チィーのトランサクション中に (1841, 1842, 1844, 1847) 見出すことが出來る。

獨逸では、記號的代數學はマルチン・オームによつて研究され、彼は千八百二十二年に System der Mathematik と云ふ本を書いた。ピーコック及びド・モルガンの觀念は通常の代數學とは異つた代數學を創立し得ると云ふことを認めて居る。此の如き代數學の出現は實際は必ずしも遲々たるものでなかつたが、而かも非ユーグリッド幾何學に於けるが如くに、是等の理論の若干は既に發表せられて居るにも係はらず、一般に人々の受容れるまでに甚だ遲々たるものであつた。是はグラスマンの發見や、ベラヴイチスの發見や、又はピーアルスの發見についても同じ樣に言はれる。但しハミルトンの四元法だけはイギリスで直ちに大に歡迎された。是等の代數學は虛數の幾何學的說明を供給するものである。デカルトやニュートンや、オイレルの時代に、我等は負數、虛數 $\sqrt{-1}$ などを數として承認するやうになつた、併し虛數だけは矢張り代數學上の擬說としか考へられなかつた。然るに、負數に對して幾何學的說明を與へたと同じ樣に虛數にも幾何學的の圖を與へやうとした最初の人は、ダンチッヒの一敎師であつたキュンである。彼は千七百五十年—千七百五十一年に出た一出版物中に $a\sqrt{-1}$ をば a なる直線に直角で且つ其の長さが a に等しい一つの直線で現はし、かくて $\sqrt{-1}$ をば $+1$ と -1 との比例中項として作ることとした。此同じ觀念が其後ゼネヴァのジアン・ロバール・アルガン（千七百六十八年—？）によつて、千八百六年に公けにされた一つの著しき論文によりて、$a+\sqrt{-1}b$ に一つの幾何學的意味を與へる程に一層發展したのであつた。キュンやアルガンの論文は餘り世人の注意を惹かず、かくて愈々虛數に對する最後の反對を打破する任務はガウスの仕事として殘つた。彼は1に對立する一つの獨立の單位坐標として i を採用し、又複素數として $a+ib$ を導いた。複素數と一つの平面上に於ける點との間の關係は、人爲的ではあるが、而かも記號的代數學を更に深く研究するのに有力なる補助となつた。人々の精神は之を助けるに目に視える表現を要するものである。吾等が今日ヴエクトルと稱する觀念は、斯くて數學者間に漸次開發して來た、且つ又空間に於けるヴエクトルの幾何學的加法はハミルトンやグラスマンや其他の學者に依つて殆んど同時代に獨立に發見せられた。

ウイリアム・ロワン・ハミルトン(千八百五年―千八百六十五年)はダブリンで生れ、スコットランド人の子供である。彼が故郷で受けた最初の教育は主として語學であつた。齢十三の頃に彼の年齢に等しい數だけ異なる國語に通じて居たと言はれて居る。其頃に彼は偶然ニュートンの「ユニヴアサル・アリスメチック」の一冊を得て之を讀んだ。同じ書を讀んだ後に彼は引續いて解析幾何學、微分學、ニュートンの「プリンシピヤ」及びラプラースの「メカニック・セレスト」を讀んだ。十八歳の時にラプラースの著述中にある一つの誤を正した論文を公けにした。千八百二十四年にダブリンのトリニチー・カレッヂに入學し、尚學生であつたにも係はらず、一方では天文學の講座を擔任することになつた。彼の早き時代の論文は光學に關係したものであつた。千八百三十二年に、彼は圓錐的屈折を豫言したが、これは數學を用ゐて其の存在すべきことを推論したものであつて、丁度ル・ヴェーリエー及びアダムスに依つてなされた海王星の發見と同じやうなものである。之に續いて「變化する作用に關する原理」"Principle of the Varying Action", 1827の題目に係はるもの及び力學の一般的方法に關する數論文を千八百

三十四年から千八百三十五年の間に公けにした。彼は又五次の方程式の解法、ホドスグラフ、振動的函數、及び微分方程式の數的解法に關する論文を書いた。ハミルトンの主なる發見は彼の四元法であつて、之れは彼の代數學の研究の絕頂點である。彼は千八百三十五年のアイルランド學士院記事中に、代數學的偶力の理論を公けにした。彼は代數學をば「單なる技術でも無ければ又語學でも無ければ、或は又主として量の科學でも無ければ、却つて進行の順序の科學として見る可きもの」であるとなした。時間が彼にとつては此の如き進行給として映じた。隨つて彼の代數學の定義は「純粹時間の科學」と云ふのであつた。互に直角をなす直線の一系の各々の一對の積を何と見る可きかを決定することが、彼の數年の間默想した所であつた。遂に千八百四十三年十月十六日に、彼は夕方彼の妻とダブリンのローヤル・カナルに沿うて散歩をなしつゝあつた際、四元法の發見が彼の頭腦に浮び來つて、卽座に彼はブローガム橋の一つの石へ小刀をもつて其の基本的公式

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1.$$

を刻した。アイルランドの學士院の總會で、其の後一ヶ月經つてから、彼は四元法に關する最初の報告をなした。此の發見の徑路は翌年フィロソフィカル・マガジンにも公けにされた。ハミルトンは四元法を開展して驚く可き結果を收め得た。彼の Lectures on Quaternions はダブリンで講演したものであつて、千八百五十二年に印刷された。又彼の Elements of Quaternions は千八百六十六年に現はれた。四元法は發見された當時からしてイギリスでは大に稱讃を受けた、併し大陸では餘り注意されなかつた。テートの四元法に關する初等教科書は英國に於いて此知識を弘めるのに有力なものであつた。ケイリー、クリフォード及びテートはそれ〴〵に獨創的貢献をなして、此學問を進歩させた。併し近年に至つては其進歩が甚だ少く、單に四元的方程式がシルヴェスターによりて解かれた位で物理學に對する四元法の應用は豫言された程に擴張されなかつた。ヒューエル及びレーザンがフランスで四元法の記號を換へたのが進歩を害する惡しき方向であつたとイギリスの學者に言はれたけれども、併し進歩を缺いた主なる原因は恐らく尙一層深き根據を有するものであらう。蓋しヴェクトル解析法のある系統に於いて四元法的の積を用ゐることが必要で、而かも根本的のものであるかと云ふことについては甚だ大なる疑がある。物理學者はヴェクトルの平方を負數と取ることは自然を缺くこと甚しいものであると云ふ非難をなして居る。で、一層物理學者の要求に妥當に應せんとして、エール大學のギッブス及びテキサス大學のマックファルレンなどが新たな記號を用ゐたヴェクトルの代數學を暗示した。是等の各々の人は、二つのヴェクトルの積に對してそれ〴〵別な定義を與へて居るが、併し何れもヴェクトルの平方が正の符號のものであるやうにしたのは兩人一致して居る。尙はヴェクトル解析法の第三の系統がオリヴァー・ヘーヴイサイドが彼の電氣學の研究に於いて用ゐたものである。

ヘルマン・グラスマン（千八百九年―千八百七十七年）はステッチンで生れ、彼の父が數學及び物理學の教師であつた郷里の中學校で勉強し、其後三年間ベルリン大學で神學を學んだ。千八百三十四年に彼はベルリンの一工業學校の數學の先生として、スタイネルの後繼者となつた。併し千八百三十六年に其郷里の學校の數學、科學及び宗教の教師となる爲めに、ステッチンの故郷に歸つた。其時ま

で彼の數學の智識は彼が父から習つたものだけであつて餘り大したものでなかつた。(彼の父は、"Raumlehre"、"Grössenlehre" と云ふ二つの本を書いた人であつた。) 併しグラスマンは其後ラクロア、ラグランジュ及びラプラースの著述を學び始めた。其の時彼はラプラースの結果が彼の父の本にある或る新たな觀念を用ゐると、より手短かに到達し得られると云ふことに氣がついた。斯くて此簡單な方法を研究し始め、且つ潮汐の研究にそれを應用しやうとした。彼は斯の如くにして一つの新たな幾何學的解析法に導かれるやうになつた。千八百四十年に彼は其方法の開展に著しき進歩を來した。併しシュライエルマッヘルの新たな本が再び彼を導いて神學を研究せしめた。千八百四十二年に彼は再び數學の研究を爲し始めて、彼の創めた新たな解析法の必要なることを充分に認めて、其の方法の研究に自らを捧げるに至り、かくて彼は大學の數學教授にならうとする考を起すに至つた。併し之に就いては彼は到頭成功しなかつた。千八百四十四年に彼の Lineale Ausdehnungslehre と稱する大著述が現はれた。之れは新たな且つ不思議な事項に滿たされたものであつて、而かも其說明の方法に於いては非常に一般的で、抽象的で、且つ時流を離れた異つたものであつた。それであるからして、初めの二十年間は歐羅巴の數學に對して何等の勢力をも及すことが出來なかつたこと、其書が支那で出版されたと同じであつた。ガウス、グルネル及びモエビウスが之を通覽し、且つ之を賞讃した。併し奇怪な術語を弄し且つ「哲學的普遍」なのになやまされた。其後八年にして、ゴッタのブレトシュナイテルが其本を丁寧に通讀した唯一の人であると言はれて居る。クレールルの數學雜誌にグラスマンは之によりて其時代の幾何學者を凌駕した一論文を載せたが、それは幾何學的に任意の代數學的曲線を描く方法を論じたものであつた。此論文も矢張り學者に注意せられずに殘つた。さればグラスマンがシュライエルマッヘルの哲學、政治學及び言語學に彼の注意を向けるやうになつたとしても別に驚くに足らない。クレールルの雜誌には彼の書いた諸々の論文は引續いて現はれ、千八百六十二年に彼のアウスデーヌングスレーレーの第二篇が公けにされた。此部分に於いて彼は第一篇に於けるよりもアウスデーヌングスレーレーの廣き範圍をより一層明瞭に示さうと企てた。嘗に幾何學的

の應用を考へたばかりでなく、尙又代數學的函數をも論じ、更に無限級數及び微分積分の學問をも論じた。かくてアウスデーヌングスレーレーが何物も論ずると云ふことを示した。併なから、此第二篇も最初の第一篇に於いて見た如く、矢張り餘り世間より歡迎を受けなかつた。五十三歲の時に此驚くべき天才が失望の餘り數學を廢し、彼の精力をばサンスクリット語の研究に向けた。かくて言語學の研究の結果は數學の場合に於けるよりも人々の認める所となり、實に其功蹟の如き數學の研究結果と其光彩を爭ふ程のものであつた。

アウスデーヌングスレーレー及び四元法に共通の事柄は幾何學的加法、四元法では $S\alpha\beta$ 及び $V\alpha\beta$ で表はされた二つのヴェクトルの函數及び一次のヴェクトル函數である。四元法はハミルトンに依る獨特のものであるが、グラスマンに於いてはヴェクトルの代數學に加ふるに、更に廣き應用を爲し得る幾何學的代數學をも見出す、而かもこれはモエビウスの重力的計算法 Barycentrische calcul に似寄つたものであり、後者では點が基本的要素となつて居る。グラスマンは「外積」「內積」及び「開積」の觀念を明かにした。其後のものを吾々は今日母型 Matrix と稱する。彼のアウスデーヌングスレーレーは甚だ範圍の廣いものであつて、元が何等特別の數であるべしとの制限がない。最近に至りて彼の發見の驚くべく豐富なることは、始めて人々に認められるやうになつた。千八百四十四年に出たアウスデーヌングスレーレーの第二版が千八百七十七年に印刷せられた。ピーアルスは論理的の記號法を用ゐてグラスマンの系統の表現を與へ、シンシンナチ大學のハイドは英語を用ゐてグラスマンの計算法に關する初めの敎科書を書いた。

グランスン及びハミルトンの發見をば一部分含んで居り、而かも是等の發見よりもより價値の少ない發見に次のものがある。セント・ヴエナン(千七百九十七年―千八百八十六年はヴェクトルの乘法を記載し、又ヴェクトルの加法及び方位の定められた面積を記した。カウシーのクレフ・アルゲブライクは組立せ乘法を引はるべき單位であつて、彼は之をグラスマンに依つて以前なされたと同じ方法で消去法の理論に應用した。ユスッス・ベラヴイチス(千八百三年―千八百八十年)は千八百三十五年及び千八百三十七年に Annali delle Scienze と云ふ雜誌

に於いて彼のエクイポレンスの計算法を發表した。此人はパヂュアの數學教授を長年やつた人であつて、自修によつて數學を研究した大家であり、齢三十八年のとき彼の郷里バッサノに於ける市の役目を辭し、專ら數學の研究に從事した。

グラスマンの觀念の最初の印象がヘルマン・ハンケル（千八百三十九年—千八百七十三年）の書物に認められる。此の人は千八百六十七年に彼の Vorlesungen über die Complexen Zahlen と云ふ本を出版した。當時ライプチッヒ大學の私講師であつた彼はグラスマンと學問上の通信を爲した。ハンケルの交番數 alternate numbers は彼の組合せ乘法の法則に從ふものである。代數學の基礎を考ふるにあたり、ハンケルは以前ピーコックに依つて不完全ながらも表明されたる形式的の法則の永久の原理を確め得た。ハンケルは數學史の熱心な研究者であつた。かくして之に關する未定稿を遺した。彼の死ぬ前に彼はチウビンゲンの數學教授となつた。彼のコムプレキセンツアーレンは初め餘り讀まれなかつた、されは吾等はハーゲンのヴイトル・シュレーゲルをグラスマンの有力なる說明者として見ざるを得ぬ。シュレーゲルはステッチンの中學校でグラスマンの學友であつた。クレブッシュに依つて奬勵されて、彼は System der Raumlehre と云ふ本を書き、其中にアウスデーヌングスレーレーの主なる觀念と方法とを說明して居る。

複代數學はピーアルスに依つて開拓せられた。此理論は幾何學的のものでないことは、ハミルトン及びグラスマンの理論とは異つて居る。ベンジャミン・ピーアルス（千八百九年—千八百八十年）は北米合衆國マサチユーセッツ州サレムで生れ、ハーヴァード大學を卒業した。而かも其學生時代に大學を卒業した後に研究される範圍の數學をさへも研究した。ボーチッチがメカニック・セレストの飜譯を爲し且つ其註解を行つた時に、若きピーアルスはそ其校正を手傳つた。彼は千八百三十三年にハーヴァート大學の數學教授となり、死ぬるまで其位置を續けて居た。若干年間彼はノウチカル・アルマナックの主任となり、且つ又北米合衆國海岸測量部の主任となつた。彼は數學に關する大學の教科書の一系を出版し、又千八百五十五年には Analytical Mechanics を出版し、且つワシントンのウオカーと共に海王星の軌道を計算した。Linear Associative Algebra の彼の研

究は甚だ深遠なるものである。之れに關する多くの論文の第一のものは、千八百六十四年米國科學獎勵會の第一の集會で讀まれた。一つの論文の石版刷の稿本が千八百七十年に彼の友人に配付された。併し此論文は千八百八十一年に出版されるまでは餘り人々の注意を惹かなかつた。ピーアルスは先づ單純代數學の掛算表を出版し、續いて二重代數學のを、次第に續けて第六重の代數學に關するものまでに及ぼし、全體としては百六十二重の代數學を形成し、彼は是等は文字或は單位 i, j, k, l……… の決まつた數と是等に實又は虛の通常の解析的大きさを示す係數を與へたものゝ一次函數である記號 A, B, C……… を考へるときに可能であることを證明した—茲に云ふ i, j,……等の文字は其の二次的組合せ i^2, ij, ji, 等の各項が是等の文字の一次函數に等しいものであるが、併し結合の法則に従ふと云ふ制限を有するものである。チャーレス・ピーアルス即ちベンジャミン・ピーアルスの子息は數學的論理に關し最も主なる著者の一人であるが、彼は是等の代數學が彼の以前論理學的解析法に依つて發見し且つ之に簡單な記號を與へた四乘代數學の凡ての不完全な形式であることを明かにした。四元法は是等の四乘代數學の單純な一例であり、又九元法は他の一例である。チャーレス・ピーアルスは是等の凡ての一次的結合的代數學の中で除法の疑はしいものは唯三種であると云ふことを證明した。而して是等三種と云ふのは、通常の簡單な代數學、通常の複代數學及び虛數のスケーラーを排斥せる四元法とである。彼は又彼の父の發見した代數學は運算的のものであつて、且つ母型的のものであることを明かにした。

多樣代數學 Multiple algebra に關する講義はジョンス・ホプキンス大學でシルヴエスターに依つて講せられ、且つ樣々な雜誌によりて發表された。彼は是等の論文で大に母型の代數學を論じた。母型の理論は千八百五十八年に於いて既にケイレルに依りて一つの重要な論文に於いて開發せられたもので、シルヴエスターの說に從へば此の論文は第二期の代數學の範圍へ侵入したものであるとのことである。クリツフオード、シルヴエスター、ターベル、チャプマン等は一層遙かに此方面の研究をなした。母型の發明者は實際はハミルトンである、併し彼の理論は彼の Lectures on Quaternions に於いて公けにされたもので、ケイレー

の理論よりもより一般性を缺いて居る。但しケイレーはハミルトンの發見について何等の記載を爲さなかつた。

行列式の理論はイタリヤにてフユーネ・ロンスキーにより、又フランスではビネーに依つて研究された。併ながら是等の人々は此問題の大先生たるカウシーに依つて凌がれた。Journal de l'ecole polytechnique, IX, 16 に載せた一の論文でカウシーは之に關する一般的の樣々な定理を開拓した。彼は Determinant (行列式)なる名前を導いた、此の言葉は以前ガウスに依つて彼の研究した函數を現はすのに用ゐられたものである。千八百二十六年にヤコビは此の計算方法を用ゐ始めて、其有力なることを證明した。千八百四十一年に、彼は行列式の理論に關する大なる研究をクレールの雜誌に載せた。かくて行列式の理論が容易に接近し得るものとなつた。イギリスでは有理整函數の一次の變形の研究が大なる刺戟を受けた。ケイレルは「歪行列式」を論じ、又バッフス式の行列式をも論じ、又行列式の括弧や或は今日行列式に普く用ゐられて居る二本の垂直線を用ゐ始めた。"Continuants" はシルヴエスターに依る發見であり、"Alternants" はカウシーにより發明されたものでヤコビ、トルチ、ネーゲルバッハ、ガルベーリによつて開發された。"axisymmetric determinants" はヤコビによつて初めて用ゐられたものであつて、レベスク、シルヴエスター及びヘッセによつて研究され、又"Circulants" はリエージュのカタラン、スポチスウード(千八百二十五年―千八百八十三年)、グレーシア及びスコット等によつて研究されたものである。又"centrosymmetric determinants" に關しては吾等はツエフスに負ふ所が大きい。ストラスブルグのクリストフアル及びフロベニウスはロンスキの初めて用ゐた"Wronskians"の諸性質を發見した。ナハライネル及びギュンテルなる二人のミュンヘンの人々は行列式と連續分數との間の關係を明かにし、スコットは又彼の教科書に於いてハンケルの交番數を用ゐた。行列式に關する教科書はスポチスウード(千八百五十一年)、ブレオシ(千八百五十四年)、バルツエル(千八百五十七年)、ギュンテル(千八百七十五年)、ドストル(千八百七十七年)、スコット(千八百八十年)、ミュイル(千八百八十二年)、ハヌス(千八百八十六年)によつて書かれた。

近世高等代數學は特に一次の變形の理論に關係して考へられたが、此の開拓

は主としてケイレー及びシルヴエスターに負ふものである。

アルサー・ケイレーは千八百二十一年にスレーのリッチモンドで生れ、ケムブリッヂのトリニチイー・カレッヂで教育を受けた。 彼は千八百四十二年にセーニオル・ラングラーとなつた。 其後彼は若干年の間法律を研究し、且つ法律の業務に從事した。 ケムブリッヂのサドレリアン教授の創設の際に、彼は其講座の擔任を承認し、豐富な收入のある職業を捨てゝ、少き俸給を受くる身となり、其時より數學に凡べての時を與へることが出來ることになつた。 ケイレーは尚ほ大學の一學生であつた間に「ケムブリッヂ數學雜誌」に彼の數學的論文を掲載し始めた。 彼の最も著名な發見の若干は、彼が法律に關する業務を取つて居た時代になされた。 純正數學の全領分に於いて彼の天才を振はざりし部門とては殆んどないが、併し彼の最も天才を發揮したものゝ中で、最も大切なのは不變數に關する彼の理論によりて解析法の新たな部門を創立したことである。 又不變數の原理の胚子はラグランジユ、ガウス及び就中ブールの論文の中に滿たされて居る。 ブールは千八百四十一年に不變性は一般に分別式の一つの特性であることを明かにし之を orthogonal substitution の理論に應用した。 ケイレーは一つの與へられた方程式の係數の如何なる函數が此不變性の特性を有するかを先天的に決定せんとする問題を提起し先づ千八百四十五年に所謂 "hyper-determinants" と云ふものが之を有することを發見した。 次いでブールはこれに種々の發見を加へた。 其後シルヴエスターはケムブリッヂ及びダブリンの數學雜誌に於いて、形式のカルキユラスに關する多くの論文を載せた。 それより後發見は續々と發表されるやうになつた。 其時代にケイレーとシルヴエスターとは共にロンドンに住ふて居り、屢々相會して互に奬勵し合うた。 であるから是等の研究のどれ程づつが夫れ〴〵の人々に實際に歸すべきものであるかを判斷するのに困難である。

ゼームス・ジヨセフ・シルヴエスターは千八百十四年にロンドンに生れ、ケムブリッヂのセント・ジヨンス・カレッヂで教育を受け、千八百三十七年にセコンド・ラングラーとなつた。 彼は其祖先がユダヤ人であると云ふ關係からして學位を受けることが出來なかつた。 千八百四十六年に彼はインナル・テムペルの學生

となつた、而かも其の爲めに千八百五十年に裁判所に呼び出されるやうになつた。彼はロンドンのユニヴァシチー・カレッヂの物理學教授となつた。其後引續いてヴァルジニアの大學で數學の教授となり、次いでウールウィックの陸軍士官學校の教授となり、續いてジョンス・ホプキンス大學の教授となり、千八百八十三年以後にはオックスフォードの幾何學の教授であつた。彼の印刷した最初の論文は千八百三十七年に公けにされたフレネルの光學に關する論文に就いて記載したものである。次いて不變數に關する研究、方程式論の論文、partitions の理論、多様代數學の理論、數の理論、及び種々の題目に關する論文が續々と現はれた。千八百七十四年に、彼はポーセリエー、カピテーヌ・デュ・ゲニエー・ア・ニス などにより て初めて發見された鏈條運動の幾何學的理論の開拓に加はつたが、其理論がケンプによつて一層研究された題目となつた。逆變數 contravariants の理論の一般的叙述、二項有理整函數の不變數及び協變數及び mixed concomitants の題目によつて滿足される部分微分方程式の發見等がシルヴェスターに開拓されたものである。American Journal of Mathematics に、二項及び三項の有理整函數に關する數多の論文が一部分はエフ・フランクリンの助力を得て屢々現はれた。オックスフォードで、シルヴェスターは新たな問題即ち可逆函數の理論 theory of reciprocants を開いた。此理論は x と y とを交換しても變化を見ないやうな從屬變數 y の函數及び x に關するこれの微分係數の函數とを論ずるものである。此の理論はハルフェン(千八百七十八年)が論じた微分不變數に關する理論よりも一層一般的のものであつて、オックスフォードのハンモンド、ウールウィクのマクマホン、ケムブリッヂのフオーサイス及び其他の人によつて一層開拓された。シルヴェスターは數學のアダムと云ふ名前を受けて居る、何故と云ふに彼は數學に數多の名前を導いたからである。即ち invariant, discriminant, Hessian, Jacobian とか云ふやうな學語は彼の導いたものであつた。

