Erysiphe, Eurotium, Penicillium, Sordaria, Ascobolus, Peziza,* d'autre part, le même mycelium pouvant produire à la fois des filaments asexués, porteurs de spores, et des filaments sexués, nous ont déterminés à admettre ces deux genres de propagation dans les familles des PYRÉNOMYCÈTES et des ASCOMYCÈTES. Nous sommes prêts à modifier nos vues, si de nouveaux travaux nous démontrent que nous avons fait fausse route.

La spore proprement dite ou des thèques, en tombant sur un milieu convenable, germe et produit un *mycelium conidien.* Celui-ci renferme deux sortes de filaments : 1° des filaments fertiles, asexués, porteurs de conidies; on pourrait les appeler des filaments délateurs; 2° des filaments sexués, cachés (*femelles*), produisant, après conjugation, la forme périthèce.

La présence du mycelium spermogonien est souvent évidente; celui-ci complète, par conjugation avec le mycelium *femelle,* la structure du périthèce et le rend ascomycète. Ce cas se présente surtout quand le champignon se développe sur un substratum assez ferme (feuilles, bois, tiges, etc.).

Comme le mycelium conidien, le mycelium spermogonien se compose de filaments asexués, porteurs de spores, et de filaments sexués, cachés, *mâles,* appelés, après conjugation avec le mycelium conidien à produire les asques dans le périthèce.

Dans beaucoup de pyrénomycètes, à substratum assez ferme, les éléments conidiens, spermogoniens, pycnidiens, ascophores sont rassemblés en une seule masse, ou bien ces éléments sont réunis à de courtes distances.

Il est quelquefois difficile de distinguer les conidies des spermogonies ou des stylospores; pour nous, les conidies sont dépourvues de toute apparence de conceptacle.

Le mycelium conidien des SPHÆRIACEÆ est surtout représenté par les familles *Phæo-hyphomyceteæ* (Dematieæ), *Phæo-stilbeæ, Phæo-toruleæ* à évolution surtout excentrique, et par la famille *Melanconieæ* à évolution plutôt concentrique.

Le mycelium conidien des HYPOCRACEÆ est surtout formé de hyphes des familles *Hyalo-hyphomyceteæ* (mucedineæ), *Hyalo-stilbeæ, Hyalo-toruleæ* et de la famille des *Tubercularieæ* à évolution concentrique.

Le mycelium spermogonien des SPHÆRIACEÆ appartient surtout à la famille des *Sphæropsideæ* à spores surtout hyalines. Le mycelium pycnidien représente particulièrement les plantes à spores obscures de cette même famille. Les pycnides ressemblent, à part la thèque qui n'existe pas, assez bien au type ascophore, et n'indiquent probablement qu'un état très proche de l'appareil parfait.

L'étude morphologique du mycelium des plantes qui fait l'objet de cet ouvrage a été assez négligée à cause des grandes difficultés qu'elle présente. Peut-être qu'en soumettant la partie végétative de ces champignons à un système particulier de coloration, à l'instar des schizomycètes, parviendra-t-on à mieux en éclairer le champ.

Verviers, le 15 février 1888.

E. LAMBOTTE.

TABLEAUX

INDIQUANT

LES DIFFÉRENTS ÉTATS PAR OÙ PASSE LA SPORE PROPREMENT DITE AVANT DE PRODUIRE LE CHAMPIGNON PARFAIT ET LA SPORE PROPREMENT DITE.

SPHÆRIACEÆ SIMPLES. —

Périthèces couverts, chauves, texture membraneuse, noire.			TORULEÆ.	HYPHOMYCETEÆ.
			Mycelium conidien =	
Amerosporæ	SPHÆRELLEÆ.	Phomatospora	. . . .	. . . .
		Læstadiæ	. . . .	. . . .
	SPHÆRIEÆ	Physalospora	. . . .	. . . .
		Anthostomella	. . . .	. . . .
	GNOMONIEÆ	Gnomoniella	. . . .	. . . .
	(Eugnomania)	Gnomonia	. . . .	. . . .
Didymosporæ	SPHÆRELLEÆ.	Epicymatia	Coniosporium.	
		Sphærella	. . . .	Cercospora. Ovularia. Ramularia.
		Stigmatea	Fusidium.	. . . .
	SPHÆRIEÆ.	Didymella	. . . .	. . . .
		Didymosphæria	. . . .	. . . .
Phragmosporæ	PLEOSPOREÆ.	Clypeosphæria	Torula.	
		Leptosphæria	Coniosporium	Periconia. Macrosporium. Polydesmus. Cladosporium. Helminthosporium. Brachysporium.
		Metasphæria	. . . .	. . . .
	SPHÆRELLEÆ.	Sphærulina	. . . .	Trinacrium.
Dictyosporæ	PLEOSPOREÆ.	Pleospora	Sporodesmium. Clasterosporium.	Macrosporium. Alternaria. Helminthosporium. Stemphylium.

TEXTURE MEMBRANEUSE.

STILBEÆ.	Tuberculariеæ.	MELANCONIEÆ.	SPHÆROPSIDEÆ —	SPHÆROIDEÆ.	LEPTOSTROMACEÆ Excipulaceæ.
Organe femelle.			Spermogonies Organes mâles —	Pycnides.	
. . . .	. . . .	. . . . . .	Phoma.		
. . . .	. . . .	. . . . . .	Phoma. Phyllosticta Asteroma.		
. . . .	. . . .	. . . . . .	Phoma . . . . Coniothyrium.	Harknessia.	
. . . .	. . . .	. . . . . .	Septoria	. . . . . .	Leptothyrium.
. . . .	. . . .	Glœosporium.	Phoma	. . . . . .	Leptothyrium. Discosia.
. . . .	. . . .	Marsonia . .	. . . .	. . . . . .	Discosia.
Isariopsis. . . . . Graphiothecium.	. . . .	. . . . . .	Phyllosticta. Ascochyta Septoria. Asteroma.		
. . . .	. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . . . .	Melasmia.
. . . .	. . . .	. . . . . .	Phoma.	Diplodia.	
. . . .	. . . .	. . . . . .	. . . .	Diplodia.	
. . . .	. . . .	Melanconium.	Phoma-aposphæria. Septoria. Phyllosticta. Ascochyta. Coniothyrium.	Hendersonia . .	Leptothyrium. Piggotia.
. . . .	. . . .	. . . . . .	Phoma. Septoria. Ascochyta.	Hendersonia.	
. . . .	. . . .	. . . . . .	Phoma. Septoria. Ascochyta.	Hendersonia. Diplodina. Camarosporium.	

SPHÆRIACEÆ SIMPLES. —

			TORULEÆ.	HYPHOMYCETEÆ.
Périthèces couverts, chauves, texture membraneuse, noire (suite).			Mycelium conidien =	
Scolecosporæ.	PLEOSPOREÆ. .	Dilophia	Mastigosporium .	. . . .
	GNOMONIEÆ . .	Linospora. . . .	. . . .	. . . .
	OPHIOBOLEÆ.	Ophiobolus . . .	. . . .	. . . .
Périthèces couverts, poilus, texture membraneuse.				
Didymosporæ.	VENTURIEÆ . .	Venturia	. . . .	. . . .
Dictyosporæ .	PYRENOPHOREÆ.	Pyrenophora . .	. . . .	Dendryphium . .
			SPÆRIACEÆ SIMPLES	
Périthèces superficiels, chauves.				
Didymosporæ.	MELANOMMEÆ .	Melanopsamma. .	. . . .	Fuckelina.
Phragmosporæ		Melanomma . . .	Clasterosporium .	Helminthosporium
Dictyosporæ .		Teichospora . .	Torula	. . . .
Amerosporæ .	CERATOSTOMEÆ.	Ceratostomella.	. . . .	Diplococcium. . .
Dictyosporæ .		Ceratostoma . .	. . . .	. . . .
		Ceratosphæria .	. . . .	. . . .
Dictyosporæ .	CAPNODIEÆ. . .	Capnodium. . . .	Coniothecium . .	Fumago. Triposporium
Périthèces superficiels, poilus.				
Amerosporæ .	LASIOSPHÆRIEÆ.	Trichosphæria .	. . . .	Acrostalagmus. . . . . Acrothecium.
		Rosellinia . . .	Torula	Sporotrichum. . . . . Stachylidium.
		Chætomium . .	. . . .	Sporodum. Myxotrichum.
		Bommerella. . .	Oospora.	

EXTURE MEMBRANEUSE.

STILBEÆ.	Tuberculariеæ.	MELANCONIEÆ.	SPHÆROPSIDEÆ —	SPHÆRDIDEÆ.	LEPTOSTROMACEÆ Excipulaceæ.
rgane femelle.			Spermogonies Organes mâles —	Pycnides.	
. . . .	. . . . .	. . . . . .	Dilophospora.		
. . . .	. . . . .	Glœosporium.	Phoma.		
. . . .	. . . . .	. . . . . .	Phoma-septoria .	Hendersonia.	
raphiothecium .	. . . . .	Marsonia . .	Septoria. Asteroma.		
. . . .	. . . . .	. . . .	Phoma. Vermicularia.		
HARBONNEUX.					
. . . .	. . . . .	Coryneum . .	Phoma. Coniothyrium.		
. . . .	. . . . .	Steganosporium .	Phoma.	Diplodia. Hendersonia.	
			Coniothyrium.		
. . . .	. . . . .	. . . .	Sphæronema.		
. . . .	. . . . .	. . . .	Sphæronema.		
. . . .	. . . . .	. . . .	Sphæronema. (Dumortiera).		
. . . .	. . . . .	. . . .	Apiosporium . .	Hendersonia.	
. . . .	. . . . .	. . . .	Pyrenochæta.		
. . . .	. . . . .	. . . .	Coniothyrium.		

			SPHÆRIACEÆ SIMPLES,	
			TORULEÆ.	HYPHOMYCETEÆ.
			Mycelium conidien =	
Périthèces superficiels poilus (suite).				
Phragmosporæ	LASIOSPHÆRIEÆ. *(Suite)*	Lasiosphæria . .	. . . .	Fuckelina. Acrotheca . . . . Cordana.
		Chætosphæria .	. . . .	Cladotrichum. Acrotheca. Periconia. Helminthosporium Dendryphium.
		Pleosphæria . .	. . . .	. . . .
Périthèces couverts.				
Phragmosporæ	MASSARIEÆ .	Massaria	. . . .	. . . .
		Massarina . . .	. . . .	. . . .
		Pleomassaria .	. . . .	. . . .
Didymosporæ.		Massariella. . .	. . . .	. . . .
Dictyosporæ.	DITOPELLEÆ.	Karstenula . .	. . . .	. . . .
				SPHÆRIACEÆ
Allantosporæ.	VALSEÆ . . . *Euvalseæ*	Valsa.	. . . .	. . . .
		Eutypella . . .	. . . .	. . . .
		Valsella . . .	. . . .	. . . .
		Quaternaria . .	. . . .	. . . .
	DIATRYPEÆ .	Diatrype . . .	. . . .	. . . .
		Diatrypella. . .	. . . .	. . . .
	EUTYPEÆ . .	Eutypa	. . . .	Trichosporium .
		Cryptovalsa . .	. . . .	. . . .
		Cryptosphæria . Cryptosphærella.	. . . .	. . . .
	CALOSPHÆRIEÆ.	Coronophora . . Calosphæria.	Cylindrioïde. . . Conidies 5 μ long.	Acrocylindrioïde

CHARBONNEUX.

STILBEÆ.	Tuberculariea.	MELANCONIEÆ.	SPHÆROPSIDEÆ —	SPHÆROIDEÆ.	LEPTOSTROMACEÆ Excipulaceæ.
Organe femelle.			Spermogonies Organes mâles	— Pycnides.	
Stilbum. . . .	. . . .	. . . .	Sphæronema. Sphæronemella.		
. . . .	. . . .	. . . .	Pyrenochæta.		
. . . .	. . . .	Melanconium Stilbospora . Steganosporium . Seiridium. Scolecosporium	Pyrenochæta . .	Macrodiplodia. Diplodia. Hendersonia. Sphæropsis. Chætodiplodia.	
. . . .	. . . .	. . . .	Rhabdospora.		
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Prosthenium	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Diplodia.	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Comarosporium.	
COMPOSÉS.					
Harpographium.	. . . .	Næmaspora .	Cytispora. Ceuthospora.		
Isarioïdes. . .	. . . .	. . . .	Cytispora. Cytosporina.		
. . . .	. . . .	. . . .	Cytispora.		
. . . .	. . . .	Libertella.			
. . . .	. . . .	Næmaspora. . . . . Libertella.	Cytispora. Cytosporina.		
. . . .	. . . .	Libertella.			
Graphium. . .	. . . .	. . . .	Cytosporina.		
. . . .	. . . .	. . . .	Cytosporoïdes.		
. . . .	. . . .	. . . .	Cytosporina.		
. . . .	. . . .	. . . .	Ceuthosporoïdes. Conidies 8 = 1		

SPHÆRIACEÆ				
			TORULEÆ.	HYPHOMYCETEÆ.
Périthèces couverts (suite).			Mycelium conidien =	
Amerosporæ.	CUCURBITARIEÆ.	HELMINTHOSPHÆRIA.	Dicoccoïdes . . .	Scolecotrichum .
	MELOGRAMMEÆ.	BOTRYOSPHÆRIA .	. . . .	. . . .
	VALSEÆ . . . *Melanconideæ*	CRYPTOSPORELLA.	. . . .	. . . .
	TRINITEÆ . .	ANTHOSTOMA. . .	. . . .	. . . .
Didymosporæ.	CUCURBITARIEÆ.	GIBBERA.	. . . .	Helminthosporium
	VALSEÆ . . *Melanconideæ*.	MELANCONIELLA . MELANCONIS . . .	. . . .	. . . .
		HERCOSPORA. . .	Clasterosporium .	. . . .
		DIAPORTHE. . .	. . . .	Helminthosporium.
		VALSARIA	. . . .	. . . .
		OTTHIA	Torula	. . . .
Phragmosporæ.	VALSEÆ . . . *Melanconideæ*.	PSEUDOVALSA . .	. . . .	. . . .
		THYRIDARIA . . .	. . . .	. . . .
	MELOGRAMMEÆ.	MELANOPS	. . . .	. . . .
	CUCURBITARIEÆ.	GIBERRIDEA . . .	. . . .	. . . .
		CUCURBITARIA . .	Sporodesmium. .	. . . .
Dictyosporæ.	VALSEÆ . . . *Melanconideæ*	FENESTELLA . . .	. . . .	. . . .
Scolecosporæ.	VALSEÆ . . . *Melanconideæ*.	CRYPTOSPORA . .	. . . .	. . . .
Phæosporæ.	XYLARIEÆ . .	HYPOXYLON . . . NUMMULARIA	Oosporatoïdes. .	. . . .

COMPOSÉS.

STILBEÆ.	Tubercularieæ.	MELANCONIEÆ.	SPHÆROPSIDEÆ — SPHÆROIDEÆ.		LEPTOSTROMACEÆ Excipulaceæ.
Organe femelle.			Spermogonies Organes mâles	— Pycnides.	
. . . .	. . . .	. . . .	Haplosporellatoïdes.		
. . . .	. . . .	. . . .	Phomatoïdes. Dothiorella.		
. . . .	. . . .	Cryptosporium. Marsonia. . . . . Næmaspora.	Fusicoccum. . .	Harknessia.	
. . . .	. . . .	Myxosporium.	Cytosporoïdes.		
. . . .	. . .	Melanconium. Steganosporium. . . . . . Stilbospora. Asterosporium ?	Cytispora.		
. . . .	Exosporium.	. . . .	Cytosporoïdes . .	Rabenhorstia.	
. . . .	. . . .	Myxosporium. . . . . Libertella.	Phoma . . . . . Fusicoccum. Dothiorella.	. . . .	Discella.
. . . .	. . . .	. . . .	Coniothyrium.		
. . . .	. . . .	. . . .	Phoma	Diplodia.	
. . . .	. . . .	Stilbospora Coryneum. . . . . . Steganosporium. Cryptosporium.	. . . .	Hendersonia.	
. . . .	. . . .	. . . .	Phoma . . . . Coniothyrium.	Diplodia.	
. . . .	. . . .	. . . . .	Cytisporella.		
. . . .	. . . .	. . . .	Ceuthospora. . .	Diplodia.	
. . . .	. . . .	Coryneum phragmotrichum	Phoma	Diplodia, Hendersonia. Comarosporium.	
. . . .	. . . .	. . . .	Cytispora. . . .	Comarosporium.	
. . . .	. . . .	Cryptosporium.			
. . . .	. . . .	. . . .	Phomatoïdes		

SPHÆRIACEÆ SIM

			TORULEÆ.	HYPHOMYCETEÆ.
			Mycelium conidien =	
Amerosporæ.	ERYSIPHEÆ.	Erysiphes	Oïdium..	
	PERISPORIEÆ.	Apiosporium	Hormiscium. Gyroceras. Torula.	
		Anixia	Sporodesmium.	
		Eurotium		Aspergillus.
Didymosporæ.	SPHÆRELLEÆ. P. P.	Ascospora		
		Asterina		

Famille II : HYP(

Amerosporæ.		Nectriella		Verticillium
		Eleutheromyces.		
Didymosporæ.	NECTRIEÆ.	Melanospora		
		Nectria		Verticillium
Phragmosporæ		Sphærostilbe		
		Calonectria		
		Giberella		
Dictyosporæ.		Pleonectria		
Didymosporæ.	HYPONECTRIEÆ.	Hypomyces		Trichoderma. Trichotecium. Sepedonium. Asterophora. Mycogone. Verticillium. Dactylium. Diplocadium. Botrytis. Monosporium.
Amerosporæ.	HYPOCREEÆ.	Polystigma		
Didymosporæ.		Hypocrea		Verticillium. Trichoderma.
Scoleeosporæ.		Epichloe		
Scoleeosporæ.	TORRUBIEÆ.	Claviceps	Oosporæ.	
		Cordyceps		

PLES, INCOMPLETS.

STILBEÆ.	Tubercularieæ.	MELANCONIEÆ.	SPHÆROPSIDEÆ — SPHÆROIDEÆ.		LEPTOSTROMACEÆ Excipulaceæ.
Organe femelle.			Spermogonies Organes mâles —	Pycnides.	
. . . .	. . . .	. . . . . .	Connues.		
. . . .	. . . .	. . . . . .	Asteroma.		
. . . .	. . . .	. . . . . .	Chætophoma.		
CRACEÆ De Not.					
. . . .	Tubercularia. Volutella. Hymenula (psilonia).	. . . . . .	Zythia.		
Isaria. Stysanus.					
. . . .	Tubercularia. Illosporium. Selenosporium fusarium.	. . . . . .	Sphæronemella. Phomopsis-Dendrophoma. Prosthemium.		
Stilbum . . . . Atractium . . .	Microcera fusarium. Fusisporium.				
. . . .	Microcera	Glœosporium.	. . . .	Stagonopsis.	
. . . .	Fusarium, Selenosporium.	. . . . . .	Phoma	Hendersonia	
. . . .	Tubercularia.				
Stilbum.					
. . . .	. . . . .	Libertella.			
. . . .	Sphacelia.				
. . . .	Sphacelia fusarium.				
Isaria.					

			TORULEÆ.	HYPHOMYCETEÆ.
				Mycelium conidien =
				FAMILLE III :
Amerosporæ.	PHYLLACHOREÆ	PHYLLACHORA . .	Fusidium . . .	Fusicladium. Passalora . . . . Polythrincium.
		EURYACHORA . . .	. . . .	. . . .
Didymosporæ.		DOTHIDELLA . . .	. . . .	Hadotrichum.
		SCHIRRHIA	. . . .	Hadotrichum.
		PLOWRIGHTIA . .	. . . .	. . . .
Phragmosporæ	RHOPOGRAPHEÆ.	RHOPOGRAPHUS. .	. . . .	. . . .
				FAMILLE IV :
Amerosporæ. Didymosporæ.	AULOGRAPHIEÆ.	SCHIZOTHYRIUM. . AULOGRAPHUM . .	. . . .	. . . .
Phragmosporæ	HYSTERIEÆ .	DICHÆNA	. . . .	. . . .
Scolecosporæ.	LOPHODERMIEÆ.	HYPODERMA . . . LOPHODERMIUM . .	. . . .	. . . .
				FAMILLE
Amerosporæ.	PHÆCIDICÆ .	PHACIDIUM. . . .	. . . .	. . . .
Scolecosporæ.		COCCOMYCES . . .	. . . .	. . . .
		RHYTISMA	. . . .	. . . .
Amerosporæ.	DERMATEÆ. .	CENANGIUM . . .	. . . .	. . . .
		TROCHILA	. . . .	. . . .
Dictyosporæ .	PATELLARIEÆ.	DOTHIORA . . .	. . . .	. . . .
				FAMILLE
Amerosporæ.	BULGARIEÆ .	CALLORIA	. . . .	. . . .
				FAMILLE
Amerosporæ.	MOLLISIEÆ. .	Peziza (Cyathicula). Pezizella.	. . . .	Polyactis . . . .
		Stamnaria. . . .	. . . .	. . . .
		Pseudopeziza . .	. . . .	. . . .
	SUBICULEÆ .	Tapezia	. . . .	Sarcopodium.

STILBEÆ.	Tubercularieæ.	MELANCONIEÆ.	SPHÆROPSIDEÆ	— SPHÆROIDEÆ.	LEPTOSTROMACEÆ Excipulaceæ.
Organe femelle.			Spermogonies / Organes mâles	— Pycnides.	
DOTHIDEACEÆ.					
. . . .	. . . . . .	. . . .	Septoria. Phyllosticta Placosphaeria . . .	. . . .	Piggotia.
. . . .	. . . . . .	. . . .	Placosphaeria.		
. . . .	. . . . . .	. . . .	Dothiorella (Podosporium).	Hendersonula.	
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Leptostroma.
HYSTERIACEÆ.					
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Labrella.
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Leptostroma.
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .	Hendersonia . .	. . Psilospora.
. . . .	. . . . . .	. . . .	Septoria	. . . .	Leptostroma.
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Leptostroma.
PHACIDIACEÆ.					
. . . .	. . . .	. . . .	Septoria. Dothiorella.	. . . .	. . Sporonema.
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Leptothyrium.
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Melasmia.
. . . .	. . . . . .	. . . .	Sphæronema. Fuckelia	Cornularia . . . Micula. Microspera. . .	. . Catinula / . . Doltichiza.
. . . .	. . . .	Glœosporium.			
. . . .	. . . . . .	. . . .	Sphæronema . . .	. . . .	. . Doltichiza.
BULGARIACEÆ.					
. . . .	Dacrymycella. Cylindrocolla.				
PEZIZACEÆ.					
. . . .	Sphaeridium.				
. . . .	Fusarium.				
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . Protostegia.

Tableaux comparatifs des Familles et des genres, montrant leurs affinités, et leurs différents états, depuis l'état le plus

SPHÆROIDEÆ.		NECTRIOIDEÆ.		LEPTOSTROMACEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.
				A. PÉRITHÈCES	
				I. PÉRITHÈCES	
				a) Conidies	
				Subsphæroïdes.	
PHOMA. mi. ma. 1/4 > — 1	CONIOTHYRIUM. mi. 1/2 > — 1	ZYTHIA. Phomopsis. mi. ma. 1/4 <— 1/4 > LIBERTIELLA. mi. 1/2 <		LEPTOTHYRIUM. mi. ma. 1/4 <— 1 SACIDIUM. mi. 1/4 > — 1	PIROSTOMA. mi. 1 — 1 <
PHILLOSTICTA. mi. ma. 1/4 < - 5/4				PIGGOTIA. mi. 1/2 >	
SPHÆRONEMA. mi. ma. 1/4 <— 1/2	HARKNESSIA. ma. 1/2 SPHÆROPSIS. ma. 1/4 > - 1/2	SPHÆRONÆMELLA. mi. 1/2 <— 1 ROUMEGUERIELLA. ma. 1			
ASTEROMA. mi. 1/2 ><					
				Hysteroïdes.	
				LEPTOSTROMA. mi. ma. 1/4 <— 1 LABRELLA. mi. 1/4 >— 1/2	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
DIPLODINA. mi ma. 1/4 <— 1/2 ASCOCHYTA. mi. ma. 1/4 <— 1/2 DARLUCA. mi. ma. 1/4 <— 1/4 >	DIPLODIA. mi. ma. 1/2 < à 1/2 MACRODIPLODIA. ma. 1/2 < DIPLODIELLA. mi. ma. 1/4 < à 5/4 <	PSEUDODIPLODIA. mi. 5/4 <			

passages de l'un dans l'autre, ou plutôt faisant voir les séries naturelles de leurs primitif jusqu'à l'état parfait.

	EXCIPULACEÆ.		MELANCONIEÆ.		TUBERCULARIEÆ.		
	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	
SIMPLES.							
CHAUVES.							
solitaires.							
Subsphæroïdes.							
	DOTHICHIZA. mi. $^1/_4 < - 1$		MYXOSPORIUM. mi. ma. $^1/_4 < - 1 <$	MELANCONIUM. mi. ma. $^1/_4 > - 1 <$	TUBERCULARIA. mi. $^1/_4 < - 1$	STRUMELLA.	AMEROSPORÆ.
	EXCIPULA. mi. ma. $^1/_4 < - {}^1/_4 >$		GLŒOSPORIUM. mi. ma. $^1/_4 < - 1 <$		DENDRODOCHIUM mi. ma. $^1/_4 < - 1$		
	DISCULA. mi. ma. $^1/_4 < - {}^1/_2$				ÆGERITA. mi. ma. $^1/_2 < - 1$	EPICOCCUM. mi. ma. $^3/_4 < - 1$	
	CATINULA. ma. $^1/_2 >$		HAINESIA. mi. $^1/_4 < - {}^1/_2 <$		HYMENULA. mi. ma. $^1/_4 < - {}^3/_4$	HYMENOPSIS. mi. ma. $^1/_4 < - {}^1/_2$	
						PHYLLŒDIA. macr. 1	
					ILLOSPORIUM. mi. ma. $^1/_2 > - 1$	STRUMELLA. mi. $^1/_2 < - {}^3/_4 <$	
					TUBERCULINA. mi. 1	EPIDOCHIUM. mi. $^3/_4 - 1$	
					MYROPYXIS. mi. 1		
Hysteroïdes.							
	PSILOSPORA. ma. $^1/_2 < - {}^3/_4$						
	SPORONEMA. mi. $^1/_4 >$						
	DISCELLA. mi. ma. $^1/_2 <$		MARSONIA. mi. ma. $^1/_4 > - {}^3/_4 <$	DIDYMOSPORIUM. mi. ma. $^1/_2 < - {}^1/_2 >$			DIDYMOSPORÆ.

SPHÆROIDEÆ.		NECTRIOIDEÆ.		LEPTOSTROMACEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.
ACTINONEMA. ma. $^1/_2 <$ TIAROSPORA. ma. $^3/_4 <$ CYSTOTRICHA.					
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
				Subsphæroïdes.	
STAGONOSPORA. ma. $^1/_4 < - ^1/_4 >$	HENDERSONIA. mi. ma. $^1/_4 < - ^1/_2$			DISCOSIA. mi. ma. $^1/_4 < - ^1/_4 >$	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	PROSTHEMIUM. ma. $^1/_4 > - ^1/_2 <$	CHIATOSPORA.			
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	CAMAROSPORIUM. ma. $^1/_2 < - ^3/_4$			ENTOMOSPORIUM. (morthiera). ma. $^3/_4 <$	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
MICROPERA. ma. $^1/_4 <$ SEPTORIA. ma. $^1/_4 <$				ACTINOTHYRIUM. ma. $^1/_4 <$	
				Hysteroïdes.	
				Leptostromella. ma. $^1/_4 <$	
					b) *Conidies en*
SIROCOCCUS. mi. $^1/_4 > - 1$					
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

EXCIPULACEÆ. Hyaleæ.	EXCIPULACEÆ. Phææ.	MELANCONIEÆ. Hyaleæ.	MELANCONIEÆ. Phææ.	TUBERCULARIEÆ. Hyaleæ.	TUBERCULARIEÆ. Phææ.	
						DIDYMOSPORÆ.
Subsphæroïdes.						
			STILBOSPORA. ma. 1/2 < CORYNEUM. ma. 1/4 < — 1/2 < PESTALOZZIA. ma 1/4 <— 1/2 SCOLECOSPORIUM. ma. 1/4 <	FUSARIUM. ma. 1/4 < à 1/2 PIONNOTES. mi. ma. 1/4 < — 1/2 MICROCERA. ma. 1/4 < BACTRIDIUM. ma. 1/4 <	EXOSPORIUM. ma. 1/4 <— 1/4 >	PHRAGMOSPORÆ.
		PROSTHEMIELLA. ma. 1/4 <	ASTEROSPORIUM. ma 1/2 < — 3/4 <			STAUROSPORÆ.
			STEGANOSPORIUM. mi. ma. 1/2 > — 1/2 <			DICTYOSPORÆ.
PROTOSTEGIA. ma. 1/4 <		CRYPTOSPORIUM. ma. 1/4 < CYLINDROSPORIUM. ma 1/4 <				SCOLECOSPORÆ.
chaînettes.						
Hysteroïdes.						
SCHIZOTHYRELLA. ma. 1/4 <— 1/4 >		HYPODERMIUM. mi. ma. 1/2 > BLENNORIA. mi. ma. 1/4 < AGYRIELLA. mi. 1/4 >	THYRSIDIUM. mi. 1.	CYLINDROCOLLA. mi. 1/4 <— 1/4 > SPHÆRIDIUM. mi. 1/4 <— 1/4 >		AMEROSPORÆ.
			BULLARIA. ma.			DIDYMOSPORÆ.

SPHÆROIDEÆ.		NECTRIOIDEÆ.		LEPTOSTROMACEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.
					II. PÉRITHÈCES
VERMICULARIA. mi. ma. $1/4 < - 1/2 <$ PYRENOCHÆTA. mi. $1/4 < - 1$	 CHÆTOMELLA. mi. ma. $1/4 <$ à $1 <$				
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	CHÆTODIPLODIA. mi. ma. $1/2 < - 1/2 >$				
					B. PÉRITHÈCES
DOTHIORELLA. mi. ma. $1/4 < - 1 <$ RABENHORSTIA. mi. $1/4 > - 1/2 <$ FUSICOCCUM. mi. ma. $1/4 < - 1/2 <$ PLACOSPHÆRIA. mi. ma. $1/4 < - 1/4 >$ CEUTHOSPORA. mi. ma. $1/4 < - 1/2 <$ CYTOSPORELLA. mi. $1/2 > - 1$ CYTOSPORA. mi. ma. $1/4 < - 1/2 <$	HAPLOSPORELLA. mi. ma. $1/2 < - 1 <$			 MELASMIA. mi. ma. $1/4 < - 1/2$	
. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
CYTOSPORINA. ma. $1/4 <$ DILOPHOSPORA. mi. $1/4 < - 1/2 <$		POLYSTIGMINA. ma. $1/4 <$			
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
FUCKELIA. mi. $1/2 >$	BOTRYODIPLODIA. mi. ma. $1/2 < - 1/2 >$				
. . . . , . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	DICHOMERA. mi. ma. $1/2 > - 1$				

	EXCIPULACEÆ.		MELANCONIEÆ.		TUBERCULARIEÆ.		
	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	
POILUS.							
	AMEROSPORIUM. mi. ma. $^1/_4 <$ DINEMASPORIUM. mi. ma. $^1/_4 < - ^1/_2 <$		COLLETOTRICHUM. mi. ma. $^1/_4 < - ^1/_2 <$		PERIOLA. mi. $^1/_2 >$ VOLUTELLA. mi. ma. $^1/_4 < - 1$	CHÆTOSTROMA. mi. ma. $^1/_4 - 1$ MYROTHECIUM. mi. ma. $^1/_4 < - ^1/_2$	AMEROSPORÆ.
	. . . . . .	. . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	DIDYMOSPORÆ.
COMPOSÉS.							
			LIBERTELLA. ma. $^1/_4 <$ NÆMOSPORA. mi. $^1/_4 <$		SPHACELIA. mi. $^1/_2 > - 1$		AMEROSPORÆ.
	. . . . . .	. . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	SCOLECOSPORÆ.
	. . . . . .	. . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	DIDYMOSPORÆ.
	. . . . . .	. . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	DICTYOSPORÆ.

SPHÆROPSIDEÆ.		STILBEÆ.		HYPHOMYCETEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.
HYPOMYCES. Phoma. Sphæronema.	. . . . . .	. . . . *Stilbum.* mi. $^1/_2 > -1$	. . . .	CEPHALOSPORIEÆ. *Trichoderma.* mi. 1	PERICONIEÆ. *Periconia.* mi. $^1/_2 > -1$ *Fuckelina.* mi. $^3/_4 - 1$ *Acrotheca.* mi. ma. $^1/_4 >$ *Cordana.*
HYPOMYCES. Phyllosticta. Septoria. Placosphæria.				MONACROSPORIEÆ. *Trichothecium.* ma. $^1/_2 - {}^3/_4 <$ *Trinacrium.* ma. $^1/_4 <$	MONOTOSPOREÆ. *Hadrotrichum.* mi. ma. $^3/_4 - 1$ *Passalora.* ma. $^1/_4 < - >$ *Polythrincium.* ma. $^1/_2 >$ *Fusicladium.* mi. ma. $^1/_4 > - {}^1/_2 >$ *Triposporium.* ma. $^1/_4 - {}^1/_2$
CAPNODIUM.	. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	
Phyllosticta. Ascochyta. Septoria. Asteroma.	Diplodia.		*Isariopsis.* mi. ma. $^1/_4 < - {}^1/_2 <$ *Graphiothecium.* mi. ma. $^1/_4 < - {}^3/_4 <$	RAMULARIEÆ. *Ovularia.* mi. ma. $^1/_2 > - 1$ *Ramularia.* mi. ma. $^1/_4 < - {}^1/_2 <$	CERCOSPOREÆ. *Cercospora.* ma. $^1/_4 < - {}^1/_2 <$
HYPOMYCES.	. . . . . .	. . . .	. . . .	SPOROTRICHEÆ. *Sepedonium.* mi. ma. $^3/_4 < - 1$ *Asterophora.* mi. ma. 1 *Mycogone.* ma. $^3/_4 < - 1$ *Sporotrichum.* mi. $^1/_2 < - 1$	TRICHOSPORIEÆ.
Cytosporina.	Coniothyrium.		*Graphium.* mi. ma. $^1/_2 < - 1$		*Trichosporium.* mi. $^1/_2 > - 1$

HYPHOMYCETEÆ.		TORULEÆ.		TORULEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ	Phææ.
CEPHALOSPORIEÆ. Haplotrichum. mi. $\frac{1}{2} - 1$ Coëmansiella. mi. $\frac{1}{2} <$ Cephalothecium. mi. $\frac{1}{2} - 1$	PERICONIEÆ. Camptoum. ma. $\frac{1}{2} <$ Acrothecium. mi ma. $\frac{1}{4} > - \frac{1}{2} >$ Stachybotrys. mi. $\frac{1}{2} > - 1$	CHROMOSPORIEÆ.	CONIOSPORIEÆ. *Coniosporium.* mi. ma. $\frac{1}{4} > - 1$	CHROMOSPORIEÆ. Chromosporium. mi. ma $\frac{1}{2} - 1$ Helicomyces. ma. $\frac{1}{4} < 1$	CONIOSPORIEÆ. Dicoccum. mi. ma. $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} >$
GONATOBOTRYTEÆ. Gonatobotrys. mi. ma. $\frac{1}{2} < - \frac{3}{4} <$ Nematogonium. ma. $\frac{3}{4} <$ Physospora. mi. ma. $1 < - 1$ Arthrobotrys. ma. $\frac{3}{4} <$	ARTHRINIEÆ. Gonatobotryum. mi. $\frac{3}{4} >$ Goniosporium. mi. 1 Arthrinium. mi. ma. $\frac{1}{4} < - \frac{1}{2} >$				
MONACROSPORIEÆ. Acremonium. mi. $\frac{1}{2} < - 1$. Didymopsis. mi. ma. $\frac{1}{2} <$ Monacrosporium. ma. $\frac{1}{4} <$	MONOTOSPOREÆ. Mystrosporium. ma. $\frac{1}{4} > - \frac{1}{2} >$ Stemphylium ma $\frac{1}{2} > - 1$ Naplicadium. ma. $\frac{1}{2} <$ Monotospora. mi. ma. $\frac{1}{2} > - 1$				
RAMULARIEÆ. Didymaria. mi. ma. $\frac{1}{4} > - \frac{3}{4} <$ Cercosporella. ma $\frac{1}{4} <$	CERCOSPOREÆ. Heterosporium. ma. $\frac{1}{2} < - >$				
SPOROTRICHEÆ. Hyphoderma. mi. 1	TRICHOSPORIEÆ Zygodesmus. mi. 1 Rhinocladium. mi. $\frac{3}{4} > - 1$ Cladorrhinum. mi. 1				

SPHÆROPSIDEÆ.		STILBEÆ.		HYPHOMYCETEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.
Dothiorella. Fusicoccum. Phoma. Sphæronema. Phyllosticta. Septoria. Ascochyta.	Haploporella. Hendersonia.	. . . .	. . . .	. . . .	HELMINTHOSPORIEÆ. *Scolecotrichum.* mi. ma. $^1/_4 > - ^1/_2 >$ *Cladotrichum.* mi. ma. $^3/_4 < - 1 <$ DIPLOCOCCIUM. mi. $^1/_2 >$ DENDRYPHIUM. ma. $^1/_4 >$ *Cladosporium.* mi. ma $^1/_4 < - ^1/_2 >$ *Helminthosporium.* ma. $^1/_4 < - ^1/_2 <$ *Brachyosporium.* ma $^1/_2 > - ^3/_4 <$ *Macrosporium.* ma $^1/_4 < - ^3/_4 <$ *Alternaria.* mi. ma. $^1/_4 < - ^3/_4 <$ *Polydesmus.* ma. $^1/_4 < - >$
CHÆTOMIUM.	. . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	MYXOTRICHEÆ *Myxotrichum.* mi. $^1/_2 > - 1$ SPORODEÆ. *Dematium.* (Sporodum.) mi 1
EUROTIUM.	. . . . .	. . . .	. . . .	ASPERGILLEÆ. *Aspergillus.* mi. $^1/_2 > - 1$	

HYPHOMYCETEÆ.		TORULEÆ.		TORULEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.
. . . .	HELMINTHOSPORIEÆ. Helicosporium. ma. $^{1}/_{4} <$ Menispora. ma. $^{1}/_{4} < - >$	CHROMOSPORIEÆ.	CONIOSPORIEÆ. *Cryptocoryneum* ma. $^{1}/_{4} <$ *Sporodesmium.* ma. $^{1}/_{4} < - ^{3}/_{4} >$ *Clasterosporium* ma. $^{1}/_{4} - ^{1}/_{2} >$ TORULEÆ. *Torula.*		
. . . .	. . . .	*Mastigosporium.* ma. $^{1}/_{4} >$			
	CHLORIDIEÆ. Mesobotrys mi. $^{1}/_{2} > - ^{3}/_{4} >$ Chætopsis. mi $^{1}/_{2} <$ MYXOTRICHEÆ. Bolacotricha. mi 1 SARCOPODIEÆ. Helicotrichum. ma $^{1}/_{4} <$ Botryotrichum. mi. 1 SPOROCHISMEÆ. Sporochisma. ma. $^{1}/_{4} <$				
ASPERGILLEÆ. Sterigmatocystis. mi. 1 Penicillium. mi. ma. $^{1}/_{2} > - 1$ Gliocladium. mi. $^{1}/_{2}$		OOSPOREÆ.		OOSPOREÆ. Monilia. mi. ma. $^{3}/_{4} < - 1 <$ Cylindrium. mi. ma. $^{1}/_{4} < - >$	

SPHÆROPSIDEÆ.		STILBEÆ.		HYPHOMYCETEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.
CAPNODIUM.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .	HAPLOGRAPHIEÆ. *Dendryphium.* ma. $1/4 < - 1/2 <$ CLADOSPORIEÆ. *Cladotrichum.* mi. ma. $3/4 < - >$ *Fumago.* mi. ma. $1/2 < - 1$
ERYSIPHES. APIOSPORIUM.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .
		Ciliciopodium. mi. ma. $1/2 < - >$ Pilacre. mi. $3/4 - 1$ Ceratium. mi. $3/4 - 1$ Coremium. mi. $3/4 - 1$	Sporocybe. mi. $1/2 > - 1$		
Coniothyrium. Pyrenochæta.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	VERTICILLIEÆ. *Acrostalagmus* mi. $1/2 > <$	VERTICILLIEÆ. *Stachylidium.* mi. $1/2 > - 1$
TUBERCULARIEÆ.					
Tubercularia. Illosporium. Hymenula. Fusarium. Microcera. Sphacelia.	Volutella.	*Stilbum-atractium.* ma. $1/4 <$			
HYPOMYCES.	. . . . . .	*Isaria.* mi. $1/2 > - 1$	*Stysanus.* mi. ma. $1/4 > 3/4 <$	*Verticillium.* mi. $1/4 > - 1$ *Dactylium.* ma. $1/2 <$ *Diplocadium.* ma. $1/2 > <$ BOTRYTIDEÆ. *Botrytis.* mi. ma. $1/2 < - 3/4 <$ *Monosporium.* mi. ma. $1/2 > - 1$	
PEZIZACEÆ. SCLEROTINIA.	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	*Botrytis.* (sur Sclérote).	. . . .

HYPHOMYCETEÆ.		TORULEÆ.		TORULEÆ.	
Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.	Hyaleæ.	Phææ.
	HAPLOGRAPHIEÆ. Haplographium. mi. ma. $^1/_2 > - 1$			Geotrichum. mi. $^3/_4 < - 1$	
Hormiactis. ma. $^1/_2 < - ^1/_4 >$	CLADOSPORIEÆ. Hormodendrum. mi. ma. $^1/_4 > - 1$ Epochnium. mi. ma. $^1/_2 > - ^3/_4 <$		CONIOTHECIEÆ. *Coniothecium.* mi. ma. $^1/_2 > - 1$	Septocylindrium. ma. $^1/_4 <$	CONIOTHECIEÆ. Echinobotryum. mi. $^1/_2 >$ Dictyosporium. ma. $^1/_2 >$ à $^3/_4$ Speira. ma. $^1/_4 >$
. . . .	. . . .	*Oïdium.* mi. ma. $^1/_2 < - 1$	TORULEÆ. *Torula.* mi. *Hormiscium.* mi. ma. 1 *Gyroceras.* mi. $^1/_2 > - 1$		TORULEÆ. Bispora. mi. ma. $^1/_4 > - ^1/_2 <$ Septonema. mi. ma. $^1/_4 < - ^1/_2 <$
HAPLARIEÆ. Acladium. mi $^3/_4 - 1$ Haplaria. mi. $^3/_4 - 1$	VIRGARIEÆ. Virgaria. mi. $^1/_2 > - 1$				
VERTICILLIEÆ. Pachybasium. mi. $^3/_4$		*Oospora.* mi. ma. $^1/_4 < - 1 <$			
Acrocylindrium. mi. $^1/_4 < - >$ Mucrosporium. mi. $^1/_2 > <$ BOTRYTIDEÆ. Botryosporium. ma. $^3/_4 < - 1$ Martensella. ma. $^1/_4 <$		*Fusidium.* mi. ma. $^1/_4 < - ^1/_4 <$			
. . . .	. . . .	*Monilia.*	*Torula.*		

LA

FLORE MYCOLOGIQUE DE LA BELGIQUE.

SPHÆROPSIDEÆ, Lev.

Périthèces sans thèques.

Famille I : SPHÆRIOÏDEÆ, Sacc.

Périthèces noirs, membraneux, subcoriaces, charbonneux, ni dimidiés, ni excipuliformes.

I.

PÉRITHÈCES SIMPLES, ÉPARPILLÉS.

Groupe I (Périthèces séparés, chauves).

Sous-Famille I : PHOMEÆ ou HYALOSPORÆ.

Genre : **PHOMA.**

Ostiole en papille, pas de tache.

Sous-genre : EUPHOMA.

Phoma sous-cutané, à basides courtes, monospores.

A. MICROSPORA (MICROPHOMA).

1-14 μ. longueur.

Spores botuliformes-allantoïdes, bacillaires, cylindriques ou subcylindriques, fusoïdes.

Comme largeur le $^{1}/_{4}$ de la longueur.

Spores oblongues-ellipsoïdes, oblongues-ovoïdes.

Comme largeur entre le $^{1}/_{4}$ et la $^{1}/_{2}$ de la longueur.

Spores oblongues-ovées ou ellipsoïdes.

Comme largeur la $^{1}/_{2}$ de la longueur.

Spores elliptiques, ovoïdes.

Comme largeur entre la $^{1}/_{2}$ et les $^{3}/_{4}$ de la longueur.

Spores ovales.

Comme largeur les $^{3}/_{4}$ de la longueur.

Spores sphéroïdes-elliptiques, sphéroïdes-ovales, sphéroïdes.

Comme largeur entre les $^{3}/_{4}$ et la presque longueur.

Spores sphériques.

Comme largeur la dimension de la longueur.

* Plantes ligneuses dicotylédonées.

† *Microsp.* Sp. $^{1}/_{4} >$ à $^{1}/_{2} >$, rarem. $<$ à $^{3}/_{4} > <$ à 1 $> <$.

a) *Ramicoles.*

Phoma Myricæ, Karst.

2 μ. diam. ou **3** = **2**.

Périthèces rassemblés, difformes par compression, érumpents; spores sphéroïdes ou ellipsoïdes-sphéroïdes.

Sur rameaux de *Myrica gale*. Z. arg. sablon.

Phoma Vitis, Bon.

3-3 $^{1}/_{2}$ = **1-2**.

Périthèces épars, petits, ponctiformes, se déprimant; ostioles coniques, perforant l'épiderme; spores ovales-elliptiques.

Sarments de *Vitis-Vinifera*. Z. arg. sablon.

Phoma Dulcamarina, Sacc.

3 = **2** (goutt. 1).

Périthèces rassemblés, ponctiformes, quelquefois confluents, presque émergents; spores elliptiques, subarrondies. Spermogonie de *Diaporthe dulcamara*.

Sur tiges de *Solanum dulcamara*. Z. arg. sablon.

Phoma Fuckelii, Sacc.

3-4 = $^3/_4$; basides 2 = 1.

Spermogonie de *Cœlosphœria Fuckelii*. Périthèces globuleux; spores botuliformes. Issus d'une couche proligère et jaunâtre.

Sur les rameaux du *Robinia pseudacacia*.

Phoma Minima, Schulz et Sacc.

4-5 μ. long. (goutt. 2).

Périthèces lâchement rassemblés, érumpents, obtus; spores cylindracées.

Sur les rameaux de *Fraxinus excelsior*. Z. arg. sablon.

Phoma Tamaricella, Sacc.

4 = $^3/_4$; basides presque nulles.

Périthèces à papilles érumpentes; spores cylindriques.

La variété *Calluna* sur rameaux de *Calluna*. Z. arden.

Phoma Crepini, Speg.

4 = **1** (goutt. 2).

Spermogonie du *Cenangium populinum*. Périthèces touffus, roux, érumpents, papillés; spores ordinairement botuliformes.

Sur les rameaux du *Populus fastigiata*. Z. arden. et arg. sabl.

Phoma Enteroleuca, Sacc.

4 = **1** $^1/_2$; pas de basides.

Périthèces amoncelés, érumpents, à peine papillés; noyau blanc; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur les rameaux de *Pirus* et de *Syringa*. Z. arden.

Phoma Cratægi, Sacc.

4 = **1** $^1/_2$.

Périthèces irréguliers subglobuleux; noyau blanc; spores oblongues-ellipsoïdes. Spermogonie d'*Otthia cratægi.*

Sur rameaux de *Cratægus oxyacantha.* Z. arden.

Phoma Protracta, Sacc.

4 = **1** $^3/_4$; basides 25 = 1 $^1/_2$.

Spermogonie de *Cucurbitaria protracta,* Fckl. Périthèces amoncelés en lignes subparallèles, érumpents, papillés; spores oblongues-ovoïdes.

Sur rameaux d'*Acer campestre.* Z. arden.

Phoma Piceana, Karst.

5 = **1**.

Périthèces épars, demi-érumpents, subastomes, points très petits; spores botuliformes.

Sur les rameaux morts de *Picea excelsa.* Z. arg. sabl.

Phoma Bignoniæ, Sacc., Bom. et Rouss.

4 = **2** $^1/_2$-**3**.

Périthèces épars, petits, à papilles érumpentes; spores irrégulièrement ovoïdes.

Sur rameaux morts de *Bignonia radicans.* Z. arg. sabl.

Phoma Foveolaris, Sacc.

6 = **3** (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe Laschii,* Nick. Périthèces rassemblés, innés, déprimés-concaves à fossettes; spores oblongues-ovées.

Sur rameaux d'*Evonymus europæus.* Z. arden.

Phoma Mixta, B. et C.

6 μ. mêlées à des soies filiformes recourbées au sommet, 18 μ. long.

Périthèces en pustules, sous-corticales, libres tardivement; spores fusoïdes, apiculées.

Sur rameaux de *Liriodendrum tulipifera.* Z. arg. sablon.

Phoma Libertiana, Speg.

6-6 $^1/_2$ = **3** (goutt. 2).

Spermogonie de *Cenangium pinastrum*. Périthèces rassemblés, érumpents, roux, papillés, se déprimant; spores oblongues-ovées.

Sur rameaux d'*Abies*. Z. arden.

Phoma Siliquastri, Sacc.

6-7 = **2-2** $^1/_2$.

Spermogonie de *Diaporthe*. Périthèces densément rassemblés, à peine érumpents, se déprimant, gris; spores oblongues-subfusoïdes.

Sur rameaux du *Cercis siliquastrum*. Z. arg. sabl.

Phoma Rudis, Sacc.

6-7 = **2** $^1/_2$ (goutt. 2); basides 25 = 1 $^1/_2$.

Spermogonie *Diaporthe rudis,* Nitsck. Périthèces rassemblés, érumpents, se déprimant; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux de *Cytisus laburnum*. Z. arden.

Phoma Salicina, (West.) Sacc.

6-7 = **2-2** $^1/_2$; basides même longueur.

Spermogonie de *Diaporthe*. Périthèces rassemblés, sous-cutanés, se déprimant; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux de *Salix*. Z. arg. sabl. et arden.

Phoma Revellens, Sacc.

6-7 = **3** (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe revellens*. Périthèces sous-cutanés, érumpents, rassemblés, se déprimant; spores oblongues.

Sur le fruit du *Corylus avellana*. Z. calc. Mai.

Phoma Oblonga, Desm.

6-7 = **3** (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe eres,* Nits. Périthèces oblongs, épars, couverts par l'épiderme gercé, à pores; noyau cendré; spores oblongues-ovées.

Sur rameaux d'*Ulmus*. Z. arden.

Phoma Calluna, nobis.

6-7 = **3-4** (goutt. 2).

Périthèces, à papilles érumpentes, rassemblés; spores oblongues-ovées.

Sur rameaux d'*Erica*. Z. arden.

Phoma Cinerescens, Sacc.

6-8 = **2** $^1/_2$ (goutt. 2).

Spermogonie *Diaporthe cinerescens*, Sacc. Périthèces rassemblés, sous-cutanés, se déprimant, noir-olive; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux de *Ficus carica*. Z. arg. sablon. et arden.

Phoma Ryckholtii, Sacc.

6-8 = **2** $^1/_2$ (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe Ryckholtii*, nobis.

Sur *Symphoria*.

Phoma Grossulariæ, Schulz.

6-9 μ. (à peine des basides).

Périthèces rassemblés, couverts, s'ouvrant obtusément au sommet, se déprimant; spores oblongues.

Rameaux du *Ribes grossulariæ*. Z. calc.

Phoma Velata, Mich.

(**10-12** = **2** $^1/_2$). Var. *minor*, **7-7** $^1/_2$ = **2** (gtt. 2); basides 10-14 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe*. Périthèces demi-couverts, épiderme déchiré, sombre olive; spores subcylindriques.

Sur rameaux de *Tilia europæa*. Z. arg. sablon.

Phoma Palina, (Fr.) Sacc.

7-8 μ. (goutt. 2); basides longues.

Périthèces épars, coniques-tronqués, rugueux, érumpents puis sublibres, perforés d'un pore; spores fusoïdes

Sur branches de *Salix vitellina*. Z. arg. sablon

Phoma Controversa, Nits.

7-8 = **2-2** $1/2$ (goutt. 2); basides courbées 12 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe*. Périthèces rassemblés, presque couverts, gris à l'intérieur; spores subcylindriques.

Sur rameaux de *Fraxinus excelsior*. Z. arg. sablon.

Phoma Alnea, (Nits.) Sacc.

7-8 = **2** $1/2$-**3**; basides 20 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe alnea,* Fckl. Périthèces rassemblés, sous-cutanés, déprimés, gris-noir.

Sur rameaux d'*Alnus glutinosa* Z. arden. et calc. Mai.

Phoma Coronillæ, West.

7-8 = **3** (goutt. 2); basides 20 = 1 $1/2$.

Spermogonie du *Diaporthe coronillæ,* Sacc.

Phoma Coneglanensis, Sacc.

7-8 = **3** (goutt. 2); basides 15 = 3.

Périthèces sous-cutanés, rassemblés, oblongs; spores oblongues-fusoïdes.

Sur rameaux de marronnier. Z. arg. sablon.

Phoma Stictica, B. Br.

7-8 = **3-3** $1/2$ (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe retecta,* Fckl. Périthèces subépars, couverts par l'épiderme longitudinalement déchiré; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux de *Buxus sempervirens*. Z. arg. sablon.

Phoma Crustosa, Sacc., Bom. et Rouss.

7-9 = **3** $1/2$ (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe crustosa*. Périthèces nombreux, ponctiformes, couverts de l'épiderme noirci, ayant un pore; spores ovales-acuminées.

Sur tronc et rameaux de l'*Ilex aquifolia*. Z. arg. sablon.

Phoma Sorbariæ, Sacc.

7-9 = **2** $1/_2$ (goutt. 2); basides 17-20 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe sorbariæ*, Nits. Périthèces rassemblés, sous-cutanés, se déprimant; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux de *Spiræa sorbifolia*. Z. arden.

Phoma Oppilata, (Fr.) Sacc.

7-10 μ. (goutt. 2).

Périthèces épars, érumpents, unis, subastomes · ostioles subgerecés; spores fusoïdes.

Sur jeunes rameaux de *Betula alba*. Z. arg. sablon.

Phoma Inæqualis, Speg.

7-10 = **2-3** (goutt. 2).

Spermogonie *Diaporthe inæqualis*, Nits. Périthèces sculptés dans le bois, couverts par l'écorce, circonscrits par une ligne en forme de strome; spores fusoïdes, à côtés inégaux.

Sur rameaux d'*Ulex*. Z. arden.

Phoma Pulla, Sacc. (*Hederæ*, Fckl.)

8 = **2** (goutt. 2); basides 15-16 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe pulla*, Nits. Périthèces rassemblés, couverts par l'épiderme noirci, déprimés; spores subcylindriques.

Sur rameaux de *Hedera helix*. Z. arden.

Phoma Sordida, Sacc.

8-10 = **2-2** $1/_2$ (goutt. 2); basides 27 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe sordida*. Périthèces subrassemblés, sous-cutanés, érumpents, se déprimant; spores oblongues-fusoïdes.

Sur rameaux du charme. Z. arg. sablon.

Phoma Corni, Fckl.

8-10 = **2-3** (goutt. 2); basides 25 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe corni*, Fckl. Périthèces épars, érumpents, papillés, épiderme noirci; spores subcylindriques, courbées.

Sur rameaux de *Cornus sanguinea* et *alba*. Z. calc.

Phoma Incarcerata, (Nits.) Sacc.

8 = **2** (goutt. 2); basides 20 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe incarcerata* (B. et Br.). Périthèces rassemblés, petits, se déprimant, sous-cutanés; spores fusoïdes.

Sur tiges de *Rosa canina* et *pomifera*. Z. arg. sablon. et arden.

Phoma Sarothamni, Sacc.

8-12 = **2** (goutt. 2); basides crochues 30 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe sarothamni*, Auerswd. Périthèces érumpents, se déprimant; spores subcylindriques.

Sur rameau de *Sarothamnus scoparius*. Z. arden. et arg. sablon.

Phoma Syringina, Sacc.

8 = **3** (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe nodosa*. Périthèces épars, petits, sous-épidermiques; spores oblongues-lancéolées.

Sur rameaux de *Syringa vulgaris*. Z. arg. sablon.

Phoma Cryptica, Nits.

8 = **3** (goutt. 2); basides 33 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe cryptica*, Nits. Périthèces rassemblés, sous-cutanés, gris-noir, se déprimant; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux de *Lonicera*. Z. arden.

Phoma Sambucina, Sacc.

8-10 = **3** (goutt. 2); basides 15 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe*. Périthèces rassemblés, gris-sombre brun, se déprimant, couverts au début; spores oblongues-fusoïdes.

Sur rameaux de *Sambucus nigra*. Z. arg. sablon.

Phoma Sambucella, Sacc.

8 = **3-4** (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe spiculosa*, A. et S. Périthèces rassemblés, érumpents, se déprimant; spores oblongues-ovoïdes.

Sur rameaux de *Sambucus*. Z. arden.

Phoma Phillipsiana, Sacc. et Roum.

483-3 = **5** ? **4** = **3-3** $^1/_2$? 1 noyau.

Périthèces lâchement rassemblés, se déprimant, subcoriaces, émergents, *spores globuleuses-ellipsoïdes*.

Sur rameaux de l'*Alnus*. Z. arden.

Phoma Fraxinea, Sacc.

8 = **4** (goutt. 2).

Périthèces rassemblés, érumpents, se deprimant, perforés, d'un ocre sombre brun; spores oblongues-ovées.

Sur rameaux de *Fraxinus ornus*. Z. arden.

Phoma Robergeana, Sacc.

9 = **2**; basides 25-30 = 1 $^1/_2$.

Périthèces rassemblés, sous-cutanés, érumpents, se déprimant, à peine perforés; spores courbées.

Sur rameaux de *Staphylea pinnata*. Z. arg. sablon.

Phoma Putator, Sacc.

9-10 = **2** $^1/_2$ (goutt. 2); basides 8 = 1 $^1/_2$.

Spermogonie de *Diaporthe*. Périthèces rassemblés, perforés, sous-cutanés, se déprimant; spores subcylindriques.

Sur rameaux de *Populus*. Z. arden.

Phoma Pithya, Sacc.

9-11 = **2** $^1/_2$-**3** $^1/_2$ (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe pithyæ*, Sacc. Périthèces épars, demi-érumpents, à peine papillés, fuligineux; spores fusoïdes.

Sur rameaux de pin sylvestre. Z. arden. et arg. sablon.

Phoma Padina, Sacc.

9-11 = 3.

Spermogonie de *Diaporthe decorticans*, (Lib.) Sacc. Périthèces épars, presque couverts, lenticulaires; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux de *Prunus padus*.- Z. arden. et arg. sablon.

Phoma Ramealis, Desm.

10 = 2 $^1/_2$**-3** (goutt. 2).

Périthèces très rapprochés, petits, innés, couverts, noir-opaque; ostioles papillés, noyau blanc; spores oblongues-obtuses.

Sur rameaux d'*Evonymus europæus*. Z. calc.

Phoma opulifolia, Cooke.

10 = 2 $^1/_2$ (goutt. 2).

Périthèces rassemblés, se déprimant, ponctiformes, couverts par l'épiderme légèrement élevé; spores lancéolées, aiguës.

Sur rameaux du *Spiræa opulifolia*. Z. arg. sablon.

Phoma Oncostoma, Thüm.

10 = 2 (goutt. 2); longues basides.

Spermogonie de *Diaporthe oncostoma*. Périthèces rassemblés, subinégaux, couverts, se déprimant, noir-olive; spores cylindriques.

Sur rameaux de *Robinia pseudacacia*. Z. arden.

Phoma Depressa, Sacc. (*Sphæropsis*, Lev.)

10 = 2 $^1/_2$**-3** (goutt. 2); basides 20-28 = 1 $^1/_2$.

Phoma Juglandina, (Fckl.) Sacc.

10-12 = 3-4 (goutt. 2); basides 25 = 1-1 $^1/_2$.

Périthèces se déprimant, couverts, noir-gris; spores fusoïdes.

Sur rameaux de *Juglans regia*. Z. arg. sablon.

Phoma Pustulata, Sacc.

10-13 = **3** $^1/_2$; basides 14 μ. en crochets.

Spermogonie de *Diaporthe pustulata*. Périthèces rassemblés, se déprimant, érumpents, entourés de plusieurs zones noires; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux d'*Acer pseudoplat.* Z. arden.

Phoma Mülleri, Cooke.

10-12 = **3** (goutt. 2).

Périthèces épars, ponctiformes, couverts; ostioles courts, perforant; spores étroitement ellipsoïdes.

Sur les sarments des ronces. Z. arg. sablon.

Phoma Ericæ, Sacc.

12-14 = **6-7**, nobis; basides 12-15 = 1 $^1/_2$.

