自修・補習・考試・升學・適用

中學
代數菁華

駱師曾編著

世界書局印行

【三六・九・三】

中學代數菁華

實價國幣

外加運費匯費

編著者　駱師曾
發行人　李煜瀛
出版者　世界書局
發行所　世界書局

例　言

(1) 本書以適應學生迫切需要而編，可供下列各方面之用。

(2) **本書可作自修用書**　本書依據教育部修正課程綱要，參考各種審定教科書，删繁就簡，由淺入深，說理淺顯，舉例詳明，讀者可以無師自通，故極合自修之用。

(3) **本書可作補習用書**　本書所取教材，皆係各科之菁華，系統分明，條理井然，敍述簡明，不蔓不支，處處爲讀者節省時間，易於領悟着想，如採爲短期講習或暑期學校補習用書，可免講師删節成書或自編講義之勞。

(4) **本書可作考試準備用書**　本書搜集教材，簡要不繁，易於吸收，便於記憶，故極合考試準備之用。

(5) **本書可作升學準備用書**　本書採各書之長，條款明晰，例解豐富，並將各省市會考題及各著名學校入學試驗題，儘量列入於例解及習題中，讀者可得揣摩之益，故極合考試準備之用。

(6) **本書可作參考用書**　本書篇幅，雖不及教科書之半，然精采則有增無減，且舉例均係各節之代表，而習題又切合於環境，故用作參考書，可收指臂之助。

(7) 本書共分十四章，平均以每三時讀一章，可於四十二時讀畢，若天資聰穎者，尤可速成，故時間適足支配。

(8) 本書所用名詞，悉依教育部所規定，並於初見之處，附註英文，以便進讀西書之參考。

(9) 本書對於公式定理，各標名稱，使學習時易於記憶，考試時便於引用，此爲彌補各書之缺點，而試之學生則深感滿意者。

(10) 本書依本三十餘年編輯上之經驗及教學上之心得而成。但篇幅有限，時間匆促，疏漏之處，在所難免，深望高明指示，以便修改。

民國三十年紹興駱師曾識於上海

目次

第一章　正數與負數 ······ 1

代數式　代數式之數值　文字用法　等式與公式　正數負數及零　正數負數之應用　代數數之四則　習題

第二章　整式 ······ 7

單項式,多項式,項　整式,分式　因子,係數　次數,同次式　同類項　整式加法　整式減法　去括號法　增括號法　乘法指數定律　整式乘法　除法指數定律　整式除法　餘式定理　分離係數法　習題

第三章　一次方程 ······ 19

等式種類　等式性質　移項　方程種類　一元一次方程解法　一元一次方程應用題解法　聯立方程　二元一次聯立方程解法（I）加減法（II）比較法（III）代入法　多元一次聯立方程解法（I）一般解法（II）特殊解法　一次聯立方程應用題解法　習題

第四章　因式與倍式 ······ 35

因式,倍式　公因式,最高公因式　公倍式,最低公倍式　析因式（I）各項括出法（II）分組括出法（III）公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 之應用（IV）$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 之分析（V）公式 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 之應用（VI）公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 之應用（VII）公式 $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ 之應用（VIII）公式 $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$ 之應用（IV）公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ 之應用（X）特殊工夫之析因式　因式定理

最高公因式之求法(I)單項式之最高公因式(II)多項式之最高公因式(III)求最高公因式之一般方法　最低公倍式之求法(I)單項式之最低公倍式(II)多項式之最低公倍式(III)求最低公倍式之一般方法　習題

第五章　分式……49

分式,分母,分子　分式性質　約分,最簡分式　通分　分式之加法減法　分式之乘法　分式之除法　繁分式　習題

第六章　開方與根數根式……58

方根　方根性質　根指數定律　開方　整式之開方法　整式之開平方通法　整式之開立方通法　分式開方　根數,有理數,無理數　根式,有理式,無理式　同次根數,同次根式　根數或根式之變形　同類根數,同類根式　根數根式之加法減法　根數根式之乘法除法　習題

第七章　二次方程……69

一元二次方程種類　純二次方程解法　完全二次方程解法　虛數,實數　判別式　根與係數之關係　二次三項式析因式　二次方程應用題解法　習題

第八章　二次聯立方程……83

二元二次聯立方程　一次與二次之聯立方程解法　二次與二次之聯立方程解法　有特殊情形之二次聯立方程解法　高次聯立方程解法　多元聯立方程解法　二次聯立方程應用題解法　習題

第九章　分式方程……92

分式方程,整方程　普通分式方程之解法　特殊形狀之分式方程

解法　分式聯立方程解法　分式方程應用題解法　文字方程　習題

第十章　根式方程……102

根式定理　根式$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$之變形　根式$\sqrt{a\pm ib}$之變形　根式方程　根式方程應用題解法　習題

第十一章　不等式……109

不等式　不等式性質　條件不等式解法　絕對不等式證法　不等式證明題　不等式應用題解法　習題

第十二章　比,比例與變數……115

比　比之性質　正比,反比　複比　比之問題　比例　連比,連比例　比例配分　混合比例　正變　反變　聯變　習題

第十三章　級數……134

級數　等差級數或算術級數　等差級數之總和　等比級數或幾何級數　等比級數之總和　無限等比級數　調和級數　級數雜例　習題

第十四章　對數……150

一般指數律　對數　對數之性質　常用對數　習題

中學代數菁華

第一章　正數與負數

代數式（Algebraic expression）

代數學除用數字以外，常用文字 $a, b, c, \cdots\cdots x, y, z$ 表數。將數字及表數之文字，用演算符號 $+, -, \times, \div$ 及括號 $()$, $[]$, $\{\}$ 連結，稱爲代數式。寫代數式要注意下列二點：

（1）關於乘號　數字與文字之間，文字與文字之間，及括號前後之乘號×，都可以省去不寫；而數字與文字之積，尋常都先寫數字，再依字母之次序接寫文字。例如 $3\times x$, $a\times b\times c$, $x\times(a+b)$尋常寫作 $3x$, abc, $(a+b)x$。

a 之二倍，三倍，四倍，……，順次寫作 $2a$, $3a$, $4a$, ……。但 $1a$ 則省寫作 a。又 a 之二乘方，三乘方，四乘方，……順次寫作 a^2, a^3, a^4, ……，但 a^1 則省寫作 a。

（2）關於除號　表示除法之除號÷，尋常可取橫線代用，而寫作分數之形式。例如 $a\div b$, $(a+2b)\div c$, $(m+n)\div(x+y)$ 常可寫作 $\frac{a}{b}$, $\frac{a+2b}{c}$, $\frac{m+n}{x+y}$。

代數式之數值

將代數式中之文字，各用所表之數代入，依式中演算次序計算所得之結果，稱爲代數式之數值。例如 $a=3$, $b=2$, $c=\frac{4}{5}$, 則

$$3a+4bc+\frac{2b^2}{a}=3\times3+4\times2\times\frac{4}{5}+\frac{2\times2^2}{3}=9+\frac{32}{5}+\frac{8}{3}=18\frac{1}{15}。$$

文字用法

立代數式時應如何用文字表數，亦甚重要，茲示例於下：

〔例 1〕 設鉛筆 m 枝之價是 a 分，則 1 枝之價是 $\frac{a}{m}$ 分，n 枝之價是 $\frac{an}{m}$ 分。如設 $m=12$，$a=36$，$n=5$，則 $\frac{an}{m}=\frac{36\times5}{12}=15$ 分。

〔例 2〕 設本金是 a 元，年利率是 r，n 年之利息是 b 元，n 年之本利和是 S 元，則 $b=arn$，$S=(1+nr)a$。如設 $a=100$，$r=\frac{4}{100}$，$n=2$，則 $b=100\times\frac{4}{100}\times2=8$，$S=(1+\frac{4}{100}\times2)\times100=1.08\times100=108$ 元。

等式與公式 (Equality and formula)

用等號表示兩式相等，稱爲等式，如上例 1 中 $\frac{an}{m}=15$ 是。用等式表明計算法則可以處處通用者，稱爲公式，如上例 2 中 $b=arn$ 及 $S=(1+nr)a$ 都是。

正數負數及零 (Positive number, negative number and zero)

