
中等算學月刊
第二卷
第九十期合刊
贈閱

本社重要啓事

玆因社務日益進展，同人等又皆廁身教界，對於本刊發行事宜，無暇兼顧．為使本刊普遍全國計，自即期起關於發行部份各項事宜，概委託南京中央書局，負責辦理．嗣後如蒙各埠各學校書局承銷，或國內外讀者訂閱，概請逕向該書局接洽為禱！至於舊有定戶，除由武昌珞珈山武漢大學敝社經手之少數定戶外，亦已完全移交中央書局，按期照寄．謹此公告，諸希亮察！

本刊投稿簡則

1．本刊以供給中學師生補充算學教材，引起研究興趣為宗旨，如蒙賜稿，至所歡迎．

2．來稿以簡明淺易，能合中等算學程度為宜．如屬譯作，務請註明原文出處．

3．來稿務宜謄正，萬勿過於潦草．格式每頁二十五行，每行三十五字．繪圖請用黑色墨水，精確作好，以便製版．

4．來稿內容，本刊有修正之權，其不願修改者，請於寄稿時聲明．

5．來稿除寄稿時特別聲明並附足郵費外，概不退還．

6．來稿登載後，酌贈本刊若干期，以答雅意，非敢言酬也．

7．來稿請寄南京南捕廳鍾英中學本社，或武昌珞珈山武漢大學本社．

本刊預定章程

1．定閱者請參閱本刊封面後幅內定價表，註明起訖期數將款項惠寄南京太平路中央書局，收到後即發正式收據為憑．本刊每期出版後，儘先發送不誤．

2．定閱者須將通信處詳細註明，如中途改變地址，請即來函通知該局，否則如有遺失，恕不負責．

商務印書館出版

中等學校 算學科補充用書

▼算學

※布利氏新式算學教科書……徐甘棠等譯 四冊 (一)(二)(四)各一元六角(三)二元二角

※高等混合算學……易俊元譯 二冊各二元八角

算學的性質(百科小叢書)……[illegible]著 殷佩斯譯 二角五分

從代數到微積(百科小叢書)……鄭太朴著 三角五分

算尺原理及用法……陳世仁編 三角五分

數學遊戲大觀……陳懷書編 二冊 二元四角

諾模術 [illegible]著 李協講授 李書儀筆述 四角五分

西洋近世算學小史(百科小叢書) [illegible]著 段育華等譯 二角五分

▼算術

數學全書第一冊算術……[illegible]著 鄭太朴譯 二元八角

算術要覽……匡文濤編 二角五分

算術原理(學藝彙刊)……王邦珍著 三角

整數論……胡濬濟著 八角

簡便算法(百科小叢書)……徐玉相編 三角

加減乘除……翁爲編 三角

▼代數

代數學要覽……匡文濤編 二冊各二角五分

數學全書第二冊代數……[illegible]著 鄭太朴譯 一元八角

※漢譯三氏何爵陶高中代數學……瞿梅獻 賀延平譯 上冊一元四角 下冊一元二角

※查理斯密小代數學……陳文譯 二冊 二元四角

※查理斯密小代數學解式……曾彥譯 二角

※查理斯密初等代數學……王家菼譯 一元二角

※初學代數學(大同大學叢書)……華桂馨編 一元八角

※近世初等代數學(大同大學叢書)吳在淵編 二元五角

※漢譯溫德華士高中代數學……居坤華譯 一元三角

※威斯爾氏大代數……顧文燦譯 三元五角

大代數學講義……上野清著 王家菼等譯 四元

※查理斯密大代數學……陳文等譯 二元五角

▼幾何

平面幾何學要覽……匡文濤編 二冊各二角五分

※溫特渥斯平面幾何學……馬君武譯 一元五角

※溫特渥斯平面幾何學解法……魏鏞譯 八角

※近世初等幾何學(大同大學叢書)……吳在淵編 上冊一元二角 下冊一元

※漢譯溫德華士高中幾何學……張彝譯 一元三角

※近世幾何學……方俊譯 二元

※溫特渥斯立體幾何解法……魏鏞編 六元

近代幾何學(學藝叢書)……王邦珍著 八角

幾何原理(共學社叢書)……D. Hilbert著 傅種孫譯 四角五分

幾何學講義平面部……上野清著 張廷華譯 三元

摺紙幾何學……T. Sundara Row著 陳獻生譯 六角

※畫法幾何學……薩本棟編 五角五分

投影幾何學……[illegible]著 郭善潮譯 五角

定性問題(學藝叢書)……王邦珍著 九角

極大極小問題(學藝叢書)……王邦珍著 一元一角

軌跡問題(學藝叢書)……王邦珍著 一元

▼三角

※漢譯溫德華士高中三角法……顧裕魁譯 九角

平面三角法要覽……匡文濤編 二角五分

▼解析幾何

解析幾何學講義……匡文濤編 二元

※溫特渥斯解析幾何學……鄭家斌譯 一元五角

※斯改尼二氏新改析幾何學……程凱丞譯 一元六角

斯改二氏幾何學原理……張文凱譯 三元

※全面解析幾何學……鄭太朴編 七角

▼微積分

初等微分積分學……楊德隅編 九角

微積分學講義……匡文濤編 二元四角

微分方程式(國立編譯館出版)……[illegible]著 余介石等譯 三元二角

微分方程式……[illegible]著 馬君武譯 二元

書名上加※符號者一律照定價八折發售

教科用書及其他補充用書不克備載詳目見本館「圖書彙報」承索卽贈

中華書局出版

教育部審定

新課程標準適用

初級中學教科書

書名	冊數	審定執照	每冊定價
初中公民	三	審查中	(一—二)各四角(三)三角
初中衛生	三	教字第四十五號	(一—二)各五角(三)五角半
初中國文讀本	六	教字第六十八號	(一—三)各五角(四—六)各六角
初中國文教科書	六	審定 執照待領	(一—三)各六角(四—六)各七角半
初中英語讀本	六	審定 執照待領	(一)六角(二—五)各五角(六)六角
直接法英語讀本	四	教字第十五號	(一)六角半(二、三上—三下)各九角半
初中算術	二	教字第十七號	各六角半
初中代數	二	教字第五十九號	各七角
初中幾何	二	教字第六十二號	各七角
初中植物	二	教字第三十三號	(一)五角(二)六角
初中動物	二	教字第四十六號	各六角半
初中化學	二	審查中	各六角
初中物理	二	審定 執照待領	(一)六角(二)五角
初中本國史	四	教字第六十五號	各四角半
初中外國史	二	教字第六十一號	各五角半
初中本國地理	四	教字第六十號	(一—二)各四角半(三—四)各五角
初中外國地理	二	教字第五十一號	各七角
初中勞作(工藝)	六	審定執照待領	(一)四角(二)三角半(三)、(四)各五角(五)四角
初中勞作(家事)	三	審查中	(一)五角半(二)五角
初中音樂(樂理)	三	審查中	(一)五角(二)四角(三)五角
初中音樂(唱歌)	三	審查中	(一)五角

▶各科另編參考書備教師教學時作參考◀

減售八折

印有各科內容概說 承索即贈

本期目次

吳在淵先生遺像

卷頭語

中等算學界鉅子吳在淵先生，本年七月間溘然長逝，凡屬算學界同人莫不震悼．本社同人爰建議為先生出一專號以為紀念，承梅嶅墉先生介紹，由吳女公子學敏女士檢寄先生遺稿若干篇，因內容豐富，非本刊一期所能盡載，乃將九十兩期合刊，作為吳在淵先生紀念號；此本期之所由來也。

先是本刊創始時，遍函國內先進算學家，予以援助。對於先生，同人尤極為景仰。曾數函奉請賜稿，以光篇幅；迄未蒙賜覆．方以為先生不識同人，未便教誨，而孰知先生近年來身體欠健，無暇及此。今得先生遺稿以實本刊，并蒙吳學敏女士見允，以後清出有關中等算學之遺稿，可陸續賜本刊發表，同人等已向了平之願，讀者亦當以先睹為快，但惜乎先生未及身見之耳。

"代數基本定理"一文，本載有 Gauss 證法兩種，因其第三證（卽本文後一證）須用積分，故從割愛。其餘主要文字，為一理數證二篇。細觀其各種證明中所用方法，似皆係由終結用解析法逐步推演，以達假設，中間所取途徑各異，證法因而不同。由是得見先生運用思想之活變，足為一般後學者法。然其中尚不無疎漏之點，因時間匆迫，未得一一校正，僅於所見及處，略加註明而已．

本期為吳先生紀念專號，故問題欄，試題解答及繼續各稿，一律停登，合向讀者申明。

末了，謹代表本社同人及讀者向梅嶅墉先生暨吳女公子學敏女士致謝！

吳在淵先生事略

梅 慕 壎

大同大學教授吳在淵先生，於二十四年七月二十一日，病逝於上海。國人奔走相告曰：吾國數學界失一鉅子矣！余從先生遊甚久，梁木之悲，尤不能已；不得不略舉所知於先生者，備史乘採錄焉。

先生蘇之武進人，性穎悟，富有數學天才，然家甚貧。幼隨母寄居無錫舅家，乏束脩之資。中表輩延周彥甫先生，從習數學，先生竊學焉。年十五，居戚某氏家，某氏藏書極富，先生又竊讀其中數理諸書，學益進。旋從周彥甫先生入某院供錄寫役。先生晚則借其數學書籍，尋繹其旨。顧書悉爲東文，先生素所不諳，乃以字典探索，至艱苦。祁寒，被舊絮，秉孤燈，恆竟夜不寐，而數學於是大進。則赴舊都主高等農業學校講席，聲譽鵲起。先生以寒素之士，無師之傳，從素所未習之東文中，日夕鑽研，卒成大家，其刻苦淬勵之精神，影響於學術界者何如也！

先生既歷主北京高等實業學校清華學校等處講席，乃與胡敦復諸先生凡十一人共組立達社。辛亥義軍起，相偕南歸，創大同學院於滬上。先生主教於是先後二十餘年，計完全不支薪金者若干時，僅支生活費者若干時，支薪金什四者又若干時。窮巷陋室，家徒四壁。先生日則教授，夜則譯著，若不勝其樂者，或有聘之他往者，不顧也。昔日因陋就簡之大同學院，今已巍然爲東南學府，先生之力居多，而其畢生精力亦盡耗於此矣。先生體本魁梧，自入大同二十餘年間，年甫五旬，乃傴僂龍鍾如老翁，終且咯血以死。其堅忍勞瘁之毅志中於後之司教育者又何如也！

先生病西文原本之不能普及也，立志譯述。嘗謂中國學術，要求自立，自立之道，第一宜講演，第二宜繙譯，第三宜編纂，第四宜著述，務使初學科學之人，可盡脫外國文之束縛，而多得參考之書籍。又謂編譯宜從中學教本入手，漸及參考之書，層累而上以至高深之學；材料不妨淺近，而說理務宜精詳，結構不必宏大，而見地須

有獨到。先生著述豐富，其手稿之未完成及散佚者猶多，所知者有數學之基礎及研究法與高等幾何學摘錄等篇，殊爲可惜。至其已刊行者，裨益數學界不可量計，吾國數學基礎奠於是者，十六七焉，其有功於著作之林又如此。

先生有文才，喜爲長短句，工技擊，任俠仗義，少年時縱橫跳躍，有不可一世之概，則又先生所視爲餘事而幾爲其數學所掩者也。先生內方正而外和祥，循循善誘，誨人不倦，見之者咸不知其善武事。然學生偶有過失，則嚴斥不稍貸，學生以是愛而敬之。大同成立以來，學生與學校當局發生齟齬時，得先生一言，無不欿然，其教人之切感人之深，有匪言可喻者。故其門下成名者，實繁有徒。即愚魯如余，獲得數學上一知半解，俾克自立而仰事俯畜無匱者，亦先生之賜。藉使天假以年，則樹人必益多，著述必益富，所以造福大同者必益宏且永；而乃年甫五十，侘傺以終，先生之不幸，抑亦吾國學術界之大不幸也。

嗚呼！余幼年負笈大同，岑寂無侶，夜深人靜，輒執卷就先生問難。先生口講指畫，娓娓不休，剝繭抽絲，蘊函悉發，子夜更殘，猶懇懇詢已解未。聞其言粹然，接其貌藹然，如飲醇醪，如聽韶樂，如與家人父子坐春風中，幾忘身是客也。人事滄桑，奔走衣食，不親謦欬者十有餘年。秋窗展卷，月明如水，回憶前塵，歷歷在目。凡人每視母校特親，余尤戀戀不忘大同者，以有先生在也。而今已矣！此情此景，祇爲余歷史上之殘痕矣！然將來憶及母校，必更思先生不置。然則大同常在，先生之學行固將永久縈迴於千百學生之腦際也。

去歲暮秋，偕南京女子中學同仁赴滬參觀，亟思往謁，卒以晷刻促迫，職守羈牽未果。方以爲先生高壽，不乏載酒從遊之日，倘逆知先生之逝於今年，或已知先生之病於昨歲，必不顧一切作最後之請益也。曾幾何時，音容遽杳，遙聞凶耗，悔痛交集，不知涕泗之何從！更憶前塵，歷歷不爽，余歷史上之殘痕，其將爲最慘痛之一頁而永矢弗忘歟？嗚呼！吾國數學史上之創痕，又將如何耶？

先生生於清光緒十年，歷春秋五十有二。子二，女七，孫一，孫女一；子若女皆能守其學云。

代數基本定理

一元有理整代數函數
必能析得一次或二次因數之
高斯氏正確證明

緒　言

1. 本定理膾炙人口，在代數學上占重要地位，卽謂爲方程式論全體之基礎，亦無不可。

如此重要定理，宜有最正確最嚴密之證明。西曆1748年D'Alembert始証之，次年Euler亦發表其證。其後De Foncenex(1759)及Lagrange(1772)皆有證。顧詳加討論，此等證明，基礎皆不完備，本實既撥，縱枝葉扶疎，亦徒飾外觀而已。至Gauss(以後譯高斯)始實有所得，一一指摘各家証中之缺點，而以其所發明者公諸當世。

本篇先舉從高斯以來傳來之一二証法，及高氏對此之評論，再述其完全證明。不完全之證，舉之雖若徒勞，然高氏之評論繫於是，觀高氏之評論，始能見其眼光高遠，思想緻密也。

2. 含一變數x之有理整代數方程式，必能化成如下之形：

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+M=0,$$

此中m爲某一正整數，而$A, B, \cdots, M$皆爲不含x之實數。以X表此方程式之左節，若諸值$x=\alpha, \beta, \gamma, \cdots$能適合$X=0$，則$X$顯然必能爲諸因數$x-\alpha, x-\beta, x-\gamma, \cdots$所除盡。此倒定理顯然亦爲眞確：卽若$X$能爲諸一次因數$x-\alpha, x-\beta, x-\gamma, \cdots$所除盡，則方程式$X=0$必爲$x=\alpha, \beta, \gamma, \cdots$所適合。

若X等於如上m個一次因數之積(此等因數中可含互相等者)，則X除此m個因數外，決無其他因數。故m次方程式之根，決不能比m個多。然m個因數中有相等者，故相異根之個數，實可比m少。然卽如是，吾人亦謂爲有m個根。

3. 前款所述，在初等代數學中固可用之，然據此遂謂函數 X 必能析成 m 個一次因數，卽 m 次方程式必有 m 個根，則未免言之過早。試舉例明之。在二次方程式中，屢見其根不能限於實數，若彼虛數，卽形如 $a+b\sqrt{-1}$ 之數，在代數學中，服從一切原則，與實數全同，吾人固已知之稔矣。二次方程式之根，必引入虛數，而後始能完全解決。三次及四次方程式之根，雖亦可用實數或虛數表之，然至五次以上方程式，其根是否尚可表以實數及虛數，此則須有正確之證明矣。

普通證法及其缺點

4. 初等代數書中通常所舉之證法，實不足掛齒。唯今欲述其缺點，乃舉其大要於下：

方程式

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+M=0$$

或

$$X=0,$$

欲証其必有 m 個根，先必證其可析成 m 個一次因數。今假定 m 個因數為 $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ……，但 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 為不定數。於是

$$X\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots.$$

比較兩端 x 各幕之係數，可得含此等不定數 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 之 m 個方程式。因方程式個數，與未知數個數相等，故可決定 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 之值。卽可從此等方程式消去 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 中之 $m-1$ 個而得包含其餘一個不定數之方程式，因而決定其值。此等不定數之値既定，則 X 可析成所假定之 m 個因數，卽 $X=0$ 必有 m 個根。

高斯列舉此證中之重要缺點如次：

(i) 何以知由消去法所得方程式必有一根？

(ii) 所設方程式及由消去法所得方程式之任何一者或兩者，何以知其能由 x 之實數值或虛數值滿足之？

(iii) 如所言消去 $m-1$ 個不定數後，得包含餘一未知數之方程式，與原設方程式有同一之形狀。例如消去 $\beta,\gamma,\cdots$，所得方程式為

$$\alpha^m+A\alpha^{m-1}+B\alpha^{m-2}+\cdots+M=0.$$

從此方程式求 α 與解原方程式無異，故其值仍不能決定。

由以上三點，足見此証法之不完全矣。

Euler 證法及其缺點

5. 玆述 Euler 之證法*。彼於入手之始先述下一定理：

函數

(1) $$x^{2m}+Bx^{2m-2}+Cx^{2m-3}+\cdots+M\equiv X$$

必可析成二個 m 次之實因數，但 $B,C,\cdots,M$ 皆為實數，又 m 為 2 之某冪數（注意此函數缺少 x^{2m-1}項），其證如次：

假定二因數各為

(2) $$x^m-ux^{m-1}+\alpha x^{m-2}+\beta x^{m-3}+\cdots\cdots;$$

(3) $$x^m+ux^{m-1}+\lambda x^{m-2}+\mu x^{m-3}+\cdots\cdots,$$

但各係數皆為未定常數。由是

$$(x^m-ux^{m-1}+\alpha x^{m-2}+\beta x^{m-3}+\cdots)(x^m+ux^{m-1}+\lambda x^{m-2}+\mu x^{m-3}+\cdots)\equiv X.$$

比較此方程式兩節中 x 各冪之係數，可得 $2m-1$ 個方程式。但不定常數 $u,\alpha,\beta,\cdots;\lambda,\mu,\cdots$ 亦為 $2m-1$ 個，故從此等方程式可以決定其值。今假定 u 為已知數，則因未知數之個數比方程式之個數少一，故以適當之代數運算聯結此等方程式，則未知數 $\alpha,\beta,\cdots;\lambda,\mu,\cdots$ 皆可以 u 及(1)中諸係數 $B,C,\cdots$ 之有理函數表之（Euler曾就 $m=2$ 之特例實驗不誤，今以無紀載之價值略之），故若 u 為實數，則他未知數亦為實數可知。從此不可不討論 u 是否為實數。

---

* Recherches sur les racines imaginaires des equations, Hist. de l'Acad. de Berlin A. 1749, p. 233 sqq.

從此等方程式消去 u 以外之未知數，可得

$$U=0$$

此 U 爲 u 及 $B,C,\cdots$ 之整函數。由普通消去法以得 U，若 m 之值較大，則爲事甚難(m 爲普徧值時此法不能用)。但吾人僅證 U 中常數項(不含 u 之項)爲負已足，蓋如是則由 U 之連續性，知其必有一實根，而 $\alpha,\beta,\cdots;\lambda,\mu\cdots$ 等亦各爲實數。欲證 U 中常數項爲負，先檢察

$$x^m-ux^{m-1}+\alpha x^{m-2}+\beta x^{m-3}+\cdots,$$

此式旣爲 X 之一因數，則 u 不可不爲方程式 $X=0$ 之 $2m$ 個根中任何 m 個根之和。然由配合法，從 $2m$ 個數中取出 m 個，共有

$$n=\frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

種方法，故 u 亦當有與此同個數之相異値。因 m 爲 2 之冪數，故

$$n=\frac{(2m)!}{(m!)^2}=\frac{2^{m+\frac{m}{2}+\frac{m}{4}+\cdots+1}\,(\text{奇數之積})}{\left(2^{\frac{m}{2}+\frac{m}{4}+\cdots+1}\right)^2(\text{奇數之積})}$$

$$=\frac{2^{2m-1}}{2^{2(m-1)}}(\text{某一奇整數})=2\times(\text{某一奇整數})$$

故名此奇整數爲 k，則 $n=2k$ 而 $U=0$ 爲 u 之 $2k$ 次方程式。然因在 $X=0$ 中無 x^{2m-1} 項，卽 $2m$ 個根之和當爲零，故 $2m$ 個根中任意 m 個根之和爲 p，則其餘 m 個根之和必爲 $-p$。由是 p 若爲 u 之值，則 $-p$ 亦必爲 u 之值，而函數 U 宜等於 k 個二次因數 $u^2-p^2,u^2-q^2,u^2-r^2,\cdots$ 之積，且 $+p,-p;+q,-q;+r,-r;\cdots$ 爲 $U=0$ 之 $2k$ 個根。因 k 爲奇整數，知 U 之常數項必爲 $-(pqr\cdots)^2$，然 $pqr\cdots$ 可表成所設方程式係數 $B,C,\cdots$ 等之有理式，故爲實數可知，於是常數項必爲負。

今舉一例以示 $(pqr\cdots)^2$ 之必爲正數。取 $m=2$，則方程式爲

$$x^4+Bx^2+Cx+D=0$$

令此方程式之四根爲 a,b,c,d，則不論其爲實數或虛數，恆有次之關係：

$$a+b+c+d=\ \ 0$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=\ \ B$$

$$abc+abd+acd+bcd=-C$$

$$abcd=\ \ D$$

但因 $p=a+b,\ q=a+c,\ r=a+d$，知

$$\begin{aligned} pqr &= (a+b)(a+c)(a+d) \\ &= a^2(a+b+c+d)+abc+abd+acd+bcd \\ &= -C, \end{aligned}$$

故 $(pqr)^2=C^2$，卽爲正數。 $m>2$ 時由同理亦可証 $(pqr\cdots)^2$ 爲正數。

由上述之理，知 $u,\alpha,\beta\cdots;\lambda,\mu,\cdots$ 皆爲實數，故 X 可析成兩個 m 次之實因數。

次設 X 中含有 x^{2m-1} 之項，卽

(4) $$x^{2m}+Ax^{2m-1}+Bx^{2m-2}+\cdots+M\equiv X.$$

此時令 $x=y-A/2m$ 代入，則(4)可變爲

(5) $$y^{2m}-\left[\frac{(2m-1)A^2}{4m}-B\right]y^{2m-2}+\cdots y$$

與(1)式同形。由前理知(5)可析爲兩個 y 之 m 次實因數，再以 x 相當之值代入還原，則(4)卽析爲兩個 x 之 m 次實因數。因 m 爲 2 之某冪數，故如此析得之兩個因數，皆與(4)式同形，因之又可各析爲兩個 $\frac{m}{2}$ 次之實因數。如是 m 逐次折半以達於 2，而 X 最後可析成二次之諸實因數矣。

復次，設 x 爲 n 次函數，而 n 非 2 之冪數。若大於 n 之 2 之最小冪數爲 $2m$，則以 $2m-n$ 個任意一次因數乘 X，其積卽爲 $2m$ 次之 x 之函數。故由上理此積可析成許多二次及一次實因數。

6. 高斯論此証法中之缺點，謂

一. Euler 斷言 $2m-2$ 個未知數 $\alpha,\beta,\cdots;\lambda,\mu,\cdots$ 各能表成 u 及 $B,C,\cdots$ 之有

理式，實屬過於疎忽。雖曾取 $m=2$ 之一種實驗之，然此不過一特例，殊不能推之普遍。

二。卽使 $\alpha,\beta,\cdots;\lambda,\mu,\cdots$ 普遍能表成 $u,B,C,\cdots$ 之有理式，然因 $B,C,\cdots$ 之某特別値或能使此等表式爲不定。不僅此也，因 $B,C,\cdots$ 之性質，u 雖爲實數，$\alpha,\beta,\cdots;\lambda,\mu,\cdots$ 未見其必爲實數，是乃屢見之事。例如 $x^4+Bx^2+D=0$，若 $B^2-4D<0$，則雖 u 之値爲 0，而 α,λ 皆爲虛數。

三。Euler 自始卽假定 $X=0$ 有 $2m$ 個根，又因 X 中缺 x^{2m-1} 一項，遂謂此諸根之和爲零，此實不能不謂爲錯誤。蓋方程式諸根之和等於第二項係數變號，此理僅在方程式之根數等於次數者，可以應用，必俟本定理証明後始能知 $X=0$ 有 $2m$ 個根，不能自始卽假定此等根之存在也。故在上述証法中，$X=0$ 有 $2m$ 個根之一事，實已當作公理，並未証明，所証者僅係其根必爲實數或虛數耳。然卽此亦未做到，因在未證以前，此等根可爲非實非虛，在數學範圍內所未見之數，對此種數自不能用與實數及虛數所適用之代數法則以駕馭之。但在此證法中所用，皆爲代數法則，是無異於自始卽假定此等根爲實數或虛數，則此証之毫無可取，不言可喩。

四。Euler 就 $m=2$ 之一種證 $(pqr\cdots)^2$ 因 $p,q,r,\cdots$ 爲 $B,C,\cdots$ 之有理函數而必爲正數，由是徑推斷其爲普遍眞確，此大不可。退一步言，彼所用之証法，亦尙未可推至普遍。實則正確之証應如下：

$$
\begin{aligned}
pqr&=(a+b)(a+c)(a+d)\\
&=(b+a)(b+c)(b+d)\\
&=(c+a)(c+b)(c+d)\\
&=(d+a)(d+b)(d+c)\\
&=\tfrac{1}{4}\{(a+b)(a+c)(a+d)+(b+a)(b+c)(b+d)\\
&\qquad+(c+a)(c+b)(c+d)+(d+a)(d+b)(d+c)\},
\end{aligned}
$$

爲根之對稱式，故爲原方程式係數 B,C,D 之有理函數，故 $(pqr)^2$ 爲正數。如此證法，始可推至普遍。

就以上數點，已足見此証法之誤，其他缺點尙多，不必贅述。其餘諸家證法，途

徑雖異，然有一共同之缺點，卽先假設根之存在*。

高斯之證明

7. 對於此基本定理，高斯共發表四種証法†:

第一法在 1797 秋季發見，爲其畢業論文，1799 在 Helmstaedt 大學發刊，題名 "Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse" (一元有理整代數函數可析成一次或二次實因數新定理之證明)，載高斯文集第三册一至三十頁(1876出版)。此法就幾何方面作證，雖初學者亦易於了解。

第二法題名 "Demonstratio nova altera theorematis……" (……之舊理新証)在1815年起草，第三法題名 "Theormatis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales, demonstratio tertia" (代數整函數析成實因數之定理証明三)，於 1816 年一月起草，皆載於 Commentationes Societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores vol. 3(class. math)pp. 107-134 及 pp. 135-142中。其後彙印於高斯文集第三册卅三至五六及五九至六四頁。此二法皆爲代數証法。

第四法於 1850 年發表，爲 "Beitraege zur Theorie der Algebraischen Gleichungen" (對於代數方程式之貢獻) 一文之前半部，載於 Abhandlungen der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, Band IV, pp. 3-15，經編入高斯文集第三册七三至八五頁。此亦幾何證法，實卽由第一法脫胎而來，唯用複數量，同時證明方程式根之存在。一般方程式論教本中多用此證，取其簡單易懂也。