Périthèces érumpents, déprimés, papillés, laissant comme trace une tache noire subcirculaire dans la matrice; spores oblongues-ovées.

Sur tronc d'*Erica vulgaris*. Z. arden.

Phoma Diplodioïdes, Sacc.

12-15 = **3-3** $^1/_2$; basides très courtes.

Périthèces ordinairement épars, sous-cutanés, érumpents, coniques, papillés; spores fusoïdes, obtusiuscules.

Sur rameaux de marronnier. Z. arg. sablon.

ESPÈCES INCERTAINES.

Phoma Radula, B. Br.

Gouttes 2.

Périthèces coniques, érumpents, donnant un aspect rude à la matrice; spores oblongues-ellipsoïdes (fusoïdes).

Sur rameaux de platane. Z. arden.

Phoma Planiuscula, Sacc. (*Depressa*, B. Br.)

Gouttes 2.

Périthèces faux, déprimés, épars, en pustules perforées, placés dans un strome olive; spores fusoïdes.

Sur rameaux d'*Ulmus* et du *Robinia pseudacacia*. Z. arden.

Phoma Mutica, (B. Br.) Sacc.

Sphæropsis mutica, B. Br.

Périthèces érumpents, globuleux, plus ou moins cespiteux, noir-luisant; spores ellipsoïdes, très petites, hyalines.

Sur rameaux d'*Alnus glutinosa*. Z. arg. sablon.

b) *Foliicoles et fructicoles.*

† *Microsp.* Sp. $^1/_4 >$ à $^1/_2 >$ rarem. $<$ à $^3/_4 > <$.

Phoma Aucubæ, West.

5 = **2** $^1/_2$; spores oblongues-ovées.

Phoma Lineolata, Desm.

5-7 μ. long.

Phoma Glandicola, Desm.

6-7 = **1** $^3/_4$-**2**; basides 20-2.

Périthèces rassemblés, érumpents, entourés par l'épiderme déchiré; ostioles à peine marqués; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur glands de chêne. Z arg. sablon.

Phoma Strobiligena, Desm.

6-8 = **3**; spores oblongues-ovées.

Phoma Samarorum, Desm.

7 μ. long.

Phoma Magnusii, Sacc., Bom. et Rouss.

6-7 = **2** 1/2 (goutt. 2).

Périthèces épars, lenticulaires, nombreux, couverts; ostioles papillìformes érumpents; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur les feuilles de *Phœnix dactylifera*. Z. arg. sablon.

Phoma Cirratula, Desm.

7 1/2 = **2** 1/2 (goutt. 2).

Périthèces assez grands, rapprochés, s'affaissant; noyau expulsé en cirrhe; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur les feuilles languissantes de *Daphne*. Z. arg. sablon.

Phoma Occulta, Sacc.

7 = **3** (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe occulta*. Périthèces pustuleux, nichant dans un strome limité de noir, souvant par gerçures; noyau gris; spores oblongues-ovoïdes.

Sur les écailles de cônes d'*Abies*. Z. arden.

Phoma Acicola, (Lev.) Sacc. (*Sphæropsis acicola*, Lev.).

7 = **4**.

Périthèces assez grands, érumpents, rugulcux, entourés de l'épiderme; noyau blanc; spores oblongues-ovées.

Sur les feuilles de pin sylvestre. Z. arden.

Phoma Petiolorum, Desm.

7-8 = **3** (goutt. 2); basides 20-23 = 1.

Périthèces épars, papillés, couverts; noyau blanc; spores fusoïd es. Spermogonie de *Pleospora petiolorum*, Fckl.

Sur les pétioles de *Robinia pseudacacia*. Z. arg. sablon.

Phoma Deflectens, Sacc., Bom. et Rouss.

7-12 = **2-3** (goutt. 2); basides 10-12 = 1 1/2.

Périthèces groupés à la base des feuilles, irréguliers et déprimés, perçant l'épiderme dressé autour d'eux; spores allantoïdes.

Sur feuilles mortes d'*Araucaria imbricata*. Z. arg. sablon. Hiver.

Phoma Leptidea, (Fr.) Sacc. (*Sphæria Leptidea*, Fr.).

8 = 2.

Périthèces rassemblés, convexes, s'affaissant, couverts, perforés-ombiliqués; spores botuliformes.

Sur les feuilles de *Vaccinium vitis idœa*. Z. arden.

Phoma Pterophila, (Nits.) Fckl.

8 = 3 (goutt. 2).

Périthèces assez grands, rassemblés, se déprimant, perforés; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur les samares de *Fraxinus excelsior*. Z. arg. sablon.

Phoma Gloriosa, Sacc.

8 = 3 (goutt. 2); basides 15 = 2; courbées.

Périthèces rassemblés çà et là, couverts, se déprimant, entourés d'une ligne noire et tortueuse; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur feuilles pourrissantes d'*Yucca gloriosa*. Z. arg. sablon.

Phoma Epiphylla, (Lev.) Sacc. (*Sphæropsis epiphylla*, Lev.).

8-10 = 2 (goutt. 2).

Périthèces épars, petits, s'affaissant, luisants, couverts, proéminents; noyau blanc-gris; pores assez grands et irrégulièrement ouverts; spores subcylindriques. *Pycnide de* Phacidium lauro-cerasi?

Sur les feuilles de *Prunus lauro-cerasus*, de *Rhamnus alaternus*. Z. arg. sablon.

Phoma Leucostigma, Sacc.

10-12 = 3-4 (goutt. 2).

Périthèces épars, proéminents, innés; ostioles blancs et perforés; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur les feuilles de *Buxus*. Z. arden.

Phoma Conorum, Sacc.

10-14 = **2-2** $^3/_4$ (goutt. 1); basides 24 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe conorum*. Périthèces rassemblés, érumpents, se déprimant, subastomes; noyau gris; spores fusoïdes.

Sur les écailles de cônes d'*Abies*. Z. arden.

Phoma. Querci, Sacc. (*Sphæropsis querci*, nobis).

12 = **6**.

Phoma Geniculata, (B. et Br.) Sacc. (*Sphæropsis geniculata*, B. et Br.).

Basides attachées à angle obtus-oblique, 4-5 fois la longueur des spores.

Périthèces à ostioles coniques et proéminents; spores cylindracées, courbées.

Sur les feuilles de *Pinus strobus*. Z. arg. sablon.

Phoma Ocellata, (Lev.) Sacc. (*Sphæropsis ocellata*, Lev.).

Périthèces épars, couverts; ostioles proéminents et perforés, blancs; spores oblongues-linéaires.

Sur les nervures de feuilles de chêne. Z. arg. sablon.

Phoma Strobi, (B. et Br.) Sacc. (*Sphæropsis Strobi*, B. et Br.).

Périthèces petits, s'affaissant; spores linéaires, oblongues, 6-7 fois plus longues que larges.

Sur les feuilles de *Pinus strobus*.

** Plantes herbacées dicotylédonées.

a) *Caulicoles.*

† *Micros.* Sp. $^1/_4 >$ à $^1/_2 >$ rarem. $<$ à $^3/_4 > <$

Phoma Errabunda, Desm.

3-4 = **1** $^1/_2$; spores oblongues-ovoïdes.

Phoma Brassicæ, Thüm.

3-4 = **1** $^1/_2$-**2**.

Périthèces assez gros, rassemblés, plissés, superficiels, d'un brun noir; spores oblongues-ovées.

Sur les tiges de choux. Z. arden. (Libert).

Phoma Anethi, Sacc. (*Sphæria anethi*, Pers.).

4 μ. long ; spores ovées-cylindracées.

Phoma Silvatica, Sacc.

4 = **1** (goutt. 2).

Périthèces ordinairement oblongs, rassemblés, sous-cutanés, proéminents; spores cylindriques.

Tiges mortes de *Melampyrum silvaticum.* Z. arden. Hiver.

Phoma Acuta, Fckl.

4 = **1** $^1/_2$ (goutt. 2).

Spermogonie de *Pleospora acuta,* Fckl. Périthèces assez grands, se dénudant; ostioles conoïdes-aigus; spores oblongues-ovoïdes.

Sur tiges d'ortie. Z. arden. et arg. sablon.

Phoma Longissima, West.

4-6 = **1** $^1/_2$-**2** ; spores oblongues-ellipsoïdes.

Phoma Urticæ, Schulz.

4-6 = 2.

Périthèces rassemblés, cachés ou subsuperficiels, se déprimant, ouverts par pore; spores oblongues-cylindriques.

Sur tiges d'*Urtica dioïca*. Z. arg. sablon.

Phoma Lingam, Desm. (Tode).

5 μ. long. (goutt. 2).

Périthèces rassemblés, difformes, s'affaissant, rugueux; ostioles rudes, se détachant; spores oblongues.

Sur les tiges de choux. Z. arden.

Phoma Ruborum, West.

5-6 = 1; spores botuliformes.

Phoma Oleracea, Sacc.

5-6 = 2 (goutt. 2).

Périthèces épars, se déprimant, papillés; spores cylindracées, un peu rétrécies au milieu.

Sur tiges de choux. Z. arden.

Phoma Complanata, Tod.

5-6 = 2 (goutt. 2).

Périthèces érumpents, assez gros, papillés, comprimés-ombiliqués, non-fuligineux; spores botuliformes.

Surtout sur tiges d'ombillifères. Z. arg. sablon.

Phoma Melæna (Fr.) Mont. et Dur.

5-6 = 3. Forma *Silenes*. Z. calc. et arden.

Phoma Exigua, Desm.

5-7 long. μ.

Phoma Thalictrina, Sacc.

6-7 = **3-3** $^1/_2$ (goutt. 2).

Périthèces rassemblés, sous-cutanés, globuleux-oblongs; spores oblongues-ovées. Spermogonie de *Diaporthe.*

Sur tiges de *Thalictrum glaucum.* Z. arg. sablon.

Phoma Herbarum, West. (1).

6-11 = **3-4**; spores oblongues-ovées.

Périthèces globuleux-déprimés, papillés.

Phoma Ebulina, Sacc.

6-12 μ. long. (goutt. 2).

Périthèces globuleux, couverts, subastomes; noyau blanc; spores ovoïdes-oblongues. Dans le *Phoma ebuli,* Schulz, les spores ont 1 $^1/_2$-2 $^1/_2$ μ. long. et sont ovées.

Sur tiges de *Sambucus ebulus.* Z. arg. sablon.

Phoma Subordinaria, Desm.

7 μ. long (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe adunca* (Desm.).

Phoma Nebulosa, (Pers.) Mont.

7-8 = **1** $^3/_4$-**2**. Forma *Althœa.*

(1) Mes études sur la germination des spores se sont faites particulièrement sur le **Phoma herbarum** et le **Pleospora herbarum.**

En hiver, les tiges herbacées permettent de suivre, au microscope et à la loupe, le *Mycelium conidien* qui développe les spermogonies et les périthèces thécaspores; en outre les micro-organismes, étrangers aux préparations, se développent plus lentement à cette saison.

Nous nous sommes servis de l'infusion filtrée de la plante nourricière. Deux molécules de cire, placées entre le porte-objet et la lamelle, permettent à l'air de circuler entre les ilots liquides ménagés, par cette disposition. Comme étuve, nous avons employé la cloche en verre avec éponges humides.

Phoma Venenosa, Sacc.

7 = **2** $^1/_2$.

Périthèces rassemblés, noircissant l'épiderme, oblongs; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur tiges de *Datura stramonium*. Z. arden.

Phoma Striæformis, Dur. et Mont.

7-8 = **2** $^1/_2$-**3** (goutt. 4); longuem. stipitées. Sur la var. *Hysteriola*.

Périthèces subrassemblés en séries, érumpents, ovoïdes, avec ostioles ou perforés; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur rameaux déjetés de *Sambucus nigra*. La variété *Hysteriola*, Sacc. sur *Dipsacus silvestris*. Z. calc. Avril.

Phoma Durandiana, Sacc.

7-9 = **2-3** (goutt. 2).

Spermogonie de *Diaporthe maculosa*, Sacc. Périthèces rassemblés, déprimés, épiderme ponctué-noir, spores oblongues-fusoïdes.

Sur tiges de *Rumex*. Z. arden.

Phoma Malvæcearum, West.

7-10 = **2** $^1/_2$-**3** (goutt. 2).

Phoma Fœniculina, Sacc.

8 = **3** (goutt. 2); basides 20 = 1.

Spermogonie de *Diaporthe*. Périthèces rassemblés, globuleux-oblongs; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur tiges de *Angelica*, *Heracleum* (Libert). Z. arden.

Phoma Lirellata, Sacc.

8-10 = **2-2** $^1/_2$.

Périthèces rassemblés souvent en séries, bien comprimés, érumpents, à peine papillés; spores fusoïdes.

Sur les tiges de *Pæonia*, *Matricaria*, *Lythrum*. Z. arden.

Phoma Vulgaris, Sacc.

8-10 = **2** $^1/_3$-**3**.

Périthèces rassemblés, à pores, globuleux-lenticulaires, couverts; spores oblongues-réniformes.

Sur tiges de *Clematis vitalba*. Z. arden.

Phoma Achilleæ, Sacc.

9-10 = **2** $^1/_2$-**3** $^1/_2$ (goutt. 2); basides 26 = 1 crochues.

Spermogonie de *Diaporthe orthoceras*, f. *Achilleæ!* Périthèces rassemblés, oblongs; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur tiges mortes d'*Achillea millefolium*. Z. arden. et marit.

Phoma Albicans, Rob. et Desm.

10 μ. long.

Spermogonie de *Pleospora albicans*.

Phoma Lavateræ, West.

10 = **2** $^1/_2$; spores fusoïdes.

Phoma Dentariæ, (West.) Sacc. (*Zythia dentariæ*, West.) (*Acospora dentariæ*, Fckl.).

10 = **2**; spores cylindracées.

Phoma Spirææ, Desm.

10 = **3** (goutt. 2).

Périthèces perforés, suborbiculaires, soulevant l'épiderme; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur les tiges de *Spirææ*. Z. arg. sablon.

Phoma Atriplicina, West.

10 = **5** (goutt. 2); spores oblongues-ovées.

Phoma Phaseoli, Desm.

10-12 μ. long (goutt. 2).

Phoma Eryngii, Sacc.

12-13 = 3.

Périthèces papillés, couverts ; ostioles à peine émergents; spores fusoïdes cylindracées, légèrement resserrées au milieu.

Sur tiges d'*Eryngium*. Z. arden.

Phoma Epilobii, Preuss.

Périthèces d'un noir de poix, celluleux, à sommet souvent déprimé et à noyau blanc, sur taches arrondies et difformes, uniformes; spores subfusiformes, avec gouttes huileuses.

Sur tiges mortes d'*Epilobium angustifolium*. Z. calc.

Phoma Picea, (Pers.) Sacc.

Spermogonie de *Diaporthe picea*. Périthèces épars, subdéprimés, cachés, couleur de poix, allongés, inégaux, astomes, puis ouverts.

Sur tiges d'*Helleborus fœtidus*. Z. calc.

b) *Foliicoles et fructicoles.*

† *Microsp.* Sp. $^1/_4 >$ à sp. $^1/_2 >$ rarem. $<$ à $^3/_4 ><$.

Phoma Siliquæ, Sacc.

4 = 1.

Périthèces rassemblés, érumpents, conoïdes; spores subcylindriques.

Sur siliques de *Cheiranthus cheirus*. Z. arden.

Phoma Siliquastrum, Desm.

5 μ. (goutt. 2).

Périthèces rassemblés, d'un brun noir, à pores, avec taches oblongues d'un brun olive; spores fusoïdes.

Sur les siliques et pédoncules de choux. Z. calc.

Phoma Filaginis, West.

5 = **1,3**.

Phoma Leguminum, West.

5 = **2** $1/2$.

Phoma Punctiformis, Desm.

5-7 μ. long.

Périthèces épars, papillés, puis perforés, nombreux, convexes, couverts, d'un noir brunâtre; à cirrhe grisâtre; spores oblongues inégales.

Sur les feuilles de *Lychnis chalcedonica*.

Phoma Saxifragarum, West.

6-7 = **2** $1/2$ (goutt. 2).

Phoma Effusa, Rob.

7 $1/2$ = **2** $1/2$.

Périthèces épiphylles, subrassemblés, ponctiformes, couverts; ostioles papillés, érumpents, quelquefois entourés d'un halo blanc; spores oblongues.

Sur feuilles mortes d'*Helleborus fœtidus*. Z. calc.

Phoma Cucurbitacearum, (Fr.) Sacc. (*Sphæria cucurbitacearum*, Fr.).

7 $1/2$ = **3**.

Phoma Vincetoxici, West.

7 $1/2$-**8** = **3-4**.

Phoma Siliquarum, Sacc.

8 = **3**.

Périthèces rassemblés lâchement, se déprimant, papillés; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur les siliques de choux. Z. arden.

Phoma Subvelata, Sacc.

8-9 = **2-2** $1/2$ (goutt. 2); basides 30 = 1.

Périthèces rassemblés, largement perforés, globuleux-lenticulaires; spores botuliformes légèrement resserrées au milieu.

Sur l'épicarpe de *Cucurbita*. Z. arg. sablon.

Phoma Westendorpii, Tosq.

10 = 3; spores oblongues-ellipsoïdes.

Phoma Deusta, Fckl.

10 = 2; spores cylindracées.

Phoma Decorticans, De Not.

10 = 2-2 $^1/_2$ goutt. 2).

Périthèces rassemblés, se déprimant, papillés, épiderme se laissant aller en miettes; spores cylindracées.

Sur l'écorce du fruit du *Cucumis*. Z. arg. sablon.

ESPÈCES INCERTAINES.

Phoma Ammophilæ, Dur. et Mont.

Périthèces très nombreux, émergents, très petits, placés sur des taches grises; spores?

Sur les chaumes d'*Ammophila arenaria*. Z. arg. sablon.

Phoma Podagrariæ, West., *Bull. Acad.*, Brux. 1852, III, p. 116.

Sur *Agopodium podagraria*. Z. arg. sablon.

*** PLANTES MONOCOTYLÉDONÉES.

† *Microsp.* Sp. $^1/_4 >$ à $^1/_2 >$ rarem. $<$ à $^3/_4 > <$.

Phoma Phormii, (Cooke) Sacc. (*Coniothyrium phormium*, Cooke).

4-3.

Périthèces rassemblés, demi-immergés, allongés avec fissures; spores ovales.

Sur les feuilles de *Phormium tenax*. Jardin botanique de Bruxelles.

Phoma Nitida, Rob.

5 μ.

Périthèces épiphylles, épars, petits, luisants, couverts de l'épiderme se gerçant; ostioles papilliformes; spores subovoïdes.

Sur chaumes d'*Ammophila arenaria*. Z. marit.

Phoma Aliicola, Sacc.

5-2 (goutt. 2).

Périthèces rassemblés, perforés, devenant superficiels, très petits, d'un noir intense; spores oblongues ovoïdes.

Sur tiges d'*Allium*. Z. arden.

Phoma Liliacearum, West., 5; Not., p. 20.

7 $^1/_2$ = **1-2** (goutt. 2).

Périthèces ovoïdes-oblongs, déposés en séries le long des fibres; ostioles poriformes; spores ovoïdes.

Sur les pédoncules d'*Hemerocallis fulva*. Z. arg. sablon.

B. MACROSPORA (MACROPHOMA), Sacc., Berl. et Vogl.

Sp $^1/_4 >< $ à $^1/_2 >$.

* PLANTES LIGNEUSES DICOTYLÉDONÉES.

a) *Ramicoles.*

Phoma Corylina, Thüm.

13-18 = 8-10.

Périthèces rassemblés, érumpents et proéminents, se déprimant, d'un noir opaque; spores elliptiques; épispore subépaissi.

Sur les rameaux arides de *Corylus avellana*. Z. arden.

Phoma Scheidweileri. West. (*Sphæropsis*).

24-30 = 12-14; spores oblongues-ovées.

Phoma Laburni, West. (*Sphæropsis*).

20-30 = 13-14; spores ellipsoïdes.

Phoma Fraxinicola, nobis.

24 = 10-12.

Périthèces rassemblés ou groupés, sous-cutanés; noyau blanc; spores ellipsoïdes.

Sur écorce de frêne. Z. arden. Hiver.

Phoma Rosicola, nobis.

24-28 = 12.

Mêmes caractères que le *Fraxinicola.*

Sur écorce de *Rosa canina.* Z. arden. Hiver.

Phoma Hyalina, (B. et C.) Sacc.

26-32 μ. long.

Périthèces couverts par l'épiderme soulevé en pustule; spores elliptiques.

Rameaux de *Viburnum opulus.* Z. arg. sablon.

Phoma Ampelopsidis, (C. et E.) Sacc. (*Sphæropsis*).

30-35 = 12.

Périthèces rassemblés, couverts, papillés, à écorce élevée; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur les rameaux d'*Ampelopsis quinque foliæ* (vigne vierge). Partout.

b) *Foliicoles et fructicoles.*

Phoma Ilicis, Desm.

12-15 = 3; spores cylindracées.

Phoma Nitidula, Sacc., Bom. et Rouss.

Macrophoma nitens, Berl. et Vogl.

12-60 = 2.

Périthèces rassemblés, très luisants, subsuperficiels, à peine papillés; spores bacillaires.

Sur glands de chêne. Z. arg. sablon.

Phoma Vincæ, Sacc. (*Sphæropsis*).

15-18 μ. long; spores oblongues-ellipsoïdes.

Phoma Mirbelii, Sacc. (*Sphæropsis*).

15-18 = **8-9**; spores elliptiques.

Phoma Candollei, Sacc. (*Sphæropsis*).

35 = **12**; spores oblongues-ovoïdes.

Phoma Cylindrospora, Sacc. (*Sphæropsis*).

20-25 = **2-3**; basides 15-16 = 1 1/2-2.

Périthèces couverts, perforés, s'affaissant; spores bacillaires.

Phoma Fimicola, Sacc. (*Sphæropsis*).

20-30 = **13-14**; spores oblongues-ovées.

** Plantes monocotylédonées.

Phoma Depressula, Sacc., Bom. et Rouss.

15-16 = **4** 1/2; basides simples, courtes, monospores.

Périthèces nombreux, couverts, sous-épiderme noirci et luisant, peu saillants, s'ouvrant par pore; spores subclaviformes, granuleuses.

Sur les feuilles de *Scirpus cæspitulosus*. Z. arg. sablon.

Phoma Caricina, Thüm.

20-22 = **10**.

Périthèces rassemblés, ponctiformes, d'un noir glauque; des pores; spores oblongues-ovées; épispore subépaissi.

Sur les chaumes morts du jonc. Z. arden.

Sous-genre : APOSPHÆRIA.

† *Microsp.* Sp. $^1/_4 >$ à $^1/_2 >< $ rarem. $1 >$.

Phoma superficiel ou à base incrustée dans le bois ou dans la partie dure de l'écorce; basides fines.

(Phoma) Aposphæria Stigmospora, Sacc.

1-1,5 μ. globuleuses; basides 7-9 = 1,3.

Périthèces ordinairement rassemblés, subsuperficiels, courtement papillés; spores très nombreuses.

Sur les rameaux de *Calluna vulgaris*. Z. arden. et arg. sablon.

(Phoma) Aposphæria Oxystoma, Sacc.

3 = 1.

Périthèces rassemblés, subsuperficiels, coniques, papillés aigus, luisants; spores subcylindriques.

Sur bois. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Fuscidula, Sacc.

3-4 = 1 $^1/_2$-**2** (goutt. 2).

Périthèces rassemblés, à base enfoncée dans le bois, conoïdes, papillés; spores oblongues-ovées. Spermogonie de *Melanomma fuscidulum*, Sacc.

Sur rameaux de *Sambucus nigra*. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Labens, Sacc.

4 = 1; basides 8 = 1.

Périthèces rassemblés, superficiels, membraneux, noir fuligineux, à peine papillés, s'affaissant, excavés; spores botuliformes.

Sur bois de *Robinia pseudacacia*, de *Cratægus*. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Pulviscula, Sacc.

4-4 $^1/_2$ = **1** $^1/_2$-**2**; basides 5-8 = 2.

Périthèces rassemblés, subsuperficiels, fuligineux, papillés; spores oblongues-ellipsoïdes. Spermogonie de *Melanomma pulviscula*.

Sur bois et écorce dure de saule. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Pinea, Sacc.

5 = 1.

Périthèces densement rassemblés, superficiels, à peine papillés, d'un noir très intense ; spores cylindracées.

Sur bois pourri de pin sylvestre. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Densiuscula, Sacc.

5 = 2.

Périthèces densement rassemblés, coniques et variés; spores oblongues-ovoïdes.

Sur troncs décortiqués de choux. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Consors, Schulz.

5-6 μ.

Périthèces, se déprimant, pâles à l'intérieur, superficiels, petits; spores ellipsoïdes.

Sur rameaux d'*Ulmus suberosa*. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Allantella, Sacc.

5-6 = 1 $^1/_2$; basides à peine marquées.

Périthèces rassemblés, se déprimant, subsuperficiels, à peine papillés; spores allantoïdes.

Sur bois pourri de chêne. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Fibricola, Sacc.

6 μ.

Périthèces disposés d'après les fibres; taches indéterminées; spores ovoïdes ou subellipsoïdes, verdâtres.

Sur bois de peuplier. Z. arg. sablon.

(Phoma) Aposphæria Hyppophaes, nobis.

6 = 1-1 $^1/_2$; basides 24 μ.

Périthèces lâchement rassemblés, à peine visibles à l'œil nu, ne présentant rien de particulier; spores allantoïdes.

Sur bois d'*Hyppophaes*. Z. marit.

(Phoma) Aposphæria Prillieuxiana, Sacc.

6 = 2 $1/2$-3.

Périthèces densement rassemblés, coniques, obtusément papillés, superficiels, assez gros; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur bois pourri de vigne. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Calathiscus, (Corda.) Sacc.

(*Sphæronema*, Corda).

6-7 μ. long.

Périthèces rassemblés, très petits, membraneux, luisants, superficiels, sombre brun; spores oblongues.

Sur les débris de bois de hêtre. Z. arg. sablon.

(Phoma) Aposphæria Papillula, Sacc.

6-8 = 2.

Périthèces rassemblés, distinctement papillés, globuleux; spores allantoïdes.

Sur le bois pourri. Z. arden.

(Phoma) Aposphæria Pomi, Schulz.

6-8 = 2-3 (goutt. 1-3).

Périthèces densement rassemblés, superficiels, perforés, entourés de hyphes fuligineuses, filiformes, septées; spores oblongues-ovées.

Sur épicarpe de pommes desséchées. Z. arg. sablon.

(Phoma) Aposphæria Seriata, (Pers.) Sacc.

(*Sphæria seriata*, Pers.).

Périthèces ruguleux, déprimés, papillés, rassemblés en séries allongées; spores petites, oblongues.

Sur bois mou de chêne. Z. arden.

Sous-genre : DENDROPHOMA.

† *Microsp.* Sp. $^1/_4$ >.

Phoma ou *Aposphæria* à basides verticillées, aciculaires, rameuses.

(Phoma) Dendrophoma Valsispora, Penz.

3-3 $^1/_2$ = $^1/_2$-**1** ; basides 15-18 = 1-1 $^1/_2$.

Périthèces à ostioles proéminents, épars sur des taches, couverts, d'un brun noirâtre; spores botuliformes.

La variété *Ramulicola* sur rameaux de saule. Z. arden.

(Phoma) Dendrophoma Pleurospora, Sacc.

4-4 $^1/_2$ = **1-1** $^1/_2$; basides 30-50 = 2 $^1/_2$-3 $^1/_2$.

Périthèces épars, coniques, perforés, fuligineux pâle; spores cylindracées.

Sur rameaux divers. Z. arden.

(Phoma) Dendrophoma Pruinosa, (Fr.) Sacc.

5-7 = $^1/_2$-**1**.

Périthèces rassemblés, déprimés, couverts, gris-pruineux; ostioles érumpents sous forme de bulles; spores allantoïdes.

Sur rameaux de frêne. Z. arden. et arg. sablon.

(Phoma) Apos-dendrophoma Therryana, Sacc.

3 = **1** ; basides 25 = 1.

Périthèces rassemblés, superficiels, inégaux, à peine papillés; spores oblongues-ovoïdes.

Sur le bois de chêne et de peuplier. Z. arden. et arg. sablon.

(Phoma) Apos-dendrophoma Pulvis-pyrius, Sacc.

3-4 = **0,7** ; basides 18-25 = 1.

Périthèces subdéprimés, à peine papillés, subirréguliers; spores cylindracées.

Sur le bois et écorce du poirier, de l'aune, du charme, du chêne, du robinier. Z. arden.

Sous-Famille II : CONIOTHYREÆ ou PHÆOSPORÆ.

Périthèces sous-cutanés, érumpents.

Genre : **SPHÆROPSIS.**

Microsp. Sp. $^1/_4$ > à $^1/_2$ > <.

Périthèces assez gros, subcharbonneux; spores bien stipitées.

Sphærop. Subglobosa, Cke.

10-12 μ. diam.

Périthèces finissant par émerger, fendant en long la cuticule, en forme de petits sillons; spores brunes, subglobuleuses.

Sur chaume de *Bambusa*. Bruxelles. Z. arg. sablon.

Sphærop. Saccardiana, (Speg.) Sacc.

Diplodia Saccardiana, Speg.

12-14 = **5-6** (1 striée longitudin.).

Périthèces rassemblés, finissant par devenir libres, disposés en lignes, perforés d'un petit ostiole, noirs; spores elliptiques, obtuses, continues, puis présentant une strie longitudinale, et s'ouvrant à cette strie, d'un olive fuligineux pâle.

Sur rameaux déjetés de *Sarothamnus scoparius*. Z. arg. sablon.

Macrosp. Sans enduit. Sp. $^1/_2$ >.

Sphærop. Malorum, Peck.

25 = **10-11.**

Périthèces érumpents, entourés de l'épiderme déchiré, coniques, aplatis, perforés; spores oblongues, fuligineuses.

Sur des pommes tombées. Z arg. sablon.

Sphærop. Visci, (Sollm.) Sacc.

Ceuthospora Visci, Sollm.

40-50 = **25-30.**

Macrosp. Avec enduit. Sp. $^1/_4$ >.

Sphærop. Ulmi, Sacc. et Roum.

Pycnide de *Massaria ulmi.*

60-70 = **14**; avec enduit hyalin.

Périthèces massarioïdes, innés dans l'écorce, rassemblés; spores oblongues-fusoïdes, fuligineuses.

Sur l'écorce de l'orme. Z. arden.

Genre : **CONIOTHYRIUM**, Cda.

Microsp. Sp. $^1/_2$ > à $^3/_4$ >< à 1 ><.

Périthèces très petits, submembraneux; spores à peine stipitées.

Conio. Fœdans, Sacc.

2-3 μ. diam. ou **4** = **3** (goutt. 1).

Périthèces rassemblés, nichés dans l'écorce, noirs; texture parenchymateuse, d'un olive fuligineux; ostioles petits, imprimés; spores hyalines et courtement stipitées au début, puis olives et salissant l'épiderme.

Sur rameaux de charme. Z. arden.

Conio. Fuckelii, Sacc.

Spermogonie de *Leptosphæria Coniothyrii.*

2,4-5 = **2-3** $^1/_2$.

Périthèces épars, hypodermiques, très noirs; ostioles à peine proéminents; spores olivacées ou fuligineuses, trés nombreuses.

Sur rameaux de *Rubus* Z. arden., calc. et arg. sablon.

Conio. Conoïdeum, Sacc.

3 $^1/_2$ = **2** $^1/_2$ (goutt. 1).

Périthèces épars, hémisphériques-conoïdes, devenant érumpents-superficiels, noirs; spores jaunâtres.

Sur tiges sèches d'*Urtica dioïca*. Z. arg sablon.

Conio. Insitivum, Sacc.

4 $^1/_2$-**7** = **2** $^1/_2$-**4**.

Périthèces réunis en paquets conoïdes, couverts, souvent difformes, très noirs; spores oblongues-ovées ou réniformes, d'un olive fuligineux avec basides très courtes.

Sur rameaux de *Robinia*. Z. arg. sablon. Sur *Prunus*. Z. arden.

Conio. Vagabundum, Sacc.

Spermogonie *Leptosphæria Vagabunda.*

4 = **1** $^1/_2$.

Périthèces immergés, sphéroïdes ou subanguleux, noirs à l'intérieur; spores olivacées, oblongues.

Sur rameaux de *Cornus sanguinea*. Z. arg. sablon.

Conio. Fuscidulum, Sacc.

Spermogonie de *Melanomma fuscidulum,* Sacc.

4-5 = **2-3** $^1/_2$ (goutt. 1).

Périthèces rassemblés, nichant et sortant des fibres ligneuses, globuleux, noirs; spores olivacées.

Sur rameaux décortiqués de *Sambucus nigra*. Z. arden. et arg. sablon.

Conio. Concentricum, (Desm.) Sacc.

Papularia Concentrica (Desm.).

4-5 = **3-4** (goutt. 1).

Conio. Crepinianum, Sacc.

5 = **3**.

Périthèces globuleux-coniques, à base implantée sur la partie superficielle et ligneuse de la plante; spores ovées, elliptiques, d'un olive fuligineux.

Sur tige pourrie de *Brassica* Z. arden. et arg. sablon. Hiver (Libert).

Conio. Sarothamni, (Thüm.) Sacc.

5 $^1/_2$-**7** = **3-3** $^1/_2$.

Périthèces rassemblés, couverts, puis libres, s'aplatissant, noirs; spores ovées ou ovoïdes, sombre brun dilué.

Sur gousses desséchées de *Sarothamnus scoparius*. Z. arg. sablon.

Conio. Olivaceum, Bon.

5-8 = **2-5.**

Périthèces épars, couverts, puis érumpents, globuleux; ostioles à papilles; spores elliptiques, oblongues, sans goutte, d'un brun olive.

Sur rameaux morts de *Sambucus racemosa*. Z. arg. sablon.

Conio. Ribis, nobis.

6-8 = **4.**

Périthèces sous-épidermiques, perforés, noirs, globuleux-déprimés; spores elliptiques-oblongues, sans goutte, olivâtres.

Sur rameaux de *Ribis grossularia*. Z. arden.

Conio. Hedera, (Desm.) Sacc.

6-8 = **4** $^1/_2$-**6** (goutt. 1-2).

Périthèces couverts et noircissant l'épiderme, lenticulaires, assez gros; spores subglobuleuses, souvent subanguleuses, d'un sombre olivacé.

Sur rameaux et feuilles de *Hedera helix*. Z. arg. sablon.

Conio. Conorum, Sacc.

7-9 = **5** $^1/_2$-**6** $^1/_2$ (goutt. 1).

Périthèces rassemblés, innés, érumpents, globuleux, perforés; spores globuleuses-ellipsoïdes, d'un ochracé fuligineux.

Sur écailles de cônes d'*Abies*. Z. arden. (Libert).

Sous-Famille III : DIPLODINEÆ ou HYALODIDYMÆ.

Périthèces innés, érumpents, ou subsuperficiels.

Genre : **DIPLODINA**, West.

Périthèces papillés, pas de taches; spores mutiques; basides monospores.

Macros. Sp. $^1/_4 >$ à $^1/_2 <$.

Diplodin. Salicis, West.

15 = 3 $^1/_2$.

Diplodin. Truncata, (Lev.) Sacc.

Diplodin. Acerum, Sacc. et Br.

12-16 = 4-4 $^1/_2$.

Périthèces innés, érumpents, couverts par l'épiderme brisé; spores oblongues-fusiformes, souvent resserrées à la cloison.

Sur rameaux d'*Acer pseudo-platanus*. Z. arg. sablon.

Diplodin. Graminea, Sacc.

15-16 = 5-7.

Périthèces globuleux-conoïdes, érumpents, rassemblés souvent en séries 2-4; spores oblongues, resserrées-didymes, les loges se séparent quelquefois.

Sur feuilles de graminées. Z. arg. sablon.

Micros. Sp. $^1/_4 <$.

Diplodin. Galii, (Niess.) Sacc.

7-8 = 4-5 (goutt. 2).

Périthèces épars, subglobuleux, érumpents; spores ovées, resserrées.

Sur tiges mortes de *Galium mollugo*. Z. calc.

Diplodia. Conformis, Sacc., Bom. et Rouss.

7-12 = 2 $^1/_2$-3.

Perithèces épars, *globuleux*, érumpents-subsuperficiels, brunâtres, puis noirs, à la fin affaissés; ostioles courts, *coniques;* spores oblongues.

Sur tiges mortes de *Reseda alba*. Z. arg. sablon. Avril.

Genre : **ASCOCHYTA**, Lib.

(*Phyllosticta hyalodidyma*).

Micros. $^1/_4 >$ à $^1/_2 > <$.

Asco. Buxina, Sacc. (*Septoria Buxi*, Belly)?

8 = 2 $^1/_2$.

Périthèces épars, ponctiformes; taches pâlissant, arides; spores ovées-fusoïdes, non resserrées, olivacées.

Sur feuilles mortes de *Buxus sempervirens*. Z calc.

Asco. Fibricola, Sacc. (*Septoria cineraria*, Mathieu)?

8-10 = 3.

Périthèces lenticulaires-ponctiformes, nichés entre les fibres corticales; taches presque nulles; spores cylindracées, courbées, obtusiuscules, sombre olivacé.

Sur tiges de *Cineraria maritima*. Z. marit.

Asco. Elæagni, Sacc. (*Septoria elæagni*, Desm.)?

8-10 = 3 $^1/_2$-4.

Périthèces lenticulaires-ponctiformes, perforés; taches marginées d'ocre; spores fusoïdes, olivacées.

Sur feuilles de *Elæagnus angustifolium*. Z. arg. sablon.

Asco. Tenerrima, Sacc.

9-11 = 3-4.

Périthèces lenticulaires, perforés; texture aréolée très délicate; taches olivacées, marginées de brun; spores oblongues, arrondies, légèrement resserrées au milieu, hyalines, à peine septées.

Sur feuilles de *Lonicera tartarica*. Z. arden. (Libert).

Asco. Viburni, Sacc.

10-12 = 3 $^1/_2$-4.

Périthèces lenticulaires, perforés; taches pâles, marginées d'un sombre brunâtre et purpurin; spores ellipsoïdes-oblongues, arrondies, hyalines, légèrement resserrées.

Sur feuilles de *Viburnum opulus*. Z. arden.

Asco. Lycii, Sacc., Bom. et Rouss.

10-12 = 5.

Périthèces globuleux, très petits, épars; taches grisâtres, marginées de brun; spores elliptiques, hyalines, légèrement resserrées.

Sur feuilles de *Lycium barbarum*. Z. arg. sablon.

Asco. Graminicola, Sacc.

10-12 = 4 (goutt. 2).

Périthèces lenticulaires, perforés; texture parenchymateuse, fuligineuse; taches pâles; spores ovées-fusoïdes, hyalines, droites.

Sur feuilles de graminées. Z. calc.

Variété *Ciliolata*, Sacc., à spores à peine penicillées aux extrémités 18-20 = 3 $^1/_2$-4.

Sur feuilles de graminées. Z. arden.

Asco. Teretiuscula, Sacc.

10-14 = 2 $^1/_2$.

Périthèces innés, ponctiformes, perforés; pas de taches; spores cylindracées, arrondies, hyalines.

Sur feuilles de *Luzula*. Z. arden. (Libert).

Asco. Fragariæ, Sacc.

12-15 = 3-4.

Périthèces devenant lenticulaires, largement perforés; texture parenchymateuse, subochracée; taches blanchâtres, stériles, marginées de noir sanguin; spores oblongues-fusoïdes, droites, non resserrées, olivacées.

Sur feuilles de *Fragaria vesca*. Z. arg. sablon. et arden.

Macros. Sp. $^1/_4$ $> <$.

Asco. Pisi, Lib.

14-16 = 4-6.

Asco. Salicina, Sacc., Bom. et Rouss.

16-18 = 3 $^1/_2$.

Périthèces globuleux, érumpents; taches grisâtres, très petites, marginées de pourpre; spores cylindriques-arrondies, souvent légèrement courbées, non resserrées, hyalines.

Sur feuilles de *Salix caprea.* Z. arg. sablon.

Asco. Feuilleauboisiana, Sacc.

18-20 = 2 $^1/_2$.

Périthèces globuleux-lenticulaires, très petits; taches blanchâtres, stériles, marginées de noir; spores oblongues-fusoïdes, obtusiuscules, hyalines, légèrement resserrées au milieu.

Sur feuilles de *Rubus.* Z. arden.

Asco. Aquilegiæ, (Roum. et Pat.) Sacc.

Périthèces nombreux, ovoïdes, bruns, déprimés et perforés au centre; taches cendrées, marginées de brun; spores brunes, biloculaires, loges inégales, courbées.

Sur feuilles d'*Aquilegia vulgaris.* Z. arden. (Libert).

Asco. Nymphææ, Pass.

Périthèces immergés, à peine proéminents sur des taches stériles, marginées de jaune; spores oblongues-elliptiques, hyalines, simples.

Sur feuilles de *Nymphæa alba.* Z. arden.

Genre : **ACTINONEMA**, Fr.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ $>$.

Périthèces astomes, à la base des fibrilles rameuses, radiantes, arachnoïdes.

Actinon. Rosæ, (Lib.) Fr.

Asteroma Rosæ, Lib.

18-20 = 5.

Actinon. Cratægi, Pers.

Actinon. Padi, (D. C.) Fr.

Asteroma Padi, D. C.

Genre : **TIAROSPORA,** Sacc. et March.

Macrosp. Sp. $^{3}/_{4}$ >.

Périthèces peu papillés; texture noire; spores avec appendice dilaté en chapeau à chaque extrémité.

Tiar. Westendorpii, Sacc. et March.

25 = 16-18; appendice 5-6 μ. long.

Périthèces rassemblés, horizontalement elliptiques, couverts; ostioles obtus; spores ellipsoïdes-rhomboïdes, septées, non resserrées.

Sur feuilles d'*Ammophila arundinacea.* Z. marit.

Genre : **DARLUCA,** Cast.

Macrosp Sp. $^{1}/_{4}$ > à 1 <.

Périthèces perforés, texture souvent bleuâtre; spores avec appendice muqueux à chaque extrémité.

Darl. Filum, (Biv.) Cast.

15-18 = 3-4 (sept. 1).

Darl. Ammophila, Sacc., Bom. et Rouss.

30 = 25 (sept. 1).

Périthèces épars, sous-épidermiques, sphériques; ostioles papilliformes; spores ovales-fusoïdes, hyalines, avec mucron hyalin à chaque extrémité.

Sur feuilles sèches d'*Ammophila arenaria.* Z. marit.

Sous-Famille IV : DIPLODIEÆ ou PHÆODIDYMÆ.

* Périthèces couverts ou érumpents.

Genre : **DIPLODIA**, Fr.

Microsp. Sp. $^1/_2 > <$.

Périthèces papillés.

Dipl. Microspora, B. et C.

6-7 = 3.

Périthèces épars; spores d'un brun pâle.

Sur rameaux de *Viburnum opulifolium.*

Dipl. Secalis, (Lib.) Speg et Roum.

6-8 = 3-4.

Périthèces tomenteux, sous-épidermiques; spores ovoïdes, fuligineuses, sortant en cirrhe.

Sur chaumes pourrissant du seigle. Z. arden.

Dipl. Perpusilla, Desm.

8-11 = 4.

Périthèces épars, excessivement petits, devenant superficiels; spores elliptiques, légèrement resserrées, d'un sombre brun dilué; cellule supérieure un peu plus forte.

Sur tiges desséchées de *Fœniculum officinale.* Z. arden.

Dipl. Narthecii, Sacc., Bom. et Rouss.

9 = 5-6.

Périthèces épars, subglobuleux, sous-épidermiques, proeminents, papillés; spores elliptiques, non resserrées, brunes, très obtuses.

Sur hampes de *Narthecium ossifragum.* Z. arg. sablon.

Dipl. Microsporella, Sacc.

10-15 = 4-5.

Périthèces lâchement rassemblés, couverts par l'épiderme tuméfié, devenant demi-érumpents, globuleux, déprimés-papillés; noyau noir; spores oblongues, à peine resserrées, ochracé fuligineux, sortant d'une couche cellulaire, proligère et hyaline.

Sur rameaux de *Corylus avellana,* d'*Acer pseudoplatanus.* Z. arg. sablon.

Var. *Meliæ*, Sacc.

10-12 = 5-6.

Sur rameaux de *Melia azedarach*. Z arden.

Dipl. Hedericola, Sacc. (*Sphæria Hederæ*, West. exs. nº 173).

10-12 = 5-6 (goutt. 2); basides 5-6 = 2.

Périthèces rassemblés, globuleux-déprimés, à peine papillés, couverts par l'épiderme noirci; spores obovées, non resserrées, fuligineuses.

Sur feuilles mortes d'*Hedera*. Z. arg. sablon. et calc.

Dipl. Consors, B. et Br.

12-15 μ.

Périthèces rassemblés, couverts par l'épiderme luisant, puis noircissant et devenant blanchâtre vers l'ostiole perforant; spores ellipsoïdes-oblongues, fuligineuses.

Sur feuilles de *Prunus lauro-cerasus*. Z. arg. sablon.

Dipl. Leguminis-Cytisi, Lev.

12-14 = 4.

Macrosp. Sp. $^1/_2$ > <.

Dipl. Althææ, Speg.

16-20 = 8-9.

Périthèces superficiels, hémisphériques-conoïdes; ostioles à papilles acutiuscules; spores elliptiques, obtuses, à peine resserrées, fuligineuses.

Sur tiges mortes d'*Althæa rosea*. Z. arden.

Dipl. Palmarum, Rous. et Bom.

16-18 = 9-10 (goutt. 2).

Périthèces épars ou groupés, érumpents-superficiels, ruguleux, globuleux, parfois déprimés; spores elliptiques, brunes, non resserrées.

Sur les fruits de *Chamærops humilis*. Jardin botanique de Bruxelles.

Dipl. Juniperi, West.

18-20 = 8-10.

Dipl. Rubi, Fr.

18-20 = 8-10.

Dipl. Castaneæ, Sacc.

18-20 = 9-10.

Périthèces rassemblés, lignicoles, globuleux-papillés, devenant libres; spores oblongues, resserrées, fuligineuses.

Var. *Corticola,* subcouverte; sur écorce de *Castanea vesca.* Z. arden. et arg. sablon.

Dipl. Pruni, Fckl.

Pycnide d'*Otthia Pruni.*

18-22 = 8-10.

Périthèces réunis 5-8, relevant l'épiderme en pustule à fissure, globuleux, papillés; spores oblongues, resserrées, sombre-brun.

Sur *Prunus padus.* Z. arden.

Dipl. Thujana, Peck.

18-23 μ. long.

Périthèces ruguleux ou substriés, subhémisphériques ou ellipsoïdes; spores oblongues-ellipsoïdes, fuligineuses, légèrement resserrées.

Sur rameaux de *Thuya orientalis.* Z. arg. sablon. (20-25 = 10).

Dipl. Grossulariæ, Sacc. et Schulz.

18-26 = 8-9.

Périthèces rassemblés, couverts de l'épiderme pustuleux, globuleux, obtusiuscules au sommet; spores ovées-oblongues, didymes, resserrées, fuligineuses.

Sur rameaux de groseillers. Z. arg. sablon.

Dipl. Ribis, Sacc.

Pycnide de *Cucurbitaria Ribis*, Niessl.

25 = 12.

Périthèces rassemblés, sous-cutanés, globuleux, papillés; spores stipitées, longtemps continues puis resserrées, oblongues-ovées, fuligineuses.

Sur *Ribes rubrum.* Z. arg. sablon. Sur *Ribes uva-crispa.* Z. arden.

Dipl. Profusa, De Not.

Pycnide de *Cucurbitaria Elongata*.

20 = **9-10** mûres.

22 = **10** longtemps continues.

Périthèces globuleux-déprimés, papilles, érumpents, rassemblés; spores obovées, sombre-brun, peu resserrées.

Sur rameaux de *Robinia pseudo-acacia* Z. arg. sablon.

Dipl. Subtecta, Fr. (*D. Aceris*, Fckl.).

20 = **10**.

Périthèces globuleux-papillés, érumpents, rangés en séries linéaires; spores ellipsoïdes-oblongues, fuligineuses

Sur rameaux d'*Acer campestre*. Z. calc. et arden.

Dipl. Carpini, Sacc.

Pycnide de *Cucurbitaria Carpini*, Sacc.

20 = **9-11**.

Périthèces rassemblés, sous-épidermiques, globuleux, érumpents, papillés obtusément; spores oblongues-ovées, peu resserrées, fuligineuses.

Sur rameaux de charme. Z. arden.

Dipl. Siliquastri, West.

20 = **10**.

Dipl. Palmicola, Thüm.

20 = **10**.

Périthèces nombreux, à la fin érumpents, subplans, quelquefois granuleux, promptement évacués; spores oblongues-elliptiques, subaiguës, non resserrées, sombre-brun.

Sur noix de coco. Westend

Dipl. Rhododendri, Bell.

20 = **10-11**.

Dipl. Kerriæ, Berk.

20-22 = **8**.

Dipl. Mamillana, Fr.

Dipl. Corni, West.

20-22 = 8.

Dipl. Catalpæ, Speg.

20-22 = 8-11.

Périthèces sous-épidermiques, puis érumpents, globuleux, papillés; spores oblongues-ellipsoïdes, non resserrées, fuligineux olive.

Sur rameaux de *Bignonia catalpa.* Z. arg. sablon.

Dipl. Taxi, De Not.

20-22 = 10.

Dipl. Spiræina, Sacc.

Pycnide d'*Otthia Spirææ,* Fckl.

20-22 = 10.

Périthèces subcutanés, érumpents, rassemblés, globuleux, à peine papillés; spores ovées-oblongues, peu resserrées, fuligineuses.

Sur rameaux de *Spiræa salicifolia.* Z. arden. (Libert.)

Dipl. Viticola, Desm.

20-22 = 10-12.

Dipl. Tecta, B. Br.

20-22 = 12-14.

Périthèces rassemblés, gonflant l'épiderme en bulles; spores oblongues, longtemps continues, peu resserrées.

Sur *Prunus lauro-cerasus.* Z. arden. Forme *Ramulicola.*

Dipl. Tecomæ, Pass.

20-23 = 10.

Périthèces érumpents, subglobuleux, ruguleux, papillés, solitaires et cespiteux; spores oblongues, non resserrées, d'un sombre brun de châtaigne.

Sur rameaux de *Tecoma radicans.* Z. arg. sablon.

Dipl. Ilicis, Fr.

Dipl. Aquifolia, West.

20-24 = 12-14.

Dipl. Ilicicola, Desm.

20-25 = 9-10.

Dipl. Mutila, Fr.

20-24 = 7-9.

Dipl. Hypericina, Sacc.

20-25 = 15.

Périthèces épars, couverts, globuleux-déprimés, légèrement papillés; texture parenchymateuse; noyau blanc au début; spores ellipsoïdes, stipitées, longtemps hyalines, puis fuligineuses.

Sur tiges d'*Hypericum calycinum*. Z. arg. sablon.

Dipl. Arundinacea, Dur. et Mont.

20-25 = 12-15; basides longues.

Périthèces innés, érumpents, globuleux-papillés, épars ou rassemblés, à la fin dénudés; spores oblongues, sombre-brun, resserrées au milieu.

Sur les chaumes de l'*Ammophila arenaria* Z. marit.

Dipl. Rudis, Desm.

20-25 = 9-10.

Dipl. Herbarum, (Cda.) Lev.

20-25 = 9-12.

Périthèces rassemblés, érumpents, globuleux-oblongs, convexes, puis déprimés; spores oblongues, légèrement resserrées, fuligineuses, pédicellées.

Sur tiges herbacées desséchées. Z. arg sablon.

Dipl. Ulicis, Sacc.

20-25 = 10-11 (goutt. 1-2); basides 5 = 1.

Périthèces rassemblés, puis érumpents, globuleux, à peine papillés; spores ovoïdes, ellipsoïdes, obtusiuscules, d'un fuligineux olivacé.

Sur rameaux d'*Ulex europæus*. Z. arg. sablon.

Dipl. Padi, Brun.

22 = 8-10.

Périthèces épars, innés-érumpents; spores oblongues, arrondies, resserrées, fuligineuses, loge supérieure plus épaisse.

Sur rameaux de *Prunus padus*. Z. arg. sablon.

Dipl. Humuli, Fckl.

22 = 12.

Périthèces cespiteux ou solitaires, érumpents, globuleux, ruguleux; rostres courts, cylindracés; spores oblongues légèrement resserrées, d'un fuligineux noir.

Sur tiges du houblon. Z. arg. sablon.

Dipl. Æsculi, Lev.

22-24 = 8.

Dipl. Salicella, Sacc.

22-25 = 12.

Périthèces épars, proéminents, érumpents, globuleux, subpapillés; spores oblongues, peu courbées, très noires.

Sur feuilles pourrissantes de *Salix vitellina*. Z. arg. sablon.

Dipl. Dulcamaræ, Fckl.

Pycnide de *Cucurbitaria Dulcamara*, Fr.

22-25 = 12-13.

Périthèces confluents, érumpents, disposés en séries, globuleux ou irréguliers, papillés; spores ovées ou oblongues, d'un sombre brun, resserrées.

Sur tiges mortes de *Solanum dulcamara*. Z. arden.

Dipl. Lilacis, West.

22-28 = 8-10.

Dipl. Acicola, Sacc.

22-30 = 10-12.

Périthèces rassemblés, innés-érumpents, globuleux; ostioles conoïdes; spores ellipsoïdes, stipitées, longtemps continues, enfin fuligineuses.

Sur feuilles de *Pinus silvestris*. Z. arden.

Dipl. Populina, Fckl.

Pycnide de *Otthia Populina.*

23-25 = 12-13.

Périthèces rassemblés, érumpents par fissure d'épiderme, aplatis, assez gros, papillés; spores oblongues, non resserrées.

Sur rameaux de *Populus tremula*. Z. arden.

Dipl. Juglandis, Fr.

Pycnide de *Cucurbitaria Juglandis.*

24 = 10-12.

Périthèces rassemblés globuleux-déprimés, enfin érumpents, perforés, gris intérieurement; spores ovoïdes-oblongues, resserrées au milieu, fuligineuses.

Sur rameaux de *Juglans regia*. Z. arden.

Dipl. Subsolitaria, (Schw.) Curr.

24 = 10.

Périthèces érumpents, subsolitaires; ostioles proéminents; noyau blanc; spores ellipsoïdes ou subpiriformes, faiblement septées, fuligineuses.

Sur rameaux de *Rhois*. Z. arden.

Dipl. Frangulæ, Fckl.

Pycnide de *Cucurbitaria Rhamni.*

24 = 10.

Périthèces cespiteux ou épars, érumpents, grandeur moyenne, globuleux, papillés; spores oblongues, peu resserrées, sombre-brun.

Sur rameaux de *Rhamnus frangula*. Z. arg. sablon.

Dipl. Cratægi, West.

24 = 8.

Dipl. Faginea, Fr.

24 = 12.

Dipl. Lantanæ, Fckl.

24 = 8.

Périthèces en petits tas de 8-10, assez grands, papillés, érumpents par les fissures de l'écorce soulevée en pustule, chauves du dessus, subtilement pileux du dessous; spores oblongues, sombre-brun.

Sur branches de *Viburnum lantana*. Z. arg. sablon.

Dipl. Sapinea, Fr.

24-26 = 12.

Périthèces rassemblés, érumpents, globuleux; ostioles proéminents, papilliformes; spores ellipsoïdes-oblongues, fuligineuses.

Sur écorce d'*Abies;* sur feuilles mortes d'*Araucaria imbricata*. Z. arg. sablon.

Dipl. Magnoliæ, West.

24-26 = 10-11.

Dipl. Rosarum, Fr.

25 = 9.

Dipl. Mori, West.

25 = 9-10.

Dipl. Pseudo-Diplodia, Fckl.

25 = 12.

Périthèces rassemblés, érumpents, salissant l'épiderme en couleur olive; ostioles coniques; spores oblongues-ovées, ordinairement non septées, sombre-brun.

Sur rameaux de *Pyrus communis*. Z. arg. sablon.

Dipl. Buxicola, Sacc.

25 = 12.

Périthèces rassemblés, devenant subsuperficiels par la chute de l'écorce, papillés, très noirs; spores ovées-oblongues, resserrées, noir fuligineux.

Sur rameaux de *Buxus sempervirens*. Z. calc.

Dipl. Inquinans, West.

25 = 12-14.

Dipl. Scheidweileri, (West.) Sacc.

Sphæropsis Scheidweileri, West.

25 = 15.

Dipl. Ampelina, Cooke.

25-28 = 12.

Périthèces subrassemblés, érumpents, puis libres, légèrement rugueux, presque en forme de toupie; spores elliptiques, non resserrées, brunes.

Rameaux de vigne vierge. Partout.

Dipl. Ditior, Sacc.

25-30 = 10-12.

Périthèces rassemblés, érumpents, globuleux. papillés; spores oblongues, légèrement resserrées, fuligineuses.

Sur rameaux de *Platanus orientalis*. Z. arden.

Dipl. Ligustri, West.

26-28 = 8-10.

Dipl. Conigena, Desm.

26-30 = 12-15.

Dipl. Sarothamni, C. et H.

27 = 12. Bom. et Rouss.

30 = 10. Sacc.

Périthèces déprimés, couverts, légèrement élevés, perforés; spores allongées-elliptiques, obtuses, peu resserrées, sombre-brun.

Sur rameaux de *Sarothamnus scoparius*. Z. arg. sablon.

Dipl. Loniceræ, Fckl.

28 = 9.

Dipl. Jasmini, West.

30 = 15.

Dipl. Ramulicola, Desm.

30 = 10 hyalin.

24 = 10 fuligin.

Périthèces innés, proéminents, petits, en grand nombre, se déprimant, couverts; ostioles papillés; noyau blanc au début; spores ellipsoïdes, resserrées, fuligineuses.

Sur rameaux de l'*Evonymus europæus*. Z. arg sablon.

Dipl. Evonymi, West.

30 = 10-12.

Dipl. Pinea, Desm.

35-40 = 16-18.

Dipl. Pinea, Kx.

37 = 17.

Dipl. Caulicola, Fckl.

Périthèces rassemblés, couverts, globuleux; ostioles cylindracés, très courts, perforés et érumpents; spores oblongues.

Sur tiges mortes du *Tanacetum vulgare*. Z. arg. sablon.

Dipl. Coryli, Fckl.

Pycnide de *Otthia Coryli*.

Périthèces épars, grands, globuleux, érumpents; ostioles globuleux-papilliformes, très petits, perforés; spores oblongues, inégales, noircissant l'épiderme.

Sur rameaux de *Corylus avellana*. Z. arg. sablon.

Dipl. Vulgaris, Lev.

Périthèces rassemblés, innés, couverts par l'épiderme gercé en étoile; noyau blanc; ostioles proéminents.

Sur tiges herbacées. Z. arg. sablon.

Genre : **MACRODIPLODIA**, Sacc.

Périthèces massaroïdes, perforés; spores couvertes d'un enduit muqueux.

Macrosp. Sp. $^1/_2$ <.

Macrodipl. Curreyi, Sacc. et Roum.

Pycnide de *Massaria Curreyi*.

60 = 18; basides 10 μ. long.

Périthèces rassemblés, massarioïdes, globuleux, couverts; spores oblongues, obtusiuscules, peu resserrées, fuligineuses.

Sur rameaux de *Tilia europæa*. Z. arden.

Macrodipl. Ulmi, Sacc.

Pycnide de *Massaria Ulmi*.

64 = 26.

Périthèces nichés dans l'écorce supérieure; noyau d'un blanc sale; spores oblongues-lancéolées.

Sur rameaux et planches d'orme. Z. arg. sablon.

** Périthèces lignicoles, subsuperficiels.

Genre : **DIPLODIELLA**, Karst.

Périthèces papillés, subcharbonneux.

Microsp. Sp. $^{1}/_{2} <$.

Diplo. Crustacea, Karst.

8-13 = 3-4.

Périthèces rassemblés, très serrés, en forme de croûte, superficiels, subovoïdes et atténués du sommet, glabres; spores ellipsoïdes, obtuses, peu resserrées, légèrement sombre-brun.

Sur rameau décortiqué de sapin. Z. calc.

Sous-Famille V : HENDERSONIEÆ ou PHRAGMOSPORÆ et DICTYOSPORÆ.

Périthèces innés ou érumpents, quelquefois subsuperficiels.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **HENDERSONIA**, Berk. (PHÆOPHRAGMIÆ).

Microsp. Sp. $^{1}/_{4} >$ à $^{1}/_{2} > <$.

Hend. Tecomæ, Sacc.

8-11 = 5 (sept. 3).

Périthèces couverts par l'épiderme épaissi et noirci, peu papillés; spores ovées-oblongues, droites ou courbées, fuligineuses.

Sur rameaux de *Tecoma radicans*. Z. arg. sablon.

Hend. Rhododendri, Thüm.

8-12 = 4 (sept. 4).