設 $a=8$，$b=5$，則 $a-b=8-5=3$，故凡 a 大於 b 可求得 $a-b$ 之數値。

又設 $a=5$，$b=5$，則 $a-b=5-5=0$，故凡 a 等於 b，則 $a-b$ 之數値是 0。

再設 $a=2$，$b=5$，則 $a-b=2-5$，但 $5-2=3$，即 $a-b$

不足 3；此不足之 3 常用 -3 來表示，稱為負數。故凡 a 小於 b，則 $a-b=-(b-a)$。此 $2-5$ 等於 $2-2-3$ 即 $0-3$，凡小於 0 之數，常在普通數字之前附一負號－表明此是負數。

要同負數有區別，其餘之數稱為正數。表示正數，必要時可在普通數字之前附一正號＋。

區別正數負數之記號＋，－，稱為數之性質符號；取去此性質符號，稱為數之絕對值。零不是正數，亦不是負數。正數，負數及零，總稱代數學上之數或代數數。

正數負數之應用

凡性質相反之量，都可用正數負數表示；例如用正數表示利益，則可用負數表示損失；用正數表示資產，則可用負數表示負債；用正數表示寒暑表 0 度以上之度數，則可用負數表示 0 度以下之度數。

代數數之四則

(1) 加法　法則如下，其結果稱為代數和：

(1) 同號二數之和，等於絕對值之和附同符號，例如

$$(+3)+(+5)=+8,\ (-3)+(-5)=-8。$$

(2) 異號二數之和，等於絕對值之差附絕對值大者之符號，例如 $(-3)+(+5)=+2$，$(+3)+(-5)=-2$。

(3) 同絕對值異號二數之和，等於 0，例如

$$(-3)+(+3)=0。$$

(4) 任何數與 0 之和，等於本身，例如 $(+3)+0=+3$，$0+(-3)=-3$。

(II) 減法　法則如下:

(1) 求二數之差,可將減數變號加於被減數,例如

$(+11)-(+8)=(+11)+(-8)=+3$,

$(+3)-(-7)=(+3)+(+7)=+10$。

(2) 從 0 減任何數,等於此數變號,例如

$0-(+8)=-8$, $0-(-7)=7$。

(III) 乘法　法則如下:

(1) 同號二數之積,等於絕對值之積附正號,例如

$(+5)\times(+3)=+15$, $(-5)\times(-3)=+15$。

(2) 異號二數之積,等於絕對值之積附負號,例如

$(-5)\times(+3)=-15$, $(+5)\times(-3)=-15$。

(3) 任何數與 0 之積等於 0,例如

$(+5)\times 0=0$　$(-5)\times 0=0$。

V) 除法　法則如下:

(1) 同號二數之商,等於絕對值之商附正號,例如 $\frac{+15}{+5}=+3$, $\frac{-15}{-5}=+3$。

(2) 異號二數之商,等於絕對值之商附負號,$\frac{-15}{+3}=-5$, $\frac{+15}{-3}=-5$。

(3) 任何數除 0 之商,等於 0,例如 $\frac{0}{+8}=0$, $\frac{0}{-8}=0$。

習　題

(1) 從 a 之二乘方，減去 a，b 乘積之 2 倍，再加 b 之二乘方，等於 a 減 b 之差之二乘方，試用等式表示。設 $a=2$，$b=3$，試證明此等式。

(2) 設 $a=3$，$b=4$，試證明等式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$。

(3) 汽車每時行 v 里，t時所行之路是 s 里，試用公式表示。設 $v=35$，$t=4$，則 s 是多少？

(4) 三角形之面積，等於底邊乘高之 $\frac{1}{2}$。設底邊是 a 尺，高是 h 尺，面積是 S 平方尺，試作公式。如 $a=5$，$h=4$，求 S 之值。

(5) 長方形之面積，等於底乘高。設底是 a 尺，高是 b 尺，面積是 S 平方尺，試作公式。如 $a=6$，$b=7$，求 S。

(6) 設圓半徑是 r 公尺，則圓周是 $2\pi r$ 公尺，面積是 πr^2 平方公尺。如 $r=5$，$\pi=3.1416$，求圓周及面積。

(7) 設 C 表攝氏寒暑表度數，F 表華氏寒暑表度數，則可用二公式 $F=32+\frac{9}{5}C$，$C=\frac{5}{9}(F-32)$ 換算。如 $C=15$，$C=-10$，則F各是幾度？又如 $F=68$，$F=-40$，則 C 各是幾度？

(8) 負數之絕對值愈小，是不是數值亦愈小？

(9) 寒暑表上昇 -2 度與下降 -3 度，各有如何意義？

(10) 向南行 6 里，再向北行 10 里，此時在原出發點南幾里？又北幾里？

(11) 甲乙兩隊賽球，甲組勝 9 球，負 5 球，乙組勝 6 球，負 8

球，結果那一組勝？

(12) 久大商店三年中的利益：第一年 $+500$ 元，第二年 -150 元，第三年 $+420$ 元。問三年總算，結果如何？

(13) 趙君每年收入 500 元，支出 600 元，問每年財產增加多少？3 年共增加多少？

(14) $(-b)^2$ 是不是與 $-b^2$ 相同？設 $b=2$，則數值各如何？又 $b=-2$，則數值各如何？

(15) 試計算下列各式：

(a) $1+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\div\left(-\frac{1}{5}\right)$。

(b) $\frac{1}{2}-8\times\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)\times 0\div 5$。

(16) 設 $a=5$，$b=-3$，$c=-1$，求次式之值：

(a) $\dfrac{bc+ca+ab}{a+b+c}$。 (b) $\dfrac{c}{a-b}-\dfrac{c}{a+b}$

第二章　整式

單項式 (Simple expression)，**多項式** (Polynomial expression)，**項** (Term)

表數字與文字乘積之代數式，稱爲單項式。兩個或兩個以上單項式之代數和，稱爲多項式。組成多項式之每一單項式，稱爲多項式之項。例如 -5，a，x，$3abc$，$-2x^2y$ 等都是單項式，$3bc-2d$，$\frac{2}{5}x^2-3xy+y^2$ 等都是多項式，其中 $3bc$，$-2d$，$\frac{2}{5}x^2$，$-3xy$，$+y^2$ 都是項，而 $3bc$，$\frac{2}{5}x^2$，$+y^2$ 是正項，$-2d$，$-3xy$ 是負項。多項式又依項數分類，稱爲**二項式** (Binomial expression)，**三項式** (Trinomial expression) 等。

整式 (Integral expression)，**分式** (Fractional expression)

單項式與多項式總稱整式，卽整式爲一代數式，其中無文字作除數者。對於整式，凡含有文字爲除數之代數式，稱爲分式。故代數式可分類如左：代數式$\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{單項式}\\\text{多項式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}$

因子 (Factor)，**係數** (Coefficient)

一項中之數字或文字，總稱因子，分別之，爲數字者稱因數，爲文字者稱因式。若從一因式着目，則此因式稱爲元，其餘之因數因式，稱爲此元之係數。例如 $3ax$ 中，3 是因數，a　$3a$，$3x$，ax 都

是因式。若取 x 爲元，則 $3a$ 爲 x 之係數。若取 ax 爲元，則 3 是 ax 之係數。

次數 (Degree)，同次式 (Homogeneous expression)

單項式之次數，卽其中所含文字之個數。多項式之次數，依其中所含各項之最大次數而定之，有時亦從某文字着目，依此文字之個數而定其次數。多項式之各項次數相等者，稱爲同次式。例如 $2abx$，$-x^3$，$\frac{3}{5}xy^2$ 等都是三次單項式，$a+b-3c$ 是一次式，x^2-3x+5 是二次式。又如 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 是四次同次式；若從 x，y 着目，則是三次同次式；若只從 x 着目，則是三次式。

同類項 (Like terms)

完全相同或只有係數不同之單項式，稱爲同類項。例如 $2ax^2$，$-5ax^2$，$-\frac{3}{5}ax^2$ 是同類項。又如 my^3-2mny^3，$lmny^3$ 對於 y 亦是同類項。同類項可求其係數之代數和歸併爲一項。