以上四法中，以第三爲最簡，不能不言其爲優美卓絕。本文僅就其第一法述之††。

---

*在其第一証法中，高斯曾列舉 D'Alembert, Euler, De Foncenex及Lagrange 諸家之證法，一一加以詳細的批評，以上論 Euler 證法，卽取材於是。——編者。

† 此段史實，與吳先生原稿稍有出入，由編者負責。

†† 吳先生原稿中并載第三証法，但此證法須用積分，非本刊範圍所及，故略去之。

高斯第一證法

8. 在入手之前，先證二個助定理：

助定理 1． m 爲任意正整數，則函數

(1) $$\sin\varphi\cdot x^m-\sin m\varphi\cdot r^{m-1}x+\sin(m-1)\varphi\cdot r^m$$

必能以

(2) $$x^2-2\cos\varphi\cdot rx+r^2$$

除盡之。

[證]* (2)式可分解爲

$$[x-r(\cos\varphi+i\sin\varphi)][x-r(\cos\varphi-i\sin\varphi)].$$

命 $x=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$，代入(1)式得

$$r^m\{\sin\varphi(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^m-\sin m\varphi(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)+\sin(m-1)\varphi\}$$

$$=r^m\{\sin\varphi(\cos m\varphi\pm i\sin m\varphi)-\sin m\varphi(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)+\sin(m-1)\varphi\}$$

$$=r^m\{\sin\varphi\cos m\varphi-\cos\varphi\sin m\varphi+\sin(m-1)\varphi\}$$

$$=r^m\{\sin(1-m)\varphi+\sin(m-1)\varphi\}=0,$$

故(1)必能以(2)除盡之。

助定理 2． 若量 r 及角 φ 適合下列兩方程式：

(3) $$r^m\cos m\varphi+Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi+Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi+\cdots\cdots+Kr^2\cos 2\varphi+Lr\cos\varphi+M=0,$$

(4) $$r^m\sin m\varphi+Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi+Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi+\cdots\cdots+Kr^2\sin 2\varphi+Lr\sin\varphi=0,$$

則函數

(5) $$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+Kx^2+Lx+M\equiv X$$

---

*高斯原證中僅舉出所得商數爲 $\sin\varphi\cdot x^{m-2}+\sin 2\varphi\cdot rx^{m-3}+\sin 3\varphi\cdot r^2x^{m-4}+\cdots+\sin(m-1)\varphi\cdot r^{m-2}$ 此似爲吳先生自己證法。——編者。

在(i)$r\sin\varphi\neq 0$ 時，必能爲二次因數 $x^2-2\cos\varphi\cdot rx+r^2$ 除盡，(ii)$r\sin\varphi=0$ 時，必能爲一次因數 $x-r\cos\varphi$ 除盡。

[證]* 由上證知

$$
\begin{array}{lll}
\sin\varphi\cdot rx^m & -\ \sin m\varphi\cdot r^m x & +\ \sin(m-1)\varphi\cdot r^{m+1}, \\
A\sin\varphi\cdot rx^{m-1} & -A\sin(m-1)\varphi\cdot r^{m-1}x & +A\sin(m-2)\varphi\cdot r^m, \\
B\sin\varphi\cdot rx^{m-2} & -B\sin(m-2)\varphi\cdot r^{m-2}x & +B\sin(m-3)\varphi\cdot r^{m-1}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
K\sin\varphi\cdot rx^2 & -K\sin 2\varphi\cdot r^2x & +K\sin\varphi\cdot r^3, \\
L\sin\varphi\cdot rx & -L\sin\varphi\cdot rx & \\
M\sin\varphi\cdot r & & +M\sin(-\varphi)\cdot r
\end{array}
$$

各式，皆能爲 $x^2-2\cos\varphi\cdot rx+r^2$ 除盡，故其和亦然。但第一行之和爲 $\sin\varphi\cdot r\,X$，第二行之和爲(4)式左端之 x 倍，故爲0，第三行之和，等於(4)式左端乘 $\cos\varphi$ 之積減去(3)式左端乘 $\sin\varphi$ 之積，故亦爲0。由是知 $\sin\varphi\cdot r\,X$ 必能爲 $x^2-2\cos\varphi\cdot rx+r^2$ 除盡，因之

(i) 若 $r\sin\varphi\neq 0$，則 X 必能爲 $x^2-2\cos\varphi\cdot rx+r^2$ 除盡；

(ii) 若 $r\sin\varphi=0$，則或 $r=0$，或 $\sin\varphi=0$。若 $r=0$，則由(3)知 $M=0$；故 X 能被 x，卽 $x-r\cos\varphi$ 所除盡。若 $\sin\varphi=0$，則 $\cos\varphi=\pm1$，$\cos 2\varphi=1$，$\cos 3\varphi=\pm1$，…，$\cos n\varphi=(\pm1)^n=\cos^n\varphi$；故在(5)中令 $x=r\cos\varphi$，則由(3)見 $X=0$，由是知 X 可爲 $x-r\cos\varphi$ 除盡。

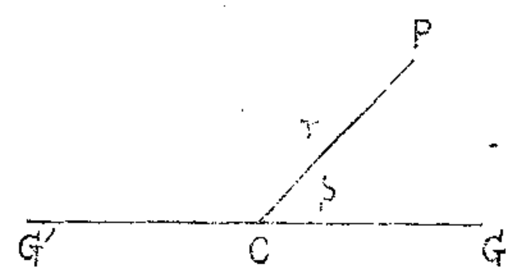
9. 上二助定理，旣已證明，祇須再證一事足矣：若 X 爲所設函數，則同時適合上節(3)，(4)兩式之 r 及 φ 必存在。 此理旣明，則由助定理2，知 X 有一個一次或二次之因數。 於是以此因數除 X，所得之商，爲較 X 低次之函數，由同理，又有

---

*此爲高斯原証。 編者按若仍用 De Moivre 定理，則此證甚易。 由(3)加減以 i 乘(4)之積，卽見(5)之值在 $x=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$ 時爲0，故如 $r\sin\varphi\neq 0$，則(5)式可以 $\{x-r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\}\{x-r(\cos\varphi-i\sin\varphi)\}=x^2-2\cos\varphi\cdot rx+r^2$ 除盡，如 $r\sin\varphi=0$ 則可以 $x-r\cos\varphi$ 除盡。

一個一次或二次因數。 累次如此進行，卽知 X 能析成一次或二次之因數。

10. 取一定平面，過其內一定點 C 引一無限長之直線 CG，名 C 曰中心，CG 曰軸。預定距離之單位，以數表距離。取平面中之任意一點 P，令



r 表從中心 C 至 P 之距離 $=CP$，

φ 表 CP 與軸所成之角 $=\angle GCP$.

次從 P 引平面之垂線，令表其長之値等於

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi+\cdots+Lr\sin\varphi = T.$$

r 對於平面內各點雖爲正量，然 φ 及其倍角之正弦或正或負，故 T 之値亦可正可負。若 T 爲正，則沿垂線向平面之上方取其長，T 爲負則向下取之，$T=0$ 則其點取於平面之內。 如是就平面內各點取其長，則各垂線端點之軌跡爲擴於無窮之一連續曲面，略名之曰第一曲面。

倣此，從平面上各點 P 之垂線取其長之値等於

$$r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi+\cdots+Lr\cos\varphi+M=U,$$

則其端之軌跡亦爲一連續曲面，略名之曰第二曲面。

今所欲證者，爲在平面內同時又在第一第二兩曲面上之點，至少有一個。

11. 今取 r 使爲十分大之值，則 T 顯然與其第一項卽 $r^m \sin m\varphi$ 有同號，U 亦如之。 然 $\sin m\varphi$ 及 $\cos m\varphi$ 因適當取 φ 而可爲正數，亦可爲負數，故第一及第二曲面各有一部分在平面上方，一部分在平面下方可知。 故兩曲面各與平面相交成曲線。第一曲面與平面相交所截之曲線，其方程式顯爲 $T=0$，名之曰第一曲線；同樣 $U=0$ 名之曰第二曲線。吾人祇證此二曲線至少有一交點足矣。欲證此事，先宜討論此二曲線之性質。

12. 第一宜研究此等曲線有無窮分支否。若有，則其個數若何？有如何性質？改寫第一曲線方程式爲

$$\sin m\varphi+\frac{A}{r}\sin(m-1)\varphi+\frac{B}{r^2}\sin(m-2)\varphi+\cdots=0,$$

易見此曲線之漸近線方程式爲

$$\sin m\varphi=0,$$

此爲在中心 C 互交於等角之 m 條直線，卽軸 $C'CG$ 及與之成角 $\frac{1}{m}\pi,\frac{2}{m}\pi,\cdots\cdots,\frac{m-1}{m}\pi$ 之 $m-1$ 條直線。故第一曲線有 $2m$ 個無窮分支。令在方程式 $T=0$ 中令 $\varphi=0$ 或 $\varphi=180^{\circ}$，則 r 無論爲何值必能滿足，故軸爲此曲線之第一及第 $m+1$ 分支。設想以 C 爲中心，用無窮大半徑畫圓，則此 $2m$ 個無窮曲線分支可分此圓周爲 $2m$ 相等部分；卽從第一分支（卽軸）與圓之交點起算，則其他 $2m-1$ 個分支，各在距此 $\frac{1}{m}\pi,\frac{2}{m}\pi,\cdots\cdots\frac{2m-1}{m}\pi$ 之點交圓周。倣此，第二曲線漸近線之方程式爲

$$\cos m\varphi=0,$$

亦爲在中心 C 互交於等角之 m 條直線，卽與軸各成角 $\frac{1}{2m}\pi,\frac{3}{2m}\pi,\cdots,\frac{2m-1}{2m}\pi$ 之直線。此各直線各等分第一曲線相鄰二漸近綫間之交角。故知第二曲線在離中心甚遠之處，亦有 $2m$ 個無窮分支，而各分支在第一曲線相鄰無窮分支之間。如前畫無窮大半徑之圓，則第二曲線各無窮分支與此圓周之交點，從軸與圓周之交點算起，各爲 $\frac{1}{2m}\pi,\frac{3}{2m}\pi,\cdots,\frac{4m-1}{2m}\pi$。此等交點各在第一曲線諸相鄰無窮分支與圓周交點間之正中。

此兩種無窮分支之位置關係，對於今所欲証之事，非常重要。本款取無窮大圓論之，讀者或不免發生異感；故於以下用另一方法研究此位置之關係。

13. **定理.** 以 C 爲中心，可畫一圓，在此圓周上有 $T=0$ 之點 $2m$ 個及 $U=0$ 之點 $2m$ 個，而前者各點可在後者相鄰二點之間。

設 $A,B,C,\cdots,K,L,M$ 絕對值之和爲 S. 令

$$R>S\sqrt{2} \qquad 及 \qquad R>1.$$

但若 $S>\frac{1}{\sqrt{2}}$，則第二條件含於第一條件中；若 $S<\frac{1}{\sqrt{2}}$，則第一條件含於第二條件中。以 C 爲中心 R 爲半徑畫圓，此卽爲具有定理中所述性質之圓。爲便利起見，從 C 向右引軸 CG，而自此軸與圓周之交點起算，在圓周上離此各爲 $\frac{1}{m}45^{\circ},\frac{3}{m}45^{\circ},\cdots,\frac{8m-1}{m}45^{\circ}$ 之點，依次記以(1)，(3)，…，$(8m-1)$，共得 $4m$ 個距離相等之點。在(1)，

$\varphi=\frac{1}{m}45^0$，卽 $m\varphi=45^0$；在(3) $\varphi=\frac{3}{m}45^0$，卽 $m\varphi=135^0$；餘類推。今欲證 $T=0$ 之點，逐一在$(8m-1)$與(1)，(3)與(5)，(7)與(9)，…之間，共有 $2m$ 個；而 $U=0$ 之點逐一在(1)與(3)，(5)與(7)，(9)與(11)，…之間，亦共有 $2m$ 個。最後欲證此外决無 $T=0$ 及 $U=0$ 之點。

[證] I. 令 $r=R$，則

$$T=R^{m-1}\left[R\sin m\varphi+A\sin(m-1)\varphi+\frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi+\cdots+\frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi\right],$$

然由假設，

$$A\sin(m-1)\varphi+\frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi+\cdots+\frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi$$

之絕對値不能大於 S，故必小於 $R\sqrt{\frac{1}{2}}$。但 $R\sin m\varphi$ 之値，自 $m\varphi=45^0$ 至 $m\varphi=135^0$ 之間，概大於 $R\sqrt{\frac{1}{2}}$，故在(1)與(3)間圓周上各點，T 之値必爲正號。同理可知在(9)與(11)間各點，T 亦有正値。普遍言之，在$(8k+1)$與$(8k+3)$間各點，T 之値概爲正。又 $R\sin m\varphi$ 之値，自 $m\varphi=225^0$ 至 $m\varphi=315^0$ 間爲負而其絕對値概大於 $R\sqrt{\frac{1}{2}}$，故知在(5)與(7)間圓周上之各點，T 之値爲負。普遍言之，在$(8k+5)$與$(8k+7)$間各點，T 之値概爲負$(k=0,1,\cdots,m-1)$。今就(3)與(5)間諸點考之，T 在(3)爲正，在(5)爲負，則在(3)與(5)間必有一點 $T=0$ 可知。同理在(7)與(9)，(11)與(13)，…，$(8m-1)$與(1)間，必各有 $T=0$ 之一點在。由是 $T=0$ 之點，共有 $2m$ 個。

II. 在 $2m$ 個點之外，决不更有 $T=0$ 之點，此亦必當証明之。吾人已知在(1)與(3)，(5)與(7)，…間，T 之値不能爲0，故若 $T=0$ 之點多於 $2m$ 個，則在(3)與(5)，(7)與(9)，…，$(8m-1)$與(1)之一，其間必至少有二點 $T=0$。然則在此兩點之間，T 必有一極大値或極小値。換言之，此間必有一點可使 $T'=0$。然

$$T'=\frac{dT}{d\varphi}=mR^{m-2}\left(R\cos m\varphi+\frac{m-1}{m}A\cos(m-1)\varphi+\cdots\right).$$

在(3)與(5)間各點，$\cos m\varphi$ 爲負，但其絕對値大於 $\sqrt{\frac{1}{2}}$，由上述之理，知 T' 之値爲

負。又在(7)與(9)間，$R\cos m\varphi > R\sqrt{\frac{1}{2}}$，故 T' 有正號。又次在(11)與(13)間 T' 有負號，(15)與(17)間 T' 有正號，其餘倣此。故在任何兩點間 T' 決不為 0，因之除 $2m$ 點外決無 $T=0$ 之點。

III. 與前同法可證在(3)與(5)，(11)與(13)，…，$(8k+3)$ 與 $(8k+5)$ 間，U 恆為負；在(7)與(9)，(15)與(17)…，$(8k+7)$ 與 $(8k+9)$ 間，U 恆為正。故 $U=0$ 之點在(1)與(3)，(5)與(7)…，$(8m-3)$ 與 $(8m-1)$ 間，共有 $2m$ 個。又如 II，可證在此等點之間 U' 決不為 0，故除此 $2m$ 個點外決無 $U=0$ 之點。

14. 今仍以 C 為中心，以比 R 大之任意半徑畫圓，如前等分其圓周而記以同樣之數字，則仍如上，$T=0$ 之點在(3)與(5)，(7)與(9)，…間各有一個，$U=0$ 之點在(1)與(3)，(5)與(7)，… 間各有一個，二者各共 $2m$ 個。此圓半徑與 R 相差愈小，則各圓周上相應於 $T=0$ 及 $U=0$ 之點，可愈相接近。今若畫半徑小於 R 但仍大於 $S\sqrt{2}$ 及 1 之圓，則如上所言之事仍能成立。如是逐漸接近，最後 T, U 同時為 0 之點，顯然卽以前所謂第一曲線與第二曲線各分支之交點。申言之，以 C 為中心，以適當半徑畫圓，則第一及第二曲線各 $2m$ 個分支，均有一部分在圓內，且互相隔離，而在半徑比 $S\sqrt{2}$ 及 1 大之圓周外，第一曲線分支，決不與第二曲線分支相交。

15. 今欲從上述二種曲線分支相互之位置關係，以證此等曲線分支必於圓內相交。取 C 為原點，CG 為 x 軸，過 C 而垂直於 CG 之直線為 y 軸，則 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，而

$$(x+iy)^n=(r\cos\varphi+ir\sin\varphi)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

令兩端虛實部分各相等，有

$$r^n\sin n\varphi=nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3+\frac{n\cdots(n-4)}{5!}x^{n-5}y^5-\cdots\cdots,$$

$$r^n\cos n\varphi=x^n-\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^{n-4}y^4-\cdots\cdots,$$

逐次令 $n=1,2,\cdots,m$ 代入 T 及 U 兩式中，卽見所得式均為如 ax^ay^b 之諸項之集合，但 a, b 各為正整數，且 $a+b\leq m$，由是知 $T=0$ 及 $U=0$ 皆為 m 次之代數曲線。

為便利起見，CG 軸（即第一曲綫 $2m$ 個分支之一）右端與圓周之交點，以 0 記之，第一曲線其餘 $2m-1$ 個分支與圓周之交點，依次記爲 $2,4,\cdots,4m-2$．又自第二曲線最近於軸之一分支與圓周之交點起，依上之次序，以 $1,3,5,\cdots,4m-1$，記第二曲線 $2m$ 個分支與圓周之交點。簡言之，則以偶數所記各點（簡稱偶數點）爲入圓內之第一曲線分支之點，以奇數點爲入圓之第二曲線分支之點。

凡代數曲線（若從多數個隔離分支所成，則指其分支之一）皆連續，或爲封口線，或兩端擴至無窮遠。故由無窮遠出發而入圓之曲線，必更出於圓外。準此，第一曲線分支之一在偶數點入圓，亦必從偶數點出圓。於是第一曲線之任一分支，當與兩個偶數點締合。同理第二曲線之任一分支，當與兩個奇數點締合。其締合之情形，固因函數 X 之性質不同而各異，然無論如何，可證第一曲線與第二曲線至少必有一個交點，下更詳述之。

16。今假定締合之時，不許第一曲線與第二曲線相交。因軸爲第一曲線之一分支，故 0 與 $2m$ 必相締合。於是 1 不能與軸他側之點即比 $2m$ 大之奇數點相締合，否則此支曲線必與軸交，與假定相反。故若聯 1 至 n，則不可不 $n<2m$。同理，若聯 2 至 n'，則因自 2 至 n' 之分支不可與自 1 至 n 之分支相交，必 $3<n'<n$ 而後可。如是將 $3,4,5,\cdots$ 各聯至 n'',n''',n''''，則必 $4<n''<n'$，$5<n'''<n''$，$6<n''''<n'''$，$\cdots$。如是進行，勢必達於聯 h 點至 $h+2$ 點，此曲線分支不能不與在 $h+1$ 點入圓之曲線分支相交甚明。然此兩曲線分支之一屬於第一曲線，而他一屬於第二曲線，由是知上之假定不能成立，而第一及第二曲線至少必有一交點在圓內。

由是同時適合 8 節中(3)，(4)兩式之 r 及 φ 之值至少有一組存在，而本定理遂以證明。

整數之一性質

本文作於民十五年，曾發表爲大同大學數理學會叢刊之一，爲先生精心造詣之作，外間知者甚少，今爲轉載，以廣流傳。——編者。

定義一。 以 n 個最初自然數寫成一環，從 1 數起，每逢 k 之倍數棄去其數，數畢，則以餘數續下，至僅存一數爲止。名此環曰數環，其臨末僅存之一數曰僅存數。

例如以十個最初自然數作成一數環。從 1 數起，逢 3 之倍數者棄之，周而復始，則其僅存數爲 4 .

(1)

(10) (2)

(9) (3)

(8) 4

(7) (5)

(6)

定義二。 以數環中次序數及其周而復始之諸數寫成一列，名之曰順環列。順環列之從 n 個最初自然數所成而逢 k 之倍數棄去者，以記號 ${}^{(k)}_{n}P$ 表之。

例如順環列 ${}^{(3)}_{10}P$ 爲

1，2，③，4，5，⑥，7，8，⑨，10，1，②，4，5，⑦，8，10，①，4，5，⑧，10，4，⑤，10，4，⑩，4.

定義三。 順環列中，起首之原數名之曰原環。原環中餘數，附以其前未棄之數者曰二重環。二重環中餘數附以其前未棄之數者名之曰三重環。如是遞推以至末重環。自二重環以後之諸環名之曰複環。各環中所有數之個數以記號 ${}^{(k)}_{n}C_1$，${}^{(k)}_{n}C_2$，$\cdots$ 表之。

例如在前所舉之順環列${}^{(3)}_{10}P$中，原環爲

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10; $\therefore\ {}^{(3)}_{10}C_1=10.$

二重環爲 10,1,2,4,5,7,8; $\therefore\ {}^{(3)}_{10}C_2=7.$

三重環爲 8,10,1,4,5; $\therefore\ {}^{(3)}_{10}C_3=5.$

四重環爲 4,5,8,10; $\therefore\ {}^{(3)}_{10}C_4=4.$

五重環爲 10,4,5; $\therefore\ {}^{(3)}_{10}C_5=3.$

六重環及末重環爲 10,4; $\therefore\ {}^{(3)}_{10}C_6={}^{(3)}_{10}C_7=2.$

定義四. 原環中一數m至二重環中再見，至三重環中復見，如是從左向右，每見此數一回以後，至次一回復見而止，可分成各節，名此各節曰<u>第一迴游節</u>，<u>第二迴游節</u>，等。各節中所有數之個數以記號${}_mN^{(1)}$, ${}_mN^{(2)}$,……表之。

例如就${}^{(3)}_{10}P$中一數8而言，則

第一迴游節爲 9,10,1,2,4,5,7,8; $\therefore\ {}_8N^{(1)}=8.$

第二迴游節爲 10,1,4,5,8; $\therefore\ {}_8N^{(2)}=5.$

定義五. 僅存數，或在某複環中所去之一數m，至前一複環中再見，至更前一複環中又見，如是從右向左，每見一回，前進至上一回見而止，可分成各節，名此各節曰<u>第一迴洄節</u>，<u>第二迴洄節</u>，等。各節中所有數之個數以記號${}_mN_1$, ${}_mN_2$, ……表之。

例如就${}^{(3)}_{10}P$中一數5而言，則

第一迴洄節爲 5; $\therefore\ {}_5N_1=1.$

第二迴洄節爲 4,10,8,5; $\therefore\ {}_5N_2=4.$

第三迴洄節爲 4,1,10,8,7,5; $\therefore\ {}_5N_3=6.$

第四迴洄節爲 4,2,1,10,9,8,7,6,5; $\therefore\ {}_5N_4=9.$

［注意］ 除僅存數外，其餘各數皆在中途棄去，故迴游節不必至末重環。惟其止處必爲此一數被棄之地。迴洄節則必至原環而止。

定理一。 ${}^{(k)}_{n+1}P$ 中所有數之個數必比 ${}^{(k)}_{n}P$ 中所有數之個數多 k 個。

[證] 順環列 ${}^{(k)}_{n+1}P$ 之作法，係先以 1 至 $n+1$ 之數順次排列，棄去其中所應去之數，再取所餘之數續列於後，如是往復，以至於終。 今開始 k 個數

$$1,2,3,\cdots\cdots,k-1,k$$

中，末一個數 k 應棄去。 以其前未棄之 $k-1$ 個數附於 $n+1$ 之後，得

$$k+1,k+2,\cdots\cdots,n,n+1,1,2,\cdots\cdots,k-1$$

此中所有數之個數為

$$(n+1)-k+(k-1), \qquad 即 \qquad n.$$

以此 n 個數作成順環列，名之為 ${}^{(k)}_{n}P'$，則此順環列與 ${}^{(k)}_{n+1}P$ 中 k 以後之列法完全相同。

次，從 1 至 n 之自然數

$$1,2,\cdots\cdots,n-k,n-k+1,n-k+2,\cdots\cdots,n$$

所作順環列為 ${}^{(k)}_{n}P$，則 ${}^{(k)}_{n}P'$ 與 ${}^{(k)}_{n}P$ 中所有環數同，各環所有數之個數同，所棄數之各位置亦無一不相同，故就順環列中所有數之個數而言，

$${}^{(k)}_{n}P'={}^{(k)}_{n}P;$$

復次，因

$${}^{(k)}_{n+1}P\equiv 1,2,3,\cdots\cdots,k,{}^{(k)}_{n}P',$$

故知 ${}^{(k)}_{n+1}P$ 中所有數之個數，比 ${}^{(k)}_{n}P$ 中所有數之個數多 k 個。

例。 比較

${}^{(3)}_{5}P$: 1,2,③,4,5,①,2,4,⑤,2,4,②,4.

${}^{(3)}_{6}P$: 1,2,③,4,5,⑥,1,2,④,5,1,②,5,1,⑤,1.

${}^{(3)}_{7}P$: 1,2,③,4,5,⑥,7,1,②,4,5,⑦,1,4,⑤,1,4,①,4.

可知 ${}^{(3)}_{7}P$ 中數之個數比 ${}^{(3)}_{6}P$ 多 3 個，而 ${}^{(3)}_{6}P$ 中數之個數又比 ${}^{(3)}_{5}P$ 多 3 個.

系。 全體環列 ${}^{(k)}_{n}P$ 中所有數之個數為 $kn-(k-1)$。

[證] ${}^{(k)}_{1}P$ 中數之個數為 1，不煩言而可知。

因　　$n=1+(n-1)$,

故從定理,知${}_{n}^{(k)}P$中數之個數為

$$1+k(n-1),\quad 即\quad kn-(k-1).$$

定理二。若在${}_{n}^{(k)}P$中自右向左第$Q+1$位之數為m,則在${}_{n+1}^{(k)}P$中自右向左同位之數應為$m+k$,但若$m+k>n+1$,則此數為$m+k-(n+1)$,而$1\leqq m+k-(n+1)\leqq k-1$.