Périthèces épars, épiphylles; taches irrégulières, stériles, sombre brun-grisâtre, entourées d'une zone plus obscure; spores lancéolées-cylindriques, droites, sombre-brun.

Sur feuilles mortes de *Rhododendron*. Z. arg. sablon.

Hend. Diversispora, (Preuss.) Sacc.

9-12 = 3 (sept. 1, rarem. 2-4).

Périthèces rassemblés, subérumpents, très petits, subconiques, perforés; spores subfusiformes, légèrement sombre-brun.

Sur tiges de *Tanacetum vulgare; Centaurea jacea*. Z. calc.

Hend. Piricola, Sacc.

Pycnide de *Leptosphæria lucillæ*.

10 = 5 (sept. 2-3).

Périthèces globuleux-lenticulaires, épars, petits; taches anguleuses, de blanches devenant cendrées; spores ovoïdes, olivacées.

Sur feuilles vivantes du poirier. Z. arg. sablon. et arden.

Hend. Culmiseda, Sacc.

Hend. Culmicola, Cke.

10-11 = 3-4 (sept. 3), peu colorées. Bom. et Rouss.

Sur chaumes de l'*Ammophila arenaria*. Z. marit. avec *Ascochyta perforans*.

Hend. Sambuci, Müll.

10-12 = 3 (sept. 1-3).

Périthèces rassemblés, petits, papillés, devenant libres; spores oblongues-fusoïdes, d'un olive fuligineux.

Sur rameaux de *Sambucus nigra*. Z. arg. sablon.

Hend. Sarmentorum, West.

10-12 = 4-5 (sept. 3).

Variété *Sambuci* (Sp. 12-14 = 6). Z. arden.

Hend. Hirta, Fr.

Pycnide de *Massaria Hirtus*, Cfr.

12-15 μ. long. (sept. 3).

Périthèces couverts, déprimés, finement villeux, subirréguliers; ostioles érumpents; spores oblongues, brunes.

Sur rameaux morts de *Sambucus racemosa.*

Hend. Rubi, West.

12-18 = 5-6 (sept. 3).

Variété de *Hend. sarmentorum.* Périthèces papillés, érumpents; spores à loge inférieure pellucide.

Sur sarments de *Rubus fruticosus.* Z. arg. sablon. et arden.

Hend. Solani, Karst.

12-22 = 4 $^1/_2$-**6** $^1/_2$ (sept. 3-7).

Périthèces subrassemblés, érumpents, sphéroïdes; ostioles papillés; spores oblongues, obtuses, droites ou flexueuses, fuligineux dilué.

Sur tiges sèches de *Solanum dulcamara.* Z. calc.

Hend. Decipiens, Thüm.

13-14 = 6-6 $^1/_2$ (sept. 3).

Périthèces rassemblés, arrondis ou oblongs, légèrement élevés, devenant libres; spores nombreuses, longuement ovoïdes, obtuses, subdiaphanes, d'un sombre brun dilué, sessiles, loges égales, sans noyau.

Sur branches mortes du *Cornus mas.* Z. arg. sablon.

Macros. Sp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 > <$.

Hend. Henriquesiana, (Lib.) Sacc.

14-18 = **4-6** (sept. 3); basides 20-22 = 2.

Périthèces couverts, déprimés; spores fusoïdes, acutiuscules, droites, d'un fuligineux de miel; loge inférieure hyaline.

Sur fruit pourrissant de *Rosa villosa.* Z. arden.

Forme d'**Hend. Pulchella,** Sacc. Voir *H. Pulchella.*

15 = **6.**

Hend. Fiedleri, West.

15-18 = **4-5** (sept. 3).

Hend. Foliorum, Fckl.

15 = **6-7** (sept. 3).

Périthèces faux, perforant l'épiderme d'un ostiole subconique, et le tachant de noir; taches pâles; spores oblongues, peu courbées, flaves, bien pedicellées, loge ultime hyaline.

Sur feuilles de *Pyrus malus.* Z. arden.

Hend. Brunaudiana, Sacc.

15-20 = **5** (sept. 3); basides 8-11 μ.

Périthèces fortement rassemblés, subcarbonacés; spores oblongues-fusoïdes, obtusiuscules, peu courbées, légèrement resserrées, sombre-brun dilué; loges ultimes subhyalines.

Sur tiges de grandes ombellifères. Z. arden. avec le *Phoma herbarum.*

Var. **Detecta** de **Hend. Sambuci,** Müll.

16-18 = **2-2** $^1/_2$ (sept. 3); olivacées.

Sur branches tombées de *Sambucus nigra.* Z. arg. sablon.

Hend. Conspurcata, Sacc., Bom. et Rouss.

Pycnide de *Massaria Conspurcata.*

18-45 = 7-10 (sept. 3); basides 15-27 = 4.

Périthèces subglobuleux, toujours couverts dans l'écorce, à pores; spores allongées, elliptiques, courbées, très irrégulières, granuleuses, fuligineuses.

Sur rameaux de *Prunus padus* avec *Massaria conspurcata.* Z. arg. sablon.

Hend. Loricata, Sacc.

Pycnide de *Massaria Loricata.*

22-28 = 15-16 (sept. 2-3); basides 10-15 = 2.

Périthèces rassemblés, érumpents, perforés; texture parenchymateuse, fuligineuse; spores obpiriformes, arrondies, fuligineuses, gouttelées au début.

Sur rameaux cortiqués du hêtre. Z. arden.

Hend. Occulta, (Lib.) Fr.

25 = 3 (sept. 5).

Périthèces rassemblés, érumpents, perforés; spores cylindracées en massue, droites ou courbées, d'un fuligineux olivacé; basides en faisceaux, noduleuses.

Sur rameaux de *Syringa.* Z. arden.

Hend. Culmicola, Sacc.

28-32 = 4 (sept. 4-5).

Périthèces érumpents, globuleux-papillés, souvent par séries; spores cylindracées, flaves.

Sur des graminées desséchées. Z. arg. sablon.

Hend. Pulchella, Sacc.

Hend. Saccardiana, Cooke.

30 = 6 (sept. 7-11).

Périthèces innés-proéminents, légèrement papillés; spores allongées-fusoïdes, droites ou courbées, jaunâtres puis plus sombres.

Forme **15 = 6**. Sur tiges mortes d'*Urtica dioïca* et *Galium mollugo.* Z. arden. et calc.

Hend. Crastophila, Sacc.

35 = 5 $^1/_2$ (sept. 7-8).

Périthèces épars, érumpents, papillés; spores bacillaires-fusoïdes, arrondies, fuligineuses.

Sur chaumes de *Phragmites communis*. Z. arden.

Hend. Fusarioïdes, Sacc.

35-38 = 4-5 (sept. 3-5).

Périthèces érumpents-superficiels d'un épiderme blanchâtre, globuleux ou subcupulaires, pas de papilles; spores fusiformes, subinégales, courbées, sur basides rameuses et fourchues, d'un fuligineux olive, à loges ultimes hyalines.

Sur rameaux morts de *Robinia pseudo-acacia*. Z. arg. sablon.

Hend. Riparia, Sacc.

40-45 = 3 $^1/_2$**-4** (sept. 6-7) (goutt. 7-8); basides 20-30 = 2-3.

Périthèces rassemblés, couverts, globuleux-lenticulaires; texture celluleuse, lâche, d'un fuligineux ochracé; spores cylindracées, légèrement atténuées, flaves, courbées.

Sur tiges de *Phragmites communis*. Z. arg. sablon.

Hend. Desmazieri, Mont. (à trouver).

Pycnide de *Massaria Platani*, Ces.

40-45 = 20 (sept. 3, noyaux 4).

Périthèces immergés, adhérents et couverts, épais, globuleux-déprimés, confluents, papillés puis perforés d'un pore central, gris à l'intérieur; spores obovées, brunes.

Sur rameaux de *Platanus*.

Hend. Ulmicola, Cooke.

Pycnide de *Massaria Fœdans*.

50 = 20 (sept. 3).

Périthèces assez grands, couverts, obtus; spores elliptiques, resserrées, brunes.

Sur rameaux d'*Ulmus*. Z. arg. sablon.

Hend. Arundinis, Lib.

(Sept. 1-3.)

Périthèces immergés, épars, excessivement petits, villeux à la base; ostioles ponctiformes; spores oblongues, érumpentes en cirrhe, noires.

Sur chaume de *Phragmites communis*. Z. arden. (Libert.)

Hend. Vagans, Fckl.

(Sept. 3.)

Périthèces oblongs, érumpents; spores longuement stipitées, oblongues elliptiques, flaves

Sur rameaux de *Prunus spinosa*. Z. arg. sablon.

GENRE : **PROSTHEMIUM**, Kze. (PHÆOPHRAGMIÆ).

Prosthe. Betulinum, Kze.

40-50 = **15** (sept. 3-4); 2-4 réunies à la base.

GENRE : **STAGONOSPORA** (HYALOPHRAGMIÆ).

Macros. Sp. $^1/_4$ > <.

Stagon. Vaccinii, nobis.

12-14 = **3** (goutt. 5-6); basides 28 μ.

Périthèces érumpents, petits, subglobuleux, épars; spores cylindracées, courbées, arrondies.

Sur feuilles de *Oxycoccos palustris*. Z. arden., 600 mètres. Mai.

Stagon. Luzulæ, (West.) Sacc.

Henders Luzulæ, West.

12-14 = **2** $^1/_2$-**4** (goutt. 4).

Stagon. Lambottiana, Sacc.

14-18 = **3-4** (sept. 3); basides 25-30 = 2.

Périthèces érumpents-subsuperficiels, globuleux, déprimés-pezizoïdes, noir olive, subastomes; texture subprosenchymateuse; spores cylindracées, courbées, arrondies.

Sur troncs et rameaux de *Calluna vulgaris*. Z. arden. et campinoise.

Stagon. Caulicola, (Desm.) Sacc.

Hend. Caulicola, Desm.

15 μ. long. (sept. 2-3) (goutt. 2-3).

Stagon. Graminella, Sacc.

18-20 = 3-3 $^1/_2$ (goutt. 4-6).

Périthèces rassemblés, érumpents, globuleux-papillés; texture parenchymateuse, fuligineuse; spores cylindracées, obtuses.

Sur chaume de graminées. Z. arden.; et du *Phragmites communis.* Z. arg. sablon.

Stagon. Turgida, Sacc. (B. Br.).

20 = 5 (sept. 3).

Périthèces assez proéminents, globuleux; spores courbées, obtuses.

Sur rameaux de frêne. Z. arg. sablon. Mai.

Stagon. Vexatula, Sacc.

35-38 = 4 $^1/_2$**-5** (goutt. 5-7).

Périthèces rassemblés, innés-érumpents, globuleux-conoïdes, assez durs; spores cylindracées, arrondies.

Sur chaume de *Phragmites communis.* Z. arg. sablon.

Stagon. Allantella, Sacc.

35-45 = 4-5 (sept. 5-6) (goutt. 6-7).

Périthèces rassemblés, innés-érumpents, subglobuleux; spores cylindracées, courbées, arrondies, en faisceaux.

Sur rameaux du noyer. Z. calc. et arden.

Stagon. Subseriata, (Desm.) Sacc.

Hender. Subseriata, Desm.

38-40 = 7 (sept. 3-6) (goutt. 6-8).

Stagon. Dolosa, Sacc.

60-70 = 10 (sept. 5) (goutt. 6).

Périthèces érumpents-superficiels, globuleux-papillés; spores fusoïdes, droites ou courbées.

Sur chaume de *Phragmites communis*. Z. arden. (Libert.)

Stagon. Macrosperma, Sacc.

85-95 = 12-14 (sept. 6-8).

Périthèces à peine érumpents, perforés, globuleux, déprimés; spores fusoïdes-cylindracées, obtuses, légèrement courbées, à gouttes devenant verdâtres.

Sur feuilles de graminées. Z. arden. (Libert.)

Stagon. Neglecta, (West.) Sacc.

Henders. Neglecta, West.

Stagon. Strobilina, (Curr.) Sacc.

Henders. Strobilina, Curr.

Périthèces rassemblés, irréguliers; spores amygdaliformes, endochrome bipartite.

Sur écailles arides des cônes de *Pinus abies*. Z. arg. sablon.

** DICTYOSPORÆ.

GENRE : **CAMAROSPORIUM,** Schulz. (PHÆODYCTIÆ).

Microsp. Sp. $^1/_2$ > < à $^3/_4$ > rare.

Camar. Polymorphum, (De Not.) Sacc.

10 = 8 (sept. murif. 3-4).

Périthèces épars, érumpents, papillés; spores ellipsoïdes, à peine resserrées, fuligineuses.

Sur sarments de chèvre-feuille. Z. arg. sablon.

Camar. Cruciatum, (Fckl.) Sacc.

Coniothyrium Cruciatum, Fckl.

6-10 et plus μ. long. (sept. murif. 1-4).

Périthèces rassemblés, devenant sublibres, puis déprimés, papillés; spores oblongues, arrondies, irrégulières, cloisons souvent en croix, sombre-brun.

Sur les branches d'orme et de saule. Z. arg. sablon., arden. et calc.

Camar. Rubicolum, Sacc.

12-14 = 6 (sept. murif. 3-4).

Périthèces épars, érumpents; spores oblongues-ovoïdes ou subanguleuses, arrondies, non resserrées, fuligineuses.

Sur sarments de *Rubus fruticosus.* Z. calc.

Camar. Alpinum, Speg.

Macrostylospore de *Cucurbitaria Spartii.*

12-15 = 5-6 (sept. 3-4, longitud. 1).

Périthèces cespiteux, érumpents, papillés; texture parenchymateuse, très dense, fuligineuse; spores ellipsoïdes, obtuses, d'un olive fuligineux.

Sur tiges de *Sarothamnus scoparius.* Z. arden. et calc.

Macrosp. Sp. $^1/_2$ > < à $^3/_4$ > rare.

Camar. Affine, Sacc., Bom. et Rouss.

12-21 μ. subsphériques-murif.

Périthèces érumpents, épars, subglobuleux, papillés; spores subsphériques, fuligineuses.

Sur tiges d'*Artemisia vulgaris.* Z. calc. et arden.

Camar. Robiniæ, (West.) Sacc.

Henders. Robiniæ, West.

15-16 = 7 (sept. murif. 6-8).

Camar. Propinquum, Sacc.

15-16 = **8** (sept. murif. 3).

Périthèces érumpents, rassemblés, papillés; noyau noir; spores ovées-oblongues, non resserrées, fuligineuses; basides courtes, épaisses.

Sur rameaux de *Salix vitellina*. Z. arden.

Camar. Incrustans, Sacc.

15-17 = **8** (sept. murif. 3).

Périthèces nichés dans l'écorce, ordinairement épars, papillés, pachydermateux; spores ovoïdes, à gouttes jaunâtres, continues d'abord, puis fuligineuses opaques, à peine resserrées.

Sur rameaux de l'*Evonymus europæus*. Z. calc.

Camar. Coronillæ, Sacc.

15-18 = **6-8** (sept. murif. 3-5).

Périthèces épars ou rassemblés, érumpents, d'un noir olivacé, papillés, enfin ombiliqués; spores oblongues, arrondies, droites ou courbées, rarement resserrées, fuligineuses.

Variété *Coluteæ,* Sacc.

16-18 = **6-7** (sept. murif. 3).

Sur rameaux de *Colutea*. Z. arden.

Variété *Siliquastri*.

Sur rameaux de *Cercis siliquastrum*. Z. arg. sablon.

Camar. Xylostei, Sacc.

Macrostylospore de *Didymosphæria Xylostei,* Fckl.

18-20 = **8** (sept. murif. 3-5).

Périthèces épars, nichés, puis sublibres, coniques-globuleux, à peine papillés; spores oblongues-ovées, atténuées, resserrées, sombre-brun.

Sur rameaux de *Lonicera xylosteum*.

Camar. Salicinum, Sacc., Bom. et Rouss.

18-20 = 8-10 (sept. murif. 3).

Périthèces érumpents, papillés, lâchement rassemblés; spores ellipsoïdes, arrondies, resserrées, fuligineuses.

Sur rameaux décortiqués du saule en compagnie de *Diplodia salicella.* Z. arg. sablon.

Camar. Pithyum, Sacc., Bom. et Rouss.

18-20 = 8-10 (sept. léger. murif. 3).

Périthèces subépars, globuleux-lenticulaires, couverts, perforés; spores oblongues-elliptiques, non resserrées, fuligineuses.

Sur feuilles d'*Araucaria imbricata.* Z. arg. sablon.

Camar. Phragmitis, Brun.

18-22 = 7-8 (sept. 3 léger. murif.)

Périthèces épars, nombreux, couverts par l'épiderme peu noirci; ostioles érumpents; spores oblongues, fuligineuses, resserrées.

Sur chaumes de *Molinia cœrulea.* Z. arg. sablon.

Camar. Picastrum, (Fr.) Sacc.

20 = 6-7 (sept. murif.).

Périthèces épars, elliptiques, coniques-déprimés, innés, ruguleux, ombiliqués; spores sombre-brun.

Sur rameaux de *Pinus silvestris.* Z. arden. et calc.

Camar. Sarmenticium, Sacc.

22 = 12-14 (sept. murif. 3).

Périthèces épars, érumpents-superficiels, assez gros, atténués en ostioles courtement cylindracés; spores de globuleuses ellipsoïdes, souvent subconiques à la base, inégales, à peine resserrées, fuligineux-opaque; loges ultimes plus pâles.

Sur sarments d'*Hedera helix.* Z. calc.

Camar. Arenarium, Sacc., Bom. et Rouss.

24-36 = **10-14** (sept. murif. 7).

Périthèces épars, subglobuleux, érumpents, proéminents; spores oblongues, subfusiformes, olivacées.

Sur chaume d'*Elymus arenaria*. Z. marit.

Camar. Quercus, Sacc.

25-28 = **8-10** (sept. murif. 5).

Périthèces cespiteux, érumpents, papillés obtusément; spores oblongues, arrondies, non resserrées, fuligineuses.

Sur rameaux de chêne. Z. calc.

Camar. Laburni, Sacc.

Pycnide de *Cucurbitaria Laburni*.

30-32 = **9-10** (sept. murif. 7-9).

Périthèces rassemblés, peu papillés; noyau noir; spores oblongues, arrondies, à peine resserrées, fuligineuses, courtement stipitées.

Sur rameaux de *Cytisus laburnum*. Z. arg. sablon.

Sont compris dans les **Camarosporium** :

Hendersonia Pini, West.

Hendersonia Philadelphi, West.

Hendersonia Oreades, Dur.

Staurosphæria Rosarum, West.

A. Périthèces membraneux ou subcharbonneux.

Sous-Famille VI : SEPTORIEÆ ou SCOLECOSPORÆ.

* SCOLECOSPORÆ — PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **SEPTORIA**, Fr.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Périthèces lâchement membraneux, perforés, complets, foliicoles, des taches à la base.

Sept. Grossulariæ, (Lib.) West.

12-16 = 1 (goutt. 6-7).

Sept. Laburni, Passer.

12-20 = 2.

Périthèces aigus au sommet, épars; taches irrégulières, blanches, arides; spores entières.

Sur feuilles languissantes de *Cytisus laburnum*. Z. arden.

Sept. Ligustri, Desm.

15 = 1.

Sept. Disseminata, Desm.

15-20 = 1 $^1/_2$.

Sept. Pæoniæ, (Bell.) West.

15-20 = 1 $^1/_2$ (goutt. 4-7).

Sept. Phyteumatis, (Math.) Sacc.

15-20 = $^3/_4$.

Sept. Bellynckii, West.

15-20 = 1 $^1/_2$.

Sept. Antirrhini, Desm.

15-20 = 2 (goutt. 4-7).

Périthèces subproéminents, très nombreux, perforés; cirrhe blanc; taches flaves; spores obtuses aux extrémités.

Sur tiges et feuilles d'*Antirrhinum major*. Z. arg. sablon.

Sept. Chenopodii, West.

15-20 = 7 (goutt. 6-10).

Sept. Hydrocotyles, Desm.

16-25 = 1-2 (goutt. 8-10).

Sept. Silenes, West.

17-20 = 2 $1/_2$.

Sept. Orchidearum, West.

18-22 = 1 (goutt. 6-8).

Sept. Medicaginis, Rob.

20 = 3 (goutt. 7-9).

Sept. Daphnes, Desm.

20 μ. long. (goutt. 2-4).

Sept. Anemones, Desm.

20-22 = 1-1 $1/_2$ (goutt. 6-8).

Sept. Globulariæ, (Math.) Sacc.

20-24 = 1.

Sur *Globularia vulgaris*.

Sept. Evonymi, Rabh.

20-25 = 1 $^1/_2$.

Périthèces en petit nombre, lenticulaires, perforés; spores à peine septées; taches pâles, arides, à peine marginées.

Sur feuilles vivantes d'*Evonymus europæus*. Z. arg. sablon.

Sept. Effusa, Desm.

20-25 = 1 $^3/_4$-**2** (goutt. 3-4).

Sept. Capræ, West.

20-25 = 2 $^1/_2$ (sept. 4) (goutt. 4).

Sept. Holci, Passer.

20-25 = 3 (sept. 3).

Périthèces excessivement petits; taches petites, grises, subarrondies, spores à plasma opaque.

Sur tiges de *Holcus mollis*. Z. arden.

Sept. Chelidonii, Desm.

20-30 = $^1/_2$.

Sept. Carthusianorum, West.

20-30 = 2 (goutt. 5-7).

Sept. Salicis, West.

22-25 = 1,7 (goutt.).

Sept. Erysimi, (Math.) Niessl.

24-34 = 2 $^1/_4$ (sept. 1-3).

Sept. Polygonorum, Desm.

25 = 1 (goutt. 4-5).

Sept. Heterochroa, Desm.

25 μ. long.

Sept. Cheiranthi, Rob.

25 = **1** (goutt. 6-8).

Sept. Robiniæ, Desm.

25-28 = **2** $^1/_2$.

Sept. Digitalis, (Math.) Passer.

25-30 = **1** $^1/_2$ (goutt. pluri.).

Sept. Hepaticæ, Desm.

25-30 = **0,7** (goutt.).

Sept. Lactucæ, Pass.

25-30 = **1,7-2**.

Périthèces épars; taches irrégulières, anguleuses, ferrugineuses; spores entières.

Forme *Chondrillæ*. Z. arden.

Sept. Humuli, West.

25-35 = **1**.

Sept. Lavandulæ, Desm.

25-35 = **1-2**.

Sept. Ficariæ, Desm.

25-35 = **1-1** $^1/_4$.

Sept. Lycoctoni, Speg.

25-35 = **1** $^1/_2$-**2** (sept. pluri.).

Périthèces lâchement serrés, couverts, lenticulaires, perforés; texture parenchymateuse, fuligineuse; taches petites, irrégulières, blanches, avec zones d'un sombre brun.

Sur aconite. Z. arden.

Sept. Atriplicis, West.

25-35 = 4 $^1/_2$ (sept. 1-5).

Sept. Donacis, Pass.

25-35 = 2-2 $^1/_2$.

Périthèces épars ou sériés; taches petites, blanchâtres; spores entières. Sur feuilles languissantes d'*Arundo donax*. Z. arden.

Sept. Scrophulariæ, (West.) Peck.

25-40 μ. long.

Sept. Duchartrei, Crié?

27-40 = 3 (sept. 3-7).

Sur feuilles vivantes de *Vinca minor*. Z. arg. sablon.

Sept. Scorodoniæ, (Math.) Pass.

28-36 = 1-1,3.

Spores continues.

Sept. Carpophila, Sacc.

27-30 = 3.

Périthèces rassemblés, couverts, globuleux-déprimés, perforés; spores fusiformes aiguës, continues.

Sur baies de *Convallaria majalis*. Z. arden.

Sept. Ralfsii, B. et Br.

30 μ. (goutt. 6); nobis **12 = 3.**

Périthèces subcutanés, relevés; centre des pustules blanc; spores droites. Sous l'épiderme de pomme pourrie et noircie. Z. calc.

Sept. Gei, Rob. et Desm.

30 = 1 $^1/_2$.

Sept. Spergulæ, West.

30 = 2-2 $^1/_2$.

Sept. Aucubæ, West.

30 = 2 $^1/_2$.

Sept. Asphodelina, Sacc.

Sept. Asphodeli, West.

30 = 2 $^1/_2$.

Sept. Betulæ, (Lib.) West.

30-34 = 1 $^1/_2$.

Périthèces lenticulaires-ponctiformes; taches subcirculaires, petites, d'un pâle ochracé; spores obtuses aux extrémités.

Sur feuilles de *Betula alba*. Z. arden.

Sept. Scleranthi, Desm.

30-35 μ. long. (à goutt.).

Périthèces épars, proéminents-convexes, innés; ostioles coniques, excessivement petits; spores linéaires, subarquées.

Sur tiges et feuilles de *Scleranthus annuus*. Z. arg. sablon.

Sept. Mespili, (Math.) Sacc.

30-35 = 1-1 $^1/_2$ (goutt. pluri.).

Périthèces ponctiformes; taches subochracées, variables, limitées de roux, stériles. Z. arden.

Sept. Cerastii, Rob.

30-40 = 1.

Sept. Levistici, West.

30-40 = 1-1,3.

Sept. Galeopsidis, West.

30-40 = 1-1 $^1/_2$.

Sept. Menyanthes, Desm.

30-40 = 1 $^1/_2$.

Sept. Ebuli, Desm.

30-40 = **1-1** $^1/_2$.

Sept. Stachydis, Rob.

30-40 = **1** $^1/_2$-**2**.

Sept. Sii, Rob.

30-40 = **2** $^1/_2$ (goutt. 10-20).

Sept. Hederæ, Desm.

30-40 = **1-2**.

Sept. Incondita, Desm.

30-40 = **3** (goutt. 3).

Sept. Castanicola, Desm.

30-40 = **4** $^1/_2$ (sept. 3).

Sept. Prismatocarpi, Desm.

30-40 = **1** $^1/_2$.

Sept. Leguminum, Desm.

30-45 = **3,7-4** (septées).

Sept. Dianthi, Desm.

30-45 = **4** (goutt. 4).

Sept. Hyperici, Desm.

30-50 μ. (goutt. 8-16).

Sept. Vincetoxici, (Schub.) Auersw.

30-50 = **1-1** $^1/_2$.

Sept. Pruni, (Math.) Ellis?

30-50 = 2 (sept. 4-6).

Sept. Inulæ, (Math.) Sacc.

30-50 = 3-4 (sept. 1).

Sept. Agrimoniæ-Eupatoriæ, Bom. et Rouss.

30-54 = 2-2 $^1/_2$ (granuleuses).

Périthèces nombreux; taches d'un brun pâle, plus ou moins régulières.

Sur les feuilles d'*Agrimonia eupatoria*. Z. calc. Juin.

Sept. Viciæ, West.

30-60 = 2 $^1/_2$ (goutt. pluri.).

Sept. Phacidioïdes, Desm.?

Sphæropsis miribelii, Lev.

33 = 10.

Sept. Mougeoti, Sacc.

35-40 = 1.

Périthèces ponctiformes-lenticulaires; taches amples flavescentes et sub-olivacées au centre; spores filiformes.

Sur les feuilles des *Hieracium*. Z. arden.

Sept. Petroselini, Desm.

35-40 = 1-2 (6-10 goutt.).

Sept. Œnotheræ, West.

35-40 = 1 $^1/_2$**-2** (goutt. pluri.).

Sept. Cornicola, Desm.

35-40 = 2-2 $^1/_2$ (sept. 2-4).

Sept. Tiliæ, West.

35-40 = **2-2** $1/_2$ (sept. 3-4).

Sept. Villarsiæ, Desm.

35-50 μ. long.

Sept. Geranii, Rob. et Desm.

35-50 = **1** (sept.).

Sept. Convolvuli, Desm.

35-50 = **1** $1/_2$ (goutt. 5-6).

Sept. Calystegiæ, West.

36-45 = **4-5** (sept. 3-5).

Sept. Riparia, Passer.

37-57 = **2** (goutt.).

Périthèces épars, subglobuleux, érumpents, entourés des débris de l'épiderme; spores filiformes.

Sur les feuilles du *Carex riparia*. Z. arg. sablon.

Sept. Senecionis, West.

40 = **1** $1/_2$ (sept. 3-4).

Sept. Lamii, (West.) Pass.

40 μ.

Sept. Pisi, West.

40 = **3-3,3**.

Sept. Quercina, Desm.

40 = **1** $1/_2$-**2** (goutt. pluri.).

Sept. Euphorbiæ, Desm.?

40-45 = 2-2 $^1/_2$ (sept. 3-4).

Sept. Cruciatæ, Rob.

40-50 μ. long.

Sept. Scabiosicola, Desm.

40-50 = 0,7-1 $^1/_2$ (sept. ou goutt. 5-6).

Sept. Verbenæ, Rob.

40-50 = 1-1 $^1/_2$ (goutt. pluri.).

Sept. Saponariæ, (D. C.) Savi. et Becc.

40-50 = 3 $^1/_2$**-4** $^1/_2$ (goutt. 4-5).

Périthèces globuleux déprimés, d'un sombre brun; taches rondes ou irrégulières; spores obtuses aux deux extrémités.

Sur feuilles de *Saponaria officinalis*. Z. arg. sablon.

Sept. Urticæ, Desm.

40-50 = 2.

Sept. Salicicola, (Fr.) Sacc.

40-50 = 2 $^1/_2$**-3** (sept. 3).

Périthèces épars, ponctiformes, convexes; taches arrondies, laiteuses, entourées de sombre brun; spores bacillaires, courbées.

Sur feuilles de *Salix cinerea, repens*. Z. marit.

Sept. Rubi, West.

40-55 = 1 $^1/_2$ (sept. pluri.).

Sept. Ari, Desm.

42-50 = 2 $^1/_2$ (goutt. pluri.).

Sept. Heraclei, Desm.

45-50 = **3** $^1/_2$-**4** (sept. 4) (goutt. 5).

Sept. Tormentillæ, Desm.

45-55 μ. long.

Sept. Populi, Desm.

Sept. Dealbata, Lev.

45 = **3** (sept. 1).

Sept. Cannabis, (Lasch. West.) Sacc.

Sept. Cannabinæ, West.

45-55 = **2-2** $^1/_4$ (sept. 3).

Sept. Pseudo-Platani, Rob.

45-55 = **3** (sept. 3).

Sept. Badhami, B. Br.

50 μ. (sept. 1-2).

Périthèces ici et là réunis en taches entourées de brun; spores variées, en massues allongées, granuleuses.

Sur feuilles de vigne. Z. arg. sablon.

Sept. Bupleuri, Desm.

50 μ. long. (sept. 3).

Sept. Ribis, Desm.

50 μ. long. (sept. pluri.).

Sept. Lysimachiæ, West.

50 = **1** $^1/_2$ (sept. 4-6).

Sept. Epilobii, West.

50 = **1** $^1/_2$.

Sept. Caricicola, Sacc.

50 = 4 (goutt. 7-8).

Périthèces ponctiformes; taches blanchâtres, variables, arides, marginées largement en brun; spores légèrement septées, d'un jaune très clair, obtuses aux extrémités.

Sur feuilles de *Carex*. Z. arden.

Sept. Lepidii, Desm.

50-60 μ. long.

Sept. Dulcamaræ, Desm.

50-60 = 1,7 (sept. 3-4).

Sept. Stellariæ, Rob.

50-60 = 1.

Sept. Æsculi, (Lib.) West.

50-60 = 3-3 $^1/_2$ (sept. 3-4).

Sept. Bromi, Sacc.

50-60 = 2 (goutt. pluri.).

Périthèces copieux, globuleux-lenticulaires, perforés; taches pâles, à peine marquées, allongées; spores filiformes, plus ou moins en massues.

Sur feuilles de *Calamagrostis epigeios*. Z. arg. sablon.

Sept. Ranunculi, West.

50-60 = 2 $^1/_2$ (goutt. 4-6).

Sept. Aquilina, Pass.

50-65 = 4 (goutt.).

Périthèces couverts, ressemblant à des points pellucides contre la lumière; spores à articles serrés, une extrémité aiguë, l'autre arrondie, opaques, hyalines.

Sur frondes sèches maculées de brun de *Pteris aquilina*. Z. arden.

Sept. Lychnidis, Desm.

50-70 = 2 1/2-3.

Sept. Scillæ, West.

50-75 = 2,7 (sept. 5-6).

Sept. Conigena, Sacc.

50-75 = 1 3/4-2 1/2 (goutt. pluri.).

Périthèces rassemblés, érumpents, s'aplatissant, astomes; texture parenchymateuse d'un olive sombre; spores sortant d'une couche proligère-jaunâtre.

Sur cônes d'*Abies excelsa*. Z. arden.

Sept. Maianthemi, West.

50-70 = 3 (goutt. 6-9).

Sept. Junci, Desm.

50-80 = 3 (goutt. 12-20).

Sept. Napelli, Speg.

50-100 = 2-4 (sept. ou goutt.).

Périthèces excessivement petits, couverts, hémisphériques-lentiformes, humides ils sont proéminents, secs ils sont affaissés en cupule, d'un noir olive; ostioles petits, perforés; pas de taches; texture parenchymateuse d'un olivacé fuligineux; spores cylindracées-filiformes.

Sur feuilles vivantes d'*Aconitum napellum*. Z. arden.

Sept. Graminum, Desm.

55-75 = 1-1 1/2.

Sept. Dipsaci, West.

60 = 1.

Sept. Pastinacæ, West.

60 = 2 (goutt. pluri.).

Sept. Cratægi, (Kickx) Desm.

60 = **1** $1/2$ (sept. et goutt.).

Sept. Piricola, Desm.

Sept. Piri, West.

60 = **3** $1/2$ (sept. 2) (goutt. multi.).

Sept. Caricinella, Sacc.

60-70 = **1** $1/2$ (goutt. 4-6).

Périthèces innés, globuleux-lenticulaires; taches oblongues, blanchâtres, marginées de roux ou de sombre brun; spores filiformes.

Sur feuilles de *Carex depauperata.* Z. arden. (Libert).

Sept. Scopariæ, West.

60-80 μ. (goutt. et sept. 10-13).

Périthèces bruns, peu nombreux; spores atténuées; taches petites, subcirculaires, d'un pâle brun, marginées d'un noir gonflé.

Sur les fruits subvivants de *Spartium scoparium.* Z. arg. sablon.

Sept. Podagrariæ, Lasch.

70-80 = **3-4** (goutt. 6-7).

Sept. Clematidis, Rob. et Desm.

70-80 = **4** (sept. 4-6).

Périthèces très petits, innés, perforés, d'un pâle brun; taches d'un sombre brun gris, circulaires ou anguleuses, marginées de sombre brun; spores obtuses aux extrémités.

Sur feuilles vivantes de *Clematis vitalba.* Z. arg. sablon.

Sept. Stellariæ-Nemorosæ, Roum.

70-90 = **35-45?** ou (**7-9** = **3** $1/2$-**4** $1/2$)**?**

Périthèces distincts; taches allongées, limitées par les veinules des feuilles; spores ovales.

Sur face supérieure des feuilles de *Stellaria nemorum.* Z. arden.

Sept. Rosæ, Desm.

70-90 = 3 $^1/_2$**-4.**

Sept. Virgaureæ, Desm.

80 = 1 $^1/_2$.

Sept. Cytisi, Desm.

90-100 = 3 $^1/_2$ (sept. multi.).

Sept. Astragali, Desm.

120 = 3 (sept. 9-10).

Sept. Urens, Pass.

Périthèces épars, à peine visibles; spores longues, continues, droites.
Sur feuilles de *Galium aparinum*. Z. arden.

Sept. Alismæ, Bom. et Rouss.

Périthèces lenticulaires, à peine visibles; spores cylindriques septées ou plurigouttelées.
Sur feuilles d'*Alisma plantago*. Z. camp.

Sept. Menispora, B. et Br.

Périthèces couverts, ellipsoïdes; ostioles proéminents, érumpents; spores très longues, courbées, aiguës, à plusieurs noyaux.
Sur feuilles de *Typha latifolia*. Z. calc.

Sept. Siliquastri, Passer.

Périthèces ponctiformes-lenticulaires; taches pâles, subcirculaires; spores longues, filiformes, flexueuses, subtoruleuses, continues et granuleuses.
Sur feuilles vivantes de *Cercis siliquastrum*. Walzin. Sept.

Sept. Stemmatea, (Fr.) Berk.

Périthèces globuleux, rassemblés; taches éparses, arrondies, blanches, arides; spores?
Sur feuilles de *Vaccinium vitis-ideæ*. Z. arden.

Sept. Rosarum, West.

Sept. Rosœ β *minor.* West. et Wall. exs. n° 426.

Périthèces rares, demi-émergents, épiphylles; taches petites, arrondies, éparses, pâles, marginées de pourpre; spores flexueuses, cylindriques, obtuses, de 3-6 noyaux.

Sur les feuilles vivantes de *Rosa pumila* et *Collina.* Z. arg. sablon.

Sept. Kalmiæcola, (Schw.) Berk.

Kalmiœ, Math.

Périthèces concentriques, innés; taches blanches, orbiculaires, à marge gonflée, et noircissant la feuille circonscrite; spores septorioïdes.

Sur feuilles de *Kalmia latifolia.* Z. arg. sablon.

Genre : **PHLEOSPORA**, Wallr.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Périthèces faux ou incomplets, largement ouverts; la texture est celle de la matrice modifiée; foliicoles; à peine des taches.

Phleos. Aceris, (Lib.) Sacc.

22-28 = **5** (sept. 3).

Pas de périthèces proprement dits.

Phleos. Mori, (Lev.) Sacc.

40-50 = **4** (sept. 3) (goutt.).

Périthèces généralement peu distincts, innés, rassemblés; taches blanchâtres, ou ochracées, entourées de brun; spores obtusiusculcs.

Sur feuilles de murier. Z. arden.

Phleos. Ulmi, (Fr.) Wallr.

55 = **6** (sept. 4) (goutt.).

Périthèces délicats.

Phleos. Oxyacanthæ, (Künze.) Wallr.

70-80 = **6-8** (sept. 6-8).

GENRE : **RHABDOSPORA**, Mont.

Périthèces complets, papillés, rami-caulicoles.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Rhabd. Ramealis, (Desm. et Rob.) Sacc.

15-25 = **1** (goutt. 5-7).

Rhabd. Inæqualis, Sacc. et Roum.

15-18 = **3**; basides 20-40 = 2 $^1/_2$.

Périthèces rassemblés, érumpents, globuleux-déprimés, à peine papillés, bien inégaux; spores fusoïdes.

Sur l'écorce de *Sorbus aucuparia* Z. arden., arg. sablon.

Rhabd. Fusicoccoïdes, Sacc. et Roum.

16-18 = **3**.

Périthèces érumpents, rassemblés, déprimés au sommet, d'un pâle ceracé à l'intérieur; spores fusoïdes, courbées, continues.

Sur écorce de charme. Z. arden. (Libert .

Rhabd. Lebretoniana, Sacc. et Roum.

20-24 = **1** $^1/_2$.

Périthèces érumpents, proéminents, globuleux-inégaux, rassemblés, très courtement papillés, subcoriaces; spores filiformes, continues, visiblement crochues.

Sur rameaux avec écorce de *Genista*. Z. arden. (Libert).

Rhabd. Salicella, (B. et Br.) Sacc.

Septoria Salicella, B. et Br.

30 μ. (sept. 3).

Périthèces couverts par l'épiderme soulevé en pustule, subglobuleux; spores fusiformes; cirrhe rougeâtre.

Rhabd. Notha, Sacc.

Spermogonie de *Diaporthe Hystrix*, (Tode) Sacc.

30 = **1** ; basides 9-11 = 1.

Périthèces érumpents, rassemblés çà et là en tas, déprimés-globuleux ; spores filiformes-arquées.

Variété *Coryli*, Sacc.

30-35 = **0,7** ; basides plus longues; spores droites.

Sur rameaux de *Corylus*. Z. arden. (Libert).

Rhabd. Helleborina, Sacc.

30 = **1** 3/4 (goutt. 3-5).

Périthèces faux, subcouverts, devenant fauves; spores filiformes, courbées, obtuses.

Sur tiges de *Helleborus fœtidus*. Z. calc.

Rhabd. Dipsacea, Sacc., Bom. et Rouss.

30-32 = **3-4** (goutt. pluri.)

Périthèces ponctiformes, couverts, mammillés; ostioles courts, érumpents; spores avec une fausse cloison, cylindracées, courbées.

Sur tiges mortes de *Dipsacus silvestris*. Z. calc.

Rhabd. Nebulosa, Desm.

Sept. Nebulosa, (Desm.) West.

30-40 μ. long. (goutt. 10-15).

Variété *Arnoseris*, Sacc.

33-36 = **1** ; spores non guttulées; périthèces plus éloignés.

Spores non guttulées; périthèces plus éloignés.

Sur tiges mortes de l'*Arnoseris minima*. Z. arg. sablon.

Rhabd. Diaporthoïdes, Sacc.

37-38 = 2-3 (goutt. pluri.).

Périthèces rassemblés, subcouverts, globuleux-lenticulaires, fuligineux; spores fusoïdes, courbées.

Sur rameaux de saule. Z. calc.

Rhabd. Caprifolii, Sacc.

35 = 1 $^3/_4$ (40 = 2 nobis).

Périthèces ponctiformes, couverts au début; taches indéterminées, devenant pâles, formant des petits rameaux délicats; spores filiformes, atténuées, obscurement septées.

Sur sarments de *Lonicera caprifolium*. Z. arden.

Rhabd. Pleosporoïdes, Sacc.

38-50 = 1-3.

Périthèces épars, cladogènes, couverts, se déprimant; plus ou moins papillés; texture celluleuse, fuligineuse; spores filiformes, uncinées, continues, droites ou courbées; pas de taches.

Variété *Clinopodii.*

44-48 = 2.

A la base des tiges de *Clinopodium*. Z. arden. Hiver.

Variété *Galeopsidis.*

36 = 3.

Aux nœuds des tiges de *Galeopsis tetrahit*. Z. arden. Hiver.

Rhabd. Cirsii, Karst.

45-52 = 1-1 $^1/_2$ (goutt. pluri.).

Périthèces rassemblés, subsuperficiels, arrondis-déprimés, même cupulés; papilles quelquefois allongées; des hyphes peu nombreuses, d'un sombre brun à la base; spores filiformes, atténuées.

Sur tiges de *Cirsium lanceolatum* Z. arg. sablon.

Rhabd. Juglandis, (Schw.) Sacc.

Périthèces rassemblés, innés, à peine érumpents; spores bacillaires, légèrement crochues au sommet.

Sur branches tombées du noyer. Z. arden. et calc.

Rhabd. Herbarum, (Pr.) Sacc.

Périthèces rassemblés, immergés, convexes; ostioles perforés; spores allongées, à cloisons minces.

Sur tiges de *Chrysanthemum leucanthemum*. Z. arden.

** SCOLECOSPORÆ — AMEROSPORÆ.

Genre : **PHLYCTÆNA,** Mont.

Périthèces incomplets, s'ouvrant par fissures, assez grands, généralement allongés; rami-caulicoles.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Phlyct. Vagabunda, Desm.

18-25 μ. (goutt. 7-9).

Phlyct. Phomatella, Sacc.

20 = 1.

Périthèces rassemblés de près, couverts, à peine érumpents, subincomplets; spores filiformes-uncinées.

Variété *Symphoricarpi Racemosæ*, Sacc.

Spermogonie de *Diaporthe Ryckholtii*.

20-22 = 1 ; basides 8-10 = 1.

Sur rameaux de *Symphoricarpus racemosa*. Z. arg. sablon.

B. Périthèces subsubéreux, faux, souvent furfuracés.

Sous-Famille VII : MICROPEREÆ ou SCOLECOSPORÆ.

Genre : **MICROPERA**, Lev.

Périthèces érumpents-superficiels, souvent touffus, généralement suballongés, subinégaux.

Microp. Drupacearum, Lev.

50 = **3** (multiseptées).

Microp. Betulina, Sacc. et Roum.

18-20 = **3**; basides 30-35 = 2-3.

Périthèces lâchement rassemblés, globuleux, à peine érumpents; spores fusoïdes, droites, obtuses.

Sur écorce de *Betula*. Z. arden. (Libert).

Microp. Sorbi, Sacc.

Pycnide de *Cenangium inconstans*, Fr.

15-16 = **1** $^3/_4$-**2**; basides 20-25 = 2 $^1/_2$.

Périthèces lâchement rassemblés, globuleux-déprimés, érumpents; spores fusoïdes, courbées, aiguës, couche sporigère d'un sombre violacé.

Sur rameaux de *Sorbus aucuparia* Z. arden. et calc.

Groupe II (Périthèces séparés, soyeux).

* Périthèces érumpents ou subsuperficiels.

Sous-Famille VIII : VERMICULARIEÆ ou HYALOSPORÆ.

Genre : **VERMICULARIA**, Fr.

Périthèces perforés ou astomes; soies longues, nombreuses; basides ordinairement simples.

Microsp. Sp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 <$ rare.

Vermic. Libertiana, Roum.
8-10 = 3.

Périthèces globuleux, érumpents, se déprimant légèrement; poils rigides, bruns, irrégulièrement septés; spores fusiformes, courbées.

Sur tiges de *Pinus*. Z. arden.

Vermic. Mercurialis, West.
7 $^1/_2$ = 2.

Vermic. Culmigena, Desm.

9-11 = 1 $^1/_2$-2.

Vermic. Geranii, West.
10 = 2 $^1/_2$.

Vermic. Chenopodii, West.
10 = 2 $^1/_2$.

Macrosp. Sp. $^1/_4 > <$.

Vermic. Oblonga, Desm.
10-17 μ. long.

Vermic. Trichella, Grev.
16-25 = 4-5.

Vermic. Compacta, Grev.
20 μ. long.

Périthèces rassemblés-compactes, hispides; spores fusiformes-aiguës, courbées, septées et à gouttes.

Sur tiges de *Dahlia*. Z. arden.

Vermic. Dematium, (Pers.) Fr.
20 = 4-5.

Formes : *chærophylli*, *heraclei* (macrospora), *samaricolæ* (frêne), *periclymenii*.

Vermic. Liliacearum, West.

20 = 5.

Formes : *amaryllidis, scillæ, ornithogali, asphodeli, lilii, cliviæ* (hedera et magnolia), *iridis, triglochinis.*

Vermic. Herbarum, West.

20-22 = 3-4.

Formes : *dianthi, Sedi.*

Vermic. Orthospora, Sacc. et Roum.

22 = 4.

Périthèces érumpents-superficiels, globuleux-coniques; soies cuspidées; spores cylindriques, subarrondies aux sommets, subdroites.

Sur tiges de *Solanum tuberosum.* Z. arden. (Libert).

Vermic. Schœnoprasi, Auersw.

25-28 = 3-4.

Périthèces rassemblés, érumpents, très noirs, coniques; poils épars, fuligineux ; spores fusoïdes, courbées.

Sur feuilles de ciboule. Z. arg, sablon.

Vermic. Graminicola, West.

30 = 5.

Vermic. Culmifraga, Fr.

Périthèces difformes, érumpents; soies serrées, droites, cloisonnées; spores fusoïdes.

Sur chaume de *Triticum vulgare.* Z. arg. sablon.

Vermic. Circinans, Berk.

Périthèces disposés concentriquement, très petits, avec un mycelium radié, articulé; soies rigides, longues; taches orbiculaires; spores oblongues, courbées, légèrement atténuées aux extrémités, à 2 ou plusieurs gouttes.

Sur tiges mortes des oignons. Z. arg. sablon.

Vermic. Colchici, Fück.

Périthèces lâchement rassemblés, ovés-coniques ou déprimés, ponctiformes, penicillés très courtement au sommet; spores fusiformes, courbées, uniseptées.

Sur feuilles de *Colchicum autumnale*. Z. arden.

Genre : **PYRENOCHÆTA**, De Not.

Microsp. Sp. 1/4 > <.

Pyrenoch. Luzulæ, (West.) Sacc.

Vermicularia Luzula, West.

5 μ. globuleuses.

Pyrenoch. Hispidula, nobis.

Pycnide de *Pleosphæria Hispidula*, nobis.

5 = **1**.

Pyrenoch. Rosæ, nobis.

5 = **1**.

Périthèces superficiels, aplatis; ostioles papilliformes; quelques poils raides, courts, disséminés; spores droites, continues, obtuses, hyalines.

Sur les tiges sèches de *Rosa canina*. Z. arden. Hiver.

** Périthèces superficiels.

Sous-Famille IX : CHÆTOMELLEÆ ou PHÆOSPORÆ.

Genre : **CHÆTOMELLA**, Fckl.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. 1/4 > < à 1/2 > à 3/4 <.

Chætom. Atra, Fckl.

12-15 = **2-3** (goutt. 2); basides 60 = 1.

Périthèces superficiels, d'un noir olive, globuleux puis ombiliqués, même subcupulaires, astomes; texture parenchymateuse-radiée; soies peu nombreuses; spores très copieuses, fusoïdes, olivacées.

Sur *Carex*. Z. arden. Sur chaume de *Juncus*. Z. arg. sablon.

Sous-Famille X : CHÆTODIPLODIEÆ ou PHÆODIDYMÆ.

Genre : **CHÆTODIPLODIA**, Karst.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. $^1/_2 > <$.

Chætodipl. Lecardiana, Sacc. Bom. et Rouss.

24-25 = **12** hyalines.

19-22 = **14** brunes, épaisses.

Périthèces érumpents-superficiels, globuleux-coniques, d'un brun noirâtre; un ostiole; poils bruns, septés; spores ovales très obtuses.

Sur les pétioles de *Vitis chantini*, dans l'herbier de Lecard., n° 225.

II.

PÉRITHÈCES COMPOSÉS.

A. *Loges dans un strome valséen, verruciforme, globuleux, conique et étalé.*

Sous-Famille XI : CYTOSPOREÆ.

AMEROSPORÆ — * ALLANTOSPORÆ.

Genre : **CYTOSPORA**, Ehrenb. (*Cytispora*, Fr.).

Microsp. Sp. $^1/_4 >$, courbées.

Cytos. Pithyophila, West.

2 $^1/_2$-**3** = **1**.

Cytos. Ribis, Erenb.

3 = **1**.

Cytos. Pini, Fckl.

Cytos. Abietis, Sacc.

3-4 = **1**; basides 12-16 μ. long.

Cytos. Curreyi, Sacc.

3-5 = **1**; basides 20-24 μ.

Loges nombreuses disposées en rayons ou sans ordre dans un strome orbiculaire ou ovale et conique tronqué, protubérant, latéralement adhérent au périderme gercé en étoile, et armé de 1 à 3 papilles placées sur un petit disque blanchâtre, et percées d'un pore très petit; spores cylindriques, courbées.

Sur rameaux de *Abies excelsa* et *Pinus silvestris*. Z. arden.

Cytos. Leucosperma, P.

3 $^1/_2$-**4** = $^1/_2$-**1**.

Cytos. Pini, Desm.

Cytos. Pinicola, West.

4 = **1** ; basides 24 μ.

Cytos. Rubescens, Fr.

4 μ. long.; basides 35-45 μ.

Cytos. Chrysosperma, P.

4 = **1**.

Cytos. Epixyla, Sacc.

4 = **1**.

Loges nombreuses dans des stromes rassemblés, superficiels, globuleux, inégaux; spores allantoïdes.

Sur bois de chêne. Z. arden. (Libert.)

Cytos. Pustulata, Sacc. et Roum.

Spermogonie de *Valsa Pustulata*.

4-**4** $^1/_2$ = $^3/_4$.

Loges nombreuses à intérieur gris; stromes subcutanés-érumpents; spores allantoïdes, courbées.

Sur rameaux de hêtre. Z. arden.

Cytos. Stenopora, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Stenopora*.

4-**5** = $^1/_2$.

Loges à peine marquées; stromes rassemblés, subcutanés-érumpents, coniques, gris; disque petit; spores allantoïdes, courbées.

Sur rameaux d'*Alnus glutinosa*. Z. arg. sablon.

Cytos. Decorticans, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Decorticans*.

4-5 = 1; basides 16 μ.

Loges nombreuses; stromes coniques-tronqués; papille noire et ouverte au centre d'un disque blanc; spores courbées.

Sur rameaux de hêtre et de charme.

Cytos. Ceratophora, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Ceratophora*.

4-5 = 1; basides 20-50 μ.

Loges nombreuses; stromes coniques-déprimés, érumpents, olivâtres à l'intérieur; spores botuliformes.

Sur rameaux de *Sorbus, Castanea*. Z. arden.

Cytos. Vitis, Mont.

Spermogonie de *Valsa Vitis*.

4-5 = 1.

Loges nombreuses; stromes à pulvérulence blanchâtre, émergeant légèrement de fissures longitudinales de l'écorce; col central, noir, perforé; spores cylindriques, courbées.

Variété *Macrospora*, Sacc.

10 = 1 $^1/_2$.

Sur sarments de *Vitis vinifera*. Z. arden.

Cytos. Friesii, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Friesii*, Nits.

4-5 = 1.

Stromes petits, coniques-tronqués, érumpents; disque gris noircissant; papilles 1-2, très petites, perforées; spores cylindriques, courbées; basides courtes, peu rameuses.

Sur rameaux d'*Abies pectinata*.

Cytos. Pinastri, Fr. N'est-ce pas le **Cytos. Friesii**, Sacc.

5 = **1,3** ; basides 20-25 = 1.

Sur feuilles d'*Abies* et de *Pinus*.

Cytos. Cincta, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Cincta*, Nits.

4-9, souvent **6-8** = **1** $^1/_2$-**2**.

Loges dans un strome pustuleux, à pore unique ou pores plusieurs sur un disque d'un blanc sale; spores cylindriques, courbées; cirrhe rougeâtre.

Sur rameaux de pruniers. (A découvrir.)

Cytos. Extensa, Sacc.

Spermogonie de *Eutypella Extensa*.

5 = **1** ; basides 15 = 1.

Pluriloges; stromes rassemblés, couverts, globuleux; disque à peine érumpent; spores allantoïdes, courbées.

Sur rameaux de *Rhamnus alpina*. (A découvrir.)

Cytos. Leucostoma, (P.) Sacc.

5 = **1** ; basides 12 = 1.

Strome lenticulaire, érumpent; disque plan, couleur de neige; cirrhe rougissant; spores botuliformes.

Sur rameaux de pruniers, cerisiers. Z. arg. sablon.

Cytos. Ocellata, Fckl. (*Fl. myc. belge*, t. II, p. 374).

5 = **1**.

Loges ovoïdes-subgélatineuses; strome conique-plan, marginé d'un disque hémisphérique et blanc de neige, perforé d'un ostiole; cirrhe d'un noir pourpre; spores botuliformes, basides verticellées.

Sur rameaux de *Corylus avellana*.

Cytos. Syringæ, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Syringæ.*

5 = 1; basides 60 μ.

Loges très serrées; stromes petits, érumpents par de petites fissures longitudinales du périderme; une ouverture sur un disque gris d'un sale brunâtre; spores courbées.

Sur rameaux de *Syringa vulgaris*. Z. arg. sablon.

Cytos. Germanica, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Germanica.*

5 = 1 $^{1}/_{2}$; basides 20-24 μ.

Loges nombreuses; stromes coniques-tronqués; papille très petite, perforée, sur un disque blanchâtre-cendré; spores courbées.

Sur rameaux du saule, du bouleau et du peuplier. (A découvrir.)

Cytos. Carphosperma, Fr.

5-6 $^{1}/_{2}$ **= 1.**

Cytos. Microstoma, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Microstoma.*

5-6 = 1; basides 28 μ.

Loges nombreuses disposées en rayons; stromes convexes, ovales-arrondis; pore sur petit disque; spores courbées.

Sur rameaux épais de pruniers. Z. arden.

Cytos. Salicis, (Cda.) Rabenh.

Spermogonie de *Valsa Salicina.*

5-6 = 1.

Loges confluentes, pâles ou grises; stromes rassemblés, coniques, érumpents, disque d'un cendré sombre brun, émergent; cirrhe blanc; spores courbées.

Sur rameaux de *Salix alba*. Z. arden.

Cytos. Diatrypa, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Diatrypa.*

6 = 2.

Loges nombreuses, en cercle; stromes ordinairement à un pore sur un disque blanchâtre; spores courbées; basides assez longues; cirrhe rougeâtre.

Sur rameaux d'*Alnus glutinosa. Z.* arg. sablon.

Cytos. Ambiens, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Ambiens.*

6 = 1.

Stromes coniques-déprimés, rassemblés, érumpents, gris-noirâtre; disque plus pâle; spores botuliformes.

Sur rameaux. Surtout sur le hêtre. Z. arden. et arg. sablon.

Cytos. Coronata, Hoffm.

Spermogonie de *Valsa Coronata.*

6 = 1.

Pluriloges; stromes aplatis; disque érumpent, entouré de l'épiderme plissé en étoile, sale, pulvérulent; pore central, conique, noir, perforé; noyau olivacé; spores courbées. (A découvrir.)

Cytos. Tumida, Libert.

6 = 1 1/2.

Stromes érumpents, gonflés; spores courbées.

Sur rameaux pourris de chêne. Z. arden.

Cytos. Sepincola, Fckl.

Spermogonie de *Valsa Sepincola.*

6 = 1 1/2.

Loges labyrinthiformes; stromes coniques, nichant dans l'intérieur de l'écorce, colorant l'épiderme en sombre brun; disque plan ou convexe, orbiculaire, d'un blanc sale; pore commun; spores courbées. (A découvrir.)

Cytos. Fuckelii, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Fuckelii.*

6 = 1 $^1/_2$.

Pluriloges; stromes obconiques; pore commun, perforé, subrostré; disque sale, convexe; noyau gris; spores courbées.

Sur rameaux de *Corylis avellana.* Z. arden.

Cytos. Massariana, Sacc.

Spermogonie de *Valsa Massariana.*

6-7 = 1.

Pluriloges, très serrées; stromes à ouverture unique, sur un disque blanchâtre, pulvérulent; spores subdroites. (A découvrir.)

Sur rameaux de *Sorbus aucuparia.*

Cytos. Juglandina, Sacc.

6-7 = 1; basides 10-15 = 1.

Pluriloges; stromes couverts par l'épiderme parfois gercé; spores droites.

Sur rameaux de *Juglans regia.* Z. arg. sablon.

Cytos. Nivea, Hoffm.

6-7 = 1 $^1/_2$**-2.**

Cytos. Platani, Fckl.

6-8 μ. long.

Périthèces nombreux, allongés, gélatineux, noirs; pas de strome; cirrhe blanc; spores allantoïdes.

Sur rameaux de *Platanus occidentalis.* Z. arg. sablon.

Cytos. Lauro-Cerasi, Fckl.

Spermogonie de *Valsa Lauro-Cerasi,* Tul.

6-8 = 1.

Strome conique, obtus; disque blanc; cirrhe rougissant; spores botuliformes; basides rameuses-verticillées.

Sur feuilles mortes de *Prunus lauro-cerasus.* Z. arden. et arg. sablon.

Cytos. Personata, Fr.

Spermogonie de *Valsa Auerswaldii*, Nits.

6-8 = 2.

Pluriloges; stromes coniques, tronqués ou subhémisphériques, pustuleux; pore conique sur un disque orbiculaire, blanchâtre; spores courbées; cirrhe devenant rouge-hyacinthe.

Sur rameaux de *Rhamnus, Fagus, Betulus, Malus, Salix*. (A découvrir.)

Cytos. Foliicola, Lib.

7 = 1.

Cytos. Macilenta, Rob.

10-15 = 2 $^1/_2$.

Cytos. Incarnata, Fr.

12 μ. long.

Cytos. Decipiens, Sacc.

Spermogonie de *Anthostoma Decipiens*.

Pluriloges; stromes couverts, dorés, généralement oblongs, arrangés en séries; cirrhe rougeâtre ou doré; spores courbées.

Cytos. Acharii, Sacc.

Spermogonie d'*Eutypa Acharii*, Nits.

Périthèces rassemblés, ovales-elliptiques ou suborbiculaires-convexes, déprimés, renfermés dans des stromes étalés en long et en large; spores courbées; cirrhe blanchâtre.

Sur rameaux de *Fagus, Pseudoplatanus, Populus, Prunus, Carpinus*. (A découvrir.)

Cytos. Flavovirens, Sacc.

Spermogonie de *Flavovirens*, Tul.

Périthèces coniques, déprimés, à parois charnues, renfermés dans des stromes; spores courbées; cirrhe.

Cytos. Carbonacea, Fr.

Pluriloges; strome mince; disque blanchâtre; ostioles noirs, proéminents.

Sur rameaux morts d'*Ulmus*. Z. arden.

Cytos. Oxyacanthæ, Rabenh.

10-12 loges dans un strome; spores cylindriques, arrondies obtuses aux extrémités, plus ou moins courbées.

Sur rameaux de *Cratægus oxyacantha*. Z. arden.

Cytos. Hippophaës, Thüm.

Périthèces épars, grands, érumpents; stromes?; spores cylindracées, droites, courtes.

Sur rameaux d'*Hippophaë rhamnoïdes*. Z. marit.

** SCOLECOSPORÆ.

a) *Spores courbées.*

Genre : **CYTOSPORINA**, Sacc.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ < courbées.

Strome valséen, verruciforme ou étalé; ostioles variables.