整式加法

(1) 求兩個以上單項式之和，卽依各項之符號聯結便得。

(2) 求兩個以上同類單項式之和，卽求各項係數之代數和而添寫公共之文字因數。

(3) 求兩個以上多項式之和，卽依多項式中各項之符號聯結，如有同類項，則歸併化簡。

〔例 1〕 求 $3a$，$-5b$，$+2c$ 之和。

〔解〕 $3a-5b+2c$。

〔例 2〕 求 $5a^2b$，$2a b$，$-8a^2b$ 之和。

〔解〕　$5a^2b+2a^2b-8a^2b=(5+2-8)a^2b=-1a^2b=-a^2b$。

〔例 3〕　化簡　$6(a-x)+7(a-x)-2(a-x)$。

〔解〕　將 $a-x$ 視爲一文字，則得

$$6(a-x)+7(a-x)-2(a-x)=(6+7-2)(a-x)$$

$$=11(a-x)。$$

〔例 4〕　求　x^3-4x^2+5x-3，$2x^3-7x^2-14x+5$，

$-x^3+9x^2+x+8$ 之和。

〔解〕　將同類項寫在同一縱行較便。

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3-4x^2+ & 5x- & 3 \\ & 2x^3-7x^2- & 14x+ & 5 \\ +) & -x^3+9x^2+ & x+ & 8 \\ \hline & 2x^3-2x^2- & 8x+ & 10 \end{array}\cdots\cdots 答$$

整式減法

求二整式之差，卽將減式之各項變號而加於被加式，如有同類項，則歸併化簡。

〔例 1〕　從　$5x+2y$　減　$-8x+7y$。

〔解〕　$5x+2y-(-8x+7y)=5x+2y+8x-7y=13x-5y$。

〔例 2〕　從　$3x^3-2x^2-7x$　減　$-2x^3+2x^2+7x-9$。

〔解〕

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^3-2x^2- & 7x & \\ -) & -2x^3+2x^2+ & 7x- & 9 \\ \hline & 5x^3-4x^2- & 14x+ & 9 \end{array}\cdots\cdots 答$$

去括號法

(1) 欲去前有符號＋之括號，可不變括號內各項之符號而將括號撤去。

(2) 欲去前有符號－之括號，須盡變括號內各項之符號而撤

去括號。

〔例〕 化簡 $2a-b-[3a+\{4a-(5a+b)\}]$

〔解〕 $2a-b-[3a+\{4a-(5a+b)\}]$

$=2a-b-[3a+\{4a-5a-b\}]$

$=2a-b-[3a+\{-a-b\}]=2a-b-[3a-a-b]$

$=2a-b-[2a-b]=2a-b-2a+b=0$。

增括號法

(1) 欲將各項增添前有符號＋之括號，可不變各項之符號而納入括號內。

(2) 欲將各項增添前有符號－之括號，須盡變各項之符號而納入括號內。

〔例〕 將 $a-2b+3c-4d-5e$ 之第二項以下增添括號，次將括號內第二項以下增添括號，再將括號中第二項以下增添括號。但各括號內之第一項須爲正項。

〔解〕 $a-2b+3c-4d-5e=a-[2b-3c+4d+5e]$

$=a-[2b-\{3c-4d-5e\}]$

$=a-[2b-\{3c-(4d+5e)\}]$

乘法指數定律(Law of indices in multiplication)

(1) 同數諸冪之積，等於此數之冪，其指數等於原來指數之和。例如 $a^l\times a^m\times a^n=a^{l+m+n}$。

(2) 某數 m 乘方之 n 乘方，等於此數之冪，其指數等於 m，n 之積。卽如 $(a^m)^n=a^{mn}$。

(3) 諸因數乘積之 n 乘方，等於各因數 n 乘方之積。卽如

$(abc)^n = a^n b^n c^n$。

整式乘法

(1) 求兩個以上單項式之積，即先求係數之積，再附記文字因式之積。但同文字之冪，則依指數定律化簡，而文字則依字母之順序列之。

(2) 求單項式與多項式之積，即求多項式各項與單項式之積之代數和。

(3) 求兩個多項式之積，即求一式各項乘他式各項之積之代數和。

〔例 1〕 $5abc \times (-a^3b) \times 6b^3c^4 = 5 \times (-1) \times 6aa^3bbb^3cc^4$
$$= -30a^4b^5c^5。$$

〔例 2〕 $(2a^2 - 3ab + b^2)(-5ab)$
$$= 2a^2(-5ab) - 3ab(-5ab) + b^2(-5ab)$$
$$= -10a^3b + 15a^2b^2 - 5ab^3。$$

〔例 3〕 $(2x-3)(3x-4) = 2x \times 3x - 3 \times 3x - 4 \times 2x + 3 \times 4$
$$= 6x^2 - 9x - 8x + 12$$
$$= 6x^2 - 17x + 12。$$

〔例 4〕 求 $(x - 2x^2 + x^3 - 1)(x+2)$ 之積。

〔解〕 可依 x 之降冪排列，如下計算較便：

$$\begin{array}{rrrrr}
x^3 & -2x^2 & +x & -1 & \\
x & +2 & & & \\
\hline
x^4 & -2x^3 & +x^2 & -x & \\
 & 2x^3 & -4x^2 & +2x & -2 \\
\hline
x^4 & & -3x^2 & +x & -2
\end{array}$$
……答

除法指數定律(Law of indices in division)

(1) 某數 a 之冪,以指數較小之同數 a 之冪除之,其商爲同數 a 之冪,而以被除數指數減除數指數之差爲指數。卽 $m>n$, 則 $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

(2) 某數 a 之冪,以指數較大之同數 a 之冪除之,其商爲分數,分子爲1,分母等於以除數指數減被除數指數之差爲指數之同數 a 之冪。卽 $m<n$ 時,則 $a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}$。

〔注意〕 指數相等之同數二冪相除,其商爲1,卽 $a^n\div a^n=1$。

整式除法

(1) 單項式除單項式之商,等於除式係數除被除式係數之商,與除式文字除被除式文字之商之積。

(2) 求單項式除多項式之商, 卽求單項式除多項式各項之商之代數和。

(3) 多項式除多項式,則步驟如下:

(a) 將除式與被除式各依同文字之降冪排列。

(b) 以除式首項除被除式首項,得商爲所求商之首項。

(c) 以商之首項乘除式,從被除式減去,得第一餘式。

(d) 視第一餘式爲新被除式, 依上法繼續求商之第二項以

。

〔例 1〕 $-12x^2y^3z\div 8xy^2z=-\dfrac{12}{8}x^{2-1}y^{3-2}=-\dfrac{3}{2}xy$。

〔例 2〕 $(15x^4y^3-6x^3y^4-9x^2y^5)\div 3x^2y^3$

$$=\frac{15x^4y^3}{3x^2y^3}-\frac{6x^3y^4}{3x^2y^3}-\frac{9x^2y^5}{3x^2y^3}=5x^2-2xy-3y^2。$$

〔例 3〕　求 x^2-4x+3 除 $x^3-6x^2+11x-6$ 之商。

〔解〕

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{x-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{商} \\
\text{除式}\cdots x^2-4x+3\,\big) & x^3-6x^2+11x-6\cdots\text{被除式} \\
 & \underline{x^3-4x^2+\ 3x}\ \cdots\cdots\text{除式}\times x \\
 & \quad -2x^2+\ 8x-6\cdots\text{第一餘式} \\
 & \quad \underline{-2x^2+\ 8x-6}\cdots\text{除式}\times(-2) \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

〔例 4〕　求 x^2-1-x 除 $x+3x^4-5x^3-1$ 之商。

〔解〕　兩式各依 x 之降冪排列，被除式中缺 x^2 項，留出空位。

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{3x^2-2x\ +1\qquad\qquad} \\
x^2-x-1\,\big) & 3x^4-5x^3\qquad\quad +\ x-1 \\
 & \underline{3x^4-3x^3-3x^2\qquad\qquad} \\
 & \quad -2x^3+3x^2+\ x \\
 & \quad \underline{-2x^3+2x^2+2x} \\
 & \qquad\qquad x^2-\ x-1 \\
 & \qquad\qquad \underline{x^2-\ x-1} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

〔注意 1〕　如最後之餘式較除式爲低次，則計算至此止，而此除法爲不能除盡。

〔注意 2〕　在不能除盡之除法中，設被除式爲 A，除式爲 B，商爲 Q，餘式爲 R，則　$A=BQ+R$。

餘式定理 (Remainder theoren)

關於 x 之整式，用 $x-a$ 除得之餘式，必等於此式中用 a 代 x 所得之值。

〔例〕　以 $x-2$ 除 x^2+3x+5，其餘式爲 R，則

$$R=2^2+3\times2+5=15。$$

〔證〕 因 R 比 $x-2$ 爲低次，故 R 不含 x。於是 x^2+3x+5 中之 x 無論爲何值，而 R 不變。如設 $x=2$，則依公式 $A=BQ+R$〔上注意 2.〕代入，得

$$2^2+3\times 2+5=(2-2)+R,\quad 即\quad 15=R.$$

分離係數法 (Method of detached coefficient)