[證]　從前定理之証,知${}_{n}^{(k)}P'$與${}_{n}^{(k)}P$各複環中一一對應之數,無一不與其二個原環中一一對應之數相同,而此二個原環在${}_{n}^{(k)}P$中為

$$1,\quad 2,\quad 3,\ \cdots\cdots,\ n-k+1,\ n-k+2,\cdots\cdots,\ n-1,\quad n.$$

在${}_{n}^{(k)}P'$中為

$$k+1,\ k+2,\ k+3,\cdots\cdots,\quad n+1,\quad 1,\quad \cdots\cdots,\ k-2,\ k-1$$

故${}_{n}^{(k)}P$中自右向左第$Q+1$位之數m若為

$$1,2,3,\cdots\cdots,\ n-k+1$$

中之一數,則${}_{n}^{(k)}P'$中同位之數必為$m+k$。然${}_{n}^{(k)}P$中自右向左第$Q+1$之數m若為

$$n-k+2,\cdots\cdots,\ n-1,\ n$$

中之一數,則${}_{n}^{(k)}P'$中同位之數必為$m+k-(n+1)$。但$m+k-(n+1)$之一數實在

$$1,2,3,\cdots\cdots,\ k-2,\ k-1$$

中,故

$$1\leqq m+k-(n+1)\leqq k-1.$$

次,因${}_{n}^{(k)}P'$與${}_{n+1}^{(k)}P$中自右向左第$Q+1$位之數全同,故此定理已証明矣。

定理三。${}_{n}^{(k)}C_i={}_{n}^{(k)}C_{i-1}-I\left[\frac{{}_{n}^{(k)}C_{i-1}}{k}\right]$此中$I\left[\frac{{}_{n}^{(k)}C_{i-1}}{k}\right]$表$\frac{{}_{n}^{(k)}C_{i-1}}{k}$內所含最大整數。但當$a\,{}_{n}^{(k)}C_{i-1}<k\leqq(a+1)\,{}_{n}^{(k)}C_{i-1}$時,${}_{n}^{(k)}C_{i-1}={}_{n}^{(k)}C_i={}_{n}^{(k)}C_{i+1}=\cdots\cdots={}_{n}^{(k)}C_{i+a-2}$,而${}_{n}^{(k)}C_{i+a-1}={}_{n}^{(k)}C_{i-1}-1$.　$(a=0,1,2,\cdots\cdots)$

[證]　第$i-1$重環中既有${}_{n}^{(k)}C_{i-1}$個數,則自此環之第一個數數起,其位次每

當 k 之倍數者棄之，所棄之數應爲

$$I\left[\frac{{}_{n}^{(k)}C_{i-1}}{k}\right]$$

個。故次一環由所餘

$${}_{n}^{(k)}C_{i-1}-I\left[\frac{{}_{n}^{(k)}C_{i-1}}{k}\right]$$

個數組織而成，而

$${}_{n}^{(k)}C_{i}={}_{n}^{(k)}C_{i-1}-I\left[\frac{{}_{n}^{(k)}C_{i-1}}{k}\right].$$

然若 $$a\,{}_{n}^{(k)}C_{i-1}<k\leqq(a+1)\,{}_{n}^{(k)}C_{i-1},$$

則須連續複寫第 $i-1$ 重環至 $a+1$ 回始得有所棄之數，而此所棄數又必在所複寫之末一回中，且僅得一個。故

$${}_{n}^{(k)}C_{i-1}={}_{n}^{(k)}C_{i}={}_{n}^{(k)}C_{i+1}=\cdots\cdots={}_{n}^{(k)}C_{i+a-2},$$

及 $${}_{n}^{(k)}C_{i+a-1}={}_{n}^{(k)}C_{i-1}-1\ \text{也。}$$

系一。 $\underline{{}_{n}^{(k)}C_{1}=n.}$

系二。 <u>若 ${}_{n}^{(k)}C_{j-1}=1$，則 ${}_{n}^{(k)}P$ 中末重環爲第 j 重環。</u>

例。 就 ${}_{8}^{(3)}P$ 觀察其各環中數之個數如下：

${}_{8}^{(3)}P$: 1,2,③,4,5,⑥,7,8,①,2,4,⑤,7,8,②,4,7,⑧,4,7,④,7,

${}_{8}^{(3)}C_{1}=8$，其數爲 1,2,3,4,5,6,7,8;

${}_{8}^{(3)}C_{2}=8-2=6$，其數爲 7,8,1,2,4,5;

${}_{8}^{(3)}C_{3}=6-2=4$，其數爲 7,8,2,4;

${}_{8}^{(3)}C_{4}=4-1=3$，其數爲 4,7,8;

${}_{8}^{(3)}C_{5}=3-1=2$，其數爲 4,7;

此時 ${}_{8}^{(3)}C_{5}<3<2\,{}_{8}^{(3)}C_{5}$，故

${}_{8}^{(3)}C_{6}={}_{8}^{(3)}C_{5}=2$，其數仍爲 4,7,

而 ${}_{8}^{(3)}C_{7}=2-1=1$，其數爲 7,

然此7實在第六重環中。且因7已爲僅存數，不必往右再作複環，故末重環卽爲第六重環可知。

定義六。 在一數 m 之第 i 廻游節中，棄去若干個應棄之數以後，其末尾所賸不足 k 位之數，名之曰第 i 廻游賸餘。 此賸餘中數之個數，以 ${}_mR^{(i)}$ 表之。其在原環內自1至 m 諸數中末尾所賸不足 k 位之數，名之曰前置賸餘，其中數之個數以 ${}_mR^{(0)}$ 表之。

例如就7觀察 ${}^{(3)}_{8}P$，則

$$ {}_7R^{(0)}=1,\ {}_7R^{(1)}=1,\ {}_7R^{(2)}=2,\ {}_7R^{(3)}=2,\ {}_7R^{(4)}=1, $$

定理四。 ${}_mR^{(0)}=m-M(k)<k$，${}_mR^{(i)}=[{}_mN^{(i)}+{}_mR^{(i-1)}]-M(k)<k$；而 ${}_mN^{(1)}=n-I\left[\frac{m}{k}\right]$，${}_mN^{(i)}={}_mN^{(i-1)}-I\left[\frac{{}_mN^{(i-1)}+{}_mR^{(i-2)}}{k}\right]$，此中 $M(k)$ 表 k 之倍數。

［證］ 從定義六，前置賸餘顯然爲從開始 m 個數中減去其所含 k 之最大倍數所得之數，故

$$ {}_mR^{(0)}=m-M(k)<k. $$

次，欲計算第 i 廻游賸餘之數。 計算第 i 廻游節中應棄之數，就普徧言之，恆不從本節之第一數數起，而從前節賸餘中之第一數數起，故應得

$$ {}_mR^{(i)}=[{}_mN^{(i)}+{}_mR^{(i-1)}]-M(k)<k $$

可知。

復次，m 之第一廻游節中所有之數，爲「原環中 m 後諸數」及「自1至 m 諸數中棄去應棄數以後所餘之數」二者相合而成，卽其個數應爲在原環中棄去 m 前之應棄數所得餘數之個數，故

$$ {}_mN^{(1)}=n-I\left[\frac{m}{k}\right]. $$

末，在 m 之第 i 廻游節中所有之數，爲從前一節中所有數減去其中應去諸數以後所餘之數組織而成，而此第 $i-1$ 節中棄去若干數，宜從第 $i-2$ 節中賸餘之第一數算起，故此應棄之數當爲

$$I\left[\frac{{}_mN^{(i-1)}+{}_mR^{(i-2)}}{k}\right]$$

個；而第 $i-1$ 迴游節中之數有 ${}_mN^{(i-1)}$ 個，故得

$${}_mN^{(i)}={}_mN^{(i-1)}-I\left[\frac{{}_mN^{(i-1)}+{}_mR^{(i-2)}}{k}\right],$$

系一。 若 ${}_mR^{(i)}=0$，則 m 在第 i 迴游節之末棄去。

系二。 若 R 之值始終不為 0 而 ${}_mN^{(i+1)}=1$，則 m 之迴游節止於第 i 節，且 m 卽為僅存數。

例一。 就 ${}^{(3)}_{8}P$ 中 4 之第三迴游節實驗證中之言。

［解］ 先作出 ${}^{(3)}_{8}P$:

$$1,2,③,4,|5,⑥,7,8,①,2,4,|⑤,7,8,②,4,|7,⑧,4,|7,④,|7$$

此中 4 之第三迴游節為 7,8,4，[${}_4N^{(3)}=3$]此 7,8,4，實為第二迴游節中 5,7,8,2,4，[${}_4N^{(2)}=5$]棄去 5 及 2 之所餘。然此 5,7,8,2,4，中應棄之數何以知定有 2 個，則因計算應棄之數時，當從第一迴游賸餘2,4之第一位 2 數起，[${}_4R^{(1)}=2$]併 5,7,8,2,4，共有 7 個數；故宜棄之數乃有

$$I\left[\frac{5+2}{3}\right]=2$$

個，而得

$${}_4N^{(3)}={}_4N^{(2)}-I\left[\frac{{}_4N^{(2)}+{}_4R^{(1)}}{3}\right]=5-I\left[\frac{5+2}{2}\right]=5-2=3\text{也}.$$

例二。 就 ${}^{(7)}_{15}P$ 計算 4 之各迴游節及各迴游賸餘中數之個數。

［解］ 因 $n=15$, $k=7$, $m=4$，故從定理四可得各 R 及各 N 之值：

$${}_4R^{(0)}=4-M(7)=4, \qquad {}_4N^{(1)}=15-I\left[\frac{4}{7}\right]=15,$$

$${}_4R^{(1)}=19-M(7)=5, \qquad {}_4N^{(2)}=15-I\left[\frac{19}{7}\right]=13,$$

$${}_4R^{(2)}=18-M(7)=4, \qquad {}_4N^{(3)}=13-I\left[\frac{18}{7}\right]=11,$$

$${}_4R^{(3)}=15-M(7)=1, \qquad {}_4N^{(4)}=11-I\left[\frac{15}{7}\right]=9,$$

$_4R^{(4)}=10-M(7)=3,\qquad {}_4N^{(5)}=9-I\left[\frac{10}{7}\right]=8,$

$_4R^{(5)}=11-M(7)=4,\qquad {}_4N^{(6)}=8-I\left[\frac{11}{7}\right]=7,$

$_4R^{(6)}=11-M(7)=4,\qquad {}_4N^{(7)}=7-I\left[\frac{11}{7}\right]=6,$

$_4R^{(7)}=10-M(7)=3,\qquad {}_4N^{(8)}=6-I\left[\frac{10}{7}\right]=5,$

$_4R^{(8)}=8-M(7)=1,\qquad {}_4N^{(9)}=5-I\left[\frac{8}{7}\right]=4,$

$_4R^{(9)}=5-M(7)=5,\qquad {}_4N^{(10)}=4-I\left[\frac{5}{7}\right]=4,$

$_4R^{(10)}=9-M(7)=2,\qquad {}_4N^{(11)}=4-I\left[\frac{9}{7}\right]=3,$

$_4R^{(11)}=5-M(7)=5,\qquad {}_4N^{(12)}=3-I\left[\frac{5}{7}\right]=3,$

$_4R^{(12)}=8-M(7)=1,\qquad {}_4N^{(13)}=3-I\left[\frac{8}{7}\right]=2,$

$_4R^{(13)}=3-M(7)=3,\qquad {}_4N^{(14)}=2-I\left[\frac{3}{7}\right]=2,$

$_4R^{(14)}=5-M(7)=5,\qquad {}_4N^{(15)}=2-I\left[\frac{5}{7}\right]=2.$

$_4R^{(15)}=7-M(7)=0.$

4 之第十五迴游賸餘為 0，則此 4 當在第十五迴游節之末棄去，故 4 之迴游節終於是。今以${}^{(7)}_{15}P$ 詳之於下:

1,2,3,4,|5,6,⑦,8,9,10,11,12,13,⑭,15,1,2,3,4,|5,⑥,8,9,10,11,

12,13,⑮,1,2,3,4|,5,8,⑨,10,11,12,13,1,2,③,4|,5,8,10,11,12,⑬,

1,2,4,|5,8,10,⑪,12,1,2,4,|5,8,⑩,12,1,2,4,|5,8,⑫1,2,4,|5,8,1,

②,4,|5,8,1,4,|5,⑧,1,4,|5,1,4,|5,①,4,|5,4,|5,4,|5,④,|5.

定理五. 在諸順環列${}^{(k)}_{n}P$, ${}^{(k)}_{n+1}P$, ${}^{(k)}_{n+2}P$, …… 中，從右向左第 $Q+1$ 位數之各迴洄節所有數之個數皆一定，惟迴洄節之次第愈後則愈大。若第 $j+1$ 迴洄節中所有數之個數為 a, 則此迴洄節之第一次發見必在${}^{(k)}_{a}P$中.

［證］ 設${}^{(k)}_{n}P$ 中自右向左第 $Q+1$ 位之數為 m, ${}^{(k)}_{n+1}P$ 中此位之數為 m'.

今在${}^{(k)}_{n+1}P$中截去其開始k個數

$$1,2,3,\cdots\cdots,\ k-1,\ k, \tag{1}$$

其餘全部分名之為${}^{(k)}_{n}P'$,則

$${}^{(k)}_{n+1}P\equiv 1,2,3,\cdots\cdots,\ k-1,\ k,{}^{(k)}_{n}P'.$$

從定理一之證,可知${}^{(k)}_{n}P'$中之

$${}_{m'}N_1,\ {}_{m'}N_2,\cdots\cdots,\ {}_{m'}N_i$$

與${}^{(k)}_{n}P$中之

$${}_{m}N_1,\ {}_{m}N_2,\cdots\cdots,\ {}_{m}N_i$$

其兩兩對應之數一一不變。故${}^{(k)}_{n+1}P$中一數m'之各迴洄節,除去從增多(1)中k個數而發生新節以外;(或不發生新節)其所有數之個數與${}^{(k)}_{n}P$中數m之各迴洄節一一相同。同理可知${}^{(k)}_{n+1}P$中一對應數之各迴洄節,其所有數之個數,除去比${}^{(k)}_{n+1}P$所增新節以外,(或不增新節)與${}^{(k)}_{n+1}P$中m'之各迴洄節亦一一相同。順次遞推,無一不然。故知諸順環列

$${}^{(k)}_{n}P,\quad {}^{(k)}_{n+1}P,\quad {}^{(k)}_{n+2}P,\quad \cdots\cdots$$

中自右向左第$Q+1$位數之各迴洄節所有數之個數皆一定。

次,設${}^{(k)}_{r}P$中末一迴洄節為${}_{s}N_j$,而

$${}_{s}N_j=\xi,$$

則必

$$\xi\leqq r,$$

此從迴洄節之定義可知。${}^{(k)}_{r}P$變為${}^{(k)}_{r+1}P$,${}^{(k)}_{r+2}P$,……,則居自右向左第$Q+1$位之數在${}^{(k)}_{r}P$中為s者,至

$${}^{(k)}_{r+1}P,\quad {}^{(k)}_{r+2}P,\quad \cdots\cdots$$

中依定理二,逐次變為

$$s+k,\quad s+2k,\quad \cdots\cdots$$

而逐一順環列中所有迴洄節之節數不變。惟若$s+lk>r+l$時,此原應為$s+lk$者乃變為$(s+lk)-(r+l)$。此時順環列${}^{(k)}_{r+l}P$中之迴洄節比${}^{(k)}_{r+l-1}P$中多添一節,蓋因

$(s+lk)-(r+l)$爲

$$1,2,3,\cdots\cdots,\ k-1$$

等 $k-1$ 個數中之一個(定理二)也。故假定 $r+l=a$,卽設此時之順環列爲${}^{(k)}_{n}P$,則從二重環中

$$1,2,3,\cdots\cdots,\ k-1$$

內任一數之前一數起,追溯至原環中之此數止,必有 a 個數。由是此時發生之新迴洄節在${}^{(k)}_{n}P$ 中爲

$${}_{(s+lk)-a}N_{j+1}=a.$$

若 r 更增加至爲 n,而$(s+lk)-a$ 在${}^{(k)}_{l}P$ 中所居位次,在順環列${}^{(k)}_{n}P$ 中居之者爲數 m,則從上所言,知在${}^{(k)}_{n}P$ 中亦可得

$${}_{m}N_{j+1}=a.$$

於是可知此迴洄節之第一次發生必在${}^{(k)}_{n}P$中.

復次,因

$${}_{m}N_{j}=\xi,\text{而 }\xi\leqq r.$$

及

$${}_{m}N_{j+1}=a,\text{而 }a=r+l.$$

$$\therefore\ a>\xi.$$

故迴洄節之次第愈後,則其所有數之個數愈多。

定理六。 設 ${}_{m}S_{i}={}_{m}N_{1}+{}_{m}N_{2}+\cdots\cdots+{}_{m}N_{i}$ 則 ${}_{m}N_{i+1}=I\left[\dfrac{(2k-3)+Q+{}_{m}S_{i}}{k-1}\right]$,但 m 爲順環列${}^{(k)}_{n}P$ 中自右向左第 $Q+1$ 位之數,而 ${}_{m}N_{1}=1$. 若${}_{m}N_{j}$ 爲${}^{(k)}_{n}P$ 中之末一迴洄節,則 $n\geqq{}_{m}N_{j}\geqq{}^{(k)}_{n}C_{2}$

[証] 從迴洄節之定義可知 ${}_{m}N_{1}=1$。

設 m 在順環列${}^{(k)}_{n}P$中有 i 個迴洄節,而在自右向左之次第中始現時,居此次第之第 $Q+1$ 位,則在自左向右之次第中始現時必居第 $kn-(k-1)-Q-({}_{m}S_{i}-1)$ 卽 $kn-(k-2)-Q-{}_{m}S_{i}$ 位,此不煩言而可知者。 但必須 $kn-(k-2)-Q-{}_{m}S_{i}\leqq n$,因

m 在自左向右次第中始現時必居原環中故也。

次，設 n 逐漸增加至爲 $n+l$ 時，m 應變爲 $m+lk$（定理二）而若 $m+lk>n+l$，則 $m+lk$ 應改爲 $(m+lk)-(n+l)$，此時之 i 當進而爲 $i+1$（定理五）。今令

$$n+l=n',$$

$$(m+lk)-(n+l)=m',$$

則如上可知 m' 在 ${}^{(k)}_{n'}P$ 中自左向右第一次發現必在第

$$kn'-(k-2)-Q-{}_{m'}S_{i+1}$$

位，而此位次之次第數卽爲 m' 之値，故

$$m'=kn'-(k-2)-Q-{}_{m'}S_{i+1}$$

因 $$n'={}_{m'}N_{i+1},$$ （定理五）

及 $${}_{m'}S_{i+1}={}_{m}S_i+{}_{m'}N_{i+1},$$

$$\therefore \quad m'=k\,{}_{m'}N_{i+1}-(k-2)-Q-({}_{m}S_i+{}_{m'}N_{i+1})$$

$$=(k-1)\,{}_{m'}N_{i+1}-(k-2)-Q-{}_{m}S_i,$$

又因 $$1\leqq m'\leqq k-1,$$ （定理二）

卽 $$1\leqq(k-1)\,{}_{m'}N_{i+1}-(k-2)-Q-{}_{m}S_i\leqq k-1,$$

而得

$$(k-1)+Q+{}_{m}S_i\leqq(k-1)\,{}_{m'}N_{i+1}\leqq(2k-3)+Q+{}_{m}S_i$$

$$\therefore \quad N_{m'i+1}=I\left[\frac{(2k-3)+Q+{}_{m}S_i}{k-1}\right]$$

今因 m' 在 ${}^{(k)}_{n'}P$ 中及 m 在 ${}^{(k)}_{n}P$ 中於自右向左次第始現之時同居第 $Q+1$ 位，故從前一定理，知在 ${}^{(k)}_{n}P$ 中，

$${}_{m}N_{i+1}=I\left[\frac{(2k-3)+Q+{}_{m}S_i}{k-1}\right]$$

又因各迴洄節皆發生於同一情形中（定理五），故 ${}_{m}N_{i+1}$ 及 ${}_{m}S_i$ 中之 i 可表任何正整數。由是旣知 ${}_{m}N_1=1$，卽可求其餘各 N 及各 S 之値。

復次，一數 m 之末一迴洄節，其首末二數必在原環及二重環中，故

$$\text{若}\quad 1\leqq m\leqq k,\quad \text{則}\quad n={}_mN_j,$$

$$\text{若}\quad k<m,\quad \text{則}\quad n>{}_mN_j;$$

總之，

$$n\geqq {}_mN_j.$$

又設

$$n-q_0k=r_0<k,$$

而 ${}_mN_j$ 中之末一數 m 若在原環中之開始 q_0k 位以內，則

$${}_mN_j>{}^{(k)}_{\ n}C_2.$$

若在原環中開始 q_0k 位以右，則

$${}_mN_j={}^{(k)}_{\ n}C_2.$$

總之，

$${}_mN_j\geqq{}^{(k)}_{\ n}C_2.$$

故 ${}_mN_j$ 之界限爲

$$n\geqq{}_mN_j\geqq{}^{(k)}_{\ n}C_2.$$

系。 m 若爲 ${}^{(k)}_{\ n}P$ 之僅存數，則 ${}_mN_{j+1}=I\left[\dfrac{(2k-3)+{}_mS_j}{k-1}\right]$,

因 m 若爲僅存數，則 $Q=0$ 故也。

例一。 就 ${}^{(3)}_{\ 2}P$, ${}^{(3)}_{\ 3}P$, ${}^{(3)}_{\ 4}P$, ${}^{(3)}_{\ 5}P$, ${}^{(3)}_{\ 6}P$, ${}^{(3)}_{\ 7}P$，實驗定理五，六證中所言。

［解］ 先，實行寫出各順環列：

${}^{(3)}_{\ 2}P$:				1,2,	①,	2
${}^{(3)}_{\ 3}P$:			1,2,③,	1,2,	①,	2
${}^{(3)}_{\ 4}P$:		1,2,③,	4,1,②,	4,1,	④,	1;
${}^{(3)}_{\ 5}P$:	1,	2,③,4,5,①,	2,4,⑤,	2,4,	②,	4;
${}^{(3)}_{\ 6}P$:	1,2,③,4,	5,⑥,1,2,④,	5,1,②,	5,1,	⑤,	1;
${}^{(3)}_{\ 7}P$:	1,2,③,4,5,⑥,7,	1,②,4,5,⑦,	1,4,⑤,	1,4,	①,	4

就自右向左第二位數觀察其各週迴節。 今此一位數

在 ${}^{(3)}_{\ 2}P$ 中爲 1，其週迴節爲

$_1N_1=1,\quad {}_1N_2=2;$

在$\overset{(3)}{_3}P$中應爲$1+3=4$. 因$4>3$,故爲$4-3=1$,於是增一新節得

$_1N_1=1,\quad {}_1N_2=2,\quad {}_1N_3=3;$

在$\overset{(3)}{_4}P$中爲$1+3=4$,其迴洄節爲

$_4N_1=1,\quad {}_4N_2=2,\quad {}_4N_3=3;$

在$\overset{(3)}{_5}P$中應爲$4+3=7$,因$7>5$,故爲$7-5=2$;於是又增一節

$_2N_1=1,\quad {}_2N_2=2,\quad {}_2N_3=3,\quad {}_2N_4=5;$

在$\overset{(3)}{_6}P$中爲$2+3=5$,其迴洄節爲

$_5N_1=1,\quad {}_5N_2=2,\quad {}_5N_3=3,\quad {}_5N_4=5;$

在$\overset{(3)}{_7}P$中應爲$5+3=8$. 因$8>7$而爲$8-7=1$. 乃又生一新節得

$_1N_1=1,\quad {}_1N_2=2,\quad {}_1N_3=3,\quad {}_1N_4=5,\quad {}_1N_5=7.$

由此可見在各順環列中，自右向左第二位數，其各迴洄節中所有數之個數皆一定，且其個數爲3之一節，第一次發生于順環列$\overset{(3)}{_3}P$中,個數爲5之一節,第一次發生于$\overset{(3)}{_5}P$中,個數爲7之一節,第一次發生于$\overset{(3)}{_7}P$中,其條皆可類推。

次,設未知$\overset{(3)}{_7}P$中自右向左第二位數之值,姑名之爲m,求此數在原環內所居之位次。

在自右向左之位次中第一個m居第$Q+1=2$位,故

$$Q=1.$$

又末一個m居第$Q+{}_mS_i$位,而

$$_mS_i={}_mN_1+{}_mN_2+{}_mN_3+{}_mN_4+{}_mN_5=1+2+3+5+7=18,$$

故
$$Q+{}_mS_i=1+18=19,$$

卽自右向左之末一個m居此次序中之第19位。 因$\overset{(3)}{_7}P$中共有數

$$kn-(k-1)=3\times7-2=19$$

個,故自右向左之第19位,卽爲自左向右之第

$$kn-(k-1)-Q-({}_mS_i-1)=19-1-17=1$$

位。 此次第數與 m 之值應相合，故 $m=1$。

復次，觀察此 1 之各迴洄節間關係：設就第 4 迴洄節觀察之。順環列從 ${}^{(3)}_{4}P$ 變至 ${}^{(3)}_{5}P$，則迴洄節從 ${}_1N_3$ 變至 ${}_2N_3$，且增一節 ${}_2N_4$，於是 ${}_1S_3$ 變成 ${}_2S_4$，而

$${}_2S_4={}_2S_3+{}_2N_4,$$

在 ${}^{(3)}_{5}P$ 中，　　$5=3+2,$

在 ${}_2N_4$ 中　　$2=1+2\times3-5.$

從上，知此 ${}_2N_4$ 中數 2 之位置在原環內應居自左向右之第

$$kn'-(k-1)-Q-({}_2S_3+{}_2N_4-1)\qquad(1)$$

位，此中　　$n'=5={}_2N_4,$

故(1)同於　　$(k-1)\,{}_2N_4-(k-2)-Q-{}_2S_3,\qquad(k=3)$

因此次第數與居此之數相合，應在 1 至 $k-1$ 之區域內，故

$$1\leqq(k-1)\,{}_2N_4-(k-2)-Q-{}_2S_3\leqq k-1,$$

$$\therefore\quad {}_2N_4=I\left[\frac{2k-3+Q+{}_2S_3}{k-1}\right]$$

又因 ${}^{(3)}_{n}P$ 中 n 之值雖變 而自右向左同一位次數之各迴洄節不變，故移至 ${}^{(3)}_{7}P$ 內仍可得關係式

$${}_1N_4=I\left[\frac{2k-3+Q+{}_1S_3}{k-1}\right],$$

又因一數之各迴洄節皆發生於同一情形，故此關係又可擴充為

$${}_1N_{i+1}=I\left[\frac{2k-3+Q+{}_1S_i}{k-1}\right]\qquad(i=1,2,3,4)$$

例二。 在順環列 ${}^{(3)}_{10}$ 中，求自右向左第五位數之各迴洄節。

［解］ 先，設此數為 m. 次， $Q=4$,

$${}^{(3)}_{10}C_2=10-I\left[\frac{10}{3}\right]=7,$$

而　　${}_mN_1=1,$　　　　${}_mS_1=1,$

由是，　　${}_mN_2=I\left[\frac{3+4+1}{2}\right]=4,$　　　　${}_mS_2=1+4=5,$

$$ {}_mN_3=I\left[\frac{3+4+5}{2}\right]=6, \qquad {}_mS_3=5+6=11, $$

$$ {}_mN_4=I\left[\frac{3+4+11}{2}\right]=9, $$

因 $10>9>7$，故在 ${}^{(3)}_{10}P$ 之迴洄節已盡於此。 試觀定義五後之例，可知此求得之數一一不誤。

例三。 就順環列 ${}^{(3)}_{30}P$，求其僅存數之各迴洄節。

［解］ 設僅存數爲 m，則因

$$ {}^{(3)}_{30}C_2=30-I\left[\frac{30}{3}\right]=20, \text{及 } Q=0, $$

$$ {}_mN_1=1, \qquad {}_mS_1=1, $$

$$ {}_mN_2=I\left[\frac{3+1}{2}\right]=2, \qquad {}_mS_2=1+2=3, $$

$$ {}_mN_3=I\left[\frac{3+3}{2}\right]=3, \qquad {}_mS_3=3+3=6, $$

$$ {}_mN_4=I\left[\frac{3+6}{2}\right]=4, \qquad {}_mS_4=6+4=10, $$

$$ {}_mN_5=I\left[\frac{3+10}{2}\right]=6, \qquad {}_mS_5=10+6=16, $$

$$ {}_mN_6=I\left[\frac{3+16}{2}\right]=9, \qquad {}_mS_6=16+9=25, $$

$$ {}_mN_7=I\left[\frac{3+25}{2}\right]=14, \qquad {}_mS_7=25+14=39, $$

$$ {}_mN_8=I\left[\frac{3+39}{2}\right]=21, \qquad {}_mS_8=39+21=60, $$

因 $30>21>20$，故知 ${}^{(3)}_{30}P$ 中僅存數之迴洄節至此已全。

定理七。 順環列 ${}^{(k)}_{n}P$ 中一數 m 爲第 x 次所棄去，則 $x=\dfrac{m+{}_mS^{(j)}}{k}$，但 ${}_mS^{(j)}={}_mN^{(1)}+{}_mN^{(2)}+\cdots\cdots+{}_mN^{(j)}$，