Cytosporina Siliquastri, (West.) Sacc.

15 = 1 $^1/_2$.

Cytosporina Aspera, (Wallr.) Sacc.

Spermogonie de *Diatripella Aspera*.

18-20 = 1 $^1/_2$.

Pluriloges; stromes sous-cutanés, à peine perforants, subcirculaires; spores légèrement courbées.

Cytosporina Cerviculata, Sacc.

Spermogonie d'*Eutypella Cerviculata*.

20-22 = 0,7.

Cytosporina Heteracantha, Sacc.

Spermogonie d'*Eutypa Heteracantha*.

20-25 = **1**.

Une loge ou à peu près; stromes couverts, élevant l'épiderme, globuleux, pâles à l'intérieur, émettant du dessus des faisceaux d'hyphes; spores filiformes arquées.

Sur rameaux du noyer. Z. arg. sablon.

Cytosporina Stellulata, Sacc.

Spermogonie d'*Eutypella Stellulata*, Nits.

20-25 μ. long.

Pluriloges, valsoïdes; stromes en forme de croûtes; spores filiformes courbées; cirrhe doré.

Sur rameaux de l'orme. Z. arg. sablon.

Cytosporina Milliaria, Sacc.

Spermogonie d'*Eutypa milliaria*, Nits.

24 = **1**.

Une loge; stromes ponctiformes, subglobuleux, pâles, nichés dans les couches supérieures du bois; un pore ou fissure; spores filiformes, courbées.

Sur rameaux de hêtre. Z. arg. sablon.

Cytosporina Ludibunda, Sacc.

25-30 = **1** ; basides 15-20 = 2.

Pluriloges, dorées; stromes variés, sous-cutanés, limités de noir; spores filiformes-crochues; cirrhe d'un rose jaunâtre.

Sur rameaux de *Prunus pudus*, d'*Ulmus campestris*. Z. arg. sablon.

Cytosporina Millepunctata, Sacc.

Spermogonie de *Cryptosphæria Millepunctata*.

40-48 = **1**.

Une loge ou à peu près; stromes petits, pâles, épars, sous-cutanés; spores filiformes, courbées; cirrhe rose ou jaunâtre.

Sur rameaux de *Fraxinus excelsior*. Z. arg. sablon.

Cytosporina Rostrata, (West.) Sacc.
Dumortiera Rostrata, West.

b) *Spores droites avec soies.*

Genre : **DILOPHOSPORA,** Desm.

Strome en croûte; périthèces perforés; spores cylindracées, avec un pinceau de soies aux extrémités.

Dilophos. Graminis, Desm.

10 = **1,7-2** ; soies (nombre 4-6) 4-5 = $^1/_2$.

*** BACILLARES ou FUSOIDEÆ MAJUSCULÆ.

a) *Spores fusoïdes surtout.*

Genre : **FUSICOCCUM,** Cd.

Strome convexe ou conique, *mou,* érumpent.

† *Microsp.* Sp. $^1/_4$ > < à $^1/_2$ <.

Fusic. Castaneum, Sacc.
Spermogonie de *Diaporthe Castanea,* (Tul.) Sacc.

6 $^1/_2$-**8** = **2-2,5** ou **10-12** = **2-2,5** (goutt. 2); basides 7-10 = 1 $^1/_2$.
Des loges variées et plus pâles; stromes pulvinés, érumpents, roux; spores fusoïdes, droites.
Sur rameaux de *Castanea vesca.* Z. arden.

Fusic. Glœosporioïdes, Sacc. et Roum.

8-10 = **2** $^1/_2$.
Des loges fausses; stromes déprimés coniques, érumpents, noirs, céracé pâle à l'intérieur; spores fusoïdes, droites.
Sur rameaux de *Betula.* Z. arden. (Libert.)

Fusic. Künzeanum, Sacc.

Spermogonie de *Diaporthe Künzeana.*

10-11 = 3 (goutt. 4).

Loges réunies en une; stromes conoïdes-déprimés, perforés au centre, sous la cuticule; noyau jaunâtre; spores fusoïdes, droites ou courbes.

Sur rameaux de *Carpinus betulus.* Z. arden.

Fusic. Carpini, Sacc.

Spermogonie de *Diaporthe Carpini.*

12 = 3-4 (goutt. 2).

Fusic. Farlowianum, Sacc. et Roum.

12-14 = 2,3-3.

Pluriloges plus pâles; stromes assez grands, irrégulièrement globuleux, devenant superficiels, noirs; spores fusoïdes.

Sur le bois pourri, décortiqué. Z. arden.

Fusic. Ornellum, Sacc.

12-15 = 3 $^1/_2$-4; basides 15-20 = 2 $^1/_2$; paraphyses 80 = 3.

Loges 2-4; stromes coniques, érumpents, gris; spores fusoïdes, courbées; basides sortant d'une couche ochracée.

Sur rameaux de *Fraxinus ornus.* Z. arden.

Fusic. Bacillare, Sacc. et Penz.

14-15 = 2.

Pluriloges fausses; stromes rassemblés, coniques, innés, assez gonflés, noirs, gris intérieurement; disque petit, blanc-furfuracé; spores bacillaires, droites.

Sur rameaux de *Pinus silvestris.* Z. arg. sablon.

†† *Macrosp.* Sp. $^1/_4$ >< à $^1/_2$ <.

Fusic. Guttulatum, Sacc. et Roum.

14-16 = 2 $^1/_2$ (goutt. 4).

Pluriloges d'un noir olivacé; petites masses pulvinées, à peine érumpentes; spores fusoïdes, droites.

Sur rameaux de hêtre. Z. arden. (Libert.)

Fusic. Cinctum, Sacc. et Roum.

14-18 = 4.

Loges fausses; stromes pulvinés, sous-cutanés, d'un noir olive, entourés d'une zône olive, sous-cutanée; disque ovale, plan, seul érumpent; spores fusoïdes.

Sur rameaux de *Castanea*. Z. arden. et arg. sablon.

Fusic. Lesourdeanum, Sacc. et Roum.

30 = 8.

Loges fausses et variées; stromes coniques, d'un gris noir, à peine érumpents; spores fusoïdes, droites.

Sur rameaux de *Corylus*. Z. arden. (Libert.)

GENRE : **PLACOSPHÆRIA**, Sacc.

Strome étalé, ordinairement couvert, noir; spores pédicellées.

Microsp. Sp. $^1/_4$ ><.

Placos. Galii, Sacc.

Spermogonie de *Mazzantia Galii*, Mont.

8-10 = 2-3.

Loges 1-5, pâles; strome inné, convexe, oblong, noir, intérieurement blanchâtre; ostiole proéminent; spores droites, oblongues-linéaires.

Sur tiges desséchées de *Galium mollugo*. Z. calc. et arden.

Placos. Stellariæ, (Lib.) Sacc.

Euryachora Stellariæ, (Lib.) Fckl.

12-15 = 2.

Placos. Graminis, Sacc. et Roum.

25-28 = 5-6 (goutt. 2-3).

Stromes oblongs, aplatis, subinnés, noirs, luisants; spores subfusoïdes, légèrement courbées.

Variété *Anceps.*

20-24 = 4 (goutt. 4) (sept. 2).

Stromes sous-cutanés, maculiformes, couleur de poix; noyaux peu distincts; spores cylindracées-courbées.

Sur feuilles de graminées. Z. arden (Libert).

b) *Spores bacillaires.*

Genre : **CEUTHOSPORA,** Greville.

Strome conique-tronqué, *assez dur, carbonacé,* érumpent; des ostioles.

Microsp. Sp. $^1/_4$ >.

Ceuthos. Lauri, Grev.

4-5 = 1-1 $^1/_2$.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Ceuthos. Glandicola, Sacc. Bom. et Rouss.

15-17 = 1 $^1/_2$.

Stromes épars, à bases *déprimées et coniques,* subsuperficiels, noirs; 2 à 4 loges; texture celluleuse d'un roux obscur; spores fusoïdes, courbées.

Sur les glands morts du chêne Z. arg. sablon.

Ceuth. Phacidioïdes, Grev.

Périthèces 3-7 condensés; stromes épars, innés, *déprimés,* couleur de poix; ostiole au centre d'un disque blanc-furfuracé, entouré de l'épiderme déchiré; spores cylindracées, droites; cirrhe blanc.

Sur feuilles d'*Ilex.* Z. arg. sablon.

**** HYALOSPORÆ.

GENRE : **CYTOSPORELLA**, Sacc.

Strome *valséen ou verruqueux,* subcoriace, érumpent.

Microsp. Sp. 1 $> <$.

Cytospella Mendax, Sacc. et Roum.

4-5 = **3** $\frac{1}{2}$**-4.**

Pluriloges; stromes superficiels, épixyles, globuleux, inégaux, noirs; spores globuleuses-ellipsoïdes.

Sur le bois de chêne. Z. arden.

M. Saccardo décrit dans ce genre les **Cytospora scheidweileri**, (West.), **Æsculi**, (West.), **Sphærosperma**, (West.) de notre flore.

GENRE : **RABENHORSTIA**, Fr.

Strome *globuleux-tronqué,* coriace-charbonneux, érumpent; spores pédicellées.

Microsp. Sp. $^1/_2$ $<$ à Sp. $^3/_4$ $<$.

Rabenh. Rudis, Fr.

6-8 = **2-3** (goutt. 2).

Pluriloges labyrinthiformes ou à peu près une loge; stromes coniques-hémisphériques, ou en forme de tour, érumpents, entourés par l'épiderme, souvent couverts d'un villeux sombre brun, d'un noir fuligineux; noyau rosé; spores oblongues-obtuses.

Sur rameaux de *Cytisus laburnum.* Z. arg. sablon. où il forme des croûtes étalées, entourées de noir.

Rabenh. Tiliæ, Fr.

12-14 = **8**; basides 60 = 1 $\frac{1}{2}$.

Genre : **FUCKELIA**, Bon.

Strome globuleux, *pulviné, à stipe court et épais, érumpent;* spores pédicellées.

Microsp. Sp. $^1/_2$ >.

Fück. Ribis, Bon.

Spermogonie de *Cenangium Ribesii.*

8 = **4** (goutt. 2, épaisses).

Pluriloges anguleuses; stromes subsphéroïdes, d'un fauve noirâtre, rugueux, solides; spores ovoïdes-oblongues.

Sur rameaux de groseillers. (A découvrir.)

DICTYOSPORÆ — PHÆODICTYÆ.

Genre : **DICHOMERA**, Cooke.

Strome globuleux, pulviné, légèrement papillé, érumpent, subimmergé; spores stipitées.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. 1 > <.

Dichom. Rhamni, (West.) Sacc.

Staurosphæria Rhamni, West.

Dichom. Mutabilis, (B. Br.) Sacc.

Hendersonia Mutabilis, B. Br.

(Sept. 3-4, muriformes).

Pluriloges; stromes déprimés, elliptiques, noirs, à peine érumpents; spores oblongues, elliptiques.

Sur rameaux morts de *Corylus avellana*. Z. calc.

B. *Des périthèces touffus, quelquefois rassemblés en grappes, érumpents, sur un strome basilaire, ou renfermés dans un strome verruciforme.*

Sous-Famille XII : DOTHIORELLEÆ.

HYALOSPORÆ.

Genre : **DOTHIORELLA**, Sacc.

Spores ovoïdes ou oblongues, souvent stipitées; périthèces globuleux, légèrement papilleux, coriaces-membraneux, érumpents; strome basilaire ou strome pulviné.

Microsp. Sp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 <$.

Dothella. Berengeriana, Sacc.

Spermogonie de *Botryosphæria Berengeriana.*

6 = 1-2.

Périthèces globuleux-aplatis, botryosphéroïdes, blancs intérieurement; spores cylindracées, obtuses.

Sur mûrier. Z. arden.

Dothella. Fraxinea, Sacc. et Roum.

12 = 5.

Périthèces globuleux, cespiteux-érumpents, à peine papillés; noyau gris-blanchâtre; spores oblongues-ellipsoïdes, obtuses.

Sur écorce de frêne. Z. arden. (Libert.)

Dothella. Latitans, (Fr.) Sacc.

12-13 = 2.

Loges blanches immergées dans un strome sombre-brun, couvert par l'épiderme déchiré; spores cylindracées, obtuses, droites.

Sur la face supérieure des feuilles de *Vaccinium vitis-idæa.* Z. camp.

Macrosp. Sp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 <$.

Dothella. Ribis, (Fckl.) Sacc.

Podosporium Ribis, Fckl.

Spermogonie de *Diaporthe Strumella.*

30 = 14.

Périthèces 1-6 nichés dans un strome de la grosseur d'une graine de pavot, globuleux, perforés, formant des pustules bien proéminentes; spores pédicellées, oblongues-ovées, souvent courbées, expulsées en une masse blanche.

Sur les branches mortes de groseiller noir. Z. arg. sablon.

Dothella. Advena, Sacc.

Spermogonie de *Botryosphæria Advena.*

50 = 8-10; basides 30-35 = 1 $^1/_2$.

Aspect dothideaccéen; périthèces globuleux, à peine papillés, érumpents, blancs intérieurement; spores allongées-fusoïdes, droites, nébuleuses.

Sur rameaux de chêne. Z. arden.

PHÆOSPORÆ.

GENRE : **HAPLOSPORELLA,** Speg.

C'est presque le **Dothiorella,** Phæospora.

Périthèces érumpents, papillés, subcharbonneux; strome basilaire ou verruciforme.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. $^1/_2 > <$ à $^3/_4 >$.

Haplospella. Cæspitosa, (B. et Br.) Sacc.

Diplodia Cæspitosa, B. et Br.

Périthèces globuleux, cespiteux, érumpents; ostiole papillé; spores oblongues, flaves, entourées de mucus, continues.

Sur les sarments de lierre. Z. arg. sablon.

PHÆODIDYMÆ.

Genre : **BOTRYODIPLODIA**, Sacc.

Périthèces rassemblés en grappe, membraneux-carbonacés, souvent papillés, érumpents; strome basilaire.

Macrosp. Sp. $^{1}/_{2} > <$ à $^{3}/_{4} <$.

Botryodia. Fraxini, (Fr.) Sacc.

Diplodia Fraxini, Fr.

20-25 = 10.

Botryodia. Congesta, (Lev.) Sacc.

Diplodia Congesta, Lev.

26-28 = 10-12; basides 18-20 μ.

Périthèces rassemblés, érumpents, entourés par l'épiderme déchiré; ostioles proéminents; spores oblongues-ellipsoïdes devenant obscures, fuligineuses.

Sur l'écorce de *Juglans regia.* Z. arg. sablon.

Botryodia. Scabrosa, (West). Sacc.

Diplodia Scabrosa, West.

Botryodia. Sphærioïdes, (Fr.) Sacc.

Dothiora Sphærioïdes, Fr.

Périthèces irrégulièrement anguleux, puis plans, noirs, blancs à l'intérieur; spores diplodioïdes.

Sur rameaux de frêne Z. arg. sablon.

Botryodia. Pyrenophora, (Berk.) Sacc.

Dothiora Pyrenophara, Berck.

Érumpent; périthèces elliptiques, plans, déprimés, noirs, pâles intérieurement; spores diplodioïdes, brunes.

Sur rameaux de *Sorbus aucuparia.* Z. arden.

Famille II : NECTRIOÏDEÆ, Sacc.

Périthèces et stromes charnus ou céracés, non noirs, de couleur agréable.

I.

PÉRITHÈCES SIMPLES.

Groupe I (Périthèces séparés, chauves).

Sous-Famille I : ZYTHIEÆ ou HYALOSPORÆ.

Périthèces globuleux, subpapillés, érumpents ou subsuperficiels, épiphytes.

Genre : **ZYTHIA**, Fr.

Microsp. Sp. $^1/_4 >$ à Sp. $^3/_4 >$.

Zyth. Brassicæ, Sacc. et Roum.

Spermogonie de *Nectriella Keithii.*

10-11 = 2 $^1/_2$-3.

Périthèces densement rassemblés, superficiels, globuleux, couleur de miel pâle; spores allongées, cylindracées.

Sur l'écorce intérieure de *Brassica* pourrissant. Z. arden. (Libert.)

Zyth. Aurantiaca, (Peck.) Sacc.

Sphæronema Aurantiacum, Peck.

7-10 μ. long.; **10 = 8** nobis.

Périthèces petits, superficiels, hémisphériques, oranges; spores ovoïdes renfermées d'un liquide jaunâtre. (Noyau gélatineux.)

Sur branche de noisetier. Z. arden. Hiver.

Zyth. Mercurialis, (Lib.) Kickx.

Sphæronema Mercurialis, Lib.

Genre : **SPHÆRONÆMELLA**, Karst.

Périthèces superficiels; ostioles en rostre.

Microsp. Sp. $^1/_4$ >.

Sphæron. Mougeotii, (Fr.) Sacc.

Sphæronema Hederæ, Fckl.

3 = 1.

Périthèces épars, érumpents, piriformes, roses, devenant pruineux; ostioles à rostre obscur; spores allantoïdes.

Sur les sarments de lierre. Z. calc.

Sphæron. Flavo-Viridis, (Fckl.) Sacc.

Sphæronema Flavo-Viridis, Fckl.

Genre : **ROUMEGUERIELLA**, Speg.

Périthèces sphériques, irrégulièrement déhiscents; spores très nombreuses, muriculées, globuleuses, renfermées dans un noyau muqueux.

Roumeg. Muricospora, Speg.

Eurotium Album, Lib.

20 μ. globuleuses muriculées.

Périthèces sphériques, membraneux, d'un rose jaunâtre, fixés à la matrice par un point central, irrégulièrement déhiscents; spores rassemblées dans un noyau gélatineux, d'un jaune pâle.

Sur feuilles pourries. Z. arden.

Genre : **LIBERTIELLA**, Speg.

Périthèces légèrement charnus, subsuperficiels; ostioles béants, cratériformes, discolores; spores ovoïdes, unies.

Libert. Malmedyensis, Speg. et Roum.

5-6 = 2-2 $^1/_2$; basides 10 = 2.

Périthèces rassemblés, hypophylles, globuleux-coniques, blancs, d'un sombre brun autour de l'ostiole largement ouvert, innés et villeux à la base de la matrice, secs, s'affaissant en cupule; gélatine sporuleuse blanche; spores elliptiques, granuleuses.

Sur thalle de *Pelligera polydactyla*. Z. arden. (Libert.)

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **PSEUDODIPLODIA**, Karst.

Périthèces subsuperficiels, globuleux ou oblongs, charnus-céracés, largement ouverts.

Pseudodipl. Ligniaria, Karst.

10-13 = 6-8 ; 12-14 = 4-5 nobis (goutt. 2) (sept. 1).

Périthèces plus ou moins rassemblés, subsuperficiels, orbiculaires ou allongés, aplatis, rougeâtres, devenant noirs, d'abord clos, puis largement ouverts; spores à peine resserrées, olivacées.

Sur le bois de vieilles branches de *Rosa canina*. Z. arden. Hiver.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **CHIATOSPORA**, Riess.

Périthèces sublentiformes; ostioles arrondis; spores divisées en × à quatre rayons, inégaux, septés et cylindracés.

Chiato. Parasitica, Riess.

Spor. 4 radiées **22-25** μ. long. (sept. 4-6).

Périthèces lentiformes, flaves ou sombre-brun dilué; des basides fasciculées-septées; spores à rayons aigus et inégaux.

Sur l'ostiole du *Massaria pupula*, et sur périthèces de *Cucurbitaria berberidis*. Z. arg. sablon.

Genre : **STAGONOPSIS**, Sacc.

Périthèces globuleux, érumpents ou subsuperficiels; spores oblongues.

Sp. $^1/_4$ <.

Stagon. Virens, Sacc. et Mouton.

35-40 = 5 (noyaux cuboïdes 7-8) (sept.).

Périthèces épars, globuleux-déprimés, perforés; texture d'un vert agréable; taches étalées verdâtres; spores longuement fusiformes, souvent courbées.

Sur tiges jeunes et herbacées. Z. calc.

II.

PÉRITHÈCES COMPOSÉES.

SCOLECOSPORÆ.

Genre : **POLYSTIGMINA**, Sacc.

Strome convexe-plan, d'un rouge orange, avec loges nombreuses; spores filiformes, continues, hyalines.

Polystig. Rubra, (Desm.) Sacc.

Septoria Rubra, Desm.

Spermogonie de *Polystigma Rubrum*.

25-30 = **1-1** $^1/_2$ (goutt. 6-9).

Strome suborbiculaire, charnu, plan ou convexe, rouge, puis sombre; loges très petites, nombreuses; ostioles ponctiformes; cirrhe blanc; spores linéaires, courbées.

Sur les feuilles de *Prunus spinosa*. Z. calc. et arden.

Famille III : LEPTOSTROMACEÆ, Sacc.

I.

PÉRITHÈCES SIMPLES.

Groupe I (Périthèces chauves).

A. *Périthèces à ouverture non crevassée-allongée.*

Sous-Famille I : LEPTOTHYRIEÆ.

Périthèces subcirculaires en bouclier.

HYALOSPORÆ.

Genre : **LEPTOTHYRIUM**, Kze. et Schm.

Périthèces disparaissant facilement, à structure parenchymateuse; à peine des basides.

Microsp. Sp. $^1/_4 <$ à $^1/_2 > <$.

Leptothy. Litigiosum, (Desm.) Sacc.

Leptostroma Litigiosum, Desm.

4-5 = 0,7-1.

Leptothy. Castaneæ, (Spr.) Sacc.

Spermogonie de *Coccomyces Dentatis.*

5-6 = 0,7.

Périthèces subcirculaires ou anguleux, plans, noirs, luisants, petits ; spores cylindracées.

Sur feuilles déjetées de *Castanea vesca.* Z. arden.

Leptothy. Vulgare, (Fr.) Sacc.

Leptostroma Vulgare, Fr.

7 = 1 $^1/_2$-2.

Leptothy. Macrothecium, Fckl.

7-8 = 1 $^1/_2$-2.

Périthèces épars, assez grands, astomes, noirs; spores cylindracées-fusoïdes, courbées.

Sur feuilles de *Lysimachia nummularia.* Z. arg. sablon.

Leptothy. Libertianum, Thüm, Sacc.

7-8 = 6 $^1/_2$-7.

Périthèces disciformes, noirs, s'évanouissant; texture parenchymateuse; spores ellipsoïdes.

Sur feuilles languissantes de *Prunus padus.* (Libert.)

Leptothy. Quercinum, Lasch.

9 = 1 $^1/_2$.

Périthèces subcirculaires ou anguleux, luisants, plans ; texture à peine radiée; spores bacillaires-naviculaires.

Sur feuilles déjetées de chêne. Z. arden.

Leptothy. Ptarmicæ, Sacc.

Labrella Ptarmicæ, Desm.

10 = 6-7 (à plasma divisé en 2).

Leptothy. Lunariæ, Kze.

Spermogonie de *Microthyrium Lunariæ.*

10-12 = 2.

Périthèces petits, disciformes, noirs, luisants, à centre omboné, perforés plus ou moins confluents; à texture radiée; spores fusoïdes, courbées.

Sur les tiges et siliques de *Lunaria rediviva.* (A découvrir.)

Macrosp. Sp. $^1/_4 <$ à $^1/_2 <$.

Leptothy. Subtectum, Sacc.

18-20 = 2 $^1/_2$-3 (goutt. 3-4).

Périthèces lâchement rassemblés, couverts, noirs, luisants, subastomes; texture parenchymateuse, fuligineuse; spores subfusoïdes, courbées.

Sur feuilles de *Luzula pilosa.* Z. arg. sablon.

Leptothy. Periclymeni, (Desm.) Sacc.

Labrella Periclymeni, Desm.

25 = 8-10 (goutt.).

Leptothy. Cytisi, Fckl.

26 = 2.

Périthèces oblongs ou orbiculaires, convexes puis plans, ruguleux, luisants, d'un noir brun, faux; spores cylindracées, courbées.

Sur rameaux secs de *Cytisus sagittalis.* Z. arden.

Leptothy. Scorodoniæ, (Lib.) Sacc.

Leptostroma Scorodoniæ, Lib.

Périthèces subarrondis, inégaux, minces, unis, noirs, subconfluents, disparaissant; tache noire; spores très petites.

Sur tiges mortes de *Teucrium scorodonia.* Z. arg. sablon.

Genre : **SACIDIUM**, Nees.

Structure ponctuée non celluleuse.

Sp. 1 à 1 >.

Sacl. Ulmariæ, Sacc. et Roum.

4-5 μ. rondes; 4 = 1/2 basides.

Périthèces rassemblés, subsuperficiels, astomes, d'un noir olivacé; spores globuleuses, rosâtres, avec un noyau hyalin.

Sur face supérieure des feuilles de *Spiræa ulmaria*. Z. arden. (Libert.)

PHÆOSPORÆ.

Genre : **PIROSTOMA**, Fr.

Périthèces à centre ombiliqué-perforé.

Pirost. Circinans, Fr.

Coniospor. Circinans, Fr.

12 μ. globuleuses.

SCOLECOSPORÆ.

Genre : **ACTINOTHYRIUM**, Künze.

Périthèces subastomes, à marge bien frangée, rayonnante.

Actinothy. Graminis, Künze.

50 = 1.

Sous-Famille II : DISCOSIEÆ.

Périthèces aplatis en disque ou en tache membraneuse.

HYALOSPORÆ.

Genre : **PIGGOTIA**, B. Br.

Périthèces inégaux, membraneux, souvent disposés en étoile, couverts au début; spores oblongues ou subcylindracées; basides en petites colonnes.

Pigg. Astroïdea, B. Br.

8-10 = **5-6** (goutt. 2-4).

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **DISCOSIA**, Lib.

Périthèces subsuperficiels, astomes ou ostiolés, membraneux; spores fusoïdes, ciliées.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Disc. Artocreas, (Tode.) Fr.

14-22 = **2-3** $1/2$ (soies 10-15 μ. long.) (sept. 3).

Disc. Deflectens, Sacc.

15-18 = **2** $1/2$ (soies obliques) (sept. 1-3).

Périthèces rassemblés sur des taches blanches, couverts, largement ouverts; spores fusoïdes, courbées.

Sur feuilles de *Ilex aquifolia.* Z. arg. sablon.

Disc. Clypeata, de Not.

16-17 μ. long. (soies) (3 sept.).

Disc. Strobilina, Lib.

18-20 μ. long. (soies obliques) (3 sept.).

Périthèces subsuperficiels, en bouclier, unis, à centre très courtement papillé-perforé; spores fusoïdes, droites.

Sur cônes d'*Abies*. Z. arden. (Libert.)

Disc. Alnea, (Pers.) Berk.

Forme de *Doscosia Artocreas.*

20 μ. long. (soies) (3 sept.).

Sur feuilles languissantes d'*Alnus glutinosa.*

Genre : **ENTOMOSPORIUM**, Lev.

Périthèces astomes; spores tétramères, en croix, ciliées.

Macrosp. Sp. $^1/_2$ <.

Entomosp. Maculatum, Lev.

18-20 = **12** (soies latérales) (3 sept.).

Périthèces aplatis, subastomes, épiphylles; spores à cellules latérales déprimées; stipe filiforme 20 = $^3/_4$.

Forme *Domesticum*, Sacc.

18 = **8**.

Sur les feuilles de *Mespilus germanica*. Z. arden.

B. *Périthèces s'ouvrant par gerçures allongées.*

SOUS-FAMILLE III : LEPTOSTROMEÆ.

HYALOSPORÆ.

GENRE : **LEPTOSTROMA.**

Périthèces subcharbonneux, lancéolés ou allongés, disparaissant souvent assez vite.

Microsp. Sp. allantoïdes, $^1/_4$ >.

Leptosma. Juncacearum, Sacc.

4-5 $= ^1/_2$ (goutt. 2); basides $10 = 1\text{-}1\ ^1/_2$.

Périthèces plans, en bouclier, ovés; texture parenchymateuse, non radiée; gerçure à peine marquée; spores fusoïdes.

Sur les feuilles mortes des *Luzules*. Z. arg. sablon. et arden.

Leptosma. Herbarum, (Fr.) Linck.

4-6 $=$ **1-1** $^1/_2$.

Périthèces confluents, plans, convexiuscules, lancéolés, couverts, sombre-noir; gerçure à peine marquée; spores botuliformes.

Sur tiges de plantes herbacées. Z. arden.

Leptosma. Spirææ, Fr.

6 $= ^3/_4$-**1**.

Périthèces conglomérés-connés, difformes, rugueux, gris à l'intérieur, enfin se désagrégeant, subhystéroïdes; spores courbées.

Sur tiges mortes de *Spiræa ulmaria* Z. arg. sablon.

Leptosma. Pinastri, Desm.

6-8 $= ^1/_2$-**1**.

Périthèces linéaires, parallèles, couverts; sporules cylindracées.

Sur feuilles de *Pinus silvestris*. Z. arg. sablon.

Leptosma.? Rubi, (Lib.) Speg. et Roum.

Cette espèce est plutôt un *Phoma.*

8-10 = **2** (pluri. goutt.).

Périthèces rassemblés, superficiellement innés, globuleux, s'affaissant en cupules par la sécheresse; pores; texture parenchymateuse, noire; spores cylindracées-arrondies aux extrémités, sortant d'une couche proligère pachydermateuse.

Sur rameaux desséchés de *Rubus* Z. arden. (Libert).

Leptosma.? Poæ, Lib.

Périthèces arrondis, unis, très plans, sous forme de substance céracée, d'un sombre brun, se désagrégeant; spores globuleuses, hyalines, stipitées.

Sur *Poa sudetica.* Z. arden. (Libert.)

Leptosma.? Capreæ, Lib.

Leptostroma Herbarum, F. Salicis, Lk.

Périthèces? épars, arrondis ou ovés, luisants; pulpe blanche; spores ovoïdes.

Sur rameaux secs de *Salix caprea.* Z. arden. (Libert.)

Leptosma. Filicinum, Fr.

Périthèces? allongés-difformes, unis, présentant une côte élevée, puis se désagrégeant complètement.

Sur les stipes de *Pteris.* Z. arg. sablon.

Genre : **LABRELLA**, Fr.

Périthèces innés, souvent faux, arrondis ou inégaux, résistants.

Labrel. Heraclei, (Lib.) Sacc.

Cheilaria Heraclei, Lib.

SCOLECOSPORÆ.

Genre : **LEPTOSTROMELLA**, Sacc.

Périthèces devenant superficiels, subcharbonneux.

Macrosp. Sp. 1/4 <.

Leptosmella. Hysterioïdes, (Fr.) Sacc.

20-25 = **2** (pluri. goutt.).

Périthèces oblongs, variés, à centre épaissi, substrié, se désagrégeant; spores cylindracées, courbées.

Sur les tiges de *Pœonia*. Z. arden.

Leptosmella. Juncina, (Fr.) Sacc.

Leptostroma Juncinum, Fr.

25-30 = **2** (goutt. pluri.).

Périthèces plans, allongés, en bouclier; gerçures peu distinctes; spores cylindracées, courbées.

Sur la *Juncus conglomeratus*. Z. arg. sablon.

Leptosmella. Septorioïdes, Sacc.

40-45 = **1**.

Périthèces rassemblés en lignes parallèles, érumpents, oblongs, charbonneux; gerçures; spores légèrement courbées.

Sur feuilles sèches de graminées. Z. arden.

II.

PÉRITHÈCES COMPOSÉS.

SOUS-FAMILLE IV : MELASMIEÆ.

HYALOSPORÆ.

GENRE : **MELASMIA**, Lev.

Périthèces membraneux, plans, subastomes ou gercés; strome étalé, noircissant, souvent phyllogène.

Sp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 >$.

Melas. Aviculariæ, West.

3-3 $^1/_2 =$ **1** $^1/_2$.

Melas. Acerina, Lev.

6-9 = 1.

FAMILLE IV : EXCIPULACEÆ, Sacc.

Périthèces subsphéroïdes au début, puis cupulés, patellés ou hysteroïdes, noirs.

I.

PÉRITHÈCES SIMPLES.

Groupe I (Périthèces chauves).

A. *Périthèces non hystéroïdes; texture celluleuse.*

SOUS-FAMILLE I : EXCIPULEÆ (Cupuliformes).

HYALOSPORÆ.

GENRE : **EXCIPULA**, Fr.

Périthèces excipuliformes ou cupulés, innés érumpents; texture celluleuse; ouverture orbiculaire; basides simples.

Genre : **DOTHICHIZA**, Lib.

Périthèces subglobuleux, érumpents, fermés, puis ouverts irrégulièrement, subcupulés, texture celluleuse.

Microsp. Sp. $^1/_4$ < à Sp. $^1/_2$ > à Sp 1 <.

Dothich. Serbi, Lib.

3-4 = **1-1** $^1/_2$.

Périthèces rassemblés mais non confluents, nichés puis érumpents, clos, ouverts, entourés régulièrement par l'épiderme déchiré, aplatis, arrondis ou oblongs; spores cylindriques, plus ou moins courbées.

Sur écorce de *Sorbus acuparia.* Z. arden. (Libert.)

Dothich. Padi, Sacc. et Roum.

Spermogonie de *Cenangium Padi*, Fr.

6 = **1**; basides 24-36 μ.

Périthèces rassemblés, subsuperficiels, aplatis, puis pezizoïdes-déprimés, subcoriaces; spores oblongues.

Sur rameaux avec écorce de *Prunus padus.* Z. arden. (Libert.)

Dothich. Passeriniana, Sacc. et Roum.

8-10 = **2-2** $^1/_2$; basides 40-50 = 2.

Périthèces cespiteux-érumpents, s'affaissant en bouclier; spores cylindracées, courbées.

Sur rameaux de *Rhamnus alaternus.* Z. arden. (Libert.)

Dothich. Ferruginosa, Sacc.

8 = **4.**

Périthèces rassemblés, érumpents, substipités, orbiculaires, plans et ombiliqués, clos d'abord, puis déchirés; spores oblongues-ovées.

Sur rameaux de *Pinus silvestris* Z. arg. sablon.

Dothich. Populea, Sacc. et Br.

10-12 = **8-10.**

Périthèces rassemblés, érumpents, subcoriaces, globuleux-déprimés, puis cupulés; spores globuleuses, ellipsoïdes, légèrement apiculées.

Sur rameaux morts de *Populus nigra.* Z arg. sablon.

Genre : **CATINULA**, Lev.

Périthèces subglobuleux ou cylindriques-cônés, membraneux-coriaces, noirs, quelquefois disque agréablement coloré, largement ouverts, concaviuscules-cupulés; texture celluleuse.

Macrosp. Sp. $^1/_2 >$.

Catin. Turgida, (Fr.) Desm.

18-20 = **8-9** (goutt.); basides 16-18 = 3-4.

Sous-Famille II : DISCULEÆ.

Périthèces en disques ou en patelles.

HYALOSPORÆ.

Genre : **DISCULA**, Sacc.

Périthèces disciformes ou imparfaits, recouverts par l'épiderme; texture celluleuse.

Microsp. et *Macrosp.* Sp $^1/_2 <$.

Discla. Platani, (Peck.) Sacc.

8-14 = **3 $^1/_2$-6.**

Périthèces érumpents, pâles, en petites pustules; spores oblongues.

Sur rameaux de platane. Z. arden.

Discla. Platyspora, (B. Br.) Sacc.

30-35 = **12.**

Périthèces petits, dégarnis du dessus, en pustules tuméfiées; spores oblongues, granuleuses.

Sur rameaux de platane. Z. arden.

HYALODIDYMÆ.

Genre : **DISCELLA**, B. Br.

Périthèces discoïdes ou patellés, couverts, souvent imparfaits; basides simples.

Macrosp. Sp. $^1/_2$ >.

Discella Carbonacea, (Fr.) B. Br.
18 = 6.

B. *Périthèces hystéroïdes.*

Sous-Famille III : PSILOSPOREÆ.

HYALOSPORÆ.

Genre : **SPORONEMA**, Desm.

Périthèces s'ouvrant par valves; basides bacillaires, rameuses.

Microsp. Sp. $^1/_4$ >.

Sporon. Phacidioïdes, Desm.
5 μ. long.

Genre : **PSILOSPORA**, Rabenh.

Périthèces oblongs ou inégaux, subbilabiés, rassemblés, membraneux, charbonneux.

Macrosp. Sp. $^1/_2$ <.

Psilos. Faginea, Rabh.

Dichæna. Faginea, Fr.

18-20 = 14-15 (goutt.); basides 50-60 = 2.

Psilos. Quercus, Rabh.

Dichæna Quercina, Fr.

22-25 = 8-10 (goutt. 4).

SCOLECOSPORÆ.

Genre : **SCHIZOTHYRELLA**, Thüm.

Périthèces subhémisphériques, clos, puis ouverts du centre à la circonférence par de petits lambeaux déchirés; noyau céracé, coloré.

Schizothy. Quercina, (Lib.) Thüm.

15 = **1** $^1/_2$ (sept. 3); loges 4 = 1 $^1/_2$.

Périthèces hypophylles, innés, hémisphériques, se déchirent en 4-6 lambeaux; texture fuligineuse, parenchymateuse; noyau d'un jaune rougeâtre; spores filiformes, quelquefois réunies en chaînettes très longues.

Sur les feuilles de chêne. Z. arden. Hiver. (Libert.)

Groupe II (Périthèces soyeux).

Sous-Famille IV : AMEROSPORIEÆ.

HYALOSPORÆ.

Genre : **AMEROSPORIUM**, Speg.

Périthèces cupulés; spores mutiques.

Amerosp. Macrotrichum, (B. et Br.) Sacc.

Sacc. *Excipula Macrotricha*, B. Br.

Périthèces assez grands, grossièrement soyeux, à tunique interne se séparant facilement de la tunique externe; spores petites, lunulées.

Sur les tiges du genêt. Z. arg. sablon.

Amerosp. Caricum, (Lib.) Sacc.

Excipula Caricum, Lib.

Périthèces innés, épars, sphériques, ouverts en pezize; poils très longs; spores fusiformes, droites, atténuées.

Sur feuilles de *Carex*. Z. arg. sablon. et arden.

Genre : **DINEMASPORIUM**, Lev.

Spores aristées à chaque extrémité; périthèces cupulés.

Macrosp. Sp $^1/_4$ > <.

Dinemas. Fimeti, Plowr. et Phill.

10 = **2-3** (soies 8 μ. long.).

Périthèces subarrondis, superficiels, noirs; spores oblongues, une soie à chaque extrémité arrondie.

Sur crottes de lièvre. Z. camp. 50 mètres et arden. 600 mètres. Lapins et lièvres vivant dans de vastes bruyères.

Dinemas. Dianthi, (West.) Oud.

Phyllosticta Dianthi, West.?

14-16 = **3** $^1/_2$ (soies courtes).

Périthèces nombreux, entourés de soies noires-cladosporoïdes, s'affaissant, noirs, couleur de paille du dessus; taches blanches subcirculaires puis subconfluentes; spores obscurément septées, allongées.

Sur feuilles languissantes de *Dianthus barbatus*. Z. arg. sablon.

Dinemas. Hispidulum, (Schrad.) Sacc.

Peziza (nobis Trichopeziza) *Hispidula*, Schrad.

14-18 = **2-2,3** (soies courtes, obliques) (goutt. 3-4).

Dinemas. Graminum, Lev.

15 = **2** $^1/_2$-**3** (soies 15 μ. long. obliques).

Dinemas. Strigosum, (Fr.) Sacc.

Excipula Strigosa, Fr.

25-30 = **3-4** (soies 4-5 μ. long.) (goutt.).

MELANCONIEÆ, Berk.

Pas de thèques, pas de périthèces.
Conidies rassemblées en tas sous-cutanés ; basides à peine marquées.

Groupe I (Petits tas chauves).

A. *Spores solitaires.*

Sous-Famille I : GLOEOSPORIEÆ ou HYALOSPORÆ.

ESPÈCES MOLLES. SUBTRÉMELLOÏDES, ÉRUMPENTES.

Microsp. Sp. $^1/_4$ > à Sp. $^3/_4$ >.

Genre : **MYXOSPORIUM**, Lk.

Petits tas longtemps couverts, couleur pâle, subcéracés.
Sur rameaux d'arbres.

Myxos. Tremulæ, Sacc. et Roum.

Myxos. Populi Tremulæ, (Lamb.) Sacc.

10 = 2 $^1/_2$.

Tas lâchement rassemblés, couleur succin; conidies fusoïdes-aiguës, droites.

Sur rameaux de *Populus tremula*. Z. arden.

Myxos. Millardetianum, Sacc. et Roum.

10-11 = 3 $^1/_2$.

Tas globuleux, déprimés, rassemblés, entourés d'une ligne noire, couleur succin ; conidies oblongues-fusoïdes, obtuses, droites.

Sur rameaux de *Salix*. Z. arden. (Libert.)

Myxos. Salicellum, Sacc. et Roum.

10-12 = 2.

Tas pulvinés, rassemblés, proéminents, d'un blanc céracé; conidies oblongues-cylindroïdes, obtuses, droites.

Sur rameaux de *Salix*. Z. arden. et arg. sablon.

Myxos. Rosæ, Fckl.

10-12 = 4.

Tas en pustules assez grandes, noires, atténuées en un ostiole conique, obtus, perforé, noir, entourées par l'épiderme déchiré; gélatine fluxile, grise; conidies oblongues-ovées, presque droites.

Sur rameaux séchés de *Rosa canina*. Z. arden.

Myxos. Deplanatum, (Lib.) Sacc.

10-14 = 3-4.

Tas circulaires, aplatis, sous-épidermiques, subolivacés, limités de noir; conidies elliptiques, cylindracées, obtuses, droites, d'un hyalin légèrement enfumé.

Surtout commun sur les branches mortes du charme; branches de *Corylus avellana*. Z. arden. généralement en compagnie du *Melanconium bicolor*. *V. ramulorum*.

Myxos. Marchandianum, Sacc. et Roum.

12-13 = 4.

Tas rassemblés, érumpents, d'un rose sale; conidies oblongues-ellipsoïdes, arrondies.

Sur rameaux de *Corylus*. Z. arden.

Variété *Quercinum*.

12-14 = 3.

Tas d'un sombre brun à l'extérieur, d'un rose sale à l'intérieur.

Sur rameaux du chêne. Z. arden. (Libert.)

Myxos. Salicinum, Sacc. et Roum.

12-14 = 4.

Tas rassemblés, disciformes, déprimés, couleur subsuccin; conidies courtement fusoïdes, inéquilatérales, obtusiuscules, granuleuses.

Sur rameaux de *Salix*. Z. arden.

Myxos. Populinum, Sacc.

13-15 = 10-11; basides 15-25 = 1 $^1/_2$.

Tas pulvinés, couverts par l'épiderme épaissi, couleur orange; conidies ellipsoïdes, nébuleuses, hyalines, subapiculées à la base.

Sur rameaux de *Populus*. Z. arden.

Myxos. Prunicolum, Sacc. et Roum.

14 = 4.

Tas légèrement rassemblés, pulvinés, transversalement oblongs, proéminents, ochracé-sombre; conidies oblongues-ellipsoïdes, arrondies.

Sur rameaux de *Prunus*. Z. arden.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ > à $^1/_2$ >.

Myxos. Carneum, Lib.

15-17 = 3 $^1/_2$**-4** $^1/_2$ (goutt. 2); basides 15 = 2 $^1/_2$-3.

Tas pulvinés, assez grands, subroses, érumpents et entourés par l'épiderme; conidies fusoïdes, obtuses, inéquilatérales.

Sur rameaux de hêtre. Z. arden.

9-11 = 2-3.

La forme *Fraxini*. Z. arden.

Myxos. Incarnatum, (Desm.) Bon.

Nemaspora Incarnata, Desm.

15-20 = 8-10; basides 20-24 = 2.

Myxos. Piri, Fckl.

20 = 10 (goutt. 1-2).

Tas devenant noirs, cirrhe globuliforme, blanc; conidies ovoïdes.

Sur rameaux de *Pirus communis*. Z. arg. sablon.

Myxos. Lanceola, Sacc. et Roum.

20-22 = 4.

Tas rassemblés, pulvinés; disque pâle, à noyau subcharnu coloré de sombre brun autour; conidies fusoïdes, aiguës, droites ou courbées, granuleuses.

Sur rameaux du chêne, du bouleau. Z. arden. (Libert.)

Myxos. Croceum, (Pers.) Link.

20-24 μ. diam.

Myxos. Propinquum, Sacc., Bom. et Rouss.

25-36 = **10-12**; basides 24 = 6.

Tas épars ou géminés, érumpents, déprimés au centre, grisâtres ; conidies ovales-oblongues, atténuées à la base, granuleuses.

Sur les troncs et rameaux d'*Ilex aquifolium.* Z. arg. sablon.

Myxos. Mali, nobis.

Conidie de *Tympanis Conspersa.* Forme Mali.

26 = 8.

Mêmes caractères que *Myxos Juglandinum;* pulpe olivâtre.

Sur branches de pommier. Z. arden. Hiver.

Myxos. Juglandinum, nobis.

28-32 = 10-12.

Petits paquets rassemblés, nichés sous l'épiderme, se fendillant, subhémisphériques, d'un jaune ochracé; spores nébuleuses, hyalines.

Sur branches de noyer. Z. arden. Hiver.

Myxos. Album, (Fr.) Sacc.

28 = 8-10.

Petits tas blanchâtres, nichés sous l'épiderme se fendillant; spores nébuleuses, hyalines.

Sur branches de *Corylus.* Z. arden. Hiver.

Genre : **GLŒOSPORIUM**, Desm. et Mont.

Petits tas longtemps couverts, phyllogènes ou caulicoles, pâles parfois sombres.

Microsp. Sp. $^1/_4$ > < à Sp. 1 <.

Glœos. Alneum, West.

4-6 = **2-2** $^1/_2$; basides 8-10 = 1 $^1/_2$-2.

Glœos. Quercinum, West.

5-6 = **2** $^1/_2$.

Glœos. Conigenum, Sacc. et Roum.

5-6 = **4**; basides 15 = 3-3 $^1/_2$.

Tas érumpents par fissure du périderme, subolivacés; conidies subglobuleuses, subatténuées à la base.

Sur écailles de cônes d'*Abies excelsa*. Z. arden.

Glœos. Orni, Sacc.

7-8 = **3** (goutt. 2).

Tas subcirculaires, couverts par l'épiderme noirci; taches variées, subochracées, entourées de sombre brun; conidies oblongues, aiguës, légèrement resserrées au milieu.

Sur face supérieure de feuilles de *Fraxinus orni*. Z. arden.

Glœos. Paradoxum, Fckl.

8 = **5-6**; basides 12-15 = 6.

Glœos. Ribis, (Lib.) Mont.

10 = **5-6**.

Glœos. Umbrinellum, B. et Br.

10-15 μ. long. (goutt. 2).

Taches irrégulières, anguleuses, brunes; conidies oblongues; cirrhe pâle.

Sur feuilles déjetées de chêne.

Glœos. Tremulæ, (Lib.) Pass.

Leptothyrium Tremulæ, Lib.

10-15 = 1,7-2 ; basides 5-6 μ.

Tas ordinairement épars, couverts par l'épiderme noirci, aplatis, d'un olive sombre, rugulcux, disparaissant par circoncision; taches oblongues ou subcirculaires, cendrées, entourées de sombre brun ; sporidies botuliformes-fusoïdes, courbées.

Sur feuilles de *Populus tremula*. Z. arden.

Glœos. Carpini, (Lib.) Desm.

10-15 = 1/2.

Glœos. Cylindrospermum, (Bonord.) Sacc.

Leptothyrium Cylindrospermum, Bonord.

10-15 = 2 1/2-**3**.

Glœos. Truncatum, (Bonord.) Sacc.

12-13 = 2 1/2-**3**.

Tas érumpents, entourés par l'épiderme obscurci; disque pâle roux, grossier; conidies cylindracées.

Sur feuilles de *Vaccinium vitis-idœa*. Z. arden.

Glœos. Haynaldianum, Sacc. et Roum.

12-15 = 2 1/2-**3** ; basides 31-40 = 1 1/2.

Tas épars, émergents, proéminents, disciformes, d'un rose sale; conidies oblongues, cylindracées.

Sur feuilles de *Magnolia grandiflora*. Z. arden. (Libert).

Glœos. Robergei, Desm.

12-15 = 8-9.

Glœos. Betulæ, (Lib.) Mont.

13-16 = 2.

Glœos. Platani, (Mont.) Oud.

14-15 = 5-6 (pluri. goutt.); basides 5-6 μ.

Glœos. Coryli, (Desm.) Sacc.

14-15 = 6 (goutt. 2).

Tas proéminents, subrassemblés, innés, très petits, arrondis-oblongs, d'un sombre brun pâle, puis bruns; taches ochracées; conidies oblongues, arrondies.

Sur feuilles languissantes de *Corylus avellana*. Z. arden.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ > à Sp. $^1/_2$ > <.

Glœos. Affine, Sacc.

14-20 = 4-6.

Tas épars, couverts par l'épiderme noirci; cirrhose; taches variées, blanchâtres, stériles; conidies cylindracées-oblongues, arrondies, nébuleuses.

Sur les feuilles d'orchidées exotiques.

Glœos. Lindemuthianum, Sacc.

15-19 = 3 $^1/_2$-5 $^1/_2$; basides 45-55.

Tas d'un blanc sale, enflant l'épiderme en pustule, puis érumpents; taches subarrondies, d'un sombre brun, stériles, au début entourées de roux; conidies oblongues, droites ou courbées, arrondies, granuleuses.

Sur les gousses des haricots. Z. arg. sablon.

Glœos. Fagi, West.

Labrella Fagi (Desm.).

15-20 = 7-8 (goutt. 2-3).

Glœos. Helicis, (Desm.). Oud.

Cheilaria Helicis, Desm.

22 = 6-7.

Glœos. Asparagi, nobis.

16-20 = 4.

Tas à peine visibles, pâles, couronnés de sombre, sous-épidermiques, subhémisphériques; spores cylindracées, courbées ou droites, hyalines, granuleuses.

Sur les tiges mortes d'*Asparagus.* Z. arden. Hiver.

Glœos.? Aurantiacum, (Link.) Sacc.

Cryptosporium Aurantiacum, Lk.

Grumeaux protubérants, irrégulièrement confluents; conidies compactes, courbées, hypophlœodes, de couleur orange.

Sur les tiges mortes du *Vincetoxicum officinale.* Z. calc.

Glœos. Concentricum, (Grev.) B. et Br.

Cylindrosporium Concentricum, Grev.

Tas blanchâtres, disposés concentriquement, subcuticulaires; conidies cylindracées, courtes, copieuses, tronquées, continues, érumpentes en grumeaux.

Sur feuilles de *Glechoma hedera,* de *Pulmonaria officinalis.* Z. arden.

Glœos. Orbiculare, Berk. (*Myxosporium Orbiculare*, Berk.).

Tas confluents, formant des petites étendues orbiculaires avec un pore commun; conidies oblongues, minces, d'un pâle vineux; cirrhe.

Sur les courges. Z. arg. sablon.

Genre : **HAINESIA,** Ell. et Sacc.

Petits tas, vite érumpents, couleur agréable, subtrémelloïdes; phyllogènes.

Hain. Rubi, (West.) Sacc.

Glœosporium? Rubi, West.

6-10 = 2-3 $^1/_2$.

Sous-Famille II : MELANCONIEÆ ou PHÆOSPORÆ.

Correspond aux *Sphæropsis* et *Coniothyrium.*

Genre : **MELANCONIUM.**

Conidies de *Melanconis* et *Melanconiella.*

Noirs, subcutanés, érumpents avec cirrhe; conidies solitaires au sommet des basides.

Microsp. Sp. $^1/_2 >$ à Sp. $^3/_4 > <$.

Melancum. Parasiticum, West.

7 $^1/_2$**-10** μ.

Melancum. Sphærospermum, (Pers.) Lk.

8-10 = 6-7.

Melancum. Ramulorum, Cd.

Variété de *M. Bicoloris.*

9-10 = 7-8 (goutt.).

Melancum. Sphæroïdeum, Lk.

10 = 6 (goutt. 1-2).

Melancum. Bicolor, Nees.

12 = 6 (goutt.)

Melancum. Sarothamni, Lib., Roum.

12 = 7 (goutt. 2).

Tas noirs, sous-cutanés, rassemblés, oblongs-convexes; conidies ellipsoïdes.

Sur les branches de *Sarothamnus scoparius.* Z. arden. (Libert.)

Melancum. Stromaticum, Cda.

14-10 (goutt. 1-2).

Tas coniques, sous-cutanés, à strome blanchâtre; conidies obovées, à tuniques épaisses, à bases subapiculées, granuleuses.

Sur rameaux du charme et du hêtre. Z. arden.

Macrosp. Sp. 1/4 > à 1/2 <.

Melancum. Betulinum, Schm. et Kze.

Conidie de *Melanconis Stilbostoma.*

15-18 = 6 1/2-**8** 1/2 (goutt. 1).

Tas subcutanés, coniques-discoïdes, noirs; conidies obovoïdes, avec tuniques épaisses, subacutées du dessous.

Sur rameaux morts du bouleau. Z. arg. sablon.

Melancum. Juglandinum, Kze.

Melanconium Ovatum, Auct. p. p.

25 = 15 (granuleuses).

Melancum. Magnum, (Grev.) Berk.

25-37 μ. long.

Tas rassemblés, occupant finalement tout le tronc; conoïdes ovoïdes; cirrhe.

Sur le tronc abattu de charme.

Melancum. Desmazieri, (B. et Br.) Sacc.

Discella Desmazieri, B. B.

30-35 = 6-10 (goutt. 3); basides 50-60 = 1 1/2.

Melancum. Secalis, Lib.

Tas très petits, globuleux, érumpents par fissures de l'épiderme; conidies ovales, simples; cirrhe.

Sur chaume de seigle. Z. arden. (Libert.)

Genre : **THYRSIDIUM**, Mont.

Thyrsid. Botryosporum, Mont.

Cheirospora Botryospora, Fr.

3 = 2 $^1/_2$-3.

Sous-Famille III : DIDYMOSPORIEÆ ou DIDYMOSPORÆ.

HYALODIDYMÆ.

Genre : **MARSONIA**, Fisch.

Correspond aux *Ascochyta*, Glœosporium, Hyalodidymæ.

Tas couverts, pâles, biogènes, ordinairement foliicoles; conidies hyalines.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. $^1/_2$ > <. Sp. $^1/_4$ >.

Mars. Truncatula, Sacc.

Ascochyta Aceris, Lib.

8-10 = 4-5.

Mars. Populi, (Lib). Sacc.

Asteroma Labes, Berk.

Glœosporium Populi, Mont. (Lib.).

20 = 12.

Mars. Castagnei, (Desm.) Sacc.

18-20 = 7-8.

Tas sur des taches orbiculaires, confluentes, brunes; conidies oblongues en massue, courtement pedicellées ; cirrhe blanc de neige.

Sur feuilles languissantes de *Populus alba*. Z. arg sablon.

Mars. Juglandis, (Lib). Sacc.

Glœosporium Juglandis, (Lib.) Mont.

20-25 = 5.

Mars. Potentillæ, (Desm.) Fisch.

Glœosporium Dryadearum, Desm.

20-25 = **7-9** (goutt. 4).

Tas lenticulaires, pâles, couverts ; taches subcirculaires, sanguines ; conidies oblongues-fusoïdes, courbées en faulx, subrostrées du dessus.

Sur feuilles de potentilles. Partout.

PHÆODIDYMÆ.

Genre : **DIDYMOSPORIUM,** Nees.

Tas noirs, érumpents, saprogènes.

Sp. $^1/_2$ > <.

Correspond au *Diplodia.*

Sous-Famille IV : STILBOSPOREÆ ou PHRAGMOSPORÆ.

PHÆOPHRAGMIÆ.

Genre : **STILBOSPORA,** Pers.

Correspond aux *Hendersonia.*

Tas noirs, non érumpents; conidies mutiques, noircissant l'épiderme par leur prompte sortie.

Macrosp. Sp. $^1/_2$ <.

Stilb. Angustata, Pers.

Conidie de *Pseudovalsa Macrospora.*

35-45-50 = **10-11** ; paraphyses 100-150 = 1-2 (3 septées).

Genre : **CORYNEUM**, Nees.

Tas noirs, érumpents; conidies mutiques, ne se désagrégeant pas pour salir.

Correspond aux *Hendersonia.*

Macrosp Sp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 <$.

Coryn. Microstictum, B. et Br.

15-17 = **5-6** $^1/_2$ (sept. 3); basides 20-25 = 1 $^1/_2$.

Tas couverts; strome à peine marqué; conidies subpiriformes ou oblongues, obtusiuscules, loge extrême subhyaline, les autres loges couleur miel.

Sur rameaux de *Rosa, Rubus, Cratægus.* Z. arden. et arg. sablon. Hiver.

Coryn. Notarisianum, Sacc.

Coryneum Disciforme, Cda.

45-50 μ. long. (sept. 5-6).

Coryn. Umbonatum, Nees.

42-50 = **16-18** (sept. 5-8).

Variété *Prunorum*, Sacc.

40-45 = **16** (sept. 7-9).

Conidies non resserrées, d'un brun sombre ochré, apiculées, subhyalines au sommet.

Sur rameaux de *Prunus.* Z. arden.

Coryn. Fusarioïdes, Sacc.

45 = **6** (sept. 7-8) (goutt. 7).

Tas rassemblés, érumpents, pulvinés, tuberculeux variés; conidies fusoïdes en faulx, aiguës, comme enfumées; loges extrêmes hyalines.

Sur rameaux du noyer. Z. arden. et calc.

Se rapproche beaucoup de l'**Hendersonia Fusarioïdes**, Sacc.

Coryn. Disciforme, Kze.

Spermogonie de *Pseudovalsa Lanciformis*, Ces.

50-60 = 14 (sept. 5-7).

Tas disciformes, aplatis; conidies en massue, à noyaux cuboïdes; basides filiformes; paraphyses.

Sur rameaux de tilleul, de chêne. Z. arg. sablon.

Coryn. Compactum, B. et Br.

50 = 18 (sept. 4-5).

Tas petits, couverts, puis nus; strome convexe; conidies largement fusiformes, pédicellées, légèrement obtuses avec noyaux en chaînettes.

Sur branches d'orme. Z. arden. Hiver.

Coryn. Kunzei, Cd.

Coryneum Disciforme, Nees.

60-70 = 12-14 (sept. 6) (goutt. 7).

Variété *Castaneæ*, Sacc.

50-52 = 10-12 (sept. 5).

Sur l'écorce de *Castanea*. Z. arden.

Coryn. Pulvinatum, Künze et Schm.

(Sept. 4-5); basides 75 μ. long.

Tas arrondis, patellés, convexes, érumpents, entourés par l'épiderme; conidies fusoïdes-oblongues, obtuses, légèrement resserrées, brunes.

Sur branches de *Tilia parvifolia*. Z. arg. sablon.

Genre : **SCOLECOSPORIUM**, Lk.

Correspond aux *Hendersonia.*

Spermogonie de *Massaria Macrosperma.*

Noirs, érumpents; conidies courbées, rostrées, plus pâles au sommet qui est mutique.

Scolecos. Fagi, Lib.

100-190 = **12-15** (goutt.) (sept. 7-12).

Genre : **ASTEROSPORIUM**, Kunze.

Correspond aux *Prosthemium.*

Noirs, érumpents; conidies lobées ou disposées en étoile, mutiques.

Asteros. Hoffmanni, Kunze.

3 à 4 rayons de **25** = **16** (sept. 3); basides 35-45 = 2.

Genre : **PESTALOZZIA**, De Not.

Se rapproche des *Darluca* (foliicoles surtout).

Noirs, érumpents; conidies à un ou plusieurs cils au sommet.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ > < à Sp. $^1/_2$ > <.

Pestaloz. Monochæta, Desm.

10 = **4** (4 loges, 2 hyalines, 2 sombres); rostre 5-6 μ. long, droit.

Tas noirs; taches variées, stériles; conidies fusoïdes avec stipe hyalin 18-20 μ. long.

Variété *Libertiana*, Sacc.

15 = **4-5** (sept. 3); rostre 6 = $^1/_2$, oblique.

Sur rameaux de *Sambucus*. Z. arden.

Pestaloz. Intermedia, Sacc., Bom. et Rouss.

13-15 = 4-5 (sept. 3); cil tortueux 13-21 μ.; basides 24-29 μ. long.

Tas cupuliformes, groupés, érumpents, par séries entre les fibres des bois; conidies ellipsoïdes, loges extrêmes hyalines, loges médianes d'un olivacé pellucide.

Sur vieux rameaux de *Rosa pomifera*. Z. calc.

Pestaloz. Truncata, Lev.

Pestalozzia Truncatula, (Cda.) Fckl.

16-17 = 9 (sept. 1) tronquée; cils 2-4.

Tas rassemblés, globuleux-déprimés, érumpents; conidies oblongues, les deux moyennes plus grandes, cuboïdes, fuligineuses, gouttelées; les deux extrêmes hyalines *très minces* (cils et baside filiforme).

Sur rameaux de *Prunus*. Z. arden. et arg. sablon.

Variété *Lignicola,* Cke.

Sur éclats de bois en compagnie de *Lasiosphæria hispida*. Z. arg. sablon.