主としてケイリー及びシルヴェスターによつてイギリスで開發された不變數に關する大切な理論はドイツ、フランス及びイタリヤでも熱心に研究し始められた。此方面に於ける最も早い研究者の一人は、ジーグフリード、ハインリッヒ、アロンホルド(千八百十九年—千八百八十四年)であつた。此人は三項三次式

の不變數S及びTの存在を證明した。又ヘルミットはevectantsを發見し、且つ彼の名前を帶びて居る逆比の定理を發見した。パウル・ゴルドンは記號的方法の助けを藉りて二項有理整函數の別々の形式の數は有限であると云ふことを證明した。クレブッシュは此は任意數の變數を有する有理整函數の場合にも矢張り眞理であることを證明した。之に關する尙ほ一層單純な證明が千八百九十一年にケニヒスブルグのダビッド・ヘルバートによつて與へられた。イタリヤではミランのブレオシ及びファ・ド・ブルノ(千八百二十五年—千八百八十八年)は不變數の理論に貢献する所あり、後者は二項式に關する教科書を書いたが、之れはサルモンの教科書や又はクレブッシュ及びゴルドンの教科書と殆んど同列に位するものである。不變數に關する他の著書の中に、クリストフエル、フードラー、マクマホン、ケムブリッヂのグレーシア、ニユーヨークのマックリントック等がある。マクマホンは半不變數semi-invariantsの理論は對照的函數の理論の一部分であると云ふことを發見した。近世高等代數學は數學の他の部分卽ち幾何學、變數法、及び機械學等にまでも到達し、是等と離るべからざる聯絡を有するやうになつた。クレブッシュは二項式の理論を三項式のものへ擴張し、又其結果を幾何學に應用した。クレブッシュ、クライン、ワイエルストラス、パルクヘルド及びビアンキは、不變數の理論を超橢圓的函數及びエーベルの函數とに應用した。

方程式の理論に於いてはラグランジュ、アルガン、及びガウスは各々の代數方程式は一つの實數根又は一つの複素數の根を有すると云ふ大切な定理を證明した。エーベルは嚴正に、五次又は五次以上の一般的代數方程式が根數を用ゐる丈では解くことの出來ないものであることを明かにしたエーベルの證明の一つの變化した形のものはワンツエルによりても與へられた。エーベルの前にイタリヤの醫者オロル・ルフィニ(千七百八十五年—千八百二十二年)は、是等の方程式の解くことの出來ないと云ふ證明を印刷したが、それが彼の國人であるマルファッチによつて批評された。よし結論的のものでなかつたにしてもルフィニの論文はカウシーの「群の理論」theory of groupsの魁となつたと云ふことに於いて有名なものである。

橢圓積分を含んで居る所の有理整函數の超越的解法はヘルミットによつて與へられた。ヘルミットが之を初めて公にした後に、千八百五十八年にクロネツカルがヘルミットに手紙をやつて、六次の簡單な分解式を得た第二の解法を與へた。ジエラールは彼の「數學研究」（千八百三十二年より千八百三十五年の作）中に、チルンハウゼンの方法を擴張したものを用ゐて、三項式の形に有理整函數を直した。此大切な變形は千七百八十六年に既にスエデンの人ブリングによつて與へられ、ルンド大學の出版物に載せられて居る。チルンハウゼンと同じくジエラールは彼の方法が任意次數の方程式の一般的の代數的解法を供給するものであると信じた。千八百三十六年ウィリアム・アール・ハミルトンはジエラールの方法の正しき事に關した報告を與へ、且つ彼の方法によつて五次式が、三項式の四形式のどの一つにも變更することが出來ることを明かにして居る。ハミルトンは高次の方程式に之を應用し得ることの範圍を明かにした。シルヴエスターは此の問題を研究し一つの方程式がi次よりもより高次でない方程式の助けを藉りて、引續くiだけの項を除ゐて現はされる爲には、其の方程式の最低次數が何であるべきかと云ふ問題を考へた。斯くて彼は$i=\infty$に至るまでの研究を行ふて「ハミルトンの數」と稱せられる數の級數に導かれた。ジエラールの變形と殆んど同じ價値のある變形はシルヴエスターが行ふたもので、彼は五次式を三個の五次の項の和として現はした。より高次の方程式の協變數及び不變數の問題は近年に至つて一層研究せられるやうになつた。

高次方程式は常に代數的に解くことの出來るものでないと云ふエーベルの證明は、與へられた次數の如何なる形の方程式が根數によつて解くことを得べきかと云ふ研究を促した。斯の如き方程式は圓の分割を考ふる場合に、ガウスによつて論せられたものであつた。エーベルは一歩を進め非誘導的方程式は其次數が素數である時に限り、若し此根數の二つのものの中、一つが他のものの項を用ゐて有理的に現はすことが出來るものであれば、常に根數を用ゐて解くことの出來るものであることを證明した。若し又方程式の次數が素數でないならば、其解はより次數の低い方程式の解によつて解くことの出來ることを證明した。幾何學的の考察を用ゐてヘッセは代數學的に解き得べき九次の方程

式を論じた。此問題はバリーでは置換法の群の觀念の創意者若きエヴァリスト・ガロァ(千八百十一年に生れ千八百三十二年に決鬪で殺された)によつて盛に研究された。楕圓函數論に才自ら表はれて來る方程式の他の一組即ち根率方程式 modular equatiois に關係した有益な結果を得たのは矢張り彼である。カロァの勢力によりて大切な「置換の理論」が生れ來り、且つ此理論はバリーのヨルダン、セレー(千八百十九年—千八百八十五年)クロネッケル(千八百二十三年—千八百九十一年)クライン、ノエテル、ヘルミット、カペリ、シロー、ネット等によつて大に開展された。ネットの著書 Substitutionstheorie はミシガン大學のコールによつて英譯せられ、此の理論の進歩大に貢献した。コールによつて發見された、九字の五百四種の置換法の單純な一群が、シカゴ大學のモーァによつて單純な群の複無限系に屬するものであることを證明された。置換法の理論は微分方程式の理論に重要なる應用を與へた。クロネッケルは千八百八十二年に彼の Grundzüge einer Arithmetischen Theorie der Algebraischen Grössen と云ふ本を公けにした。

フーリエー及びブダンの後に、數的方程式の解法はバスのホルナーによつて進歩させられた。此人は漸近法の改良された一方法を創めた。ジャック・チャーレ、フランソア・スツルム(千八百三年—千八百五十五年)はゼネヴァの人で千八百二十九年に、與へられたる極限の間に含まれて居る、一つの方程式の根の數と夫等の根の位置に關する有名なる定理を公にした。スツルムの語る所に依れば、此發見は複振子の運動に關係した力學的研究をやつて居る間に思ひ浮んだとのことである。此定理及びホルナーの方法は共に數的方程式の眞の根を決定する確かにして而かも容易な方法を與へる。

一つの方程式の根の羃數の和の對照的函數はニュートン及びワーレンダによつて研究されたが、近頃に至りてガウス、ケイリー、シルヴェスター、ブリオシによつて研究された。ケイリーは對稱的函數の "weight" 及び "order" に關する規則を與へた。

消去法の理論はシルヴェスター、ケイリー、サルモン、ヤコビ、ヘッセ、カウシー、ブリオシ及びゴルダンによつて大に進歩を來した。シルヴェスターは dialytic method (Philosophical Magazine, 1840) を與へ、又千八百五十二年消去された式を行列

式として表現することに關した定理を設定した。ケイリーはベツゥの消去法の新たな叙述を試み、且つ千八百五十二年に消去法の一般般的理を設定した。

第四章　解析法

此題目の下に、微分學及び積分學の一般の問題を考ふるのが便利と考へられる。即ち代數學、無限級數、確からしさの論及び微分方程式なども之れに含まれる。是等の問題の開發に關して著しき大家はカウシーであつた。

アウグスチン・ルイ・カウシー(千七百八十九年—千八百五十七年)はパリーで生れ、幼時彼の父によつて教育された。ラグランジュ及びラプラース及び彼等と屡々接近した彼の父が若き此の子供の將來偉人となることを豫見して居つた。パンテオンの中央學校で彼は古典的教育を受け其の方面に甚だ優れた成績を示した。千八百五年に彼はエコール・ポリテクニックに入學し、二年後エコール・デ・ポン・エ・ショーゼーに入學した。カウシーは千八百十年技師の資格でシャルブルグに行いた。ラプラースの Mechanique Céleste とラグランジュの Fonctions Analytiques とは其の當時彼の座右を離れなかつた本であつた。而かも三年の後に、健康上の問題から彼はパリーに歸へることになつた。かくて、ラグランジュ及びラプラースの勸告に從つて、彼は工學を廢して、純粹科學の研究者となつた。かくて彼はエコール・ポリテクニックの教授となり、其後シャーレ第十世の退位次いでルイ・フイリップの卽位の結果として、カウシーは彼に服從することを誓ふことが出來ないので大に神經をなやました。其結果として、カウシーは教授の位置を奪はれ流罪に處せられた。かくてスエツルのフリブルグ行き、彼の研究を始め、千八百三十一年にペードモンの王に招かれて、特に彼の爲めに創設した數學的物理學の講座を擔當し、チウリン大學に於ける教授を始めた。

千八百三十三年に、廢帝シャーレ第十世の招聘に應じ、彼の孫なるボルドーの侯爵を教育することとなつた。此の位置はカウシーに歐羅巴の樣々の部分を遍歷する機會を與へ、且つ彼の著述が如何に廣く歐羅巴で讀まれて居るかを視察する機會を與へた。シャーレ第十世は彼に男爵の稱號を與へた。千八百三十八年にパリーに歸へつて、カレッヂ・ド・フランスの講座を擔任することになつた。

併し彼に對して誓を要求された時に、再び彼は之を受入れなかつた。彼は夫より地理局の一員に推薦されたが、其監督官吏に依つて任用の資格なきものであると宣言された。千八百四十八年の政治上の出來事の結果として誓言が中止された、爲めにカウシーはエコール・ポリテクニックの敎授となることが出來た。第二帝國の建設の際に、再び誓の儀式が復活されたが、而かもカウシーとアラゴーとは之をなすのを特に免除された。カウシーは大なる敬虔家であつて、彼の出版物の二つの中に忠實にジエスユイット敎徒を辯護して居る。

カウシーは非常に豐富な且つ深遠な數學家であつた。彼の結果を迅速に出版したこと及び標準的の敎科書を編纂したことによつて、彼は彼の同時代の何れの著者よりも、數學者の大多數の上に最も直接な且つ大なる勢力を得ることゝなつた。彼は解析法に嚴正てふことを吹込んだ主な人の一人であつた。彼の研究は級數論、虛數論、數論、微分方程式論、置換論、函數論、行列式論、數學的天文學、光學、彈性學等の各方面に及んで居る、即ち彼の研究は純正數學及び應用數學の全範圍を殆んど全部掩うて居た。

ラプラース及びポアッソンに依つて奬勵せられて、カウシーは千八百二十一年に、彼の Cours d'Analyse de le l'École Royale Polytechnique を出版したが、これは非常に功勞のある著者となつた。若し此著述にしてイギリス及び北米合衆國の敎科書の著述に依つて一層注意して讀まれたならば、恐らく今日目擊するが如き解析法の曖昧な且つ不正確な方法が一般の敎科書に五十年前から散見せぬことであつたであらう。カウシーはテーロルの定理の嚴正な證明を初めて公にした人であつた。彼は極限に關する彼の新しき理論と函數の連續に關する新たな理論とによりて微分學の根本的原理の説明を改革した。カウシー及びテユヘメルの方法はフユエル及び其他の人々によつて大に歡迎された。イギリスでは、此根本的原理の明確な記載に對して、ド・モルガンは特別の注意を與へた。徽積分學に關する近來のアメリカの敎科書は、獨立變數として時を採用し、かくて速度及び加速度の關聯觀念を導いて、事實上流動法へ歸へつて居る。

カウシーは變數法に關する若干の研究を爲した。數學の此部分は其主要原理に於いては、ラグランジユの手から渡されたものと今日でも同じ樣なもので

ある。只之に關する近來の研究と云ふのは極限が矢張り變數である場合の二重積分の變化、及び一般に多樣積分の變化に關係したものである。之に關する論文は千八百二十九年にガウスによりて、千八百三十一年にポアッソンによりて、又千八百三十四年にオストログラドスキによつて出版された。併し、是等の論文に於いては二重及び三重積分の場合に於いて極限に存在せざるを得ざる方程式の數と形ちとを一般的に決定して居ない。千八百三十七年にヤコビは極大及び極小の存在が夫れによつて確かめられると云ふ第二の變化の理論に要求される困難な積分が、其の實第一變化の積分中に含まれて居るものであつて、特に之を論ずることは餘計なことであると云ふことを明かにせる論文を出版した。ヤコビにより極めて簡單に提出されただ此大切な定理がレベスク、デラウネー、アイゼンロール、スピツエル、ヘツセ及びクレブツシュによつて闡明され、且つ擴張された。多樣積分の極大及び極小を完全に決定する爲めに、不定方程式と組合せざるを得ざる、極限方程式を決定する問題に關するサルスの論文は千八百四十五年にフランスの學士院の賞牌を受けたが、此の名譽はデラウネーの論文中に記載されて居る。此のサルスの方法はカウシーによつて簡單にされた。千八百五十二年に、マイナルチは極大及び極小を辨別する新たな一方法を現さうと試み、ヤコビの定理を二重積分の場合に擴張した。マイナルチ及びブリオシは第二變化の項を現はすのに行列式の價値あることを明かにした。千八百六十一年に、ケムブリッヂのセント・ジョンス・カレッヂのアイザーク・トドハンター(千八百二十年―千八百八十四年)は彼の價値ある著述 History of the Progress of the Calculus of Variations を公にし、其中に彼自身の研究をも載せて居る。千八百六十六年に、彼は不連續的解析の理論を開拓した最も大切な一研究を公にし(其の特別な場合に關するものはルジャンドルによつて論ぜられた)、此の題目に關してはサルスが多樣積分に關係して爲した所を明かにした。

變數法に關する組織的敎科書の最も重要な著者は次の人々である。即ちケムブリッヂのカイウス・カレッヂのロバルト・ウツドハウス(千八百十年の著)、ロンドンのリチャールド・アバット(千八百三十七年の著)、曾つてダブリンのトリニチー・カレッヂの學長であつたヒュエット・ジェレット(千八百十七年―千八百八十

八年)、ツウリッヒのストラウフ(千八百四十九年の著)、モァニオ及びリンデレッフ(千八百六十一年の著)、ニュー・ヨークのフラッシングのルイス・バフェット・カルル(千八百八十一年の著)である。

千八百五十八年に、デリクレに依つて述べられた定積分に關する講義が、マイエルの盡力に依つて一つの標準的の著述に仕上げられた。此題目はライデンのビーレンス・ド・ハーンに依つて、千八百六十二年に出版されたExposé de la théorie des integrals definies (Amsterdam, 1862)に充分綿密に論ぜられて居る。

無限級數の歴史は、此世紀の最初の四分の一中に解析法が入込んだ新時代の特徴を最も生き〳〵しく表はして居る。ニュートン及びライプニッツは無限級數の收歛に關係する研究の必要を感じた。併し彼等は相互級數に關してライプニッツの提出した試驗法を除いては、未だ之に關する適當な規則を有して居らなかつた。オイレル及び彼の同時代の學者に依つて級數の形式的の取扱方が大に擴張されたが、其收歛を決定することの必要が一般に無視せられて居た。オイレルは無限級數に關して若干の甚だ美しき結果を得、是等が今日も尚は能く人の知る所であるが、而かも亦之と同時に今日は全く忘れられて居るが、甚だ多くの不合理な結果をも出した。彼の時代の過失は今日は當然の結果として消滅し去つたが、彼のドイツに於ける複合學派に於いて其絶頂に達して居る。今考究をなして居る近代の初頃に、無限級數に關して得られた疑はしい、或は又明かに不合理な結果は、是等に關する運算の正當なるか如何について一層深遠な探索を刺戟するやうになつた。而して其際是等の實際の内容は主たる考察の目的で、是等の形式の方法が第二次的の研究對象であつた。級數に關する初めての必要な而かも嚴正な研究が、ガウスに依つて超幾何學級數 hypergeometric series に關連して爲された。彼に依つて開展された規則が、其規則が包含するやうにと企てられた各々の場合に就いて收歛の問題を決定し、斯くて玆にも亦ガウスの著述にとつて常に其特徴であつた一般性のスタンプを押して居る。併し取扱方の奇なることと、普通見るべからざる嚴正との爲めに、ガウスの論文は其時代の數學者の間には餘り歡迎されなかつた。

一般の數學社會に一層受けられたのはカウシーの著述であつて、千八百二十

一年に公にされた Analyse Algébrique は矢張り級數の嚴格な取扱に就いて優れたものである。　項の數が無限に增す時に、其和が一定の極限に近づくと云ふことのない凡ての級數が發散的 divergent のものと呼ばれた。　**ガウス**の如くに、彼は幾何學的級數との比較を設け、正の項を有する級數は第 n 番目の項の n 次の根或は第 $(n+1)$ 番目の項と第 n 番目の項との比が、結局一よりも小さいか、より大なるかに隨つて、收斂するか或はせぬと云ふ規則を見出した。　所で是等の根或は比が結局一となつて收斂の如何を判斷するのに都合の惡るい場合に用ゐる爲めに、**カウシー**は二つの他の試驗方法を設けた。　彼は負の項を有する級數は、其諸項の絕對的の値が收斂する場合には、矢張り收斂するものなることを示し、かくて遂に交互的級數に關する**ライブニッツ**の試驗方法を誘導した。　二つの收斂級數の積は當然收斂的のものであるとは言はれぬ。　二つの絕對的に收斂する級數の積が、是等の二つの級數の和の積へと收斂すると云ふ**カウシー**の定理は、其後半世紀を過ぎて、**グラッツ**の人**メルテンス**に依つて乘け合さるべき二つの收斂級數の中の唯一つが絕對的に收斂する性質のものであれば、尙ほ矢張り眞理であると證明された。

級數に關する昔の方法について最も率直な批評家は**エーベル**であつた。　彼の友人**ホルムボー**に與へた手紙(千八百二十六年)が樣々な嚴格な批評を包含して居る。　此手紙は今日の學生にとりても甚だ趣味あるものである。　二項定理の彼の證明中に、彼は二つの級數と其積なる級數とが共に凡べて收斂的のものであるならば、其積なる級數は是等二つの與へられた級數の和の積へ收斂するものであると云ふ定理を確立した。　此著しき結果は若し吾等が半收斂的の級數に關する收斂の普遍的な實際的規則を知り得た場合には、級數の掛算の全問題を處理したことになる。　然るに不幸にして吾等は斯の如き規則を有せざるが故に、近頃數多の定理は**ミュンヘン**の**プリングスハイム**及び**ウュルツブルグ**の**フオス**等に依つて設定され、是等によりて或る場合に於いては、積級數に關する收斂の試驗を爲す必要が、より容易な之に關係した級數の試驗をなすことに依つて置換へられることになつた。　**プリングスハイム**は次の面白き結論に達した。二つの半收斂的級數の積は決して絕對的には收斂しない、併し半收斂的級數や、

否のみならず發散的級數でさへも之れに絕對的に收斂する級數を乘けると一つの絕對的に收斂する積を與へることもある。

エーベル及びカウシーの研究は著しき反響を與へた。カウシーが級數に關して彼の最初の研究を提出したある科學の集會の後に、ラプラースは直に家に歸へり、一室に閉籠つて、彼の Mecanique celeste 中にある級數を吟味し始めた。幸にして各々のものは收斂的のであると云ふことが發見された。併ながら、新たな觀念が古いものを一度に放逐したと考へるのは餘りに早計である。反對に新たな見解が、激しい又長き爭論の後で、漸く一般に受け容れらたのであつた。千八百四十四年の如き後の時代になつてさへド・モルガンは此の流義にて「發散的級數」について論文を書き、其中に次の如く述べて居る。「此論文の題目は、初步の性質を帶びるにも係はらず而かも、之れに關しては其の結果の絕對的正確或は不正確に關して或る慘酷な一學派が數學者の間に存し此の方面を論じて居ることが一般に承認されるだらうと思ふ」と。

收斂及び發散の一層精密な規則の開展の時代に恰かも第一番目のものとして、ヨセフ・ルドウィツヒ・ラーベの研究が現はれ、續いてド・モルガンは彼のカルキユラス中に與へた如き研究を出した。ド・モルガンは其一部分が既にベルトランに依つて獨立に發見された對數的の規則を得た。ベルトラン及びオシアン・ボンネに依つて與へられた是等の規則の形式の方が却つてド・モルガン自身の與へたものよりも、より便利である。エーベルが遺した論文を見れば、彼は既に是等の學者に先んじて對數的規則を發見して居たことが分る。ボンネの說に依れば對數的規則が決して其適用の出來ぬ場合がないとのことである。然るにチユ・ボア・レイモンド及びプリングスハイムは、何れも、是等の規則によりて其收斂性を決定することの出來ない級數のあることを、實際實例を示して明かにした。

以上述べ來つた規則はプリングスハイムに依つて特別な規則と呼ばれた。何故と云ふのに是等のものは何れも特別な函數 a^n, n^n, $n(\log n)^n$, 等の級數の第 n 番目の項との比較に關係するからである。一般的規則を暗示し之を一層廣い觀察點から此題目を考へた最初の學者の中にクンメルがある。彼は二つの部