［證］ 從定理四系一，已知 ${}^{(k)}_{n}P$ 內一數 m 之末一迴游節 ${}_mN^{(j)}$ 中賸餘 ${}_mR^{(j)}$ 若爲 0，則 m 在此節之末被棄。

今從開始至第 j 週游節之末所有數之個數爲 $m+{}_mS^{(j)}$，此中末一數既在第 x 次棄去，則此 $m+{}_mS^{(j)}$ 顯然爲 k 之倍數，且若爲 k 之 x 倍，則 m 即於第 x 次棄去可知。故

$$x=\frac{m+{}_mS^{(j)}}{k}.$$

例。　囚犯 15 人環立，就其中一人順環數起，每逢 7 之倍數則驅往刑場就刑，自此周而復始，次第驅往，一囚初時立於第 3 位，則此囚爲被驅就刑中之第幾人。

［解］　本題即爲在順環列 ${}^{(7)}_{15}P$ 中，求一數 3 在第幾次被棄。

從定理四，　$n=15$，　$k=7$，　$m=3$，　得

$${}_3R^{(0)}=3-M(7)=3,\qquad {}_3N^{(1)}=15-I\left[\frac{3}{7}\right]=15,$$

$${}_3R^{(1)}=18-M(7)=4,\qquad {}_3N^{(2)}=15-I\left[\frac{18}{7}\right]=13,$$

$${}_3R^{(2)}=17-M(7)=3,\qquad {}_3N^{(3)}=13-I\left[\frac{17}{7}\right]=11;$$

$${}_3R^{(3)}=14-M(7)=0,$$

由是　$${}_3S^{(3)}=15+13+11=39;$$

$$\therefore\quad x=\frac{m+{}_mS_j}{k}=\frac{3+39}{7}=6;$$

故此囚在驅往就刑之諸人中爲第六人。

定理八。　m 爲順環列 ${}^{(k)}_{n}P$ 中之僅存數，則 $m=kn-(k-2)-{}_mS_j$，但 ${}_mS_j={}_mN_1+{}_mN_2+\cdots\cdots+{}_mN_j$，而 ${}_mN_{i+1}=I\left[\dfrac{(2k-3)+{}_mS_i}{k-1}\right]$。

［證］　從定理六系，知 ${}^{(k)}_{n}P$ 中僅存數之諸週迴節間有關係爲

$${}_mN_{i+1}=I\left[\frac{(2k-3)+{}_mS_i}{k-1}\right].$$

m 在原環中所居之位次，爲順環列 ${}^{(k)}_{n}P$ 中自右向左之第 ${}_mS_j$ 位。因 ${}^{(k)}_{n}P$ 中共有數 $kn-(k-1)$ 個，故此位次又爲自左向右之第 $kn-(k-1)-({}_mS_j-1)$，即 $kn-(k-2)-{}_mS_j$ 位。因此自左向右位次之數即爲 m 之值，故

$$m=kn-(k-2)-{}_mS_j.$$

例。有三十人航海，漂流至一絕島，絕糧。 眾中一人建議，犧牲己身以供衆食。遂相約人各認一席次，不許變更，卜定從某一人數起，數至第三人，則此人起就刀俎。 次日仍各就原席次，從前次犧牲者之後一席數起，數至第三人，此人復起供衆食。如是繼續進行，就現存者計數。周而復始，屠戮至僅存一人，方得遇救。 求此遇救之一人在初時所居席次。

［解］ $n=20$， $k=3$，求僅存數之各迴洄節，則如定理六之例三，可得

$$ {}_mS_j={}_mS_8=60; $$

由是，

$$
\begin{aligned}
m&=kn-(k-2)-{}_mS_j\\
&=90-1-60\\
&=29.
\end{aligned}
$$

故知此僅存之人，初時居第二十九席。

定理九。在順環列 ${}^k_nP$ 中第 l 次所棄之數為 y，則 $y=lk-({}_yS_j-1)$。但 ${}_yS_j={}_yN_1+{}_yN_2+\cdots\cdots+{}_yN_j$，而 ${}_yN_{i+1}=l\left[\dfrac{(2k-3)+Q+{}_yS_i}{k-1}\right]$，內 $Q=k(n-l)-(k-1)$。

［證］ y 為第 l 次所棄之數，則 y 在 ${}^k_nP$ 中被棄之位置，居自左向右之第 lk 位。因順環列 ${}^k_nP$ 中共有數 $kn-(k-1)$ 個，故此 y 被棄之位置又在自右向左之第 $[kn-(k-1)]-[lk-1]$ 位。故在 ${}^k_nP$ 中居此 y 被棄位置以後之數尚有

$$ Q=k(n-l)-(k-1) $$

個。 由是，從定理六，知 y 之諸迴洄節間關係為

$$ {}_yN_{i+1}=l\left[\frac{(2k-3)+Q+{}_yS_i}{k-1}\right] $$

故 y 在原環中之位置應居自左向右之第 $lk-({}_yS_j-1)$ 位，而此 y 之次第數卽為 y 之值。 故

$$ y=lk-({}_yS_j-1). $$

例。十人在某一選舉中競爭一議員。 其後欲避免各種私弊，相約會於一室，圍一圓席而坐，指定一席為首席，自此右轉依次數之，當4之位者離席。 再自其後

一席起數之，當 4 之位者復離席。 如是就未出席者周而復始數之，至餘一人而止。即讓此人當選，而離席九人退避不爭。 此中一人自指定首席後卽宣言己當於第八次離席，其後果然，求此人所居之席次。

［解］ 從 $Q=4(10-8)-(1-1)=5$， 知

$$ {}_yN_1=1, \qquad {}_yS_1=1; $$

$$ {}_yN_2=I\left[\frac{5+5+1}{3}\right]=3, \qquad {}_yS_2=1+3=4, $$

$$ {}_yN_3=I\left[\frac{5+5+4}{3}\right]=4, \qquad {}_yS_3=4+4=8, $$

$$ {}_yN_4=I\left[\frac{5+5+8}{3}\right]=6, \qquad {}_yS_4=8+6=14, $$

$$ {}_yN_5=I\left[\frac{5+5+14}{3}\right]=8, \qquad {}_yS_5=14+8=22, $$

$$ {}_yN_6=I\left[\frac{5+5+22}{3}\right]=10, \qquad {}_yS_6=22+10=32, $$

從定理六，知 ${}_yN_5$ 爲末一迴迥節，故得

$$ y=8\times4-(32-1)=1, $$

卽此宣言之人所居席次爲首席。

× × × × × ×

Gauss 氏等分圓周定理之證法提示

本篇係先生於民國十一年春寄示其姪者，茲刊以公諸同好。　編者識。

{Gauss 氏之定理:} 若 $n=2^{2^m}+1$，(m 爲零或正整數)，且 n 爲素數，則圓周可分作 n 等分。

［證法提示］

第一須證：

凡作圖問題須足以決定其所求圖形之點，而點之位置可由決定某長以定之。由此可證：

(a) 凡一點爲直線之交而可以決定之者，則所用以決定其點之長恆爲一次方程式之根；而此方程式之係數爲已知之長，或能由已知長作出之長。

(b) 凡二圓之交點，或一圓與一直線之交點而可決定之者，所用以決定其點之長恆爲二次方程式之根；而此方程式之係數爲已知之長；或爲能由已知長作出之長。

第二須證：

一長可以所設一二個以上之長爲基礎以作之；此其必須而且充足之條件，爲所求長乃代數方程式之根；而此方程式之係數，乃行有理運算於所設長之結果；且此方程式之根，乃可行有限回數之有理運算及開平方法於係數而得之者。

證明以上定理，則能知「凡能作圖之幾何題歸於解若何範圍之代數方程式」。次當研究若何代數方程式能合於以上之範圍；若何則不能。此須證明下一組之定理：

(c)有整係數之整函數

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

若能分解成具有有理係數之二個整函數

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=x^p+b_1x^{p-1}+\cdots\cdots+b_{p-1}x+b_p,\\ \psi(x)&=x^q+c_1x^{q-1}+\cdots\cdots+c_{q-1}x+c_q,\end{aligned}\right\}(n=p+q)$$

則有理係數 b_i 及 c_i 皆不可不爲整數。

(d) n 次整函數

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之係數 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 爲素數 p 之倍數，而 a_n 與 p^2 互爲素；則 $f(x)$ 爲既約函數(既約函數謂不能分解因數者)。

(e) n 次之整函數具有整係數者，若其最高次之係數爲1，自第二項至第 $n-k$ 項之係數皆爲素數 p 之倍數，而第 $n-k$ 項與 p^2 互爲素；自第 $n-k+1$ 項至末項之係數皆爲 p^2 之倍數，而末項與 p^3 互爲素；則 $f(x)$ 有次數低於 $k+1$ 之因數(兩數無公約數者曰互爲素)。

(f) $$f(x)=x^{2k+1}+r_1px^{2k}+\cdots\cdots+r_k^0px^{k+1}+r_{k+1}p^2x^k$$
$$+r_{k+2}p^2x^{k-1}+\cdots\cdots+r_{2k+1}^0p^2$$

爲既約函數；又

$$f(x)=x^{2k+2}+r_1px^{2k+1}+\cdots\cdots+r_{k+1}^0px^{k+2}+r_{k+2}p^2x^k$$
$$+\cdots\cdots+r_{2k+2}^0p^2$$

爲未約函數，則其二個數爲 $k+1$ 次而形式爲

$$x^{k+1}+\alpha_1px^k+\cdots\cdots+\alpha_{k+1}^0p,$$

$$x^{k+1}+\beta_1px^k+\cdots\cdots+\beta_{k+1}^0p,$$

且皆爲既約函數。(凡一文字右上角加 o 者表與 p 互爲素之數，p 爲素數。)

於是第三可證：

凡數表能作圖之長者，此數不可不在一有理範圍中；此有理範圍乃由表

已知長之數之範圍順次增加某一組平方根數之所成者。（所謂有理範圍者，任意取此範圍中之數施行任意之有理運算，得數尙在此範圍中者也。所謂增加某一組平方根之所成者，謂有理數與一組平方數之有理倍數之和形成一個有理之範圍也。）

由此可得：

(g) 凡數之表能作圖之長者必爲一代數方程式之根；此方程式之各係數乃於表所設長之數施行有理運算所得之結果；而其次數乃爲 2 之冪數。

第四乃可證：

旣約方程式次數爲 2^n 者，若其一根可以作圖，則其一切實根皆可作圖，而其根中互相獨立之平方根數不比 n 個少。

凡數表所求長者，若爲一旣約方程式之根而此方程式之次數不爲2之冪數，則其長不能作圖。

以上爲代數之一方面之預備，至等分圓周之問題又須稍知一二整數論中之定理。如下：

(h) p 爲一素數，a 係與 p 互爲素之整數，則 $a^{p-1}-1$ 恆爲 p 之倍數。

(i) 滿足等餘式 $a^s\equiv 1\ (\text{mod. }p)$ 之 s 比 $p-1$ 小，且爲滿足此式之最小者；則 s 必爲 $p-1$ 之因數。（以上等餘式爲兩邊以 p 除所得剩餘相等之表示，mod. 爲 modulus 之略.）

(j) 素數 p 若有 2^h+1 之形式，則不可不 $h=2^m$

由是可歸入本題：

欲 n 等分圓周，在解一方程式以

$$cos\frac{2\pi}{n},\quad cos\frac{4\pi}{n},\quad cos\frac{6\pi}{n},\quad \cdots,\quad cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

爲根者。今因 $\sqrt[n]{1}=\ cos\frac{2k\pi}{n}+i\ sin\frac{2k\pi}{n},\ (k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$

而 $\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left[cos\frac{2k\pi}{p}+i\ sin\frac{2k\pi}{n}\right]=0,$

故 $\sum\limits_{k=1}^{k=n-1}\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]=-\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]$，右邊$K=0$，但

$k=0$時，$\sum\limits_{k=1}^{k=n-1}\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]=-1$ ……………………………(1)

令 $\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=r$,

則 $\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}=r^2$,

…………………………………

$\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=r^{n-1}$;

而 $\cos\frac{2\pi}{n}=r+\frac{1}{r}$, $\cos\frac{4\pi}{n}=r^2+\frac{1}{r^2}$, …, $\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=r^{n-1}+\frac{1}{r^{n-1}}$.

又因 $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\frac{1}{\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}}$

故 $\sqrt[n]{1}$ 之虛根可爲 $r, r^2, r^3, \ldots, r^{\frac{n-1}{2}}, r^{-\frac{n-1}{2}}, \ldots, r^{-3}, r^{-2}, r^{-1}$，但 $n-1$ 爲偶數。

由是，從(1)，$\sum\limits_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}}\left(r^k+\frac{1}{r^k}\right)=-1$,

卽 $\left(r+\frac{1}{r}\right)+\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+\cdots+\left(r^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}}\right)=-1$. ………………(2)

今令 $r+\frac{1}{r}+\cos\frac{2\pi}{n}=y$，則 $r^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}}$ 當爲 y 之 $\frac{n-1}{2}$ 次冪而(2)爲

y 之 $\frac{n-1}{2}$ 次方程式，而此方程式之根卽爲表所求之長者。

由上第二及第四，知不可 $\frac{n-1}{2}=2^{\alpha}$，卽 $n=2^{\alpha+1}+1$.

又從(j)，知不可不 $\alpha+1=2^m$,

故圓周若能分成 n 等分，則不可不 $n=2^{2^m}+1$.

Feuerbach定理之證明五則

Karl Wilhelm Feuerbach(1800—1834)乃德國 Erlangen 高等學校之算學教授，以本定理而著名。彼於1822年發表一文，題爲"三角形中幾個重要的點及此等點所組成之幾個圖形的性質(Eigenshaften einiger merkwuerdigen Punkte des geradlingen Dreiecks, und mehrerer durch Sie bestimmten Linien und Figuren)"，其最後一定理謂過三角形三垂線之足之圓，與切此三角形三邊之四個圓均相切，析言之，則與內切圓爲內切，與傍切圓爲外切，證法與本文中之第三証法相彷彿。按此中第一圓，卽三角形之九點圓，除通過三垂足外，并通過三邊中點及自垂心至頂點三線段之中點，故本定理又稱爲九點圓定理。其證法甚多，吳先生今所舉五種，概用初等幾何方法爲證，頗有趣味。茲就原稿稍加整理，發表於次，以饗讀者。 劉正經識。

爲簡便起見，除臨時特別聲明者外，本文一律採用下列記法：在$\triangle ABC$中，

A', B', C'表三邊之中點。 a, b, c表三邊之長， D, E, F表三垂線之足。

I表內心，r表內半徑，X, Y, Z表內切圓與三邊之切點。

I_1表對A角之傍心，r_1表此傍切圓之半徑；X_1, Y_1, Z_1表其與三邊之切點；其他兩傍切圓做此，卽I_2表對B角之傍心，I_3表對C角之傍心，等等。

O表外心，R表外半徑。 G表重心。 H表垂心。 N表九點圓心。

定理：三角形之九點圓，與其內切圓及傍切圓相切。

第一證法

先就內切圓證之。設$\angle A$爲三角中之最小者，又P, Q, R各爲$\triangle AYZ$，$\triangle BZX$，$\triangle CXY$之垂心。過P, Y, R及P, Z, Q各作一圓如圖中所示。

Ⅰ. 先證此二圓除P點外，必有一第二交點。過Y作BI之平行線交BE

於 M. 因 YPZI; YRXI; 及 YMBI 皆爲平行四邊形;故 YPMR 與 IZBX 兩形全等,而

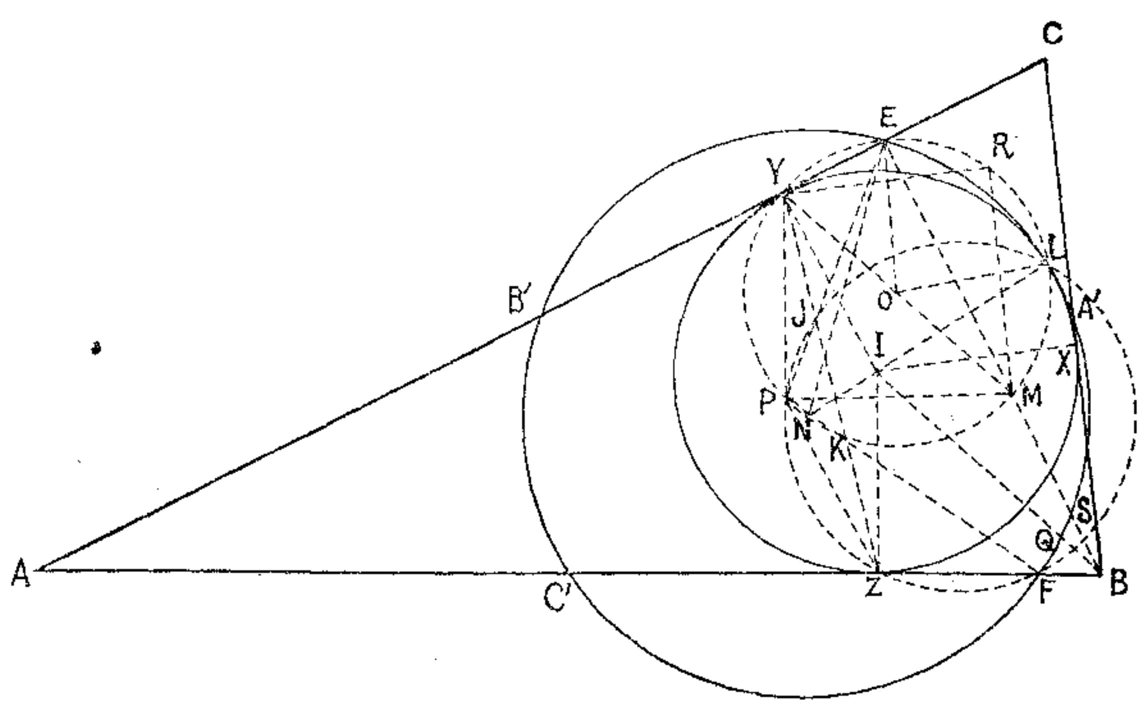
$$\angle PMY=\angle ZBI=\tfrac{1}{2}\angle B,\qquad \angle YPM=\angle IZB=\text{直角},$$

故 YM 爲圓 PYR 之一直徑,且此圓必過E點。同理,圓 PZQ 中劣弧 PZ 上所立之圓周角必等於 $\frac{1}{2}\angle C$,且此圓必過 F 點。

聯 PE,PF 交 YZ 於 J,K 兩點,則見

$$\angle PJZ=\angle EJY=\angle AYJ-\angle YEJ=\angle AYZ-\angle YMP$$
$$=\tfrac{1}{2}(180^0-\angle A)-\tfrac{1}{2}\angle B=\tfrac{1}{2}\angle C$$
$$=\text{圓 PZQ 中劣弧 PZ 上所立之圓周角},$$

因知 J 在 PZQ 圓周上。同理可証 K 在 PYR 圓周上。今 J 在 P 與 E 之間,K



在 P 與 F 之間,故圓 PZQ 上之二點 J 及 F,一在圓 PYR 之內,一在其外,故此二圓必有一第二交點,名之爲 L。

II. 次証 L 在九點圓上。由圖易知 $\angle ELP=\angle EMP=\angle AYP=90^0-\frac{1}{2}A$,

同理可証$\angle FLP$亦等於$90^\circ-\angle A$，故得

$$\angle ELF=\angle ELP+\angle FLP=180^\circ-2A.$$

因 B，C，E，F 共在以 A′ 爲中心之圓上；故

$$\angle EA'F=2\angle EBF=2(90^\circ-A)=180^\circ-2A;$$

由是$\angle ELF=\angle EA'F$，而 L 在過 E，A′，F 三點之圓卽九點圓上。

II. 復次，證 L 在內切圓上。此甚易證，因

$$\angle YLZ=\angle YLP+ZLP=\tfrac{1}{2}(B+C)=\angle YXZ$$

也。

III. 最後證九點圓與內切圓於 L 相切。設 O 爲 YM 之中點，卽圓 PYR 之中心（非$\triangle ABC$之外心）。聯結 NL，NE，OL 及 OE，則

$$\angle OEM=\angle OME=\angle IBE=\angle IBC-\angle EBC$$
$$=\tfrac{1}{2}B-(90^\circ-C)=\tfrac{1}{2}(C-A).$$

設 S 爲九點圓與 BE 之交點，則 S，N，B′ 在一直線上，而

$$\angle NEM=\angle NSE=\angle B'SE=\angle B'A'E$$
$$=\angle B'A'C-\angle EA'C=\angle ABC-2\angle EBC$$
$$=B-2(90^\circ-C)=C-A=2\angle OEM,$$

故知 OE 爲$\angle NEM$之等分線。由是

$$\angle NLO=\angle NEO=\angle OEM=\angle OME=\angle IBE=\angle IYO=\angle ILO,$$

而 N，I，L 在一直線上。於是知九點圓與內切圓相切。

以 I_1，X_1，Y_1，Z_1 代 I，X，Y，Z，則幾可以同樣之方法，証明傍切圓 I_1 與九點圓相切。

合此二者成本定理。*

系。三圓 QXR，RYP，PZQ 交於一點。

* 編者按此証似不甚完全，內切圓部分，尙須証 N，I 在 OL 之同側。傍切圓部分僅依同理不能爲功，若遇所對之角爲直角時，I 段證法幾全不可用。

第二證法

設$\angle ABC>\angle BAC>\angle BCA$. 在 AC 上取 $AK=AB$,聯結 BK. 作 A 角等分線交 BK 於 J,則 C',J,A' 各為 BA,BK,BC 之中點而在平行於 AC 之一直線上.

EC'為直角三角形 BEA 過直角頂點之中綫,故$EC'=AC'$而$\angle C'EA=\angle C'AE$. 由是$\angle EC'J=\angle BC'J$而$C'J$為$\angle EC'B$之等分綫. 故 J 為$\triangle AC'E$在$\angle A$內之傍切圓心,EJ 為$\angle B'EC'$之等分綫,而 EJ 之延綫必過$B'A'C'$弧之中點 α.

次設 $EA'C'$ 弧之中點為 M;直綫 MJ 再交九點圓於 L 點. 因

$$\angle ABC>\angle BAC>\angle BCA,$$

$$\therefore\quad \angle ABC>\tfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)>\tfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCA).$$

但

$$\angle C'B'A'=\angle ABC,$$

$$\angle C'LM=\tfrac{1}{2}\angle C'LE=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle C'B'E)$$

$$=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BCA)=\tfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC),$$

$$\angle C'E\alpha=\tfrac{1}{2}\angle C'EB'=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle C'A'B')$$

$$=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC)=\tfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCA);$$

$$\therefore\quad \angle C'B'A'>\angle C'LM>\angle C'E\alpha.$$

故 M 在 $A'\alpha$ 弧上而 L 在 $C'E$ 弧上.

再設劣弧 EB' 之中點為 β,劣弧 FC' 之中點為 γ,$L\beta$ 交 AC 於 Y',$L\gamma$ 交 AB 於 Z',則因

$$\angle JLY'=\angle MLE-\angle \beta LE$$

$=$立於 $\frac{1}{2}$($EA'C'$ 弧$-EB'$ 弧)上之圓周角

$=$立於 $\frac{1}{2}$ $B'A'C'$ 弧上之圓周角

$$=\angle\alpha EB'=\angle JEY'$$

故四邊形 $JLEY'$ 內接於一圓. 倣此可証四邊形 $JLC'Z'$ 亦內接於一圓. 由是

$$\angle JY'C=\angle JLE=\angle JLC'=\angle JZ'B,$$

而$\angle JY'A=\angle JZ'A$. 因之可証$\triangle AY'J$與$\triangle AZ'J$全等,而$AY'=AZ'$.

於AJ上取I'點爲中心作圓切AC於Y',則此圓亦必切AB於Z'. 吾人今証此圓切九點圓於L,且即爲三角形之內切圓. 由次圖可見

$\angle\beta L\gamma-\angle\beta A'\gamma=$立於$\beta A'\gamma$弧上之圓周角$-$立於$\beta L\gamma$弧上之圓周角

$=$立於$B'A'F$弧上之圓周角$-$立於ELC'弧上之圓周角

$=\angle BAC$.

$\angle\beta L\gamma+\angle\beta A'\gamma=180^0$

$\therefore\quad \angle\beta L\gamma=\frac{1}{2}(180^0+\angle BAC)$

但

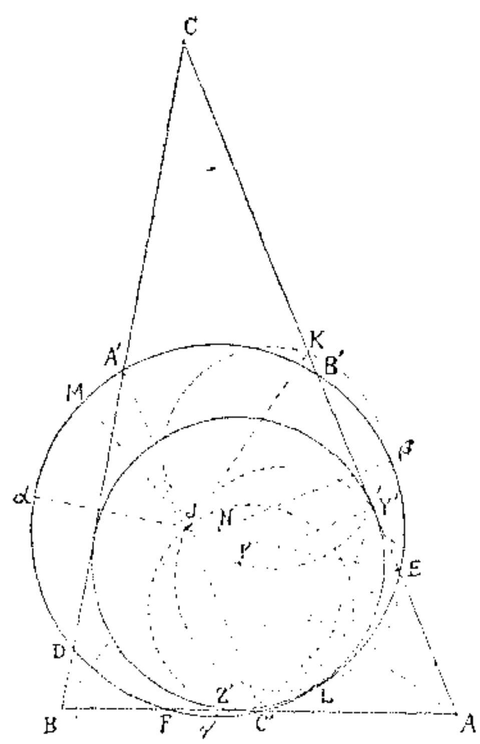
$\angle Y'LZ'\equiv\angle\beta L\gamma$

$\angle Y'I'Z'=180^0-\angle BAC$

優角$\angle Y'I'Z'=180^0+\angle BAC$

$\therefore\quad \angle Y'LZ'=\frac{1}{2}$優角$Y'I'Z'$

故I'圓通過L點.



聯結$N\beta$,則$N\beta\parallel I'Y'$,而

$\angle I'LY'=\angle I'Y'L=\angle N\beta L=\angle NL\beta$,

故N,I',L在一直線上而I'圓切九點圓於L.