含同文字之兩多項實行乘除時，爲簡便起見，常可將兩式各依此文字之降冪排列，遇有缺項，用 0 佔其空位，而省寫各項之文字，專取係數演算，至求得結果後，補入合宜之文字，此法稱爲分離係數法。

〔例 1〕 求 $(3x^4-1+2x^2-4x)(x^3+2x-3)$ 之積。

〔解〕 將兩式各依 x 之降冪列爲

$$(3x^4+0+2x^2-4x-1)(x^3+0+2x-3),\ 則$$

$$\begin{array}{r}
3+0+2-4-1\\
1+0+2-3\\
\hline
3+0+2-4-1\\
6+0+4-8-2\\
-9+0-6+12+3\\
\hline
3+0+8-13+3-14+10+3
\end{array}$$

因積中 x 之最大指數爲 $4+3=7$，故知其積爲七次式，即

$$3x^7+8x^5-13x^4+3x^3-14x^2+10x+3$$

〔例 2〕 求 $(x^4-3x^3+2x^2-5)\div(x^2-x-3)$ 之商。

〔解〕

$$\begin{array}{r}
1-2+3\\
1-1-3\,\big)\,\overline{1-3+2+0-5}\\
1-1-3\\
\hline
-2+5+0\\
-2+2+6\\
\hline
3-6-5\\
3-3-9\\
\hline
-3+4
\end{array}$$

因商中 x 之最大指數，爲 $4-2=2$，故知其商爲二次式即 x^2-2x+3，而有餘式爲一次即 $-3x+4$。

習 題

(1) 化簡下列各式：

(a) $3x-8x-5x$。

(b) $3ab-ab+7ab-5ab$。

(c) $-\frac{2}{3}x+x-\frac{3}{5}x-\frac{8}{15}x+\frac{3}{10}x$。

(d) $4x-2y+x+3y-y+1-3x-3$。

(2) 求下列多項之和：

(a) x^2-x+1, $-x^2-1$, x^2+x+1。

(b) $3a-4b+5c-6d$, $-4a+5b-6c+7d$。

(c) $ab-2bc+3ac$, $-4bc+7ac-9ab$。

(d) $x^2-2ax+3a^2$, $2x^2-3ax+a^2$, $-5x^2+4ax-3a^2$。

(e) $3(a+b)+2(x-y)$, $4(a+b)-5(x-y)$。

(3) 下列各題，從第一式減第二式：

(a) $6a-2b-c$, $2a-2b-3c$。

(b) $7ax-by+2cz$, $4ax+3by-cz$。

(c) $a^2-\frac{5}{7}ab+\frac{5}{6}b^2$, $\frac{3}{5}a^2-\frac{2}{3}ab+\frac{1}{2}b^2$。

(d) $5ax+3xy-2by+4cz$, $3xy-7ax+5cz-4by$。

(4) 在 $\frac{3}{2}x+y-\frac{5}{2}z$ 上加何式，則得 $x-\frac{1}{2}y-2z$？

(5) 設 $A=x^3-3x^2-3x+1$, $B=-2x^3+x^2-2$,

$C=2x^3-3x^2-x+3$，試計算

$$A-B+C,\quad A+B-C,\quad B+C-A。$$

(6) 去下列各式之括號並化簡:

(a) $3x-2y+\{2x-(5x-6y)\}$。

(b) $8x-[2x^2-\{-3x+(4x^2-6)-5\}+3]+1$,

(c) $a-[-2b-\{3a-2b-(3b-\overline{2a-b})\}]$。

(7) 在下列各式之括號內,記入合宜之式:

(a) $x-y+3z-11=x-y+(\qquad)$。

(b) $a-b+c-d=a-(\qquad)-d$。

(c) $2a^2+2ab-b^2-a-b+3=2a^2-\{\qquad(b-3)\}$。

(8) 求下列各式之積:

(a) $(x+3)(x+5)$。

(b) $(x-3)(x+5)$。

(c) $(x+3)(x-5)$。

(d) $(x-3)(x-5)$。

(e) $(x^3-x^2+x-1)(x-1)$。

(f) $(3x^2+5x-2)(x^2-3x-4)$。

(9) 化簡下列各式:

(a) $(x+4)(x-5)-(x-2)(x-3)$。

(b) $(a+4b)(a-3b)+(a-2b)(5a-4b)$。

(c) $3(a-b)^2+5(a+b)\{2a+(3a-b)\}+2c$。

(d) $(x+1)(x+2)(x+3)-(x-1)(x-2)(x-3)$。

(10) 實行乘法證明下列各公式:

(a) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$。

(b) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$。

(c) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$。

(d) $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$。

(e) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$。

(f) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$。

(g) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$。

(h) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$。

(11) 求下列各式之商：

(a) $(4xy-12x^2)\div(-4x)$。

(b) $(a^2x-abx-b^2x)\div(-2x)$。

(c) $\left(\frac{1}{2}a^2x-\frac{1}{3}abx^2-\frac{1}{4}bx^3\right)\div\frac{1}{5}a^2b^2x^3$。

(d) $\{2(a-b)^3-4a(a-b)^4-6(a-b)^6\}\div 2(a-b)^2$。

(12) 用分離係數法演算下列之除法，並用乘法驗算：

(a) $(3x^2-7x-6)\div(3x+2)$。

(b) $(x^3-6x^2+11x-6)\div(x^2-3x+2)$。

(c) $(5x^4-6x^2+2x^3-7+3x)\div(x^2+4x+2)$。

(d) $(x^3+2x^2-13x+10)\div(x^3+x^2-10x+8)$。

(13) 用何式除 $a^3-6a^2+11a-b$，則商為 a^2-3a+2？

(14) 用何式加於 $4x^3+x^2-5x+10$，則能為 $2x^2-3x+2$ 除盡？

(15) 從 $4x^3-9x^2-15x+18$ 減何式，則能為 x^2-4x+3 除盡？

(16) 用餘式定理證明下列各式能否除盡，如不能除盡，則寫出餘式：

(a) $(x^2+7x+12)\div(x+4)$。

(b) $(x^2+x-72)\div(x+9)$。

(c) $(x^3-6x+10)\div(x-2)$。

(d) $(2x^4-3x^3+6x-10)\div(x-3)$。

(e) $(x^5+a^5)\div(x+a)$。

(f) $(x^6+a^6)\div(x+a)$。

第三章　一次方程

等式種類

$$等式\begin{cases}恆等式\ (\text{Identity})\\ 方程\ (\text{Equation})\end{cases}$$

等式中之文字，無論予以何值，常不失其相等者，稱爲等式；等式中之某文字（即未知數），須予以特別數值（即根）始能相等者，稱爲方程。例如 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 是恆等式，$2x-3=5$，$5x+3=8x-6$ 都是方程。方程中除未知數以外之數，稱爲已知數，表未知數常用 x，y，z 等，表已知數常用數字及 a，b，c 等，含未知數之項稱未知項，含已知數之項稱已知項或常數項。

等式性質

(1) 等式兩邊各加同數，和仍相等，如 $A=B$，則

$$A+m=B+m。$$

(2) 等式兩邊各減同數，差仍相等，如 $A=B$，則

$$A-m=B-m。$$

(3) 等式兩邊各乘以同數（不爲 0），積仍相等，如 $A=B$ 則 $nA=nB$ 但 n 不爲 0。

(4) 等式兩邊各除以同數（不爲 0），商仍相等，如 $A=B$，則 $\frac{A}{n}=\frac{B}{n}$，但 n 不爲 0。

移項 (Transposition of terms)

依等式性質(1)(2)，可將等式中任一邊之項，變號移至他邊，此法稱爲移項。例如 $5x+3=15-x$，兩邊各加 x，得 $5x+3+x=15-x+x$，即 $5x+3+x=15$，此即右邊之 $-x$ 變爲 $+x$ 移至左邊。再從此式兩邊各減 3，得 $5x+3+x-3=15-3$，即 $5x+x=15-3$，此即左邊之 $+3$ 變爲 -3 移至右邊。

方程種類

方程中之未知數亦稱元 (Element)。有一種未知數之方程，稱爲一元方程 (Equation with one unknown)，有二種三種未知數者，稱二元方程(Equation with two unknowns)，三元方程 (Equation with three unknowns)。