分から成立する一つの試驗法を與へる一つの定理を設定した。併し其後に至つて其最初の分が餘計なものであると知られるに至つた。一般的規則の研究が、ビザのチニ、パウル・ヂュ・ボア・レイモンド、ミンデンのコーン及びブリングスハイム等によつて研究された。ヂュ・ボア・レイモンドは此の規則を二つの組に別けた。即ち一般的の項n項を或は又$(n+1)$項とn項との比を研究の基礎とするかに從つて第一種の規則と第二種の規則と爲された。クンメルの研究は第二の種類の規則である。之と類似した第一の種類に屬する一つの規則はブリングスハイムに依つて發見された。夫れ〳〵ヂュ・ボア・レイモンド及びブリングスハイムに依つて發見された一般的の規則から凡べての特別な規則が誘導される。ブリングスハイムの研究は甚だ完全なものであつて、第一の種類及び第二の種類の規則が之によりて與へられるのみでなしに、之に加ふるに全く新たな第三の種類の規則も導かれる、且つ又第二の種類の一般化せられた一つの規則も現はれて來る。併し是は項の數が決して增加せざるやうな級數にのみ應用されるものである。第三の種類の規則は主として引續く項の差か、或は又其逆數の差の極限の考察の場合に用ゐられるものである。第二の種類の一般化せられた規則では彼は二つの引續いた項の比を考へなかつた、却つて任意の二つの項の比即ち如何に相離るゝにも係はらず二つの項の比を考へて、夫れ〴〵にコーシ及びエルマコッフによつて其以前に發見された二つの規則を導き出して居る

フーリエーの級數の研究中に多くの困難な問題が起つた。即ち此問題に就いて其收斂性を研究するの必要を感じた最初の人はカウシーであつた。併し彼の研究方法はヂリクレによりて不完全なものと發見された。ヂリクレは此問題に對して初めて綿密なる研究を爲した(Crelle, Vol. IV)。其研究の結果は、若し函數が無限にならない場合、不連續の無限の數を有せぬ場合、極大及び極小の無限の數を有せぬ場合には、フーリエーの級數は不連續の點を除けば他の凡べての場所で、其函數の價へと收斂するものであり、且つ其處で之が二つの境界的の價の平均へと收斂するものなることを示した點に於いて絕頂に達して居る。ベルンのシュレフリ及びチュ・ボア・レイモンドは、而かも充分に確立されてない此平均價の正しいか如何に對して疑を示した。ヂリクレの條件は充分なもの

ではあるが、而かも必要な條件ではない。ボンのリプシッツはフーリエーの級數は假令不連續の數が無限であつても、尚ほ能く此函數を現はすものであると云ふことを證明し、且つ又それが極大及び極小の無限の數を有する一つの函數をも現はすべき條件をも設定した。凡べての連續せる函數は凡べての點に於いてフーリエーの級數で現はすことの出來るものであると云ふヂリクレの信念は、リーマン及びハンケルによつても抱かれたものであるが、併し是等はヂュ・ボア・レイモンド及びシユワルツによつて其の間違つて居ることを證明せられた。

リーマンは、それが收斂的のものであれば、與へられた函數の價へと收斂するやうな、三角函數的級數の存在し得る爲めには、其の函數が如何なる性質を備へざるべからざるかを研究した。斯くて彼は之に關する必要にして且つ充分なる條件を發見した。併し、是等の條件は果して斯の如き級數が實際此函數を表はすものであるか、如何を決定せぬものである。リーマンは其勝手な性質の關係からしてカウシーの定積分の定理を排斥し、自ら新たな定義を與へ、かくて、如何なる時に一つの函數が一つの定積分を有するかを研究した。彼の此研究は連續函數は常に微分係數を持つことを要せずてふ事實を明かにするに至つた。併し、ワイエルストラスによつて函數の數多の種類に屬するものと證明された此性質は、必ずしもフーリエーの級數によつて是等の函數の現され得るものであると云ふことを排斥するものでないと知られた。フーリエーの級數に關する是等の結論の若干に關して、ワイエルストラスによつて與へられた觀察、即ち無限級數の積分は其級數が問題になつて居る範圍内に於いて一樣に收斂する時にのみ級數の別々の項の積分の和に等しいものと云ふ事實からして多くの疑問が投せらるゝに至つた。一樣な收斂に關する問題は、フイリップ・ルドヴィツヒ・サイデル(千八百四十八年)及びストクース(千八百四十七年)によつて研究され、ワイエルストラスの函數論中に重要なる位置を占めるやうになつた。かくて一つの連續函數を現はす所の三角函數的級數が一樣に收斂すると云ふことを證明するのが必要になつた。此證明はハレのハインリッヒ・エドワード・ハイネによつて爲された。其後フーリエー級數に關する研究はカントン及びヂユ・

ボア・レイモンドによつて爲された。

他の數學の各部分の巨大なる發展と比較すれば、確からしさの論はラプラースの時代以後、甚だ平凡な進歩を爲したに過ぎない。式の現はし方に於ける改良と其簡單化がド・モルガン、ブール、マイエル、ベルトラン等によつて爲された。クールノ及びウェステルガールドの保險法の取扱方と死亡表の研究とが古典的のものである。統計學に微分學の應用は、ブラッセルの天文臺長クエテレ(千七百九十六年―千八百七十四年)、レクセス、コペンハーゲンのウェステルガールド及びデユシング等によりてなされた。

玆に特に注意すべきことは、現代の大家に依つてなされた「逆の確からしさの論」の排斥である。確からしさの論に關する此部分は(千七百六十一年に死んだトーマス・バイエス及びラプラース(彼の Theorie Analylique の第二編第四章)によつて爲された。若干の論理學者が之によりて演繹法を説明した。例へば、若し未だ曾て潮汐に就いて聞いたことのない人が太西洋の海岸に行つたものとし、さうして m 日間引續いて海の潮の昇ることを觀察したならば、其時には、(クエテレの言ふ如く)其人は恐らく海が翌日も亦高くなると云ふ確からしさは $\frac{m+1}{m+2}$ であると言ふであらう。偖て $m=0$ と置けば、此見解は全く知れない出來事の確からしさが二分の一であると云ふこと、或は研究に提出された凡べての學説の二分一が眞實であると云ふ保證の出來ざる假定に立脚して居ることが分る。ゼヴオンは彼の Principle of Science の中に逆の確からしさの理論に關する歸納法を建設し、エッチウオルスは彼の Mathematical Psychics にそれを承認して居る。

確からしさの論に關する唯だ一つの注意するに足る近來の進歩は若干のイギリスの數學者及びアメリカ、フランスの數學者によつて、開拓された「地方的確からしさ」の問題である。此問題に關する最も早き研究は、博物學者ブフオンの時代にまでも溯るものである。此人は彼自身及びラプラースによつて解かれた問題、即ち等距離の平行した直線を描かれた床の上に、無茶苦茶に投げられた短かい針が是等の線の一つへ丁度落ちると云ふ確からしさを決定する問題を提出した。其後シルヴエスターの四點の問題と云ふのが提出された。即ち一つの與へられた境界内に勝手に取られた四つの點が凹四邊形を作る確からし

さを求めると云ふ問題である。　地方的確からしさの論はイギリスではクラミク、マッコル、ワトソン、ウォルステンホルム等によつて研究されたが而かもクロフトンによつて最も大なる成功を收められた。　又アメリカではサイツによつて研究され、フランスでは、ヨルダン、ルモアンヌ、バルビエー其他によつて研究された。「地方的確からしさ」の論の研究の結果としてクロフトンは若干の定積分の評價をなすことが出來た。

微分方程式に就いて初めて充分な科學的研究を爲したのは、ラグランジュ及びラプラースである。　此事は別して部分微分方程式に對して然りである。　部分微分方程式論は近頃になつて、更にモンジュ、ファッフ、ヤユビ、バリーのエミエル・ブーア(千八百三十一年―千八百六十六年)ワイレル、クレブッシュ、セント・ペーテルスブルグのコルキン、プール、マイエル、カウシー、セレー、ソフス・リー及び其他の學者によつて研究された。　千八百七十三年に、第一階の部分微分方程式に關する彼等の研究はガン大學のパウル・マンジョンによつて教科書の形で現はされた。　ヨハン・フリードリッヒ・ファッフ(千七百九十五年―千八百二十五年の研究は、就中決然たる進歩を示して居る。　彼はゲッチンゲンで若きガウスの親しき友であつた。　其後彼は天文學者のボーデの下にあり、其後ヘルムスタットの教授となり、又其後ハレの教授となつた。　一つの特別な方法によつて、ファッフは任意の數の變數を有する第一階の部分微分方程式の一般的積分を見出した。　n 變數を有する第一次の通常の微分方程式の研究から出發して、彼は先づ是等の一般的積分を與へ、遂に前者の一つの特別の場合として部分微分方程式の積分を考へた、併しこれには二つの變數を有する任意階數の微分方程式の一般的の積分が知られたものと假定したのであつた。　彼の此の研究はヤコビを誘ふて「ファッフの問題」と云ふ名前を導くに至らしめた。　ハミルトンによりて觀察された通常の微分方程式の一系(解析力學に見受ける)と部分微分方程式との間に存する關係から、ヤコビは、ファッフの方法で其等の逐次の積分を要求された數多の系統の中で、最初の系統を除いた他の凡べてのものが、全く餘計なものであると云ふ結論を誘導した。　クレブッシュはファッフの問題を新たな見地から觀察し、何等積分することをなさで、相互から獨立して確定することの出來る同

時的の一次の部分微分方程式の一系に直ほし得た。ヤコビは第一階の微分方程式の研究を實質的に進歩させた。或る若干の函數及び其微分係數とを有する一般の積分が、一つの指定された仕方で極大或は極小の價に到達すると云ふやうに之を決定する問題は、先づ第一に此積分の第一微分係數が消失すると云ふことを要する。此條件は其のものゝ積分が函數を決定せしめると云ふ微分方程式へ進行せしめる。而かも此の積分の價が極大であるか或は極小であるかを決定するには、更に第二次の微分係數を吟味することを要する。是は新たな且つ六ヶしい微分方程式を生ずるが、其積分が割合に單純な場合に於いては、第一次の微分係數の微分方程式の積分に由つて、ヤコビの巧みに推論し得た所である。ヤコビの結果はヘッセよつて完成された更にヤコビの結果はクレブッシュによりて第二次微係數に關する一般の場合に擴張された。カウシーは任意數の變數を有する第一階の部分微分方程式を解く方法を與へたが、これはフランスではセレ、ベルトラン、ボンネにより、又ロシヤではインシエネツキ等によつて改良された。

各々の通常微分方程式は任意の非特異點の近傍に於いては、收斂の或圓の中に於いて同義的であるやうな一つの積分を許すものであり、且つテーロルの定理に依つて展開されると云ふカウシーの定理は基礎的のものである。此定理に依つて指示された觀察點と關聯せるものは、單一變數の函數を其特異點の位置及び性質によりて定義せられるものと考へたリーマンの定理である。リーマンは此觀念を超幾何學的級數によりて滿足される第二階の一次微分方程式に應用した。此方程式は又ガウス及びクンメルに依りても研究された。變數の價に何等の制限も附せられない場合に於ける其一般的の理論はパリーのタンヌレーに依つて攻究され、同氏は其際一次微分方程式に關するフックスの方法を用ゐて此方程式のクンメルの二十四個の積分の凡べてのものを見出した。此研究は次いて、パリーのエドワルト・ジールサによつて繼續された。

積分係數、特異解法及び就中記號的方法に關係せる獨創的の事項を載せて居る微分方程式の標準的の教科書は、一時アイルランド、コルクにあるクエーンス大學の教授であつたジオルジ・ブール(千八百十五年―千八百六十四年)に依つて

千八百五十九年に編纂された。彼はリンコルンの住民であつて、大なる天才を有する獨學の數學者であつた。Finite Difference (1860) 及び Laws of Thought (1854) なる彼の著書は甚だ令名を博したものである。

カウシー及びリーマンの微分方程式に關する思想の豐富なるものなることがベルリンのラザルス・レックス(千八百三十五年に生れた)ゲッケンゲンのフエリクス・クライン、パリーのアンリー・ポアンカレ(千八百五十四年―千九百十年)其他の人々に依つて此部分についてなされた研究に依つて充分に證明された。一次微分方程式の研究は千八百六十六年及び千八百六十八年に公けにされたフックスの論文と共に新時代に進入した。是より以前には一定せる係數を有する一次方程式が、其一般的積分の方法の知られて居た唯一の方程式であつた是等の方程式の一般的理論が近來ヘルミット、ダルブー及びヨルダンに依つて新たな光明を與へられるに至つた間に、フックスはより一般的の立場からして其係數が常數でない一次微分方程式の研究を始めた。彼は主として其積分は全く規則正しきものである場合に對して彼の注意を向けた。若し變數が方程式の極どき點の一つ、或はより多くを圍む凡べての可能な道を描くやうになされるならば、吾等は凡べての道の各々に相當する或る置換式を有するものである。かくて是等凡べての置換式の全體が「群」と稱せられる。此の如き方程式の積分の形はフックス及びフロベニウスに依つて、夫れ〴〵に獨立の方法を用ゐて吟味された。對數は概して群の積分の中に現はれるものであるが、フックス及びフロベニウスは全く對數が其中に現はれないやうになる條件を研究した。群の研究によりて一次微分方程式が整約し得べき場合及び整約すべからざる場合とがフロベニウス及びレオ・ケェニヒスベルゲルに依つて吟味された。其の積分が凡べて規則正しいものでない場合の一次微分方程式の問題は、ベルリンのフロベニウス、グライスワルドのトーメ(千八百四十一年に生れた)ポアンカレに依つて研究された。併し不規則積分の理論が、尚、未だ甚だ不完全な有樣に存在する。一次微分方程式と關聯した不變數の理論はハルフエン及びフォルサイスに依つて啓發された。

上に述べた研究は、函數論及び群の理論と密接な關係を持つて居る。此の如

くにして、一つの微分方程式に依つて定義された函數の性質をば、其微分方程式夫れ自身によつて定義することに努力し、先づ其微分方程式を解いて、得た此函數の解析的の式から其性質を考へると云ふことをせぬ方面が開拓されるやうになつた。變數の凡べての價に對して、或る微分方程式の積分の性質を研究する代りに、研究者は却つて先づ、一つの與へられた點の近傍に於いて此方程式の性質を研究する丈で滿足した。特異點に於ける積分の性質と通常の點に於ける其性質とは全く異つたものである。共にパリーの人であるアルベール・ブリオ(千八百十七年—千八百八十二年)及びジァン・クラウド・ブーゲ(千八百十九年—千八百八十五年)とが、一つの特異點の近傍に於いて微分方程式が

$$(x-x_0)\frac{dy}{dx}=f(xy)$$

の如き形を取る場合について研究をなした。フックスは一次方程式の特別な場合に對して、積分の級數の展開式を與へた。ポアンカレは、方程式が一次でない場合に對して同じ研究を行うたことが第一階の部分微分方程式に對してなせると同樣であつた。又通常の點に關する展開はカウシー及びマダム・コワレスキによつて與へられた。

常に收斂的であつて、且つ一つの平面上の特別な點に制限されないやうな展開式で積分を現はさうと云ふ試みには新たな超越數の導入を要する、何故となれば、從來の古き函數丈では唯少數の微分方程式の積分を成就し得る爲である。ポアンカレはフックス、トーメ、フロベニウス、シュワルツ、クライン及びハルフェンによつて、與へられた點の近邊に就いて研究されたので、當時最も能く知られて居た一次方程式を用ゐて、此企を試みた。かくて彼は有理な代數學的係數を有する方程式に考を制限して、彼によりて「フックス函數」と命名された函數を利用し、是等の方程式を積分することを得た。彼は是等の方程式を若干の「ファミリー」に區別した。若し此の如き方程式の積分が或種の變形を受けるならば、其結果は矢張り同じファミリーに屬する一つの方程式の積分となる。此の新たな超越數は楕圓函數に類似したものである、所で楕圓函數の領分が多くの平行四邊形に分けることが出來、而かも是等の四邊形の各が、夫れ〳〵に一つの群を現はすものであるが、此の超越數も矢張り多くの曲線的の多邊形に分つことが

出來る、從つて一つの多邊形の内部に於ける此函數の知識が、夫と共に、他の多邊形の中に於ける此函數の知識を伴ふことになる。　此の如くにしてポアンカレは彼の「フックスの群」と稱へたものに到達した。　且つ彼は楕圓函數に於いても然るが如くに、フックスの函數も亦二つの超越數（テータ・フックス超越數）の比として現はすことの出來るものであるのを發見した。　若し上述せる群に於いて用ゐられた如くに實數の係數を有する一次の置換の代りに、虚數の係數を用ゐるならば、其場合には彼の「クライン函數」と稱した不連續的の群が得られる。　此の如く一次方程式に應用された此方法を一次でない方程式までの擴張が、フックス及びポアンカレによつて始められた。

群の樣々な種類の中で最も早く知られて居たものゝ中に、有限不連續的の群（置換の理論に於いて云ふ群）があり、此群がガロアの時代以來代數學的方程式の理論に於いて主もな觀念となつたこと、及び千八百七十六年以後フェリックス・クライン、ポアンカレ其他の人々は有限及び無限不連續的群の理論をば函數論及び微分方程式論に應用したのは吾等の知る所である。　有限連續的群が千八百七十三年に今ライプッツヒに居るソフス・リーによつて初めて一般的研究の問題となり、かくて彼に依つて通常の一次の部分微分方程式の積分に應用された。比較的に單純な函數、例へば代數學的函數、楕圓函數及びエーベル函數の如きものによつて、積分することが出來る一次の微分方程式を決定することに多大の趣味がある。　これに關する研究はヨルダン、バッリーのアッペル（千八百五十八年に生れた）及びポアンカレによりてなされた。

函數論の立場からして方程式の性質を知らしめると云ふ上述した積分の方法が力學の問題に微分方程式を應用する場合にとつて充分なものでない。　若し吾等は函數をば一つの平面曲線を定義するものと考へるならば、其際には此曲線の一般の形と云ふものが上述せる研究方法より現はれて來ない。　併なから微分方程式によつて定義された曲線を描くことが屢々望ましい問題となる。此目的を有する研究がブリオ及びブーケによつて、又ポアンカレによつて行はれた。

微分方程式の特異解法の問題は、ブールの時代以後、ダルブー及びケイレーに

依つて實質的の進歩をなした。是等の數學者により發表された論文は尙打勝つことの出來ない一つの困難を指示して居る。一つの特異解が積分された方程式の觀察點から言へば普遍的否な少くとも一般的に遭遇する一現象であることを要するが、併し反對に此微分方程式の觀察點から言へば甚だ特別な且つ除外的な一現象に過ぎない。ケイリーによりて用ゐられたものに似寄つた特異解法の幾何學的の一種の理論が以前にアンナポリスのジヨンソンに依つて用ゐられた。

微分方程式の高等な一敎科書 Treatise on Linear Diffential Equations (1889) はジヨンス・ホプキンス大學のトーマス・クレーグによつて編纂された。彼はヘルミツト及びポアンカレによつて選ばれた代數學的の記述方法を採用して、ジユワルツや、クラインなどによつて用ゐられた幾何學的方法を避けた。解析的の著名な敎科書 Traité d'Analyse はパリーのエミル・ピカールによつて出版され、微分方程式の題目に於ける中心たらんとして居る。

第五章　函數論

吾等は函數論に關する進歩の梗概をば橢圓函數と稱せらるゝ特別な部門を考へることによつて始める。是等はエーベル、及びヤコビによつて最も多く開發された。

ニエール・ヘンリツク・エーベル(千八百二年—千八百二十九年)はノルウエーのフインドに生れ、クリスチヤニアに於けるカトリツク敎の學校で敎育を受けた。彼は千八百八十八年まで數學に對して何等の趣味を有たなかつた。其時にホルムボーと云ふ人が大學の講師となつて、彼れに獨創的の問題に關した課題を與へたので大にエーベルの趣味を喚起した。ヤコビ及び偉大な數學者となつた他の多くの若き青年の如くに、エーベルは五次の一般的方程式を代數學によつて解くと云ふ計畫に於いて彼の大なる才能の最初の表現を示した。千八百二十一年に、彼はクリスチヤニア大學に入學した。オイレル、ラグランジユ、及びルジヤンドルの著述は彼によりて丁寧に學ばされた。橢圓函數のインヴアル

ションの問題は實に此時代に於いて彼に抱かれたものである。　彼の數學的研究に於ける非凡な成功は、政府によつて研究費を與へられるやうになり、彼は之によりてドイツ及びフランスへ留學して其研究を續けることを得た。　千八百二十五年にノルウエーを去り、エーベルはハンブルグの天文學者シユーマツヘルを尋ねた、それよりベルリンで六ケ月を費し、そこでアウギユスト・レオポル・クレール（千七百八十年―千八百五十五年）と親しくなり、又スタイネルとも會うた。エーベル及びスタイネルによつて刺戟されたクレールは千八百二十六年に彼の雜誌を始めた。　エーベルは、これより印刷によつて彼の著述の若干を公けにし初めた。　根數を用ゐる方法では五次の方程式の一般的解法を見出すことが出來ないものであると云ふ彼の證明が、千八百二十四年に―極めて縮めた形式で印刷され而かも甚だ解し難い―後より丁寧に說明され補充され、一冊の本として出版された。　彼は又無限級數の問題（別して彼がクレールの雜誌に嚴正な一般的の研究を與へた二項式の定理）、函數論及び積分學の研究に力を入れた。當時行はれて居た解析法に見る曖昧な論法に由來せる不明瞭な點をば彼は悉く除去せんと勉めた。　暫時の後彼はベルリンを去つて、フライベルグに至り其處で彼の研究が少しく途切れたが、而かも超楕圓函數及びエーベル函數に關する研究を爲した。　千八百二十六年の七月に、エーベルはドイツを發して、パリーに行つた。　かくて遂にドイツに在る間にガウスと會はなかつたのであつた！エーベルは五次の方程式を解くことの出來ないと云ふことに關してなした彼の千八百二十四年の證明をばガウスに送つたのであつたがガウスは之に注意を拂はなかつた。　乃ち此の些細の事而かも爲めに彼がガウスに對して抱いた彼の精神的傲慢が、遂に天才エーベルをしてゲッチンゲンに行かしめることを妨げた。　同じやうな感情は其後カウシーに對して矢張り向けられた。　エーベルはパリーに十ケ月滯在して居り、彼は其處でヂリクレ、ルジヤンドルや、カウシー其他の人々に會つた、併し彼等に餘り好遇されなかつた。　彼は當時既にクレールの雜誌中に若干の大切な論文を發表して居たのであつたが、フランス人に此の新しい雜誌の存在が未だ充分に知られて居なかつた、加ふるにエーベルは餘り謙遜して自分自身の著述を是等の學者に語らなかつた。　金錢上の困難は

彼をしてベルリンへ二度目の短かい滯在の後に本國に立ち歸へらしめた。クリスチャニアで、彼は暫くの間、私塾を開いて若干の人々に講義をなし、次いで大學の私講師となつた。クレールは彼の爲めにベルリンに於ける一つの位置を見出したが、其報知はエーベルがフロランドで死んだ後まで彼に到達せなんだ。