由$I'Y'\perp Y'K$, $I'J\perp JK$,知J,I',Y',K四點共圓,因得

$$\angle I'KY'=\angle I'JY'=\angle AJE+\angle EJY';$$

因J爲$\triangle AC'E$之傍心,故

$$\angle AJE=\angle JEC-\frac{1}{2}\angle C'AE=\frac{1}{2}(180^0-C'EA-C'AE)=\frac{1}{2}\angle EC'A,$$

$$\angle EJY'=\angle ELY'\equiv\angle EL\beta=\frac{1}{2}EC'B'$$

$$\therefore \angle I'KY'=\frac{1}{2}\angle EC'A+\frac{1}{2}\angle EC'B'=\frac{1}{2}\angle AC'B'=\frac{1}{2}\angle ABC.$$

然 $\angle I'KY'=\angle I'BA$，故 $\angle I'BA=\frac{1}{2}\angle ABC$ 而 I' 又在 B 角之等分綫上。由是 I' 與 I 合而 I' 圓卽三角形之內切圓。

於是証得三角形之九點圓與內切圓相切。

在以上之証明中，撤去 $\angle ABC>\angle BAC>\angle BCA$ 之假設，而以 M,β,γ 之直徑的對稱點代 M,β,γ，則幾可以全同之法證明九點圓與 $\angle A$ 內之傍切圓相切。由是得本定理之完全証明。

第三證法

補定理 1。IA,IB,IC 之延綫交外接圓周於 α,β,γ；自 α,β,γ 至 BC,CA,AB 各作垂綫，設其長分別爲 μ_1,μ_2,μ_3，則

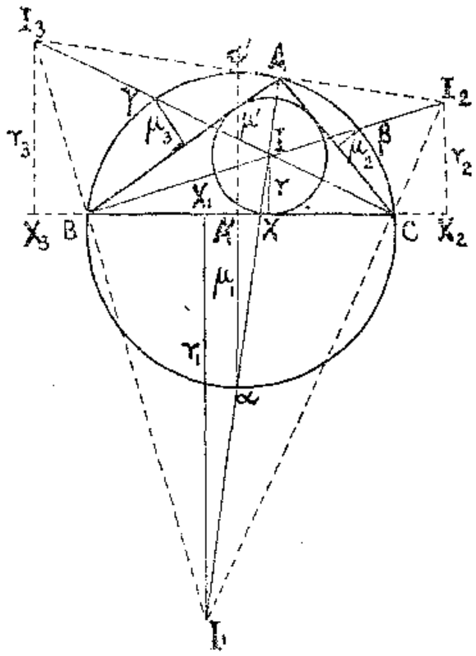
$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=2R-r.$$

若以 I_1 代 I，則

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=2R+r_1,$$

餘類推。

［證］ 因 $\triangle ABC$ 爲 $\triangle I_1I_2I_3$ 之垂足三角形，故 $\triangle ABC$ 之外接圓卽 $\triangle I_1I_2I_3$ 之九點圓，而 α,β,γ 分別爲 II_1,II_2,II_3 之中點。



設過 α 之直徑之他端爲 α'，$A'\alpha'=\mu'$ 則 $\mu_1+\mu'=2R$. 但由圖易見

$\mu_1=\frac{1}{2}(r_1-r)$，$\mu_2=\frac{1}{2}(r_2-r)$，$\mu_3=\frac{1}{2}(r_3-r)$

及

$$\mu'=\frac{1}{2}(r_2+r_3)$$

$$\therefore \quad \mu_1+\mu_2+\mu_3=\frac{1}{2}(r_1+r_2+r_3-3r)$$

$$=\frac{1}{2}(r_1-r)+\frac{1}{2}(r_2+r_3)-r$$

$$=2R-r.$$

若易 I 爲 I_1，則見

$$\mu_1=\tfrac12(r_1-r),\quad \mu_2=\tfrac12(r_2+r_1),\quad \mu_3=\tfrac12(r_3+r_1)$$

$$\therefore\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=\tfrac12(2r_1+r_2+r_3+r_1-r)$$

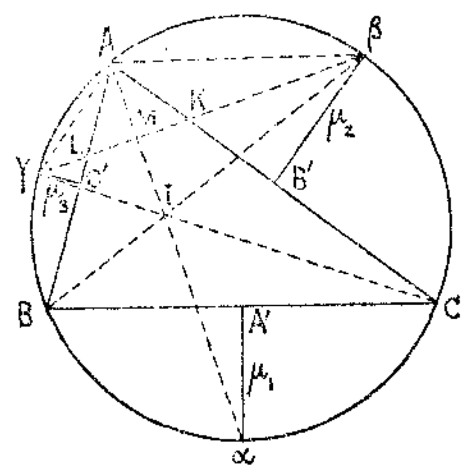
$$=\tfrac12(2r_1+4R)=2R+r_1.$$

補定理 2。 $AI^2+BI^2+CI^2=\frac12(a^2+b^2+c^2)+2r^2-4Rr$

［證］ 聯結 $\beta\gamma$ 交 AB, AI, AC 於 L, M, K. 在 $\triangle AI\beta$ 內，

$\angle AI\beta=\angle IAB+\angle IBA=\frac12(A+B)$,

$\angle IA\beta=\angle IAC+\angle CA\beta=\frac12(A+B)$,



故 $\beta A=\beta I$. 同理 $\gamma A=\gamma I$，而 $\beta\gamma$ 爲 AI 之垂直等分綫。由相似三角形之理，有

$$\frac{AM}{\beta B'}=\frac{AK}{\beta K},\quad \frac{AM}{\gamma C'}=\frac{AL}{\gamma L}.$$

在 $\triangle\beta KA$ 及 $\triangle AL\gamma$ 中，

$\angle KA\beta=\frac12 B=\angle L\gamma A$,

$\angle K\beta A=\frac12 C=\angle LA\gamma$

故兩形相似而 $AK\cdot AL=\beta K\cdot\gamma L$，因之 $AM^2=\beta B'\cdot\gamma C'$，即

$$(\tfrac12 AI)^2=\mu_2\mu_3\qquad\therefore\quad AI^2=4\mu_2\mu_3.$$

同理可證 $BI^2=4\mu_3\mu_1$，$CI^2=4\mu_1\mu_2$，由是

$$AI^2+BI^2+CI^2=2(2\mu_2\mu_3+2\mu_3\mu_1+2\mu_1\mu_2)$$

$$=2[(\mu_1+\mu_2+\mu_3)^2-(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)]$$

因 $\mu_1(2R-\mu_1)=A'B^2=\frac14 a^2$，故 $\mu_1^2=2R\mu_1-\frac14 a^2$，等等，而

$$\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=2R(\mu_1+\mu_2+\mu_3)-\tfrac14(a^2+b^2+c^2).$$

以 $\mu_1+\mu_2+\mu_3=2R-r$ 代入，得

$$AI^2+BI^2+CI^2=2[(2R-r)^2-2R(2R-r)+\tfrac14(a^2+b^2+c^2)]$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2r^2-4Rr.$$

系。 若以 I_1 代 I，由同樣証法可得

$$AI_1^2+BI_1^2+CI_1^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2r_1+4Rr_1.$$

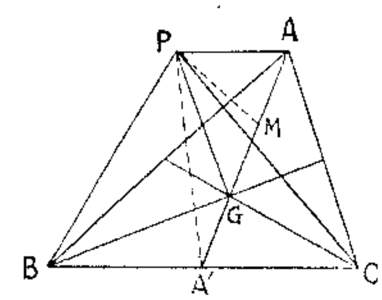
餘類推。

補定理 3.* 若 P 為 △ABC 平面內之任意點，則

$$AP^2+BP^2+CP^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3PG^2.$$

［證］ 由中線定理，

$$BP^2+CP^2=2A'P^2+2A'B^2=2A'P^2+\frac{1}{2}a^2. \quad (1)$$



設 AG 之中點為 M，則依同理，

$$A'P^2+MP^2=2PG^2+2A'G^2 \quad (2)$$

$$GP^2+AP^2=2MP^2+2AM^2 \quad (3)$$

消去 MP^2，得

$$2A'P^2=3PG^2-AP^2+4A'G^2+2AM^2.$$

但 $A'G=AM=\frac{1}{3}AA'$，故

$$2A'P^2=3PG^2-AP^2+\frac{2}{3}AA'^2=3PG^2-AP^2+\frac{1}{3}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2).$$

代入(1)式，即得所求証之關係。

系 1. 設 P 與 G 重合，則

$$AG^2+BG^2+CG^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

系 2. 設 P 與 I 重合，則

$$AI^2+BI^2+CI^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3IG^2$$

$$\therefore\quad 3IG^2=AI^2+BI^2+CI^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

$$=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+2r^2-4Rr. \quad \text{(由補定理 2)}$$

系 3. 設 P 與 O 重合，則得

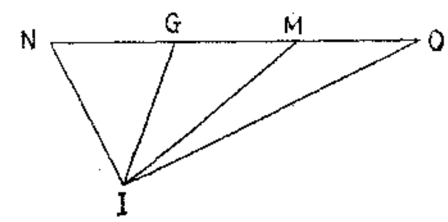
$$3OG^2=3R^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

*此補定理為編者所加入。

系 4. 設 P 與 I_1 重合，則由補定理 2 之系，得

$$3I_1G^2=\tfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+2r_1^2+4Rr_1;\text{等等。}$$

上述諸補定理既明，吾人乃可從事本定理之證. 因 N,G,O 在一直線上，且 $OG=2GN$，故若 OG 之中點為 M，則



$$IN^2+IM^2=2IG^2+2NG^2,$$

$$IG^2+IO^2=2IM^2+2OM^2.$$

消去 IM^2，并注意 $NG^2=OM^2=\tfrac{1}{4}OG^2$，得

$$2IN^2=3IG^2+\tfrac{3}{2}OG^2-IO^2.$$

然 $IO^2=R^2-2Rr$，為有名定理，再用補定理 3 之系 2 及 3，得

$$2IN^2=\tfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+2r^2-4Rr+\tfrac{3}{2}R^2-\tfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)-R^2+2Rr$$

$$=\tfrac{1}{2}R^2-2Rr+2r^2=\tfrac{1}{2}(R-2r)^2.$$

$$\therefore\quad IN=\tfrac{1}{2}R-r.$$

因九點圓半徑為 $\tfrac{1}{2}R$，故九點圓心與內心之距離，等於兩半徑之差，故兩圓內切得以證明。

若以 I_1 代 I，則因 $I_1O^2=R^2+2Rr_1$，由補定理 3 之系 3 及 4 即得

$$I_1N=\tfrac{1}{2}R+r_1.$$

由是得證九點圓與傍切圓外切。

第四證法

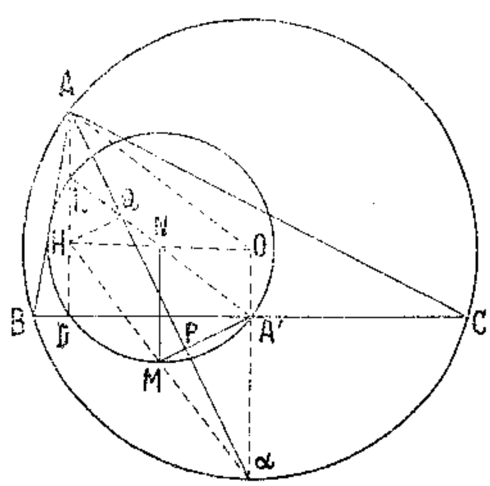
補定理 1. 自 A′ 引 A 角等分線之垂線，必過垂直於 BC 之九點圓直徑之一端。

［證］ 設 L 為 AH 之中點，則因 A′,D,L 皆在九點圓上且 $\angle A'DL=90^\circ$，故 LA′ 為九點圓之直徑而 N 為其中點。 又 N 為 OH 之中點，亦易証明。

次設 A 角等分線交 A′L 於 Q，外接圓於 α，則 $\triangle LAQ$ 與 $\triangle A'\alpha Q$ 相似。 然因 $OA' \underline{\parallel} AL$，$OA \parallel A'L$，$\angle LQA=\angle OAQ=O\alpha Q=\angle LAQ$，故 $LA=LQ$ 而 $A'\alpha=A'Q$. 由是自 A′ 向 Aα 所引之垂線，必過 Qα 之中點 P 可知。聯結 Hα 交此垂線於 M，則

M 必為 $H\alpha$ 之中點。 蓋因在 $\triangle AQH$ 中，$AL=LH=LQ$，故 $HQ\perp A\alpha$ 而平行於 $A'M$，在 $\triangle H\alpha Q$ 中，P 既為 αQ 之中點，M 自必為 $H\alpha$ 之中點。

再就 $\triangle HO\alpha$ 觀之，N 為 HO 之中點，M 為 $H\alpha$ 之中點，故 $NM \,{\not{=}}\, O\alpha\perp BC$，而 $NM=\frac{1}{2}O\alpha=\frac{1}{2}R$. 由是 M 為垂直於 BC 之九點圓直徑端點，而本定理證訖.

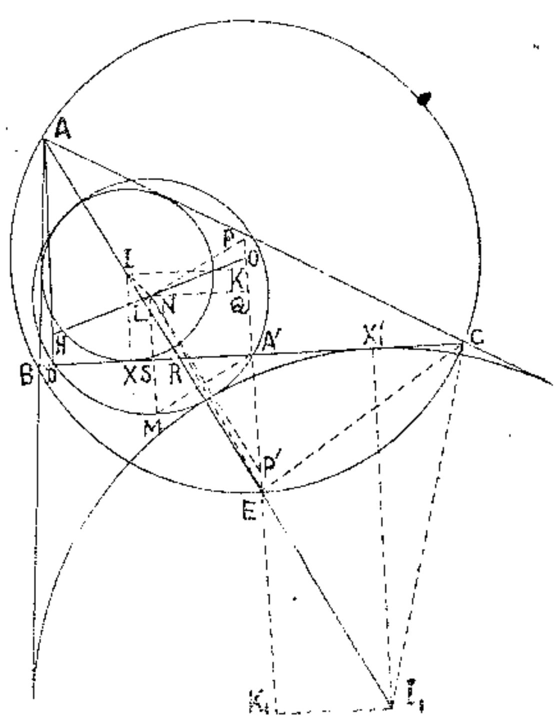


補定理2. 設E為△ABC接外圓周上BC弧之中點（非CA上之垂足），則

$$EN^2+EI^2=(EA'+\tfrac{R}{2})^2+(EA'+r)^2.$$

［證］ 自 I 引 $IK\perp OA'$，自N引 $NQ\perp OA$. 又自N引AE之垂線，交 AE於L，OA' 於 P。再作 $A'M\perp AE$，M為九點圓垂直於 BC 之直徑端點（補定理1）。如是則

$$A'M \,{\not{=}}\, PN,\quad A'P=MN=A'N.$$



故若 P 關於 A' 之對稱點為P'，則以 PP' 為直徑作圓必過 N 點；而 $\angle PNP'=90°$，因之

$$PN^2=PP'\cdot PQ=2PA'\cdot PQ.$$

在 $\triangle PNE$ 中，PQ為 PN在 PE上之正射影，故有

$$\begin{aligned}EN^2&=EP^2+PN^2-2PE\cdot PQ\\&=EP^2+2PA'\cdot PQ-2PE\cdot PQ\\&=EP^2-2(PE-PA')\cdot PQ\\&=EP^2-2A'E\cdot PQ. \qquad (1)\end{aligned}$$

次設AE交BC於 R，NM交 BC於S，則易見S為$A'D$ 之中點，及 $\triangle PNQ$ 與 $\triangle REA'$

相似。故 $PQ/QN=A'R/A'E$ 而

$$2A'E\cdot PQ=2A'R\cdot QN=2A'R\cdot A'S=A'R\cdot A'D. \qquad (2)$$

又 $\triangle REC$ 與 $\triangle CEA$ 相似，故 $ER/EC=EC/EA$；然因 $EC=EI$（第三證法補定理 2 證中前段），因之

$$EI^2=ER\cdot EA. \qquad (3)$$

由 $\triangle A'ER, \triangle KEI, \triangle DA'R$ 彼此相似關係，得 $EI/KI=ER/A'R=EA/A'D$，故

$$KI^2=A'R\cdot A'D. \qquad (4)$$

比較(1)，(2)，(4)得

$$EN^2=EP^2-KI^2=EP^2-(EI^2-EK^2),$$

$$\therefore \quad EN^2+EI^2=EP^2+EK^2. \qquad (5)$$

但 $EP=EA'+A'P=EA'+MN=EA'+$九點圓半徑$=EA'+\frac{1}{2}R$，$EK=EA'+A'K=EA'+XI=EA'+$內切圓半徑$=EA'+r$，代入(5)式即得所求之證。

上圖中 $\triangle ICI_1$ 為直角三角形，故 $EI_1=EI, EK_1=EK$；依同理可證

系。 $EN^2+EI_1^2=EP^2+EK_1^2=(EA'+\frac{1}{2}R)^2+(r_1-EA')^2.$

吾人今乃可證 Feuerbach 定理如次：在 $\triangle EIN$ 中，EL 為 EN 在 EA 上之正射影，故

$$IN^2=EN^2+EI^2-2EL\cdot EI.$$

因 $\angle ILP=\angle IKP=90°$，故 L, I, P, K 共圓而有 $EL\cdot EI=EP\cdot EK$，再引用補定理 2 即得

$$IN^2=EP^2+EK^2-2EP\cdot EK=(EP-EK)^2$$

$$=(A'P-A'K)^2=(MN-IX)^2=(\tfrac{1}{2}R-r)^2;$$

$$\therefore \quad IN=\tfrac{1}{2}R-r,$$

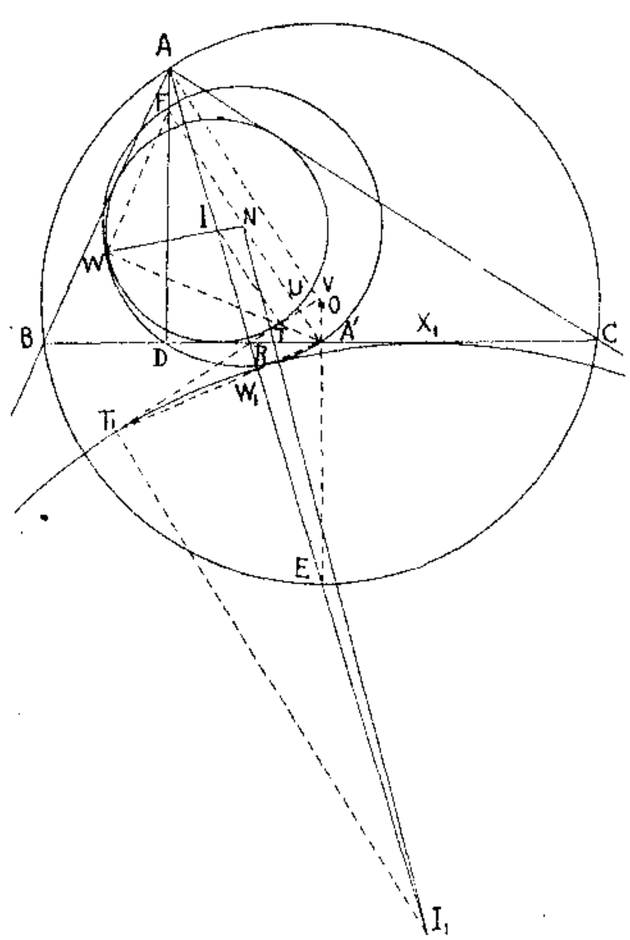
同樣可證

$$I_1N=\tfrac{1}{2}R+r_1.$$

第五證法

設F爲AH之中點，E爲BC弧之中點；(E，F 并非垂線之足)；R 爲 AE與BC之交點。過 R 引 $A'F$ 之垂線交 $A'F$，OA 於 U，V。

因 $AO \parallel A'F$，　$\therefore RV \perp OA$，而 $\angle DAR = \angle AEO = \angle VAR$，因之 $\triangle ADR \cong \triangle AVR$；AR 又爲 $\angle DRV$ 之等分線。



作 $IT \perp RV$，則 $IT = IX$ 而 RV 爲內切圓之切綫；切點爲 T。聯 A'，T 交內切圓於 W，再聯結 WF。因 $A'X$ 爲自 A 至內切圓之切線；故

$$A'X^2 = A'T \cdot A'W.$$

四邊形 FERU 有相對二直角，故可內接於一圓，因之

$$A'U \cdot A'F = A'R \cdot A'D.$$

由第四證法之補定理2有

$$A'X^2 = KI^2 = A'R \cdot A'D,$$

$$\therefore A'T \cdot A'W = A'U \cdot A'F$$

而 F，W，T，U 共圓。但

$$\angle FUT = 90^\circ, \quad \therefore \angle FWT = 90^\circ.$$

由是 W 在以 $A'F$ 爲直徑所作之圓卽九點圓上。

聯IW及NW，則因 NA'，IT皆垂直於RV，故互相平行；而二等邊三角形 $NA'W$，ITW之一對底角相等，底邊又在同一直線上，如是 N，I，W 三點共線。故兩圓相切於W點。

若以 I_1 代I，完全用同理可證傍切圓與九點圓外切。

（完）

一個難證的逆定理

"等腰三角形之兩底角相等",為初等幾何定理之一。但其逆定理初無人注意。1840年有 Lehmus 其人者,將此逆定理提出於 Steiner, 其後遂漸惹起興趣,各種證法,逐漸發表。証法中多用反證,但直接證法亦不少。 吳先生此文中共舉證法十種,唯據編者所知,尚有他種證法,以後擬再續貂。 讀者諸君如有新證法見示,極所歡迎。　　　　正經附識。

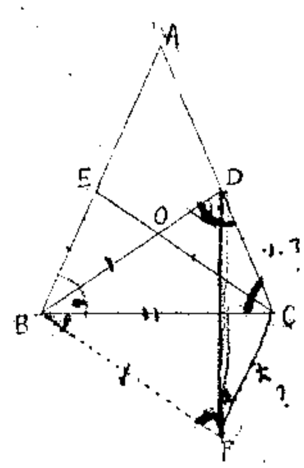
定理: 三角形兩角之等分線相等,則此三角形為等腰。

設在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$, $\angle C$ 之等分線各交 AC, AB 於 D, E。 若 $BD = CE$, 求證 $AB = AC$。

第 一 證 法*

自 B 作 BF 平行且等於 CE;聯結 CF,則 $\triangle BFC$, $\triangle CEB$ 因二邊及夾角兩兩相等而為全等形;故 $BD = BF$ 而

$$\angle BDF = \angle BFD. \qquad (1)$$



今若 $\angle ACB > \angle ABC$,則 $\angle ECB > \angle DBC$, 由是 $\triangle ECB$, $\triangle DBC$ 中二邊各等而夾角不等, 故 $BE > CD$ 而

$$CF > CD \qquad (2)$$

設 BD,CE 交於 O, 則因 $\angle ACB > \angle ABC$, 必 $\angle OCD > \angle OBE$, 但 $\angle COD = \angle BOE$, 故 $\angle ODC < \angle OEB$ 而 $\angle BDC < \angle BFC$。 從(1) $\angle BDF = \angle BFD$,由是 $\angle CDF < \angle CFD$,而 $CF < CD$。此與(2)矛盾,故知 $\angle ACB$ 不大於 $\angle ABC$。

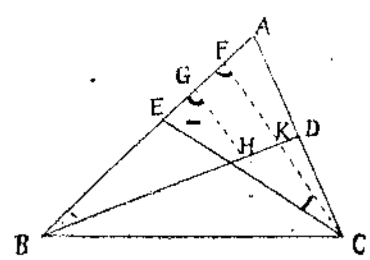
* 此例為 Greenstreet 氏之證法。——編者。

同理可證∠ACB不小於∠ABC，故必∠ACB＝∠ABC而AB＝AC. （証訖）

若吾人不引BF$\underline{\angle}$CE而引DF$\underline{\angle}$CE，則亦可用相類之法証此定理。

第二證法*

若AB≠AC，則必AB>AC或AB<AC. 設AB>AC，則∠ACB>∠ABC而∠ACE>∠ABD，∠ECB>∠DBC.



從C至AB引CF，令∠ECF＝∠DBA，則CF必在∠ACE之內而F在A與B之間，由是若CF交BD於K，則K必在D，B之間，而

BK<BD. (1)

又由上證，∠ECB＋∠ECF>∠DBC＋∠DBA，

即∠FCB>∠FBC，故FB>FC. 因此可在FB上取GB＝FC. 再作GH∥FC而交BD於H，則H必在B，K之間，而BH<BK<BD (2)

次就△BGH與△CFE觀之，由作圖知其兩角及一邊相等，故爲全等三角形，而BH＝CE. 由(2)得CE<BD，於假設不合。

故知不可AB>AC. 同理可證不可AB<AC，故不得不AB＝AC. （證訖）

第三證法

設∠A之等分線交BC於G，則AG，BD，CE相交於一點，以I記之。

過I作B′D′，交AB或其延長線於B′，AC於D′，使∠AIB′＝∠AIC，則見△AB′I與△ACI中，有兩角一邊相等，故兩形全等而

AB′＝AC， (1) B′I＝CI， (2) ∠IB′A＝∠ICA； (3)

此卽∠D′B′E＝∠D′CE，故E，B′，C，D′四點共圓。

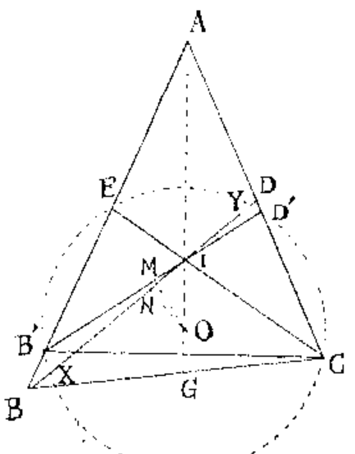
次因∠AID′＝∠B′IG＝180°－∠AIB′＝180°－∠AIC＝∠CIG＝∠AIE，知

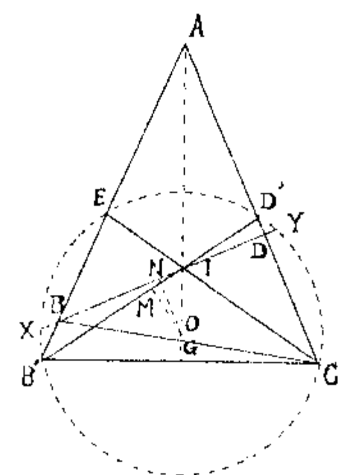
---

* 此似爲Casey氏之證法。——編者。

$\triangle AID'$ 與 $\triangle AIE$ 全等，故 $D'I = EI$ 而由(2)得 $B'D' = CE = BD$.　　(4)

又由上證，$\triangle B'IE$ 與 $\triangle CID'$ 中，有兩邊及夾角相等，故知 $B'E = CD'$. 由是 $B'E$, CD' 爲圓之等弦，圓心 O 與此兩線等距，則必在其夾角之等分線卽 AG 上。





若 BD 不與 $B'D'$ 相合，則 B 若在 B', E 之外，D 亦在 C, D' 之外(左圖)；若 B 在 B', E 之間，D 亦在 C, D' 之間(右圖)。卽 B, D 二點，或同在圓外，或同在圓內。故若 BD(或其延長線)交圓於 X, Y，則必 $BD >$ 或 $< XY$。

自圓心 O 作 $OM \perp B'D'$, $ON \perp BD$，則 $\angle OMN$; $\angle ONM$ 必一爲鈍角而一爲銳角，由此因

$\angle ONM >$ 或 $< \angle OMN$,　　而 $OM >$ 或 $< ON$,　　卽 $B'D' <$ 或 $> XY$.