將方程之項皆移至一邊而簡約之，得式爲未知數之整式，則此式中未知數之次數，即爲方程之次數；方程依元數及次數分類，例如

$5x+3=15-x$ 爲一元一次方程 (Simple equation with one unknown)。

$2x^2-3x+1=0$ 爲一元二次方程 (Quadratic equation with one unknown)。

$2x^2-xy+3y^2=5$ 爲二元二次方程 (Quadratic equation with two unknowns)。

至於 $x^3+2x^2-3x=1+x^3$，外貌雖似三次方程，但移項後三次項即消去，故仍爲二次方程。

一元一次方程解法

(1) 式中有括號者，先去括號。係數有分數者，先以其分母之

最小公倍數乘各項，將係數化成整數。

(2) 將未知項移至左邊，已知項移至右邊，各邊化簡，成為標準式 $ax=b$ 之形。

(3) 以未知數之係數除兩邊。

從標準式 $ax=b$ 得 $x=\dfrac{b}{a}$ 為方程之根 (Root of equation)，就 a, b 之值討論之，有下列各種情形：

(i) 設 $a\neq 0$, $b\neq 0$, 則 $x=\dfrac{b}{a}$, 卽有一解。

(ii) 設 $a\neq 0$, $b=0$, 則 $x=\dfrac{0}{a}=0$, 卽有一解為 0。

(iii) 設 $a=0$, $b\neq 0$, 則 $x=\dfrac{b}{0}=\infty$, 卽為無窮大，在有限範圍內無解。

(iv) 設 $a=0$, $b=0$, 則 $x=\dfrac{0}{0}$, 卽解為不定，以任何數代 x 皆能適合。

〔例 1〕 解 $3x-2\{x-(1-x)\}=5x$。

〔解〕 去括號，得 $3x-2\{x-1+x\}=5x$, $\therefore\ 3x-2\{2x-1\}=5x$, $\therefore\ 3x-4x+2=5x$ 移項得 $3x-4x-5x=-2$, 化簡得 $-6x=-2$, 以 -6 除兩邊得 $x=\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}$。

〔例 2〕 解 $\dfrac{3x-2}{2}-\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{x+7}{4}$。

〔解〕 以分母之最小公倍數 12 乘兩邊，得 $6(3x-2)-4(2x-3)=3(x+7)$，去括號 $18x-12-8x+12=3x+21$，移項，$18x-8x-3x=21+12-12$，$\therefore\ 7x=21$，$\therefore\ x=3$。

〔例 3〕 解 $(x+1)^2+2(x+3)^2=3x(x+2)+35$

〔解〕 兩邊實行乘法而去括號，$x^2+2x+1+2x^2+12x+18=3x^2+6x+35$，移項，$x^2+2x^2-3x^2+2x+12x-6x=35-1-18$，$\therefore\ 8x=16$，$\therefore\ x=2$。

一元一次方程應用題解法

(1) 十分了解問題之意義。

(2) 決定何者爲所求數，而以 x 表之。如所求數有兩個以上，則其一以 x 表之，其他以 x 與已知數表之。

(3) 依題意看出有相等關係之二式而作方程。

(4) 解此方程。

(5) 檢驗所得之根是否合於問題之答。

〔例 1〕 從某數之 16 倍減 11，等於此數之 7 倍加 70。求此數。

〔解〕 設所求數爲 x，則其 16 倍減 11 爲 $16x-11$，其 7 倍加 70 爲 $7x+70$，故由題意得方程 $16x-11=7x+70$，移項得 $16x-7x=70+11$，$\therefore\ 9x=81$，$\therefore\ x=9$。答此數爲 9。

〔檢驗〕 $16\times9-11=133$，$7\times9+70=133$，卽 $133=133$，故 9 合於問題之答。

〔例 2〕 甲有款 0.97 元，乙有款 0.65 元，二人各買同樣雜誌一册，甲所餘爲乙所餘之 2 倍。求此雜誌一册之價。

〔解〕　設雜誌價爲 x 元，則甲所餘爲 $0.97-x$ 元，乙所餘爲 $(0.66-x)$ 元，故依題意得 $0.97-x=2(0.66-x)$，去括號移項得，$2x-x=1.32-0.97$，$\therefore\ x=0.35$。答此雜誌價爲 0.35 元。

〔注意〕　此後各例，請讀者自行檢驗答數。

〔例 3〕　男工 10 人女工 15 人一日之工錢，共爲 31.5 元。男工一人一日之工錢，爲女工之 2 倍。求男女工一人一日之工錢各幾何？

〔解〕　設女工一人一日之工錢爲 x 元，則男工一人一日之工錢爲 $2x$ 元，故男工 10 人一日工錢爲 $2x\times10$ 元，女工 15 人一日之工錢爲 $15x$ 元，依題意得 $2x\times10+15x=31.5$，即 $35x=31.5$，$\therefore\ x=0.9$，$2x=1.8$ 答男工每日工錢 1.8 元，女工每日工錢 0.9 元。

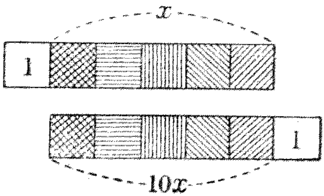
〔例 4〕　四人分果 1000 個，甲比乙多得 25 個，丙比甲乙之和多得 5 個，丁比甲多得 45 個。問各得幾個？

〔解〕　設甲得 x 個，則乙得 $(x-25)$ 個，丙得 $\{x+(x-25)+5\}$ 個，丁得 $(x+45)$ 個，故依題意得 $x+(x-25)+\{x+(x-25)+5\}+(x+45)=1000$，去括號，$x+x-25+x+x-25+5+x+45=1000$，即 $5x=1000$，$\therefore\ x=200$，故甲得 200 個，乙得 $x-25=200-25=175$ 個，丙得 $x+(x-25)+5=200+200-25+5=380$ 個，丁得 $x+45=200+45=245$ 個。

〔例 5〕　有六位之整數，左端之數字爲 1 若將此 1，移至右端，則爲原數之 3 倍。求此數。

〔解〕　設取去所求數左端數字 1 所得之五位整數爲 x，則所求數爲 $100000+x$，左端之 1 移至右端所得之整數爲 $10x+1$。故

依題意得 $10x+1=3(100000+x)$，去括號移項，得 $7x=299999$，$\therefore x=42857$。故所求數為 142857。



〔例 6〕 有矩形土地，縱比橫大 9 尺，若縱橫各增大 3 尺，則面積增 144 方尺，問此土地之面積幾何?

〔解〕 設此矩形之橫為 x 尺，則縱為 $(x+9)$ 尺，面積為 $x(x+9)$ 方尺，又縱橫各增 3 尺，則面積為 $(x+3)(x+9+3)$ 方尺，故依題意得 $(x+3)(x+9+3)=x(x+9)+144$，去括號 $x^2+15x+36=x^2+9x+144$，移項化簡，$6x=108$ $\therefore$ $x=18$；故面積為 $x(x+9)=18\times(18+9)=486$ 方尺。

〔例 7〕 每月甲儲 20 元，乙儲 10 元，現在甲已儲 90 元，乙已儲 40 元。問何時甲之儲金為乙之 3 倍?

〔解〕 設所求之時為 x 月後，則依題意得 $90+20x=3(40+10x)$，去括號移項，$-10x=30$，$\therefore$ $x=-3$，故所求之時為從今 3 月前。

由此例可見解方程而得負根，未必無意義。

〔例 8〕 雞蛋每個大者值 6 分，小者值 4 分。今大小 10 個共值 45 分，問大者幾個?