エーベルと殆んど同じ時に、ヤコビは橢圓函數論に關する論文を公けにした。長らく輕んぜられて居たルジャンドルの好んだ題目が遂に若干の驚く可き發見によつて開拓せられ初めた。第一種の橢圓積分を轉換することによつて得らるゝ利益と、此の積分をばそれの振幅の函數即ち今日橢圓函數と稱せらるゝものとして之を取扱ふことの利益がエーベルによつて認められ、其後數月にして又ヤコビによつても認められた。矢張り兩方の學者によつて獨立に到達された有利な觀念は是等の新たな函數が同時に三角函數及び指數函數の擬態をとると云ふ觀察へと導くに至つた虚數の導入であつた。蓋し三角函數は唯一つの實數の週期を有し、又指數函數が唯一つの虚數の週期を有するものであるのに、橢圓函數にありては是等の兩種類の週期を共有するものであるからである。是等の二つの發見が、エーベル及びヤコビが何れも自分自身の方法によつて夫れ〳〵に其上に美しき新たな建築物を据えた基礎であつた。エーベルは無限級數或は無限積の商によつて橢圓函數を現はす不思議な式を展開した。橢圓函數論に於けるエーベルの功績は甚だ大なるものであるが、而かも是等の結果は今日エーベル函數と稱せらるゝものに於ける彼の研究によつて凌駕されるに至つた。是等の函數に關するエーベルの定理は彼によつて樣々な形式に於いて與へられたが、是等の中で最も一般的のものは彼の論文 Mémoire sur une propriété generale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes (1826) に含まれたものである。此論文の歷史は甚だ面白い。彼がパリーに到着して數ケ月後、エーベルはフランスの科學學士院にそれを提出した。カウシーとルジャンドルとは其論文を吟味する役となつた。併しカウシーの死んだ後に至るまで其論文に就いて何等發表する所がなかつた。エーベルが、千八百二十九年にクレールの雜誌で公けにした此の問題となつて居る發見の簡單な叙述中に此論文の事が引照されて居る。茲に於いてヤコビは其論文がどうなつたかをルジャンドル

に尋ねることになつた。ルジャンドルは之に對して原稿が甚だ惡く書かれて居り讀み難いのでエーベルにより奇麗な寫本を要求したが、彼は其書直しを怠つて居たのであると答へた。此論文はカウシーの手元に殘つて居て、千八百四十一年まで公けにされなかつた。然るに不思議な災難によつて此原稿は其校正刷を檢閲する前に失はれて仕舞うた。

此論文は、其形式から見れば、積分學に屬するものである。エーベル積分は一つの無理函數yに從屬する。而かも亦之とxとの關係は方程式$F(x,y)$によつて示されたものである。エーベルの定理は、此の如き積分の和が、同樣な積分の一定の數pによりて現はすことが出來るものであり、p其のものは獨り方程式$F(xy)=0$の性質にのみ從屬するものであることを斷定したものである。其後に至りてpは曲線$F(xy)=0$の deficiency であることが證明された。楕圓積分の加法の定理はエーベルの定理から導くことが出來る。エーベルによつて導かれ、且つ彼によつて多樣の週期を有することが明かにされた、超楕圓積分は何時でも$p=3$、或は$p>3$であるエーベル積分の特別な場合である。エーベルの積分を楕圓函數に直すことが、ヤコビ、ヘルミツト、ケニヒスベルゲル、ブリオシ、グールサ、ピカール、及びシカゴ大學のボルサー等によつて主もに研究された。

エーベルの著書の二種の出版がなされた、第一のものは千八百三十九年にホルムボーによりて、又第二のものは千八百八十一年にサイロー及びリーによつてなされた。

エーベルの定理は、ヤコビによりて、吾等の世紀に於いてなされな積分學の發見の最大なるものと宣言された。大にエーベルの天才を賞讃した年老いたルジャンドルはそれを"Monumentum aere perennius"と呼んだ。若き此のノルウェー人に與へられた研究の數年間に、彼は研究の新たな方面を開拓し、かくて其の方面の發展の爲めに殆んど半世紀の間數學者をして多忙ならしめた。

エーベル及びヤコビの發見の若干はガウスによりて先んぜられて居た。ガウスは、Disquisitiones Arithmeticæ の中に、彼が圓の分割に對して用ゐた原理は圓函數の外多くの他の函數就中積分$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

に從屬する超越數に應用することを得るものであることを述べた。　これによりてヤコビはガウスが三十年より以前に橢圓函數の本性と其諸性質とを考へて居り、且つ是等の函數が二重に週期を有することを發見して居つたと結論して居る。　ガウスの全集中に見る諸々の論文が、此結論の當れることを示して居る。

カール・グスターブ・ヤコブ・ヤコビ（千八百四年―千八百五十一年）はポッダムで生れ、兩親はユダヤ人である。　多くの他の數學者の如く、彼はオイレル等の著書を讀むことによつて數學の趣味を感ずるやうになつた。　ベルリン大學で、彼は講堂に於ける課業と獨立に數學上の研究をなし、千八百二十五年に Ph. D. の學位を受けた。　其後二年間ベルリンで講義をなした後、ケニヒスベルヒ大學の教授となり、二年を經て正教授となつた。　彼の Fundamenta Nova の出版をなしてから旅行に出掛け、ゲッチンゲンで、ガウスに會し、又、パリーでルジャンドル、フーリエー及びポアッソンに逢うた。　千八百四十二年に、彼と彼の同僚のベッセルとは大英科學奬勵會の集會に出席し、其處でイギリスの數學者等と交ることを得た。

彼の早き時代の研究は定積分の値へのガウスの漸近法、部分微分方程式、ルジャンドルの係數、及び三乘殘數の價に關する事項であつた。　彼はルジャンドルの Exercises を讀んだ、此の書は橢圓函數について記載した一篇を載せて居る。彼は此本を圖書館に返した時に、大に失望し、且つ言うた、大切な書籍が概して彼に新たな觀念を惹起するのを常としたのに、此度に限つて一寸も獨創的の考が浮んで來ないと。　所が初めには甚だ緩慢であつたが、其後彼の考は段々と豐富に流れ出して來た。　橢圓函數に關する彼の發見の多くのものはエーベルとは全く獨立になされた。　ヤコビは彼の最初の研究をクレールの雜誌に通信した。千八百二十九年、齡二十五年の時に、彼は彼の Fundamenta Nova Theoriæ Functionum Ellipticarum と云ふ著書を公けにしたが、是は橢圓函數に關する主要な結果を摘要の形で記述したものである。　此著述によりて彼は直ちに大なる評判を博するに至つた。　彼はテータ函數に就て一層嚴密な研究をなし且つテータ函數に立脚し橢圓函數の新たな理論を彼の學生等に講義した。　彼は方程式 $q=e^{-\pi k'/k}$

によりて定義される根率の一つの超越函數 q を含有する公式の一組を生ずるに至る變形の一理論を開拓した。彼は又之れに依りて二つの新たな函數H及び $\textcircled{H}$ に導かれた、所が是れ等の各が二つ、の異つた引數を以て別々に取られると $\textcircled{H}_1$, $\textcircled{H}_2$, $\textcircled{H}_3$, $\textcircled{H}_4$ に依つて表はされる四つの(單純な)テータ函數である。千八百三十二年に出版された短い併なから甚だ重要な論文の中で彼は任意の組の超橢圖積分に對してエーベルの定理に關係する直接函數が橢圓函數 $sn, cn, dn,$ の如き、簡單な一變數の函數ではなしに、却つて p 個の變數の函數であると云ふことを證明した。此の如くにしてヤコビの特別に考へた $p=2$ と云ふ場合に於いては、エーベルの定理が、何れも二つの變數を有する二つの函數 $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$ に關係し、且つ實際、代數學的には $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, $\lambda(u', v')$, $\lambda_1(u', v')$ なる項によりて現される函數 $\lambda(u+u', v+v')$, $\lambda_1(u+u', v+v')$ の式に對して一つの加法定理を與へることを證明した。エーベル及びヤコビの論文に依つて、p 個の變數のエーベル函數の觀念が確立せられ且つ是等の函數に對して加法定理が與へられた。エーベル函數に關する近頃の研究はワイエルストラス、ピカール、マダム・コワレスキ及びポアンカレ等によりてなされた。ヤコビの微分方程式、行列式、力學、及び數論に關する著述に就いては夫れ〲別の章に於いて記することゝする。

千八百四十二年にヤコビはイタリヤに行き、そこに數ヶ月間滯在して彼の健康を恢復するに努めた。此時にプロシャの政府は彼に年金を與へたので彼はベルリンに移つて其處に彼の晩年を費した。

以上記載し來つた函數論に關する研究が大に範圍を擴めるに至つた。千八五十八年に、バリーのシャーレ・ヘルミット(千八百二十二年に生れた)はヤコビの變數 q の代りに、新たな一つの變數 ω を導いた、但し此變數は方程式 $q=e^{i\pi\omega}$ によりて q と關係したものである故、$\omega=iK'/K$ である、かくて函數 $\phi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ を考へることになつた。ヘンリー・スミスは ω の函數として、其引數が零に等しいテータ函數を考へた。彼は之をオミカ函數と稱へ、又三つの函數 $\phi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ が彼にありては根率函數である。實數及び虛數の引數に關係したテータ函數に關する研究はキールのマイセルや、エナのトメエ、ゲッチンゲンのアルフレッド・エンネペル(千八百三十年—千八百八十五年)等になされた。二つのテータ函數

の積に關する一般的公式がブレスラウのシュルユーテル(千八百二十九年—千八百九十二年)に依つて千八百五十四年に與へらた。是等の函數は又カウシー、ハイデルベルグのケニヒスベルゲル(千八百三十七年に生れた)、ケニヒスベルグのリシロ(千八百八年—千八百七十五年)、矢張り同地のローゼンハイン(千八百十六年—千八百八十七年)、ベルンのシュレフリ(千八百十八年に生れた)等によつて研究された。

橢圓微分を其標準式に書き直す爲のルジャンドルの方法が多くの研究を促がした。其中で最も主要なものはリシロ及びワイエルストラスの研究である。

橢圓函數の代數學的變形が古き根率と、一つの新しき根率即ちヤコビがは第三階の一つの微分方程式により、且つ又彼によりて根率方程式と呼ばれた一つの代數的方程式によりて表はされたものとの間に一つの關係を生ずる　根率方程式の觀念はエーベルに知られて居た。併し此問題が開展したのは其後の研究者に依る所である。是等の方程式は代數的方程式の理論には必要なものとなり、ゾンケ、マテウ、ケニヒスベルゲル、ビザのベッチ(千八百九十二年に死す)、パリーのヘルミツト、エンジエルのジユーベル、ミランのフランシスコ・ブリオシ、シユレフリ、シユルユーテル、クレーブのグーデルマン、グッツラフ等に依つて研究された。

グッチンゲンのフェリックス・クラインは置換論及び不變數及び協變數の理論として知られる二つの極端な型式の間に於ける運算法の一型を論じた際に、根率函數の範圍の廣い研究を行うた。クラインの理論は彼の弟子ロバルト・フリックに依り本にされて公にされた。其理論の最も大膽な面影は千八百八十四年に出た彼の Ikosaeder 中に公けにされた。彼の研究は橢圓函數の特別な一種として根率函數の理論を包含して居り、又一層一般的の問題の現し方が運算法の群の原理に基き、更に其問題の開展はリーマンの表面の一種と關係を有して居る。

橢圓函數はエーベルに依つて二重無限積の商として現はされた。併し彼は此積の收斂を嚴格に論究することをせなかつた。千八百四十五年、ケイレーは是等の積を研究し、かくて一部分が彼が橢圓函數論の全部の基礎となした幾何

學的解釋に立脚して居る一つの完全な理論を是等に對して發見した。アインスタインは純粹に解析的方法を用ゐて、一般的の二重無限積を論じ、ワイエルストラスに創められた素數係數の理論を用ゐて形式に於いては大に簡短にされた結果に到達した。二重無限積を含む或る一つの函數がワイエルストラスに依つて、シグマ函數と呼ばれ、それが楕圓函數の彼の美しい理論の基礎をなして居る。ワイエルストラスの楕圓函數論の最初の組織立つた叙述が千八百八十六年に、ハルフエンに依つて彼の著述 Théorie der fonctions elliptiques et des leurs applications 中に公けにされた。是等の函數の應用は又グレンヒルに依つても與へられて居る。楕圓函數論に於けるワイエルストラスのものに似寄つた綜合はクラインによつて超楕圓函數の理論についても與へられた。

楕圓函數論に關する標準的著述はブリオ及びブーケ(千八百五十九年)、ケーニヒスベルゲル、ケイレー、ブラーグのハインリッヒ・デュレージ其他によりて公にされた。

エーベル函數及びテータ函數に關するヤコビの業績はボッダムに近い一中學校のアドルフ・ギエペル(千八百十二年―千八百四十七年)及びケーニヒスベルグのヨハン・ゲオルグ・ローゼンハイン(千八百十六年―千八百八十七年)によつて與へられた。ギエペルは彼れの著述 Theoriæ transcendentium primi ordinis adumbratio levis (Crelle, 35, 1847) にて、又ローゼンハインは數篇の論文で各々獨立に、單純なテータ函數の類推に基いて二重テータ函數と稱せられる二つの變數の函數を確立し、是等と關聯して二つの變數のエーベル函數の理論を考究した。ギエペル及びローゼンハインによつて大成せられたテータ關係が、二重テータ級數が、解析的、幾何學的及び力學的の問題に段々と必要を加へるやうになつて來、且つヘルミット及びケーニヒスベルゲルが變形の理論の題目を考へたにも係はらず、其後三十年間特別の進歩をしなかつた。遂に、ベルリンのボルカルド(千八百十七年―千八百八十年)はギエペルの二つの變數を有する四つのテータ函數の間に於ける四次の關係によりて、クンメルの表面の表現を取扱つた研究及びマルブルグのウエーベル、ウユルップブルグのプリム、アドルフ・クレーツエル、及びドレスデンのマルチン・クラウゼの研究が出でゝ此概念が一層擴げらるゝに至つた。

二重テータ函數に關するケィレーの行うた研究が、更にジョンス・ホプキンス大學のクレーダにより四重テータ函數に擴張されるに至つた。

最も一般的の形ちの積分から出發し、且つ是等の積分（p個の變數を有するエーベル函數）に相當する逆轉函數を考へて、リーマンはp個の變數に從屬する一般項たる指數函數のp重の無限級數の和として、p個の變數を有するテータ函數を定義した。リーマンはエーベル函數は適當な引數を有するテータ函數と代數學的に關係したものであることを證明し、且つ此理論をば最も廣き形ちで現はした。彼は多樣テータ函數の理論をば、複素數の變數の函數論の一般的原理の上に築き上げた。

チュビンゲンのアー・ブリル、エルランゲンのノエテル、及びミュンヘンのフェルヂナンド・リンデマンの研究は、リーマン・ロックの定理及び殘數の理論に關係してなされたものであるが、之によりてエーベル函數の理論から代數的函數の理論と代數學的曲線上の「點群」とが生れて來た。

函數の一般論に進む前に、我々は主としてバッベージ、ハーシェル、及びド・モルガンに依つて研究された "Calculus of functions" なるものについて一言丈記したいと思ふ。此部門は函數論としてよりも寧ろより多く既知の函數又は記號の方法を用ゐて函數的方程式の解法を論じたものに外ならぬ。

一般的な函數論の歷史が函數の新たな定義の適用に始まる。ベルヌーリ兩氏及びライプニッツに從へば、若しx及びyなる兩變數間に一つの方程式が存在し、之によりて負無理大と正無限大との間に位する任意のxの與へられた價に對して、變數yの價を計算することが出來るやうな場合には、yはxの函數であると言はれたのであつた。然るにフーリエーの熱の理論に關する研究が、ヂリクレをして新たな函數の定義を設けるに至らしめた。之によると、卽ちxがx_0からx_1までの間隔中で取ると假定される若干の價の各に對して、yが一つ又はより多數の一定の價を有する場合にはyがxの函數と呼ばれるとのことである。此の如く定義された函數に於いてはyとxの間に何等の解析的關係の存するを要せぬ。かくて此場合には可能なる不連續の點に對して注意する必要が生じて來る。次いて函數の觀念に對して一つの大なる革命がカウシーに

依つて持來たされた。カウシーはチリクレに依つて定義されたやうな函數に於いて、變數の價に虛數の價を與へ且つ更に定積分の觀念をも、變數をして一つの極限から他の極限へ勝手な道に沿うて、虛數的の價の一列を取つて進行せしめると云ふやうに擴張したのである。カウシーは若干の根本的定理を設立し、且つ函數の一般論の研究に對して大なる最初の刺戟を與へた。彼の研究はフランスではビュイゾー及びリウビユに依つて繼續された。併し一層深遠な研究はリーマンに依つてドイツで行はれた。

ゲオルグ・フリードリッヒ・ベルナールド・リーマン(千八百二十六年―千八百六十六年)はハノヴアルのブレセレンツで生れた。彼の父は彼が神學を研究することを望んだ、隨つて彼はゲッチンゲン大學で言語學及び神學の研究に入つた。彼は又數學に關する講義をも聽いた。所が此科學に對する彼の偏好心が遂に彼をして神學を棄てしむるに至つた。暫時の間ガウス及びステルンの下で學んだ後に、千八百四十七年に當時數學者の明星と稱せられて居たチリクレや、ヤコビや、スタイネルや、アインスタイン等に引かれてベルリンに行くことになつた。千八百五十年に又ゲッチンゲンに歸へり、ウエーベルの下で物理學を研究し、其翌年にドクトルの學位を得た、其場合に提出した論文はガウスの大なる賞讃を博した Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse であつて、リーマンの試驗的講義 Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen が、ガウスによりて感服されたと同じであつた。リーマンの處女作は、三角函數に依つて、一つの函數を現はす方法であつたが、其論文で彼はチリクレよりも實質的に一歩を進めて居る。彼がゲッチンゲンで講義をし初めたときに示した彼の神經的なりしこと及び謙遜とについて、又彼の微分方程式に關する最初の講義に意外に多數の聽衆卽ち八人の學生を見て示した彼の悅びについて讀む場合に、我等の心が此非凡な謙遜な天才に引かるゝやうに感ずる。

其後、彼は唯三人の級にエーベル函數を講義した、三人の學生と云ふのはシエリング、ベルクネス、及びテデキンドである。ガウスは千八百五十五年に死んで、彼の後をチリクレが續いだ。チリクレが千八百五十九年に死んだ後に、リーマ

ンが其代りに正教授となつた。千八百六十年に、彼はバリーに行き、其處で多くの數學者と親しく交つた。彼の健康の良からぬ狀態が、三度イタリャに彼を誘うた。彼は其最後の旅行で、セラスカで死んでビガンツオロに葬られた。

リーマンの研究の凡べてのやうに、函數に關する研究も勿論非常に深遠な且つ達觀的のものであつた。彼は複素數の函數の一般論に基礎を据えた。其時代までは唯々數學的物理學に於いてのみ用ゐられたポテンチャル論が彼に依つて純正數學にも應用されるやうになつた。彼はかくて、$z=x+iy$ の解析的函數 $w=u+iv$ によりて滿足される部分微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\Delta u=0$$

に彼の函數論を築き上げた。チリクレによりて、$\Delta u=0$ なる方程式を滿足する x 及び y の函數が必ず一つ而かも唯一つ丈あり（一つの平面に對して）、且つ其函數が之と最初の二つの階の微係數と共に、一つの與へられた面積內では、x 及び y の凡べての價に對して、一價的で且つ連續的であるが、此面積の境界の上に與へられた點に於いては勝手に與へられる價を有すると云ふことが證明された。

リーマンは之をチリクレの原理と呼んだ、併し此定理はグレーンに依り敍述せられ、又ウイリアム・トムソンに依つて解析的に證明された。茲に於いて若し u が此曲線の上の凡べての點に對して勝手に與へられたものであり、且つ同時に v が此曲線內の一つの點に對して與へられたものであるならば、一つの圍まれた面の中の凡べての點に對して、w が單に決定されると云ふことになる。w が z の一つの價に對して n 個の價を有すると云ふ一層複雜な塲合を論ずる爲め、且つ又連續性に對する條件を觀察する爲めに、リーマンは「リーマンの面」と云ふ名の下に知られる有名な面を發見した。此リーマンの面と云ふのは、n 枚の一致する面からなり、是等の面が一枚のものから他のものへ通るのには枝點 branch-points てなされ、又是等 n 枚の面が合せて一つの多樣に連絡した面を作り、而かも又それが橫斷路により單一に連絡した面へと解剖することの出來ると云ふ性質のものである。此の如くにして、n 價の函數 w が一價の函數となる。フライブルクのルュロト及びクレブッシュの研究に助けられてクリフオルドは、リーマンの代數學的函數に關する面をば、一つの典型な形に直し、其面の中では、

n枚の中の最後の唯二枚のみが多様に連絡して居るものとなし、且つ次いて此面をp個の穴を持つた一つの立體の面に變化した。ツユリッヒのフルウイッツは、此問題をば尚一層研究し、リーマンの面が、面の枚數、其枝點及び枝線branch-lines の割當に依つて何程決定的のものであるかと云ふことを論じて居る。

リーマンの理論は、不連續及び境界條件の助けに依つて、一つの解析的函數を決定する規則を定め、かくて數學的の式と獨立して一つの函數を定義する。二つの異なる式が同じものであると云ふことを示す爲には、一つの式を他の式へと變形するの煩をなさんで、單に或極どき若干の點に於いてのみ夫等の一致して居ることを一層狹い範圍丈で證明すれば足りる。

チリクレの原理(トムソンの定理)に基いたリーマンの理論が非難ない譯でもない。一つの誘導函數の存在が、連續の結果でもなく、且つ又一つの函數が微分されるものであると云ふことなしに積分されると云ふことが明かになつた。微分學の方法と變數法の方法(それによりてヂリクレの原理の確立せられた)とが、其一般性に應じて如何程まで未知の解析的函數に應用され得るかと云ふことが、知られて居ない。隨つて是等の方法の使用が、夫れ自身が證明を要するやうな特性をば是等の函數に賦與することになる。リーマンの理論に對する此種類の非難が、クロネケル、ワイエルストラス其他の人々に依つて高調され、かくして彼の最も大切な定理が實際證明されて居るのかと云ふことが疑はしくなつた。其結果としてリーマンの思想をば、それよりも一層强きワイエルストラスの根據の上に接ぎ合せると云ふ計畫が始められた。ワイエルストラスは、函數論をポテンチヤル論から始めず、却つて、解析的の式や運算に立脚して展開した。尚兩方の學者は、彼等の理論をばエーベル函數に應用したが、リーマンの仕事の方が一層一般的のものである

一つの複素數の函數の理論が、リーマンの時以後、主としてベルリンのカール・ワイエルストラス(千八百十五年に生れた)、ストックホルムのグスタブ・ミタッハレフレル(千八百四十六年に生れた)及びパリーのポアンカレに依つて研究された此の如き函數の三つの種類、通じて一樣な函數、數多の穴を有する空間内に於いてのみ一樣な函數、及び一樣ならざる函數、に對して、ワイエルストラスはxの昇

冪順の收斂級數に展開され得べき第一種の函數が素數的係數の無限數の積に分解することが出來ることを證明した。種 species n の素數的係數は、積

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{P(x)}$$

であつて、此處で $P(x)$ は n 次の純正な多項式である。種 n の函數は、それの凡べての素數的係數は種 n に屬するものである。此分類は新たにポアンカレに依つて研究され多くの面白い問題を生んだ。