左圖中 $B'D' < XY < BD$，右圖中 $B'D' > XY > BD$*，總之若 BD 不與 $B'D'$ 相合，則必 $B'D' \neq BD$. 此與(4)矛盾，故 $B'D'$ 不得不與 BD 相合而 $AB' = AB$. 但由(1)已知 $AB' = AC$，故 $AB = AC$.　　(證訖)

第四證法†

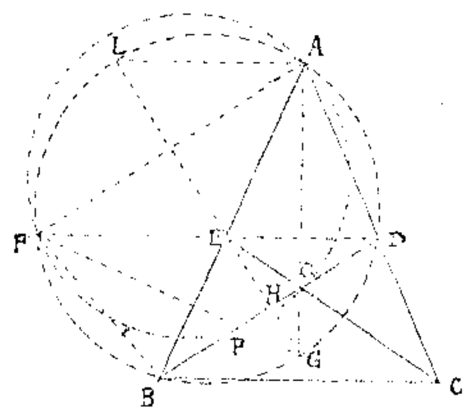
從 B 作 BF，令 $\angle FBD = \angle AEC$, $BF = EA$；聯結 FD，則因 $BD = CE$ 而 $\triangle BDF$

* 此等關係僅由直覺得來，似不甚妥。——編者。

† 此爲 Chartres 之證，見 Educational Times Reprint, P.106.——編者。

與 $\triangle ECA$ 全等．由是 $\angle BFD=\angle EAC=\angle BAD$，而 B，F，A，D 共圓．

引 $\angle A$ 及 $\angle BFD$ 之等分線，各與BD交於 O，P，而互交於 G，則 O 必為 BD，CE 之交點而 G 為弧 BD 之中點。



在 $\triangle AEO$，$\triangle FBP$ 中，

$AE=FB$，　$\angle AEO=\angle FBP$，

$\angle EAO=\angle BFP$，　$\therefore\ FP=AO$。

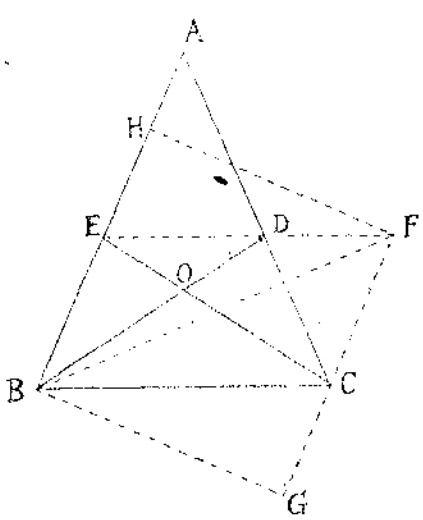
從 G 引圓之直徑 GL，交 BD 於 H，則因 G 為弧 BD 之中點，知 $GH\perp BD$。

聯結 AL，AF，則 $\angle GOH=\angle GLA=\angle GFA$，故 OAFP 四邊形內接於一圓而 FP，AO 為同圓中之二等弦。因之 $AF\not\parallel OP$，即 $AF\not\parallel BD$，而 $AD=FB=AE$。

在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACE$ 中，已有 $BD=CE$，$AD=AE$，而 $\angle ABD$，$\angle ACE$ 又皆為銳角，故兩形全等。於是 $AB=AC$。

第五證法

從 E 作 EF，令 $\angle CEF=\angle CBD$，$EF=BD$；聯結 CF，則因 $CE=BD$ 而 $\triangle CEF$ 與 $\triangle CBD$ 全等，故



$\angle CDB=\angle FCE$，　$CD=CF$，$BC=EF$。

從 B 向引 FC 垂線，遇 FC 之延長線於 G．

又從 F 引 AB 之垂線 FH，并設 BD，CE 交於O，則

$$\angle BEF=\angle BEO+\angle CEF$$

$$=\angle BEO+\angle CBD$$

$$=\angle BEO+\angle EBO=\angle BOC$$

$$=\angle ODC+\angle OCD$$

$$=\angle FCE+\angle ECB=\angle FCB,$$

又因 $\angle OBC$, $\angle OCB$ 皆爲銳角，$\angle BOC$ 必爲鈍角，故 $\angle BEF$, $\angle FCB$ 皆爲鈍角，而 BG, FH 皆落於 BCFE 之外。 由是在 $\triangle BGC$ 及 $\triangle FHE$ 中，

$$\angle BCG = \angle FCB \text{ 之補角} = \angle BEF \text{ 之補角} = \angle FEH,$$

又同爲直角三角形；且 $BC = FE$，故兩形全等而 $BG = FH$, $CG = EH$.

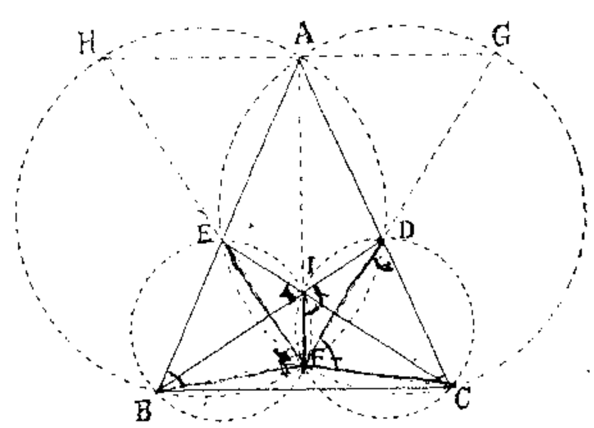
聯 BF，則易見 $\triangle BGF$ 及 $\triangle FHB$ 全等，而得 $BH = FG$. 由是

$$BE = BH - EH = FG - CG = FC = DC,$$

而在 $\triangle BEC$ 及 $\triangle CDB$ 中，三邊均各各相等，故 $\angle DBC = \angle ECB$，因知 $\angle B = \angle C$ 而 $AB = AC$.　　(證訖)

第六證法

設 BD, CE 交於 I. 過 A, B, D 三點及 E, B, I 三點各作一圓，兩圓再交於 F；聯結 FB, FC, FD, FE, FI，則見



$$\angle FIC = \angle FBE \ (\because EBFI \text{ 共圓})$$
$$= \angle FDC \ (\because ABFD \text{ 共圓})$$

因之 I, F, C, D 共圓。 由是

$$\angle DFC = \angle DIC = \angle EIB = \angle EFB,$$
$$\angle EFC = \angle EFD + \angle DFC$$
$$= \angle EFD + \angle EFB = \angle BFD$$
$$= \angle EAC \text{ 之補角},$$

而 A, E, F, C 四點亦共圓. 於是

$$\angle EFD = \angle EFI + IFD = \angle EBI + \angle ICD = \tfrac{1}{2}(\angle B + \angle C).$$

延長 FD，遇圓 AEC 於 G，延長 FE 遇圓 ADB 於 H；聯結 AF, AG, AH. 此二圓中，有等弦 CE, BD，且此等弦所對之圓周角同爲 $\angle A$，故此二圓全等，因之 AEF 弧與 ADF 弧相等而 $\angle AGF = \angle AHF$. 又

$$\angle EAG = \angle EFG \text{ 之補角} = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \angle A + \tfrac{1}{2}(\angle B + \angle C),$$

故$\angle CAG=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$而 AG 爲$\angle A$之外角等分線。同理可證 AH 亦爲$\angle A$之外角等分綫;由是 H,A,G 三點共綫,而 $\triangle FGH$ 爲等腰。

由上所述,知 FAG 弧與 FAH 弧相等。但 FEA 弧等於 FDA 弧,故 AG 弧等於 AH 弧而 AG=AH. 於是 $FA\perp GH$,而$\angle BAF$,$\angle CAF$爲等角之餘角,故 AF 必過 I 點而爲$\angle A$之等分綫。

$$\therefore\quad \angle ACE\equiv\angle DCI=\angle DFI\equiv\angle DFA=\angle DBA,$$

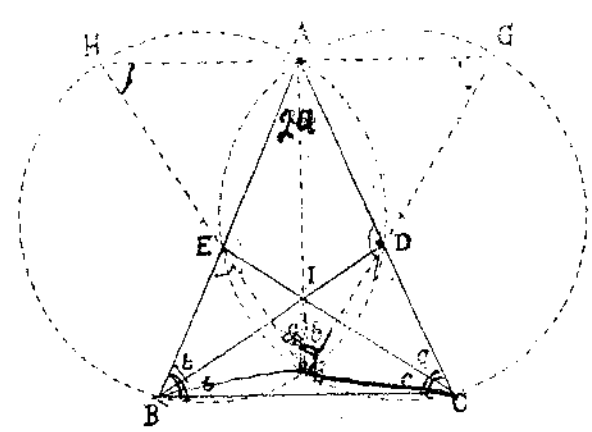
即 $\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle B$,因之$\angle C=\angle B$而 AB=AC.　　(證訖)

第七證法*

作圓 ADB 及 AEC 再交於 F. 聯 FD 延長之,遇圓 AEC 於 G;聯 FE 延長之遇圓 ADB 於 H. 聯 AF,AG,AH,并設$\angle BAC=2a$,$\angle ABC=2b$,$\angle ACB=2c$,則

$$\angle AFD=\angle ABD=b,$$

$$\angle AFE=\angle ACE=c.$$



同第六證法之理可証 H,A,G 三點共線,圓 A D B 與圓 A E C 相等,$\triangle FGH$ 爲等腰,及 $FA\perp GH$,故知 FA 爲$\angle DFE$之等分線,而

$$b=c.$$

由是立知　AB=AC.　　(證訖)

第八證法

設 BD,CE 交於 I. 聯結 A,I 則 AI 等分$\angle A$. 如前設$\angle BAC=2a$,$\angle ABC=2b$,$\angle ACB=2c$,則

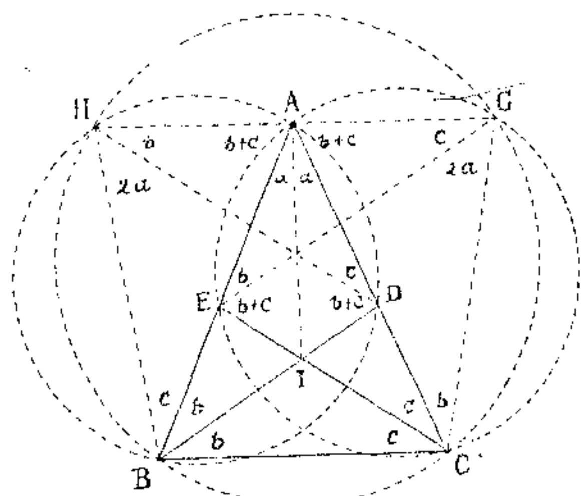
$$\angle BAI=\angle IAC=a,\qquad \angle ACE=\angle ECB=c,\qquad \angle ABD=\angle DBC=b.$$

---

* 此與第六證法大體相同,唯較簡潔耳。——編者。

作圓 AEC 及 ADB，過 I 引 AI 之垂綫，交此二圓於 G 及 H。因此綫爲 $\angle A$ 之外角等分綫，故

$\angle CAG = \angle BAH = b+c$.



由圖易見

$\angle AEC=2b+c$,　$\angle ADB=2c+b$。

聯 CG, EG, BH, DH 等綫，

則見

$\angle AGC=\angle AEC$ 之補角 $=2a+c$,

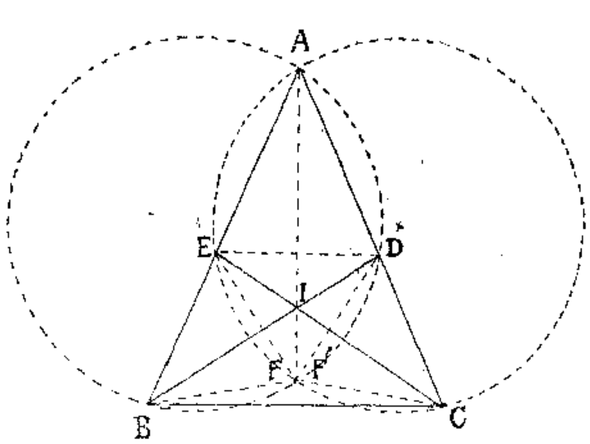
$\angle ACG = b$,　　$\angle ABH=c$.

由是 $\angle CGH+\angle CBH=(2a+c)+(2b+c)$

$=2(a+b+c)=180^\circ$,　C,G,H,B 共圓。又由圓易見 $\triangle GEC$ 及 $\triangle HEB$ 中，各角兩兩相等，加之 $CE=BD$，故 $CG=BH$。由是 $BC \parallel GH$，　BCGH 爲等腰梯形。故 $\angle BHG=\angle CGH$，即 $2a+b=2a+c$；因得 $b=c$ 而 $AB=AC$。　（證訖）

第九證法

過 A,E,C 及 A,D,B 各畫圓，則如前證，此二圓爲等圓。設 BD,CE 交於 I，聯AI 并延長之，遇圓 AEC 於 F，遇圓 ADB 於 F′. 聯 FC, F′B，則因 AI 等分 $\angle BAC$，F,F′ 各爲CE 弧及 BD 弧之中點，而因 $BD=CE$，知 $CF=BF'$。



在 $\triangle AFC$, $\triangle CFI$ 中，$\angle F$ 爲公有，$\angle CAF=\angle FAB=\angle FCI$，故兩形相似。

$\therefore$　$AF : CF=CF : IF$,

而　　$AF \cdot IF = CF^2$.

同理　　$AF' \cdot IF' = BF'^2$.

但 $CF=BF'$,故 $AI\cdot IF=AF'\cdot IF'$ 而 F' 與 F 合。由是

$$BI\cdot ID=AI\cdot IF=CI\cdot IE,$$

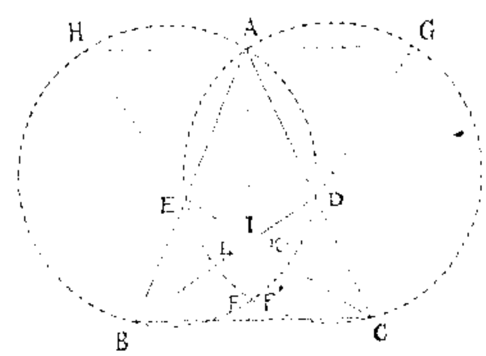
而 B,C,D,E 共圓。故 $\angle DCE=\angle DBE$,$\angle C=\angle B$ 而 $AB=AC$. （證訖）

第十證法

如前設 BD,CE 交於 I,作圓 AEC 及 ADB 各交 AI 於 F 及 F′. 過 F 作圓 AEC 之直徑 FG 交 CE 於 K,聯結 AG,則因 F 為 CE 弧之中點,知 $FG\perp CE$,而直角三角形 FIK 與 FGA 相似,由是

$$FK : FI=FA : FG,$$

而 $$FI\cdot FA=FK\cdot FG. \quad (1)$$



過 F′ 作圓 ADB 之直徑 F′H,交 BD 於L,則依同理可證

$$F'I\cdot F'A=F'L\cdot F'H. \quad (2)$$

但因兩圓相等,$FG=F'H$,$FK=F'L$;

故 $$FK\cdot FG=F'L\cdot F'H;$$

而 $$FI\cdot FA=F'I\cdot F'A$$

因之 F′ 不得不與F相合。由是$\angle AGF=\angle AHF$. 但由(1),(2)知 AIKG 及 AILH 皆內接於圓;而 $\angle AIB$ 為 $\angle AHF$ 之補角,$\angle AIC$ 為 $\angle AGF$ 之補角,故 $\angle AIB=\angle AIC$ 而 $\triangle AIB$ 與 $\triangle AIC$ 全等。故 $AB=AC$. （證訖）

幾何叢存

本文所載，據吳學敏女士言，包含著名問題或定理之推廣及他人所詢題之解答；初無系統，故分段刊登之。——編者。

Apollonius 軌跡之推廣

定理： 從一點至二定圓作切線，若兩切線之比等於定比，則此點之軌跡為一圓。

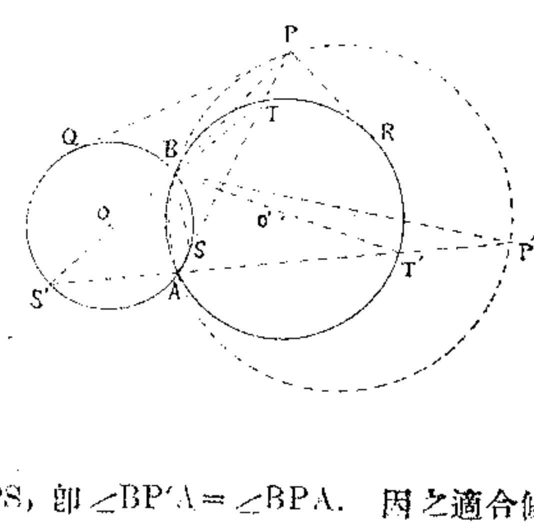
I. 兩圓相交時

［證］ (a) 設 P 為軌跡上一點，從 P 作切線 PQ, PR. 命 A, B 為兩圓之交點，聯 PA 交二圓於 S 及 T. 依題意 PQ : PR＝定比，設為 k，則

$$k^2 = PQ^2 : PR^2 = PA \cdot PS : PA \cdot PT = PS : PT.$$

設 P′ 為軌跡上之另一點。作 AP′ 交二圓於 S′, T′；如上理可得

$P'S' : P'T' = k^2$.



∴ $PS : PT = P'S' : P'T'$,

而 $ST : PT = S'T' : P'T'$,

即 $ST : S'T' = PT : P'T'$.

今 △BTS 及 △BT′S′ 之三角互等，故相似而

$SB : S'B' = ST : S'T'$.

$= PT : P'T' = PS : P'S'$,

又 ∠BSP＝∠BS′P′，故 ∠BP′S′＝∠BPS，即 ∠BP′A＝∠BPA. 因之適合條件之點，在以 AB 為弦之一圓周上。

(b) 在圓 ABP 上任取一點 P′，作 AP′ 交二圓於 S′, T′. 聯 BS′, BT′, BP′,

則見 $\triangle BP'S'$, $\triangle BPS$ 等角, $\triangle BT'S'$, $\triangle BTS$ 亦然, 故

$$P'T' : PS = BS' : BS = S'T' : ST$$
$$= P'S' - S'T' : PS - ST = P'T' : PT.$$
$$\therefore\ P'S' : P'T' = PS : PT = k^2.$$

自 P' 至兩圓引切線 $P'Q'$, $P'R'$, 則可證

$$P'Q'^2 : P'R'^2 = P'S' : P'T' = k^2,$$

而 $P'Q' : P'R' = k$. 故圓 ABP 上之任意點適合所設條件. (證訖)

II. 兩圓相切時

[證] 今証二圓外切之一種, 內切者可倣此證之.

設 C 爲切點, P 爲軌跡上之一點, O, O' 爲兩 中心, r, r' 爲其半徑. 自 P 作切線 PQ, PR; 聯 PC 交二定圓於 S, T, 則

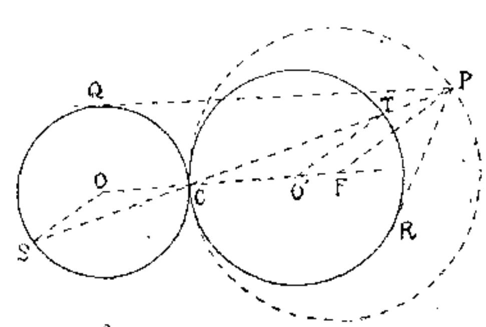
$$PS : PT = PS \cdot PC : PT \cdot PC = PQ^2 : PR^2 = k^2,$$

而 $$PS - PT : PT = ST : PT = k^2 - 1. \quad (1)$$

聯 OS, O'T, 則 $\angle OSC = \angle OCS = \angle O'CT = \angle O'TC$, 而 $OS \parallel O'T$. 由是 $CS : CT = OS : O'T = r : r'$.

而 $CS + CT : CT = r + r' : r'$,

即 $ST : CT = (r+r')/r'$. (2)



由(1), (2)得

$$PT : CT = (r+r')/r' : k^2 - 1$$

而由合比之理, 知 CP : CT 之值爲

$$\frac{r+r'}{r'} + k^2 - 1 / k^2 - 1.$$

從 P 引 TO' 之平行線交 OO' 或其延線於 F, 則 $FP : OT' = FP : r' = CP : CT$,

$$\therefore\ FP = \frac{r + r' + r'(k^2-1)}{k^2-1} = \text{定長 } l.$$

又因$\angle FPC=\angle O'TC=\angle FCP$,知 $FC=FP$,而 F 爲定點。由是可知 P 點之軌跡爲以 F 作中心 l 爲半徑之圓周,且此圓周亦與二定圓切於 C 點。

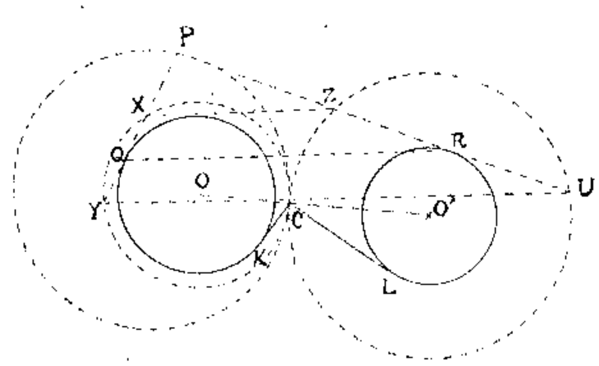
任軌跡上之點,皆適合於所設條件之證甚易,茲從略。

Ⅲ. 兩圓相離時

[證] (a) 設 P 爲軌跡上之一點,PQ,PR 爲自 P 所作二圓之切線。在中心線 OO' 上求一點 C,使切線 $CK:CL=k$. 以 O,O' 爲心,$OC,O'C$ 各爲半徑作圓。設此二圓各交 PQ,PR 於 X,Y 及 Z,U,則

$$XQ=QY=CK,$$

$$ZR=RU=CL.$$



$$\therefore\ PQ:PR=k=CK:CL$$

$$=XQ:ZR=QY:RU.$$

由是

$$PX:PZ=PQ:PR=k,$$

$$PY:PU+PQ:PR=k;$$

因之從 P 至二新圓所引切線平方之比爲

$$PX\cdot PY=PZ\cdot PU=k^2,$$

而本題可歸入 II 類。

(b) 在所得圓周上任取一點 P,自 P 向二定圓作切線 PQ 及 PR,交二新圓於 X,Y 及 Z,U. 從(a)之結論,知從 P 至二新圓所作切線平方之比爲

$$k^2=CK^2:CL^2.$$

然此比對於新圓爲

$$PX\cdot PY:PZ\cdot PU=PQ^2-XQ^2:PR^2-ZR^2,$$

即

$$k^2=CK^2-CL^2=PQ^2-CK^2:PR^2-CL^2;$$

$$\therefore\quad CK^2:CL^2=PQ^2:PR^2=k^2,$$

而 $PQ:PR=k$. 故 P 點適合於所設條件。

二圓相離而一圓在他圓內者,其證法與此大致相同,茲從略.

Desargue 定理之證法

定理: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中, BC, $B'C'$ 之交點為 K, CA, $C'A'$ 之交點為 L, AB, $A'B'$ 之交點為 M,

(1) 若 K, L, M 在一直線上,則 AA', BB', CC' 交於一點;

(2) 若 AA', BB', CC' 交於一點,則 K, L, M 在一直線上.

[證] (1) 從 C' 引 $C'D \parallel LM$,交 $B'M$ 於 D,再引 $C'B_1 \parallel CB$,交 $B'B$ 於 B_1. 聯 B_1D 而延長之交 AA' 於 A_1,再聯 $C'A_1$,則因

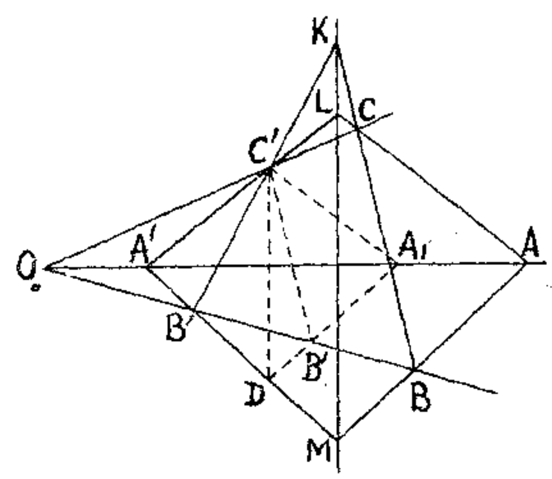
$$B'B_1 : B'B = B'C' : B'K = B'D : B'M,$$

知 $B_1D \parallel BM$. 由是

$$A'A_1 : A'A = A'D : A'M = A'C' : A'L,$$

而 $C'A_1 \parallel CA$. 故 $\triangle A_1B_1C'$ 與 $\triangle ABC$ 相似而在相似位置,因之 AA_1, BB_1, CC' 交於一點,即 AA', BB', CC' 交於一點.

(2) 設 AA', BB', CC' 相交於 O. 自 C' 引 $C'B_1 \parallel CB$,交 BB' 於 B_1;再引 $C'A_1 \parallel CA$ 交 AA' 於 A_1. 聯 B_1A_1 延長之,交 $B'A'$ 之延長線於 D. 聯結 DC'. 如是則



$$OB : OB_1 = OC : OC' = OA : OA_1$$

而 $B_1A_1 \parallel BA$;因之

$$B'D : B'M = B'B_1 : B'B = B'C' : B'K,$$

而 $C'D \parallel KM$. 又

$$A'D : A'M = A'A_1 : A'A = A'C' : A'L,$$

故 $C'D \parallel LM$. 由是 $KM \parallel LM$ 而 K, L, M 在一直線上.　　(證訖)

Mannkeim 氏定理

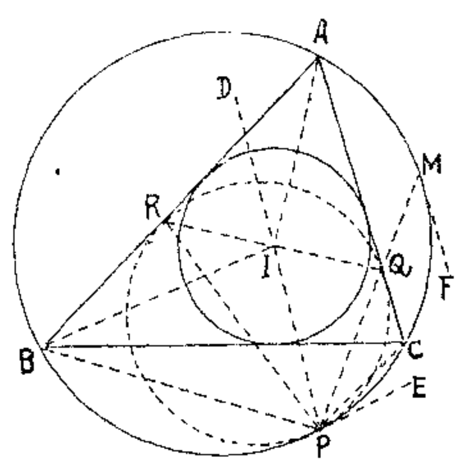
定理：　若三角形二邊之位置一定，內接圓之位置亦一定，則第三邊移動時，外接圓恆切於一定圓。

［證］　設$\triangle ABC$之二邊AB，AC位置一定，其內接圓之位置亦一定。在$\angle BAC$內作一圓，使之內切於$\triangle ABC$之外接圓，并切AC及AB。依次設此等切點為P，Q，R。聯PB，PC，PQ及QR，則見

$\angle AQR+\angle ARQ = \angle A$ 之補角

$= \angle B+\angle C=\angle CPB$。

又　$\angle AQR=\angle ARQ=\angle QPR$.



作$\angle CPB$之等分線PD，則有

$\angle CPD = \frac{1}{2}\angle CPB = \angle AQR$

$= ARQ=\angle QPR=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$.