〔解〕 設大者為 x 個，則小者為 $(10-x)$ 個。故依題意得

$6x+4(10-x)=45$，去括號移項，$2x=5$，$\therefore\ x=\frac{5}{2}$。但雞蛋個數必須爲整數，決無爲分數之理，故此問題爲不可能。

聯立方程 (Simultaneous equations)

兩個以上方程中，其未知數同時皆有同值者，稱爲聯立方程。聯立方程亦依元數及次數分類，但在一般情形中，有 n 個未知數，一定要有 n 個方程方可確定其值。

二元一次聯立方程解法

有三種，可擇便應用，分述於下：

(I) 加減法 (Elimination by addition or substraction)

(1) 將各方程化成標準式 $ax+by=c$ 之形。

(2) 用合宜之數乘各方程，使 x (或 y) 之係數絕對值相等。

(3) 將兩方程之各邊相加或相減 (視絕對值相等之係數，異號則相加，同號則相減)，化成一個一元一次方程。

(4) 解此一元一次方程，求得一未知數之值。

(5) 將求得未知數之值，代入原方程中任一式，可得他未知數之值。

〔例〕　解　$2x+y=8\cdots\cdots(1)$　$x+2y=7\cdots\cdots(2)$

〔解〕　要使兩方程中 x 之係數相同，故以 2 乘 (2) 之兩邊，得 $2x+4y=14\cdots\cdots(3)$，$(3)-(1)$，$3y=6$，$\therefore\ y=2$。代入(2)，得 $x+4=7$，$\therefore\ x=3$。

(II) 比較法 (Elimination by comparison)

(1) 以各方程中一未知數表他未知數之值。

(2) 聯結此相等之二式,得一方程之含一未知數者。

(3) 解此方程,求得一未知數之值,再從此求他未知數之值。

〔例〕 解 $2x+y=8\cdots\cdots(1)$ $x+2y=7\cdots\cdots(2)$

〔解〕 從(1)得 $x=\dfrac{8-y}{2}\cdots\cdots(3)$,

從(2)得 $x=7-2y\cdots\cdots(4)$ (3)(4)相等,

$\dfrac{8-y}{2}=7-2y$。去分母移項, $4y-y=14-8$,

$\therefore 3y=6$, $\therefore y=2$。代入(2)化簡得 $x=3$。

(III) 代入法(Elimination by substitution)

(1) 從一方程中用一未知數表他未知數之值。

(2) 用此式代入他方程中,得一方程之含一未知數者。

(3) 解此方程求得一未知數之值,再從此求他未知數之值。

〔例〕 解 $2x+y=8\cdots\cdots(1)$ $x+2y=7\cdots\cdots(2)$

〔解〕 從(1)得 $x=7-2y$, 代入(1)得 $2(7-2y)+y=8$, 去括號移項, $-4y+y=8-14$, $\therefore -3y=-6$, $\therefore y=2$, 代入(2)化簡,得 $x=3$。

多元一次聯立方程解法

有二種,分述於下:

(I) 一般解法

(1) 在各方程中,每取其二消去一未知數,如是逐次消去,可得二元一次聯立方程。

(2) 解此二元一次聯立方程,求得二未知數之值。

(3) 將求得之二值,代入諸方程之一,如是逐次代入,即得

其餘各未知數之值。

〔例〕　解　$x+2y+z=12\cdots\cdots(1)$　$4x+3y-2z=27\cdots\cdots(2)$

$$2x-4y+3z=1\cdots\cdots(3)$$

〔解〕　先從(1),(2)消去 z,(1)×2+(2), $6x+7y=51\cdots\cdots(4)$

次從(1)(3)消去 z, (1)×3−(3),　$x+10y=35\cdots\cdots(5)$

再從(4)(5)消去 x, (5)×6−(4),　$53y=159\cdots\cdots(6)$

從(6)得 $y=3$,代入(5), $x+10\times3=35$, $\therefore\ x=35-30=5$。

以 x, y 之值代入(1), $5+2\times3+z=12$, $\therefore\ z=12-5-6=1$。

(II) 特殊解法

無一定之法則,只能隨機應變,用於特殊情形。

〔例 1〕　解　$x+2y+3z=6\cdots\cdots(1)$　$3x+y+2z=6\cdots\cdots(2)$

$$2x+3y+z=6\cdots\cdots(3)$$

〔解〕　(1)+(2)+(3), $6x+6y+6z=18$,

$$\therefore\ x+y+z=3\cdots\cdots(4)$$

(1)−(4), $y+2z=3\cdots\cdots(5)$　(2)−(4), $2x+z=3\cdots\cdots(6)$

(3)−(4), $x+2y=3\cdots\cdots(7)$

以(5)代入(2),　$3x+3=6$,　$\therefore\ x=1$。

以(6)代入(3),　$3y+3=6$,　$\therefore\ y=1$。

以(7)代入(1),　$3z+3=6$,　$\therefore\ z=1$。

〔例 2〕　解　$\dfrac{8}{x}-\dfrac{4}{y}=5\cdots\cdots(1)$　$\dfrac{2}{y}+\dfrac{9}{z}=1\cdots\cdots(2)$

$$\frac{3}{z}+\frac{1}{x}=1\cdots\cdots(3)$$

〔解〕 設 $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$, $\frac{1}{z}=c$，代入各方程中，得

$8a-4b=5\cdots\cdots(1')$　$2b+9c=1\cdots\cdots(2')$　$3c+a=1\cdots\cdots(3')$

$(1')+(2')\times 2$, $8a+18c=7\cdots\cdots(4)$ 從$(3')$得 $a=1-3c\cdots\cdots(5)$

以(5)代入(4)　$8(1-3c)+18c=7$.　$\therefore\ 6c=1$　$\therefore\ c=\frac{1}{6}$。

以 $c=\frac{1}{6}$ 代入(5)，$a=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。

以 $c=\frac{1}{6}$ 代入$(2')$，　$2b+\frac{9}{6}=1$，　$\therefore\ b=-\frac{1}{4}$。

於是　$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$。$\therefore\ x=2, y=-4, z=6$。

一次聯立方程應用題解法

〔例1〕 有二位數，各位數字之和為 15。若交換其數字之位置，則比原數小 9。求原數。

〔解〕 設原數之十位數字為 x，個位數字為 y，則原數為 $10x+y$，交換數字位置後所得之數為 $10y+x$，故得

$x+y=15\cdots\cdots(1)$　　$10x+y=10y+x+9\cdots\cdots(2)$

化簡(2)，$9x-9y=9$，　$\therefore\ x-y=1\cdots\cdots(3)$

$(1)+(3)$，$2x=16$，$\therefore\ x=8$。$(1)-(3)$，$2y=14$，$\therefore\ y=7$。

故原數為 87。

〔例2〕 甲乙二人共有款 155 元，甲用其 $\frac{1}{4}$，乙用其 $\frac{1}{5}$，餘款之和為 120 元。問二人各有款幾何？

〔解〕　設甲乙各有款 x 元 y 元，則甲所餘爲 $\left(x-\frac{1}{4}x\right)=\frac{3}{4}x$ 元，乙所餘爲 $\left(y-\frac{1}{5}y\right)=\frac{4}{5}y$ 元，故

$$x+y=155\cdots\cdots(1)\qquad \frac{3}{4}x+\frac{4}{5}y=120\cdots\cdots(2)$$

去(2)之分母，　　$15x+16y=2400\cdots\cdots(3)$

(1)×16－(3)，$x=80$。　代入(1)，$y=155-80=75$。

故甲有 80 元，乙有 75 元。

〔例 3〕　甲乙兩港間，有以一定速度航行之船。若每時速度增 2 里，則可早到 3 時，若每時速度減 2 里，則須遲到 6 時。求兩港間距離及原定速度。

〔解〕　設原定每時速度爲 x 里，預定時間爲 y 時，則每時速度 $(x+2)$ 里，所需時間爲 $(y-3)$ 時；每時速度 $x-2$ 里，所需時間爲 $y+6$ 時，故得

$$(x+2)(y-3)=xy\cdots\cdots(1)\quad (x-2)(y+6)=xy\cdots\cdots(2)$$

〔例 4〕　現款若干元，分借與甲乙二戶。甲戶年利率 5 厘，乙戶年利率 4 厘 5 毫，一年共得利息 568.8 元。若甲乙之年利率交換，則一年可多得利息 6.2 元。問各戶借款幾何？

〔解〕　設甲乙借款各爲 x 元，y 元，則一年之利息，甲戶爲 $0.05x$ 元，乙戶爲 $0.045y$ 元。若利率交換，則一年之利息，甲戶爲 $0.045x$ 元，乙戶爲 $0.05y$ 元。故得

$$0.05x+0.045y=568.8\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$0.045x+0.05y=568.8+6.2\cdots\cdots(2)$$

以 1000 乘(1)(2)之兩邊，得

$$50x+45y=568800\cdots\cdots(3)$$

$$45x+50y=575000\cdots\cdots(4)$$

$(3)\times10-(4)\times9$，　$95x=513000$，　$\therefore\ x=5400$。

以 $x=5400$ 代入(3)，$270000+45y=568800$　$\therefore\ y=6640$。

故甲戶借款爲 5400 元，乙戶借款爲 6640 元。

〔例 5〕　在 1500 碼賽跑，甲勝乙 25 秒。若甲退後 110 碼出發，則甲後到 10 碼。求甲乙每分鐘速度。

〔解〕　設甲乙每分鐘速度各爲 x 碼，y 碼，則甲乙所費之時間各爲 $\frac{1500}{x}$ 分，$\frac{1500}{y}$ 分。又甲退後 110 碼出發，至乙達決勝點時，甲所費時間爲 $\frac{1500+110-10}{x}$ 即 $\frac{1600}{x}$ 分。故得

$$\frac{1500}{y}-\frac{1500}{x}=\frac{25}{60}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1500}{y}-\frac{1600}{x}=0\ \cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)-(2)$，　$\frac{100}{x}=\frac{5}{12}$，　$\therefore\ x=240$。