Pestaloz. Guepini, Desm.

20 μ. long. (sept. 3-4); cils 3-4.

Pestaloz. Conigena, Lev.

20-24 = 6-7 1/2 (sept. 4); cils 3-4.

Pestaloz. Rosæ, West.

20-25 = 10 (sept. 3); cils 2-3.

Pestaloz. Castagnei, Desm.

22-25 μ. (sept. 4); cils 3.

Pestaloz. Funerea, Desm.

22-32 = **6-8** (sept. 6); cils 2-5 de 10-15 = 0,7-1; bas. 5-9 = 1-1 $^1/_2$.

Pestaloz. Calabæ, West.

30 = **10** (sept. 3); cils 2 de 10 μ. long.

Pestaloz. Pezizoïdes, De Not.

33-40 = **8-9** (sept. 6); cils 5-7.

Tas rassemblés ou épars, érumpents, disciformes, puis scutellés-pezizoïdes; conidies fusoïdes, cinq loges, loges médianes sombre-brun, les deux extrêmes hyalines; stipe 50-60 = 1 $^1/_2$.

Sur sarments de vigne. Z. arden.

Pestaloz. Hypericina, Ces.

(3 sept); cils 2 à chaque extrémité.

Tas linéaires, s'ouvrant souvent par fissures; noyau pâle; conidies courbes, pellucides.

Sur les tiges de l'*Hypericum perforatum*. Z. arg. sablon.

HYALOPHRAGMIÆ.

GENRE : **PROSTHEMIELLA**, Sacc.

Correspond au genre *Prosthemium*.

Érumpents, couleur agréable; conidies cylindracées, réunies en étoile à la base.

Prosthella. Formosa, Sacc.

3-8 rayons; **40-45** = **4** (septées).

Tas convexes-pulvinés, longtemps couverts, noirs à la base, couleur or agréable au disque; conidies souvent toruleuses, granuleuses.

Sur rameaux du hêtre. Z. arden. (Libert.)

Sous-Famille V : STEGANOSPORIEÆ ou DICTYOSPORÆ.

PHÆODIDYÆ.

Genre : **STEGANOSPORIUM**, Cda.

Correspond au genre *Camarosporium*.

Noirs, érumpents; conidies solitaires; souvent des paraphyses.

Macrosp. Sp. $^1/_2 <$.

Steganos. Cellulosum, Cda.

32-34 μ. long. (5-7 sept.) (murif.).

Steganos. Piriforme, (Hoffm.) Cda.

35-40 = **15-18** (sept. 4-6) (1 sept. longitud. ou murif.); basides 40-50 = 2-3.

Steganos. Compactum, Saçc.

50 = **20** (sept. 3-6) (murif.).

Tas aplatis-pulvinés, compacts, à base emboîtée dans le bois; conidies fasciculées, oblongues, ou en massue, resserrées aux cloisons, d'un fuligineux couleur cannelle.

Sur rameaux morts d'orme. Z. arg. sablon.

Steganos. Muricatum, Bon.

(5-7 sept.) (murif.).

Tas couverts, ovoïdes, entourés d'un mycelium filamenteux; conidies oblongues-ovoïdes, resserrées aux cloisons, terminées par une baside filiforme; cirrhe noir.

Sur rameaux du *Betula*. Z. arg. sablon.

Sous-Famille VI : NEMOSPOREÆ ou SCOLECO-ALLANTOSPORÆ

Genre : **CRYPTOSPORIUM**, Cd.

Tient le milieu entre les *Cytosporina* et *Fusicoccum* pour les ramicoles ; correspond au *Septoria-Phleospora* pour les foliicoles.

Gris ou noirs, érumpents, réguliers; conidies fusoïdes, courbées.
Sur les plantes pourries.

Cryptosp. Hysterioïdes, Cda.

6,2-6,8 μ. long. (Fckl. sept. 1.).

Tas oblongs, érumpents, noirs; conidies oblongues, blanches, 1 — *septées. Bom. et Rouss.*
Sur rameaux morts de saule. Z. arg. sablon.

Cryptosp. Epiphyllum, C. et Ellis.

28-40 = 4 (nobis sept. 3).

Tas en petites pustules d'un jaune pâle; noyau hyalin; taches d'un ochracé sombre; conidies fusoïdes, courbées en lune.
Sur feuilles de *Castanea*. Z. arden.

Cryptosp. Neesii, Cda.

50 = 5-6 (granuleuses).

Variété *Betulinum*, Sacc.

50 = 4-5.

Cryptosp. Coronatum, Fckl. (Voir *Fl. de Belg.*, t. II, p. 364.)

Conidie de *Cryptosporella Populina* (p. 363).

Cryptos. Nigrum, Bon.

Pustules petites, noires, avec un pore largement ouvert; taches sombre-brun; conidies suboblongues, fusiformes, hyalines et subcourbées.

Sur feuilles mortes du noyer, avec le *Marsonia juglandis.* Z. arg. sablon.

Cryptos. Viride, Bonord.

Tas d'un sombre vert; pustules convexes, arrondies, à pore simple, ouvert; conidies longues, fusiformes, obtusiuscules, pellucides, légèrement verdâtres.

Sur feuilles d'*Ægopodium.* Z. arden.

Genre : **CYLINDROSPORIUM**, Ung.

Correspond aux *Septoria.*

Pâles, couverts, subétalés; conidies filiformes.

Sur feuilles.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Cylindrosp. Alismacearum, Sacc.

18-21 = **2** $^1/_2$ (Bom., Rouss.).

30 = **1** $^1/_2$-**2** (goutt.).

Tas punctiformes, subcutanés, érumpents; conidies bacillaires, subcourbées.

Sur les feuilles de l'*Alisma natans.* Z. camp.

Cylindrosp. Niveum, B. et Br.

50 μ. long. (1 sept.).

Taches nombreuses souvent confluentes, marginées de brun; conidies blanches, oblongues, légèrement pédicellées.

Sur les feuilles vivantes de *Caltha palustris.* Z. arg. sablon.

Genre : **LIBERTELLA**, Desm.

Correspond aux *Cytospora*.

Agréables, difformes, érumpents avec cirrhe; conidies filiformes, longues, courbées.

Sur plantes pourries.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Libert. Acerina, West.

20-25 μ.

Libert. Taleola, Sacc.

Conidie de *Diaporthe Taleola*.

20-30 = **4**.

Tas suborbiculaires, plans, couleur de chataigne, charnus, rosés intérieurement, rassemblés, souvent entourés par une ligne noire; conidies cylindracées, aiguës, arquées.

Libert. Faginea, Desm.

Næmospora Crocea, Pers.?

30-35 = **2**.

Libert. Alba, Lib.

Libertella Macrospora, West.

40-60 = **5**.

Libert. Betulina, Desm.

Spores un peu plus courtes que celles du *Faginea*.

Genre : **NÆMOSPORA**, Pers.

Se rapporte aux *Cytospora*.

Agréables, difformes, longtemps couverts; conidies allantoïdes, courtes.

Sur plantes pourries.

Microsp. Sp. $^1/_4$ >.

Næmos. Microspora, Desm.

Conidie de *Diatrype Stigma*.

4-5 = **1** $^1/_2$; basides 24-28 = 1 $^1/_2$.

Næmos. Croceola, Sacc.

5-6 = $^3/_4$-**1**.

Tas sous-cutanés, pulvinés, composés de plusieurs noyaux, d'un beau jaune orange; conidies botuliformes; cirrhe succin; basides verticillées-rameuses.

Sur rameaux de chêne, frêne. Z. arden.

Næmos. Populina, Pers.

Conidie de *Valsa Populina.*

8 = **1** $^1/_2$.

Strome noirâtre, subcutané, conique-aplati; cirrhe flave; conidies cylindracées, courbées.

Sur rameaux de *Populus nigra.*

Næmos. Westendorpii, Sacc.

Libertella Microspora, West.

10 μ. long.

Tas bullés, couverts par l'épiderme irrégulièrement crevassé, d'un orange rouge; conidies filiformes, courbées.

Sur les rameaux du chêne. Z. arg sablon.

B. *Spores en chaînettes.*

Sous-Famille VI : HYPODERMIEÆ ou HYALOSPORÆ.

Genre : **HYPODERMIUM,** Lk.

Petits tas noirs, durs, hystéroïdes, sous-cutanés-érumpents; conidies sortant d'une couche proligère celluleuse d'un sombre olivacé.

Macrosp. Sp. $^1/_2$ >.

Hypoderm. Sparsum, Lk.

Schizoderma Sparsum, (Lk.) Duby.

Con. **10-20** = **6-8** (goutt. 4-6).

Petits tas érumpents, oblongs, pulvinés, noirs, entourés par l'épiderme; conidies ovées-oblongues, obtuses.

Sur feuilles de *Pinus silvestris.* Z. arden.

Hypoderm. Sulcigenum, Lk.

Schizoderma Sulcigenum, Duby.

Con. **20** µ. long.

Petits tas linéaires et oblongs, d'abord couverts par l'épiderme soulevé, puis sombre-brun; ils remplissent les sillons de l'épiderme déchiré.

Sur feuilles vivantes de *Pinus silvestris*. Z. arg. sablon.

Hypoderm. Nervisequum, Lk.

Schizoderma Nervisequum, Duby.

Petits tas linéaires suivant les nervures des feuilles, couverts, puis érumpents; conidies?

Sur feuilles de sapin. Z. arg. sablon.

Genre : **BLENNORIA**, Fr.

Sombre brun, compacts, discoïdes, puccinoïdes; basides très rameuses, dichotomes; conidies bacillaires, courtes, subhyalines.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. $^1/_2 >$ à $^1/_4 ><$.

Blenn. Buxi, Fr.

Con. **12-15** = **2** $^1/_2$-**3** (goutt. 2).

Genre : **AGYRIELLA**, Sacc.

Petits tas gélatineux, noirs, pulvinés, indurés; conidies acrogènes, cylindracées, courtes; basides verticillées-rameuses; rameaux conidiophores en tête.

Agyriel. Nitida, (Lib.) Sacc.

Agyrium Nitidum, Lib.

Con. **3-4** = $^1/_2$.

Petits tas luisants, déprimés, pulvinés, assez grands; basides en faisceaux; conidies subcylindracées, courbées, d'un olive très dilué.

Sur les sarments de ronces. Z. arden.

PHÆOSPORÆ.

GENRE : **THYRSIDIUM.** (Voir page 166.)

Conidies globuleuses et oblongues en chaîne et verticillées en tête, au sommet des basides.

PHÆODIDYMÆ.

GENRE : **BULLARIA,** D. C.

Noirs, couverts; conidies réunies en chaîne par des isthmes hyalins.

Bull. Umbelliferarum, D. C.

Didymosporium Bullatum, Fr.

16-18 μ. long. (goutt. 2).

Groupe II (Petits tas, à marge soyeuse).

HYALOSPORÆ.

GENRE : **COLLETOTRICHUM,** Cda.

Noirs, érumpents, entourés de soies noires.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ > <.

Colletotri. Glœosporioïdes, Penz.

Con. **16-18** = **4-6**; basides 18-25 = 4-5.

Tas épars, érumpents, déprimés, noirs; soies noires, peu septées; conidies cylindriques, droites, granuleuses.

Sur feuilles de *Rudbeckia laciniata.* Z. arden. et arg. sablon.

Colletotri. Lineola, Cda.

Con. **25-38** = **3** $^1/_2$**-4** (goutt. 3).

Pseudo-conceptacles, couverts de poils disposés par séries, cuspidés, plus pâles au sommet; conidies fusoïdes, arquées, aiguës.

Sur les graminées. Z. arden.

HYPHOMYCÈTES.

Des spores et des hyphes plus ou moins distinctes.

Famille I : TORULACEÆ.

(Aspect de taches poudreuses ou farineuses.) Hyphes à peine distinctes des spores.

HYALO-TORULACEÆ.

A. *Conidies libres.*

Sous-Famille : CHROMOSPORIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **CHROMOSPORIUM**, Sacc.

Gymnosporium, Cda.

Hyphes subnulles; saprogènes.

Microsp. Sp. $^1/_2$ > à $^3/_4$ >.

Chromos. Malvacearum, (West.) Sacc.

Con. **5** = **2** $^1/_2$.

HELICOSPORÆ.

Conidies roulées en spire, cylindracées, subseptées, hyalines ou légèrement colorées.

Genre : **HELICOMYCES**, Lk.

Conidies tournées en spirale, subhyalines, à gouttes ou faussement septées.

Helicom. Roseus, Link.

Con. **160-180** = **6** (goutt. 14-20).

Hyphes noduleuses au sommet, sporigères; conidies vermiculaires, arrondies, roses.

Sur bois de hêtre. Z. arg. sablon.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **MASTIGOSPORIUM**, Riess.

Hyphes stiptiformes, continues; souvent à conidies fusoïdes, 3 septées, porteuses de soies au sommet et à la cloison ultime.

Mastigos. Album, Riess.

Con. **55** = **12** (sept. 3); trois cils 4 = 1.

Petites touffes blanches sur une tache d'un noir brunâtre; conidies fusoïdes, avec stipe court.

Sur les feuilles d'*Aira cæspitosa*. Z. arden. (Libert).

B. *Conidies catenulées.*

Sous-Famille : OOSPOREÆ.

SAPROGÈNES.

I. — Conidies de globuleuses a fusiformes.

AMEROSPORÆ.

Genre : **OOSPORA**, Sacc.

Microsp. $^1/_4$ < à 1 < et *Macrosp.* $^1/_4$ >.

Spores subglobuleuses ou suboblongues.

Oos. Perpusilla, Sacc.

Con. **0,7-1,3** μ.

Petites touffes blanches, confluentes; conidies globuleuses, hyalines.

Sur le fumier des daims. Partout.

Oos. Virescens, (Lk.) Wallr.

Con. **6-7** = **2** $^1/_2$**-3**.

Oos. Roseola, Sacc.

Con. **6-8** = **4-5**.

Petites touffes, étalées, subroses, subpulvérulentes; conidies ovoïdes-oblongues.

Variété *Telæ*.

Con. **3** = **2**.

Sur chiffons humides. Z. arden. (Libert)

Oos. Crustacea, (Bull.) Sacc.

Torula Sporendonema, B. et Br.

Con. **6-8** μ. diam.

Oos. Trigonospora, March.

Con. **7,3-9** μ. diam.

Petites touffes largement étalées, blanches; conidies très copieuses, quelquefois légèrement stipitées, hyalines, souvent en chaînette.

Sur fumier de lapin. Z. arg. sablon.

Oos. Roseo-Flava, Sacc.

Con. **8-10** = **2** $^1/_2$-**3** (goutt. 2).

Petites touffes étalées, subpulvérulentes, d'un rose jaune; conidies oblongues, fusoïdes; rameaux fertiles, dressés, continus 40-45 = 4-4 $^1/_2$.

Sur feuille desséchée d'orchidée exotique. Bruxelles.

Oos. Grandiuscula, Sacc. et March.

Con. **12** $^1/_2$-**14** = **7** $^1/_2$-**10**.

Petites touffes blanches, minces, étalées; conidies ovoïdes, tronquées.

Sur le fumier. Z. arg. sablon.

Oos. Inæqualis, (Cd.) Sacc.

Torula Inæqualis, Cd.

Con. **15** = **9** avec un hyle.

Oos. Sulphurea, (Preuss.) Sacc.

Petites touffes étalées, sulfureuses, arachnoïdes; conidies ovées, sulfureuses.
Sur écorce pourrie. Z. arden.

Oos. Chrysosperma, (Cd.) Sacc.

Torula Chrysosperma, Cd.

Oos. Fasciculata, (Berk.) Sacc.

Oïdium Fasciculatum, Berk.

Oos. Fulva, (Kze.) Sacc.

Oïdium Fulvum, (Kze.) Lk.

Oos. Abortifaciens, (Berk.) Sacc.

Oïdium Abortifaciens, Kickx.

Oos. Ovalispora (Berk.) Sacc.

Torula Ovalispora, Berk.

Genre : **FUSIDIUM,** Lk.

Microsp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 <$ et *Macrosp.* $^1/_4 <$.

Conidies fusiformes.

Fusid. Parasiticum, West.

Con. **20** = **5.**

Petites touffes, d'abord gélatineuses, puis subpulvérulentes, blanches.
Au sommet des stromes stériles de *Xylaria cornuta.* Z. arg. sablon.

Fusid. Sulphureum, (Schl.) Lk.

Conidies fusiformes, petites, courbées, assez épaisses.
Sur les tubercules pourris de pommes de terre. Z. arg. sablon.

Fusid. Griseum, Lk.

Mycelium mince, évanescent; conidies droites, fusiformes, atténuées, pellucides, sur une couche grise et mince.

Sur les feuilles de *Quercus*, tombées à terre. Z. arg. sablon.

GENRE : **MONILIA,** Pers.

Hyphes distinctement rameuses; conidies assez grandes, souvent en forme de citron.

Microsp. et *Macrosp.* $^3/_4$ < à 1 <.

Moni. Candicans, Sacc.

Con. **15 = 9-10.**

Petites touffes floconneuses, d'un blanc jaunâtre ; hyphes fertiles dressées, articulées, vaguement rameuses du dessus ; conidies légèrement jaunes.

Sur bois et écorces. Z. arden.

Moni. Aurea, (Lk.) Gmel.

Oïdium Aureum, Lk.

Con. **20 = 12.**

Moni. Fructigena, (Pers.) Sacc.

Oïdium Fructigenum, Lk.

Con. **25 = 10-12.**

Moni. Libertiana, Roumeg, nº 22, p. 107 (semble être un *Bispora*).

Filaments étalés d'un noir olive, renflés à leur extrémité supérieure d'où partent les chapelets acrosporiens; conidies ovoïdes, hyalines, puis enfumées; 1 — septées.

Sur les tiges pourrissantes du choux rouge. Z. arden. (Libert).

Genre : GEOTRICHUM, Lk.

Conidies cylindriques ou cuboïdes; hyphes manifestes, septées.

Microsp. $^{3}/_{4} <$ à 1.

Geotrich. Cinnamomeum, (Lib.) Sacc.

Trichothecium Cinnamomeum, Lib.

Con. **3-5** = **4** (goutt. 4).

Taches étalées, subveloutées, couleur cannelle; hyphes $3\,^{1}/_{2}$-4 μ.; conidies subcuboïdes.

Sur fragments de bois, de feuilles. Z. arden. (Libert.)

Genre : CYLINDRIUM, Bon.

Conidies bacillaires; hyphes à peine manifestes.

Microsp. et *Macrosp.* $^{1}/_{4} > <$.

Cylind. Luzulæ, (Lib.) Sacc.

Psilonia Luzulæ, (Lib.).

Con. **5-6** = **1**.

Petits tas pulvinés, compacts, blancs; conidies cylindriques-tronquées.

Sur feuilles de *Luzula maxima.* Z. arden. et arg. sablon.

Cylind. Flavo-Virens, (Ditm.) Bon.

Fusidium Flavovirens, Ditm.

Con. **14-15** = **3**.

Cylind. Griseum, Bon.

Fusidium Griseum, Lk.

Con. **15-18** = **2**.

Cylind. Elongatum, Bon.

Con. **15-18 = 2** (goutt. 1 à chaque extrémité).

Petites touffes, lâches, blanches; chaînettes flexueuses, cylindracées, fusoïdes.

Sur feuilles pourries, surtout chêne, saule et hêtre. Z. arden.

PHRAGMOSPORÆ.

GENRE : **SEPTOCYLINDRIUM**, Bon.

Macrosp. Ordinairement $^{1}/_{4} <$.

Septocylind. Bonordenii, Sacc.

Cylindrium Septatum, Bon.

Con. **30-40 = 4** ; à la fin (sept. 2-4).

BIOPHYLES.

AMEROSPORÆ.

GENRE : **OÏDIUM**, Lk.

Microsp. $^{1}/_{2} > <$ à 1 et *Macrosp.* $^{1}/_{2} > <$ à $^{3}/_{4} > <$.

Oïd. Leucoconium, Desm.

Con. **20-30 = 13-16**.

Petites touffes blanches, bien étalées.

Sur les rosiers. Partout.

Oïd. Monilioïdes, Lk.

Con. **25-30 = 8-10**.

Oïd. Tuckeri, Berk.

Con. **25-30 = 15-17**.

Oïd. Erysiphoïdes, Fr.

Con. **30-40 = 15-20.**

Larges touffes blanches indéterminées, d'un aspect rose.
Sur les feuilles des plantes de plusieurs familles. Partout.

PHÆO-TORULACEÆ.

A. *Conidies libres, ou réunies à la base.*

Sous-Famille : CONIOSPORIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **CONIOSPORIUM**, Lk.

Papularia, Fr.; *Gymnosporium*, Pers.

Conidies globuleuses, discoïdes, ou ovoïdes.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. $^{1}/_{4}$ > à le plus souvent 1.

Conios. Buxi, West.

Con. **3-10** μ. long.

Petites touffes étalées, indéterminées, érumpentes, d'un noir brun; conidies globuleuses, puis ovoïdes ou piriformes.
Sur rameaux dejetés de buis Z. arg. sablon.

Conios. Rhizophilum, (Pr.) Sacc.

Con. **8-10** μ. globuleuses.

Conios. Arundinis, (Cda.) Sacc.

Con. **8-12** μ. diam. 4-6 μ. épais (goutt. 1).

Petites touffes allongées, seriées d'après les fibres de la tige; pseudostrome jaunâtre; conidies lenticulaires ou subanguleuses, noires.
Sur les chaumes du *Phragmites communis*. Z. arg. sablon.

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **DICOCCUM**, Cda.

Hyphes simples très courtes.

Microsp et *Macrosp.* Sp. $^1/_4$ > à $^3/_4$ >.

Dicocc. Minutissimum, Cda.

Con. **8-10** = **6** (sept. 1).

Touffes punctiformes, noires; conidies obovoïdes, d'un noir fuligineux.

Sur bois dénudé. Z. arden.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **CLASTEROSPORIUM.**

Conidies séparées, cylindriques; saprogènes.

Macrosp., général $^1/_4$ < quelquefois $^1/_4$ > à $^1/_2$ > <.

Clasteros. Opacum, (Cda.) Sacc.

Con. **15-40** μ. (Sept. 3-5).

Étalé, très noir, opaque; conidies polymorphes, peu stipitées, resserrées aux cloisons, brunes, puis noires; hypostroma jaunâtre.

Sur le bois pourri. Z. arg. sablon.

Clasteros. Gibbum, Sacc. Bom. et Rouss.

Con. **15** = **7-8** (sept. 2).

Étalé, mince, velouté, noir; conidies oblongues, arquées-gibbeuses, non resserrées, opaques.

Sur les feuilles d'*Araucaria imbricata* pourries. Z. arg. sablon.

Clasteros. Fungorum, (Fr.) Sacc.

Epochnium Fungorum, Fr.

Con. **25-28** = **8** (sept. 3-4).

Clasteros. Bulbophilum, (West.) Sacc.

Sporidesmium Bulbophilum, West.

Con. **30** = **10** (sept. 3).

Clasteros. Atrum.

Sporidesmium Atrum, Lk.

Con. **60-65** μ. long. (sept. 3).

Clasteros. Eruca, Sacc. Bom. et Rouss.

Con. **65-70** = **11-14** (sept. 13-16).

Étalé, mince, subpulvérulent, noir; conidies fusoïdes-cylindracées, souvent courbées, très courtement stipitées, non resserrées, d'un noir fuligineux, arrondies du sommet.

Sur le bois pourrissant de l'*Ulmus.* Z. arg. sablon.

Clasteros. Sparsum, (Fres.) Sacc.

Con. **100-200** μ. long. (sept. 12-13).

D'un noir brunâtre; conidies cylindracées fusoïdes, obtusiuscules, très courtement stipitées, d'un brun pâle, resserrées-toruleuses.

Sur tiges de l'*Urtica dioïca.* Z. arg. sablon.

Clasteros. Hormiscioïdes, Sacc.

Sporidesmium Hormiscioïdes, Cda.

Con. **150-180** = **12-15** (sept. 35-45).

Étalé, velouté, noir; hyphes fertiles, ochracées 20-30 = 6; conidies vermiculaires, septées, tortueuses, fuligineuses, article du sommet subenflé.

Sur rameaux de buis avec *Helminthosporium macrocarpum.* Z. arg. sablon.

Clasteros. Caulicolum, (Cda.) Sacc.

(Sept. 7-8.)

Étalé, noir; conidies subfasciculées, fusoïdes-cylindracées, fuligineuses, légèrement resserrées.

Sur les tiges d'ombellifères avec l'*Helminthosporium rhopaloïdes.* Z. arg. sablon.

Clasteros. Tenuissimum, (Nees.) Sacc.

(Sept. 3-5.)

Hyphes simples, très tenues, d'un noir olive; conidies rassemblées à la base, lancéolées en massue, olivacées.

Sur les tiges herbacées. Z. arg. sablon.

Genre : CRYPTOCORYNEUM.

Conidies fasciculées de la base, cylindracées.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Cryptocory. Fasciculatum, Fckl.

Con. **76** = **2** (sept. 15).

Petites touffes planes, orbiculaires ou allongées, noires; conidies paliformes, non resserrées.

Sur les rameaux morts du lilas, du frêne et du cornouiller. Z. arg. sablon.

DICTYOSPORÆ.

Genre : SPORODESMIUM, Lk.

Chaînes de conidies ne se détachant pas.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ > < généralement $^1/_2$ < à $^3/_4$ > <.

Sporodes. Trigonellum, Sacc.

Con. **18-20** = **12-15** (muriforme).

Rassemblé, punctiforme, noir ; conidies subtrigones, avec angles 3-4 — septés, apiculés, hyalins, le reste d'un fuligineux cendré, à stipe court.

Sur l'écorce d'*Ailanthus*. Z. arden.

Sporodes. Myrianum, Desm.

Con. **20-30** = **10-15** (muriforme).

Sporodes. Polymorphum, Cda.

Con. **40-50 = 25-30** (muriforme).

Petites touffes noires, étalées, pulvérulentes, conidies ovoïdes, anguleuses, d'un noir brunâtre; sporophore court.

Sur bois. Z. arg. sablon.

Sporodes. Piriforme, Cda.

Con. **28-30** μ. long. (loges 2-4).

Etalé, noir, espèce de croûte; conidies obovées, brunes; sporophore hyalin, court.

Sur une planche pourrie. Z. arg. sablon.

Sporod. Melanopodum, (Ach.) B. Br.

Petites touffes amples, noires; conidies subglobuleuses, plurisceptées; sporophore variable.

Sur l'écorce de pommier. Z. arden.

B. *Conidies empaquetées, de formes diverses, quelquefois disposées en séries parallèles.*

Sous-Famille : CONIOTHECIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **ECHINOBOTRYM,** Cda.

Spores *agglomérées* d'une manière étoilée ou rameuse, ovoïdes-piriformes, unies ou aspérulées.

Microsp. Sp. $^1/_2$ >.

Echinobo. Atrum, Cda.

Con. **10-12 = 6-8.**

Conidies obpiriformes, subrostellées du dessus, muriculées, d'un sombre brun, plus pâles du dessus, rassemblées en glomérules étoilées.

Sur le stipe de *Stysanus*. Z. arden. Sur crottes de lapin (Marchal).

DICTYOSPORÆ.

Genre : **CONIOTHECIUM**, Cda.

Conidies empaquetées, généralement agglomérées (muriformes), quelquefois de formes diverses.

Surtout *Microsp.* de $^1/_2 >$ à $^3/_4 >$ à 1.

Coniothe. Conglutinatum, Cd.

Con. **1-3** μ. diam.

Coniothe. Betulinum, Cd.

Con. **4-6** μ. diam.

Coniothe. Epidermidis, Cd.

Con. **10** μ. diam.

Petites touffes rassemblées, posées transversalement, érumpentes, noires; conidies subglobuleuses, sombres, irrégulièrement conglobées.

Sur les jeunes rameaux de *Sorbus aucuparia*. Z. arg. sablon.

Coniothe. Helicoïdeum, Sacc.

Con. **10-11 = 5.**

Points noirs, confluents; conidies polymorphes, ordinairement rassemblées en sphère, fuligineuses.

Sur les feuilles de graminées. Z. arden. (Libert.)

Coniothe. Amentacearum, Cd.

Con. **13-24** μ. diam.

Coniothe. Effusum, Cd.

Sporidermium Lepraria, Berk.

Con. **8-4 = 8-4.**

Noir, largement étalé; conidies subglobuleuses, sombres, rassemblées en globes irréguliers.

Sur le bois. Partout.

Coniothc. Toruloïdes, Cda.

Petits tas pulvinés, assez compacts; conidies agglomérées ou en chaînettes variées, fuligineuses, subsphéroïdes.

Sur les rameaux décortiqués d'*Abies excelsa. Z.* calc.

Genre : **DICTYOSPORIUM,** Cd.

Conidies ovoïdes ou cordiformes, formées de loges en chaînettes, disposées parallèlement et ne se disjoignant pas.

Dictyos. Elegans, Cda.

Loges ou cellules **57-60** μ. long.

Expixyle, noir, étalé, conidies en forme de langue; cellules jaunes, diaphanes, disposées en cinq séries, à parois assez épaisses, sombres.

Sur le bois pourri. Partout.

Genre : **SPEIRA,** Cda.

Mêmes caractères que *Dictyosporium,* sauf que *les conidies se disjoignent.*

Speira Toruloïdes, Cda.

Con. **50-60** = **9-7** (sept. 7) (goutt.); 6 à 7 séries de conidies articulées; chaque article 8-9 μ. diam.

C. *Conidies réunies en chaînettes simples ou disposées par séries.*

Sous-Famille : TORULEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **TORULA,** Pers.

Conidies globuleuses ou ovoïdes, *se séparant facilement.*

Microsp. $^1/_2$ > à 1.

I. EU-TORULA.

Conidies unies.

Torul. Graminis, Desm.

Con. **5-6** μ. diam.

Torul. Herbarum, Lk.

Con. **6-7** μ. diam.

Torul. Monilloïdes, Cd.

Con. **6-7** = **3-4**.

Petites touffes noires; conidies ovoïdes, réunies en chainettes dressées.

Sur les rameaux et le bois pourri. Partout.

Torul. Antennata, Pers.

Con. **10-15** = **3-4** (goutt. 1-3).

Torul. Tenera, Lk.

Mycelium mince; chaînes fragiles, noires; conidies globuleuses, inégales, brunes.

Sur rameaux morts. Z. arg. sablon.

Torul. Abbreviata, Cd.

Chaînes de 3-4 spores.

Petites touffes confluentes; conidies globuleuses, petites, d'un gris sombre.

Sur les feuilles du *Carex pseudo-cyperus*. Z. arg. sablon.

Torul. Cæsia, (Fuck.) Sacc.

Alysidium Cæsium, Fckl.

Petites touffes confluentes, bleues extérieurement, noires à l'intérieur; conidies en chaines rameuses, ovées, sombre-brun à une goutte.

Sur les rameaux de *Sambucus nigra*. Z. arg. sablon.

Torul. Cylindrica, Berk.

Étalé, noir; conidies rassemblées par quatre entre des hyphes courtes, égales, cylindriques.

Sur rameaux morts. Z. arg. sablon.

Torul. Pulveracea, Cd.

Con. **10 = 4.**

Petites touffes d'un noir olive, oblongues, parallèles, pulvérulentes, confluentes; chaînes rameuses; conidies oblongues-ovoïdes, olivacées, d'un à deux noyaux.

Sur une souche de frêne. Z. arg. sablon.

Torul. Rhododendri, Kz.

Hyphes penchées, fasciculées-rameuses, rameaux étalés; conidies globuleuses ou oblongues-globuleuses, sombre-brun.

Sur les tiges mortes du *Rhododendrum*. Z. arg. sablon.

Torul. Faginea, Fckl.

Étalé noir; hyphes peu rameuses, divisées en articles didymes; conidies arrondies, uniguttulées, sombres.

Se rapproche du *Torula compacta,* Fckl; par les chaînettes réunies en séries; par les conidies réunies par quatre.

Sur hêtre et tiges de *Rosa canina*. Z. arden.

II. TRACHYTORA.

Conidies raboteuses.

Torul. Conglutinata, Cd.

Con. **8,6** μ. diam.

Hyphes rampantes, rameuses, conglutinées; conidies globuleuses, raboteuses par des points jaunes, puis sombre-brun, à noyau plus obscur.

Sur les racines de l'*Helleborus fœtidus* Z. calc.

Torul. Compniacensis, Richon.

Con. **8-10** μ. diam.

Petites touffes noires, épaisses, pulvérulentes, largement étalées, indéterminées; chaînes simples ou peu rameuses, entremêlées; conidies globuleuses, sombres, légèrement tuberculeuses.

Sur les murs humides. Z. arden.

Genre : **HORMISCIUM.**

Conidies globuleuses-cuboïdes, *se séparant difficilement.*

Microsp. et *Macrosp.* 1.

Hormisc. Hysterioïdes, (Cda.) Sacc.

Torula Hysterioïdes, Cd.

Con. **4-5 = 4.**

Petites touffes linéaires, souvent parallèles, noires; chaines dressées, égales, serrées, jaunâtres; conidies. cylindracées-subcuboïdes.

Sur rameaux décortiqués. Z. arg. sablon.

Hormisc. Stilbosporum, (Cda.) Sacc.

Torula Stilbospora (Cd.).

Con. **7-8** μ. diam.

Petites touffes érumpentes, pulvérulentes, allongées, confluentes, noires; chaînes simples ou rameuses, flexueuses; conidies subquadratées, connées, brunes.

Sur bois de peuplier. Z. arg. sablon.

Hormisc. Pithyophilum, (Nees.) Sacc.

Torula Pinophila, Chev.

Con. **18-20** μ. diam.

Étalé, épais, noir, superficiel; chaines vaguement rameuses; rameaux atténués du dessus, légèrement courbés; conidies cuboïdes ou globuleuses, cohérentes, fuligineuses.

Sur rameaux vivants de *Pinus abies* Z. Juras.

Hormisc. Antiquum, (Cd.) Sacc.

Torula Antiqua, Cd.

Petites touffes étalées, indéterminées, noires, pulvérulentes; hyphes érumpentes et pénétrant le bois; conidies cuboïdes oblongues et ovales, inégales, sombre-brun.

Sur le bois de *Pinus silvestris*. Z. calc. et arg. sablon.

Genre : **GYROCERAS**, Cd.

Se distingue de l'*Hormiscium* par *ses chaînettes courbées.*

Gyrocc. Plantaginis, (Cd.) Sacc. (*Fl. myc. Belg.* t. II, p. 164).

Torula Plantaginis, Cd.

Con. **9-13** μ. diam.; **10** = **5** (goutt. 1).

Hypophylle, étalé, indéterminé, tomenteux, noir; chaînes jointes en faisceaux, recourbées, simples ordinairement, d'un sombre brun; conidies presque quadratées.

Sur les feuilles vivantes de *Plantago major.* Z. juras. Partout.

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **BISPORA**, Cd.

Microsp. et *Macrosp.* $^1/_4$ > à $^1/_2$ <.

Bisp. Monilioïdes, Cd.

Con. **20-22** = **6-7** (sept. 1) (goutt. 2).

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **SEPTONEMA**, Cda.

Conidies pluriseptées, allongées, en chaînettes.

Ordinairement *Macrosp.* $^1/_4$ > < à $^1/_2$ <.

Septon. Bisporoïdes, Sacc.

Con. **10** = **4**; **15-20** = **4** (sept. 3-4).

Petites touffes noires, soyeuses; conidies en chaines longues et simples, cylindracées-oblongues, obtuses, fuligineuses.

Sur le bois de *Syringa vulgaris.* Z. arg. sablon. Sur bois. Z. arden.

Septon. Rude, Sacc.

Con. **40-55** = **10-12** (sept. 6-8).

Étalé, noir, velouté; conidies dressées, oblongues-fusoïdes, tronquées, d'un noir fuligineux; chaînes dressées, rigides.

Sur écorce de vieux noisetier. Z. arden.

Septon. Strictum, Cd.

Con. **6** μ. épaisses (3-5-10 sept.).

Étalé, noir; chaînes dressées, serrées, simples; conidies oblongues, obtuses, plus pâles supérieurement, inférieurement d'un sombre brunâtre.

Sur un rameau d'*Acer campestre*. Z. arg. sablon.

Septon. Hormiscium, Sacc.

Con. **40-50** = **12-14** (sept. 6-10).

Étalé, noir fuligineux, soyeux; conidies fusoïdes ou en massue, fuligineuses; chaînes 150 = 12-14 long.

Variété *Angustius*, Sacc.

Con. supérieures **7-8** = **4-5** (1-3 sept.).

Con. inférieures **30-40** = **6-8** (sept. 7-8).

Sur de vieux rameaux de *Prunus spinosa*. Z. calc.

Famille II : HYPHOMYCETECEÆ.

MUCEDINEÆ.

A. *Conidies agglomérées en tête au sommet de hyphes simples ou subsimples.*

Sous-Famille : CEPHALOSPORIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **TRICHODERMA**, Pers.

Hyphes stériles compactes, couchées; hyphes fertiles, deux à trois fides; conidies se désagrégeant facilement.

Trichod. Lignorum, (Tode) Harz.

Trichoderma Viride, Pers.

Con. **3** μ. diam.

Trichod. Lateritio-Roseum, Lib.

Hémisphérique-pulviné, confluent, d'un rose rougeâtre, pâlissant; conidies très petites, ovales.

Sur les tubercules pourris de *Solanum tuberosum.* Z. arden. (Libert.)

DIDYMOSPORÆ.

GENRE : **CEPHALOTHECIUM,** Cda.

C'est le genre *Trichothecium* avec conidies agglomérées en têtes.

B. *Conidies verticillées-pleurogènes, insérées sur des articles de hyphes çà et là épaissis. Conidies agglomérées.*

SOUS-FAMILLE : GONATOBOTRYTEÆ.

AMEROSPORÆ.

GENRE : **NEMATOGONIUM,** Desm.

Caractères du *Gonatobotrys,* Cd. Il n'en diffère que par les articles sporigènes qui sont *unis* au lieu d'être *denticulés.* — *Hyphes dressées.*

Macrosp. Sp. $^3/_4$ <.

Nematogon. Aurantiacum, Desm.

Con. **15 = 10.**

Petites touffes, veloutées, étalées, d'un orange fauve; articles cylindracés-gonflés, articles sporigènes-globuleux; conidies obovoïdes, plus aiguës à la base, suboranges.

Sur écorces de peupliers. Z. arg. sablon.

Nematogon. Aureum, Berk.

Hyphes à quatre articles, courtes, en massue; conidies ellipsoïdes d'un orange fauve.

Sur les branches de hêtre. Z. arg. sablon.

GENRE : **GONATOBOTRYS**, Cda.

Articles fertiles, globuleux, denticulés et sporigènes; conidies subovoïdes, continues.

Microsp. et *Macrosp.* $^1/_2$ < à $^3/_4$ <.

Gonatob. Simplex, Cda.

Con. **18** = **9**.

Forma *Althææ*. Z. arden.

GENRE : **PHYSOSPORA**, Fr.

Caractères du *Gonatobotrys*, Cda.

Spores agréablement *colorées,* et *hyphes couchées.*

Physosp. Rubiginosa, (Fr.) Sacc.

Sporotrichum Rubiginosum, Fr.

Con. **14-15** = **12-14**.

Petites touffes, d'un velouté-laineux, d'un orange rubigineux agréable; hyphes rampantes d'où partent çà et là des rameaux fertiles, avec vésicules conidiophores denticulées; conidies globuleuses, ellipsoïdes, rubigineuses, à tunique assez épaisse.

Sur les pommes de terre gâtées. Z. arg. sablon.

DIDYMOSPORÆ.

GENRE : **ARTHROBOTRYS**, Cda.

Hyphes dressées; nœuds verruqueux; verrues disposées en spirale.

Arthrob. Superba, Cda.

Con. **20-26** = **12-15** (sept. 1).

Variété *Oligospora*, (Fres.) Coem. Conidies 1-3 à chaque verticille.

Con. **23-27** = **14-17** (sept. 1).

Sur fumier et papier pourri. Z. arg. sablon.

C. *Conidies solitaires, ou agglomérées latéralement, c'est-à-dire spécialement sur des rameaux.*

I. — Conidies acrogènes. Hyphes simples.

Sous-Famille : MONACROSPORIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **ACREMONIUM**, Lk.

Hyphes subsimples, couchées; conidies hyalines, acrogènes et solitaires au sommet de sporophores.

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **TRICHOTHECIUM**, Lk.

Hyphes fertiles simples; conidies solitaires.

Trichothec. Roseum, (Pers.) Lk.

Dactylium Roseum, Berk.

12-18 = **8-10.**

Petites touffes pulvinées, confluentes, veloutées, assez grosses, blanches, puis roses; hyphes fertiles à sommet à peine épaissi; conidies piriformes, légèrement resserrées, roses.

Sur les débris pourrissants. Partout.

Genre : **DIDYMOPSIS**, Sacc. et March.

Hyphes courtes, hyalines, rampantes, subcontinues, montrant des sporophores; conidies oblongues, en massue, hyalines.

Didymop. Perexigua, Sacc. et March.

Con. **11-12** = { **3,3-3,6** μ. partie supérieure. / **2-2,5** μ. partie inférieure. }

Hyphes à peine visibles; sporophores très courts; conidies tronquées, droites, hyalines.

Sur le sommet du *Philocopra pleiospora*, excréments de lièvre. Z. calc.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **MONACROSPORIUM**, Oud.

Mêmes caractères que les *Trichothecium*.

Macrosp. Sp. 1/4 <.

Monacros. Subtile, Oud.

Con. **45-70** = **5-7** (sept. 7-12).

Hyphes filiformes, hyalines, subcontinues; conidies allongées, en massue, solitaires, *aiguës du dessous, arrondies du dessus.*

Crottes de lièvre. Z. camp.

Monacros. Oxysporum, Sacc. et March.

Con. **96-105** = **9-10** 1/2 (sept. 10-12).

Étalé, blanc, puis jaunâtre; hyphes septées à la base; conidies *fusoïdes*, jaunâtres, *aiguës aux deux extrémités.*

Sur les excréments de chenille. Z. arg. sablon.

STAUROSPORÆ.

Genre : **TRINACRIUM**, Riess.

Hyphes filiformes, continues; conidies, trois radiées, à rayons cylindriques, deux à pluri-septées ; correspond au genre *Triposporium* des *Dematei.*

Trinac. Subtile, Riess.

Con. **25-30** = **3 1/2-4** (sept. 4-5); basides 20 = 2.

Très mince, épars, blanc hyalin; conidies à rayons atténués, égaux, trois radiées.

Sur *Glonium lineare.* Z. arg. sablon.

II. — Conidies acro-pleurogènes. Hyphes subsimples.

† ESPÈCES BIOGÈNES; SUR FEUILLES AVEC TACHES.

Correspondent aux *Phyllosticta* et aux *Septoria.*

Sous-Famille : RAMULARIEÆ.

AMEROSPORÆ, par exception *Didymosporæ.*

Genre : **OVULARIA,** Sacc.

Hyphes plus ou moins denticulées vers le sommet, spores rarement et courtement en chaînettes, *rondes ou ovées.*

Microsp. et *Macrosp.* de $^1/_2$ > à 1.

Ovul. Sphæroïdea, Sacc.

Con. **8-10** μ. diam.; **8** = **7**.

Petites touffes érumpentes, aplaties, veloutées, blanches; hyphes fasciculées, tortueuses; conidies globuleuses ou ovées.

Sur les feuilles de *Lotus corniculatus.* Z. arg. sablon.

Ovul. Bulbigera, (Fckl.) Sacc.

Conidie de *Spharella Pseudo-maculiformes.*

Scolicotrichum Bulbigerum, Fckl.

Con. **9-11** μ. diam.

Ovul. Deusta, Sacc.

Scolicotrichum. Deustum, Fckl.

Con. **12** = **4**.

Petites touffes sur de larges taches noirâtres, rassemblées, punctiformes, roses; hyphes subsimples, conidifères au sommet; conidies lancéolées.

Sur les feuilles de *Lathyrus pratensis.* Z. arg. sablon.

Ovul. Bistortæ, (Fckl.) Sacc.

Ramularia Bistortæ (Fckl.).

Con. **12 = 6.**

Petites touffes lâches, minces, blanches, sur une tache stérile; hyphes fascieulées, flexueuses, subsimples; conidies oblongues-ovées.

Sur feuilles de *Polygonum bistorta*. Z. arg. sablon.

Ovul. Obliqua, (Cooke.) Oud.

Ovularia Obovata, Sacc. — *Ramularia Obovata*, Fckl.

Con. **18-28 = 9-12.**

Taches subcirculaires, stériles, subochracées, marginées de couleur sanguine; hyphes fascieulées, simples; conidies oblongues-ovées, souvent obliques.

Sur feuilles de *Rumex*. Partout.

Ovul. Lamii, (Fckl.) Sacc.

Ramularia Lamii, Fckl.

Con. **18 = 6.**

Petites touffes minces, blanches; sur des taches subdiscolores; hyphes fascieulées, simples; conidies elliptiques.

Sur feuilles de *Lamium amplexicaule*. Z. calc. et arden.

Ovul. Veronicæ, (Fckl.) Sacc.

Ramularia Veronica, Fckl.

Grandeur variable.

Petites touffes larges, blanc de neige; hyphes longues, rameuses; conidies cylindracées ou elliptiques, simples.

Sur les feuilles de véroniques. Z. arg. sablon.

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **DIDYMARIA**, Cda.

Hyphes subsimples, conidies au sommet, et *ovoïdes.*

Microsp. surtout *Macrosp.* Sp. $^{1}/_{4} >$ à $^{1}/_{2} > <$ à $^{3}/_{4} <$.

Didym. Ungeri, Cda.

Con. **20-25 = 7-10.**

Taches subcirculaires légèrement ochracées; petites touffes blanches; hyphes subfasciculées, à peine denticulées; conidies solitaires, acrogènes, ellipsoïdes-obovées, à peine resserrées.

Sur les feuilles de *Ranunculus repens.* Z. arg. sablon.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **RAMULARIA**, Ung.

Hyphes subsimples, à sommet sporigère-denticulé; conidies *cylindracées-ovées.* Petites touffes sur taches; hyphes ordinairement fasciculées; conidies ordinairement 1 septées.

Microsp. généralement *Macrosp.* Sp $^{1}/_{4} > <$ à $^{1}/_{2} <$.

Ram. Lactea, (Desm.) Sacc.

Ramularia Violæ, Fckl.

Con. **8-10 = 2-3.**

Taches subcirculaires, blanchâtres, marginées de sombre brun; hyphes subtortueuses; conidies fusoïdes ou cylindracées, obtusiuscules.

Sur les feuilles de *Viola odorata.* Z. arg. sablon.

Ram. Lampsanæ, (Desm.) Sacc.

Fusidium Cylindricum, Fckl.

Con. **10-15 = 3 $^{1}/_{2}$-4.**

Taches pâlissant, puis arides; hyphes en petites touffes simples; conidies fusoïdes-cylindracées, en chaînettes.

Sur feuilles de *Lampsana communis.* Z. arg. sablon.

Ram. Cylindroïdes, Sacc.

Cylindrosporium Concentricum, Ung.

Con. **10-20 = 3-4** (goutt. 2).

Taches d'un ocre pâle, marginées de sombre brunâtre; hyphes fasciculées, noduleuses; conidies cylindracées, subtronquées, chaînettes courtes.

Sur les feuilles de *Pulmonaria officinalis*. Z. arg. sablon.

Ram. Æquivoca, (Ces.) Sacc.

Con. **15-20 = 2-2** $^1/_2$.

Taches pâlissant, marginées de sombre brunâtre; hyphes denticulées au sommet, continues; conidies cylindracées-fusoïdes, chaînettes courtes.

Sur les feuilles de *Ranunculus auricomus*. Z. arden. et calc.

Ram. Destructiva, Pl. et Phillip.

Con. **15** μ. long.

Taches larges d'un brun roux; conidies couleur chair, chaînettes courtes. Petites touffes en rond, laissant à leur chute des aréoles excavées.

Sur feuilles de *Myrica gale*. Z. arg. sablon.

Ram. Urticæ, Ces.

Con. **15-20 = 3-5** (sept. 1).

Taches blanches devenant cendrées, non définies; hyphes lâchement fasciculées, denticulées du dessus; conidies cylindracées-fusoïdes, apiculées, continues ou 1 septées, chaînettes longues.

Sur feuilles *Urtica dioïca*. Partout.

Ram. Adoxæ, (Rabenh.) Karst.

Con. **15-33 = 4-6** (sept. 1).

Petites touffes punctiformes, confluentes, blanches ou blanchâtres; hyphes peu denticulées, d'un hyalin verdâtre; conidies fusoïdes-allongées ou bacillaires, ordinairement simples.

Sur feuilles d'*Adoxa*. Z. arden. et arg. sablon.

Ram. Ajugæ, (Niessl.) Sacc.

Fusidium Ajugæ, Niessl.

Con. **15-20** = **4** (sept. 1).

Taches subcirculaires d'un ocre pâlissant; hyphes touffues, denticulées du dessus; conidies cylindracées-fusoïdes, apiculées, chaînettes courtes.

Sur les feuilles d'*Ajuga reptans*. Z. arg. sablon.

Ram. Variabilis, Fckl.

Con. **15-22** = **3-4** (sept. 1).

Petites touffes blanches sur taches sombres verdissant; hyphes fasciculées, continues, flexueuses, dentées au sommet; conidies variables.

Sur feuilles de *Digitalis purpurea*. Z. arg. sablon.

Ram. Valerianæ, (Speg.) Sacc.

Cylindrosporium Valerianæ, Speg.

Con. **15-50** = **5-8** (sept. 1-3).

Grandes taches allongées ou arrondies, grises; hyphes granuleuses, irrégulièrement verticillées; conidies cylindracées ou elliptiques-allongées, nébuleuses.

Sur les feuilles de *Valeriana officinalis* et *dioïca*. Z. arg. sablon.

Ram. Succisæ, Sacc.

Con. **18-25** = **2** $^1/_2$-**4** (sept. 1-3).

Taches subcirculaires, rouge pâle, marginées de noir sanguin; hyphes subfasciculées; conidies cylindracées-fusoïdes, chaînettes.

Sur feuilles de *Scabiosa succisa*. Z. arg. sablon. et arden.

Ram. Geranii, (West.) Fuckl.

Fusidium Geranii, West.

Con. **18-20** = **2** $^1/_2$-**3** (sept. 1).

Variété *Erodii,* Sacc.; filaments rameux.

Con. **20-27** = **2-3** (sept. 3).

Sur les feuilles d'*Erodium cicutarium*. Z. calc.

Ram. Taraxaci, Karst.

Con. **18-30** = **2-3**.

Taches arrondies pâlissant, verdâtres, marginées de pourpre; hyphes en touffes, rameuses; conidies bacillaires, droites.

Sur les feuilles de *Taraxacum officinale*. Z. arg. sablon.

Ram. Coleosporii, Sacc.

Con. **20-25** = **4** (goutt.)

Toujours accompagné d'un *Coleosporium;* petites touffes rassemblées; hyphes fasciculées, ramuleuses du dessus; conidies cylindracées, brusquement atténuées-tronquées.

Sur feuilles de *Senecio silvaticus*. Z. arg. sablon.

Ram. Pruinosa, Speg.

Con. **20-30** = **3-4** (sept. 1).

Taches ochracées, arrondies, puis occupant toute la feuille; petites touffes très serrées, couvrant la tache comme d'une pruine blanche; hyphes de 1-3 dents au sommet; conidies cylindracées, arrondies.

Sur feuilles de *Senecio jacobæa*. Z. arg. sablon.

Ram. Silvestris, Sacc.

Con. **20-30** = **2** $1/_2$ (sept. 1).

Petites touffes punctiformes, sur taches; hyphes très courtes, denticulées du dessus; conidies cylindracées, fusoïdes.

Sur feuilles de *Dipsacus silvestris*. Z. arg. sablon.

Ram. Phyteumatis, Sacc. et Wint.

Con. **20-25** = **5**; **40** = **5** (sept. 1).

Taches ochracées, marginées de sombre brunâtre; petites touffes blanchâtres; hyphes fasciculées, denticulées du haut, d'un hyalin enfumé; conidies cylindracées-oblongues, obtuses.

Sur feuilles de *Phyteuma spicatum*. Z. calc. et arden.

Ram. Heraclei, (Oud.) Sacc.

Con. **22** = **7** (sept. 1); **25-30** = **4-5** (sept. 3).

Taches circulaires anguleuses, brunes, non définies; hyphes septulées, légèrement noduleuses au sommet; conidies oblongues-fusoïdes.

Sur feuilles d'*Heracleum sphondylium*. Z. arg. sablon.

Ram. Monticola, Speg.

Con. **25** = **3** (sept. 1).

Pas de taches; petites touffes compactes, blanches; hyphes fasciculées, tortueuses, noueuses; conidies cylindracées, granuleuses.

Sur feuilles d'*Aconitum lycoctonum*. Z. calc.

Ram. Calcea, (Desm.) Ces.

Fusisporium Calceum, Desm.

Con. **25** = **3-3** $^1/_2$ (sept. 1).

Petites taches stériles, blanchâtres, marginées de sombre brunâtre; hyphes fasciculées, légèrement denticulées; conidies cylindracées, obtusiuscules ou apiculées.

Sur feuilles de *Glechoma hederacea*. Z. arg. sablon.

Ram. Sambucina, Sacc.

Con. **25-35** = **4-4** $^1/_2$ (sept. 1).

Taches petites, pâlissant, marginées de sombre brunâtre; hyphes fasciculées, peu noduleuses; conidies cylindracées-fusoïdes, chaînettes.

Sur les feuilles de *Sambucus nigra*. Z. arg. sablon.

Ram. Gibba, Fckl.

Con. (goutt. 3).

Petites touffes, punctiformes, rassemblées, blanches, sur taches jaunâtres, ensuite hémisphériques-gonflées; hyphes simples; conidies fusiformes, droites, de la longueur des hyphes.

Sur feuilles de *Ranunculus repens* Z. arg. sablon.

Ram. Lysimachiæ, Thüm.

Petites touffes lâches, grises, sur taches orbiculaires d'un sombre brunâtre; hyphes septées; conidies variables d'ovoïdes à cylindracées.

Sur feuilles de *Lysimachia vulgaris*. Z. arg. sablon.

Ram. Farinosa, (Bon.) Sacc.

Hormodendrum Farinosum, Bon.

Genre : **CERCOSPORELLA**, Sacc.

Caractères de *Ramularia;* conidies vermiculaires, filiformes.

Cercospella Cana, Sacc.

Con. **60-90** = **4-5** (sept. 3-4) (goutt.).

Petites touffes étalées, blanches avec taches; hyphes légèrement rameuses du dessus; conidies cylindracées, presque en massue, courbées.

Sur les feuilles de l'*Erigeron canadensis*. Partout.

†† ESPÈCES SAPROGÈNES; HYPHES FERTILES, SUBSIMPLES; GÉNÉRALEMENT PRÉDOMINANCE DES FILAMENTS STÉRILES, COUCHÉS.

Sous-Famille : SPOROTRICHEÆ.

AMEROSPORÆ.

I. — Spores lisses.

Genre : **HYPHODERMA**, Fr.

Hyphes courtes formant une couche subcrustacée-byssinée; conidies aerogènes.

Hyphod. Roseum, (Pers.) Sacc.

Con. **7-8** μ. diam. (pluri. goutt.).

Petites touffes arrondies au début, puis aplaties; croûte membranuleuse, formée par une villosité des plus fines; hyphes parallèlement serrées; conidies globuleuses, roses.

Sur vieux bois. Z. arg. sablon.

Genre : **SPOROTRICHUM**, Lk.

Conidies acrogènes subsolitaires; *toutes les hyphes couchées.*

Microsp. Sp. $^1/_2 >< à\ ^3/_4$ à 1.

Sporotrich. Geochroum, Desm.

Trichosporium Geochroum, Fr.

Con. **3-4** = **3-3** $^1/_2$.

Sporotrich. Roseum, Lk.

Sporotrichum Ollare, Pers.

Con. **4-3** (goutt. 1).

Sporotrich. Aureum, Lk.

Sporotrichum Aurantiacum, Lk.

Con. **4-5** μ. diam.

Sporotrich. Virescens, (Pers.) Lk.

Con. **4-6** μ.

Sporotrich. Pulviniforme, Thum.

Con. **4** $^1/_2$-**5** $^1/_2$ = **2-2** $^1/_2$ (goutt. 2).

Petites touffes pulvinées, denses, blanchâtres; rameaux souvent bifides au sommet; conidies oblongues obtusiuscules.

Sur les feuilles pourries de *Fagus*. Z. arden. (Libert.)

Sporotrich. Scotophilum, Ehrenb.

Con. **5** μ.

Sporotrich. Vellereum, Sacc.

Con. **8-9** = **4-5**.

Petites touffes blanches, subbombycinées; conidies, sur des rameaux disposés en épis, avec un stipe court, obovées, aiguës du dessous, hyalines.

Variété *Flavum,* Sacc.

Con. **7-8 = 5.**

Aspect jaune; conidies flaves.

Sur des poils d'animaux. Z. arden.

Sporotrich. Merdarium, Ehrenb.

Con. **9-10** μ.

Sporotrich. Byssinum, Lk.

Hyphes centrifuges, étalées vers le sommet, blanches, lâchement entrelacées en un hyphasme étalé et très mince; conidies globuleuses, blanches.

Sur les feuilles déjetées des arbres. Z. arden.

Sporotrich. Candidum, Lk.

Hyphes vagues, apprimées et lâchement entrelacées en un hyphasme très mince, s'étalant et blanc; conidies globuleuses, blanches.

Sur les troncs pourris. Z. arg. sablon.

Sporotrich. Croceum, Kze.

Hyphes légèrement rameuses, couleur safran, entrelacées en un hyphasme assez épais; conidies ovales, couleur safran, se montrant en grand nombre.

Sur tronc pourri. Z. arg. sablon.

Sporotrich. Griseum, Lk.

Hyphes très délicates, enchevêtrées, étalées, formant, avec les conidies globuleuses et interposées en grand nombre, un hyphasme gris et mince.

Sur tiges sèches, dans les lieux humides. Z. arg. sablon.

Sporotrich. Flavicans, Fr.

Trichosporium Flavicans, nobis.

II. — Conidies échinulées ou étoilées tuberculeuses.

ESPÈCES SAPROGÈNES.

Genre : **ASTEROPHORA**, Ditm.

Hyphes lâchement disposées; conidies *étoilées-tuberculeuses.*

Microsp. et *Macrosp.* 1.

Asteroph. Agaricicola, Cd.

Con. **18-24** μ. diam.

Hyphes entrelacées peu rameuses; conidies globuleuses-ellipsoïdes, tuberculeuses, disposées en étoiles, devenant subalutacées.

Sur le *Nyctalis asterophora.* Z. arg. sablon.

Genre : **SEPEDONIUM**, Lk.

Conidies globuleuses, *muriculées.*

Seped. Albo-Luteolum, Sacc. et Marsch.

Con. **5** $^1/_2$**-6,2** μ. diam.

Petites touffes d'un blanc de neige, puis jaunâtres, subpulvérulentes; hyphes rampantes, peu rameuses; conidies au début obovoïdes, 2-4 gouttes, puis globuleuses ou subovoïdes, jaunâtres, acrogènes.

Sur fumier de lièvre, de souris. Z. arg. sablon. et camp.

Seped. Chrysospermum, (Bull.) Fr.

Con. **14-16** μ. diam.

Seped. Thelosporum, Sacc. et March.

Con. **35-60** μ. diam.

Hyphes rampantes, peu rameuses; conidies globuleuses, jaunes, à papilles cylindracées ou ovoïdes, hyalines, 5-8 μ. long, acrogènes au sommet vésiculeux des rameaux.

Sur le fumier de souris. Z. arg. sablon.

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **MYCOGONE.**

Hyphes rameuses; rameaux sporigères courts, latéraux; conidies à loge supérieure plus grande et souvent échinulée.

Macrosp. $^3/_4 <$ à 1.

Mycog. Pezizæ, (Ch. Rich.) Sacc.

Asterophoræ Pezizæ, Cd.

Con. **15** μ. diam.

Petites touffes simulant une pruine blanche; hyphes à rameaux portant souvent au sommet deux conidies en massue ou piriformes, blanches.

Sur le disque de *Peziza hemisphœrica.* Z. arg. sablon.

Mycog. Anceps, Sacc.

Con. **20** μ. diam.; **30-35** = **20.**

Petites touffes d'un ochracé olivé, veloutées, étalées; hyphes dichotomes ou vaguement rameuses, flaves; conidies tantôt globuleuses, tantôt ovoïdes, légèrement resserrées, et septées près de la base, suboranges.

Sur l'excrément humain.

Mycog. Cervina, Ditm.

Sepedonium Cervinum, (Ditm.) Fr.

Con. **35** = **20.**

Mycog. Rosea, Lk.

Con. **35-40** = **25.**

Etalé, rose, velouté; hyphes blanches, minces, entrelacées d'une manière serrée; conidies obovées, rougeâtres, obtuses, loge inférieure plus courte, plus pâle, loge supérieure aspérulée.