設PQ之延長線交外接圓於M，在M，P各作外接圓之切線MF及PE，則$\angle PMF = \angle MPE$。但PE亦爲圓PQR之切線故$\angle MPE = \angle PQC$，因之$\angle PMF=\angle PQC$而$MF \parallel AC$。由是M爲AC弧之中點，而$\angle CPQ=\frac{1}{2}\angle B$，又$\angle CPR = \angle CPQ+\angle QPR = \angle B+\frac{1}{2}\angle C$，因得

$$\angle CPQ<\angle CPD<\angle CPR.$$

故PD在PQ，PR之間，必與QR相交。命其交點爲I，聯BI。

依前證，$\angle BPI \equiv \angle BPD = \angle CPD = \angle ARQ$，故IPBR內接於一圓而有$\angle IBR =\angle IPR$. 但$\angle IPR = \angle CPR - \angle QPR = \frac{1}{2}\angle B$，故$\angle IBR =\frac{1}{2}\angle B$而BI爲$\angle B$之等分線。同理可證CI爲$\angle C$之等分線，故I爲$\triangle ABC$之內心。

今$\triangle ABC$內接圓之位置一定，故I爲定點，因之R，Q之位置亦爲一定，而PQR爲定圓。

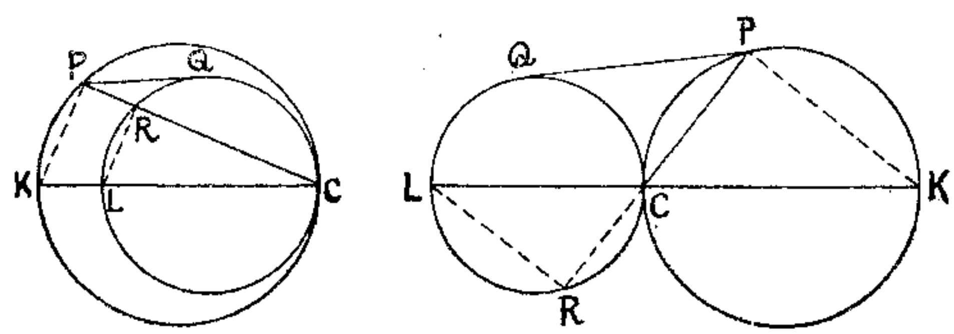
然△ABC之外接圓與PQR圓相切，故△ABC之外接圓恆切於一定圓。

Ptolemy定理之推廣

記號。設1,2爲兩圓，此兩圓之外公切線之長，以$\overline{12}$表之，其內公切線之長以$\overline{12}'$表之；餘倣此。

補定理。二定圓相切於C，在一圓周上任取一點P，自P作他圓之切線PQ，則PQ：PC之值一定不變。

［證］設PC與他圓之交點爲R，二圓中心之聯線爲KCL，則



$$PQ^2 : PC^2 = PC \cdot PR : PC^2 = PR : PC = KL : KC.$$

設兩圓半徑爲r及r'($r>r'$)，則在內切時

$$KL : KC = KC - LC : KC = r - r' : r,$$

在外切時

$$KL : LC = KC + CL : KC = r + r' : r.$$

$$\therefore \quad \frac{PQ}{PC} = \sqrt{\frac{r \pm r'}{r}} = \text{定值}$$

但兩圓外切時取正號，內切時取負號。

Ptolemy定理。設A,B,C,D依次爲共圓四點，則

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

今若將 A,B,C,D 四點改爲與一圓相切之四圓，兩點間之距離改爲相當二圓公切線之長，則得推廣之定理如次：

定理 1． 若 1,2;3,4 四個圓皆外切(或皆內切)於一圓，而 1,2,3,4 爲圓之順序，則

$$\overline{12}\cdot\overline{34}+\overline{14}\cdot\overline{23}=\overline{13}\cdot\overline{24}.$$

定理 2． 若 1,2,3 三圓皆外切(或皆內切)於一圓，而 4 圓內切(或外切)於同圓，則

$$\overline{12}\cdot\overline{34}'+\overline{14}'\cdot\overline{23}=\overline{13}\cdot\overline{24}'.$$

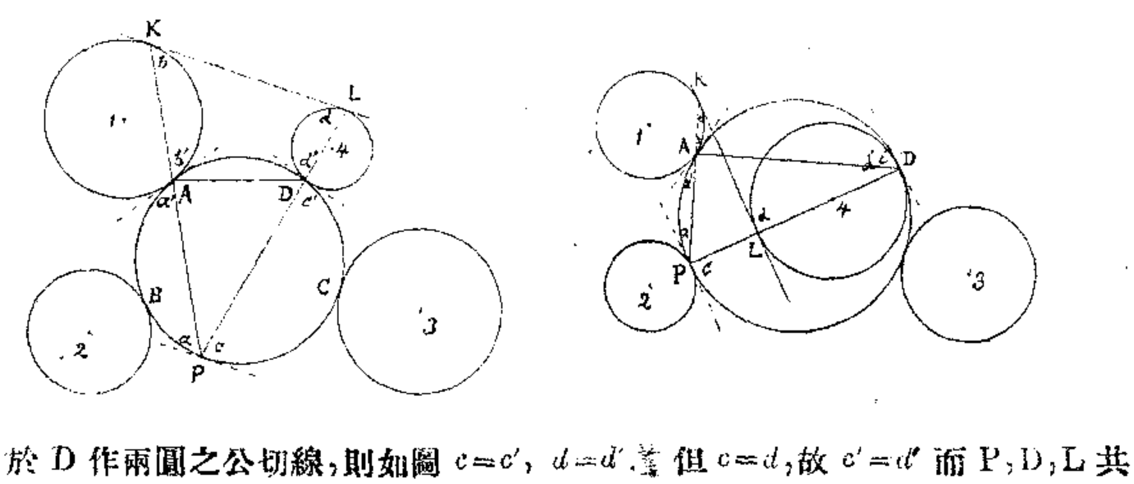
定理 3． 若二圓內切於一圓，他二圓外切於同圓(如分 12,34 爲二羣)，則

$$\overline{12}\cdot\overline{34}+\overline{14}'\cdot\overline{23}'=\overline{13}'\cdot\overline{24}'.$$

(二圓皆內切或皆外切時，取外公切線，一外切而一內切時，取內公切線。)

［證］ 今就四圓皆外切及僅第 4 圓內切二種情形證之，餘可類推。

設 A,B,C,D 依次爲 1,2,3,4 四圓之切點。 作 1,4 之公切線 KL． 聯 AK 交公切圓於 P． 於 P 作公切圓之切線，則由圖見 $a=a'=b'=b$ 而知 KL 平行於此切線。



於 D 作兩圓之公切線，則如圖 $c=c'$， $d=d'$． 但 $c=d$，故 $c'=d'$ 而 P,D,L 共線。 因 $\angle ADP=a=\angle LKA$，而 A, D, L, K 共圓，故 $\triangle PKL$ 與 $\triangle PDA$ 相似而 KL : AD＝PK : PD＝PL : PA．

$$\therefore\ KL^2 : AD^2 = PK \cdot PL : PD \cdot PA = (PK : PA)(PL : PD).$$

今從 P 至圓 1 作切線 PA′，又至圓 4 作切線 PD′，則由補定理

$$PA'^2 : PA^2 = PK : PA, \qquad PD'^2 : PD^2 = PL : PD$$

$$\therefore\ KL^2 : AD^2 = (PA'^2 : PA^2)(PD'^2 : PD^2)，\text{即 } KL : AD = (PA' : PA)(PD' : PD)$$

設 1,2,3,4 四圓半徑依次為 r_1, r_2, r_3, r_4，公切圓半徑為 R，則由補定理，

$$PA' : PA = \sqrt{\frac{R+r_1}{R}}, \qquad PD' : PD = \sqrt{\frac{R\pm r_4}{R}}$$

$$\therefore\ \overline{14} : AD = KL : AD = \frac{\sqrt{(R+r_1)(R\pm r_4)}}{R}.$$

同理可證 $\overline{23} : BC = \dfrac{\sqrt{(R+r_2)(R+r_3)}}{R}$，等等。

今就四圓皆外切者言之，則

$$\overline{14} \cdot \overline{23} : AD \cdot BC = \frac{\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)(R+r_3)(R+r_4)}}{R} = \text{定值 } m.$$

倣此，$\overline{12} \cdot \overline{34} : AB \cdot CD = m$, $\overline{13} \cdot \overline{24} : AC \cdot BD = m$. 然依 Ptolemy 定理，

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD,$$

$$\therefore\ \overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{14} \cdot \overline{23} = \overline{13} \cdot \overline{24}.$$

圓 4 內切時亦然，惟定值為 $\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)(R+r_3)(R-r_4)}/R^2$ 耳.

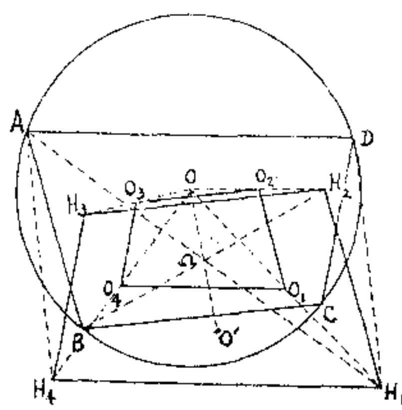
其他情形之證法，由此可以類推，茲不詳。

關於九點圓之二定理.

定理1. 圓內接四邊形 ABCD 中四個三角形 BCD, CDA, DAB, ABC 之九點圓交於一點。

［證］ 設 O 為圓心，R 為半徑，H_1, H_2, H_3, H_4 依次為 △BCD，△CDA，△DAB，△ABC 之垂心.

吾人知 DH_1 及 AH_4 皆平行且等於自 O 至 BC 距離之二倍，故 ADH_1H_4 為平行四邊形而 $H_1H_4 \stackrel{\parallel}{=} AD$. 同理可證 $H_1H_2 \stackrel{\parallel}{=} AB$, $H_2H_3 \stackrel{\parallel}{=} BC$ 及 $H_3H_4 \stackrel{\parallel}{=} CD$. 故四邊形$H_1H_2H_3H_4$ 與 ABCD 全等，亦可內接於一圓，而其外接圓之半徑亦為 R.



凡三角形九點圓心，為外心至垂心聯綫份之中點，故 OH_1, OH_2, OH_3, OH_4 之中點 O_1, O_2, O_3, O_4 各為 $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$, $\triangle ABC$ 之九點圓心，而 $O_iO_j \stackrel{\parallel}{=} \frac{1}{2}H_iH_j (i, j=1, 2, 3, 4)$。故四邊形$O_1O_2O_3O_4$ 與$H_1H_2H_3H_4$ 相似，亦可內接於一圓中而其外接圓之半點為 $\frac{1}{2}R$.

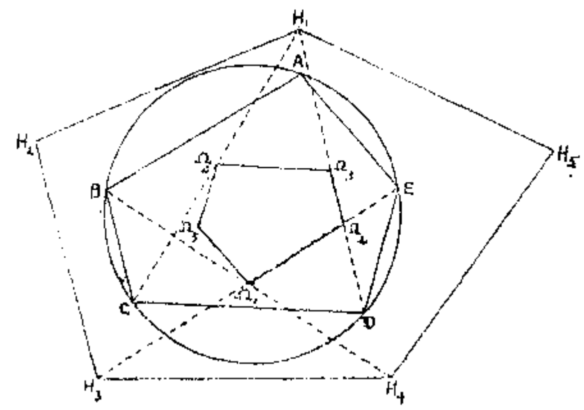
設 Ω 為此圓之中心，則因三角形九點圓之半徑亦為 $\frac{1}{2}R$，故以 O_1, O_2, O_3, O_4 各作中心，作$\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$, $\triangle ABC$ 之九點圓，則此諸圓必皆通過 Ω. 故此四圓為共點圓。

系。 若 ABCD 為圓內接四邊形，則 $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$, $\triangle ABC$ 之九點圓心為共圓四點。

定理 2。 在圓內接五邊形 ABCDE 中，五個三角形 EAB, ABC, BCD, CDE, DEA 之九點圓兩兩相交之點在一圓周上。

[證] 上定理圖中，O 為 $O_1O_2O_3O_4$ 及 $H_1H_2H_3H_4$ 兩四邊形之相似外心，其相似比為 1 : 2。Ω 既為 $O_1O_2O_3O_4$ 之外接圓心，則 Ω 關於 O 之對應相似點 O′(卽在 OΩ 之延長綫上取 O′ 令 OΩ : OO′ = 1 : 2)，必為 $H_1H_2H_3H_4$ 之外接圓心。 但 O 為 ABCD 之外接圓心，既 OΩ : ΩO′ = 1，則 Ω 為 $H_1H_2H_3H_4$ 及 ABCD 兩形之相似內心可知。 由是 Ω 為 AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 諸綫之交點，且為其中點。

如次圖，設 H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 各為 $\triangle EAB, \triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDE, \triangle DEA$ 之垂心，則 $\triangle BCD$ 及 $\triangle CDE$ 兩九點圓之交點 Ω_1，依上定理，即為 BH_4, EH_3 之交點。同理，$\triangle CDE$ 及 $\triangle DEA$ 兩九點圓之交點 Ω_2，即為 CH_5, AH_4 之交點；其餘 $\Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ 可以類推。

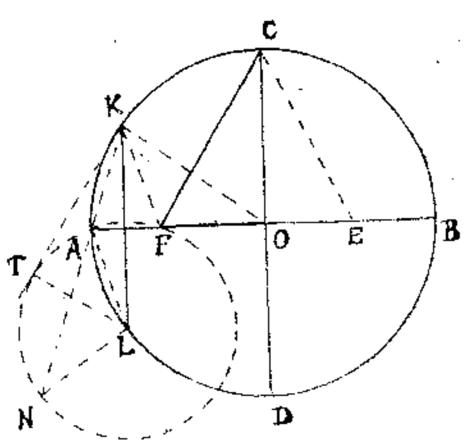


由是知 Ω_1 為 BH_4 及 EH_3 之中點，Ω_2 為 CH_5 及 AH_4 之中點，等等。今就 Ω_3, Ω_4 言之，則見其各為 DH_1, CH_1 之中點，故 $\Omega_3\Omega_4 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$. 同理可證 $\Omega_4\Omega_5 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}DE$，$\Omega_5\Omega_1 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}EA$，$\Omega_1\Omega_2 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$，$\Omega_2\Omega_3 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$，因之 $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4\Omega_5$ 與 ABCDE 相似而其相似比為 $1:2$.

故此等 Ω 共五點均在一半徑為 $\frac{1}{2}R$ 之圓周上。

求作定圓之內接正十邊形及正五邊形

［作法］ 設 O 為定圓，AB，CD 為互相垂直之二直徑。於 OB 上取中點 E，OA 中取 F 令 $EF=EC$，則



(1) OF 為內接正十邊形之一邊；

(2) FC 為內接正五邊形之一邊。

［證］ (1) 以 A 為心，FO 之長為半徑規弧，交定圓 O 於 K 及 L. 聯 OK，FK，則

$$OF^2=(EF-EO)^2=(EC-EO)^2=EC^2-2EC\cdot EO+EO^2$$
$$=OC^2+EO^2-2EF\cdot EO+EO^2=\tfrac{3}{2}OA^2-EF\cdot OA$$
$$=OA(\tfrac{3}{2}OA-EF)=OA(EA-EF)$$
$$=OA\cdot AF.$$

但由作圖，$OF=AK$，故得 $AK:AF=OA:AK$，因之$\triangle KAF$與$\triangle OAK$相似；而$\triangle KAF$為等腰。由是 $KA=KF=FO$，而 $\triangle FKO$ 亦為等腰。設 $\angle AOK=\theta$，則見

$$\angle KFA=\angle KOF+\angle OKF=2\theta=\angle KAF=\angle OAK=\angle OKA.$$
$$\therefore\quad \angle AOK+\angle OAK+\angle OKA=\theta+2\theta+2\theta=5\theta=180^0,$$

而 $\theta=36^0$. 故 AK 即 OF 為內接正十邊形之一邊。

(2) 有三種證法，茲分述之如次：

第一法。於前圖中取 L 為心，LA 為半徑作圓。自 K 引此圓之切綫 KT，幷延長 KA 交此圓於 N. 聯 LT, LN；則在 $\triangle LAN$ 及 $\triangle FOK$ 中，

$$LN=LA=OF=KF,$$
$$\angle LAN=2\angle LKA=2\angle KLA=\angle KOA=\angle FOK;$$

故兩形全等，而 $AN=OK=OA$. 又

$$KT^2=KN\cdot KA=KA(KA+AN)=OF(OF+OA)$$
$$=OF^2+OF\cdot OA=OA\cdot AF+OA\cdot OF$$
$$=OA(AF+OF)=OA^2,$$

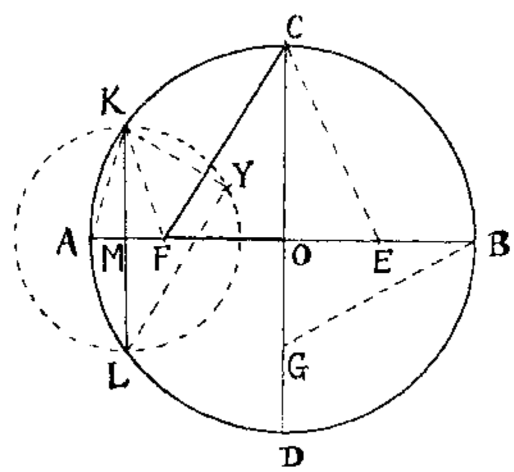
因之 $KT=OA=OC$. 由是直角三角形 LTK 與 FOC 全等而 $FC=KL$.

但 AK, AL($=OF$) 各為正十邊形之一邊，故 KL 等於圓內接正五邊形之一邊，而 FC 亦然。

第二法。由 (1) 之證知 $\triangle KAF$ 為等腰，故 KL 為 FA 之垂直等分線。設 M 為 FA 之中點，以 B 為心，KL 之長為半徑規弧，交 OD 於 G，則

$$OG^2=BG^2-OB^2=KL^2-OA^2=4KM^2-OA^2$$

$$=4KA^2-4AM^2-OA^2=4OF^2-AF^2-OA^2$$
$$=2OF^2-AF^2+2AF\cdot OA-OA^2$$
$$=2OF^2-(OA-FA)^2=OF^2.$$



由是直角三角形 FOC 與 GOB 全等，而 $FC=BG=KL$.

但 KL 爲圓內接正五邊形之一邊，故 FC 亦然。

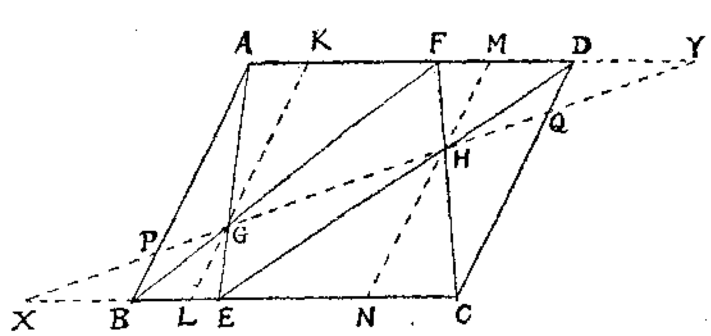
第三法。 以 KL 爲直徑作圓，取弦 KY，令 $KY=OF$，則

$$YL^2=KL^2-KY^2=4KM^2-OF^2=4KF^2-4MF^2-OF^2$$
$$=3OF^2-AF^2=3AF\cdot OA-AF^2=AF(3OA-AF)$$
$$=AF(2OA+OF)=2OF^2+OF\cdot AF=OF(2OF+AF)$$
$$=OF(OA+OF)=OF\cdot OA+OA\cdot AF=OA(OF+AF)$$
$$=OA^2$$

故直角三角形 KYL 與 FOC 全等，而 $FC=KL$.

雜　題　二　則

1. E 爲平行四邊形 BC 邊上任意一點，F 爲 AD 邊上任意一點。AE，BF 交於 G，DE，CF 交於 H；而 GH 交 AB，CD 於 P，Q. 求證 $BP=DQ$.



［證］延長 PQ，各交 BC，AD 之延線於 X，Y. 過 G，H 各作 AB 之平行線 KGL 及 MHN，則

$$MH : HN = FH : HC = DH : HE = YD : XE = YF : XC;$$

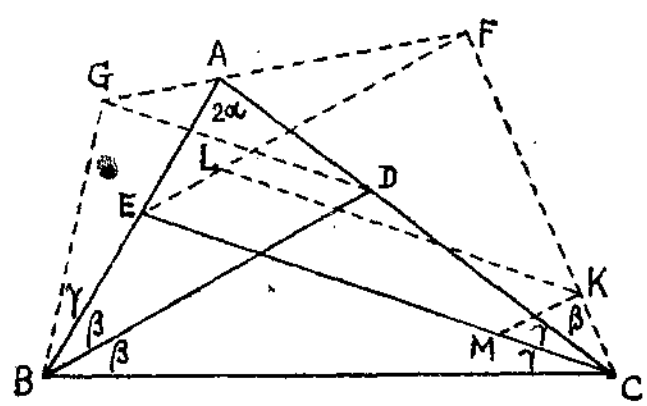
$$LG : GK = BG : GF = EG : GA = XE : YA = XB : YF;$$

$$\therefore \quad MH \cdot LG : HN \cdot GK = YD : YA = XB : XC.$$

由是 $XB : BC = YD : DA$ 而 $XB = YD$. 故 $\triangle PBX \cong \triangle QDY$ 而 $BP = DQ$.

2. $\triangle ABC$ 中;$\angle B > \angle C$,BD 爲 $\angle B$ 之等分綫;CE 爲 $\angle C$ 之等分線,則 $BD < CE$.

［證］ 命 $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. 從 E 引 BD 之平行線 EF,則 $\angle AEF = \beta$. 但 $\angle AEC = 2\beta + \gamma$,故 $\angle FEC = \beta + \gamma$.



從 C 引 FC,令 $\angle ACF = \beta$,則 $\angle ECF = \beta + \gamma$. 因知 $\triangle CFE$ 爲等腰,且 $\angle CFE = 2\alpha = \angle CAE$,而 E, A, F, C 四點共圓. 故

$$\angle AEC + \angle AFC = 180^0$$

又 $\angle CAF = \angle CEF = \beta + \gamma$,

而 AF 爲 $\angle A$ 之外角等分線.

倣此,從 D 作 DG∥CE,則 $\angle BDG = \beta + \gamma$. 從 B 引 BG 令 $\angle ABG = \gamma$,則 $\triangle DGB$ 爲等腰而 $\angle DGB = 2\alpha = \angle BAD$. 由是 B, G, A, D 共圓,$\angle BAG = \angle BDG = \beta + \gamma$,而 AG 亦爲 $\angle A$ 之外角等分綫. 因知 G, A, F 在一直線上.

因 $\angle GBC = 2\beta + \gamma = \angle AEC = \angle AFC$ 之補角,故 B, G, F, C 共圓. 但由題設 $\angle B > \angle C$,卽 $\beta > \gamma$,故 $\angle GBC = 2\beta + \gamma > 2\gamma + \beta = \angle BCF$,而 GBC 弧小於 BCF 弧. 由是 GB 弧小於 CF 弧而 $GB < CF$.

今 $\triangle GBD$ 與 $\triangle FCE$ 互爲等角,又皆爲等腰三角形;故若於 FC 上取 $FK = GB$,作 KL∥CE 交 FE 於 L,則 $KL = BD$. 再自 K 引 EF 之平行線交 CE 於 M,則因 K 在 F, C 之間,M 必在 E, C 之間,且 $ME = KL = BD$. 但 $ME < CE$,故知 $BD < CE$.

我的父親

吳學敏

父親生於遜清光緒十年。幼時祖父游宦於外，經年不歸。曾祖母爲祖姑迎養於武進。父雖武進人，然與祖母及姑母居於無錫舅家。家極貧，常典當度日。然祖母賢，己常辛苦而使父親能與表伯叔等同從塾師讀書。

父親讀書穎悟，却不願死讀，又不願多寫大字，輒將兩三紙重疊濕濕，用乾墨書在第一張紙上，墨痕透過，第二三張紙上便已有字的痕跡，以是塞責。作文靈活異常，又喜替人代做。李企中太先生在大同教書時還提起父親讀書時的軼事。

父親第一次在數學方面露頭角是九歲時。那時表伯叔等公請了一位算學教師，父親出不起來修金，不能學。一天，父親聽見同學說先生出一數學題，無人能解，題是「一加二加三……一直，加到十，求和，却不許實加」。父親大動好奇心，便獨自到後院去想。因想一，二，三，……間的關係，是後一數總比前一數多一。於是姑將石子排成十排，第一排一粒，第二排二粒，……一直到第十排十粒。看了一回，忽思若「第一排再加十粒，第二排再加九粒，……直至第十排再加一粒，則此堆石子仍是十排，然每排粒數是十一，故共有一百十粒。因石子總數今是原數的二倍，故原數是五十五」。此題解後，同學以告先生，先生大驚，特加青眼，准許旁聽。然不久先生辭去，父親亦始終未正式學過數學。

父親幼時，矯健喜武，慕游俠，常爲兒童領袖。有相欺者，必痛擊之。祖母恐得罪他人，常深抑之。父親受祖母笞，默無一言。後見欺己者，問曰『你還要欺我嗎?』因又痛擊之。欺父親者再訴於祖母，祖母再加扑責，父親仍默受，受畢，再覓欺己者而痛擊之。以後人皆憚父親，不敢欺，父親亦不欺人。惟喜抱不平，善計謀，同輩稱爲軍師大將。表伯叔蘿請武藝敎師習武，父親暗中偸學，表伯叔亦樂於轉敎。每日

在後院中聚羣兒打拳，打沙袋，跳踉爲樂。上燈回家，祖母逼做功課時，筋骨酸痛，苦不堪言，祖母又督責嚴，常令父親工作至夜半。常不能早起，屢爲祖母笞罰，體日瘦。祖母怪其失常，時加盤問，父親寧願意受罰，終不言，後始微露於姑母。

十五歲定婚（定婚始末見父親自傳的新體詩「飄泊生涯」），定婚後居表舅公家教書。表舅公家藏書極富，然「諸親好友概不借閱」八大字赫然貼於書房的門上。幸表伯與父友善，父親又常爲之力助，因常將書偸借給父親。父親買不起書，便揀自己喜歡的詩詞文章數學書等，夜以繼日的抄寫。既要省紙，又要省油，所以要抄得儘量的快，字要儘量的小。抄過一遍，內容也十之九記得了。父親密密層層滿紙蚊脚，使人一見就眼花的手抄本，至今還保存着一部份。

父親旣長於數學，同學輩便時以此請教。某次，縣試，有二數學題，無人能解，出題者甚自負，竟以所出題懸賞。父親因題中名詞從未見過，不能動手，乃以所能借得之數學書盡量借來，窮二日夜之力，從定義看起，懸賞題乃豁然而解。於是父親疇人之名始噪於親友間．（此事述者雖不能舉年份及人名，然要非無稽之談。）

此時父親學武初成，才氣英銳，有數十少年聽其指揮。某次，流氓在街上侮辱少女，父親抱不平，流氓乃來挑戰，約夜中於野外相會．流氓聚百餘人，父率數十少年禦之，奮臂一呼，一以當十，拳臂所及，無不傾跌者。部下少年見父如此，其氣愈壯；父又先出奇計，分部下爲二，一先戰，一俟敵氣餒敗退時襲擊之。流氓初以爲少年易與，至此乃大驚，後竟斂跡。父親少年時任俠之行，表伯叔輩至今猶能追述。

十九歲，祖父告假歸而祖母病。姑母年幼，侍祖母者惟父一人，祖母病重，父割臂和湯以進，此事對姑母印象極深，故至今猶能娓娓洋述。此事在現代人目中，自是愚孝不足爲法。然三四十年前，割臂割股能醫親病之方盛行，爲人子者目睹其親輾轉牀席，不忍悽惻悲痛之心，出此下策，以求萬一之效，非至孝者不能如此！

祖母死，祖父赴浙，以姑母寄養武進祖姑家，父親遂獨居無錫．父親因勞悴失眠，又悲痛過度，大病．所寄居之親戚家乃藉口父是獨子，如有短長，不敢負責，下逐客令，表伯叔等亦愛莫能助。此時館已辭去，同遊少年自祖母病後，父即絕跡不