以 $x=240$ 代入(2)，　$\frac{1500}{y}-\frac{1600}{240}=0$，　$\therefore\ y=225$。

故每分鐘速度，甲爲 240 碼，乙爲 225 碼。

〔例 6〕　甲乙丙三人各有現款，甲乙之和爲 46 元，乙丙之和爲 40 元，甲丙之和爲 32 元。問各有幾何？

〔解〕 設甲乙丙各有 x 元，y 元，z 元，則

$x+y=46\cdots\cdots(1)$ $y+z=40\cdots\cdots(2)$ $z+x=32\cdots\cdots(3)$

$(1)+(2)+(3)$, $2(x+y+z)=118$, $\therefore$ $x+y+z=59\cdots\cdots(4)$

$(4)-(1)$, $z=13$, $(4)-(2)$, $x=19$, $(4)-(3)$, $y=27$。

故甲有 19 元，乙有 27 元，丙有 13 元。

習 題

(1) 將下列等式，依恒等式方程分類，並將方程再分類：

(a) $2+3x=38$。

(b) $2a+1=3a$。

(c) $x^2+2x+1=(x+1)^2$。

(d) $a^2+2a+1=(2a-1)^2-a^2$。

(e) $x^2+xy+y^2=x+y$。

(f) $3x-5=1-x^2$。

(2) 將下列各式移項化簡：

(a) $2x+15=27-4x$。

(b) $7(25-x)-2x=2(3x-25)$。

(c) $3(x^2-1)^2-3(x^2-1)=x-15$。

(d) $(x-1)(x+4)=x^2-3x+6$。

(3) 解下列各方程：

(a) $3x=2x+5$。

(b) $3x+5=x+9$。

(c) $5x-4=6-10x$。

(d) $3x+1=2x+2(x-3)+3$。

(e) $3(x-1)-4(x-1)=0$。

(f) $5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4)$。

(g) $5x-2a=10a+3x$。

(h) $\frac{x+3}{7}=\frac{x-2}{6}$。

(i) $\frac{x}{3}-\frac{3x}{5}(\frac{10}{x}-4)+3\frac{3}{5}=14$。

(4) 二數之和爲 63，大者比小者之 2 倍多 3，試求此二數。

(5) 二數之和爲 25，以小數除大數，其商爲 3，其剩餘爲 1，求此二數。

(6) 甲乙二數，其比爲 14:9。若兩數各減 20，則甲數爲乙數之二倍，問二數各爲何？

(7) 甲乙丙三人共有國幣 45 元，甲所有爲乙之五倍，丙所有爲甲的五分之三。問各有若干元？

(8) 某醫院原有病人若干，後其中有二十分之一死亡，十分之一因病重出院，再中途離院者有五分之三，但今尚餘 10 人。問該院原有若干人？

(9) 一人往返於某地，往時每時行 4 里，返時每時行 3 里，今往返共費 7 時，求某地之距離。

(10) 有甲乙兩汽輪同向而行，甲輪每小時行 20 里，乙輪比甲輪先行半小時，甲輪須行 2 小時方能追及，求乙輪之速。

(11) 有甲乙二童，賽跑於若干丈之間，甲每分鐘之速度較乙之

三倍少 18 丈。若乙先行 48 丈，甲始出發，則經 8 分鐘同時到達。求甲乙二童每分鐘之速度。

(12) 某人有國幣 2000 元，分兩處投資，一處之利息爲 5%，一處爲 7%。若每年共得利 118 元，問每處投資各若干？

(13) 甲乙二人年歲之和爲 50 歲，五年後甲年恰爲乙年之二倍。問甲乙二人年歲各若干？

(14) 解下列聯立方程：

(a) $x+y=3,\ x-y=1$。

(b) $3x+2y=19,\ 5y-4x=13$。

(c) $7x+13y=25,\ 4x-11y=-41$。

(d) $4x+3y=0,\ 2x+5y+7=0$。

(e) $3x+2y=8,\ 4x+5y=13$。

(f) $2x+y=27,\ x+2y=59$。

(g) $x+2y=3,\ 3x-4y=1$。

(h) $x+3y=11,\ 2x-y=1$。

(i) $\frac{2}{y}=10-\frac{1}{x},\ \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=20$。

(j) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2,\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{5}{6}$。

(15) 解以下之聯立方程：

(a) $x+y=8,\ y+z=5,\ z+x=7$。

(b) $x+y+z+1=0,\ x-y+z-1=0,\ x+2y+4z+8=0$。

(c) $6x+2y-5z=13, 3x+3y-2z=13,\ 7x+5y-3z=21$。

(16) 一兩位數，其兩數字之和爲 12，若兩數字之地位交換，則所成之數比原數之二倍少 12。問原數爲何?

(17) 有兩位數，其值較數字之和之四倍大 3。如於此數之二倍加 36 時，則等於交換其數字後之二倍減 36。求此數。

(18) 茶葉 12 斤，咖啡 3 斤，其價共計 4.2 元。咖啡 12 斤，茶葉 3 斤，其價共計 3.3 元。問每種一斤之值各若干?

(19) 甲乙二人賽跑於 440 米之距離，甲讓乙先跑 32 米，則至終點尙比乙早到 1 秒。二次復賽，甲讓乙先跑 4 秒，則至終點尙比乙多跑 8 米，求各人每秒之速度。

(20) 一人所有一元法幣之張數，爲其所有五角角票張數之三倍。合其所有二角角票共三十六張，總額計十二元六角，求此人所有各種法幣之張數。

第四章　因式與倍式

因式 (Factor)，倍式 (Multiple)

整式 A 如能以整式 B 除盡，則 A 稱爲 B 之倍式，B 稱爲 A 之因式。

公因式 (Common factor)，最高公因式 (Highest common factor)

整式 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等如各能以整式 F 除盡，則 F 稱爲 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等之公因式。而公因式中之次數最高者，稱爲最高公因式，簡作 $H.C.F.$ 例如 ax^2, a^2x^3, a^3x 之公因式爲 a, x, ax 等，而 ax 之次數最高，卽爲最高公因式。

公倍式 (Common multiple)，最低公倍式 (Lowest common multiple)

整式 M 如各能以整式 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等整除，則 M 稱爲 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等之公倍式。而公倍式中之次數最低者，稱爲最低公倍式，簡作 $L.C.M.$ 例如 ax^2, a^2x, a^2x^2 之公倍式爲 a^2x^2, a^2x^3, a^3x^2y 等，而 a^2x^2 之次數最低，卽爲最低公倍式。

析因式 (Factorization)

將一整式分析其整因式，而以整式之積表之，稱爲析因式。代數學中之析因式，初學者每以爲難，實則祇須應用乘法公式反求，卽可分析其因式。今將析因式之基礎方法，分類說明，學者熟練之後，便覺容易：

(I) 各項括出法　各項有公因式者，祇須將公因式括出。例如

$$x^3-3x^2-x=x(x^2-3x-1),$$

及　$(a-b)x-(a-b)y+(a-b)z=(a-b)(x-y+z)$。

(II) 分組括出法　若干項有公因式者，可分若干項為一組，再求各組之公因式。

〔例 1〕　將 $a^2+ab-bd-ad+ac-cd$ 析因式。

〔解〕　a^2, ab, $-ad$, ac 各項俱含 a，其餘 $-bd$, $-cd$ 各項俱含 d。但 $-ad$ 亦含 d，故含 a 者有三項，含 d 者亦有三項。如是着目，則　$a^2+ab-bd-ad+ac-cd$

$$=a^2+ab+ac-ad-bd-cd$$

$$=a(a+b+c)-d(a+b+c)$$

$$=(a-d)(a+b+c)。$$

〔例 2〕　$cx+2cy+cz-bx-2by-bz$

$$=c(x+2y+z)-b(x+2y+z)$$

$$=(c-b)(x+2y+z)。$$

或左邊　$=cx-bx+2cy-2by+cz-bz$

$$=(c-b)x+2(c-b)y+z(c-b)$$

$$=(c-b)(x+2y+z)。$$

(III) 公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$（左右兩邊之複號±，表示同取上號或同取下號）之應用