Sur agarics pourris. Z. arg. sablon.

††† ESPÈCES SAPROGÈNES; HYPHES FERTILES BIEN RAMEUSES ET PRÉDOMINANTES.

Sous-Famille : BOTRYTIDEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **BOTRYOSPORIUM**, Cda.

Sporophores-rameaux avec trois ou plusieurs épines; *conidies en têtes*, se détachant vite.

Botryos. Pulchrum, Cda.

Petites touffes largement étalées, blanches, subfarineuses; hyphes simples ou dichotomes; sporophores courts, étalés, avec cinq épines et cinq têtes sphériques; conidies arrondies.

Sur des débris herbacés. Z. arg. sablon.

Genre : **BOTRYTIS**, Michel.

Hyphes fertiles dressées; des rameaux; conidies *lâchement rassemblées* au sommet.

Microsp. et *Macrosp.* $^1/_2 <$ à $^3/_4 >$.

I. EU-BOTRYTIS.

Rameaux aigus au sommet.

Botryt. Lutescens, Sacc. et Roum.

Con. **3** = **2-2** $^1/_4$ (goutt. 1).

Étalé, velouté, jaunâtre; hyphes fertiles 150 = 3, jaunâtres, simplement fourchues; conidies insérées par de petites dents au sommet, ovées-globuleuses.

Sur les feuilles mortes de *Fagus*. Z. arden. (Libert).

Botryt. Densa, Ditm.

Petites touffes subarrondies, très blanches, formées par des hyphes très délicates, densément entrelacées; hyphes fertiles dressées, très rameuses; conidies assez grandes, ovées.

Sur l'*Hypnum repens*. Z. arg. sablon.

Botryt. Bicolor, (Lk.) Bonord.

Stachylidium Bicolor, Lk.

Hyphes étalées, très délicates, d'un gris devenant rougeâtre; hyphes fertiles divisées au sommet; conidies ovoïdes, pellucides.

Sur les tiges de grandes herbes. Z. arg. sablon.

II. POLYACTIS.

Rameaux obtus au sommet.

Botryt. Vulgaris, Fr.

Con. **10-12** = **7-9**.

Botryt. Racemosa, (Bull.) D. C.

Hyphes étalées, délicates, cendrées, les fertiles dressées, très rameuses; conidies ovées-oblongues, blanches, puis cendrées, disposées le long des rameaux en épis.

Sur les fruits pourris. Z. arg. sablon.

III. CRISTULARIA, Sacc.

Rameaux en crête-crénelée ou digitée au sommet.

Botryt. Truncata, (Cooke) Sacc.

Polyactis Truncata, Cooke.

Con. **20** = **7**.

Petites touffes blanches; hyphes dichotomes répétées et densément rameuses; rameaux ultimes subdigités; conidies oblongues, tronquées, quelquefois tronquées-concaves, hyalines.

Sur les frondes de *Filix* pourrissant. Z. arg. sablon. (Bommer.)

Genre : **MONOSPORIUM**, Bonord.

Rameaux fertiles dressés, dendroïdes répétés; conidies *acrogènes, solitaires.*

Microsp. et *Macrosp.* Sp. $^1/_2 >$ à 1.

Monosp. Corticolum, Bon.

Petites touffes assez épaisses, blanches; hyphes entrelacées rameuses, formant un hyphasme densément tissé; conidies obovées, flaves, plurigouttes.

Sur les écorces mortes de *Juglans regia* et sur *Corticium* de ces écorces. Z. arden.

Genre : **MARTENSELLA**, Coem.

Martens. Pectinata, Coem.

Con. **18** = **3**, cylindracées-fusoïdes.
Chaîne de con. **6** = **2** $^1/_2$, ellipsoïdes.

III. — Conidies pleurogènes.

Sous-Famille : HAPLARIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **ACLADIUM**, Lk.

Hyphes fertiles, dressées, *indivises*; conidies globuleuses ou ovoïdes.

Aclad. Conspersum, Lk.
2 μ. long.

Hyphes dressées, d'un jaune blanchâtre, rassemblées en petites touffes, devenant confluentes; conidies ovales, hyalines, çà et là saupoudrant les hyphes, puis disparaissant.

Sur le bois pourri. Z. arg. sablon.

D. *Conidies agglomérées ou solitaires sur des rameaux verticillés.*

Sous-Famille : VERTICILLIEÆ.

a) *Conidies agglomérées.*

AMEROSPORÆ.

Genre : **ACROSTALAGMUS**, Cd.

Microsp. $^1/_2$ > <.

Acrostal. Cinnabarinus, Cd.

Con. **3-4** = **1** $^1/_2$.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **MUCROSPORIUM**, Preuss.

C'est le *Dactylium* avec conidies en tête.

Mucros. Sphærocephalum, (Berk.) Sacc.

Dactylium Sphærocephalum, Berk.

(Sept. 3).

Étalé, mince, blanc; hyphes septées, plus ou moins rameuses-ternées vers le haut, petits rameaux à base épaissie; conidies 10-12 rassemblées en têtes globuleuses, oblongues, courtement stipitées.

Sur des racines à demi-enterrées de *Calluna vulgaris*, dans une sapinière sablonneuse. Z. arg. sablon.

b) *Conidies solitaires.*

AMEROSPORÆ.

Genre : **PACHYBASIUM**, Sacc.

Petits rameaux sporofores, très courts et ultimes, en forme de bouteilles; rameaux du dessus stériles, recourbés.

Pachyba. Hamatum, (Bon.) Sacc.

Petites touffes blanches, puis d'un gris verdâtre; hyphes fertiles ascendantes, rameaux moyens verticillés-ramuleux, rameaux ultimes subternés; conidies globuleuses-ellipsoïdes.

Variété *Candidum,* Sacc.

Con. **3-4** = **1-1** $1/_2$.

Sur feuilles de *Quercus.* Z. arden. (Libert.)

Genre : **VERTICILLIUM,** Nees.

Conidies globuleuses ou ovoïdes, tombant vite, monospores.

Microsp. $1/_4 >$ à 1.

Verticil. Pyramidale, Bon.

Con. **3** $1/_2$ μ. diam.

Petites touffes sublaineuses de blanches devenant jaunes; hyphes fertiles, terminées en un sommet simple, long, stérile; rameaux ultimes courtement fusoïdes; conidies sphériques solitairement acrogènes.

Sur les feuilles mortes de l'*Æsculus hippocastaneum.* Z. arg. sablon.

Verticil. Candelabrum, Bon.

Con. **4-4** $1/_2$ = **3.**

Petites touffes veloutées, blanches, étendues par confluence; hyphes peu rameuses du dessus; au sommet petits rameaux verticillés par trois, courts, presque en massue; conidies ovoïdes.

Sur *Spartium scoparius.* Z. arden.

Verticil. Lateritium, Berk.

Con. **4-6** = **2** $1/_2$**-3.**

Hyphes et rameaux verticillés rassemblés en petites touffes veloutées-laineuses, d'un rouge de brique; petits rameaux verticillés par trois et quatre, à sommet aigu; conidies ellipsoïdes-oblongues, arrondies, rouges.

Sur bois, écorces. Z. arg. sablon. et arden.

Verticil. Epimyces, B. et Br.

Con. **4-5** μ. diam., puis **4 à 5 fois plus longues.**

Étalé, blanc, assez compact, puis rose; hyphes subtrifides, petits rameaux ternés ou binés, atténués, allongés; conidies subglobuleuses, puis allongées.

Sur *Hydnotrya tulasnei.* Z. arg. sablon.

Verticil. Candidulum, Sacc.

Con. **5-6 = 1,7-2.**

Petites touffes blanches; hyphes plusieurs fois rameuses-verticillées; petits rameaux ternés, aigus du haut; conidies ovées-oblongues, inéquilatérales.

A terre dans les bois, sur diverses écorces pourrissantes. Z. arden.

Verticil. Buxi, (Lk.) Auersw.

Fusidium Buxi, Lk.

Con. **6-8 = 2-2** $1/2$ (goutt. 2).

Petites touffes étalées, subpulvérulentes, roses; hyphes deux fois verticillées-ramuleuses du dessus; rameaux atténués du dessus; conidies oblongues-fusoïdes, subroses.

Sur les feuilles de *Buxus*. Partout.

Verticil. Compactiusculum, Sacc.

Con. **8-10 = 1** $1/2$.

Petites touffes étalées, blanches, assez compactes; hyphes subternées, aiguës du dessus; conidies cylindracées-oblongues.

Sur rameaux morts de rosier. Z. arg. sablon.

Verticil. Agaricinum, (Lk.) Cd.

Con. **12-13 = 4-6.**

Verticil. Nanum, B. et Br.

Petit, blanc; hyphes vaguement rameuses, à petits rameaux opposés; conidies ellipsoïdes.

Sur les poires pourries. Z. arg. sablon.

Verticil. Terrestre, (Pers.) Sacc.

Botrytis Terrestris, Pers.

Verticil. Crassum, Bon.

Petites touffes d'un gris brun; hyphes dressées, 2 à 3 fois fourchues à la base, ombrées; petits rameaux du dessus presque en massue 3-4 fois verticillés; conidies globuleuses, acrogènes, d'un blanc grisâtre.

Sur une tige morte de *Cypripedium*. Z. arg. sablon.

Capitule entouré de mucus (*Gliocephalum*, Sacc.).

Verticil. Strictum, Sacc. et March.

Con. **2,7-3** = **1,7-2**.

Petites touffes blanches; hyphes dressées, terminées en une panicule serrée, entourée au début d'un mucus hyalin; petits rameaux 6-8 verticillés, verticilles sub 8, en panicule; conidies globuleuses-subanguleuses, hyalines.

Sur le fumier de daim. Z. arg. sablon.

Genre : **ACROCYLINDRIUM**, Bon.

Est le *Verticillium* Cylindrosporum.

Microsp. $^1/_4$ > <.

Acrocylind. Copulatum, Bon.

Étalé, rose-rougeâtre; hyphes dressées à rameaux 3-4 verticillés, aigus; conidies oblongues, puis cylindracées, d'un rose sale; mycelium formé par des hyphes parallèlement fasciculées.

Sur du tan. Z. arg. sablon.

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **DIPLOCADIUM**, Bon. (*Verticillium* Didymosporæ).

Macrosp. $^1/_2$ > <.

Diplocad. Minus, Bon.

Con. **12-15** = **7-8** (sept. 1).

Petites touffes blanches, pulvérulentes, byssinées; petits rameaux 3 verticillés; conidies obovées, légèrement resserrées, hyalines.

Sur les agarics pourrissants.

Diplocad. Penicillioïdes, Sacc.

Conidie de *Hypomyces Aurantius.*

Con. **16-18** = **8-10** (sept. 1).

Étalé, blanc; hyphes à rameaux vagues et dressés, ceux-ci verticillés-ramuleux au sommet et obtus; conidies obovées, légèrement resserrées.

Sur l'hymenium de *Polyporus fumosus.* Z. arg. sablon.

PHRAGMOSPORÆ.

GENRE : **DACTYLIUM**, Nees. (*Verticillium* Phragmosporæ).

Saprophile; hyphes stériles rampantes; hyphes fertiles dressées, à rameaux verticillés-répétés ou simplement rameux-verticillés; conidies oblongues, 2 à pluriseptées, acrogènes au sommet des rameaux, hyalines.

Dactyl. Dendroïdes, (Bull.) Fr.

Con. **26-32** = **10-13**.

Dactyl. Macrosporum, (Ditm.) Fr.

Botrytis Macrospora, Ditm.

Hyphes arachnoïdes, lâchement entrelacées, blanches, puis roses; les fertiles subverticillées-rameuses au sommet; conidies subcylindriques, oblongues, grandes.

Sur les feuilles de *Quercus robor,* entre les mousses. Z. arg. sablon.

E. *Conidies réunies en chaînettes.*

a) *Conidies ramassées en glomérules (tête) au sommet des hyphes.*

SOUS-FAMILLE : ASPERGILLEÆ.

I. — HYPHES FERTILES A SOMMET ENFLÉ.

AMEROSPORÆ.

GENRE : **ASPERGILLUS.**

Basides nulles ou simples.

Microsp. $^1/_2 >$ à 1.

Asperg. Griseus, Lk.

Sporotrichum Fenestrale, Ditm. *Bissocladium Fenestrale,* Lk.	Forme spéciale d'après Sacc.

Con. **2** $^1/_2$-**3** μ. diam.

Asperg. Candidus, Lk.

Con. **2** $^1/_2$-**3** μ. diam.

Hyphes rassemblées, simples, *blanches,* se terminant en vésicules globuleuses-ellipsoïdes au sommet; conidies globuleuses, blanches.

Asperg. Virens, Lk.

Con. **3** μ. diam.

Asperg. Clavatus, Desm.

Con. **4** = **2-3.**

Blanc sale; hyphes simples, enflées en massue au sommet; conidies hyalines.

Sur substances gâtées. Z. arg. sablon.

Asperg. Flavus, Lk.

Con. **5-7** μ. diam.

Asperg. Glaucus, (L.) Lk.

Con. **8-10** μ. diam.

Asperg. Macrosporus, Bon.

Petites touffes d'un vert cyané; hyphes atténuées du bas, septées, avec vésicule globuleuse unie; conidies globuleuses, assez grosses, d'un purpurescent sale.

Sur la couenne d'un jambon. Z. arg. sablon.

Asperg. Roseus, Lk.

Hyphes simples; conidies globuleuses, petites, roses.

Sur papier, liège, tapis. Z. arden.

Genre : **STERIGMATOCYSTIS**, Cram.

Basides à rameaux verticillés.

Microsp. 1.

Sterigmatoc. Nigra, V. Tiegh.

Con. **3,4-4,5** μ. diam.

Hyphes à tunique épaisse, hyalines; capitules subglobuleuses, d'un noir brunâtre; basides 40 μ. longues, radiées; conidies globuleuses, verruculeuses, d'un sombre brun violacé.

Sur un agaric desséché avec le sclérote. Z. arg. sablon.

II. — Hyphes fertiles non renflées-vésiculeuses au sommet.

AMEROSPORÆ.

Genre : **PENICILLIUM**, Lk.

Spores non réunies par du mucus.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. $^1/_2 >$ à 1.

Penicill. Candidum, Lk.

Con. **2-3** μ. diam.

Penicill. Glaucum, Lk.

Con. **4** μ. diam.

Genre : **GLIOCLADIUM**, Cda.

Capitule des spores longtemps enveloppé de mucus.

Glioclad. Penicillioïdes, Cda.

Con. **6** μ. long.

Petites touffes punctiformes, blanches; hyphes flexueuses, épaissies du dessus, septées, pulvérulentes, blanches, rameaux opposés, petits rameaux verticillés, quaternes, serrés; tête globuleuse, blanche; conidies oblongues, conglutinées par une couche gélatineuse, épaisse.

Sur l'hymenium de *Stereum hirsutum*. Z. arg. sablon.

b) *Conidies acro-pleurogènes.*

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **HORMIACTIS**, Cd.

Hyphes fertiles, courtes, simples; chaînettes simples, terminales ou opposées.

Hormiac. Fimicola, Sacc. et March.

Con. **13-18 = 5-5,2** (sept. 1).

25-32 = 5 (sept. 2-3) (rare).

Petites touffes, blanc de neige; hyphes rampantes, vaguement rameuses, peu septées; conidies oblongues, aiguës, hyalines, granuleuses ou guttulées au début; chaînettes dressées ou subcouchées.

Sur le fumier du lièvre. Z. camp.

DEMATIEÆ.

A. *Conidies solitaires.*

a) *Conidies rassemblées en glomérule (tête) au sommet des hyphes souvent simples.*

Sous-Famille : PERICONIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **CAMPTOUM**, Lk.

Hyphes simples, pas de basides au sommet.

Camp. Curvatum (Kz. et Sch.) Lk.

Con. **18-20 = 7-8.**

Genre : **PERICONIA**, Bon.

Hyphes simples; sommet simple ou brièvement ramuleux; conidies globuleuses ou ovoïdes.

Microsp. Sp. $^1/_2$ > à 1.

Peric. Pycnospora, Fres.

Con. **12-17** μ. diam.

Hyphes stipitiformes, rassemblées ou subfasciculées, rigides, brunes ou fuligineuses, simples, obtuses, plus pâles du haut; conidies sessiles, brunes, muriculées.

Sur les tiges sèches d'*Urtica*. Z. arg. sablon. et arden., sur *Pœonia*.

Peric. Nigrella, (Berk.) Sacc.

Sporocybe Nigrella, Berk.

(Goutt. 1).

Très petit, noir; hyphes simples 4-5 septées; tête globuleuse; conidies globuleuses, unies.

Sur les feuilles mortes d'*Arcundo phragmites*. Z. arg. sablon.

Peric. Alternata, (Berk.) Sacc.

Sporocybe Alternata, Berk.

Petites touffes suborbiculaires d'un noir gris; hyphes septées, rameuses alternativement; rameaux fertiles épaissis au sommet; conidies oblongues, subtronquées.

Sur du papier humide. Z. arg. sablon.

Peric. Atra, Cd.

Graphium Atrum, Cd.

Genre : **STACHYBOTRIS**, Cd.

Hyphes couronnées de *basidies hétérogènes*.

Microsp. Sp. $^1/_2 >$ à 1.

Stachyb. Atra, Cd.

Con. **8-9** μ. long. (goutt. 2).

Petites touffes délicates, noires; hyphes dichotomes, rameuses, d'un olive flave; rameaux fertiles dressés, plus pâles du dessus; basides dressées, fusoïdes, subhyalines; conidies ovées-ellipsoïdes, brunes.

Sur papier, dans les endroits humides. Z. arden. et arg. sablon.

PHRAGMOSPORÆ.

GENRE : **ACROTHECIUM.**

Hyphes simples.

Ordinairement *Macrosp* Sp. $^1/_4 >$ à $^1/_2 > <$.

Acrothec. Delicatulum, B. et Br.

Con. **11-17** μ. long. (sept. 2-3).

Étalé, noir; hyphes à bases légèrement bulbilleuses; conidies sublinéaires, courbées, hyalines, insérées près du sommet.

Sur des éclats de bois de *Fagus*. Z. arg. sablon.

Acrothec. Simplex, B. et Br.

Con. **13-17** = **5** (sept. 2-3).

Étalé, olive-sombre; hyphes simples, flexueuses, irrégulières, brunes; conidies apiculées, en petit nombre, oblongues ou en massue, devenant sombres.

Sur *Urtica*, feuilles d'*Epilobium hirsutum* en compagnie de *Trichospœria Elisœ-Mariœ*. Z. arg sablon.

Acrothec. Tenebrosum, (Pr.) Sacc.

Con. **20-25** = **5-6** (sept. 3-5).

Petites touffes étendues; hyphes fertiles rassemblées, simples, à base dilatée, pâles du dessus et en tête légèrement denticulée; conidies oblongues, arrondies, courbées, légèrement sombres.

Variété *A. Marchalii.*

Con. **21-25** = **9-11** hyalines (sept. 4-5).

Sur fumier de lièvre. Z. arg. sablon.

b) *Conidies verticillées-agglomérées sur des articles épaissis de hyphes.*

Sous-Famille : ARTHRINIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **GONIOSPORIUM**, Lk.

Hyphes fertiles dressées, noueuses, septées; conidies plus ou moins anguleuses, stipitées.

Gonios. Puccinioïdes, (K. et S.) Lk.

Con. **10-14** μ. diam.

Petites touffes arrondies, noires, rassemblées; hyphes bien noueuses, hyalines, simples, souvent stériles du dessus et obtuses; conidies globuleuses-cuboïdes, à gouttes, fuligineuses.

Sur les feuilles mortes de *Carex*. Z. arg. sablon.

Genre : **ARTHRINIUM**, Kze.

Arthrin. Sporophleum, Kze.

Con. **9-14** μ. long.

c) *Conidies solitaires ou agglomérées sur rameaux.*

I. — Conidies acrogènes.

Sous-Famille : MONOTOSPOREÆ.

Correspond à la sous-famille *Monacrosporieæ* (Mucedineæ).

AMEROSPORÆ.

Genre : **MONOTOSPORA**, Cda.

Hyphes fertiles, simples, *séparées,* assez longues, d'un sombre brunâtre; conidies sombres, globuleuses ou suboblongues.

Monotos. Sphærocephala, B. Br.

Con. **21-25** μ. diam.

Étalé, dense, noir; hyphes fertiles, simples, dressées, 2-3 septées; conidies plus ou moins globuleuses, souvent pourvues d'un hile, quelquefois à base enflée.

Sur des branches de *Fagus*. Z. arg. sablon.

Monotos. Atra, (Corda.) Sacc.

Halysium Atrum, Cd.

Acladium Halysium, Bon.

Con. **20-31** μ. long.

Petites touffes délicates, noires; hyphes fertiles, courtes, noires, semi-pellucides, 5-6 articles; conidies jaunes, ovées, à base aiguë, avec un hile.

Sur le bois pourri. Z. arg. sablon.

Genre : **HADOTRICHUM,** Fckl.

C'est le *Monotospora* avec les hyphes assez épaisses, fasciculées à la base et courtes.

Hadotrich. Virescens, Sacc. et Roum.

Con. **12** μ. diam.

Petites touffes punctiformes, rassemblées; taches oblongues, brunes; conidies globuleuses, d'un fuligineux olivacé, unies; basides cylindracées, 30 = 10, sortant d'une couche cellulaire proligère.

Sur les feuilles de graminées. Z. arden. (Libert.)

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **POLYTHRINCIUM,** Kze.

Polythrinc. Trifolii, Kze.

Con. **20-24 = 9-12** (sept. 1).

Genre : **PASSALORA**, Fr. et Mont.

Hyphes pluriseptées, longues, enchevêtrées; conidies oblongues.

Passal. Bacilligera, Fr. et M.

Con. **30-50** = **5-7** (sept. 1).

Genre : **FUSICLADIUM**, Bonord.

Hyphes courtes, peu septées; conidies ovoïdes ou presque en massue.

Fusiclad. Depressum, (B. et Br.) Sacc.

Passalora Polythrincioïdes, Fckl.

Con. **50-55** = **7-8** (sept. 1).

Petites touffes anguleuses, d'un sombre brunâtre, composées de faisceaux arrondis; hyphes simples, olivacées, 60-70 = 6-7; conidies fusoïdes, plus ou moins en massue, courbées, olivacées, continues, puis resserrées à la cloison.

Sur les feuilles des ombellifères. Z. arden.

Fusiclad. Dendriticum, (Wallr.) Fckl.

Cladosporium Dendriticum, Wallr.

Con. **30** = **7-9** (sept. 1).

Fusiclad. Pirinum, (Lib.) Fckl.

Helminthosporium Pirinum, Lib.

Fusicladium Virescens, Bon.

Con. **28-30** = **7-9** (goutt.)

Conidies ovées-fusoïdes, olivacées; hyphes courtes, cylindracées, denticulées au sommet.

Sur les feuilles de *Pirus communis*. Z. arden.

DICTYOSPORÆ.

Genre : **MYSTROSPORIUM**, Cda.

Hyphes fertiles dressées, subsimples, *rigides,* assez courtes, septées, sombres; conidies acrogènes, solitaires.

Macrosp. Sp. $^1/_4 >$ à $^1/_2 > <$.

Mystros. Piriforme, Desm.

Con. **45** = **18** (sept. murif. 3-4).

Noir, étalé, petit; sporophores cylindracés, peu septés, fuligineux, naissant d'une base cellulaire et stromatique; conidies acrogènes, obpiriformes, concolores.

Sur les feuilles et tiges d'*Eryngium campestre.* Z. marit.

Mystros. Atrichum, (Cda.) Sacc.

Helminthosporium Atrichum, Cda.

(Sept.-murif. 5-7.)

Petites touffes étalées, olivacées; hyphes très courtes, flexueuses, conidiophores; conidies subobovées, arrondies du dessus, et atténuées insensiblement en stipe court du dessous.

Sur les tiges de *Dianthus barbatus.*

Genre : **STEMPHYLIUM**, Wallr.

Hyphes *couchées;* conidies acrogènes sur les rameaux.

Macrosp. Sp. $^1/_2 >$ à 1.

Stemphyl. Alternariæ, (Cooke) Sacc.

Sporidesmium Alternariæ, Cooke.

Petites touffes irrégulières, luisantes, brunes; mycélium rameux, rampant, peu septé, abondant; conidies irrégulières, ovées, subpiriformes ou cylindracées, brunes, un à pluriseptées.

Sur du papier de tenture humide. Z. arg. sablon.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **NAPLICADIUM**, Thüm.

Hyphes fertiles, courtes, molles, sur feuilles; *conidies unies, acrogènes, solitaires.*

Naplicad. Arundinaceum, (Cd.) Sacc.

Helminthosporium Arundinaceum, Cda.

Con. **40-45** = **18** (sept. 2).

STAUROSPORÆ.

Genre : **TRIPOSPORIUM**, Cda.

Tripospo. Elegans, Cda.

Con. à rayons **48-50** μ. long. (sept. 4-6).

II. — Conidies acro-pleurogènes.

Sous-Famille : CERCOSPOREÆ.

Correspond à la sous-famille des *Ramularieæ-Mucedineæ.*

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **HETEROSPORIUM**, Klotzsch.

Hyphes molles, sur *feuilles et tiges;* conidies *oblongues, échinulées.*

Macrosp. $^1/_2$ > <.

Heterosp. Phragmitis. Sacc.

Cladosporium Phragmitis, Opiz.

Con. **16-20** = **8-10** (sept. 1-2).

Hyphes tortueuses, fasciculées, d'un rouge fuligineux; conidies oblongues d'un rouge fuligineux, granuleuses extérieurement.

Sur feuilles de *Phragmites communis*. Z. arg. sablon.

Heterosp. Variabile, Cooke.

Con. **20-50** = **7-10** (sept. 1-3).

Épiphylles érumpents, avec taches subcirculaires ou irrégulières; hyphes fasciculées, flexueuses, noueuses, délicates; conidies échinulées.

Sur feuilles pourrissantes de *Spinacia oleracea*. Z. arg. sabl.

Heterosp. Echinulatum, (Berk.) Cooke.

Heterosporium Dianthi, Sacc.

Con. **40-45** = **15-16** (sept. 2-3).

Petites touffes rassemblées sur des taches d'un sombre brunâtre; hyphes fasciculées sortant d'une base celluleuse et stromatique, flexueuses-noueuses du dessus, fuligineuses; conidies cylindracées-oblongues, arrondies, aspérulées, fuligineuses, légèrement resserrées.

Sur feuilles de *Dianthus*. Z. arden.

Genre : **CERCOSPORA,** Fres.

Hyphes molles; ordinairement biophiles; *conidies vermiculaires, lisses.*

Macrosp. Sp. $^1/_4 <$ à $^1/_2 <$.

Cercosp. Lilacis, (Desm.) Sacc.

Exosporium Lilacis, Desm.

Con. **15-25** μ. long. (sept. 3-4).

Cercosp. Campi-Silii, Speg.

Con. **20-35** = **4-5** (sept. 2-3).

Taches circulaires-anguleuses, pâlissant à la partie supérieure, brunissant à la partie inférieure; hyphes simples en touffes denses, olivacées, dressées ou tortueuses, denticulées; conidies cylindracées-fusoïdes, à tunique épaisse, comme légèrement enfumées.

Sur feuilles d'*Impatiens noli tangere*. Z. arden.

Cercosp. Lythri, (West.) Nessl.

Cladosporium Lythri, West.

Con. **25-50** = **4** (sept. 1-3).

Cercosp. Majanthemi, Fuckl.

Con. **45-55** = **6** (sept. 4-6).

Petites touffes punctiformes, rassemblées-serrées, d'un vert cendré, sur des taches stériles; hyphes dressées, continues, flexueuses, épaisses, sombre-brun, multigouttes; conidies linéaires, d'un olive sombre brun, souvent courbées.

Sur la face inférieure du *Majanthemum bifolium*. Z. arg. sablon.

Cercosp. Ferruginea, Fckl.

Con. **40-100** = **6-7** (sept. 3-7) (goutt.).

Petites touffes minces, largement étalées; hyphes très longues, rampantes, rameuses, ferrugineuses; conidies variables, allongées en massue, souvent courbées, à gouttes, d'un sombre brunâtre.

Sur face inférieure des feuilles de l'*Artemisia vulgaris*. Z. arg. sablon.

Cercosp. Bellynckii, (West.) Sacc.

Cladosporium Bellynckii, West.

Con. **60-100** = **5-6** (sept. 3-8).

Cercosp. Depazeoïdes, (Desm.) Sacc.

Exosporium Depazeoïdes, Desm.

Con. **70** = **5** (sept. 4-9).

Cercosp. Mercurialis, Pass.

Con. **70-80** = **4-6** (sept. 2-7).

Taches d'un blanc argenté, arrondies, limitées de sombre brunâtre; petites touffes rassemblées; hyphes fuligineuses, tortueuses, noduleuses, courtes; conidies cylindracées-bacillaires, atténuées du dessus, à tunique épaisse, hyalines.

Sur feuilles de *Mercurialis*. Z. arg. sablon. et arden.

Cercosp. Beticola, Sacc.

Con. **70-120** = **3** (densem. sept.).

Taches vagues, stériles, souvent entourées de roux; hyphes fasciculées, cylindracées, noduleuses au sommet, assez sombres; conidies aciculaires, hyalines.

Sur les feuilles de *Beta vulgaris*. Z. arg. sablon.

Cercosp. Cheiranthi, Sacc.

Con. **90-100** = **4-4** $^1/_2$ (pluri. sept.).

Taches variées, blanchâtres, stériles; hyphes fasciculées, septées, fuligineuses, ramuleuses; conidies bacillaires, fusoïdes, hyalines.

Sur les feuilles du *Cheiranthus cheiri*. Z. arden.

Cercosp. Resedæ, Fück.

Con. **100-140** = **2** $^1/_2$**-3** (sept. 4-5).

Petites touffes punctiformes, rassemblées, grises, sur taches stériles; hyphes rassemblées-serrées, très simples, subtortueuses du dessus, d'un sombre brunâtre; conidies linéaires, légèrement en massue, hyalines.

Sur les feuilles du *Reseda luteola*. Z. arg. sablon.

Cercosp. Lepidii, Peck.

Con. **150-200** = **20-25** (sept. 8-9).

Petites taches orbiculaires, subcendrées ou d'un gris noirâtre, souvent alignées concentriquement; hyphes 1-5 fasciculées, pâles; conidies très longues, atténuées du dessus, verdâtres.

Sur les feuilles de *Lepidium campestre*.

Cercosp. Malvarum, Sacc.

Con. **120-130** = **3** $^1/_3$**-4**.

Taches amphigènes, olivacées; petites touffes, punctiformes, olivacées; hyphes rassemblées, septées, peu noduleuses, olivacées; conidies filiformes plus aiguës du dessus, légèrement courbées, hyalines.

Sur les feuilles de *Malva moschata*. Z. arden.

Cercosp. Fraxini, (D. C.) Sacc.

Exosporium Fraxini, (Fr.) Niessl.

Sous-Famille : TRICHOSPORIEÆ.

Correspond à la sous-famille des *Sporotricheæ-Mucedineæ.*

AMEROSPORÆ.

Genre : **ZYGODESMUS**, Cda.

Microsp. Sp. 1.

Zygodes. Fulvus, Sacc.

Con. **8** μ. diam.

Petites touffes, couleur or fauve, étalées diversement; hyphes rameuses, entrelacées, rampantes, subfuligineuses; conidies globuleuses, échinulées, d'un jaune un peu sombre.

Sur les feuilles pourries. Z. arden.

Variété *Olivascens.*

Conidies subolivacées.

Sur bois pourri. Z. arden. (Libert.)

Zygodes. Fuscus, Cda.

Con. **9-11** μ. diam.

Genre : **TRICHOSPORIUM**, Fr.

Hyphes rampantes; conidies *lisses, sombres, sans sporophores,* insérées sur les rameaux.

Microsp. $^1/_2$ > à 1.

Trichos. Cerealis, (Thüm.) Sacc.

Sporotrichum Cerealis, Thüm.

Con. **3-4** μ. diam. (goutt. 1 hyaline).

Étalé, sombre-brun; hyphes peu rameuses, sombres; conidies globuleuses, d'un olive sombre brun.

Sur feuilles et chaume de *Secale.* Z. arden. (Libert.)

Trichos. Olivatrum. Sacc.

Con. **3** $1/_2$ μ. diam. (goutt. 1).

Étalé, noir, subpulvérulent; hyphes peu rameuses, sombres; conidies insérées près de l'extrémité des rameaux, presque en épis, globuleuses, d'un noir olivacé.

Sur papier et toile pourris. Z. arden.

Trichos. Crispulum, Sacc.

Con. **5-6** = **4**.

Petites touffes apprimées, maculiformes, veloutées, d'un olivacé fuligineux; hyphes fasciculées, souvent flexueuses, peu rameuses, fuligineuses; conidies obovoïdes, incolores, rassemblées vers l'extrémité des petits rameaux.

Sur les rameaux pourris des rosiers. Z. arden.

Trichos. Nigricans, Sacc.

Con. **6** $1/_2$-**8** μ. diam. (goutt. 1 plus pâle).

Étalé, noir, velouté ou pulvérulent; hyphes demi-couchées, anastomosées à la base, simples ou fourchues du dessus et un peu enflées, fuligineuses; conidies insérées vers le sommet, globuleuses, d'un noir fuligineux.

Sur le bois de hêtre pourrissant. Z. arg. sablon.

Trichos. Tabacinum, Sacc.

Con. **7-7** $1/_2$ = **4-5**.

Étalé largement, couleur tabac, pulvérulent; hyphes avec de petits rameaux tortueux, noduleux; conidies allongées, ellipsoïdes, à base légèrement aiguë, couleur de miel-tabac.

Sur le bois pourri. Z. arden.

Trichos. Fuscum, Lk.

Sporotrichum Fuscum, Lk.

Con. **8-11** = **6-7**.

Trichos. Brunneum, (Schenk.) Sacc.

Sporotrichum brunneum, Schenk.

Con. **10** μ. diam.

Brun; hyphes rameuses; conidies globuleuses, substipitées.
A l'intérieur d'un œuf conservé.

Trichos. Collæ, (Lk.) Sacc.

Sporotrichum Collæ, Lk.

Collarium Melanospermum, Fr.

Genre : **RHINOCLADIUM**, Sacc. et March.

Hyphes sombres, ascendantes; conidies d'un noir fuligineux, placées sur des dents auxquelles elles sont longtemps adhérentes.

Rhinoclad. Coprogenum, Sacc. et March.

Con. **9 $^1/_2$-12** μ. diam.

Étalé, soyeux-hérissé, noir; hyphes allongées, flexueuses, assez dures; conidies globuleuses, d'un noir fuligineux.
Sur le fumier de lapin. Z. arg. sablon.

Genre : **CLADORRHINUM**, Sacc. et March.

Hyphes rampantes, vaguement rameuses, ce genre ne se distingue du *Rhinocladium* que par les spores ou *conidies hyalines.*

Cladorrhi. Fecundissimum, Sacc. et March.

Con. **2,8-3,2** μ. diam.

Petites touffes assez denses, subveloutées, d'un gris jaunâtre; hyphes rampantes, entrelacées, rameuses, septées; conidies copieuses, globuleuses, provenant de dents assez longues des hyphes.
Sur le fumier de sanglier. Z. arden.

Sous-Famille : HELMINTHOSPORIEÆ.

Hyphes *dressées* surtout, subsimples, saprogènes.

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **CLADOSPORIUM**, Lk.

Conidies 0-3 septées; hyphes légèrement couchées, ramuleuses, *olivacées;* quelquefois des chaînettes courtes. *Conidies globuleuses au début, continues, 1 à 3 septées.*

Microsp. et *Macrosp.* $^1/_4 <$ à $^1/_2 > <$.

Clados. Rhoïs, Arcang.

Con. **3-6** = **4** (sept. 1-3).

Hyphes fasciculées, raides, toruleuses, sombres; conidies cylindriques-allongées.

Sur feuilles de rhoïs. Z. arden.

Clados. Herbarum, (Pers.) Lk.

(Sept. 1-3.)

Couche veloutée d'un olive plus ou moins foncé, due aux hyphes rassemblées; hyphes dressées, peu rameuses, brunes ou olivacées; conidies concolores, oblongues, ovoïdes, cylindracées, resserrées aux cloisons.

Sur toute espèce de végétal.

Variété *Nigricans*.

Couches noires, compactes. Z. arden.

Variété *Fimicolum*, March.

Con. **13-20** = **5-7** (sept. 1).

Hyphes couchées, flexueuses, noduleuses, olivacées; conidies ellipsoïdes, d'un jaune brunâtre.

Sur fumier de souris et de rat. Z. arg. sablon.

Clados. Nodulosum, Cda.

Con. **15-16** μ. épais (sept. 0-1).

Petites touffes oblongues, aiguës, d'un olive sombre, puis noires; hyphes longues, flexueuses, incurvées au sommet, portant des rameaux en forme de verrues ou de nœuds; conidies oblongues ou en forme de coin, concolores.

Sur les tiges d'*Helianthus*. Jardin botanique de Bruxelles.

Clados. Caricicolum, Cd.

Con. **18** μ. long. (sept. 2-3).

Petites touffes érumpentes, sériées, sombre-brun; hyphes concolores à sommet blanc et acuminé; conidies oblongues, d'un jaune pâle.

Sur feuilles et chaumes des *Carex*. Z. arg. sablon.

Clados. Asteroma, Fckl.

Con. **32** = **6** (sept. 1-2).

Petites touffes au centre d'une tache sombre brun, disposées en séries arborescentes d'un jaune verdâtre; hyphes très courtes; conidies oblongues-elliptiques, resserrées, à loges inégales, l'inférieure oblongue, acuminée vers la base, jaunâtres.

Sur feuilles vivantes de *Populus tremula*. Z. arden.

Clados. Lignicolum, Cd.

(Polydymes.)

Petites touffes étalées, tomenteuses, noires; hyphes courtes, subsimples, sombre-brun; conidies petites, concolores.

Sur des souches, des éclats de bois. Z. arg. sablon.

Clados. Graminum, Cd.

Con. **16** = **6-8** (sept. 0 à polydymes).

Petites touffes irrégulières, minces, éparses, d'un gris sombre brun; hyphes distinctes, dressées, simples, noduleuses-flexueuses, d'un sombre brun; conidies concolores, arrondies ou oblongues.

Sur les feuilles et chaumes de *Graminis* et *Carex*. Partout.

Clados. Typharum, Desm.

Con. **20-22** = **8** (sept. 2-3).

Clados. Fuligineum, Bon.

(Sept. 1).

Petites touffes fuligineuses ; hyphes dressées subsimples , noueuses, genouillées et incurvées, d'un olive fuligineux; conidies oblongues, acuminées, uniseptées, se maintenant en chaînes simples, terminales.

Sur les bolets desséchés. Z. arg. sablon.

Clados. Umbrinum, Fr.

Botrytis Pulvinata, Lk.

Petites touffes étalées, contiguës, minces, veloutées, ombrées; hyphes plus ou moins rameuses, courbées ; conidies subglobuleuses, rassemblées en glomérules.

Sur les champignons pourrissants. Z. arg. sablon.

Clados. Fasciculare, (Pers.) Fr.

Petites touffes subérumpentes; taches oblongues, cendrées; hyphes flexueuses du sommet, subseptées, noires; conidies conglobées ou disposées en séries plus pâles.

Sur les tiges de *Lilium.* Z. arden.

GENRE : **SCOLECOTRICHUM,** K. et S.

C'est le genre *Fusicladium* à spores acropleurogènes; hyphes courtes.

Scolecotrich. Clavariarum, (Desm.) Sacc.

Helminthosporium Clavariarum, Desm.

Con. **15-20 = 8** (goutt. 2) (sept. 1-2).

Hyphes simples, courtes, dressées, rassemblées, noires, septées; conidies oblongues, resserrées, pellucides ou opaques, loges souvent inégales.

Sur *Clavaria cinerea.* Z. arg. sablon.

Scolecotrich. Graminis, Fckl.

Con. **35-45 = 8-10** (sept. 1).

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **HELMINTHOSPORIUM**, Lk.

Hyphes *rigides*, ordinairement epixyles; conidies *allongées, pluriseptées, rigides*.

Macrosp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 <$.

Helminthos. Minutum, Schulz.

Con. **28** = **8** (sept. 4).

Maculiforme, noir, velouté; hyphes subfasciculées, fuligineuses, plus pâles du dessus; conidies obovées-oblongues, fuligineuses, à base aiguë, sommet arrondi.

Sur tronc carié de charme. Z. arden.

Helminthos. Velutinum, Lk.

Con. **25-30** = **11-13** (sept. 3) (goutt. 3).

Helminthos. Gongrotrichum, Cd.

Con. **34-35** μ. long. (sept. 7-8).

Petites touffes subétalées, noires; hyphes courbées, rigides, verruqueuses, devenant d'un noir intense; conidies elliptiques, atténuées, sombres, pellucides.

Sur rameaux de peuplier. Z. arg. sablon.

Helminthos. Apiculatum, Cd.

Con. **35-38** = **12** (sept. 6-8).

Helminthos. Fusiforme, Cda.

Con. **38-40** = **10-12** (sept. 7-9).

Étalé, soyeux-velouté, sombre-brun; hyphes tortueuses, plus pâles du dessus, fuligineuses; conidies fusiformes, fuligineuses, souvent plus pâles aux extrémités.

Sur rameaux de chèvre-feuille. Z. arg. sablon.

Helminthos. Appendiculatum, Cd.

Con. **40-50** = **15-18** (sept. 6-7).

Helminthos. Genistæ, Fr.

Con. **60-80** = **12-14** (sept. 7); **45-50** = **15** (sept. 5).

Hyphes fasciculées, érumpentes d'un strome mince disposé en série; conidies en massue, atténuées du dessous d'un fuligineux olivacé, non resserrées.

Sur rameaux de *Spartium scoparius*. Z. arden. et arg. sablon.

Helminthos. Folliculatum, Cda.

Con. **45-55** = **12** (sept. 6-7).

Petites touffes indéterminées, exiguës, tomenteuses; hyphes rameuses, lâches, brunes, flexueuses; conidies très longues, folliculées, brunes, à noyaux cuboïdes, plus pâles aux extrémités.

Sur tiges de choux. Z. arden.

Helminthos. Rousselianum, Mont.

Con. **50** = **5** (sept. 3-5).

Hyphes rassemblées, noduleuses, d'un noir fuligineux, à base bulbeuse, à sommet pellucide, oblong, épaissi; conidies fusiformes, hyalines, insérées aux parois des hyphes.

Sur des éclats de bois avec *Sporochisma mirabile*. Z arg. sablon.

Helminthos. Inconspicuum, C. et Ell.

Con. **57-90** = **15-16** (sept. 3-8) Bom. et Rouss.
Con. **80-120** = **20** (sept. 3-5) (goutt. 4-6).

Étalé, très mince; hyphes noduleuses d'un brun pâle; conidies lancéolées, à épispore mince.

Sur les épillets et les feuilles vivantes du *Setaria viridis*. Montaigle.

Helminthos. Macrocarpum, Grev.

Helm. Malmediense, Thüm.

Con. **60-80** = **15-18** acrog. (6-9 sept.).

Variété *Caudatum*. Z. arden.

Con. **80-90** = **12**.

Helminthos. Rhopaloïdes, Fres.

Con. **76 = 11-12 ; 60 = 10-11** (sept. 9-12).

Étalé, velouté, d'un noir olive; hyphes fuligineuses, cylindracées; conidies cylindracées en massue, obtuses, acrogènes, sombres, à extrémités subhyalines.

Sur rameaux et éclats de bois. Z. arg. sablon. Sur tiges d'orties. Z. arden.

Helminthos. Tiliæ, Fr.

Con. **80 = 12** (sept. 7); **60 = 15** (5 faussem. sept.).

Étalé, lâchement touffu; conidies cylindracées, légèrement en massue, faussement septées, fuligineuses; hyphes fasciculées, æquilongues, septées.

Sur rameaux du tilleul. Z. arg. sablon.

Helminthos. Acroleucum, Sacc., Bom. et Rouss.

Con. ordinair. **63-66 = 5 ; 39-165 = 5-7** (sept. 5-28).

Largement étalé, d'un noir velouté; hyphes parfois subnoduleuses, un peu tortueuses, septées; conidies acrospores, olivacé pellucide, étroitement claviformes et largement atténuées à la base, tronquées au sommet, terminées par une verrue hyaline très caduque.

Sur les rameaux décortiqués de *Sambucus nigra* et du *Syringa vulgaris*. Z. arg. sablon.

Helminthos. Turbinatum, B. et Br.

(Sept. 4-7.)

Touffes minces, étalées, veloutées; hyphes simples d'un brun pâle ; conidies allongées-turbinées, bien brunes, subtronquées-apiculées au sommet, apicule tombant ensuite.

Sur les rameaux morts. Z. arg. sablon.

Genre : **BRACHYSPORIUM**, Sacc.

Division du genre *Helminthosporium.*

Diffère de l'*Helminthosporium* par les conoïdes-ovoïdes, *2-3 septées.*

Macrosp. $^1/_2 >$ à $^3/_4 <$.

Brachys. Flexuosum, (Cd.) Sacc.

Con. **8-16** μ. (sept. 2-3).

Petites touffes linéaires, sombre-brun ; hyphes flexueuses, inégales, septées, diaphanes, sombre-brun; conidies ovées-oblongues, jaunes, pellucides.

Sur des graminées et des *Carex.* Z. calc.

Brachys. Apicale, (B. et Br.) Sacc.

Helminthosporium Apicale, B. et Br.

Con. **17-18** μ. long. (sept. 3).

Hyphes simples, égales, atténuées du dessus; articles ultimes verruqueux-conidiophores; conidies ellipsoïdes, brunes, extrémités hyalines.

Sur des rameaux tombés. Z. arg. sablon.

Brachys. Oosporum, (Cd.) Sacc.

Helminthosporium Oosporum, Sacc.

Con. **18-20** μ. long. (sept. 3).

Petites touffes minces; hyphes éparses, d'un noir brun ; conidies oblongues-ovoïdes, d'un jaune brun, pellucides.

Sur des rameaux pourrissants. Z. arg. sablon.

Brachys. Obovatum, (Berk.) Sacc.

Helminthosporium Obovatum, Berk.

Con. **25** = **13** (sept. 2).

Étalé, dense, velouté, noir; hyphes simples, subulées, à base légèrement épaissie; conidies obovées-piriformes, apiculées, légèrement resserrées, brunes, loge supérieure plus grande, arrondie, plus pâle.

Sur des rameaux et des éclats de bois. Z. arg. sablon.

Brachys. Coryneoïdeum, (De Not.) Sacc.

Helminthosporium Coryneoïdeum, De Not.

Con. **25-28 = 15-16** (sept. 6-7).

Hyphes fasciculées, rigides, fuligineuses ; conidies acrogènes, obovées, subtronquées à la base, fuligineuses, les extrémités plus pâles.

Variété *Proliferum,* Sacc., Bom. et Rouss.

Con. **32-35 = 18** (plurisept.).

Conidies ellipsoïdes, 5 loges, non resserrées, fuligineuses, surmontées d'un article sphérique, uni, à une goutte, d'un ochre brun sombre, de 20 μ. diam., se séparant promptement de la conidie.

Sur les tiges d'*Urtica dioïca.* Z. arg. sablon.

Brachys. Fumosum, (E. M.) Sacc.

Helminthosporium Fumosum, Ell. et Mart.

Con. **25-30 = 10-12** (sept. 3).

Brachys. Biseptatum, Sacc. et Roum.

Con. **25-30 = 15** (sept. 2) (goutt. 3).

Petites touffes noires ; hyphes fasciculées, arrondies du dessus, d'un fuligineux intense; conidies ellipsoïdes, arrondies, d'un fuligineux olive.

Sur les tiges pourries. Z. arden. (Libert.)

Brachys. Oligocarpum, (Cd.) Sacc.

Helminthosporium Oligocarpum, Cd.

Con. **30** μ. long. (sept. 3).

Touffes petites, linéaires, subparallèles; hyphes flexueuses, fasciculées, d'un noir brunâtre, très finement velues; articles subquadratés; conidies ovées-oblongues, d'un jaune sombre brun, ornées au sommet d'un apicule aigu.

Sur des rameaux pourrissants du hêtre. Z. arg. sablon.

Brachys. Stemphylioïdes, (Cda.) Sacc.

Helminthosporium Stemphylioïdes, Cd.

Con. **35-37** = **16-18** (5-6 sept.) (goutt. au milieu).

Petites touffes étalées, veloutées, noires; hyphes courtes, denses, pâles; conidies terminales, solitaires, obovées; loges intermédiaires sombre-brunâtre, binées, avec gouttes, les autres flaves ou subhyalines.

Sur vieux bois de *Taxus baccata*. Z. arg. sablon.

Brachys. Crepini (West.) Sacc.

Helminthosporium Crepini, West.

Con. **50-60** = **17-20** (sept. 3).

DICTYOSPORÆ.

GENRE : **MACROSPORIUM**, Fr.

Hyphes *molles, dressées;* conidies muriformes, oblongues, d'un sombre brunâtre.

Macrosp. $^{1}/_{4}$ > < à $^{3}/_{4}$ <.

Macrospor. Cladosporioïdes, Desm.

Con. **15-75** μ. long. (sept. 2-3-10).

Macrospor. Trichellum, Arc. et Sacc.

Stemphylium Trichellum, Arc. et Sacc.

Con. **30-35** = **18** (sept. murif. 4-5).

Petites touffes vermiculairiforme, sur des taches blanchâtres et stériles; hyphes fasciculées, cylindriques, septées, fuligineuses; conidies obovées, aerogènes, fuligineuses, resserrées.

Sur la face supérieure de l'*Evonymus japonicus*. Z. arden.

Macrospor. Heteronemum, (Desm.) Sacc.

Con. **50-60** μ. long. (sept. cellul. 3-7).

Macrospor. Brassicæ, Berk.

Con. **50-60** = **12-14** (sept. 5-11), quelquefois cloison longitud.
Con. **128** = **13**.

Le *Macrosporium Brassicæ*, Berk., et l'*Alternaria Brassicæ*, (Berk.?) Sacc., sont pour moi une même espèce.

HELICOSPORÆ, Sacc.

Genre : **HELICOSPORIUM**, Nees.

Hyphes fertiles dressées, sombres, avec des dents sporigères disposées çà et là; conidies hélicoïdes, plurigouttes ou pluriseptées.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Helicospor. Viride, (Cda.) Sacc.

Helicocoryne Viridis, Cda.

Con. **45-50** μ. long. Spires 1-2 (sept. 4-6).

Petites touffes étalées, d'un olive vert, délicates; hyphes simples, olivacées, septées, dressées, hyalines du sommet; conidies hyalines.

Sur le bois mort du pin. Z. arg. sablon.

Helicospor. Vegetum, Nees.

Con. **45-65** = **1-1** $^1/_2$. Spires 2-3 (plurigouttes).

Helicospor. Pulvinatum, (Nees.) Fr.

Helocotrichum Pulvinatum, Nees.

Con. **70-80** μ. long. Spires 2 $^1/_2$-3 (plurigouttes).

Petites touffes largement étalées, d'un blanc jaunâtre sale, puis plus obscures; hyphes rameuses; conidies hyalines.

Sur rameaux de frêne. Z. arg. sablon.

Helicospor. Lumbricoïdes, Sacc.

Con. **150 = 4**. Spires 2-3 $^1/_2$ (plurigouttes).

Étalé, maculiforme, d'un blanc grisâtre; hyphes rampantes, rameuses, anastomosées, peu septées, d'un fuligineux dilué, à dents hyalines; conidies vermiculaires, hyalines.

Sur les bûches pourries du hêtre. Z. arg. sablon.

Helicospor. Mülleri, (Cda.) Sacc.
Helicoma Mülleri, Cda.

Con. **6-7** μ. large (sept. 3-5).

Petites touffes largement étalées, tomenteuses, d'un noir olivacé; hyphes fertiles fasciculées, connées, rigides, simples, rameuses ou denticulées au sommet, septées, fuligineuses ou brunes; conidies vermiculaires, hélicoïdes, hyalines.

Sur rameaux de hêtre. Z. arg. sablon.

Helicospor. Fuckelii, Fres.

Con. **10-15** μ. large. Spires 2 $^1/_2$-3 continues.

Hyphes fertiles dressées ou courbées, septées, serrées, brunes, rameaux courts, plus pâles du dessus; conidies hyalines, tours de spires assez serrés.

Sur strome d'*Eutypa lata*. Z. arg. sablon.

Helicospor. Phæosporum, (Fres.) Sacc.
Helicoma Phæosporum, Fres.

Con. **14-16** μ. large. Spires 2-2 $^1/_4$ (sept. 5-12).

D'un brun olive; hyphes fertiles, sombres, courtes; conidies d'un brun noir, avec des appendices fusoïdes à la base, tours de spires serrés.

Sur écorce de peuplier. Z. arg. sablon.

AMEROSPORÆ.

Genre : **MENISPORA,** Pers.

Hyphes fertiles, dressées, septées, sombres, rameuses, pellucides vers le milieu; conidies fusoïdes en faulx, tout au plus faussement septées, souvent sétigères.

Ce genre tient le milieu entre les *acrogènes* et les *mesogènes*.

Macrosp. Sp. $^1/_4 > <$.

Menisp. Ciliata, Cda.

Con. **16-17** μ. long. (cils 2).

Menisp. Libertiana, Sacc. et Roum.

Con. **20-25** = **5** (sept. 3) (goutt.) (cils 2).

Étalé, d'un bleu brunâtre sale et sombre; hyphes tortueuses, d'un olive fuligineux; rameaux courts vers le sommet; spores cylindracées, arrondies, courbées, acro-pleurogènes sur des rameaux courts, hyalins, d'un brun légèrement foncé, cils sur le côté.

Sur des fragments de bois pourri. Z. arden.

III. — Conidies mesogènes.

C'est-à-dire conidies venant sur des rameaux tenant le milieu de la hyphe fertile.

Sous-Famille : CHLORIDIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **MESOBOTRYS,** Sacc.

Hyphes dressées, sombre-brun, courtement ramuleuses vers le milieu; *conidies ovoïdes,* hyalines.

Microsp. $^1/_2 >$ à $^3/_4 >$.

Mesobot. Fusca, (Cda.) Sacc.

Chætopsis Fusca, Cd.

Con. **5** μ. long.

Hyphes atténuées du dessus, pellucides, d'un jaune sombre brunâtre, petits rameaux ternés ou quaternés, posés régulièrement, obtus; conidies ovées, blanches.

Variété *Brachyclada,* Sacc.

Con. **2-2** $^1/_2$ = **1**.

Rameaux subcontinus, tortueux.

Sur le bois pourrissant. Z. arg. sablon.

Genre : **CHÆTOPSIS**, Grev.

C'est le genre *Mesobotrys* avec *conidies cylindracées,* hyalines.

Chætop. Grisea, (Ehrenb.) Sacc.
Chætops. Wauchii, Grev.

Hyphes rassemblées, d'un noir brunâtre, rigides, subulées, rameuses vers le milieu; conidies oblongues, cylindracées, rassemblées en une masse grise.

Sur les troncs pourrissants des arbres. (A chercher.)

IV. — Conidies podogènes.

C'est-à-dire conidies rassemblées à la base des hyphes ou venant sur des rameaux de la base des hyphes.

Sous-Famille : MYXOTRICHEÆ.

* Spores agglomérées a la base des hyphes.

AMEROSPORÆ.

Genre : **BOLACOTRICHA**, B. et Br.

Hyphes *recourbées au sommet,* simples; conidies brièvement pédicellées.

Bolacotri. Grisea, B. et Br.

Petites touffes grises, myxotrichoïdes; hyphes épaissies du dessous, recourbées du dessus; conidies globuleuses, granuleuses, rassemblées.

Sur les feuilles pourrissantes. Z. arg. sablon.

Genre : **MYXOTRICHUM**, Kze.

Hyphes droites ou courbées, *bien rameuses à la base.*

Microsp. Sp. $^3/_4$ à 1.

Myxotrich. Chartarum, Kz.

Con. **4** μ. diam.

Hyphes couchées, rameuses, divariquées, subsimples et uncinées du dessus, formant de petites touffes d'un noir olive; conidies rassemblées au sommet des rameaux de la base.

Sur le papier dans les endroits humides. Partout.

Myxotrich. Murorum, Kze.

Con. **3-4** μ. diam.

Hyphes droites au sommet, rameuses, dichotomes, entrelacées sous forme de couche sombre; conidies *globuleuses*, hyalines, très serrées les unes contre les autres.

Myxotrich. Coprogenum, Sacc.

Con. **3-3** $^1/_2$ μ. diam. souvent au nombre de 8.

Petites touffes d'un rose ochracé, pulvinées; hyphes à dichotomie répétée et rameuse; rameaux ultimes souvent courbés, granuleux, d'un ocre flave; conidies rassemblées au début dans une vésicule sphérique, souvent globuleuses-déprimées.

Sur le fumier de souris. Z. arg. sablon.

Myxotrich. Cancellatum, Phill.

Con. **3** μ. long.

Petites touffes cendrées, globuleuses; hyphes longues, subulées, simples, noirâtres, formant vers la base un treillis rameux; *conidies ellipsoïdes, très petites*, subhyalines, renfermées dans le réseau.

Sur le bois humide dans les caves. Z. arden.

** Spores solitaires a la base des hyphes.

AMEROSPORÆ.

Genre : **BOTRYOTRICHUM**, Sacc. et March.

Hyphes fertiles, hyalines, vaguement rameuses, portant à la base des hyphes stériles, septées et subfuligineuses ; conidies sphéroïdes, hyalines.

Botryotrich. Piluliferum, Sacc. et March.

Con. **11-14** μ. diam.

Hyphes stériles, fasciculées, à bases enflées; conidies globuleuses, hyalines, acrogènes aux rameaux des hyphes, hyalines, procumbentes et vaguement rameuses.

Sur le fumier de lapin. Z. arg. sablon.

Genre : **HELICOTRICHUM**, Nees.

Hyphes dressées, simples, fuligineuses, arrondies du dessus; conidies bacillaires, acrogènes, sur de courtes basides aux pieds des hyphes.

Helicotrich. Obscurum, (Cda.) Sacc.

Helicosporium Obscurum, Cda.

Con. **15 = 1.**

Petites touffes subétalées, d'un sombre brun olive; hyphes dressées, peu épaissies du dessous, très septées, noires, bien recourbées du dessus; basides cylindracées-oblongues, courtes, d'un fuligineux clair; conidies cylindriques, arrondies, hyalines, légèrement courbes.

Sur les rameaux déjetés et le bois, sur tige de *Dipsacus.* Z. arden.

V. — Conidies pleurogènes.

AMEROSPORÆ.

Genre : **VIRGARIA**, Nees.

[Correspond aux genres *Haplaria* et *Acladium* (Mucedineæ)].

Hyphes simples ou fourchues; conidies globuleuses ou ovoïdes, fuligineuses.

Microsp. $^1/_2$ > à 1.

Virgar. Coffeospora, Sacc., Bom. et Rouss.

Con. **10 = 5** (goutt. 2).

Étalés, veloutés-soyeux, noirs; hyphes rigides, aiguës du dessus, peu septées, fuligineuses, subsimples; conidies ovoïdes, planes, convexes (cofféiformes), fuligineuses.

Sur bois de hêtre pourrissant. Z. arg. sablon.

B. *Conidies en chaînettes.*

a) *Conidies en tête* au sommet *des hyphes simples, non renflées ou légèrement rameuses au sommet.*

Sous-Famille : HAPLOGRAPHIEÆ.

Correspond au genre *Penicillium.*

AMEROSPORÆ.

Genre : **HAPLOGRAPHIUM,** B. et Br.

Hyphes fertiles, simples, septées, sombres, ayant au sommet des rameaux tantôt très courts, tantôt assez longs; conidies globuleuses ou subfusoïdes, plus ou moins foncées.

Microsp. et *Macrosp.* $^1/_2$ > à 1.

Haplograph. Delicatum, B. et Br.

Con. **5** μ. long.

Couche olivacée; hyphes fertiles, noires, simples, rarement ramuleuses; conidies oblongues en chainettes, rarement rameuses, formant une petite tête olivacée.

Sur des éclats de bois. Z. arg. sablon.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **DENDRYPHIUM,** Wallr.

I. — Conidies distinctement en chainettes.

Dendryphi. Comosum, Wallr.

Con **6** μ. épais. (sept. 4-5).

Dendryphi. Fumosum, (Cda.) Fr.

(Sept. 10-12.)

II. — Conidies a peine en chainettes (*Brachycladium*, Cda.).

Dendryphi. Toruloïdes, (Fres.) Sacc.

Periconia Toruloïdes, Fres.

Con. **20-25** = **6-7** (sept. 5); hyphes **200-250** = **8-11**.

Étalé, velouté, d'un roux olivacé; hyphes septées, fuligineuses, avec des rameaux au sommet très courts, obtus; conidies cylindracées, d'un fuligineux olivacé, resserrées aux cloisons.

Sur tiges de *Spiræa*. Z. arden.

Dendryphi. Curtum, B. et Br.