複素數の函數の三つの種類の第一のものは、就中特異點の無限の數を有するが而かも特異線を含んでは居ない、且つ又之と同時に孤立した特異點をも全く有して居ない函數を包含する。是等のものは全き廣がりを通じて存在するフックス函數であり、ポアンカレは初めて此の如き函數の一例を與へた。

或一次の置換に依つて變化をせない二つの變數の一樣な函數は超フックス函數と呼ばれ、パリーのピカール及びポアンカレに依つて研究された。

「穴を有する空間に於いてのみ一樣な第二種類の函數」はワイエルストラスに依り初めて指摘されたものである。フックス函數及びクライン函數は一つの圓の內部或は其他の方法で圍まれた範圍以內の外には一般に存在しない、從つて是等は第二種の函數の例である。ポアンカレは如何にして此種類の函數を作る可きかを示し、ワイエルストラスに依つて指示された方向に沿うて是等の研究を行うた。彼が與へた是等の穴を避け得るやうに是等を一般的にする方法が全く存在しないとの證明が大切なものである。

樣でない函數」は、前の二つの種類に比して餘り開展されて居ない。よし、一つの與へられたる點の近傍に於ける是等の性質が勤勉に研究せられ、且つ又リーマンの面の使用によりて多くの光明が是等の上に投せらるゝに至つたにしても大した研究はない。ポアンカレは一樣な超越數の研究へ是等の研究を引き直さんとの見解の下に、若し y が x の任意の解析的の一樣ならざる函數であるならば、常に x と y とが z の一樣な函數であるやうに、z なる一つの變數を見出すことが出來ると云ふことを證明した。

ワイエルストラス及びダルブーは何れも微係數を有せざる連續的函數の若干の例を與へた。以前にありては一般に各々の函數が一つの微係數を有する

ものであると假定されて居つた。微係數の存在を解析的に證明せんと企てた最初の人はアンペーアであつたが、而かも其證明は確かなものでない。不連續性の函數を論する中に、ダルブーは、一つの連續性或は不連續性の函數が積分を許すものである爲めに必要にして且つ充分な要件を嚴正に確立した。彼は常に收斂性のもので且つ連續性のものである級數の一例を與へ、而かも此級數の諸々の項の積分に依つて作られた級數が矢張り常に收斂性のものであるにも係はらず、夫れが最初の級數の積分を現はさないものの存することを明かにし、級數を用ゐる場合に充分の注意を拂はねばならない鮮かな證據を與へた。

二つの變數を有する函數の一般的の理論は或點までワイエルストラス及びポアンカレに依つて研究された。

ベルリンのハー・アー・シュワルツ(千八百四十五年に生れた)は、ワイエルストラスの弟子で、一つの圓の上に、樣々な面の相似な表現(Abbildung)を與へた。或置換の助けをかりて、圓の孤に依つて圍まれた多邊形を矢張り圓形の孤を以て圍まれた他のものに變形することに依りて、彼は、一つの著しき微分方程式$\Psi(u,t)=\Psi(u,t)$を得るに至つた。此式で$\Psi(u,t)$なる函數はケイレーの「シュワルツ誘導函數」と呼んだ處のものであり、それが又シルヴェスターをして逆比の理論を研究させたものである。シュワルツの極小面に對する展開、彼の超幾何學的級數に關する研究、彼の大切な部分微分方程式に豫定された條件の下に解の存することに關する研究等が、彼をして數學の歴史の上に卓越せる位置を占むるに至らせた。

一つの實變數の函數に關する近世の理論はハンケル、デデキント、カントル、チニ及びハイネに依つて初めて研究され、續いてワイエルストラス、シュワルツ、チユ・ボア・レイモンド、トメエ及びダルブー等に依つて一層開發された。ハンケルは特異點の收縮の原理を確立し、又デデキンド及びカントルは無理數に定義を與へ、トメーは定積分を研究し、チユ・ボア・レイモンド及びダルブーはカーシー、チリクレ、及びリーマン等の與へた此の如き積分の定義に依つて示される方向に沿うて研究をなした。チニは千八百七十八年に實變數の函數に關する一つの教科書を書いたが、それはルユロト及びシュッツブによつて補充されてドイツ語

に譯された。其他函數論に關する大切な著述は、ヘルミットの Cours, タンヌリの Théorie des Fonctions d'une variable seule, ハルクネス及びフランク・モルレーの A Treatise on the Theory of Functions 及びフォルサイスの Theory of Functions of a Complex Variable である。

第六章　數論

「科學の女王である數學、及び數學の女王である算術」と云ふのはガウスの格言である。此ガウスこそ數論を改革すべき運命を持つた人であつた。或時「何人がドイツに於ける最大な數學者であるか」と尋ねられラプラースはプファッフと答へた。質問者が彼は恐らくガウスと答へられるであらうと思うたと言うたらばラプラースは「プファッフの方がドイツに於いては遙かに優れた偉大な數學者である併しガウスの方は、全歐羅巴に於ける最も偉大な數學者である」と答へた。ガウスは近世解析法に於ける三人の最も偉大な先生中の一人である。即ちラグランジュ、ラプラース、ガウスの此三人が此等の偉人である。此中で最もガウスが若かつた。是等の中で最初の二人は、數學史中の今考へて居る時代に先んじた時期に屬して居るが、ガウスは其著述が誠に現代の初を指示する人と言ふ得べきである。前の時代の數學者によつて示された發明の最も豊富なる特徴がガウスに於いては、證明に於ける絶對的嚴正てふ特徴と結び附けられて居る。此嚴正な證明は屢々前の時代の人々の著述に缺けて居たものであり、實に古代のギリシャ人によりて羨まれたでもあらうと思はれるものである。ラプラースと異つて、ガウスは其の著述の形式の完全ならんが爲めに努力したのであつた。彼は其優雅なる記載振に於いてはラグランジュと競ふが、其嚴正なる點に於いては此大なるフランス人を凌駕して居る。彼の思想は驚くべき程豊富なものであつた。一つの思想が他の思想の浮ぶ間もなく浮び來つて最も簡單な輪廓さへも彼の記載し得ない程であつた。齢二十年の時にガウスは高等數學の凡べての範圍に渉つて舊來の學説及び舊來の方法を轉覆した。而かも彼の結果を公表し、夫によりて發明の古先權を得やうなどゝ餘り勉めなかつた。彼は無限級數の論じ方に初めて嚴正を與へた人であり、又行列式の有用なること

を充分に認め、且つ之を高調し其方法の秩序正しき應用をなした人であり、最小自乘法に初めて到達し、楕圓函數の二重週期性を初めて認めた人であつた。彼はヒリオトロップを發明し、且つ又ウエーベルと共に二本吊磁力計及び偏差計とを發明した。彼は磁氣學の全體を改造した。

カール・フリードリッヒ・ガウス(千七百七十七年—千八百五十五年)は瓦屋の息子で、ブルンスウイックで生れた。彼は常に戯談して居つた、自分は話し初めたよりも計算し初めた方が早かつたと。此の若き青年の計算に對する驚く可き才能が其の後ドルバットの數學教授となつたバルテルスの注意を惹き、此人は彼をブルンスウイックの公爵なるチャーレス・ウイリアムに紹介した。公爵はそこで此子供を教育することを企て、コレジウム・カロリヌムに送つた。語學に於ける彼の進歩は數學に於ける進歩と殆ど同じであつた。千七百九十五年に、彼はゲッチンゲンに行いたが、併し語學を學ぶ可きか數學を學ぶ可きか未だ心が定まらなかつた。當時其大學の數學教授であつたアブラハム・ゴットヘルフ・ケーストナーは今は主もに彼の著述 Geschichte der Mathematik (1796) で記憶せられる丈であつて、學生を感奮せしむる人では無かつた。齢十九年の時に、ガウスは圓内に十七邊を有する正多邊形を內接せしむる方法を發見し、此成功が彼を刺戟して數學を研究せしむるに至つた。彼は彼の教師と全く獨立して自ら研究をなし且つゲッチンゲンで未だ學生であつた間に、彼の最大なる發見の若干を成し遂げた。高等算術は彼の好んで爲した研究であつた。彼の親しい範圍の狹い學友の中にウオルフガング・ボルヤイと云ふ人があつた。大學の課業を卒へた後に、彼はブルンスウイックに歸つた。千七百九十八年及び千七百九十九年に、彼はヘルムスタットの大學に入り其圖書館を利用せんとした。其處で非常に天才のある數學者ブアッフと會合した。千八百七年にロシアの帝王がセントペーテルスブルグの學士院に於ける一講座をガウスに與へた。併し天文學者オルベルスの忠告に從ひ、彼はゲッチンゲンに新たに創立された天文臺の臺長となる爲めに此招聘を斷はり、遂にゲッチンゲンに來ることになつた。ガウスは數學講座に對して目立つ程に厭惡を有して居り、科學の研究に全時間を獻げることが出來る樣に天文學者の位置を喜んで受けた。彼は最も優れた研

究を引き續いてゲッチンゲンで其生涯を送つた。千八百二十八年に、彼は科學者の一集會に出席せんが爲めに、ベルリンに行つた。併し此後、彼は千八百五十四年にゲッチンゲンとハノヴアーの間に鐵道が開けた時の外決して再びゲッチンゲンを去らなかつた。彼は強き意志を有する人で其人格は自覺せる威嚴と子供らしき單純との不思議な混合であつた。彼は餘り交際を好まず、且つ時としては氣六つかしかつた。

數論に於ける新たな時代は、千八百一年に彼の著述 Disquisitiones Arithmeticæ (Leipzig) と云ふ本の出版から始まる。此著述の發端は千七百九十五年と云ふ早い時代までも溯るもので、其結果の若干のものはラグランジュ及びオイレルによつて既に與へられたものであつた。而かもガウスは彼等と獨立に之に到達し、他の學者の業蹟を彼が識れる前に既に充分此問題を研究して居つたのであつた。Disquisitiones Arithmeticæ はルジャンドルの Théorie des Nombres が著はれた時に既に印刷されて居つた。ガウスの著述の第四編中に與へられて居る二乘逆比の大法則即ち二次殘數の全き理論を包含する法則が、彼が十八年未滿の時に演繹法を用ゐて既に發見したもので、其一年後に矢張り彼によつて證明された。其後、彼はオイレルが不完全ながらも此法則を叙述し、又ルジャンドルはそれを證明せんと企てたが、併し凌駕し得ざる困難に出會うた事實を知り得た。第五篇に於いてガウスは高等算術中の此「寶石」の第二の定理を與へて居る。千八百八年には第三及び第四の證明が次いで出で、千八百十七年に第五及び第六の證明が公けにされた。彼は此定理に對して一種特別な愛着の念を抱いたと云ふことは驚くに足らない。之に對する證明は更にヤコビ、アイゼンスタイン、リウヴイユ、リベスク、ゲノッキ、クンメル、ステルン、ツエレル、クロネッケル、ブニアコースキ、シエリンク、ベーテルセン、フオイグド、ブッシユ、ペピン等によつて與へられた。二項の二次形式によつて數を現はすことに關する問題の解がガウスの大なる功績の一つである。彼は適合の理論を導いて新たな計算法を創立した。Disquisitiones Arithmeticæ の第四編が第二次の適合について論じ、又第五編は二次の形式に就いて論じたもので、ヤコビの時代まで一般の人々から無視せられて居たものである。併し是等のものは其後彼の大切な研究の一列の出發點とな

つた。第七卽ち最後の編は圓の分割の理論を開展したものであるが、之は之にふさはしき熱心を以て人々に受け容れられ、其後引續いて繰返へし〳〵學生の研究に資する處となつた。圓の分割に關する標準的の一著書は、千八百七十二年に當時ブレスラウに居つたバウル・バハマンによつて出版された。ガウスは第八編を企てたが、それが出版の費用を輕減するが爲めに省略された。數の理論に關する彼の論文は、彼の大なる此著述中に其凡べてが包含されて居ない。是等の若干のものは、彼の死んだ後に彼の全集中に初めて公けにされた(千八百六十三年―千八百七十一年)。彼は四次殘數の理論に就いて二つの論文を書き(千八百二十五年―千八百三十一年)、其第二のものは四次の逆比の定理を論じたものであつた。

ガウスは千八百一年にハレルモで小惑星ケレスの發見されたのによつて、天文學に誘はれた。彼はオルベルスをして再び之を發見することを得せしめた程充分に精密な此惑星の軌道の要素を決定したのはガウスの名を一般に知らしめるやうになつた。千八百九年に彼は Theoria motus corporum coelestium を公けにした。此書は任意の狀態の下に惑星及び彗星に就いて行うた觀測から是等の天體の運動の決定することに關して起り來る樣々な問題を論じたものである。其中に今日一般に「ガウスのアナロギー」と稱せられる球面三角術の四つの公式が載せられて居る。併し是等は稍々以前にライプツィヒのカール・モランドン・モルワイデ(千七百七十四年―千八百二十五年)によつて或處に公けにされたが、尙、一層より早く、フランスのドランブル(千七百四十九年―千八百二十二年)によつても矢張り發見されたものである。極めて激しき研究の數ヶ年がゲッチンゲンの天文及び地磁氣の觀測所に於いて費された。彼は一定した時刻に於ける連續した記錄を得んとの目的を以て、ドイツ磁氣學同盟を組織した。彼は測地學的の觀測に從事し、千八百四十三年及び千八百四十六年に Ueber Gegenstände der höheren Geodesie と題する二つの論文を書いた。彼は又千八百十三年に、均質な楕圓體の引力に關して書いた。千八百三十三年に毛細管引力に關する一論文の中に、彼は其積分の極限が矢張り變數である或二重積分の變化を含む變數法の題目に於ける一問題を說いた。是は實に此の如き問題の解法の最

も早き一例である　彼は光線のレンズの一系を通過することに就いての問題を論じた。

ガウスの弟子の中に、クリスチャン・ハインリッヒ・シューマッヘル、クリスチアン・ガルリング、フリードリッヒ・ニコライ、アウグスト・ノエルチナンド・モエビウス、ゲオルグ・ウィルヘルム・ストルーベ、ヨハン・フランツ・エンケなどがある。

ガウスの數論に關する研究は一派の學者の出發點で、是等の研究者の最も早い人はヤコビであつた。ヤコビはクレールの雜誌に三次殘數に關する論文を證明なしに寄せた。四次の逆比の法則を與へ且つ複素數の論の取扱方を記した四次の殘數に關するガウスの論文の出版後、ヤコビは三次殘數に關する類似の法則を見出した。橢圓函數の理論によつて彼は二、四、六、八の自乘によつて數を表はす方法に關する定理を發見するに至つた。續いてガウスの說明者であり且つ又彼自身の豐富な結果の寄稿者たりしヂリクレの研究が現はれた。

ペーテル・グスターフ・ルジユーヌ・ヂリクレ（千八百五年―千八百五十九年）はチユレンで生れボンの中學校に入學し後コロニユの中學校に轉じた。千八百二十二年に、彼はラプラース、ルジャンドル、フーリエー、ポアッソン、カウシーなどの名前を慕うてパリーに赴いた。パリーに於ける數學的教育に關する便宜はドイツに於けるよりも遙かに進んで居つた。ドイツではガウスは唯だ一人の偉大なる人物であつた。彼はパリーでガウスの Disquisitiones Arithmeticæ を讀んだが、夫れより其本を賞讚し且つ之を研究することを止めざるに至つた。其本に記載された多くの事項は、其後ヂリクレに依つて簡單にせられ、且つこれによりて數學者の澤山の人々にガウスの研究がより容易に研究されるやうになつた。五次の或る不定方程式の不可能に關する彼の最初の論文は、千八百二十五年に、フランスの科學學士院に提出された。彼はフエルマの方程式 $x^n+y^n=z^n$ が、n が五である場合には存在し能はぬものなることを證明した。併し解析の若干の部分はルジャンドルのものであつた。オイレル及びラグランジュは n が三及四である時に、此問題を證明し、又ラメは n が七である時に矢張り之を證明した。ヂリクレのフーリエーとの親交は彼をしてフーリエー級數を研究せしむるに至つた。彼は千八百二十七年に、ブレスラウで私講師となつた。千八百二十八

年に、彼はベルリンに於ける一つの位置を承認し、遂に千八百五十五年にゲッチンゲンに於けるガウスの位置を繼承した。 正及び負の行列式の二項二次の形式の一組の平均價に關する一般の原理は、Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie (1849) と云ふ論文中に、チリクレに依つて與へられた。 更らに一層近頃になつて、グラーッの人エフ・メルテンスは、若干の數的函數の漸近線的の價を決定した。 チリクレは素數にも幾らか注意を與へた。 ガウス及びルジャンドルは與へられた極限以内の素數の漸近線的の價を大體現はす式を與へた。

併し素數の漸近線的出現に關する嚴正な研究を與へる仕事は、千八百五十九年に Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse を公にしたリーマンのなす所として殘された。 異なる方面から此問題を研究した、以前セントペーテルスブルグ大學の敎授であつたパトニッチ・チエビチエフは有名な一つの論文即ち Sur les Nombres Preniers を千八百五十年に公けにし、一つの與へられた數 x 以内の素數Pの對數の和が其の中に含まれなければならない極限の存在することを示した。 此の論文は甚だ初步的の考察を爲したものであつて、其點に於いては積分の奥深い定理を含んで居るリーマンの研究と著しき對照を爲して居る。 ポアンカレの論文、シルヴェスターの素數の分布に關するチエビチエフの研究の極限の收縮、及びハダマールの研究(千八百九十二年に賞與を受けた)などは、此方面に於ける極めて最近の研究である。 素數の決定は樣々の數學者に依つて異なる時代に於いて企てられた。 千八百七十七年に、大英科學獎勵會がグレーシアの監督の下に、因數表の出版を企てた。 此協會によつて六百万までの數に對する表の印刷が始められ、これにはドイツ、フランス及びイギリスの學者が共に其編纂に盡力し、之によりて九百万以内の總ての複合素數を素の因數に分割し得ることになつたのである。

數論に對する數多の貢献はカウシーによつても與へられた。 例へば、彼は若し一つの解が與へられた場合には、三の變數を有する二次の整次不定方程式の凡べての無限の解が如何にして見出され得るかと云ふことを證明した。 彼は又、若し二つの適合而かも同じ根率を有する二つの適合が一つの共通な解を許るす塲合には此根率は是等の合成式の除數であると云ふ定理を確立し得た。

ヨセフ・リウヴィユ(千八百九年—千八百八十二年)は、コレージユ・ド・フランスの教授であつて、主として變數の數が二つ又はより以上の二次の形式の理論に關する問題を論じた。ベルリンの人であるフェルヂナンド・ゴットホルド・アイゼンスタイン(千八百二十三年—千八百五十二年)によりて矢張り深遠な研究が始められた。三項の二次の形式はガウスによつて或る程度まで研究されたが、二又は三の不定數を有するものへと之れを擴張したのはアイゼンスタインの業蹟であつた。彼は Neue Theoreme der höheren Arithmetik なる論文に於いて不整行列式の三項の二次の形式の階及び種の性質を定義し且つ一定の形式の場合には任意の階及種の重味を割當てた。併し彼は彼の結果の證明を公表しなかつた。二項三次の形式の理論を檢査して、彼は其以前に解析法によつて攻究された最初の協變數の發見に導かれた。彼は平方數の和によつて數を現はすことに關する定理の一系が、若し其自乘の數が八を凌駕する場合には用ゐることが出來ぬものとなることを證明した。アイゼンスタインによつて省略された證明の數多のものが、ヘンリー・スミスによつて補はれた。其人は高等算術の研究に對して熱中した少數のイギリス人の中の一人であつた。

ヘンリー・ジョン・ステブン・スミス(千八百二十六年—千八百八十三年)は、ロンドンで生れ、オックスフォードのバリオル・カレッヂで教育を受けた。千八百四十七年よりも以前には、彼は健康の爲めに屢々歐羅巴へ旅行し、其際一寸の間、パリーでアラゴの講義を聽いたことがある。併し其年の後に至りては一度も彼はオックスフォードを去つたことがなかつた。千八百六十一年に、彼は幾何學のサビリアン教授に選ばれた。彼の數の理論に關する最初の論文は、千八百五十五年に現れた。數の理論に關して公にされた十年間の種々の研究の結果は、千八百五十九年から千八百六十五年に至るまでの大英科學獎協會の出版物の中に現はれた彼の報告に於いて見ることが出來る。是等の報告は其解説の明瞭にして且つ精密なることと、其形式の完全なることに於いて模範とするに足るものである。是等の報告には獨創的研究の澤山のものを含んで居るが而かも彼自身の發見の主なる結果は千八百六十一年及び千八百六十七年に出版されたフィロソフィカル・トランサクションの中に印刷されて居る。是等のものは一次の不定方程式

及び適合の問題を論じ、且つ又三項の二次の形式の階と種とについて論じたものである。彼は、二次の形式のn個の不定數の一般の場合への擴張が、それに基いて居る原理をも研究した。彼は千八百六十四年及び千八百六十八年にローヤル・ソサイェチーの記事中に二つの論文を寄せ、其第二の論文に於いて四、六、八の平方數及び他の簡單な二次の形式によりて數を現はすことに關してヤコビ、アイゼンスタイン及びリウヴィユ等の發見せる定理は彼の論文の中に指示された原理から一樣な方法によつて、何れも導き出すことの出來るものであることを注意した。五つの平方數の場合に關する定理は、アイゼンスタインによつて與へられたが、併しスミスは是等の敍述を完全にし、且つ是と相當した七の平方數に關する定理を加へた。二、四、六の平方數の場合に關する解は橢圓函數によつて得ることが出來た、併し平方數の數が奇である場合には、數論に特別な運算を要することになる。定理の此の一級は八の平方數に制限されて居る。スミスは此一群をば完成し得た。スミスの研究を知らずして、フランスの科學學士院では、アイゼンスタインが與へた五の平方數に關する定理を證明し、之を完成することに對して懸賞問題を提出した。其實それよりも十五年より以前に、此問題がスミスによつて完成されたのであつた。彼はそこで千八百八十二年に、一つの論文を送つた所が其翌年に彼の死して一ケ月後に、其賞與が彼に送られ更に又ボンのミンコウスキにも他の賞與が與へられた。數論の研究はスミスを導いて橢圓函數の研究をさせるやうになつた。彼は又近世幾何學に關しても著述をなした。オックスフォルド大學に於ける彼の後繼者はシルヴェスターであつた。

エルンスト・エヂュアルド・クンメル(千八百十年―千八百九十三年)は、ベルリン大學の教授であつて、數論其ものと殆ど同定されて考へられて居る。ガウスによつて導かれた$a+bi$なる形狀の複素數に關するヂリクレの研究は、彼により又アイゼンスタインにより、更にデデキンドによつて擴張された。其の根がガウスの單位を生ずるやうになる$x^4-1=0$なる方程式の代りに、アイゼンスタインは$x^3-1=0$なる方程式及び複素數$a+b\rho$と云ふものを用ゐた(茲でρと云ふのは、一の立方根を現すものである)、かくて彼の創設した理論はガウスの數の理論