與往來，親戚莫加援助，孑身孤立，悵悵無所之。幸岳家聞訊，殷勤相邀，乃暫居岳家。自思斷梗飄蓬，不謀自植，終非善策，乃隻身赴南京，欲投某戚謀事。忽遇以前數學教師周彣甫先生，大喜。周先生知父近狀，乃介紹父親到他所在的書院當抄寫，月薪五元，父親以捨此別無他法，應之。此時父親纔十九歲，隻身孤立，赤手空拳，進或有成，退卽一敗不可收拾。於是猛然懷「死裏求生」的心，日間抄寫，夜裏借周先生的書看。書大半是東文，父親從未學過，雖能向周先生請教，周先生亦無十分閑暇，又借不到完備的字典。況且那時東文雖是文言體，然雜漢字甚多，語頭頭尾很難分清；又係字母拼成，非如漢文之字字清晰，有時一字母竟不辨屬於前一字或後一字。於是父親祇能恃不完備的字典，將一字字分了試，合了試，合前後文猜測，摸索，看懂一句，卽將此句譯成中文。好容易讀完一二冊代數幾何，東文亦逐漸有門徑，便更加努力，再讀他書，如此半年，直讀到微積分。其實還不到半年，祇有半年的一半，因白日忙於「為人作嫁」，祇有黑夜的工夫是自己的。父親幾乎夜夜不睡，窮冬嚴寒，以舊破綿袍緊裹身，雙臂不伸入袖中而縮於懷裏，左手握墨匣，緊貼胸前，右手伸出來寫字，冷則再縮入懷中，藉體溫取暖。如此者半年，能力大進。學生來問題目，周先生不在，父親卽代答，清徹異常，學生驚服。於是父名漸傳於校中，周先生亦有所聞，乃謂父親曰：『屈你做抄寫，本是大才小用，對不起你，以後一有機會，當為你盡力。』下半年果為父另覓教職，於是父親始能在學界中立足。

父親幼年，嘗抱游歷名山大川之志，流轉四方，毫不為意。旣而聲譽日隆，湖北學使乃聘請父親赴鄂閱卷。船中發生一事。（此事得之親戚傳聞，是否不能確定。）某人失竊銀二百兩，日哭泣求死。父雖未入黨會，然習武後頗與江湖人接近，黨派組織及暗號等略有所知。失竊之前數日父已有所疑，事發，父不忍失主狼狽，乃在甲板上大言曰：『好漢借本做生意，是作興的，自己做生意要絕了別人的生路，未免不是好漢的行逕了。』說畢，在包袱上打一特別的結，向甲板上一放。明日，失主恢復所失銀三分之一，一船盡驚，失主大喜，向父叩頭道謝，父親却佯為錯愕，推稱不知。

父自鄂歸，而原配病故，父大悲，不忍下榻岳家。居表伯處，又大病。病愈，適

表叔振孫自陸軍學校歸，相見大喜。幼年回憶，復燃燒於二人胸中，乃大談技擊，或較一二手。因表叔而輾轉識舅父（無錫侯疑始先生），舅父亦少年慷慨，喜交遊，不久即成莫逆，有意與父親聯姻，經許多曲折，父親遂與母親定婚。定婚後，赴北平就高等農業學校教職，明年，至保定入贅，三朝，即挈母親去北平。（婚事始末，見父所作文「記余之婚娶事」。）

父居北平，初甚貧（新婚生活見父民十六年所作詩「憶二十三載前之新春」），後名日盛，處境亦漸豐，乃提議迎養祖父（曾祖母已卒），因祖父不欲去平而罷。父親歷任清華，八旗，高等實業，農業學校教職，到處得學生的歡迎和信仰。父親與立達諸君子的友誼，亦起於此時。家庭雖是粗安，生活却很快樂。琉璃廠的新書，幾無一不買，無一不讀。我五六歲時在北平的生活，依稀還能記得。家有小園，入夜小坐，滿地花影，一身明月，父母親或談話，或爲我講故事。此時父親身體強健，武藝未忘，高興時或打拳或跳蹤，逗母親笑樂。從父親十九歲赤手奮鬪，在社會上爭得自已的地位後，至此始稍享生人之樂。然亦不過倏忽數年，以後事情急轉直下，生活遂大變。以前雖顚沛流離，然過的是冒險的，任俠的，飄蕩的，流星似的光榮生活，以後忽然一變，慷慨好交遊的少年，變成沉默忍耐足不出戶的學者，生活也植物化，在不見天日的陰濕地，盤根，生葉，佈種，朽腐，就完了。

父親生活的轉變，起於大同大學的開辦；大同的開辦，由於立達社的成立。大同是立達社的附庸，是立達社的結晶，然現時多數人僅知有大同而不知有立達，僅知大同爲私人所辦而不知爲法團所辦，這也是創辦諸公始料所不及的了。立達社成立於宣統三年，社員十一人，皆在北平教書，社旨是興辦教育事業，社費是社員所捐納，公舉胡敦復先生爲社長，並規定社長每年選舉一次。成立後五月，民軍舉義，社員相繼出都，聚於上海，乃議創辦大同（此時稱大同學院），創辦費僅有二百二十八元，所恃者創辦諸君子之熱情及毅力耳！衆相約人人服務大同，一年以內，即凍餒亦不可離，教員不請外人，薪金全數捐納，幷公舉胡敦復先生兼院長之職。開辦時，院舍爲肇周路南陽橋南陽里十餘間的住宅一所，今巍巍校舍的所在地，已是後來所

添置的了。我家到上海，我纔六歲，當然什麼都不懂，惟大同初開辦時四五年間我家的生活，其慘苦印像却深印我的腦中。住的是陋室，穿的是敝衣，木箱代了桌子，食鹽代了菜蔬。父親幾終日不見面了，母親勞碌着，激勵着，奮興着。有時夜半夢回，一燈熒熒，父親和母親講話，母親或笑或流淚，有時母親極疲乏的和衣睡在床上，給小弟弟哺乳(此時我已有二弟一妹)，父親在燈下筆不停揮的寫着。我雖不懂南歸後家裏突然的變態是為的什麼，然常聽見父母親說大同大同，也依稀彷彿有些懂得一切是為的大同了。咳!『大同』這兩個字，對我是有如何深刻的意味呀!

大同開辦的第一學期，社員應得的薪金，全數捐納，第二三學期，實在支持不下了，乃議定專任者月取生活費三十元，兼外事仍不取。我們八口之家，三十元月薪，當然醫藥費不能加入預算.小弟弟病了，請醫生看了一二趟，無效，父親便決定不再請醫，而一切委之天命，母親日夜哭泣，一無辦法。母親以名族之女，與父親定婚，父親敝衣作新郎，母親毫無慍色，三朝便辭別親友，隨父親至人地生疏的北平，其所信於父親者至深至固。母親身體怯弱，感覺銳敏，深於情而勇於犧牲，崇拜主義，崇拜英雄.大同是父親為主義而從事的想理中的事業，父親是母親理想中的英雄，父親一切為大同犧牲，母親當然一切為父親犧牲。母親的親戚，人人比父親富，父親作新郎時己覺難堪，今又不自量己力，作狂妄的興學之舉，其受人訕笑，亦意中事，而母親對父親的行為，却有舉世非之而不顧的氣概。小弟病了，無力就醫，父親的朋友是自顧不暇，無餘力相助，在母族中，是半因母親高傲半因母親自忖開口亦屬無益，故恥於仰面求人。於是小弟之病日沉，父親日夜愁歎，母親形若瘋狂。常呆坐半日，忽牽我手問道:『叫我怎麼辦? 叫我怎樣辦?』有時夜半哭泣禱天，說『敏兒敏兒，你千萬不要丟了我們去，我們明知待虧了你，平時沒吃沒穿，病了沒醫生看，可是看看你爹爹，他自己半條命也拼了，我也瘦成這個樣子了。你爹爹為了大同，為了辦學，並沒有錯呀! 我們這樣貧苦人家，你原是不應當投來的，可是你要原諒我們呀! 你等大同發達了，你現在吃的苦，也可以補償了。你長大了還要幫爹爹做事呢。天若有眼，可憐我們，可憐××，千萬不要乘現在將敏兒奪去。』可是哭禱，

呼天，總是無力挽救消逝着的生命。於是一天，在全家哭聲中，小弟便做了父親主義的犧牲品！

民國六年，大同教員的捐金減到百分之六十，我們雖仍惡衣惡食，然父親覺得不能再延緩了，便連忙迎祖父回家。此時姑母亦已同居，於是父親自祖母病後，飄泊在外者十四年，父子兄妹，始能團聚。

我初進大同，才十二歲，是大同第二個女生（胡卓先生是第一個），終日悶坐於教員預備室中，後大弟學蘭亦來隨父讀書，始稍解寂寞。我和父親的親近，是在來到大同以後。我們隨着父親，總要熄燈以後纔歸家。大同附近，那時還很荒涼，野狗成羣，一犬吠形，百犬吠聲，我們最覺害怕。每當月黑星稀之夜，我們回家時惴惴的在前走着，父親在後面持雨傘爲我們打狗，有時我們狂奔，失落了一隻鞋或幾本書，總是父親等狗散了尋給我們。一直走到黃家闕，我們纔吐過氣，和父親說笑閑談着。那時我們受父親的薰陶，懷着純潔天真的心，親愛一切人類，懷抱一切知識，深入一切興趣。又感受着父親熱情橫溢的希望，雖終日默默，身居斗室之中，而心游六合之外，常幻想着以後當如何學父親的榜樣，爲社會爲主義而犧牲，我要如何幫助別人，我要如何的朋友，如何的家庭；幻想着，高興着，期待着。雖然那時的夢想是幼稚得可笑；然而我們立身行事的種子確是那時下的，而播種的人却是父親。現在父親過去了，種子的收穫不知更待何時呢？

我們不但立身大節，受之父親。功課的根基，也是父親打的。初到大同時，父親親自教我們論語。聖賢之書本是枯燥無味的，然父親却能講得有聲有色，使書中許多個性不同的人物活躍於我們面前，引起我們非常親切的好感。全書讀完，便叫我們分類抄一遍。先依綱目分類，如孔子所說關於仁的話抄在一起，關於禮的話抄在一起等。次依人物分類，如關於孔子門人的言語行動分別抄起來等。如此抄完，全書所含孔子對於仁禮等具體觀念及書中各人物之個性學問已可完全明瞭了。這事我做得很高興，以後對於我讀書的方法，也大有影響。父親的英文，祇學了三個月，拼音是不行的，看算學書却有驚人的能力。我初到大同時常被父親窘住。那時

父親以看電影作我們的獎勵。電影當然是外國片，父親叫我們將字幕講給他聽，開始常講不出，父親便叫我們帶了紙筆，將字幕不懂的抄下來，帶回去查字典。暗中摸索，寫字亦無準度，往往電燈亮了，一看滿紙蚯蚓，不知所云，我便和弟弟相對大笑。然如此看電影更有興趣，英文也大進。我初到大同時，最怕的是數學，簡直一個題目都做不出，全是父親講給我聽，做給我看的。以後父親不講了，我問父親，父親不答，反而問我，如抽絲剝繭，一層層問到底，最後我所答的便是我最初所問的。於是我忍不住笑了，父親也笑了，便叫我將理由和解法清晰的寫出來。幾次如此，我思路大進，對數學也有興趣了。

我在大同的開始三四年，除國文外，所用科學教本，全是西文。不但大同如此，各校亦是如此。於是科學堂上，教師不得不逐字逐句先講英文。學科學者恆費十九的光陰於文字上。此事原因，半由於留學生之喜用西書，大半則因我國無良善之教本。坊間譯本大半爲小說，且無科學書籍。父親以爲長此不變，科學將成爲少數人的專利品。不通西文者無讀科學書的機會，則社會多數人將感科學的飢荒；已進學校而有志科學者亦被逼而費十九光陰於讀文字，其所得之質不過十之一二，如此直可稱爲光陰精神的浪費！且一離西文，即無科學書，我國學術，安能自立？於是父親大聲疾呼曰：『中國學術，要求自立！』『自立之道奈何？第一宜講演，第二宜繙譯，第三宜編纂，第四宜著述，務使初學科學之人，可盡脫外國文之束縛，而多得參考之材。』編譯者『宜從中學教科書入手，漸入參考之書，層累而上，以至高深之學，材料不妨淺近而說理務宜精詳，結構不必閎大而見地須有獨到。』（以上引父親原文。）或謂繙譯並非亟需，有程度者當然可讀原文。父親駁道：『學科學者重質不重文，即有西文原本，然譯本取價廉而閱讀便，能讀原本者，亦何必固執必用原本？況且傳佈科學，是先進者的義務。能讀西文原本者固多，不能讀原本而有志科學者亦不在少數。對於如此的人，先進者應當盡心爲他們設法呢？還是高舉西書，對他們說：「外國人早已著好了書，供給你們研究，祇怪你們自己沒能力」呢？』父親抱如此主張，便開始自己編書。父親說：『既然外國歸來的鴻儒博士無暇編著，無暇繙譯，

原件短缺

數解與之。錢女士回信，言彼處教授對父親不勝欽佩云。(所詢題已忘，又此題究爲錢女士所詢抑其令兄錢湯新君所轉詢，亦不能記憶，然此乃事實，信而有徵者。）我記此事，非以受西人讚美爲榮，實以示學術不限國界，又私心爲父親惜，惜父未出國，不獲從當世數學家遊，又惜父親日處經濟壓迫下，無充分餘力遊養于高深；否則以父親的天才毅力，其成就豈止于此？ 父成名後，各處教師學者來函問題者甚多，父親無不親自答覆。臨終前猶對我說，某君來函，附洋一元，托代購所編算術題解，然算術僅有答數，並無題解，當以洋奉還，並向某君道歉，告以父親因病，故遲延未覆云云。父親辦事不苟，于此可見．然某君之函，卒未覓得，謹附誌於此。

父親喜詼諧，常謂談言微中可以解紛。一日，堂上有人以名數乘名數得名數者，父親曰：『你父與母相乘而得你，通不通？』衆爲之哄堂。又一次，某人作代數，a^2 加 a^2 得 a^4．父曰：『一牛頭上有一角，二牛在一起，是共有二牛，每牛頭上仍有二角呢？還是變了一牛，此牛頭上有四角呢？』某笑不能答，然父所取笑之錯誤，以後學生絕不再犯．父親不但自己喜說笑，即兒女輩與父親說笑，亦屬不禁。某次，父親堂上講 Zeno 詭辯，Zeno 說『烏龜在兔子一尺前，則兔子永遠追不上烏龜，』父親講此說所以錯誤之故。當夜，我們閑談，說做教師很不容易。父親說：『什麼不容易？你祇要比學生先看一天書就不怕了。』我說：『那麼 Zeno 的話終究對了？烏龜可以永遠在兔子前面了？』父親大笑。又一次，我做小說，描寫某校學潮，說校中某先生，學問道德素爲學生敬佩，而風潮領袖說他好像水裏一塊大石，又重又堅，就本身說固然是好，就潮流說却是極大障礙，非將牠沖開不可。父親見了，大笑說：『我便是這塊又重又堅的大石，是不是？』我也笑了，我說：『也許在有些人眼光裏，父親確是這樣，父親以爲如何？』父親道：『好。你要我反省嗎？』於是衆人都大笑。父親這樣平等待子女，確是不多見的。

父親興趣，是多方面的。除數學外，詩詞小說無一不能，惜小說都未完篇．所作代大同壽馬湘伯先生詞，極得馬先生稱賞，新體詩『飄泊生涯一』亦得多數人好評。父親本意，欲以『飄泊生涯』作自傳，分數節寫，惜未完成。

父親富於感情，待人眞摯，於友誼不善當面殷勤，然友情實深繫肺腑。 顧珊臣先生死後，父親深致悲悼。至今還有父親手錄珊臣先生的遺著二篇，又明復先生死後，父親亦留保其手鈔之明復先生遺稿，乃留作紀念者。 華綰言先生六十壽辰，父親爲詞賀之。末數句爲『孝友性中事業，澹泊靜中天趣，此外一無求；造化除眉壽，何物更相酬?』父親擱筆顧我曰:『不知何故，寫到末二句，只覺一陣心酸。』後綰言先生死，父親愁歎者累日，曰:『立達社員又弱一個矣。珊臣綰言，身後同樣蕭條，此二人後，第三個不知輪到是誰。』誰知竟成讖語。父親初嗜電影，後座價漸漲，遂不涉電影院。又先時常叉麻雀，爲朋友聚歡之用，後興衰，亦戒．煙卷，則深夜工作時，用以刺激腦筋，病後亦戒絕。 一無娛樂，惟沉溺小說中，不論新舊，不論好壞，我停學後無他消遣，父親卽令我講西文小說，小說中或涉及社會問題，父親卽呼我等圍坐父旁，發表意見，共相討論。 有時我爲父親講小說，家人亦圍坐而聽，至悲哀處，衆皆流淚。 一次，講某書，父親竟至嗚咽悲哀，令我停講，悽愴數日始已。 父親對家人，都有深情，然平日却深藏不露。有悲傷愁慮之事，亦不向人言，惟夜中無心緒工作，卽撫骨牌，斬五關。 我等深悉父親性情，故聞骨牌聲達旦，卽知父親必有心事。有時夜深人靜，我聞牌聲，卽起入父室，坐父旁，亦不開口。 不多時，父親卽停止弄牌而以心中所愁慮者慢慢告我。 有時父親見我們有愁悶之色，亦背人私問而安慰之。父子間的感情，是旁人所不能了解的。 我們在父親前，覺得無論什麼事，無論什麼感情——計劃，歡樂，悲哀，失望等——無不可以坦白告訴，卽兒女私情，亦可信托於父而得其同情。 無論何時，祇要我們掬誠以告，父親無不就我們的利益，盡心爲我們計算的。我們不以父親的話爲然，儘可反覆與父親辯論。有時相持不下，父親便歎道:『我們是兩時代的人了。 你們的心情，我能了解的。其餘的事，儘你們做，這一點，我總覺於心不安。 也許我是老悖時了，不過我也決不強迫你。』有時父親爲我們愁慮計劃，甚至連夜不寐。 現在父親去了，茫茫天地，何處更尋這樣了解我的知己？何處更尋如此純爲我們利益計而絲毫不爲自己計的朋友？何處更尋因爲我計劃而徹夜不寐的愛護我者？ 父親不特於自己兒女如此深情，其慈祈

愷悌乃出天性。已雖困窮，常匿名捐助水災等。我先不知，後父親懶於寫信及外出，曾命我經手數次，故我知之。親戚中有孤兒或貧困者，父親必盡力相助，衣食教育之，無德色。然亦有幸有不幸，總之，生死患難之際，人品乃見，父親有靈，正不知作何感想呢。

父親少年時甚瘦，中年漸發胖。然辦大同後，終日伏案，體質漸衰。民七八年間，曾大病幾死。又生外症，開刀後不能完全收功，偶一勞倦，傷口即流血。母親去世後，父終日默默，毫無興趣，故體質更衰。前年，父幼時同學綱孫表伯來訪父親及姑母，見父傴僂龍鍾之狀，大爲感動，臨行，謂姑母曰：『××自辦大同後，自己簡直活埋了。何不勸他多遊散遊散，何必自苦如此？』姑母向我們轉述此語，我們看看父親，回想以前父親生龍活虎的軼事，不禁泣下。我還記得，我十一二歲時，父親常叫我十指緊緊交握，父親伸一手，以掌心托我交握的兩手，慢慢舉高，至臂直爲止，半天才放下來，我們大樂。父親舉一人，則其餘諸兒必圍繞父親，喊道：『爹爹，舉我，舉我？』一次，父親握長帶一端，全家的人則握長帶他端，用全身之力拉，不能動，父親一用力，全家人皆向前顛仆，於是大笑爲樂。後父親腎裏有病，始不敢用力。

父親吐血之症起於去年，進聖心醫院就宋梧生先生醫治，月餘即愈。依宋先生之勸，到武進養病。此時大弟學閬考取清華冶金科，將入 Carnegie 大學，至武進向父親告別，父親忽泣下。弟回家，私下向弟婦說，父親何以忽作兒女之態？不知却是父子永訣的預兆，若弟早知一去要抱終天之恨，則弟決不肯離開父親了。父親到底因經濟關係，於去冬回滬，仍在大同教書。每下課，氣喘不能言，飲開水，休息十餘分鐘乃已。後吐血病復發，股慄氣喘，不能再教，便由我代課，父仍就醫於宋醫生。宋先生勸父再入院醫治，父以入院費用太大，躊躇不敢，又因宋先生寓遠，往來勞頓，遂就近另就他醫。然父咯血卒未愈，逢節必吐。平海瀾先生最關心父親，每見我，必問父親病狀。又屢次對我說，必需勸父親入院醫治，或仍至武進鄉下，否則在空氣新鮮之地，如法國公園附近，租一三層樓樓面，居其中養病。（父所居屋已歷十七年，破舊陰濕，蛇鼠屢見，實不堪居人。）我等屢向父言，且泣。父因積蓄不過數

百金，恐金盡無以為繼。我等泣求，謂父親當以身體為重，即借債亦自有兒輩償還，父儘可放心。平先生亦勸父親；父意動，謂入院及赴常皆太費，不如租三層樓樓面。三層樓已覓得，而醫生勸父親不可搬動，當俟疾少愈，至鄉下養病，彼可介紹鄉間醫生為父醫治。父親乃決意不搬。我每次歸寧，父親總自謂較前稍好，我等再言入院等事，父即怒，說：『你們知道什麼？祇知迫我入院，萬事即了。我的病決不致於死的.』我當時因父親吐血後，性情變躁，怕父大怒更吐，又信父言，以為父親的病，真的一天天好起來，且見父親還能食一碗多飯，便以為疾病真是無妨的。雖然覺得父親憔悴，以為是病者常態，萬料不到病已入於膏肓了。早知今日，則我冒萬死，強舉債，令有力者強挾父親入院，亦所不恤。今父親之死，迫於經濟者半，誤於我等之糊塗因循者亦半，我等之罪萬死豈足贖哉。父親的生日是四月二十九，我回家為父親備麵。父見我，甚喜，說：『我等了你好久了。我鬍鬚太長，吃食不便，他們要替我修剪，我不要，要等你回家。你快來替我修吧.』我即左手承父鬚，右手持剪刀，替父親修鬚，父親攬鏡自照而笑，家人亦笑。我說：『今天是父親生日，父親多吃些麵吧。』父親說：『我總比你吃得多些。今天是我的生日，你也應當多吃些才好。』誰知這一頓麵，便是父女最後的快樂聚餐了。五月初，我到校監試，四妹學毅問我是否已接到她的信；說父親服消化藥後，吐，瀉，且咯血。我大驚，回家，父親已奄奄臥床上。我流涕，痛陳利害，說父親急需赴院醫治，萬無再延之理，父親如有短長，全家性命不足償也。父頷首徐言曰：『我已叫馥(三妹學芬)到校去懇求經濟上的援助，等他的回音再說。』家人皆說，昨天父親已決定入院了，後來想想，怕貯蓄一用完，借貸無方，所以重新反悔，家人力勸不聽。及學芬回家，父親聽說校方已允父親入院後作經濟上之援助，乃大放心，始允入院。我等恐父再悔，乃立送父親入院。入院後因疾病太深，醫藥無效，復歸，宋醫生竟不取醫費，宋先生之高誼，真令人感激也。父親在院時，猶提起以前赤手奮鬪，全恃周彣甫先生提攜，始有今日，彣甫先生死，父親卒未能酬恩，言時泣下。又回憶當時遊西湖，攀登南高峯事，謂少年有壯志，欲遍遊名山大川，惜辦大同後，蟄伏不出，此願卒未能償。乃顧我曰：病愈後當於無錫

本刊代售處

特約發行 南京中央書局(太平路二四八號)

南京：中華書局
京華書局
立達書店
正中書局
良友書店
上海：羣衆圖書公司
開明書局
上海雜誌公司
蘇州：文怡福記書局
小說林書局
無錫：文華書局
鎮江：中央書局
武昌：文華書局
中國書局
中興書局
漢口：中華書局
現代書局
重慶：中華書局
商務印書館
成都：中華書局
北新書局
天津：大津書店
北平：景山書社
文華書局
太原：同仁書店
開封：中華書局
杭州：商務印書館
安慶：世界書局
蕪湖：中華書局
南昌：藝文書社
長沙：求志公司
廣州：上海雜誌公司

本刊價目表

時期	全年(七八兩月停刊)	一月
冊數	十冊	一冊
價目	國幣一元一角	國幣一角二分

遠省及外國郵費在外
郵票通用 費請先惠
本期零售定價二角六分

中等算學月刊

第三卷 第九十期合刊

編輯者： 中等算學月刊社

特約發行 南京中央書局

印刷者： 國立武漢大學出版部印刷所

中華民國二十四年十二月出版

中等算學研究會編輯

「新學制初中算學教科書」

算術上下二冊　代數上下二冊

幾何上下二冊〔附經驗幾何　數值三角〕

編輯者：中等算學研究會

校閱者：段調元　周家樹

修訂者：余介石　李修睦　張伯康
陸子芬　李定文　范寄萍

本書十二大優點

1.根據教部標準　2.曾任各校實驗
3.編者經驗充足　4.習題活潑新鮮
5.編制適合心理　6.內容注重實用
7.有充分的彈性　8.有豐富的興趣
9.方法異常經濟　10.材料幾經增刪
11.印刷精美醒目　12.解答專贈教師

本書向由南京書店印行，蘇皖浙贛等省各著名中學採用甚廣，教師多來函讚美。編經重慶大學教授余介石先生及富有數學經驗之專家多人，根據江蘇省教育廳所訂進度表，加以修訂，更切合實際教學之用。刻改歸南京[illegible]合作社出版，已經送審，審定即陸續出書，謹先佈露。

▲各校教授評語▼

金陵大學算學系主任教育部中小學課程修訂委員師範科課程委員　**余光烺先生**

中等算學研究會所編輯之初中新學制算學教科書計有算術代數幾何各二冊三角一冊全書有一貫之系統互相聯絡編制甚合學生心理取材博而不致散漫習題多而支配勻稱誠爲現代初級中學適用之優良教本也

中央大學算學教員　中大實驗中學自然科主任　**徐曼英先生**

中等算學研究會編輯之初中算學教科書選材精當編輯得宜根據實際之經驗運用新穎之方法頗合教授初中學生之用

南京成美中學教員　測量專門學校教官　**劉漢三先生**

余歷任各校算學教師數載曾試用多種教本結果覺中等算學研究會出版之初中算學教科書最爲滿意該書編制之得宜說理之詳明習題之豐富可謂盡善盡美故樂志數言以作介紹

江蘇省立南京中學教員　**柳屺生先生**

中等算學研究會所編初中算學教科書係富有教學經驗的教師多人合撰計算術上下代數上下幾何上下及三角共七冊全書極有聯絡彼此呼應用作教本收效很宏尤以各冊都另印問題解答專贈教師便於改削課本法良意美至可欽佩

山東兗州第四師範教員　**徐廷猷先生**

初中算學一科學生素視爲畏途固由是科性質使然但一般課本編制上之不良亦一大原因余歷任蘇魯各地中學教員有年皆採用中等算學研究會出版之初中算學教科書頗足引學生興趣教師講授易而學生得益多誠適合現代初中之優良教本也

安徽省立徽州中學教員　**胡術五先生**

中等算學研究會所編之初中幾何一書內容新穎極便初學能將經驗幾何與理論幾何分開並於每述一定理之先先加入啓發題數則此二點尤爲其最大特色