Con. **20-25** = **5** $^1/_2$-**7** (sept. 5-7); hyphes **130-180** = **7-7** $^1/_2$.

Étalé, mince, noircissant; hyphes cylindracées, septées, fuligineuses, courtement ramuleuses au sommet; conidies cylindracées, resserrées aux cloisons, fuligineuses.

Sur tiges d'orties. Partout.

Dendryphi. Ramosum, Cooke.

Con. **25** = **6-7** (sept. 3-5).

Étalé, noircissant; hyphes dressées, septées, à rameaux fourchus, allongés, lâches; conidies droites, cylindracées, d'un fuligineux pâle.

Sur les tiges de *Clarkia*. Z. arg. sablon.

Dendryph. Penicillatum (Cda.) Fr.

(Sept. 3-4.)

b) *Conidies acrogènes au sommet des hyphes ou des rameaux.*

Sous-Famille : CLADOSPORIEÆ.

AMEROSPORÆ.

Genre : **HORMODENDRUM,** Bonord.

Hyphes septées, dressées, sombres, rameuses-dendroïdes; conidies globuleuses ou ovoïdes, *continues,* olivacées ou sombre-brun.

DIDYMOSPORÆ.

Genre : **CLADOTRICHUM**, Cd.

Hyphes denses, rigides, dressées, rameuses, ça et là légèrement enflées; conidies didymes, sombres, en chainettes courtes.

Microsp. et *Macrosp.* $^3/_4 <$ et $1 <$.

I. — Conidies distinctement en chainettes.

Cladotrich. Triseptatum, B. et Br.

(Sept. 1, 2 cloisons supplémentaires.)

Largement étalé, noir, pulvéracé; hyphes fourchues, rameuses, articles supérieurs enflés; conidies oblongues, obtuses, resserrées.

Sur des souches de frêne pourrissantes. Z. arg. sablon.

II. — Conidies solitaires.

Cladotrich. Nigrescens, (Lk.) Sacc.

Diplosporium Nigrescens, Lk.

Genre : **EPOCHNIUM**, Lk.

Deux sortes de hyphes fertiles, les unes étalées, copieuses, formant un tapis blanc et portant de petites conidies continues, hyalines; les autres d'un sombre brun, portant des chaines de conidies didymes. *Petites conidies* $^3/_4 >$; *grandes conidies* $^1/_2 >$.

Genre : **FUMAGO**, Pers.

Hyphes couchées; entremêlées, formant ordinairement une croûte noire qui tombe, et se rassemblant en ganglions muriformes; hyphes fertiles. rameuses, dressées; conidies ovoïdes ou difformes 1-2 septées.

Fumago Vagans, Pers.

Cladosporium Fumago, Lk.

Con. **5-15** μ. long. (de 0 à 2 septées).

Sur les feuilles vivantes des plantes fibreuses.

c) *Conidies pleurogènes.*

Sous-Famille : SPORODEÆ.

Genre : **DEMATIUM**, Pers.

Voir genre *Sporodum*, Cd. (*Fl. myc. belg.*)

Demati. Hispidulum, (Pers.) Fr.

Dematium Graminum, Libert.

Sporodum Conopleoïdes, Cda.

Exosporium Hispidulum, Lk.

Con. **10-14** μ. diam.

d) *Conidies endogènes.*

Genre : **SPOROCHISMA**, Berk.

Hyphes dressées, simples; conidies cylindracées, tronquées, septées, sombres, réunies en chaînettes dans les hyphes.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Sporochi. Insigne, Sacc., Bom. et Rouss.

Con. **40-50** = **6-6** $^1/_2$ (goutt. 10-14 septées.)

Étalé, soyeux-velouté, noir, varié de blanc (par les conidies); hyphes enflées vers le dessus, obscurément septées, fibrilleuses à la base, fuligineuses; conidies granuleuses au début, hyalines, non resserrées.

Sur le bois pourri. Z. arg. sablon.

Sporochi. Mirabile, Berk.

Con. **40-45** = **12** (sept. 3).

Étalé, noir, velouté-soyeux; hyphes simples, dressées, souvent brusquement rétrécies vers la base, entremêlées de hyphes stériles, septées; conidies non resserrées, fuligineuses, présentant souvent à chaque extrémité un petit disque hyalin.

Sur une souche pourrie. Z. arg. sablon.

Famille III : STILBEÆ.

Hyphes fertiles, réunies en stipe, à sommet portant des conidies.

HYALOSTILBEÆ.

A. *Conidies terminales formant tête.*

I. — Conidies solitaires.

AMEROSPORÆ.

† Capitules ne s'émiettant pas et couverts de mucosité.

Genre : **STILBUM,** Tode.

Strome monocéphale.

Microsp. Sp. $^1/_2$ > à 1.

Stilb. Vulgare, Tode.

Con. **8 = 5-6.**

Stipes rassemblés, fibreux, glabres, atténués vers le dessus, d'abord blanchâtres, puis jaunâtres; capitules globuleux, blanchâtres, puis jaunâtres; conidies hyalines.

Sur les éclats de bois pourrissant. Z. arg. sablon.

Stilb. Villosum, (Bull.) Merat.

Con. **7-8 = 4-4** $^1/_2$.

Blanc, isarioïde; tête subarrondie, turbinée; stipe assez épais, subvilleux, jaunissant; conidies ovoïdes, hyalines.

Sur des excréments de poule. Z. arg. sablon.

Stilb. Erythrocephalum, Ditm.

Con. **4-6 = 2-3** $^1/_2$.

Stilb. Tomentosum, Schr.

Stipes grêles, blanchâtres, tomenteux-glanduleux, sortant d'une base byssoïde; capitules blanchâtres, opaques; conidies petites, globuleuses.

Sur des *Trichia*. Z. arg. sablon.

Stilb. Pellucidum, Schrad.

Épars; tête de turbinée devenant subarrondie, blanchâtre; stipe égal, rigide, hyalin.

Sur le bois pourri, avec le *Ceratostomella vestita*. Z. arg. sablon.

†† Capitules ne s'émiettant pas, non couverts de mucosité.

Genre : **CILICIOPODIUM**, Cda.

Strome cylindracé en massue, compact, assez grand, agréablement coloré, formé par des hyphes simples ou rameuses; stipe quelquefois rude ou soyeux; conidies acrogènes, hyalines.

Microsp. et *Macrosp.* Sp. $^1/_2 < >$.

Ciliciop. Tubercularioïdes, (Lib.) Sacc.

Ditiola Tubercularioïdes, Lib.

Con. **15-18 = 6-7**.

Strome cylindracé, en massue, fasciculé, uni, rouge; conidies oblongues-ellipsoïdes; sporophores filiformes, fourchus-répétés, hyalins, longs.

Sur l'écorce pourrissant de l'orme. Z. arden. (Libert.)

††† Capitules s'émiettant.

Genre : **PILACRE**, Fr.

Pilac. Petersii, B. et C.

Con. **5** μ. épais.

Stipe court, blanc; capitule assez gros; hyphes s'anastomosant à rameaux tortueux; conidies couleur tabac, sessiles, pleurogènes.

Sur le tronc du chêne, du hêtre Partout.

II. — Conidies en chaines.

AMEROSPORÆ.

Genre : **COREMIUM**, Lk.

C'est le genre *Penicillium* composé.

Strome cylindracé, à sommet en tête, conidiophore; conidies petites.

Corem. Glaucum, Fr.

Corem. Vulgare, Cd.

Con. **3-4** μ. diam.

Hyphes fertiles, dressées, septées, réunies en faisceaux et formant un stipe blanc, rameuses au sommet; conidies subglobuleuses, pénicillées, formant un capitu'e glaucescent.

Sur les fruits pourrissants. Partout.

Variété *Fimicolum*, March.

Capitule blanc, puis verdâtre.

Sur le fumier d'éléphant. Z. arg. sablon.

B. *Partie conidiophore formant cylindre ou massue.*

AMEROSPORÆ

GENRE : **ISARIA**, Pers.

Isar. Farinosa, Fr.

Con. **2** μ. diam.

Isar. Brachiata, (Batsch.) Schum.

Con. **3-4** = **1** $^1/_2$-**2**.

Isar. Umbrina, Pers.

Con. **5-6** = **2** $^1/_2$-**3** $^1/_2$.

Isar. Felina, (D C.) Fr.

Cespiteux, allongés, filiformes, rameux, blancs, cortiqués par une couche lâche, farineuse, conidifère; rameaux tantôt simples, tantôt divisés ou pénicillés.

Sur le fumier de chat. Z. arg. sablon.

GENRE : **CERATIUM**, A. S.

Strome en massue simple ou rameuse, portant, à la partie superficielle, des basides hétérogènes et monospores; conidies assez grandes, globuleuses, hyalines. (Ce genre, mieux étudié, sera placé parmi les *Myxomycetes*. Les conidies engendrent des amibes, des zoospores et un plasmodium.)

Cerat. Hydnoïdes, (Jacq.) A. et S.

Con. **10-12 = 8; 10** μ. diam. (plurigouttes).

Strome cylindracé, simple ou peu rameux, blanc ou jaunâtre, quelquefois subfasciculé, velouté par les basides (sporophores) courtes, étalées; conidies ovoïdes, hyalines.

Sur le bois pourri; sur la sciure de bois. Z. arg. sablon.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **ATRACTIUM,** Lk.

Strome cylindracé, à sommet conidiophore en tête; conidies vermiculaires, en faulx, subhyalines, 2-pluriseptées.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Atrac. Flammum, B. et Rav.

Con. **70-75** μ. long. (sept. 4-6).

Stipe court; strome cylindracé, en massue, obtus, d'un rouge de flamme, blanchâtre et pruineux du bas; conidies fusoïdes, courbées, aiguës, hyalines; sporophores longs, septés.

Sur les feuilles du hêtre. Z. arg. sablon.

PHÆOSTILBEÆ.

I. — Conidies solitaires.

AMEROSPORÆ.

Genre : **SPOROCYBE,** Fr.

Stipe fibreux, sombre, rigide, formant au sommet un conidiophore en tête globuleuse ou allongée; conidies d'un *sombre brun,* globuleuses ou ellipsoïdes.

Microsp. Sp. $^1/_2$ > à 1.

Sporocy. Corticalis, (C. et P.) Sacc.

Con. **3** μ. diam.

Épars, noir; stipe dressé, formé par des hyphes dressées; tête subglobuleuse; conidies globuleuses.

Sur écorce. Z. arden.

Sporocy. Byssoïdes, (Pers.) Bon.

Con. **4-6** = **3-4** (goutt. 1).

Sporocy. Rhopaloïdes. Sacc. et Roum.

Con. **8** = **3** $^1/_2$.

Lâchement rassemblé, noir, ayant la forme de soies; stipe cylindracé, en massue, épaissi de la base, conidiophore du dessus, formé de hyphes fuligineuses; conidies ovées, en massue, couleur olive.

Sur les feuilles de *Cynosurus*. Z. arden. (Libert.)

Sporocy. Berlesiana, Sacc. et Roum.

Con. **8-9** = **4** (goutt. 1).

Étalé, soyeux, d'un olive sombre brun; stipe cylindracé, rigide, à sommet conidiophore en tête; conidies elliptiques-ovoïdes, fuligineuses.

Sur écorce et rameaux pourrissants. Z. arden. (Libert.)

Sporocy. Atra, (Desm.) Sacc.

Graphium Atra, Desm.

Con. **10-12** μ.

Sporocy. Calycioïdes, Fr.

Periconia Calycioïdes, (Fr.) Berk.

Genre : **GRAPHIUM**, Cda.

Mêmes caractères que le genre *Sporocybe,* sauf les *conidies qui sont claires.*

Graph. Rigidum, (Pers.) Sacc.

Stilbum Rigidum, Pers.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **ISARIOPSIS.**

Grêle, sombre-brun, cylindracé, formé de hyphes lâches; conidies réunies en tête ou en panicule.

Isariops. Carnea, Oud.

Con. **12** = **7** (sept. 1-2) (goutt. 2).

Stipe hyalin, puis couleur chair; conidies rassemblées sur les rameaux hyalins, flexueux du sommet, elles sont continues d'abord, à gouttes épaisses. Les feuilles présentent des taches noires, lancéolées.

Sur les feuilles de *Lathyrus pratense.* Z. arden.

Isariops. Albo-Rosella, (Desm.) Sacc.

Isariopsis Pusilla, Fres.

Stysanus Albo-Rosella, Desm.

Con. **20** = **7** (sept. 1).

Touffes étalées, de blanches devenant roses; stipe simple, dressé, rose, glabre du dessous, en massue du dessus; conidies cylindracées, oblongues ou légèrement en massue, obtuses, subhyalines, à peine resserrées.

Sur les feuilles de *Stellaria.* Z. arden. et arg. sablon.

Isariops. Griseola, Sacc.

Con. **50-60** = **7-8** (sept. 1-3).

Faisceaux de stipes, densément rassemblés, sur des taches ochracées; sommets gris, en capitules; conidies, provenant des hyphes, épanouies ou réfléchies au sommet, cylindracées-fusoïdes, courbées, grises, à peine resserrées.

Sur les feuilles de *Phaseolus vulgaris.* Z. arden.

II. — Conidies en chainettes.

Genre : **STYSANUS,** Cda.

Stysan. Stemonites, (Pers.) Cda.

Con. **8** = **5**.

Genre : **GRAPHIOTHECIUM,** Fckl.

Hyphes formant stipe épaissi en périthèce à la base; conidies fusoïdes, continues, hyalines au sommet des hyphes.

Graphiothec. Parasiticum, (Desm.) Sacc.

Stysanus Parasiticus, Desm.

Con. **5-7** μ. long.

Très petits, subépars, simples ; stipe fibreux, grêle-subuleux, d'un noir brunâtre, à base sphéroïde, à sommet cylindrique, blanc, couvert de conidies ; conidies ovoïdes.

Sur les feuilles languissantes ou pourries, surtout de *Sorbus aria, Lonicera, Ribes.* Partout.

Graphiothec. Phyllogenum, (Desm.) Sacc.

Graphium Phyllogenum, Desm.

Con. **5-7** $^1/_2$ μ. long.

Sur les feuilles mortes de *Fragaria.*

Graphiothec. Pusillum (Fckl.) Sacc.

Stysanus Pusillus, Fckl.

Con. **14 = 8.**

Famille IV : TUBERCULARIEÆ, Ehrenb.

Hyphes réunies en verrues, en globes, en disques, superficiels ou érumpents, céracés ou subgélatineux ; conidies naissant du sommet ou des côtés des hyphes.

MUCEDINEÆ.

A. *Sporodochies glabres ou glabrescentes.*

I. — Conidies solitaires.

AMEROSPORÆ.

Genre : **TUBERCULARIA,** Tode.

Sporodochies variables, surtout *vermiformes,* subcéracées; *sporophores filiformes, longs, simples* ou fourchus; conidies généralement pleurogènes.

Microsp. Sp. 1/4 > à 1.

Tubercul. Pinophila, Cda.

Con. **3-3** 1/2 μ. long.

Sphérique, blanc, superficiel; strome faux; conidies ellipsoïdes, blanches, pleines d'un noyau.

Sur troncs pourrissants d'*Araucaria imbricata*. Z. arg. sablon.

Tubercul. Volutella, Cd.

Con. **6-7** μ.

Érumpent ou subimmergé, convexe ou disciforme, puis concave; stipe blanchâtre; disque couleur chair, puis pâle; conidies oblongues, pellucides, courbées; sporophores légèrement en massue.

Forme *Spiræa.*

Con. **6** = **2**.

Sporophores souvent fourchus, denticulés; conidies acro-pleurogènes.

Sur *Spiræa ulmaria*. Z. arden. (Libert.)

Tubercul. Vulgaris, Tode.

Tubercul. Robiniæ, Kickx.

Con. **6-8** = **1** 1/2-**2**.

Tubercul. Sarmentorum, Fr.

Con. **7-8** = **2-2** 1/2.

Sporodochies petites, émergentes de l'épiderme fendu longitudinalement en séries, rouges; conidies allantoïdes, hyalines.

Sur la vigne. Partout.

Tubercul. Rubi, Rabenh.

Con. **8-9** μ. long.

Erumpent, en séries, couleur cinabre, puis sanguine; strome stipitiforme, d'un ocre sombre, brunâtre, compact, tronqué, dilaté du dessus et couvert d'une couche épaisse de conidies.

Sur sarments de *Rubus fruticosus*. Z. arg. sablon.

Tubercul. Minor, Lk.

Forme *Castaneæ.*

Con. **8-9 = 3.**

Tubercul. Brassicæ, Lib.

Con. **8-10 = 1** $^1/_2$.

Sporodochies subsuperficielles, verruciformes, petites, rouges, unies; conidies cylindracées, courbées; basides simples ou fourchues, denticulées, pleurogènes.

Sur tige pourrie de *Brassica*. Z. arden.

Tubercul. Sambuci, Cda.

Érumpent, cinabre, assez grand; strome convexe, grumeleux, rouge à l'extérieur, jaune à l'intérieur; conidies cinabres, oblongues, aiguës, diaphanes.

Sur rameaux de *Sambucus nigra*. Z. arg. sablon.

Tubercul. Ciliata, Ditm.

Sporodochie pezizoïde, à base d'un sombre brun. émergente, à disque convexe, rouge, sporophore, à marge ciliée.

Sur rameaux de *Carpinus betulus* et *Prunus padus*. Z. arg. sablon.

Tubercul. Floccosa, Lk. (*Tub. Velutipes*, Nees.)

Sporodochies petites, immergées, globuleuses, noires à l'intérieur; couche des conidies rouges; flocons blancs entourant la sporodochie.

Sur écorce de l'orme. Z. arg. sablon.

Genre : **DENDRODOCHIUM**, Bon.

Se distingue du genre *Tubercularia* par les sporophores subverticillés-rameux et par les conidies aerogènes.

Microsp et *Macrosp*. Sp. $^1/_4 > <$ à 1.

Dendrodoch. Affine, Sacc.

Con. **3-5** = **2-2** $^1/_2$ (goutt. 2.)

Sporodochies érumpentes, pulvinées-déprimées, rouges, petites; sporophores fasciculés, 2-3 fourchus; conidies subovoïdes, rose-hyalin.

Variété *Epicarpicum*.

Con. **5-6** = **3** (goutt. 2).

Sporophores septulés, 2-3 fides.

Sur l'épicarpe du *Malus*. Z. arden. (Libert.)

Dendrodoch. Rubellum, Sacc.

Con. **8-9** = **2-3**.

Sporodochies pulvinées-planes, rassemblées, érumpentes, roses; sporophores 1-2 fourchus, aigus; conidies oblongues, rose-hyalin.

Variété *Brassicæ*, Sacc.

Con. **6** = **3**.

Sporophores bifides.

Sur tige de *Brassica*. Z. arden. (Libert.)

Variété *Trifidum*, Sacc.

Con. **7** = **4**.

Sporophores trifides.

Sur l'écorce des rameaux. Z. arden.

Dendrodoch. Fusisporum, Sacc. et Roum.

Con. **12** = **2** $^1/_2$.

Sporodochies subsuperficielles, pulvinées, roses; basides vaguement rameuses ou fourchues, continues, en fascicules serrés; conidies fusoïdes-aiguës, droites, hyalines.

Sur l'écorce de rameaux de *Sambucus*. Z. arden.

Genre : **TUBERCULINA**, Sacc.

Sporodochie parasite des *Uredinei*, pulvinée-plane, souvent violacée; spores globuleuses, acrogènes sur des sporophores épais, courts, simples ou peu rameux.

Tuberculi. Persicina, (Ditm.) Sacc.

Tubercularia Persicina, Ditm.

Con. **7-8** μ. diam.; **10** μ. diam.

Sporodochies déprimées-globuleuses, petites, disposées quelquefois en cercle, d'un violet sombre brun, phyllogènes; conidies d'un rose violacé, unies; sporophores simples ou ramuleux, denticulés du dessus, subhyalins.

Sur feuilles d'*Euphorbia*, sur *Æcidium*. Z. arg. sablon.

Genre : **ILLOSPORIUM**, Mart.

Conidies agglutinées en glomérules.

Illosp. Coccineum, Fr.

Glomérules de conidies **30** = **16**.

Illosp. Carneum, Fr.

Glomérul. **20-24** μ. diam.

Illosp. Maculicolum, Sacc.

Con. **8-12** = **4-6**.

Taches de feuilles, arides, variables; sporodochies de globuleuses conoïdes, rassemblées, superficielles, d'un rose pâle, verruculeuses; hyphes rameuses, densément entrelacées, pluri-articulées, guttulées, légèrement roses; conidies ovoïdes, continues, quelquefois faussement septées, d'un rose hyalin.

Sur les feuilles de *Berberis vulgaris*. Z. arg. sablon.

Genre : **PHYLLOEDIA**, Fr.

Sporodochies difformes, superficielles; conidies colorées, simples, à tunique épaisse, nichées dans une gélatine subamorphe, colorée.

Phyllæd. Faginea, (Lib.) Sacc.

Illosporium Fagineum, Lib.

Con. **25-30** μ. diam.

Étalé, difforme, rouge-orange, se brisant par la sécheresse en fragments polygones; mucus matrical pâle, stratifié; conidies irrégulièrement rassemblées, subsphéroïdes, à épispore blanc-hyalin, à noyau granuleux, orange.

Sur les feuilles mortes de *Fagus sylvatica.* Z. arden.

Phyllæd. Punicea, (Lib.) Sacc.

Illosporium Puniceum, Lib.

Con. **40-50** μ. diam.

Petit, libre, globulaire; sporodochies subsolitaires, rouges, subcompactes; mucus matrical granuleux, cinabre; conidies grandes, sphéroïdes, d'un jaune verdâtre, épispore blanc, stratifié; noyau celluleux.

Sur les mousses. Z. arden.

Genre : **ÆGERITA**, Pers.

Ægerit. Candida, Pers.

Ægerit. Perpusilla, Desm.

Con. **12-15 = 8-12.**

Genre : **FUSICOLLA**, Bon.

Sporodochies verruqueuses-lobulées, subgélatineuses; sporophores filiformes, rameux; *conidies cylindracées ou fusoïdes,* acropleurogènes, hyalines.

Fusicol. Betæ, Bon.

Fusisporium Betæ, Desm.

Con. **48 = 4.**

Pulviné-lobé, subétalé, d'un rouge orange, trémelleux; sporophores dichotomes, rameux, continus; conidies fusoïdes, aiguës, courbées, continues, d'un rose hyalin.

Sur la betterave. Z. arden.

Genre : **SPHACELIA**, Lev.

Sporodochies subplanes, étalées, sur un hypostrome sclérotique ou céracé; sporophores courts, bacillaires; conidies ovoïdes, acrogènes.

Sphacel. Segetum, Lev. (de l'ergot.)

Con. **4-6** = **2-3**.

Genre : **HYMENULA**, Fr.

Sporodochies disciformes; conidies acrogènes sur sporophores courts et simples.

Microsp. et *Macrosp.* $^1/_4$ > < à 1.

Hymenul. Pellicula, (Desm.) Sacc.

Psilonia Rubella, Lib.

Con. **5-6** = $^1/_2$ (goutt. 2).

Superficiel, oblong, confluent, d'un rose rouge, marge *blanche, pelliculeuse;* conidies cylindracées, courbées.

Sur feuilles de *Carex, Juncus, Scirpus*. Z. arden. et arg. sablon.

Hymenul. Vulgaris, Fr.

Con. **5-6** = **1** $^1/_2$-**2**.

Sporodochies subgélatineuses, peu élevées, oblongues ou polymorphes, de couleur pâle blanche ou bleuâtre, noircissant par sécheresse; sporophores dressés, serrés; conidies arrondies, obtuses, très nombreuses, achromes, extrémités courbées.

Sur tiges pourrissantes d'*Angelica, Solidago, Helianthus*. Z. arg. sablon.

Hymenul. Rubella, Fr.

Con. **5** $^1/_2$-**6** $^1/_2$ = **1** $^1/_2$ (goutt. 2).

Hymenul. Herbarum, Sacc. et Roum.

Con. **8-9 = 2-3**.

Sporodochies rassemblées, superficielles, convexes-pulvinées, roses, compactes, subbyssinées au début à la base; conidies cylindracées-fusoïdes, droites, obtuses, hyalines; *basides bacillaires, subseptées,* hyalines.

Sur tige pourri d'*Hyosciamus*. Z. arden. (Libert).

Hymenul. Macrospora, Sacc. et Roum.

Con. **16-18 = 6-7**.

Sporodochies rassemblées, superficielles, convexes-pulvinées, rouges, compactes, *basides très courtes;* conidies ovées-oblongues, subinégales, tunique épaisse, hyalines.

Sur tige de *Tropæoli*. Z. arden. (Libert.)

Genre : **MYROPYXIS**, Ces.

Spodochies *cupulaires;* hyphes rameuses; conidies copieuses, formant une masse adipeuse, subcornée par la sécheresse.

Myropy. Graminicola, Ces.

Laiteux d'abord, puis couleur de paille; sporodochies fixées par une base punctiforme; marge ondulée; globule des conidies subadipeux, laiteux, puis blanc sulfureux.

Sur les chaumes desséchés du *Phalaris arundinacea*. Z. arg. sablon.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **BACTRIDIUM**, Kze.

Sporodochies superficielles, convexes, hémisphériques; conidies oblongues-cylindracées, longues, pluriseptées; basides cylindracées.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Bactrid. Flavum, K. et S.

Con. **160-180 = 30-60** (6 sept.).

Sporodochies globuleuses-hémisphériques, couleur d'orange ; sporophores assez longs; conidies subfusiformes en massue, d'un miel fauve.

Sur une souche bien pourrie. Z. arg. sablon.

Bactrid. Helvellæ, B. et Br.

Cn. o**60-65** μ. long. (6-7 sept.).

Sporodochies confluentes, microscopiques, subétalées; sporophores subdressés, peu rameux; conidies en massue, hyalines.

Sur hymenium de *Peziza*. Z. arg. sablon.

Genre : **FUSARIUM**, Lk.

Sporodochies pulvinées ou subétalées; conidies fusoïdes ou en faulx, acrogènes sur des sporophores rameux-verticillés.

I. EU-FUSARIUM.

Conidies septées.

A. *Selenosporium*, Cord.

Sporodochies compactes, figurées.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Fusar. (*Selenosporium*) **Minutissimum,** (Desm.) Sacc.

Con. **20-40** = **5** (sept. 1).

Fusar. Sambucinum, Fckl.

Con. **24** = **6** (sept. 3).

Fusar. (*Selenos.*) **Cæruleum,** (Lib.) Sacc.

Fusarium Violaceum, Fckl.

Con. **24-30** = **5-6** (sept. 2-3).

Sporodochies largement étalées, d'un bleu violacé agréable; conidies fusiformes.

Fusar. (*Selenos.*) **Sarcochroum,** (Desm.) Sacc.

Con. **28-40** = **4-6** (sept. 3-5).

Fusar. Heterosporum, Nees.

Con. **30-35** μ. long. (sept. 3-5).

Fusar. Brassicæ, Thüm.
Sclerotium Castaneum, Lib.

Con. **30-36** = **3-4** $^1/_2$ (sept. 2) (goutt.).

Sporodochies verruciformes, densément agrégées, dures, superficielles, d'un sombre brun opaque; conidies lunulées, aiguës; basides courtes.
Sur tiges pourries de *Brassica oleracea.* Z. arden. (Libert.)

Variété *Brassicæ,* (Lib.) Cooke. *Selenosporium Brassicæ,* Lib.)

Con. (3-7 sept.)

Étalé, couleur orange; conidies fusiformes, courbées, aiguës.
Sur tiges de *Brassica.* Z. arden. et arg. sablon.

Fusar. Lateritium, Nees.

Con. **30-40** = **4-5** (sept. 4-5).

Fusar. Roseum, Lk.

Con. **33-60** = **4** (sept. 3.).

Fusar. (*Selenos.*) **Pyrochroum,** (Desm.) Sacc.

Con. **35-40** = **3-5** (sept. 3-5).

Fusar. (*Selenos.*) **Asperifoliorum,** (West.) Sacc.

Con. **40** = **1-1** $^1/_2$ (sept. 6-9).

Fusar. (*Selenos.*) **Herbarum,** (Cda.) Fr.

Con. **36-45** = **3-4** (sept. 4-5).

Rassemblé, d'un rose carné, subétalé; strome d'un sombre brun, mou, fibreux-celluleux, couvert d'une couche de conidies d'un rose carné; conidies courbées, aiguës, pâles; basides presque en massue.
Sur les tiges sèches de *Brassica* Z. arden.

Fusar. Episphæricum, (C. E.) Sacc.

Con. **40** = **4** (sept. 3-5) (plurigoutt.)

Trémelloïde, blanchâtre; conidies fusiformes, arquées, aiguës.

Sur le strome d'*Hypoxylon fuscum*. Z. arg. sablon.

Fusar. Oxysporum, Schlecht.

Sporodochies convexes, subverruqueuses, roses, puis érumpentes, *rugu-teuses* et *confluentes;* conidies courbées, très aiguës.

Variété *Aurantiacum*, Cd. (*Fusisporium Aurantiacum*, Lk.)

Con. **40-55** = **3-5** (sept. 3-5).

Sporodochies larges, couleur orange; hyphes rampantes, rameuses-entre-lacées; sporophores aciculaires-rameux; conidies en faulx, *très aiguës,* d'un rose hyalin.

Sur l'épicarpe de *Cucurbita* Z. arg. sablon.

Fusar. Solani, (Mart.) Sacc.

Fusisporium Solani, Mart.

Con. **40-60** = **7-8** (sept. 3-5).

Fusar. (*Selenos.*) **Pallens,** Nees.

Con. **50** = **4** $^1/_2$-**5** (sept. 3-5).

Fusar. Album, Sacc.

Con. **50-65** = **6-8** (sept. 3-5).

Sporodochies planes, oblongues, confluentes, superficielles, blanches; sporophores simples sortant en forme de pinceau d'une base courte et plus épaisse; conidies acrogènes, botuliformes, courbées, arrondies, hyalines.

Sur rameaux de *Ulmus campestris*. Z. arg. sablon.

B. *Fusisporium*, Lk.

Sporodochies étalées, lâches, byssinées.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Fusar. (*Fusis.*) **Zeæ**, (West.) Sacc.

Con. **50** μ. long. (goutt.).

Fusar. (*Fusis.*) **Incarnatum**, (Desm.).

Con. **35-45 = 3 $^1/_2$-4** (sept. 3-7).

Fusar. (*Fusis.*) **Kühnii**, Fckl.

Con. **12 = 4** (sept. 1).

Sporodochies superficielles, oblongues, irrégulières, cornées, argillacées, texture aréolée, à peine visibles sur un mycelium blanc et étalé ; conidies tombées à la superficie des sporodochies, semi-lunaires, hyalines.

Sur rameaux de peuplier. Z. arden.

II. FUSAMEN.

Conidies non septées.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

A. *Selenospora*, Sacc.

Sporodochies compactes, figurées.

Fusar. Equisetorum, (Lib.) Desm.

Hymenula Equiseti, Lib.

Con. **38** μ. long.

Fusar. Parasiticum, West.

Con. **50 = 2**.

B. *Fusispora,* Sacc.

Sporodochies étalées, lâches, byssinées.

Fusar. (*Fusis.*) **Candidum,** Lk.

Hyphes blanches, laineuses, serrées; conidies cylindracées, courtes, concolores, obtuses.
Sur chatons tombés des amentacées. Z. arg. sablon.

III. LEPTOSPORIUM, Sacc.

Conidies plus courtes, ovoïdes ou suboblongues, continues.

Microsp. Sp. $^1/_2$ >.

Fusar. (*Leptospor.*) **Subtectum,** Rob.

Con. **5** μ. long. (goutt. 2).

GENRE : **PIONNOTES,** Fr.

Sporodochies *gélatineuses*, puis durcissant; pour le reste, mêmes caractères que le genre *Fusarium*.

Macrosp. $^1/_4$ <.

Pion. Rhizophila, (Cda.) Sacc.

Fusarium Rhizophilum, Cda.

Con. **30-40** = **4** (goutt.) (sept. 3).

Étalé, gélatineux, d'un rose rougeâtre ou couleur d'orange, épais; sporophores filiformes entrelacés, blancs, puis carnés; conidies en faulx, aiguës.

Variété *Betæ.* Desm.

Con. **50-60** = **4-5** (sept. 3).

Sur tubercules de dahlia et betterave. Partout.

Genre : **MICROCERA**, Desm.

Se distingue du genre *Fusarium* par la sporodochie petite, conique, en cornue ou en coussin, et le sporophore simplement rameux.

Macrosp. Sp. $^1/_4$ <.

Microc. Coccophila, Desm.

Con. **70-100** = **4-5** (sept.).

II. — Conidies en chainettes.

AMEROSPORÆ.

Genre : **CYLINDROCOLLA**, Bon.

Sporodochies verruciformes, inégales, trémelloïdes-succinées, agréablement colorées; sporophores rameux-répetés; conidies acrogènes, bacillaires-tronquées.

Microsp. Sp. $^1/_4$ > <.

Cylindroc. Alba, Sacc. et Roum.

Con. **4-5** = **1**.

Sporodochies verruciformes, variées, déprimées, blanches, sporophores fasciculés, dichotomes, rameux; conidies cylindracées-tronquées, hyalines.
Sur feuilles de graminées. Z. arden. (Libert.)

Cylindroc. Urticæ, Pers.

Dacryomyces Urticæ, Cd.

Fusarium Tremelloïdes, Grev.

Con. **10** = **1-1** $^1/_2$.

Genre : **SPHÆRIDIUM**, Fres.

Sporodochies globuleuses, *subfragiles*, souvent à base très courtement stipitée ; conidies cylindracées.

Microsp. Sp. $^{1}/_{4}$ <.

Sphærid. Vitellinum, Fres.

Con. **6-8 = 1-1,3.**

Sporodochies subglobuleuses, jaunes; stipe très court, blanchâtre; sporophores fasciculés, bacillaires, simples ou légèrement rameux au sommet; conidies cylindriques.

Sur le fumier de daim Z. arg. sablon.

Sphærid. Candidulum, Sacc. et Roum.

Con. **10-15 = 1 $^{1}/_{2}$-2 $^{1}/_{4}$.**

Sporodochies globuleuses, rassemblées, blanches ; sporophores fasciculés, subrameux ; conidies bacillaires, tronquées, hyalines.

Sur les écailles de cônes d'*Abies*. Z. arden. (Libert.)

Sphærid. Albellum, Sacc. et March.

Con. **12-14 $^{1}/_{2}$ = 1-1,2.**

Sporodochies globuleuses-déprimées, blanches, légèrement stipitées ; sporophores simples ou rameux ; conidies bacillaires, hyalines, tronquées, couvertes d'un mucus blanc.

Sur fumier de lièvre. Z. arg. sablon.

B. *Sporodochies soyeuses.*

AMEROSPORÆ.

Genre : **PERIOLA**, Fries.

Sporodochies *verruciformes, villeuses.*

Periol. Tomentosa, Fr.

Con. **5 = 3** hyalines.

GENRE : **VOLUTELLA**, Tode.

Sporodochies *disciformes, à marge ciliée.*

Microsp. Sp $^1/_4 >< $ à 1.

I. EU-VOLUTELLA.

Sporodochies substipitées.

Volutel. Ciliata, (A. S.) Fr.

Con. **5-7** = **2**.

Sporodochies substipitées, hémisphériques, d'un blanc carné; disque proéminent; soies rares à la marge, longues, hyalines; sporophores simples, légèrement rosés; conidies elliptiques, obtuses, droites. hyalines.

Variété *Stipitata,* Sacc. *Volutella Stipitata* (Lib.).

Con. **5** = **2** $^1/_2$ (goutt. 2).

Pédicelle brunâtre; soies rigides.

Volutel. Pedicellata, (Preuss.) Sacc.

Rassemblé, pédicellé, blanc, puis sombre-brun; sporodochies pulvinées, surtout soyeuses à la base; soies subulées, septées, blanches; sporophores filiformes; conidies oblongues, petites, hyalines; couvrant la sporodochie d'une couche épaisse.

Sur les tiges mortes d'*Epilobium hirsutum.* Z. arg. sablon.

II. PSILONIA.

Sporodochies sessiles, à base plane.

Volutel. (*Psil.*) **Setosa,** (Grev.) Berk.

Con. **1** μ. diam.

Sporodochies sessiles, blanches, entourées par la masse de spores; soies dressées, allongées, continues; conidies globuleuses.

Sur les tiges herbacées. Z. arg. sablon.

Volutel. Arundinis, Desm.

Con. **5** μ. long.

Sporodochies oblongues, denses, d'un rose pâle; soies simples, hyalines. enchevêtrées en faisceaux; conidies ovoïdes.

Sur chaumes de tiges herbacées. Z. arg. sablon.

Volutel. (*Psil.*) **Festucæ,** (Lib.) Sacc.

Con. **5-6** μ. long.

Sporodochies sessiles, hémisphériques, laineuses, lâches, fugaces, d'un blanc rose; soies subdistantes, dressées, simples, aiguës, hyalines; conidies cylindracées, courbées, obtuses, d'un rose hyalin.

Volutel. Buxi, (Cda.) Berk.

Chætostroma Buxi, Cda.

Con. **10-11** = **3** $^1/_2$-**4** $^1/_2$ (goutt. 2).

Variété *Rusci.*

Con. **9-10** = **3** $^1/_2$-**4** (goutt. 2-3).

Sporodochies peu ciliées.

Sur feuilles de *Ruscus.* Z. calc.

Volutel. (*Psil.*) **Gilva,** (Pers.) Sacc.

Con. **10-13** = **1** $^1/_2$-**2** $^1/_2$ (goutt. 2).

Volutel. (*Psil.*) **Nivea,** (Fr.) Sacc.

DEMATIEÆ.

A. *Sporodochies glabres ou glabrescentes.*

AMEROSPORÆ.

Genre : **STRUMELLA**, Sacc.

Sporodochies verruciformes, formées de hyphes rameuses et de conidies inégales.

Microsp. $^1/_2$ <.

Strumel. Olivatra, Sacc.

Con. **10-15 = 6-7.**

Sporodochies rassemblées, superficielles, globuleuses, formées de chaînes de cellules noires; conidies cylindracées-fusoïdes, variées, beaucoup de courbées, réunies de différentes manières, d'un sombre brun olive.

Sur bois pourrissant. Z. arden.

Genre : **EPICOCCUM**, Lk.

Epicoc. Neglectum, Desm.

Con. **12-16** μ. diam.

Epicoc. Purpurascens, Ehrenb.

Con. **16-22** μ. diam.

Genre : **EPIDOCHIUM**, Fr.

* Basides globuleuses ou en massue.

Epidoch. Atro-Virens, Fr.

Tremella Genistæ, Lib.

Næmatelia Virescens, Cda.

Conid. **4 = 2?**

Érumpent, disciforme, très petit, papillé, ruguleux, humide, d'un fuligineux vert, sec devenant noir, rassemblé ou confluent; sporophores filiformes, rameux, à sommets ellipsoïdes en massue.

Sur rameaux morts de *Sarothamnus*, d'*Ulex europœus*, *Fraxinus*, *Rosa canina*. Z. arden. et arg. sablon.

** Basides simples ou égales.

Epidoch. Affine, Desm.

Immergé, épars, noir, humide, trémelleux, d'un fuligineux vert, sec devenant opaque et subruguleux; sporodochies linéaires, parallèles, rassemblées en petites tâches; *sporophores simples;* conidies très copieuses, petites, globuleuses, hyalines.

Sur *Carex vulpina*. Z arden.

Genre : **HYMENOPSIS**, Sacc.

Sporodochies scutellées-disciformes ou convexes, superficielles-érumpentes ou superficielles, noires; marge concolore; sporophores cylindracés; conidies ovoïdes ou bacillaires.

Hymenop. Strobilina, (Lib.) Sacc.

Hymenula Strobilina, Lib.

Con. **4-5** = **2-2** $^{1}/_{2}$.

Sporodochies arrondies, aplaties, marginées, d'un noir glauque; conidies oblongues, d'un pâle verdâtre.

Sur les cônes déjetés de pin silvestre. Z. arden.

PHRAGMOSPORÆ.

Genre : **EXOSPORIUM**, Lk.

Sporodochies convexes, compactes; sporophores simples, densément fasciculés, oblongs ou cylindracés, pluriseptés; conidies acrogènes.

Macrosp. $^{1}/_{4}$ <.

Exosp. Tiliæ, Lk.

Con. **60-70** = **18** (sept. 8-10) (goutt. 9-11).

B. *Sporodochies soyeuses.*

Genre : **MYROTHECIUM**, Tode.

Sporodochies scutellées ou disciformes, noires; marge ciliée, blanche; cils hyalins, minces; conidies ovoïdes ou cylindracées; basidies bacillaires.

Microsp. Sp. $^1/_2$ > à $^1/_4$ <.

Myrothec. Inundatum, Tode.

M. Viride, Pers.

Con. **3-4** = **1** $^1/_2$-**2**.

Sporodochies disciformes, polymorphes; disque plan, d'un noir olive; marge blanche; sporophores fasciculés, hyalins; conidies globuleuses-ellipsoïdes, olivacées.

Sur champignons pourris. Z. arg. sablon.

Myroth. Gramineum, Lib.

Con. **12-14** = **2** $^1/_2$-**3**.

Sporodochies orbiculaires ou allongées, noires; disque assez gonflé, noir; cils dressés, hyalins au pourtour; sporophores à peu près nuls; conidies cylindriques, acuminées, hyalines.

Sur feuilles pourrissantes de graminées. Z. arden. et arg. sablon.

Genre : **CHÆTOSTROMA**, Cda.

Sporodochies disciformes ou pulvinées, noires entourées à la marge de cils ou de soies noires; conidies ovoïdes ou subfusoïdes, rarement subglobuleuses, acrogènes, solitaires; sporophores bacillaires.

Microsp. Sp. $^1/_4$ > à 1.

Chætost. Atrum, Sacc.

Con. **11-13** = **2-2** $^3/_4$ (goutt. 2).

Sporodochies globuleuses-pulvinées, olivacées puis très noires; soies inégales, septées, obtusiuscules; conidies très copieuses, cylindracées-fusoïdes, olivacées, acrogènes sur des sporophores courts, fasciculés.

Sur les chaumes et feuilles de graminées. Z. arden.

Suite au Genre : **PHOMA**

DE LA

Sous-Famille I : PHOMEÆ ou HYALOSPORÆ.

Genre : **SPHÆRONEMA**, Fr.

Microsp. Sp. $^1/_4 > <$ à $^1/_2 >$.

Ostiole en rostre.

Sphæron. Fasciculatum, Mont.

Périthèces en forme de bouteille, à bases connées, à sommets divergents noirs; globule livide, fugace.

Sur tronc de bouleau. Z. arden.

Sphæron. Cerasi, Lasch.

Périthèces courtement cylindriques, noirs; globule olive-sombre; spores oblongues.

Sur rameaux de *Prunus cerasus*. Z. arden.

Sphæron.?? Acicula, Sacc., Bom. et Rouss.

12-15 = **4-5** (goutt.).

Périthèces faux, rassemblés, superficiels, circulaires, tronqués au sommet, noirs, placés à la superficie du bois blanchâtre-pruineux; basides de 18-20 = 8-12 terminées en une vésicule en goutte; spores suballantoïdes, plus aiguës du dessous.

Sur le bois pourri de *Carpinus betulus*. Z. arg. sablon.

Genre : **PHYLLOSTICTA.**

Texture lâche, celluleuse; périthèces perforés, taches à la base.

** Plantes ligneuses dicotylédonées.

Microsp. Sp. $^1/_4 >$ à $^1/_2 >$.

Phyll. Platanoïdis, Sacc.

2-1 = $^1/_2$-**1**.

Périthèces hypophylles, densément rassemblés, couverts, très petits, à texture parenchymateuse; ostioles manifestes; taches à peine marquées; spores bactériformes, arrondies, resserrées au milieu.

Sur feuilles d'*Acer platanoïdes*. Z. arg. sablon. et arden.

Phyll. Aucubæ, (Math.) Sacc.

2 $^1/_2$**-3** = $^3/_4$**-1**.

Phyll. Æsculicola, Sacc.

4 = $^3/_4$.

Périthèces épiphylles, épars, punctiformes; taches irrégulières, blanches, arides, à rebord sombre-brun; spores oblongues.

Sur feuilles d'*Æsculus hippocastanus*. Z. arden.

Phyll. Maculiformis, Sacc.

Spermogonie de *Sphærella Maculiformis*.

4 = **1**.

Périthèces hypophylles, rassemblés en petits groupes, se déprimant, perforés, formant des taches; spores cylindracées, courbées.

Sur feuilles languissantes de *Castanea vesca*. Z. arden.

Phyll. Hederæ, Sacc.

4 = **1**.

Périthèces épiphylles, lenticulaires, perforés, densément et largement rassemblés; spores oblongues.

Sur feuilles d'*Hedera helix*. Z. arden.

Phyll. Pirina, Sacc.

4-5 = **2-2** $^1/_2$.

Périthèces épiphylles, punctiformes, lenticulaires, perforés; texture celluleuse, ferrugineuse; taches arides, blanches; spores ovoïdes.

Sur feuilles de *Pirus communis*. Z. arden.

Phyll. Betulina, Sacc.

Spermogonie de *Sphærella Maculiformis*, F. Betulæ.

4-6 = **1-1** $^1/_4$.

Périthèces épiphylles, souvent rassemblés en taches, innés, proéminents, lenticulaires; spores botuliformes, courbées.

Sur feuilles de *Betula alba*.

Phyll. Symphoriella, Sacc.

4-6 = 3.

Périthèces épars, lenticulaires, perforés; taches vagues, devenant sombres; spores ellipsoïdes, d'un olive sombre.

Sur feuilles de *Symphoricarpus*. Z. arg. sablon.

Phyll. Arbuti, (Desm.) Sacc.

Cheilaria Arbuti, Desm.

5 μ. long. (goutt. 2).

Phyll. Quercus-Ilicis, (Matth.) Sacc.

5 = 4.

Périthèces rassemblés, punctiformes, lenticulaires, couverts; taches arides, blanches, limitées par une ligne noir rougeâtre; spores ellipsoïdes-oblongues, jaunâtres.

Sur feuilles de *Quercus ilex*. Z. arg sablon.

Phyll. Fallax, Sacc.

5-6 = 3-3 $^1/_4$.

Périthèces épars sur des petites taches blanches, épiphylles, lenticulaires, perforés; spores oblongues-ellipsoïdes, *verdâtres*.

Sur feuilles d'*Acer pseudoplatanus*. Z. arden.

Phyll. Liriodendri, Thüm.

5-6 = 3.

Périthèces épiphylles, rassemblés, demi-immergés; taches petites, grises, orbiculaires; spores ellipsoïdes, arrondies.

Sur feuilles de *Liriodendrum tulipifera*. Partout, indiqué zone arg. sablon.

Phyll. Rhamni, West.

5-6 = 3-3 $^1/_2$.

Phyll. Sambuci, Desm.

5-7 μ. long. (goutt. 2).

Phyll. Bignoniæ, West.

5-7 = 2 $^1/_2$**-3** $^1/_2$ (goutt. 2).

Phyll. Rhamnicola, Desm.

6 μ. long.

Phyll. Hedericola, Dur. et Mont.

6 = **2** 1/2 (goutt. 2).

Périthèces punctiformes, proéminents, perforés, épiphylles; taches blanchâtres, arides, largement marginées de brun-sombre; spores oblongues.

Sur feuilles de *Hedera helix*. Z. arden.

Phyll. Thallina, Sacc., Bom. et Rouss.

6 = **3**.

Périthèces nombreux, couverts, très petits; taches blanches, luisantes, bordées d'une zone pourprée; spores elliptiques.

Sur rameaux de *Cornus sanguinea*. Z. arg. sablon.

Phyll. Cytisi, Desm.

6 = **3-4**.

Phyll. Osteospora, Sacc.

6-7 = **1**.

Périthèces rassemblés par places, couverts, perforés; taches roussâtres; spores bacillaires, épaissies aux extrémités.

Sur feuilles de *Rhammus catharticus*. Z. arg. sablon.

Phyll. Symphoricarpi, West.

6-7 = **2** 1/2.

Phyll. Ligustri, Sacc.

Spermogonie de *Sphærella Ligustri*, Desm.

6-7 = **2** 1/2-**3** (goutt. 2).

Périthèces épiphylles, lenticulaires, perforés; taches arides, pâles, limitées de sombre brun; spores ovoïdes.

Sur feuilles de *Ligustrum vulgare*.

Phyll. Populorum, Sacc.

6-7 = **3** (goutt. 2).

Périthèces épiphylles, rassemblés, couverts, lenticulaires, largement ouverts, de texture celluleuse et subochracée; spores oblongues souvent courbées.

Sur feuilles de *Populus balsamifera*. Z. arden.

Phyll. Juglandis, (DC.) Sacc.

6-7 = 3-4 (goutt. 2).

Périthèces épiphylles, épars, lenticulaires, perforés; taches vagues, arides, blanchâtres, limitées sombre-brun; spores ovoïdes-oblongues.

Sur feuilles de *Juglans regia*. Z. arg. sablon.

Phyll. Weigeliæ, Sacc.

6-8 = 3 (goutt. 2).

Périthèces épars, lenticulaires, perforés; texture parenchymateuse, noire; taches blanches, arides; spores oblongues-ellipsoïdes, inégales.

Sur feuilles de *Weigelia rosea*. Z. arg. sablon.

Phyll. Coryli, West.

7-8 = 2-3 $^1/_2$.

Phyll. Cornicola, (DC.) Rabh.

Spermogonie de *Laestadia Systema-Solare*, Sacc.

7-9 = 3-4 (goutt. 2).

Périthèces lenticulaires, épiphylles; taches noir-sanguin, pâlissant au centre; spores oblongues-ellipsoïdes, aiguës.

Sur feuilles de *Cornus sanguinea*. Z. arg. sablon.

Phyll. Quercus, Sacc.

7-9 = 2 $^1/_2$**-4** (goutt. 1-2).

Périthèces lenticulaires, largement ouverts, d'un olive fuligineux ; taches blanchâtres, stériles; spores ellipsoïdes.

Sur feuilles de *Quercus robur*. Z. arg. sablon.

Phyll. Acericola, C. et E.

8 = 5 (goutt. 2).

Périthèces épiphylles, punctiformes, disséminés; taches pâles, limitées de pourpre; spores ovées.

Sur feuilles d'*Acer*. Z. arden.

Phyll. Syringæ, West.

8 = 3 (goutt. 2).

Phyll. Lauro-Cerasi, (Math.) Sacc.

8-10 = 3-4 (goutt. 2).

Périthèces punctiformes, proéminents, souvent disposés concentriquement, d'un olive brun foncé; taches blanchâtres; spores oblongues-cylindracées, arrondies aux extrémités.

Sur feuilles déjetées de *Prunus lauro-cerasus* Z. arg. sablon.

Phyll. Westendorpii, Thüm.

Phyll. Berberidis, West.

9-11 = 5-5 $^{1}/_{2}$ (goutt. 2-3).

Phyll. Lauri, West.

10 = 3 (goutt. 2).

Phyll. Ulmi, West.

10 = 5 (goutt. 2).

Phyll. Sorbi, West.

10 = 5 (goutt. 2).

Phyll. Corni, West.

10 = 5.

Phyll. Vulgaris, Desm.

F. Loniceræ, West.

10-14 = 2 $^{1}/_{2}$**-3** $^{1}/_{2}$ (goutt. 2).

Phyll. Paviæ, Desm.

11-12 μ. long. (goutt. 2).

Macrosp. Sp. $^{1}/_{4}$ > < à $^{1}/_{2}$ > < à $^{3}/_{4}$ <.

Phyll. Ribicola, (Fr.) Sacc.

15-17 μ. long.

Périthèces nombreux, couverts de poils très longs, caducs(?); taches larges, couleur de lait; spores oblongues, courbées.

Sur feuilles de *Ribis.* Z. arden.

Phyll. Nerii, West.

15-18 = 5-6 (goutt. 2).

Phyll. Rhoïs, West.

60 = 3-5 (goutt. 2).

** PLANTES HERBACÉES DICOTYLÉDONÉES.

Microsp. Sp. $^1/_4$ > à Sp. $^1/_2$ <.

Phyll. Libertiana, Sacc. et March.

Coniosporium Violæ, Lib. *Ascospora Violæ*, nobis.

3-4 = 2-2 $^1/_2$.

Phyll. Saponariæ, Sacc.

4 = $^1/_2$.

Périthèces épiphylles, très noirs, rassemblés densément en taches, punctiformes, globuleux, proéminents, perforés; taches nulles ou à peine marquées; spores cylindracées, droites.

Sur feuilles de *Saponaria officinalis*. Z. arg. sablon.

Phyll. Ulmariæ, Thüm.

3 $^1/_2$-5 = 2-2 $^1/_2$.

Périthèces épiphylles, épars, hémisphériques, à la fin exsertes; taches petites, irrégulières, blanches, arides, largement zonées de sombre brun; spores cylindriques, tronquées-arrondies.

Sur feuilles vivantes de *Spiræa ulmaria*. Z. arg. sablon.

Phyll. Helianthemi, Roum.

3 $^1/_2$ = 1.

Périthèces punctiformes; taches blanchâtres, petites, marginées, de couleur vineuse; spores oblongues.

Sur feuilles d'*Helianthemum vulgare*. Z. calc.

Phyll. Angelicæ, Sacc.

4-5 = 1.

Périthèces lenticulaires, perforés, à texture lâche, rassemblés en taches; spores oblongues.

Sur feuilles d'*Angelica silvestris*. Z. arden.

Phyll. Leucanthemi, Speg.

4-5 = 1 $^1/_2$.

Périthèces globuleux, proéminents, membraneux; texture parenchymateuse, fuligineuse; taches circulaires, blanc-gris; spores elliptiques, remplies de granulations.

Sur feuilles de *Chrysanthemum leucanthemum*. Z. arg. sablon.

Phyll. Asclepiadearum, West.

4 $^1/_2$**-6 = 2** $^1/_2$**-3.**

Phyll. Plantaginis, (Math.) Sacc.

5 = 2.

Périthèces épars, devenant lenticulaires, perforés, punctiformes; taches blanchâtres, arides; spores oblongues, ovoïdes.

Sur feuilles de *Plantago major*. Z. arg. sablon.

Phyll. Fragaricola, Desm.

5 = 1 $^1/_2$**-2.**

Périthèces épars à distance, punctiformes; taches blanchâtres, arides, marginées de rouge sanguin; spores oblongues-ovoïdes.

Sur face supérieure de feuilles de *Fragaria vesca*. Z. arg. sablon.

Phyll. Lutetiana, Sacc.

5 = 4.

Périthèces épars, punctiformes, perforés; taches d'un ocre pâle, arides, limitées d'une bande étroite couleur de chataigne; spores ovoïdes.

Sur feuilles de *Circœa lutetiana*. Z. calc.

Phyll. Cirsii, Desm.

5-7 = 2 $^1/_2$**-3** (goutt. 2).

Phyll. Lathyrina, Sacc.

Phyll. Lathyri, Math.?

5-7 = 2-3 $^1/_2$.

Périthèces membraneux, proéminents, perforés, d'un fuligineux pâle; taches difformes, d'un pâle ochracé, marginées d'un rebord ferrugineux; spores oblongues-elliptiques.

Sur feuilles vivantes de *Lathyrus silvestris*. Z. arg. sablon.

Phyll. Betæ, Oud.

6 = 4-5 (goutt. 2).

Périthèces très petits, ouverts par pore, épars sur des taches décolorées; noyaux gélatineux; spores ovoïdes.

Sur tiges de *Beta vulgaris* cultivée. Z. arden. Hiver.

Phyll. Digitatis, Bell.

7 = 2 $^{1}/_{2}$ (goutt. 2).

Phyll. Helleborella, Sacc.

Spermogonie de *Sphærella Hermione,* Sacc.

7 = 3 (goutt. 2).

Périthèces ordinairement épiphylles, lenticulaires, largement béants; taches blanches, luisantes, arides, marginées de noir; spores oblongues-ovoïdes.

Sur feuilles d'*Helleborus niger.* Z. arg. sablon.

Phyll. Ajugæ, (Belly.) Sacc.

7-8 = 3 (goutt. 2).

Périthèces épars, globuleux, proéminents, perforés; texture parenchymateuse, fuligineuse; taches d'un ochracé dilué, stériles, entourées de couleur d'un sombre brun; spores ovées-ellipsoïdes.

Sur feuilles d'*Ajuga reptans.* Z. calc.

Phyll. Violæ, Desm.

10 μ. long.

Phyll. Erysimi, West.

10 μ. long. (goutt. 2).

Phyll. Cynaræ, West.

10 = 5.

Phyll. Thalictri, West.

10 = 5 (goutt. 2).

Phyll. Fabæ, West.

10 = 5 (goutt. 2).

Phyll. Ebuli, Sacc.

Ascochyta Ebuli, Fckl.

Périthèces rassemblés, formant des taches, pâlissant, coniques, sombre-brun, blancs au sommet, spores cylindriques, simples, petites.

Sur feuilles languissantes de *Sambucus ebulus.* Z. arden.

*** Plantes monocotylédonées.

Microsp. Sp. $^1/_2 >$.

Phyll. Renouana, Sacc.

4 = 2.

Périthèces lenticulaires-punctiformes; taches allongées, couleur cannelle, à centre pâlissant; spores ovées-ellipsoïdes.

Sur feuilles de *Typha.* Z. arden.

Phyll. Ruscicola, Dur. et Mont.

7-8 = 3 $^1/_2$.

Phyll. Alismatis, Sacc.

8 = 3 $^1/_2$.

Périthèces rassemblés, sublenticulaires; taches blanchâtres, stériles, bordées de couleur fuligineuse; spores oblongues-ellipsoïdes.

Sur feuilles d'*Alisma plantago.* Z. arg. sablon.

Macrosp Sp. $^1/_2 <$ à Sp. $^1/_4 >$.

Phyll. Cruenta, (Fr.) Ck.

14-16 = 5 $^1/_2$**-6** $^1/_2$.

Phyll. Donckelaeri, West.

15 = 3 (2-3 goutt.).

Périthèces demi-innés, nombreux, perforés, subconcentriques; taches hypophylles, subcirculaires, blanc-cendré, à marge subélevée et d'un sombre roux; spores ovées-cylindracées.

Sur feuilles d'*Oncidium.* Z. arg. sablon.

Phyll. Draconis, Berk.

Sur feuilles de *Dracœna dracon*. Z. arg. sablon.

Genre : **ASTEROMA,** DC.

Fibrilles réticulées, souvent rayonnantes à la base des périthèces.

Aster. Bupleuri, Sacc.

Aster. Roumeguerei, J. Kunze.

Périthèces lenticulaires, très serrés, réunis par hyphes fuligineuses; taches larges, couleur de poix.

Sur feuilles de *Bupleurum falcatum*. Z. arden.

Aster. Vernicosum, (DC.) Fckl.

Périthèces subconiques-proéminents, au centre de taches noires, luisantes, radiées à la marge.

Sur tiges de *Spirœa ulmaria*. Z. arg. sablon.

Aster. Castaneæ, Desm.

Périthèces nombreux, épars, noirs, très petits; taches brunes; fibrilles à peine visibles, rameuses et rayonnantes du centre.

Sur feuilles de châtaigner. Z. arg. sablon.

Aster. Obscurum, Desm.

Périthèces à peine visibles; taches noires; fibrilles confuses, noir-brunâtre, rameuses, rayonnantes.

Sur feuilles de *Cornus sanguinea*. Z. arden.

Aster. Vagans, Desm.

Périthèces épars, demi-émergents, globuleux, noirs; taches brunes, sèches couleur cendrée; fibrilles articulées, rameuses, irrégulièrement rayonnantes, bien séparées, une fois et demie plus longues que larges.

Forma : *Fraxini, Tiliæ, Carpini, Opuli, Frangulæ*. Z. arden.

Aster. Epilobii, Fr.

Périthèces épars, proéminents; taches uniformes, couleur de poix; pas de fibrilles.

Sur tige d'*Epilobium angustifolium*. Z. arg. sablon.

Aster. Dendriticum, Desm.

Périthèces à peine visibles, par séries; taches noires, arrondies; fibrilles articulées, brunes, très rameuses, rayonnantes.

Sur feuilles de *Viburnum opulum*. Z. arg. sablon.

Aster. Populorum, Fckl. (*Asteroma Populi*, Desm.)

Périthèces rassemblés, hémisphériques, astomes, très noirs; fibrilles excessivement minces, libres, radiantes, olivacées.

Sur feuilles de *Populus tremula*. Z. arden.

Aster. Orobi, Fckl.

Périthèces épars, en grand nombre; fibrilles sombre-brun, très délicates.

Sur feuilles subvivantes de l'*Orobus tuberosus*. Z. calc.

Pas de périthèce.

Aster. Ulmi, Klotzsch.

Taches brunes; fibrilles excessivement minces, bien rameuses, flexueuses, subdichotomes, rayonnantes.

Sur feuilles de l'orme. Z. calc.

Spores disposées en chainettes.

Genre : **SIROCOCCUS**, Preuss.