に似たものである。クンメルは更に一般的の場合 $a^n-1=0$ に移り行き、かくて $a=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\cdots\cdots$ と云ふ形の複素數を得た。此式で a_i が完全な實の數を現はし、A_i と云ふのは上の方程式の根を現はすものである。最大公約數に關するユークリッドの理論は斯の如き複素數には應用することを得ないものである。且つ是等の複素數の因數は、普通の完全數の素數的因數と同じやうな具合で定義を下すことは出來ない。此困難に打勝たんとする努力中に、クンメルは「理想數」ideal numbers なる觀念を用ゐるやうに導かれた。此理想數は、セントペーテルスブルグのツォロタレフによつて、エーベルが完成せずに遺した積分學の一つの問題 (Liouville's Journal. Second series, 1864, Vol. IX) の解に應用された。

ブラウンシュワイグのユリウス・ウイルヘルム・リシヤード・デデキンド（千八百三十一年に生れた）は、ヂリクレの Vorlesungen über Zahlentheorie の第二版に於いて複素數の一つの新しき理論を與へ、其中で、彼は或る範圍までクンメルの遣方から遠かり、理想數の使用を避けた。デデキンドは完全數の係數を有する任意の非誘導的方程式の根をば彼の複素數に關する單位として取つた。クンメルの研究に刺戟されて、彼の弟子なるレオポルド・クロネッケル（千八百二十三年—千八百九十一年）は、遂には代數學的方程式にそれを應用するに至つた若干の研究をなした。

反對に、數の理論の中へ近世高等代數學の結果を用ゐんとする努力がなされるに至つた。ヘルミットの研究に從うて、ミュンスターのパウル・バツハマンは三項の二次の形のアウトモルフィルクス automorphics を與へる算術的の公式を研究した。二つの正或は一定の三項二次の形の等價に關する問題は、エル・ジーベルによつりて解かれた。且つ又斯の如き形の算術的のアウトモルフィックスの問題はアイゼンスタインによつて解かれた。不定三項の形式に關する一層困難な等價の問題はウュルツブルグのエドワルド・セリングによつて研究された。四或はより以上の不定數を有する二次の形式に關しては、研究は尙ほ餘りなされて居ない。ヘルミットは、完全數の係數を有し、又一つの與へられた分別式を有する二次の形式の非等價的の一組の價の數が一定のものであると云ふことを證明した。又之と同時に共にセントペーテルスブルグの人であるツオロタ

レフ及びコルキンは正の二次の形式の極小を研究した。二項二次の形式に關してスミスは、若し二つの適當に原始的な形式の聯合不變數が消えるならば、是等のどちらかの行列式は元來他のものゝ副によつて代表されると云ふ定理を確定した。

算術及び代數學の間に於ける定理の交換は、トリニチイ・カレッヂのグレーシア(千八百四十八年に生れた)及びシルヴェスターの近代の研究の中に現はれたシルヴェスターはパルチションの作法の理論を與へ、これが彼の學生のフランクリン及びエリーによりて更に擴張をされた

「數」の觀念は、吾々の時代に於いて、非常に擴張された。ギリシャ人にありては、數なるものは單に通常の正の完全數を含んだ丈であつた。チオファンツスは數の領域中に有理分數を加へた。其後になつて、負の數と虚數とが次第に認められるやうになつた。デカルトは負數の觀念を充分に呑込みガウスは虚數の觀念を呑込んで居た。ユークリッドにありては有理並に無理の比は數ではなかつた。數として此及び無理數を認識するに至つたのは第十六世紀の時代であつて、ニュートンによりて充分に其式を有するに至つたのである。此方法によつて、實數系の連續性が空間の連續性に基いて考へらるゝやうになつた、併し近世に至つて無理數の三つの理論が、ヴィエルストラス、デデキンド、カントル及びハイネによつて提出せられ、空間からの觀念をからずして數の連續性を證明し得るやうになつた。是等の理論は、規則正しき順序に基せる數の定義、級數及び極限の使用、及び若干の新らしき數學上の觀念の上に築かれたものである。

第六章　應用數學

第十八世紀の終に於いてラプラースによつて到達された天體力學の立派な開展にも係はらず、現世紀の初めに其解析法の力に殆んどおへぬやうに見えた一つの問題を提起した發見がなされた。玆に言ふのはイタリヤに於てピアゼイのなしたケレスの發見を指すのである。それは哲學者ヘーゲルが斯の如き發見が爲すことの出來ぬものだと先天的に證明した一つの論文を公にした丁度後にドイツに於て知られた。ピアゼイに依つて爲されたか此惑星の位置の觀

測によりて其軌道が在來の方法を用ゐては完全に計算することが出來なかつた。かくて曲率が小さいとか、傾斜角が小さいとか云ふ假設を超越して居る楕圓軌道を計算する方法を案出する任務が**ガウス**の天才に殘されて居た。**ガウス**の方法は彼の著書 Theoria Motus 中に充分に論せられて居る。新しき惑星は、**ガウス**の計算の助けに依つて**オルベルス**によりて再び發見せられた。**オルベルス**は啻に自分の天文學的研究によりて科學を進めたのみでなく、**ベッセル**の天才を認め且つ天文學研究へ指導した天文學者である。

フリードリッヒ・ウイルヘルム・ベッセル（千七百八十四年―千八百四十六年）は**ウエストファリア**の**ミンデン**の人である。數に對する嗜好と**ラテン**の文法に對する嫌ひの心は、彼をして商人としての經歴を撰ばしめた。十五歳の時に、彼は**ブレメン**に於いて、ある店の番頭となつた。かくて殆んど七年の間、彼は日々其職業の取引に從事し、夜間の一部をさいて勉學することにした。或時彼は遠洋貿易の荷物上乘人たらんとする希望を起して海上での觀測に趣味を感ずることになつた。自ら作れる六分儀と一つの通常の時計とを用ゐて、彼は**ブレメン**の緯度を決定した。此問題に關する彼の成功が、彼をして天文學の研究に嗜好を抱かしめた。一つの書籍より他の書籍へと眼を進めて彼は教師の力を借らずして、眠を減じて得た時間中に充分に諸々の課業を咀嚼し得た。古き觀測を用ゐて彼は**ハリー**彗星の軌道を計算した。彼は**オルベルス**に自分自らを紹介し、彼に此の計算を渡した。すると**オルベルス**は之を見て直に出版するやうに取運んだ。かくて**オルベルス**に獎勵されて、**ベッセル**は富裕の見込ある方面に彼の背を向け、貧窮と星とを撰び、斯くて**リリエンタール**に於ける**シュリュテル**の觀測所の一助手となつた。四年の後に、彼は**ケニヒスブルグ**に新設された天文臺の建築を監督する任務を委ねられた。併し其大學で數學の數授の數が少ないので、**ベッセル**は天文の學生に數學の講義を爲さざるを得ざるに至つたが、千八百二十五年に**ヤコビ**が來たので、其仕事を免かれることを得た。吾等は近世の實地天文學及び測地學の創設者と云ふ尊號を**ベッセル**が得るに至つた彼の努力を此處に算へ立てやうとは思はない。觀測者としては彼は遙かに**ガウス**以上であつた。數學者としては、彼は彼の大なる同時代の偉人**ガウス**の天

才の前に絶えず尊敬を表した。**ベッセル**の論文中で數學上最も趣味あるものの一つは、"Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht" と云ふ論文である。其論文の中で、彼は超越函數の一級 $J_n(x)$ を導いた、これが「ベッセル函數」として知られ、且つ應用數學に多く用ゐらるゝに至つたものである。彼は是等の函數の主要な性質を與へ、且つ其價を評價するに要する表を作つた。近頃になつて、ベッセル函數が數學の文献上に於いて、尚ほ一層早い時代に現はれて居たことが分るやうになつた。零の階の斯の如き函數が**ダニエール・ベルヌーリ**の論文中(千七百三十二年)に現れて居る。更に又一つの端から吊された重い糸の振動に關する**オイレル**の論文中にも之れが現はれて居ると云ふことも分つた。第一種の且つ完全數の階數のベッセル函數の總てのものが、張られた彈性的の膜の振動に關する**オイレル**の論文(千七百六十四年)の中に現れて居る。千八百七十八年に、**ロールド・レーレー**はベッセル函數は單にラプフラースの函數の特別の場合に過ぎないと云ふことを證明した。**グレーシア**はベッセル函數を例にとつて、物理學上の研究から生じて來る數學的の部門は、一般に「所謂數學本來の理論に於ける特性とも言ふべき流暢即ち整質を缺く」と云ふ自分の主張を説明した。是等の函數はダンツィヒの**アンゲル**、ドレスデンの**シュロエミルヒ**、ボンの**リプシッツ**(千八百三十二年に生れた)ライプツィヒの**ノイマン**、ライプツィヒの**ロンメル**、ケムブリッヂのセント・ジョンス・カレッヂの**トドハンター**等に依つて研究された。

ラプラースの相續者の中で卓越せる學者は次ぎに述べる人々である。**シメオン・デニス・ポアッソン**(千七百八十一年—千八百四十年)は千八百八年に一つの古典的の論文 Mémoire sur les inégalites seculaires des moyens mouvements des planetes を書いた。チユリンの人**ゲオヴアンニ・アントニオ・アマデオ・プラナ**(千七百八十一年—千八百六十四年)は**ラグランジユ**の甥であつて、千八百十一年に一つの論文 Memoria sulla teoria dell' attrazione degli sferoidi ellitici を書き、且つ又月の理論に關して貢献する所があつた。ゴッタの**ペーテル・アンドリアス・ハンセン**(千七百九十五年—千八百七十四年)は一時トンデルンで時計製造師の職に從事して居つたが、其後アルトナでシュマッヘルの助手となり、遂にはゴッタの天文臺の臺長と

なつて、樣々の天文學上の問題に就いて論じ、就中月の理論に關して研究し、其研究を大成して Fundamenta nova investigationes orbitæ veræ quam Luna perlustrat なる著述を千八百三十八年に公けにし、之れに次いで數多の研究を出版した。が就中甚だ大きな月の表を出した。ジヨルジ・ビツデル・エーリー(千八百一年―千八百九十二年)は、グリーニチのアストロノマー・ローヤルであつて、千八百二十六年に、彼の Mathematical Tracts on Lunar and Planetary Theories を公にした。是等の研究は彼に依つて大に擴張された。アウグスト・フエルデナンド・モエビウス(千七百九十年―千八百六十八年)はライプツィヒの人で、千八百四十二年に Elemente der Mechanik der Himmels を公にした。ウルベーン・ジアン・ヨセフ・ルヴエリエー(千八百十一年―千八百七十七年)はパリーの人で、Recherches Astronomiques を書き、其一部に於いて天體力學の新たな仕上げをなし且つ又海王星を理論上から發見したことで有名な人である。ジヨン・カツフ・アダムス(千八百十九年―千八百九十二年)はケンブリツヂの出身であつて、ルヴエリエーと共に海王星の數學的發見者の名譽を荷ふ人である、且つ又彼は千八百五十三年にはラプラースの月の平均運動に關する長週期の加速度の說明は、唯だ半分だけ觀測された加速度を說明するものであると云ふことを指摘した。シヤーレ・ユーゲネ・デラウネー(千八百十六年に生れ千八百七十二年にシエルブルグで溺れて死んだ)は、パリーでソルボンヌに於ける力學の教授であつたが、彼は月の加速度に關して、アダムスの修正を經た後にも尙ほ說明されなかつたラプラースの理論をば以前にカント、ロバート・マイヤー及びケンタツキーのウイリアム・フエルレルに依つて獨立に指摘されたことのある潮汐摩擦の理論を以て大部分說明した。ジヨルジ・ホワード・ダーウイン(千八百四十五年に生れ千九百十三年に死んだ)はケンブリツヂの人で、千八百七十九年に潮汐摩擦に關する若干の甚だ著しき研究をなし、此理論に基き月の歷史をば其起源から充分の精確を以て追跡せんとした。彼は其後太陽系に於ける他の天體に對しても潮汐的摩擦の影響を研究した。彼の研究の若干の部分に關してヴイクトリアのゼームス・ノランが批評を加へた。サイモン・ニユーコンム(千八百三十五年―千九百九年)はワシントンの天體曆編纂所の監督であり、且つ長らくジヨンス・ホプキンス大學の數學教授であつたが、ハンセンの月

の表に於ける間違を研究した。最後の十二年間に於ける米國航海暦の編纂の任務に關する彼の方針は主としてルヴェリエーの表を凌駕する如き惑星の新しき表を編する爲めに必要な材料を集めることであつた。同じ編纂所のジーダブルユ・ヒルは惑星の直接の影響に依る月の運動の長週期の計算に關して若干の省略を爲し得ることに關して一つの優雅な論文を寄與し、且つ又地球の形に依る月の運動の不等に關して嘗て企てられたことのない、最も面倒な決定を試みた。彼は又木星の作用に依る若干の月の不均差に就いても矢張り研究をなした。

土星の輪の數學的の研究は初めラプラースに依つて企てられ、之が若し一つの均質の固體的の環である場合には釣合の狀態を取ることが出來ないと云ふことを證明されたが、千八百五十一年には更にピー・ピーアルスに依つて土星の周圍にありては一つの不規則の固體的の環も矢張り釣合の狀態を取ることが出來ぬと云ふ理論の下に環が固體の狀態のものでないと證明された。是等の環の機構に關してゼームス・クラーク・マックスウェルは一層深く研究をなし、此研究がアダムス賞を授與されるに至つた。此論文でマックスウェルは土星の環が相離れた無數の微粒子の集合であると結論した。

三體運動の問題はラグランジュの時以後樣々の仕方に依つて論せられたが、一層完全な代數學的解法へ向ふ決定的の進步が一つも示されなかつた。斯くて此問題は實質上ラグランジュの殘した其儘に殘されて居つた。彼は之に關する微分方程式をば第七階までのものへと整約した。是は千八百四十三年にヤコビに依つて異なれる方法に依つて巧に成遂げられた。ラダウ (Comptes Rendus, vol. 68, 1868, p 841) 及びアッレグレ (Journal de Mathematiques, 1875, p. 277) は其整約が是等の最初の形ちに於ける方程式の上にもなすことが出來ると云ふことを示した。此問題の著しき變形と議論とがベルトランに依り、又エミール・ブーア(千八百三十一年—千八百六十六年)に依り、マテウ、ヘッセ、セレ等に依つてなされた。ライプツィヒのブルンスは三體又はn體の問題に關しての進步は代數學的積分によりては望むことは出來ない。吾等は其完全なる解法に向つては函數論に關する最近の理論に注意を拂はなければならぬと云ふ説を言ひ出

した。(Acta. Mathem., Vol. 11, p. 43).

數學的天文學に關する主要な敎科書の中で若干をあげると、Manual of Spherical and Practical Astronomy by Chauvenet (1863), Practical and Spherical Astronomy by Robert Main of Combridge, Theoretical Astronomy by James C. Watson of Ann Arbor (1868), Traité Mécanique Céleste by Tisserand, Lehrbuch der Bahnbestimmung by T. Oppolzer, Mathematische Theorien der Planetenbewegung by O. Dziobek 等であり、此最後の本は**ハリントン**及び**ハツセー**によりて英語へ飜譯された。

現世紀の間に、吾々は力學上の問題をば幾何學的に取扱ふことの利益なることをば屢々認めるやうになつて來た。**ポアンソ**、**チヤスレー**、**モエビウス**に吾等は幾何學的力學に關してなされた最も多くの主なる進歩を感謝しなければならない。**ルイ・ポアンソ**(千七百七十七年－千八百五十九年)はパリーのエコール・ポリテクニックの卒業生であつて、其後長い間佛國文部省の高等委員會の一委員であり、千八百四年に彼の Elements de Statique を公けにした。此の著述は、單に綜合力學に關する最も早き初歩として有名なばかりでなく、偶力の觀念を初めて與へたものであり、此觀念が又千八百三十四年に**ポアンソ**によりて公けにされた回轉の理論の中にも應用された。回轉運動の性質の明瞭な意識は、定つた一平面上に廻る橢圓體の仕方で**ポアンソ**の優雅な幾何學的表現によつて現すことが出來た。此作圖法は**シルヴエスター**によつて擴張され、此平面上に橢圓體の回轉する割合を測るやうになされた。

力學的問題の特別な一群は、近頃**サー・ロバート・ステワルト・ボール**によつて幾何學的に取扱はれた。**ボール**は以前アイルランドのアストロノマー・ローヤーであり、其後ケンブリッヂの天文學及び幾何學のロンデアン敎授であつた。彼の方法は千八百七十六年に出版された Theory of Screws (Dublin) と題された書の中に與へられ、且つ又其後引續いて出版された論文中にも現れて居る。近世幾何學が茲に引用された工合は、恰かも**クリツフオート**によつて八元法の關聯した問題に於いてなされたやうである。**マンチエスター**の**アルサー・ブツフハイム**(千八百五十九年－千八百八十八年)は**グラスマン**のアウスデーヌングスレーレーは橢圓的空間に於いて螺旋の簡單な計算法に對して凡べての重要な材料

を與へると云ふことを示した。ホレース・ラムは螺旋の理論をば流體中に於ける任意の固體の規則立てる運動の問題に應用した。

力學的方程式の積分及び其形式の變化などに關する力學上の進歩はラグランジュの後に、ポアッソン、ウイリアム・ローワン・ハミルトン、ヤコビ、マダム・コワレスキ及び其の他の人によつてなされた。ラグランジュは運動の方程式の「ラクランジュの形式」を設定した。彼は又勝手な常數の變化に關する理論をも提出したが、それはポアッソンによつて與へられた一つの理論よりも其結果に於いてはより効果の少ないものであると分つた。ポアッソンの勝手な常數の變化の理論と、それによれる積分の方法は、ラグランジュ以來初めて一歩を進めたものである。其後サー・ウイリアム・ローワン、ハミルトンの研究が續いた。彼は力學的微分方程式の積分が第一階の二次の或る部分微分方程式の積分と連絡したものであると云ふことを發見したことは、抑も彼は以前微粒子説の觀念に基いて得られた幾何學的光學に於ける結果をば波動論の下に導かんとの企てから起り來つたものである。千八百三十三年及び千八百三十四年のフィロソフィカル・トランサクションは、ハミルトンの多くの論文を連載し、其中に變化する作用の原理及び若干年以前に彼によつて設定された特性函數の最初の力學的應用を包藏して居る。ハミルトンが彼の最初の論文の題目にとつたもの卽ち其助けをかりて凡べての積分方程式が實際表される一つの函數の發見と云ふことは彼の目ざして行つた目的物であつた。彼によつて運動の方程式に對して到達された新たなる形式は、其論文で言ひ現はして居る目的物に比較して決して劣らない程重大なものであつた。ハミルトンの積分の方法はヤコビによつて必要ならざる重複を免かれ、續いて彼によつて其方法が一般的な橢圓體の上に於ける「測地學的線」の決定に應用された。橢圓坐標の使用に依つて、ヤコビは部分微分方程式を積分し、且つ測地學的線の方程式をば二つの「エーベル積分」の間に於ける關係の形ちに現はし得た。ヤコビは力學の部分方程式に、究竟乘數の理論を應用した。力學の微分方程式はヤコビに依つて考へられた微分方程式の一群中の一つであつた。ラグランジュ、ハミルトン及びヤコビの取つた方面に於ける力學上の研究は、更にリウヴイユ、テスボーブ、セレ、スツルム、オストロ

ダラドスキ、ベルトラン、ドンキン、ブリオシ等によつてなされ、遂に典型的積分の一系の開發を見るに至つた。

一つの定れる點の周りの固體の理論に關して重要なる進步は、さらにマダム・ソフィ・ド・コワレスキ（千八百五十三年—千八百九十一年）によつてなされた。此夫人は運動の微分方程式が積分することの出來る一つの新たな場合を發見した。二つの獨立變數を有するテータ函數の使用によつて、此夫人は如何にして函數の近世の理論が力學的の問題にも用ゐられるやうになされ得るかと云ふ點につき一つの著しき例を與へた。此夫人は莫斯科の人であつて、ワイエルストラスの門弟となつて勉强し、ゲッチンゲンでドクトルの學位を得千八百八十四年から死に至るまでストックホルム大學の高等數學の敎授であつた。上に記した研究は千八百八十八年にフランスの科學學士院のボルダン賞典を受け、而かも其論文の非凡な功績のあるを認められて其賞金を二倍に增された。

力學的系統の運動のエネルギーを現はす方法に三つの形式が流行して居る。卽ちラグランジュの方法、ハミルトンの方法、及び若干の速度を省略してラグランジュの方程式を變化せる方法である。運動のエネルギーは、最初の形式に於いては速度の整次の二次函數として現され、又速度は此力學的系統の坐標の時間による微係數として示されて居る。第二の形式に於いては、其系統の運動量の整次の二次の函數として現されて居る。第三のものはケンブリッヂのエドワルト・ジョン・ラウスによつて彼の「坐標の無視」の理論に關係して、近頃著しく研究されたものであり、且つ又バッセが流體中に穴をあけた固體が運動することに就いての問題及び物理學の他の部分に於ける力學的問題に重きをなすものである。

近世に至つて「力學的寫しの原理」Principle of mechanical similitude に對して大なる實際上の必要が生じて來た。之によりてより大なるスケールで拵へた機械の作用をばモデルの作用から決定することが出來る。此原理は初めニュートン (Principia, Book II, Sec. 8, Prop. 32) によつて言ひ現はされ、其後ベルトランによつて假速度 Virtual velocity の原理からして導かれたものである。此原理の一つの系として、造船術に於て應用されたものはウイリアム・フラウドの規則の名の下

に呼ばれて居るが、併しレーチによりても矢張り言ひ現されたものである。

力學の現代の問題は前の世紀に問題とせられたものと根本的に異つて居る。天體の軌道及び軸の周りに於いてなす運動を萬有引力の法則によつて說明することは、クレーラウ、オイレル、ダランベル、ラグランジユ及びラプラースによつて說かれた大問題であつた。而かもそれは摩擦的抵抗の考を含んだものでなかつた。近代に於ては物理學的科學によつて力學の助力が懇請されるやうになり、斯くの如くにして起つた樣々の問題は屢々摩擦の存在によつて複雜なるものとなつた。一世紀以前の天文學上の問題と異つて、是等のものは通常直接の觀測から隱されて居る物體及び運動の現象に關係する。斯の如き問題に關する大なる率先者はロールド・ケルヴィンであつた。彼は尙ほケンブリッヂの學生の身であつて海岸で休暇を過して居る間に、以前唯だジエレットによつて彼の Treatise on the Theory of Friction (1872) 中に說明され、又アルチバード・スミスによつて幾らか說明されたことのある、獨樂の運動の理論に關して思ひを潜めた。

力學に於ける主もなる著述の中には、千八百六十六年クレブシユの出版したヤコビの Vorlesungen über Dynamik, 千八百七十六年出版のキルヒホッフの Vorlesungen über mathematitsche Physik, 千八百五十五年出版のベンジヤミン・ペーアルスの Analytic Mechanics, 千八百七十九年出版のソモッフの Theoretische Mechanik, 千八百五十六年出版のテート及びステールの Dynamics of a Particle ミンチンの Treatise on Statics, ラウスの Dynamics of a System of Rigid Bodies, スツルムの Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique 等である。

流體運動の理論の基礎を作る方程式はラグランジユの時代に於いて充分に据えられた。併し實際の解法の與へられたものは少なく、而かも其論ぜられたのは非廻轉性のものであつた。流體運動に關する問題を攻擊するのに有力な一方法は千八百四十三年にケンブリッヂのジヨルジ・ガブリエール・ストークスによつて導かれた「映像の方法」である。此方法はサー・ウイリアム・トムソンの電氣學的の映像の發見があり、其の上にストークスや、ヒックスや、ルーエスなどが此理論を擴張せし時まで餘り注意を惹かなかつた。千八百四十九年に、トムソンは流體力學に特別な極大極小の理論を與へたが、其後それが一般に力學上の

問題に擴張されるに至つた。

千八百五十六年にヘルムホルツによりて流體力學の進歩に於ける一新時機が劃せられ、彼は粘性を缺いた一種の均質な非壓縮性の流體中に於ける廻動的運動の著しい性質を闡明した。彼は此の如き媒質中の渦動性纖維は結節及び捩れを何程なりと有することが出來るものである。が、而かも是等は端なしのものか然らざれば其端が媒質の自由表面中に存するものであることを證明した。是等の結果はサー・ウイリアム・トムソンに、其上に原子論の一つの新たなものを築き上げることの可能なるを暗示した、此理論に從へば各の原子は非摩擦性のエーテル內の渦動輪であり、且つ其狀態が物質中に又時の繼續中に其儘絕對的に永存すべき筈のものである。渦動原子說はケンブリッヂのジエー・ジエー・トムソン（千八百五十六年に生れた）によりて論議せられ、彼の古典的著述Motion of Vortex Ringsに發表され、千八百八十二年にアダムス賞を受けた。其他渦動に關する論文はホレース・ラム、トーマス・クレーグ、ヘンリー・エー・ローランド、及びチャールス・クレーによりて發表された。

噴射jetの問題はヘルムホルツ、キルヒホッフ、プラトー、及びレーレー等によりて研究せられた、一つの流體中に於ける他の流體の運動はストークス、サー・ウイリアム・トムソン、コエプケ、グレーンヒル及びラムによりて研究せられ、粘性流體の理論はナヴイエー、ポアッソン、セント・ヴエナン、ストークス、オー・イー・マイヤー、ステファノ、マックスウエル、リプシイッツ、クレーグ、ヘルムホルツ及びバッセによりて研究された。粘性流體は摩擦の理論が缺陷を有する爲め其運動方程式が完全流體に於けるが如くに充分な確實の程度を缺くのと、更に小さな面積に於ける斜な壓力をば速度の微分と連結するの困難とがある爲めに甚だしき難關を示めす。

液體中の波はイギリス數學者の好んでなした題目であつた。ポアッソン及びカウシーの早き討究は液體の小さな部分の上に勝手に作用を及ぼす攪亂原因によりて生せられる波の研究へ向けられた。長い波の速度は千七百八十六年に其切口が長方形の溝に關してはラグランジユによりて、又三角形の切口を有する溝に就いては千八百三十九年にグレーンによりて、又切口が任意の一樣な形ちを有てるものに關してはケルランドによりて、何れも近似的の値を與へ

られた。サー・ジョォルジ・ビー・エーリーは彼の著述 Tides and Waves 中で、近似てふことを去つて、其切口が一樣な長方形を有する場合に長き波の理論が其上に休むべき精密な方程式を與へた。併し彼は此方程式の一般的な解を與へなかつた。ダンデーのユニヴァルシチー・カレッヂのマックコワンは一層充分に此問題を論じ、其或る場合に關して精密にして且つ完全な解法に到達した。長い波の理論の最も大切な應用は河川及び入江に於ける潮汐現象の說明に關するものである。

單獨な波の數學的の研究は千八百四十五年に初めてエス・アールンショウによりて企てられ、次いてストークスの研究となつたが、而かも最初の充實した近似的の理論が千八百七十一年にジエー・ブーシネスクによりて述べられ、彼は是等の形狀に關して一つの方程式を與へ且つ實驗と一致するやうな速度の値を求め得た。他の近似的の方法がレーレー及びマックコワンによりて與へられた。深海の波に關して、オスボールン・レイノルズは千八百七十七年に此の如き波の一群が單獨な波の速さの僅かに二分の一で前進すると云ふ事實に對して力學的の說明を與へた。

流體內に於ける一つの廻轉橢圓體の一般的運動の問題の解法はグレーン(千八百三十三年)、クレブッシュ(千八百五十六年)及びビエルクネス(千八百七十三年)の引續いた勞力の結果である。液體內の固體の自由運動はウイリアム・トムソン、キルヒホッフ及びホレース・ラムによりて研究された。彼等の勞力によりて、流體內の單獨な運動が可なり能く理解されるやうになつた併し一つの流體內に於ける二つの固體の場合が其樣に充分に解決されるに至らなかつた。此問題はヒックスによりて討究せられた。

廻轉する液體橢圓體の振動週期の決定は月の原因の問題にとつて大切な關係を有して居る。之に關するジョルジ・ダーヴインの研究はリーマン及びポァンカレの探究の光線で見渡されると、月が一つの輪として地球から分離したものであると云ふラプラースの假定を否定するやうに見える。蓋し其角速度が安定に對して餘りに大きなものであつた。ダーヴインは何等の不安定をも見出さなかつた。

收縮する脈の説明は大に議論の中心となつたものであるが、フラウド及びレーレーによりて唱道された運動量の原理の應用によりて一層光明を受けるに至つた。レーレーは又波の反射を考究したが但し其處では遷移が穿然である二つの一様な媒質の分離の面に於いてゞはなしに、其の遷移が漸次的な二媒質の境界の近くからの反射を考へたのであつた。

地球の表面上に於ける風の循環に關する最初の嚴正な研究は此世紀の第二の四分期の始め頃にドーヴェ、レッドフィールド、エスピーによりて行はれ、次いでライト、ピチントン、エリアス・ルーミスの研究となつた。されど此大氣の變化する運動の間に存する不思議な關聯 correlations に對する最も深き洞察はウイリアム・フェルラー(千八百十七年—千八百九十一年)によりて得られた。彼はペンシルヴァニアのフルトン郡で生れ、農園内で生育された。其周圍の良好ならざりしにも係はらず此青年の知識に對する燃えるやうな嗜好は一科より他の科へと咀嚼をなすに至らしめ、彼は遂にマルシャル・カレッヂに入學し又千八百四十四年にベッサニー・カレッヂを卒業した。續いて學校の敎師となつて居る間に氣象學及び潮汐の問題に對して趣味を有するやうになつた。千八百五十六年に彼は "The Winds and Currents of the Ocean" なる論文を書いた。翌年に米國編暦局と關係するに至つた。千八百五十六年には更に "The Motion of Fluids and Solids relative to the Earth's Surface" なる數學的の論文が出た。此題目は其後擴張されて旋風、颶風、龍卷等の數學的理論をも含むものとされた。千八百八十五年に彼の Recent Advances in Meteorology が現はれた。一人の主な歐羅巴の氣象學者ヴィンのハンの意見に從へば、フェルラーは「何れの他の生存する物理學者或は氣象學者よりも大氣の物理學の進歩に對してより多く寄與した」人である。

フェルラーは空氣が兩極の方へと大きな螺旋をなして流れ、而かも其兩方は大氣の上層且つ緯度三十度以上の所からし、之と同時に上述の螺旋と殆んど直角をなして回歸の渦動が中央層及地球表面に於いて北緯三十度と南緯三十度とに含まれた帶中に行はれる。三つの重なり合ふ氣流の渦動の觀念はジェームス・トムソンに依て提案されたが、併し甚だぼんやりした大要に過ぎなかつた。

フェルラーの意見はアメリカ、アウストリア、及びドイツに於ける理論的研究

に大なる刺戟となつた。彼の議論に反對した若干の非難が或は放棄せられ又或はハーヴァード大學のテーヴイスによりて答へられた。ワシントンのワルド及び其他の學者の數學的解析は一層此理論の精確なることを確かめた。クラカトアの塵埃の運搬と其雲に於ける觀測とが赤道に一つの上層の東へ向ふ氣流のあることを指示し、又ベルトネルはフェルラーの理論から數學的に此の如き氣流の存在を誘導し得た。

大氣の一般的な循環の他の學說はベルリンのウエルネル・シーメンスによりて提案され、彼は其論文で空氣の流れに熱力學を應用せんと企てた。大切な新たな見解が近頃ヘルムホルツによりて導かれ、彼は若し二つの空氣の流れがあり一つが他のもの丶上を反對の方向へ吹けば、恰かも海に波が生せられるが如くに空氣波の一系が生起すると結論した。彼及びオーベルベックは海上の波が十六呎より三十三呎の長さに達するときには空氣波が十哩乃至二十哩の速さに達し、之に比例せる深さになると云ふことを明かにした。ヘルムホルツは廻轉の水力學的方程式から、赤道の地方から觀測し得た速度が例へば緯度二十度或は三十度の所で若し其運動が何物によりても妨げを受けなかつたならば當然示すべき筈の値に比べて何故に此の如く著しく小ならざるを得ざるべきかの理由を確立した。

千八百六十年頃、音響學が其英氣を吹き返へして熱心に研究され出した。管及び振動する弦の數學的の理論が第十八世紀中に、ダニエール・ベルヌーリ、ダラムベル、オイレル、及びラグランジュによりて仕上げられた。現世紀の初葉に、ラプラースは瓦斯中に於ける音の速度に關するニュートンの理論を修正し、ポアッソンは振れ振動の數學的議論を與へ、ポアッソン、ソフイー・ゲルメーン及びホエートストーンはクラドニの圖形を研究し、トーマス・ヤング及びウエーベル兄弟は音の波動論を開展した。サー・ジエー・ダブルユー・ハーシエルは千八百四十五年にEncyclopædia Metropolitanaの爲めに音の數學的理論を書いた。ヘルムホルツの實驗的ならびに數學的の研究は新機軸を劃したものであつた。彼及びレーレーによりフーリエーの級數は相當な注意を受けた。ヘルムホルツは拍節、差調、和調の數學的理論を與へた。ケンブリッヂのロールド・レーレー（千八百四十

二年―千九百十九年)は一般に振動の理を論じた一部分として音響學の廣い數學的研究をなした。彼の研究の內で茲には就中音波に對する球狀の障碍物の影響や、流體の噴射の不安定に關聯してなされた敏感な焰の如き現象について の研究が記載すべきであらう。千八百七十七年及千八百七十八年に彼は The Theory of Sound なる二冊の本を公けにした。此題目に關する他の數學的研究は イギリスではドンキン及びストークスによりてなされた。

彈性論は此世紀に屬するものである。千八百年以前にありては、彈性固體の運動或は釣合に關係した一般的の方程式を作らんとする企てが見受けられなかつた。特別な問題が夫れ〲特別な假設の下に解かれた。例へばジームス・ベルヌーリは彈性の小片を考へ、ダニエル・ベルヌーリ及びオイレルは振動する棒を研究し、ラグランジュ及びオイレルとは發條及び柱の釣合を考へた。又イギリスではトーマス・ヤングダ(ヤングの彈性率)、フランスではビネ、イタリヤではプラナによりてなされた最も古い研究は主として、より以前に於ける勞力の結果を擴張し又は修正することであつた。千八百三十年及び千八百四十年の間に、

近世の彈性論の廣い臨廓は設けられた。而かも此は殆んど全部フランスの著者卽ちルイ・マリー・アンリ・ナヴィエー(千七百八十五年―千八百三十六年)、ポアッソン、カウシー、マテモァセル・ソフィー・ゲルメーン(千七百七十六年―千八百三十一年)、フェリックス・サヴァール(千七百九十一年―千八百四十一年)によりて成就されたものである。

シメオン・デニス・ポアッソン(千七百八十一年―千八百四十年)はビシヴィーエで生れた。此子供は保姆に送られた、彼は常に言うた、何時か彼の父(普通の兵士)が彼を見舞うたときに、丁度保姆が外出して床の上へ彷徨する食肉獸及び不潔な動物の齒牙をさける爲めに壁の釘へ細い紐をかけて彼を吊して置いた。ポアッソンは續いて言うた。彼は此の樣に吊されて居た間に體操的の努力をしたので彼の身體があちらこちらへと搖れて、其の爲めに振子と早い時代から親炙することになつた、其爲めに彼は成年に達した後にも此現象の研究へ多大の時を献げることになつたと。彼の父は醫術を彼の職業たらしめんとして居たのであつたが彼は之を非常に嫌惡するので、遂に十七の年齡のときにエコール・

ポリテクニックに入學するのを許された。彼の才能がラグランジュ及びラプラースの愛する所となつた。十八年の齢で有限差に關する一論文を書きルジャンドルの勸告に從うて印刷に附した。彼は間もなく學校で講師となり、其後生涯の間政府の種々の科學に關する職掌や敎授となつて居た。其間に彼は大凡四百篇の出版を公けにし、其は主として應用數學に關するものであつた。彼の著書 Traité de Mécanique は二冊となつて、千八百十一年及び千八百三十三年に出版せられ、長い間標準的著述であつた。彼は熱の數學的理論、毛細管作用、判斷の確からしさ、電氣學及び磁氣學の數學的理論、天體力學、橢圓體の引力、定積分、級數及び彈性論等に關して書いた。彼は彼の時代に於ける重な解析學者の一人と考へられた。

彈性に關する彼の著述はカウシーの其の研究と略ぼ匹敵するもので、獨りセン・ヴエナンの研究に次ぐのみである。彈性論に關するもので彼の寄稿せぬ問題とては殆んどなく、而かも同時に彼の研究の多分は新しいものであつた。圓板の釣合と運動とが彼によりて始めて其研究が仕遂げられた。彼以前の著者が利用した定積分の代りに、彼は好んで有限和を使用した。彈性の板に關するポアッソンの境界條件はベルリンのグスターブ・キルヒホッフによりて非難せられ、後者は新しい條件を確立した。併しトムソン及びテートは彼等の Treatise on Natural Philosophy 中に、ポアッソン及びキルヒホッフの境界條件の間の差異を說明し、兩者間の調和をなした。

彈性論にとつて大切な多くの論文がカウシーによりてなされた。吾等は歪力の理論の起源について又其近傍によりて及ぼされる一つの分子の上への力の考察から、一點の周りに於ける小さな平面上の歪力の考察への遷移とに關しては彼に負ふものである。彼は二つの常數を有する均質な彈性の方程式を與へた點でグレーン及びストークスに先んじて居る、ラグランジュの Mécanique Analytique の原理に基いてイタリヤのガブリオ・ピオラは彈性論を開拓したが、ポアッソン及びカウシーの方法よりも此方法の卓越せるかは明かでない。歪力に對する溫度の影響は始めてゲッチンゲンのウイルヘルム・ウエーベルによりて實驗的に研究され、其後デユハメルはポアッソンの彈性論を可しと假定して、

數學的に吾等が温度の變化を許した際に其公式の受ければならない形式の變化を吟味した。ウエーベルは又彈性の餘歪について實驗をなした最初の人である。其他多くの大切な實驗が異なる科學者によりてなされ、かくて現象の一層廣い範圍が闡明せられ、爲めにより包括的な理論の樹立の必要に迫られた。曲がりはゲルストナー(千七百五十六年—千八百三十二年)及びエートン。ホッジキンソンとによりて研究せられ、イギリス人なる後者とフランスのヴイカ(千七百八十六年—千八百六十一年)とは絕對的勢力に關して廣く實驗をなした。ヴイカは撓みに關する多くの學說が「ずれること」と時の要素とを考へ損じて居る點を指摘して大膽に是等を批難した。其結果として一層眞理に近い一學說がセン・ヴエナンによりて間もなく提出せられた。ポンセレは跳返へり及び凝結の理論を案出した。

ガブリエール・ラーメ(千七百九十五年—千八百七十年)はトウルムで生まれ、エコール・ポリテクニックを卒業した。彼は橋梁及び道路の建設を監督する爲めにクラペイロン其他の人々と共にロシャに招聘せられた。千八百三十二年に、本國へ歸へるやポリテクニックの物理學敎授に選ばれた。續いて彼はパリーで數多の工學上の職務や敎授の位置についた。技師としては、フランスに於ける最初の鐵道の建築について大に活動した。ラーメは主として數理物理學に彼の優れた數學的才能を献げた。 Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes; Sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications; Sur la théorie analytique de la chaleur; Sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides (1852) なる四種の著述及び數多の論文で彼の立派な解析の力量を表現して居る。併し物理學と接觸の缺乏の爲めに彈性及び其他の物理學的の題目に寄せた彼の勢力の價値を時として減ずるものがある。或條件の下に一つの橢圓體の內部に於ける温度を考究せる際彼はラプラースの函數に類似せる函數を使用したが、是等は「ラーメの函數」なる名の下に知られて居る。

ラーメの名の下に呼ばれて居る彈性に關する一問題卽ち境界をなす表面の上に積荷の分布の方法が與へられた場合に於ける球狀をなせる彈性包被の釣合を研究すること、及びかくて生じた歪を決定することは彈性學に於いて完全

に解くことの出來る唯一の完全に一般的な問題である。此の一般的の彈性の方程式の誘導及び變形に關して、又之を重屈析に應用した點に於いて大に重んぜらるべきである。長方形及び三角形の膜が數論に於ける問題と關係せるものであるとのことが彼によりて明かにされた。光―彈性論 photo-elasticity の分野がラーメ、ノイマン、クラーク・マックスウェルによりて開かれた。ストークス、ウェルトハイム、クラウジウス、ジェレット等は "rari-constancy" 及び "multi-constancy" の問題について新しい光明を與へたが、此等は長い間彈性論の學者をば二つの敵視する黨派を生ぜしめたものである。ナヴイーエ及びポアッソンの單一恒常均質 uni-constant isotropy がカウシーによりて疑問視され、又更にグレーン及びストークスによりて嚴しく批評された。

バルレ・ド・セン・ヴェナン(千七百九十七年―千八百八十六年)はフランスの土木局の技師で彼の生涯の研究題目をば彈性の理論を實用的の價値あるものへ仕上げることに定めた。ヴィカの如き實地技術家によりて理論家へ向けた批難がセン・ヴェナンをして此理論をば正しき基礎の上に築いて實際家への指導たらしめんとの努力を喚起した。彼よりも先きの研究者によつて犯された幾多の誤謬を彼は除き去つた。彼は滑りの考察によりて撓みの理論を、第三能率の導入によりて二重曲率の彈性の棒の理論を、又原始的平面斷面の捩れの發見によりて捩れの理論を修正した。捩れに關する彼の結果は奇麗な作圖の例に富んで居る。其側面に何等の力が作用せない場合の棒に就いて、彼は若し端の力が端の面上に分布されて居るのに一定の法則に從うて居るならば撓み及び捩れの問題を解くことが出來るものであることを明かにした。クレブッシュは千八百六十二年に出版した彼の著述 Lehrbuch der Elasticität に於いて此問題が端の力なしに側面の力の場合へ反轉し得らるべきものなることを示した。クレブッシュは此研究を甚だ薄い棒及び薄い板の場合へ擴張した。セン・ウェナンは大砲組立の科學的設計に就いて起り來る問題を考究した、而して彼の解はランキンによりて通俗化せられ、從つて鐵砲設計者によりて一層用ゐられた。ラーメの解とは著しく異つて居る。セン・ヴェナンがクレブッシュの Elasticität をフランス語に飜譯して、其中に歪力と歪とに關する二重サフイッキスの記號を大に使

用した。此は屢々有利なこともあるが而かも面倒である爲めに一般に採用されなかつた。ロンドンのユニヴァルシチイ・カレッヂの教授カール・ペーアソンは近頃數學的に梁の撓みの通常の理論の應用せらるべき可能な極限を吟味した。

彈性の數學的理論は尙ほ不確定の狀態に存する。啻に科學者が尙ほ"rari-constancy"と"multi-constancy"との兩派に分れて居るのみでなしに、他の重大な問題に關しても矢張り說を異にして居る。彈性に關する近世の著者をあげると、ベサンソンの教授エミール・マテウ(千八百三十五年―千八百九十一年)、バリーのマウリス・レヴイ、キウ氣象臺の監督チャーレス・クレー、バッセ、グラスゴーのサー・ワイリアム・トムソン(今のロード・ケルヴイン)、バリーのブーシネスク及び其他の人々である。サー・ウイリアム・トムソンは固體の彈性の法則をば地球の彈性の研究へ應用した。地球の彈性は潮汐の理論にとりて大切な要素である。若し地球が一つの固體であるならば、其彈性は重力と協力して太陽及び月の引力による變形に抵抗することになる。ラプラースは若し重力のみで之に抗せんとすれば、地球が如何なる行動をなさゞるべからざるかを明かにした。ラーメは之と反對に若し彈性のみが作用するならば固體の球がどのやうに變化すべきかを研究した。サー・ウイリアム・トムソンは兩方の結果を組合せ、其綜合結果をば實際の變化と比較した。トムソン、續いてジオルジ・ダーヴインは地球の潮汐による變形に對する抵抗が恰かも地球其ものが鋼鐵で出來て居る場合に於けるものと殆んど同樣に大なるものであると計算した。此結論は近來緯度に於ける週期的變化の觀測事實を研究したサイモン・ニューコンムによりて確かめられた。理想的に剛性な地球にありては三百六十日であるべきであるのに、若し地球が鋼鐵のやうに固いものであると四百四十一日となるべき筈である。所で觀測された週期は四百三十日である。

彈性に關する教科書の中ではラーメ、クレブッシュ、ウインクラー、ピーア、マテウ、イッベスン、ノイマン(マイヤーの出版)をあぐべきである。

物理學の「科學」が微分方程式の發明以後にのみ存在すると云ふリーマンの說が數理物理學の進步に就いて記した此簡單にして且つ斷片的な大要によりてさへも矢張り確證される。最初フイゲンスによりて提案された光の波動論は

數學の力に負ふことが多大である。數學的解析によりて其假設が其最後の結果へと仕上げられた。トーマス・ヤング(千七百七十三年—千八百二十九年)は光及び音の兩方の干渉の原理を說明し、且つ光波に於ける横の振動の觀念を創始した最初の人であつた。ヤングの說明は、長い數的計算によりて檢證せられなかつたので時人の注意を餘り引かなかつた。從つてアウグスチン・フレネル(千七百八十八年—千八百二十七年)がヤングがなしたよりも一層範圍の廣い數學的解析を應用せしまでは、波動論が確信を荷ひ出すやうにならなかつた。フレネルの數學的假設の或るものは滿足すべきものでなかつた、依つてラプラース、ポアッソン、及び嚴正數學の派に屬する他の學者等は最初には波動論を考ふるのを厭うた。彼等が反對したので、フレネルは却つて大に鼓舞された。アラゴは最初にフレネルによりて改宗させられた人であつた。偏り及び二重屈折とがヤング及びフレネルによりて說明されたときに及んでラプラースは遂に降服するに至つた。ポアッソンはフレネルの公式からして、一つの耀く點によりて輝された小さな圓板は中心に耀く點を有する影を投せねばならないと云ふ一見似て非なるが如き推論を引き出した。然るに、此は事實と一致するものであることが分つた。