Périthèces généralement subastomes, érumpents ou superficiels, subcharbonneux; spores subglobuleuses, réunies en chaînettes, et provenant de basides filiformes.

Siroc. Conorum, Sacc. et Roum.

2-2 $1/_2$ μ. (goutt. 1); basides $20 = 2$.

Périthèces rassemblés, subsuperficiels, lenticulaires, astomes, noirs; texture parenchymateuse, fuligineuse; spores globuleuses.

Sur cônes de pin. Z. arden. (Libert.)

Tableau montrant l'Unité de mode de reproduction dans le règne végétal et dans le règne animal.

COTYLÉDONÉS.	*Vie végétative complète avec organes sexuels et graines ou embryons.*	VERTÉBRÉS.
ACOTYLÉDONÉS-MYCELIOPHORI.		ARTICULÉS.
Blanc de champignon. . .	*Vie végétative incomplète avec organes sexuels.*	Larve et chrysalide.
Champignon parfait : BASIDIOMYCETES.	*Vie végétative complète avec spores ou œufs.*	Animal parfait.
ACOTYLÉDONÉS-MYCELIOPHORI.		MOLLUSCO-RADIAIRES.
	Vie végétative incomplète; et surtout parasitisme.	
Mycelium; appareil conidien, spermogonien, etc.	I *Reproduction par gemme.*	Polypes, scolex, etc.
Mycelium conidien, spermogonien, etc.	II *Reproduction par sexes.*	Méduse-acalephe, Proglottis, etc.
Champignon parfait : THÉCASPORÉS, PHYCOMYCETES, HYPODERMEI.	*Vie végétative complète avec spores ou œufs.*	Animal parfait : Méduse, Tænia.
PLASMODIOPHORI.	*Vie végétative incomplète.*	INFUSOIRES. SCHIZOMYCETES.
Plasmode	I *Souvent reproduction par bipartition.*	
Entre Zoospores, Amibes et Monères.	II *Reproduction par sexes.*	
MYXOMYCETEÆ	*Vie végétative complète avec spores ou œufs.*	

TABLE DES MATIÈRES.

A

D

E

F

G

H

N

O

P

R

T

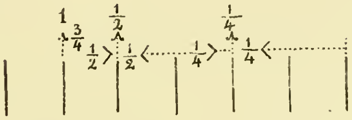
V

ERRATA.

Page 151, au lieu de **Serbi**, Lib., il faut **Sorbi**, Lib.

Abréviations

Mesures de la largeur des spores.



1 = Spores à largeur et longueur égales.

$\frac{3}{4}$ = Spores ayant plus ou moins les $\frac{3}{4}$ de la longueur.

$\frac{1}{2}$ = Spores ayant la $\frac{1}{2}$ de la longueur.

$\frac{1}{2}>$ = Spores ayant plus de la $\frac{1}{2}$ de la longueur.

$\frac{1}{2}<$ = Spores ayant moins de la $\frac{1}{2}$ de la longueur.

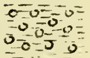
$\frac{1}{4}$ = Spores ayant le $\frac{1}{4}$ de la longueur.

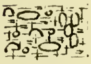
$\frac{1}{4}>$ = Spores ayant plus du $\frac{1}{4}$ de la longueur.

$\frac{1}{4}<$ = Spores ayant moins du $\frac{1}{4}$ de la longueur.

 = Sur fruits.

 = Sur champignons.

 = Sur fumier.

 = Sur mélange de divers corps en putréfaction.

 = Sur bois, sur tiges herbacées ou charnues, et sur feuilles.

 = Sur papier.

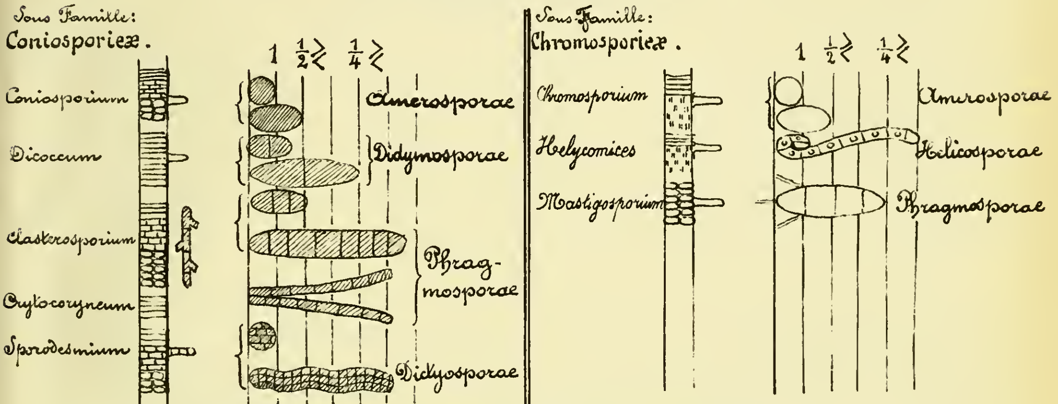
HYPHOMYCETES.

I *Famille*. — Toruleæ. —

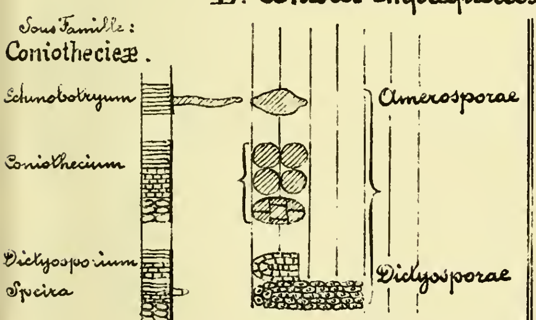
Hyphes à peine distinctes des spores, très-courtes; aspect de taches pulvérulentes, farineuses ou veloutées.

Phæo-Toruleæ. **Hyalo-Toruleæ.**

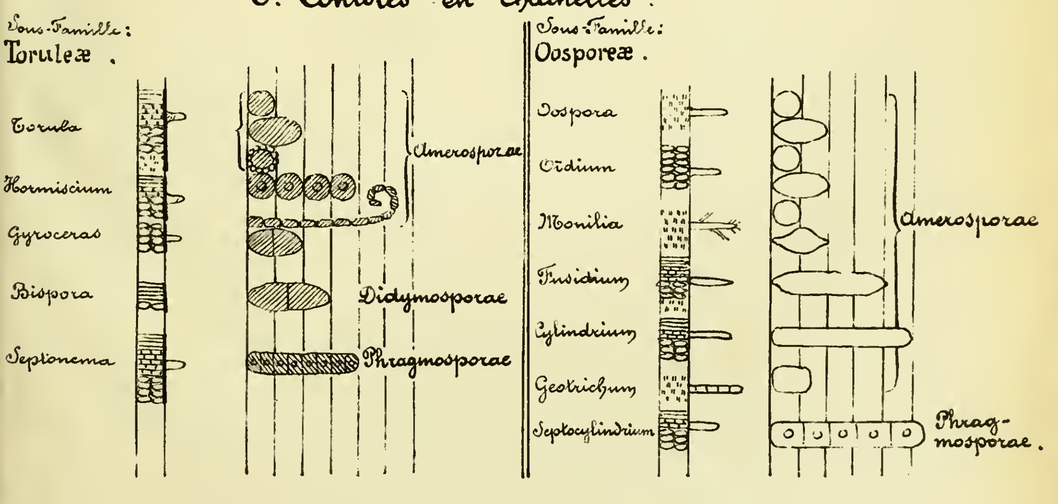
A. Conidies solitaires.



B. Conidies empaquetées de formes diverses.



C. Conidies en chainettes.



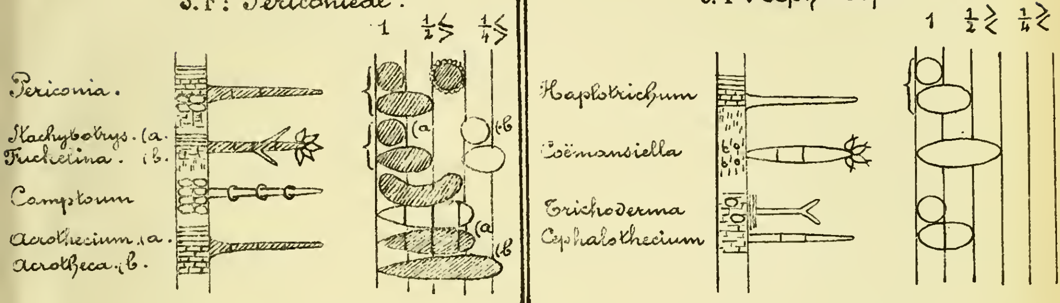
IIe Famille

Hyphomyceteæ.

Dematicæ. — Mucedineæ.

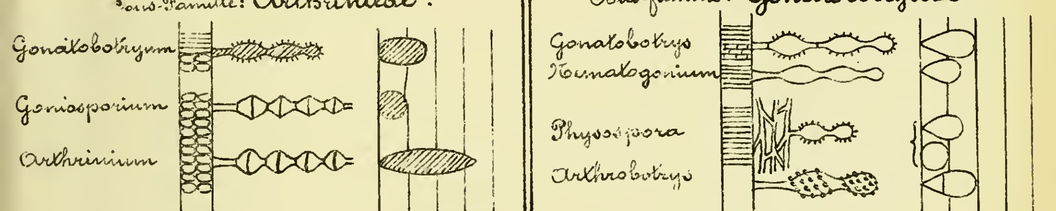
A Conidies agglomérées en tête, au sommet de hyphes simples ou à peine légèrement divisées.

S.-F.: Periconieae. — S.-F.: Cephalosporieae.



B. Conidies agglomérées sur articles de hyphes épaissis.

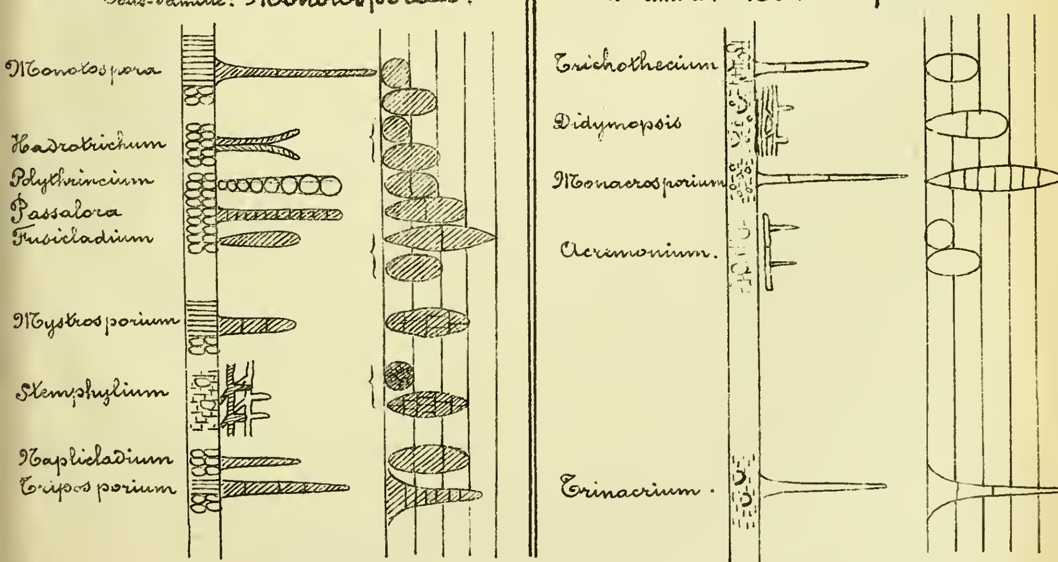
Sous-Famille: Arthrinieae. — Sous-Famille: Gonatobotryteae.



C. Conidies solitaires, ou agglomérées latéralement sur rameaux.

Conidies acrogènes, hyphes simples. — Conidies acrogènes, hyphes simples.

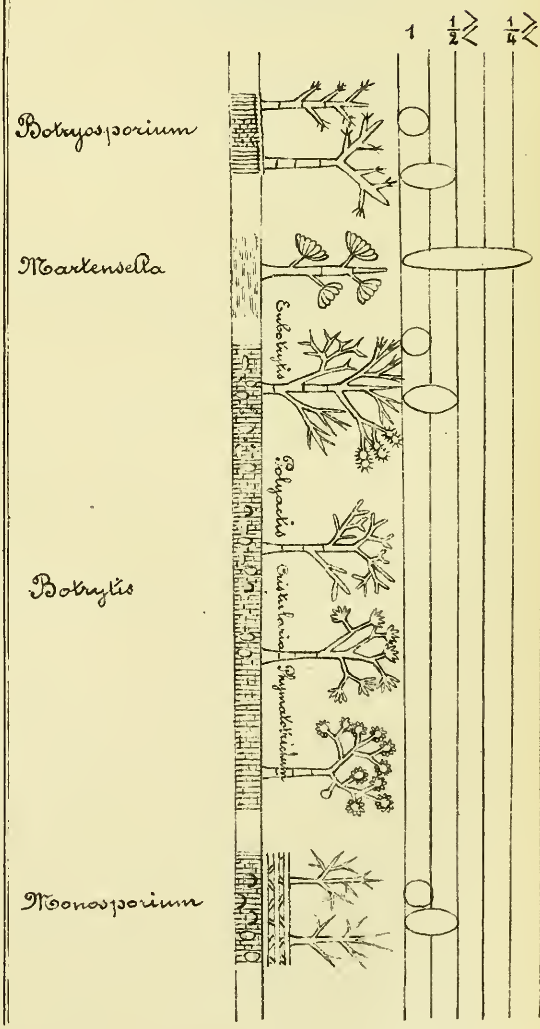
Sous-Famille: Monotosporeae. — Sous-Famille: Monacrosporieae.

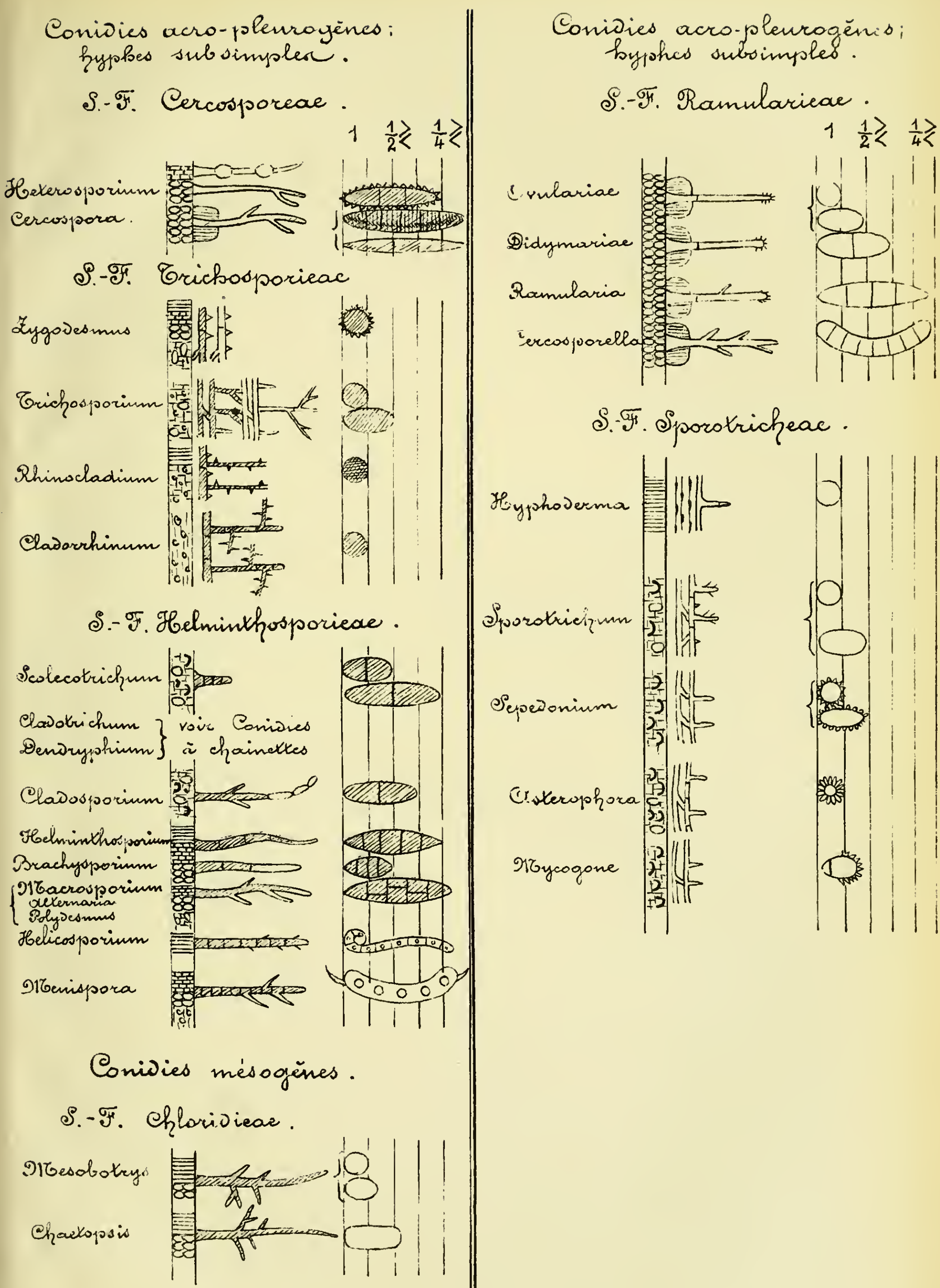


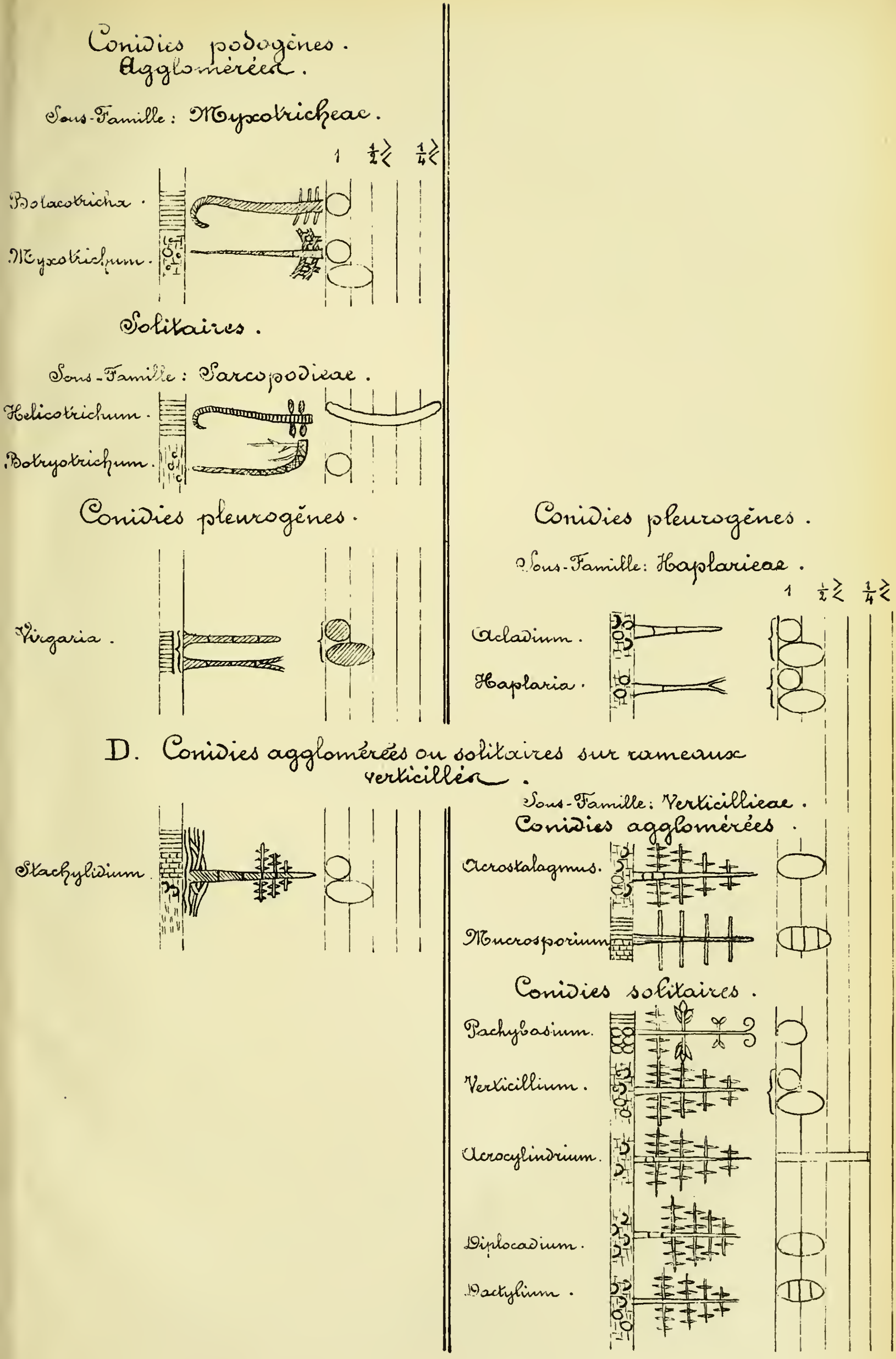
Conidies acro-pleurogènes, hyphes rameuses.

S.-F. Botrytideæ ———.

Demutieæ. | Mucedineæ.



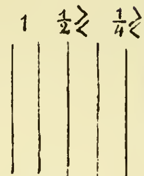

Conidies acro-pleurogènes; hyphes subsimples.
S.-F. Cercosporeae.
1 1/2< 1/4<
Heterosporium
Cercospora.
S.-F. Trichosporieae
Zygodesmus
Trichosporium
Rhinocladium
Cladorrhinum
S.-F. Helminthosporieae.
Scolecotrichum
Cladotrichum
Dendryphium
voir Conidies à chainettes
Cladosporium
Helminthosporium
Brachysporium
Macrosporium
Alternaria
Polydesmus
Helicosporium
Menispora
Conidies mésogènes.
S.-F. Chloridieae.
Mesobotrys
Chaetopsis
Conidies acro-pleurogènes; hyphes subsimples.
S.-F. Ramularieae.
1 1/2< 1/4<
Ovulariae
Didymariae
Ramularia
Cercosporella
S.-F. Sporotricheae.
Hyphoderma
Sporotrichum
Sepedonium
Asterophora
Mycogone


Conidies podogènes.
Agglomérées.
Sous-Famille : Myxotricheae.
1
$\frac{1}{2}$ ><
$\frac{1}{4}$ ><
Bolacotricha.
Myxotrichum.
Solitaires.
Sous-Famille : Sarcopodieae.
Helicotrichum.
Botryotrichum.
Conidies pleurogènes.
Virgaria.
Conidies pleurogènes.
Sous-Famille: Haplarieae.
1
$\frac{1}{2}$ ><
$\frac{1}{4}$ ><
Acladium.
Haplaria.
D. Conidies agglomérées ou solitaires sur rameaux verticillés.
Sous-Famille: Verticillieae.
Conidies agglomérées.
Acrostalagmus.
Stachylidium.
Mucrosporium.
Conidies solitaires.
Pachybasium.
Verticillium.
Acrocylindrium.
Diplocadium.
Dactylium.

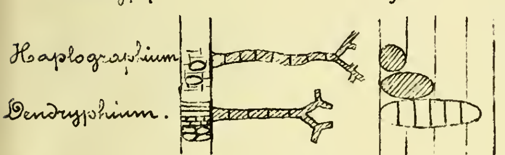
E. Conidies en chainettes.

a). Conidies en tête au sommet des hyphes.

Sous-Famille : **Haplographieae**.

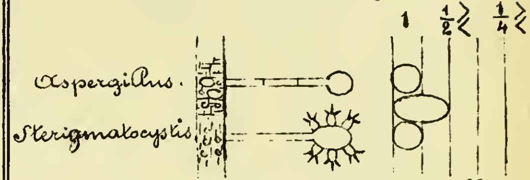


II Hyphes à sommet non renflé.

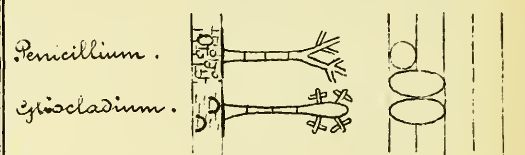


Sous-Famille : **Aspergilleae**.

I. Hyphes à sommet enflé.

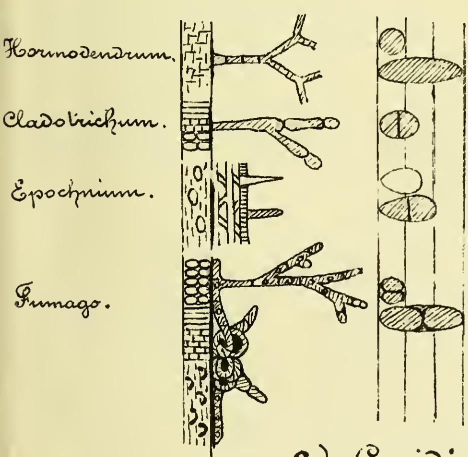


II Hyphes à sommet non renflé.

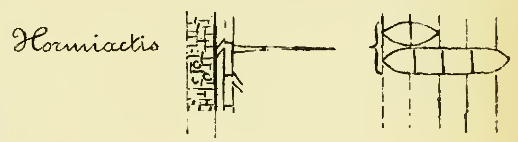


b). Conidies acrogènes.

Sous-Famille : **Cladosporieae**.

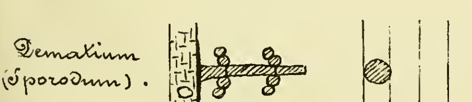


Conidies acro-pleurogènes.



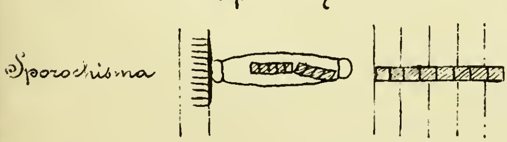
c). Conidies pleurogènes.

Sous-Famille : **Sporodeae**.

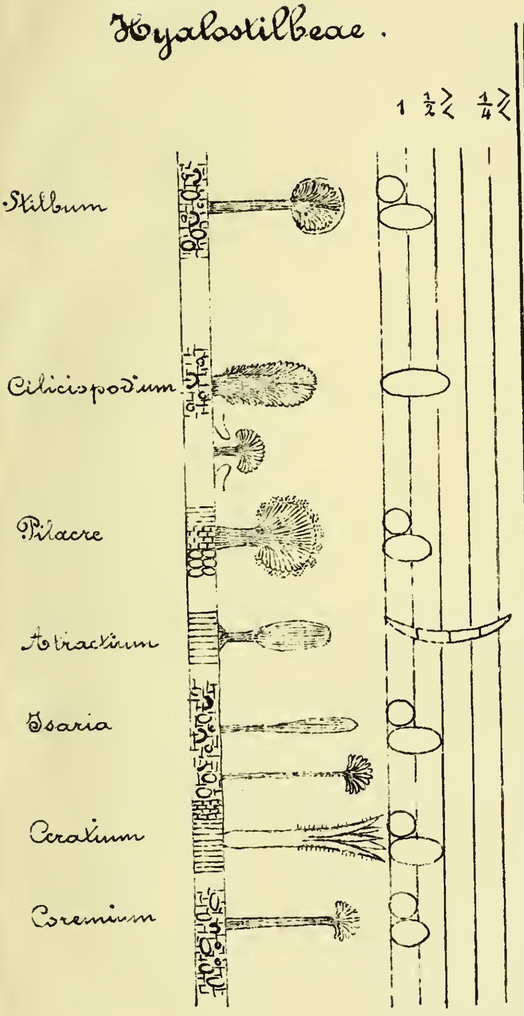


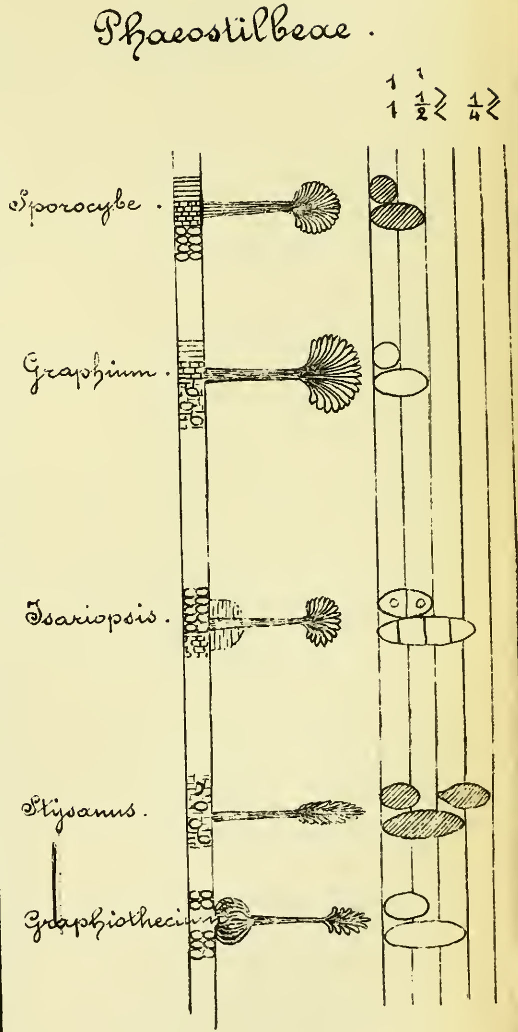
d. Conidies endogènes.

Sous-Famille : **Sporochismeae**.



III *Famille :* Stilbeæ.



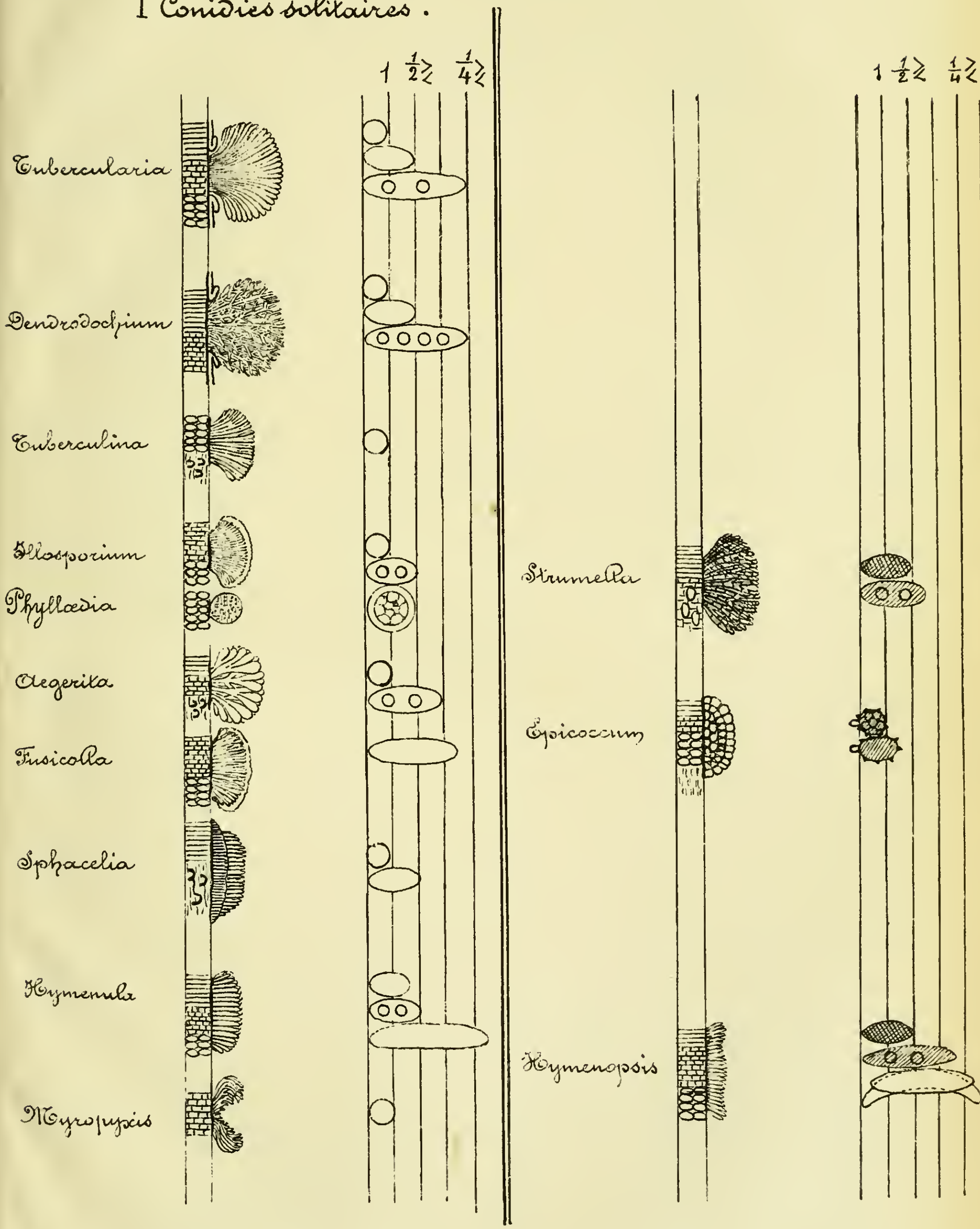


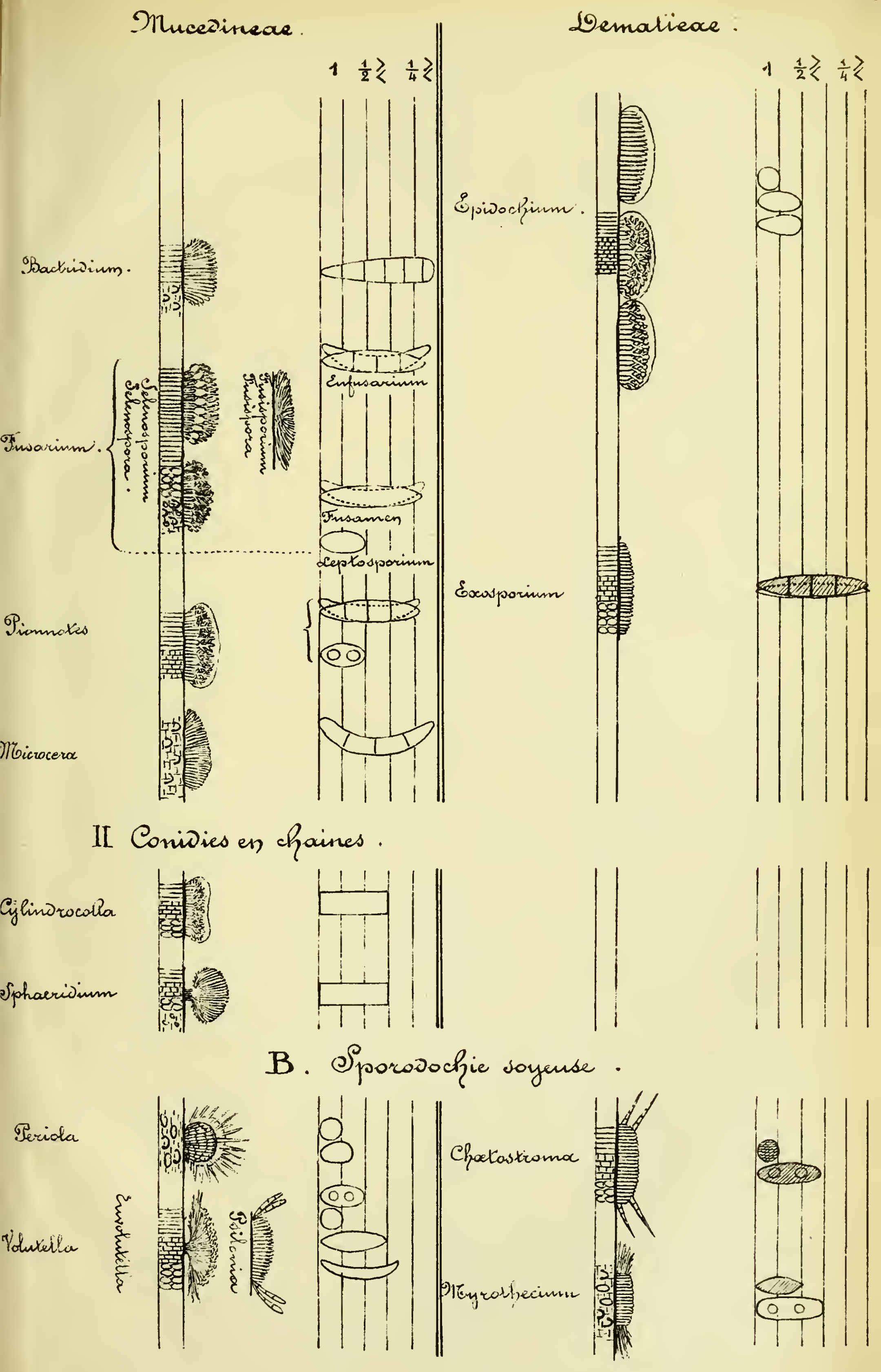
IV. *Famille:* Tubercularieæ.

Mucedineae. Dematieae.

A Sporodochie glabre.

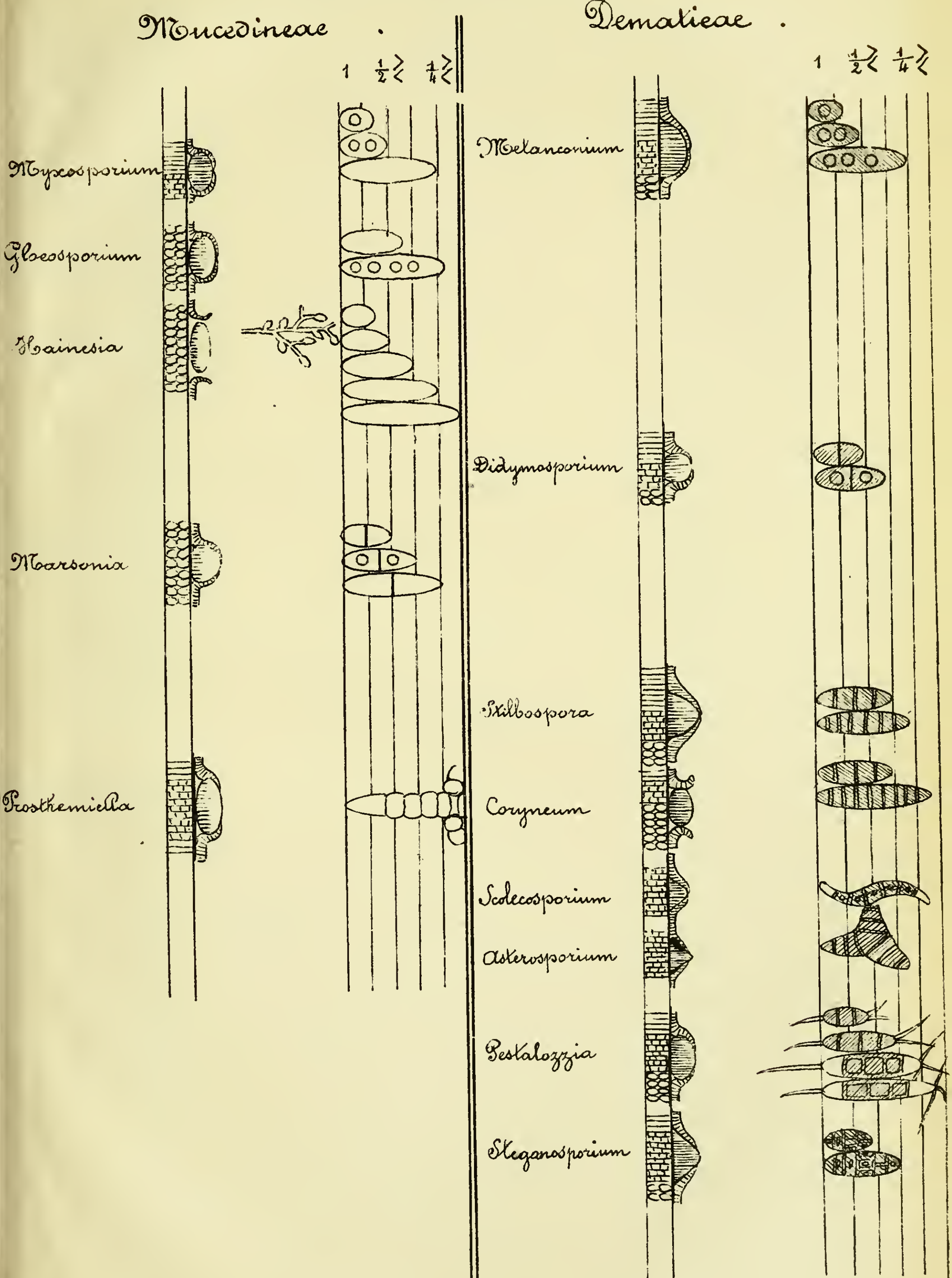
I Conidies solitaires.

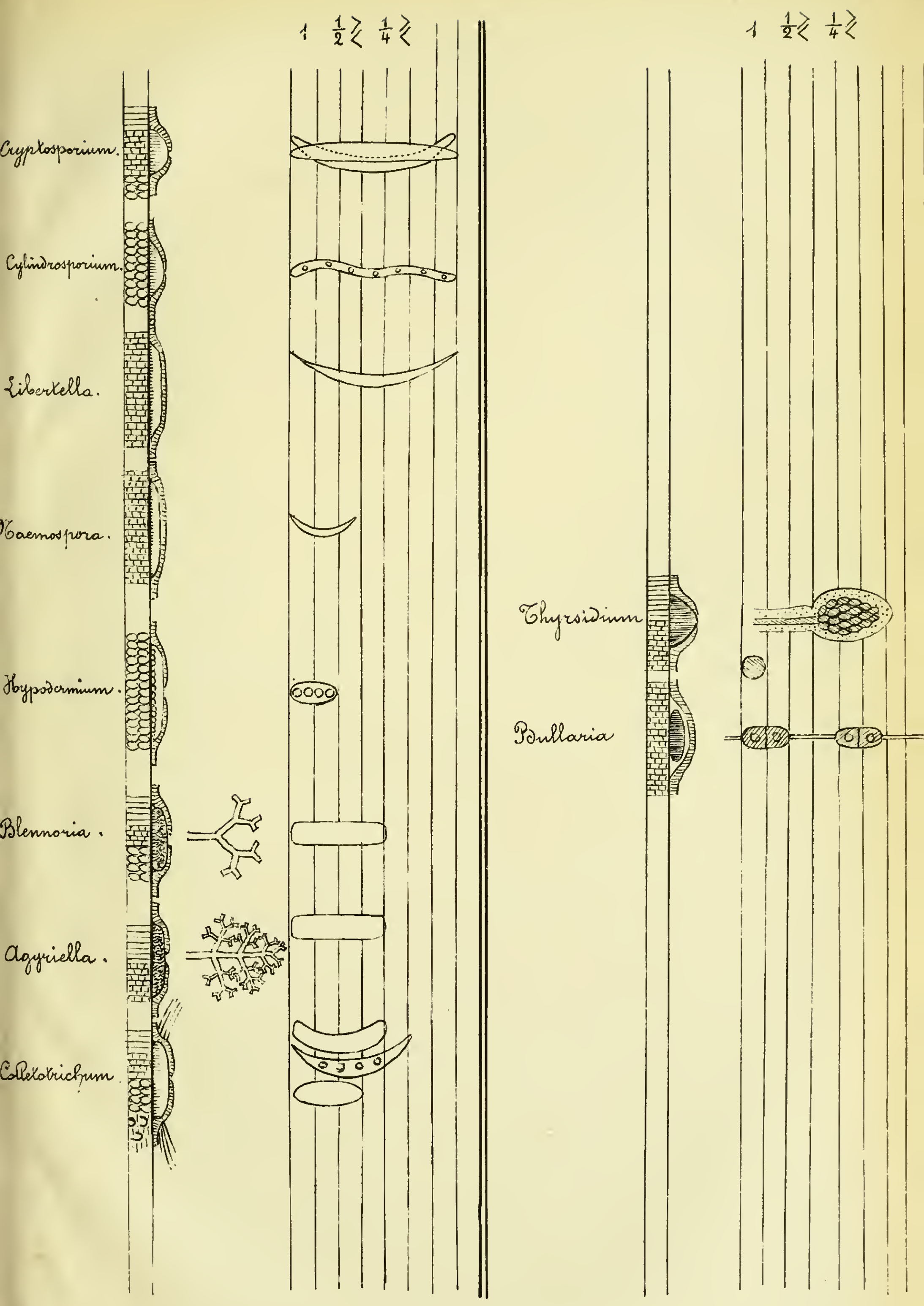




Mucedineae.
Dematieae.
1 ½ ¼
Epidochium.
Bactridium.
Selenosporium
Selenospora.
Fusisporium
Fusispora
Eufusarium
Fusarium.
Fusamen
Leptosporium
Exosporium
Pionnotes
Microcera
II Conidies en chaines.
Cylindrocolla
Sphaeridium
B. Sporodochie soyeuse.
Periola
Chætostroma
Volutella
Psilonia
Myrothecium

V *Famille* : Melanconieæ.



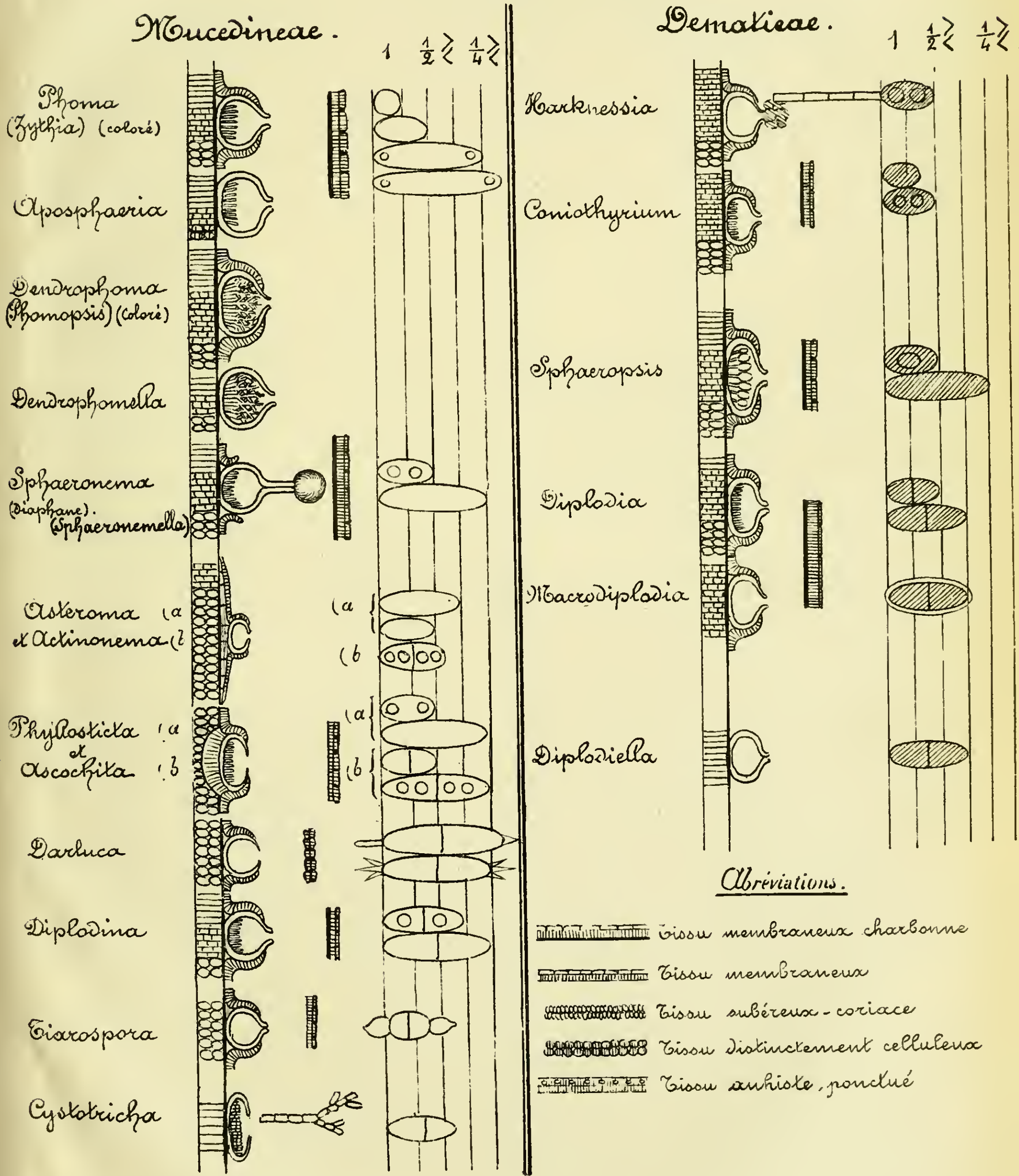


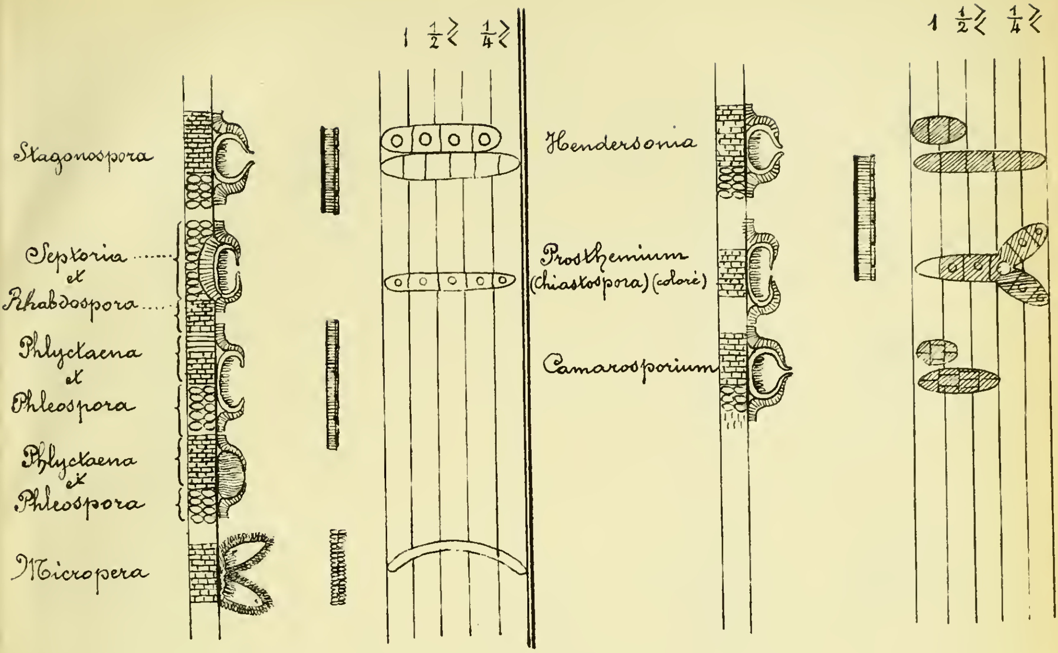
1 ½>< ¼><
1 ½>< ¼><
Cryptosporium.
Cylindrosporium.
Libertella.
Naemospora.
Hypodermium.
Blennoria.
Agyriella.
Colletotrichum.
Thyrsidium
Bullaria

VI.e Famille : A. Sphæropsideæ - Sphæroïdeæ.

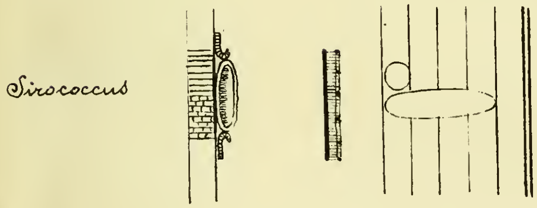
I Périthéces simples-chauves.

a) Conidies solitaires.

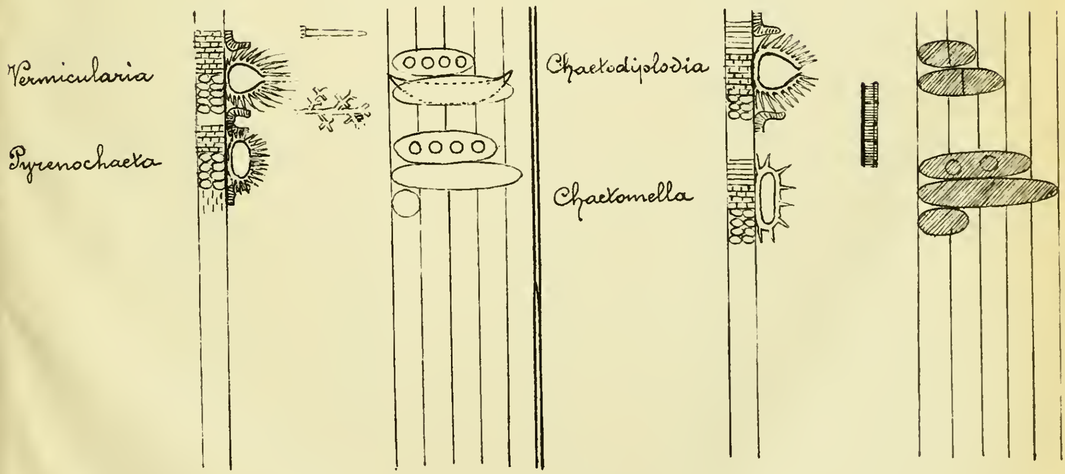




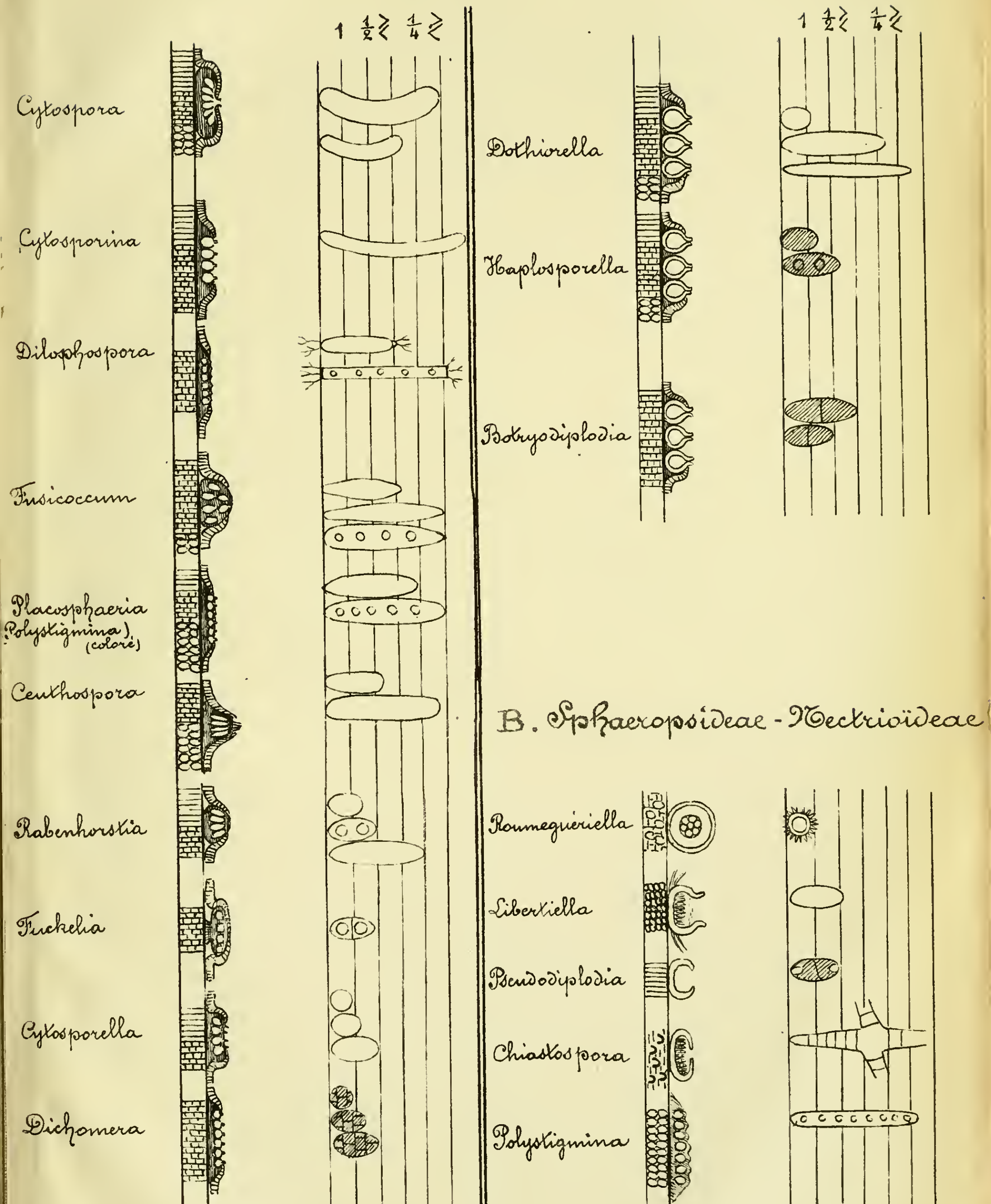
b). Conidies en chainettes.



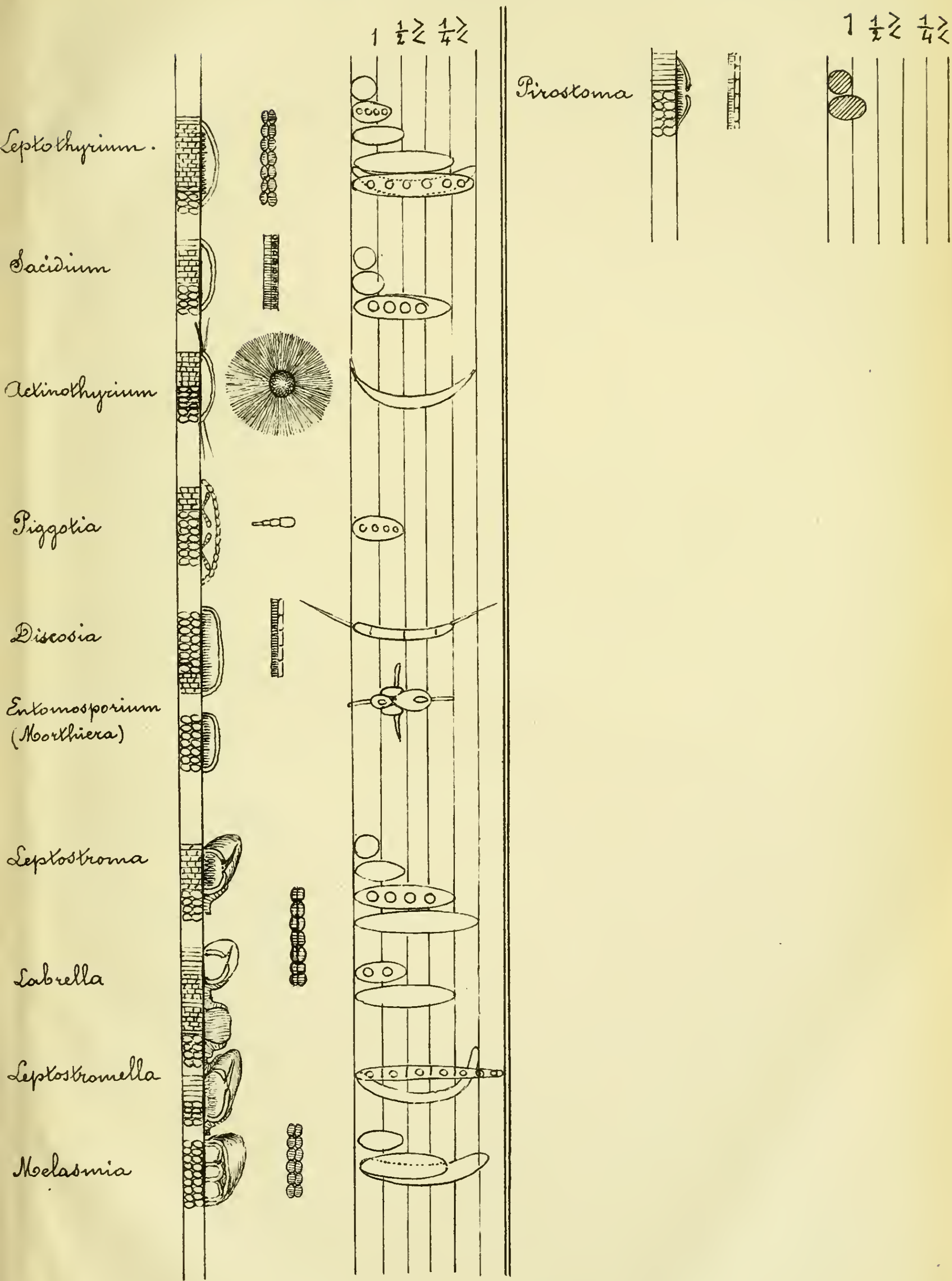
II. Périthécies simples soyeux.



III Périthécies composés.



C. Sphaeropsideae-Leptostromaceae.



D. Sphaeropsideae-Excipulaceae.