此理論は他の大物理學者ハミルトンによりて贊成された、彼は彼の公式から圓錐屈折を豫言したが、それがロイドによりて實驗的に檢證された。但し是等の豫言がフレネルの公式が正鵠を得たものであることを證明しない、蓋し是等の豫言が波動說の他の形式によりても矢張りなし得るからである。此學理はカウシー、ビオ、グレーン、ノイマン、キルヒホッフ、マックカラッフ、ストークス、セン・ヴナン、サラウ、ローレンツ、サー・ウィリアム・トムソンの研究により一層堅實な力學的基礎の上に置かれた。グレーン及び他の學者によりて敎えられた波動論では、光を傳へるエーテルは一つの非壓縮性の固體である、なせと言ふに、流體は縱の振動を傳達することが出來ない理由による。然るに、グレーンに從へば此の如き彈性の固體が縱の攪亂をば無限の速度で傳へるものである。然るにストークスはエーテルが有限の攪亂の場合には流體の如くに傳達の作用をするが、無限の攪亂に對しては彈性固體の如くに光の傳達に作用するものであるこ

を注意した。

フレネルはエーテルの密度が媒質を異にすると異なるものであるが、彈性が同一であると前提した、然るにノイマン及びマックカラッフは凡べての物質の中に於いて密度が一樣で彈性が異なるものであるとした。後なる假設では、振動の方向は偏り平面中に存し、フレネルの學說に於けるが如くに其平面へ直角ではない。

上述の諸學者が一媒質の凡べての光學上の性質が、是等が其媒質中に於けるエーテルの剛率或は密度の差のみに由來すると言ふ想像で說明せんと努力して居る間に、今一つの學派では、物體の分子とエーテルとの間の相互作用が屈折及び分散の主要なる原因であると考へて、學說を樹てんとした。此方面に於ける重な研究者はブーシネスク、セルマイヤー、ヘルムホルツ、ロムメル、ケッテレル、フオイグト、及び千八百八十四年にジョン・スホプキンス大學で其講演をなしたサー・ウイリアム・トムソンである。所で此學派も亦前なる學派も共に凡べての現象を說明することに成功し得なんだ。第三の學派がマックスウェルによりて創立された。彼は近頃著しき開展を受けた電磁學說を提出した。其のことに就いては後に至つて更に記さう。マックスウェルに從へば、振動の方向は全然偏り平面中にのみ存するものでもなく、且つ又之に直角な平面にのみ限られて居ないで、其實是等兩方の平面上に何程づゝか存在する―即ち磁波は其中の一つの平面內に起り、又電波が他の一の中に起るものである。フイツゲラルド及びトロートンがダブリンで電磁波に關する實驗をなしマックスウェルの此結論を檢證した。

光學に對する最近の數學的ならびに實驗的の貢献中ローランドの凹面格子の理論及び干涉に關するマイケルソンの業蹟と彼が之を天文學上の測定に應用したことゝは玆に記して置くべきである。

電氣學では、ヘンリー・カヴインジッシユ(千七百三十一年―千八百十年)の數學的理論と測定、又磁氣學ではシャーレ・アウグスチン・クーロム(千七百三十六年―千八百六年)の測定が測定系統にとつて基礎となつた。電磁學では同じ仕事がアンドレ・マリー・アムペーア(千七百七十五年―千八百三十六年)によりてなされた。最

初の完全な測定法はガウス及びウイルヘルム・ウエーベル(千八百四年―千八百九十一年)によりて導かれた地磁氣の絕對測定の系統であつた、而かも之は其後ウイルヘルム・ウエーベル及びコールラウシユによりて電磁學及び靜電氣學へも擴張された。千八百六十一年に大英科學奬勵會とローヤル・ソサイエチイーとが協同してサー・ウイリアム・トムソンを長とする特別委員會を設けて電氣抵抗の單位を考究することゝした。此委員會では其原理がウエーベルと同じてあるが、それよりも係數10^7を乘じた丈大きい一種の單位を提案した。此題目に關する論議と勞力とが二十年も繼續したが、遂に千八百八十一年にパリーで万國電氣學會議を開いたときに一般の承認を得た。

電氣學及び磁氣學の數學的理論にとりて根本的必要を有する一函數はポテンシヤルである。此は千七百七十三年に万有引力の決定についてラグランジユの初めて使用したものである。其後間もなく、ラプラースは次の如き著しい微分方程式を與へた。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

此方程式の右邊を零とせずに $-4\pi k$ と置いてポアッソンは啻に引く質量の外部に位する一點に應用されるのみでなしに、何處にある點にも凡べて應用の出來るやうに擴張した。

ポテンチヤル函數を引力以外の他の問題へ初めて應用したのは ジオルジ・グレーン(千七百九十三年―千八百四十一年)であつた。彼は之を電氣學及び磁氣學の數學的理論へ導いた。グレーンはパン燒として世に出だした獨學の人で、死するときにはケンブリッヂのカイウス・カレッヂのフエローであつた。千八百二十八年に彼はノッチンガムで豫約で Essay on the application of mathematical analysis to the theory of electricity and magnetism と題する一論文を公けにした。然るに此論文はイギリスの數學者にさへも千八百四十六年まで注意されなかつた所が其年サー・ウイリアム・トムソンは之を Crell's Journal, Vols XLIV and XLV へ飜刻した。其論文が今日ポテンチヤルの取扱に關して「グレーンの定理」として知られて居るものを含んで居る。彼の論文が世人に知られずに殘つて居た間に、グレーンの一般的定理の全部がサー・ウイリアム・トムソン、チヤスレー、スツルム、及びガウスによ

りて再發見された。ポアンチャル函數 potential function なる術語はグレーンによるものである。ハミルトンは force-function なる語を用ゐ、又同時に千八百四十年頃に此函數の一般的採用をなしたガウスはそれに單にポテンチャルなる名を與へた。

ウィリアム・トムソン(千八百二十四年—千九百七年)は電氣學及び磁氣學に對して大なる貢献をなした。彼はアイルランドのベルファストに生れたが、彼の祖先はスコットランドから出た。彼と彼の兄弟のジームスとがグラスゴーで勉學した。彼は更にケムブリッヂに入り千八百四十五年にセコンド・ラングラーとして卒業した。即ちトムソン、シルヴエスター、マックスウエル、クリフォード、及びジエー・ジエー・トムソンは共にケムブリッヂのセコンド・ラングラーであつた偉人の一群である。齢二十二年のとき、トムソンはグラスゴー大學に於ける物理學教授に選ばれ、其後引續いで其位置にあつた。彼は數學及び物理學に關する大なる功勞によりて爵位を授けられ千八百九十二年にロード・ケルヴインとなされた。ポテンチャル論に於ける彼の研究は新時機を劃したものであつた。「チリクレの原理」と稱せらるゝものは千八百四十八年にチリクレによりてよりも少しくより早く彼によつて發見された。吾等は新たな非常に優雅な綜合的の一方法即ち電氣學上の映像の理論及び其理論の上に築かれた電氣學上の反轉法とに關してトムソンに謝すべきである。是等を用ゐて、彼は以前には解くことが出來ないものとされて居た一つの問題即ち一つの鉢の上の電氣の分布を決定した。導體の上の靜電氣の分布は此前には主としてポアッソン及びプラナによりて研究された。千八百四十五年ケニヒスブルグのノイマンはレンツの實驗的法則から磁電誘導の數學的理論を開拓した。千八百五十五年に、トムソンは數學的解析によりて、ライデン壜から線金の導體によりて放電を行へば或る塲合には減衰的振動の一系から成立した放電となることを豫言した。此事實はワシントンのジヨセフ・ヘンリーによりて實驗的に確立された。ウイリアム・トムソンは海底電線に於ける靜電誘導を論じた。異なる金屬の板によりて誘導に抗してスクレーンをなすことの題目はホレース・ラムにより又同時にチャーレス・ニヴエンにより數學的に論究せられた。ウエーベルの重要な研究は電氣力

學に關するものであつた。千八百五十一年に、ヘルムホルツは樣々な場合に於ける誘導電流の徑路の數理を與へた。グスターブ・ロバート・キルヒホッフ（千八百二十四年—千八百八十七年）は平らな導體の上の電流の分布を研究し、且つ又針金で出來た導體の網の各の枝に於ける電流の强さを研究した。

電磁學の全題目はジェームス・クラーク・マックスウェル（千八百三十一年—千八百七十九年）によりて革命を受けた。彼はエヂンブルクの近傍に生れ、同地の大學に入りケルランド及びフォルブスの學生となつた。千八百五十年に、ケムブリッヂのトリニチイ・カレッヂに入り、セコンド・ラングラーとして卒業した。其時セニオル・ラングラーであつたのはイー・ラウスであつた。夫れから彼はケムブリッヂで講師となり、千八百五十六年にはアバーデーンで敎授となり、千八百六十年にロンドンのキングス・カレッヂの敎授となつた。千八百六十五年に其職を退いて閑地に居り千八百七十一年に至つたが、其後にケムブリッヂの物理學敎授となつた。

マックスウェルは獨りファラデーの實驗的結果を數學上の言葉に飜譯せしのみでなしに、光の電磁說を創設し其後ヘルツによりて實驗的に檢證せられた。之に關する彼の最初の研究は千八百六十四年に發表された。千八百七十一年には彼の大著 Treatise on Electricity and Magnetism が現はれた。彼は純粹に力學的原理の上に創立せられ且つ電場の狀態を決定する一般的方程式から電磁說を構成した。そは電磁的の力を受けて居るヂエレキ媒質中の歪力及び歪の數學的研究である。電磁說はロールド・レーレー、ジエー・ジエー・トムソン、ローランド、グレーズブルーク、ヘルムホルツ、ボルツマン、ヘーヴイサイド、ポインチンク及び他の學者等によりて開展された。

ヘルマン・フォン・ヘルムホルツは千八百七十一年に此方面の問題に注意を向け出した。彼は千八百二十一年にポッダムに生れ、ベルリン大學で勉強し千八百四十七年に彼の小冊子 Ueber die Erhaltung der Kraft を公にした。彼はベルリンで美術學校の解剖學の敎師となつた。千八百四十九年にケニヒスベルグの生理學敎授となり、千八百五十五年にボン大學へ移り、又千八百五十八年にハイデルベルグの敎授となつた。彼が Tonempfindung に關係した研究をなしたのはハ

ハイデルベルグであつた。千八百七十一年に、彼はベルリン大學に於ける物理學の講座を承諾した。其時から彼は主として電氣學及び水力學に關する討究に從事した。

ヘルムホルツは如何なる方向へ實驗を進めるならばウエーベル、ノイマン、リーマン、及びクラウジウス等の假說的な電氣流體の二つの部分の間に於いて遠距離作用による力―力の强さが獨り距離にのみ從屬せず、更に速度及び加速度にも矢張り關係する―を假設して電氣力學上の諸現象を說明せんとする學說と、遠距離作用を放棄しヂエレキに於ける歪力及び歪を假設するフアラデー及びマツクスウエルの學說との優劣を決定し得べきかと言ふことに目標を置いた。彼の實驗はイギリスの學者の見解を是認することになつた。彼は異常分散に關して著述をなし、又電氣力學と水力學との間に類推を創めた。ロールド・レーレーは是等の力學上の類推をば電磁學上の問題と比較し、廻折の力學的理論を與へ且つラプラースの係數を輻射の理論へ應用した。ローランドは廻折に關するストークスの論文に若干の訂正をなし且つ一つの勝手な電磁的攪亂及び光の球狀波の傳達を考究した。電磁學的誘導はオリヴアー・ヘーヴイサイドにより て數學的に硏究せられ、海底線にありては現實の利益となることを明かにされた。彼及びポインチングは是等の說明とマツクスウエルの學說の開展中に數學上の著しき結果に到達した。ヘーヴイサイドの諸々の論文は千八百八十二年以後に發表され、是等は廣い範圍の題目に觸れて居る。

ラプラースが缺陷ある儘に殘した毛細引力の理論の一部卽ち液體に於ける固體の作用、及び二つの液體間の相互作用がガウスによりて完成せられた。彼は液體及び固體の間の接觸の角に關する法則を敍述した。液體に關する同樣の法則はエルンスト・フランツ・ノイマンによりて確立された。毛細管の數學的理論に關する硏究者中の重なる人はロールド・レーレーとイー・マテウとである。

ユネルギー保存の大原則はハイルブロンの醫師ロバード・マイヤー(千八百十四年―千八百七十八年)により、又コペンハーゲンのコルチング、ジユール及びヘルムホルツによりて獨立に確立された。ジエームス・プレスコツト・ジユール(千八百十八年―千八百八十九年)は實驗的に熱の力學的等價を決定した。ヘルムホルツ

は千八百四十七年に物理學の種々の部門へエネルギーの變化及び保存の觀念を應用し、それによりて多くの能く知られて居る諸現象を聯結した。是等の勞力が熱の微粒子説を排斥するに至つた。熱に關する問題の數學的處理が實用上の關係から要求せられた。熱力學は蒸氣機關から發達した。何程多くの仕事が得らるべきかを數學的に決定せんとする企てから發達した。微粒子説の熱心家サヂ・カルノは之に對して最初の刺戟を與へた。彼の名の下に知られて居る原理は千八百二十四年に發表された。彼の研究の大切な事がクラペイロンによりて高調されたけれども其の原理がウイリアム・トムソンによりて提案された時まで一般の認める所とならなかつた。トムソンはカルノの推理をば熱の新しい理論と符合するやうに變化する必要のあることを指摘した　ウイリアム・トムソンは千八百四十八年にカルノの原理が温度の絶對的目盛の觀念へ導くことを示した。千八百四十九年に彼は、"An Account of Carnot's Theory of the Motive Power of Heat with Numericals deduced from Regnault's Experiments." を公けにした。

千八百五十年二月、當時ツユリッヒ(後ボンの敎授となつた)にあつたルドルフ・クラウジウス(千八百二十二年―千八百八十八年)はベルリンの學士院へ同じ題目に關した一論文を報告したが、其中に變幻限りなき熱力學の第二法則が含まれて居た。同じ月に、グラスゴー大學の機械學及び力學の敎授なるウイリアム・ジヨン・エム・ランキン(千八百二十年―千八百七十二年)がエヂンブルグのローヤル・ソサイエチイーの前で一論文を讀み、熱の本質は分子の廻轉運動より成立することを廣言し且つ以前クラウジウスによりて到達せられた結果の若干を得た。彼は熱力學の第二法則を記さなかつた、併し其に續いて出された論文中に、彼の第一の論文中に含まれて居る方程式から誘導し得べきものであることを宣言した。第二法則の彼の證明が批難を免れなかつた。(千八百五十一年三月にウイリアム・トムソンの一論文が現はれたが、其中に第二法則の完全に嚴正な一證明が含まれて居た。彼は此結果をばクラウジウスの研究を知れる以前に得たのであつた。クラウジウスによりて與へられた通りの此法則の叙述が多くの人々就中ランキン、テオドール・ワンド、テート、トルウェル・プレストン によりて批評された。此法則をば一般的力學の原理から推論し出さんとの努力が繰返へし

ノ〜行はれたが、不結果に終つた。熱力學なる科學がトムソン、クラウジウス、及びランキンによりて大なる成功を以て開展せられた。

千八百五十二年に既にトムソンはエネルギーの消散の法則を發見した、此は又少しく後にクラウジウスによりても推論された。後者は變化し得ないエネルギーをばエントロピーなる名で呼んだ、かくて宇宙のエントロピーが極大へと進向するものなることを表明した。エントロピーの代りにランキンは熱力學的函數なる術語を用ゐた。熱力學上の研究は矢張りコルマールのヒルン及びヘルムホルツ(單相循環系及び多相循環系)によりてもなされた。熱力學上の關係の研究に關する有益な作圖法が千八百七十三年より千八百七十八年にかけてエール大學のウィラルド・ギッブスによりて工夫された。ギッブスは初めて熱力學的の基本的の五量の種々の對を圖の表現に撰ぶの有利なることを說いた、かくて彼はエントロピーと溫度、エントロピーと容積との圖を、次いて容積エネルギー・エントロピーの表面を論じた、(マックスウエルの Theory of Heat に記載されて居る) ギッブスは釣合と安定のエネルギー・エントロピーの規則を公式となし、之を解離の複雜した問題へ應用し得べき形式にて表はした。熱力學に關する大切な著述は千八百七十五年にクラウジウスによりて、千八百七十五年にルユールマンによりて、又千八百九十二年にポァンカレによりて編せられた。

エネルギーの消散の法則及び最小作用の原理の研究に於いて、數學と純正哲學とは共通の地盤で會合した。最小作用の原理は千七百四十四年にモウペルチュイによりて初めて提出された。其二年後に彼は之が宇宙の普遍的法則であると述べた。これは彼によりて薄弱に支持され、ライブツイツヒのキエニッヒによりて烈しく攻擊され又オイレルによりて鋭どく辯護された。最小作用の原理のラグランジュの觀念は解析力學の母となつた、併しそれの彼の敍述が不精密なること、ヨセフ・ベルトランが Mécanique Analytique の第三版に於いて注意した如くである。今日存在する如き形式の最小作用の原理の形ちはハミルトンによりて與へられたもので、又ノイマン、クラウジウス、マックスウエル及びヘルムホルツによりて電氣力學へ擴張

された。此原理を凡べての可逆操作へ従屬せしめんとしてヘルムホルツは之に「運動のポテンチャル」なる觀念を導いた。此形式で始めて此原理は普遍的の價値を有するものである。

熱の力學的理論の嚆矢はクラウジウス、マツクスウエル、ミユンヘンのルドウイヒ・ボルツマン及び其他の學者によりて數學的に開展された瓦斯の運動説である。物體の力學説の最初の暗示はギリシャの時代までも溯る。玆に記さるべき最も早い業蹟は千七百三十八年にダニエール・ベルヌーリのなせるものである。彼は瓦斯分子が大なる速度を賦與されたものとし、瓦斯の壓力をは分子の衝突で説明し、且つ彼の假設の結果としてボイルの法則を誘導した。其後一世紀を經て彼の考がジユール(千八百四十六年に)、クロエニツヒ(千八百五十六年に)、及びクラウジウス(千八百五十七年)によりて採用された。ジユールは熱に關する彼の實驗的研究を始めたときに、此題目についての冥想をやめた。クロエニツヒは此運動説によりてジユールが實驗的に決定した事實即ち外部から何等の仕事も之に對して成されない時には瓦斯の内部エネルギーが膨脹によりて變化せられるものでないてふことを説明し得た。クラウジウスは更に大切な一歩を進めて分子は廻轉運動を有するなるべく、且つ分子内にて原子が又相互に運動するものなるべしと想像した。彼は分子間に作用する力が是等の間の距離の函數であるとのこと、温度は分子運動の運動エネルギーのみに關係するものであること、及び任意の一時刻に互に作用を及ぼし得る程著しく接近して居る分子の數は比較的に少數にして無視し得るものと假定した。彼は分子の平均速度を計算し、又蒸發を説明した。ブイス・バロ及びヨホマンが彼の説に非難を向けたが是等はクラウジウス及びマツクスウエルによりて滿足すべき答を與へられ、只一つの場合に、更にもう一つの假説を加へた丈であつた。

マツクスウエルは其速度が與へられた兩極限の間に位する分子の平均數を決定せんとの問題を自分に提出し、かくて之に對して求め得た彼の式は彼の名前の下に呼ばれて居る速度の分布に關する大切な法則である。此法則によりて、分子の速度に從つて分子の分布して居る有樣は觀測の誤差の大きさに從つて經驗的觀測の分布が決定されると同じ公式(確からしさの理論に與へられて

居るもの)で決定することが出來る。マックスウエルによりて推論された平均分子速度はクラウジウスの得たものに比べると一定の係數の差を示す。マックスウエルが彼の分布法則から最初に此平均價を導いたのは嚴正ではなかつた。千八百六十六年にオー・イー・マイヤーは此平均價の嚴正な計算を行うた。

マックスウエルはボイルの法則が正しい間は粘性の係數及び熱傳導の係數が壓力に無關係なることを豫言した。粘性係數が絶對温度の平方根に比例するものであると云ふ彼の推論は振子實驗より推論した所と合はないやうに見えた。此事は彼をして彼の運動説の其基礎を變化し、分子の間には是等の距離の五乘に逆比例して變化する斥力の存在を假定させた。瓦斯の運動説の創立者等は瓦斯の分子が固い彈性の球であると假定した。然るにマックスウエルは千八百六十六年に此學説を二度目に表明した際、分子は力の中心の如くに行動するものとの假設をなした。彼は新たに速度の分布の法則を證明した。然るに此證明は一つの缺點を有して居ることが、ボルツマンによりて指摘されマックスウエルも之を承認し千八百七十九年にクルックスの熱車に於いて觀測された効果を數學的に證明せんとして書いた論文中には分布函數の稍々異なる式を採用した。ボルツマンはマックスウエルの速度分布の法則の嚴正な一般的一證明を與へた。

瓦斯の運動説に於ける基本的假定の何れも、確からしさの理論を用ゐて見ると觀測した事實と密接に一致せない。ボルツマンは分子の間に作用する力をば其以前の學者の假定したのと異なるやうに假定して瓦斯の運動説を確立せんと試みた。クラウジウス、マックスウエル及び彼等の先進者は共に衝突する分子の相互作用が斥力性のものであるとしたが、ボルツマンは是等が引力性のものかも知れぬと假定した。ジュール及びロールド・ケルヴィンの實驗は後なる假設を支持するらしく見える。

ロールド・ケルヴィンがマックスウエル及びボルツマンの一般的定理を否定し、一つの系統中の任意の二つの部分の平均運動エネルギーは是等の部分の自由度の數の比の如くに存すべしとしたことは運動論に於ける最近研究の一つである。

カヂヨリ數學史下巻終

大正九年九月廿八日印刷
大正九年十月三日發行

カヂヨリ數學史講義下巻
定價参圓五拾錢
必定價販賣

著作兼發行者　一戸直藏
東京府豐多摩郡代々幡町幡ケ谷八七五

印刷者　佐久間衡治
東京市京橋區西紺屋町廿七番地

藏版者　現代之科學社

發行所
東京市京橋區桶町
大阪市南區三休橋
株式會社　大鐙閣
振替（東京三三六一八
　　　（大阪二七一五五
電話（京橋一一一三
　　　（大阪南一八〇三

（株式會社秀英舍印刷）

終