〔例 1〕　$25x^2+70xy+49y^2$

$$=(5x)^2+2(5x)(7y)+(7y)^2$$

$$=(5x+7y)^2。$$

〔例 2〕 $$-a^2(x+y)^2+a^2(x+y)-\frac{1}{4}a^2$$

$$=-a^2\left\{(x+y)^2-(x+y)+\frac{1}{4}\right\}$$

$$=-a^2\left\{(x+y)^2-2(x+y)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$=-a^2\left\{(x+y)-\frac{1}{2}\right\}^2=-a^2\left(x+y-\frac{1}{2}\right)^2。$$

(IV) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 之分析

〔例〕 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$=a^2+2ab+b^2+2bc+2ca+c^2$$

$$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=\{(a+b)+c\}^2$$

$$=(a+b+c)^2。$$

(V) 公式 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$之應用

〔例 1〕 $3a^3b-27ab^3=3ab(a^2-9b^2)$

$$=3ab(a-3b)(a+3b)。$$

〔例 2〕 $x^2+y^2-z^2-2xy=x^2-2xy+y^2-z^2$

$$=(x-y)^2-z^2=(x-y-z)(x-y+z)。$$

(VI) 公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$之應用

依公式可作爲 x^2+Ax+B 之二次式析因式，故有三種情形如下：

(i) 如 A, B 皆爲正，則 B 可析爲二因子 a, b 皆爲正，其積爲正，其積爲 B，其和爲 A。例如 $x^2+13x+36=(x+4)(x+9)$。

(ii) 如 A 爲正，B 爲負，則 B 可析爲二因子 a,b 皆爲負，其積爲 B，其和爲 A。例如 $x^2-13x+12=(x-1)(x-12)$

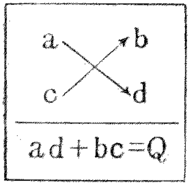
(iii) 如 A 爲正或負，B 爲負，則 B 可析爲二因子 a,b 一正一負，其積爲 B，其和爲 A，卽較大之因子與 A 同號。例如

$$x^2+x-20=(x-4)(x+5),$$

及　　$$x^2-15mx-54m^2=(x-18m)(x+3m)$$

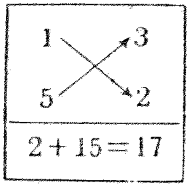
(VII) 公式 $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ 之應用

依公式可作爲 Px^2+Qx+R 之二次式析因式，其中 $P=ac$，



$Q=bc+ad$，$R=bd$，故 P 可析爲二因子 a，c，而 R 可析爲二因子 b,d，再如左圖試驗，依矢向乘積之和等於 Q，以定 a，b，c，d。假定 P 爲正（若爲負，可將各項使爲正），則 P 可析爲二因子 a，c，皆爲正，而 b，d 之爲正或負，亦有三種情形如下：

(i) 如 Q，R 皆爲正，則 b，d 亦爲正。

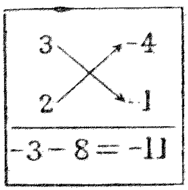


例如　$5x^2+17x+6=(x+3)(5x+2)$。

因 $5=1\times5$，$6=1\times6=2\times3$，

依右圖試驗而得。

(ii) 如 Q 爲負而 R 爲正，則 c，d 皆爲負。



例如 $6x^2-11x+4=(3x-4)(2x-1)$。

因 $6=1\times6=2\times3$，

$$4=(-1)(-4)=(-2)(-2),$$

依右圖試驗而得。

(iii) 如 R 爲負，則 c, d 一正一負。

〔例 1〕　$6x^2+x-15=(2x-3)(3x+5)$。

$$\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{10-9=1} \end{array}$$

因 $6=1\times 6=2\times 3$,　$-15=(-1)\times 15$

$=(-3)\times 5=(-5)\times 3=(-15)\times 1$,

依右圖試驗而得。

〔例 2〕　$12x^2-13x-4=(3x-4)(4x+1)$。

$$\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ 4 & 1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{3-16=-13} \end{array}$$

因 $12=1\times 12=2\times 6=3\times 4$,

$-4=(-1)\times 4=(-4)\times 1=(-2)\times 2$,

依右圖試驗而得。

(VIII) 公式 $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$ 之應用

〔例 1〕　$8x^3+36x^2+54x+27$

$$=(2x)^3+3(2x)^2\times 3+3(2x)\times 3^2+3^3$$

$$=(2x+3)^3。$$

〔例 2〕　$27x^3-54x^2+36x-8$

$$=(3x)^3-3(3x)^2\times 2+3(3x)\times 2^2-2^3$$

$$=(3x-2)^3。$$

(IX) 公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ 之應用

〔例 1〕　$\dfrac{x^3}{27}-\dfrac{y^3}{125}=\left(\dfrac{x}{3}\right)^3-\left(\dfrac{y}{5}\right)^3$

$$=\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\frac{x}{3}\cdot\frac{y}{5}+\left(\frac{y}{5}\right)^2\right\}$$

$$=\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x^2}{9}-\frac{xy}{15}+\frac{y^2}{25}\right)。$$

〔例 2〕 $(2x+a)^3-(2x+b)^3=\{(2x+a)-(2x+b)\}$

$$\times\{(2x+a)^2+(2x+a)(2x+b)+(2x+b)^2\}$$

$$=(a-b)(4x^2+4ax+a^2+4x^2+2ax+2bx+ab+4x^2+4bx+b^2)$$

$$=(a-b)(12x^2+6ax+6bx+a^2+ab+b^2)$$

(X) 特殊工夫之析因式

〔例 1〕 將 $x^4-13x^2y^2+36y^4$ 析因式。

〔解〕 因 $-13x^2y^2=-12x^2y^2-x^2y^2$，而 $x^4-12x^2y^2+36y^4$ 依(III)之公式爲完全平方式，故

$$x^4-13x^2y^2+36y^4=x^4-12x^2y^2+36y^4-x^2y^2$$
$$=(x^2-6y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2-6y^2-xy)(x^2-6y^2+xy)$$
$$=(x^2-xy-6y^2)(x^2+xy-6y^2)$$
$$=(x+2y)(x-3y)(x-2y)(x+3y)。$$

〔例 2〕 將$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)-44$ 析因式。

〔解〕 細察原式與(VI)之公式比較，可知第一第三括號內兩式之積，與第二第四括號兩式之積，皆有含 x 之項 x^2-2x，視此爲一文字，則原式可作爲二次三項式，如下解之：

$$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)-44$$
$$=\{(x+2)(x-4)\}\{(x+3)(x-5)\}-44$$
$$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)-44$$
$$=(x^2-2x)^2-23(x^2-2x)+120-44$$
$$=(x^2-2x)^2-23(x^2-2x)+76$$
$$=(x^2-2x-4)(x^2-2x-19)。$$

〔例 3〕　將 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 析因式。

〔解〕　將原式依 a 之降冪排列，再分析其公因式$(b-c)$。

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
&\quad=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2\\
&\quad=a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2\\
&\quad=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)\\
&\quad=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}\\
&\quad=(b-c)(a-b)(a-c)。
\end{aligned}
$$

因式定理（Factor theoren）

從前章除法中之餘式定理，可直接得因式定理如下。

關於 x 之整式中，如以 a 代 x 而原式之值爲 0，則原式必可用 $x-a$ 除盡，卽 $x-a$ 爲原式之因式。反之，關於 x 之整式，如可用 $x-a$ 除盡，則以 a 代 x 而原式之值必爲 0。此定理應用甚廣，可爲視察因式之助。

〔例 1〕　設 x^n-a^n 中，n 爲正整數，試證明此式有因式 $x-x$。再用此理證明 7^5-1 爲 6 之倍數。

〔證〕　以 $x=a$ 代入 x^n-a^n，得 $a^n-a^n=0$，故 x^n-a^n 可以 $x-a$ 除盡，卽有因式 $x-a$。又設 $x=7$，則 $7^5-1=x^5-1$，$6=x-1$，因 x^5-1 可用 $x-1$ 除盡，故 7^5-1 可用 6 除盡，卽爲 6 之倍數。

〔例 2〕　設 $2x^3+mx^2+nx+2$ 可用 x^2-3x+2 除盡，試定 m，n 之值。

〔解〕　$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，故 $2x^3+mx^2+nx+2$ 各

可用 $x-1$ 及 $x-2$ 除盡，以 $x=1$ 代入，得

$$2\times1^3+m\times1^2+n\times1+2=0,\quad \therefore\ m+n=-4\cdots\cdots(1)$$

又以 $x=2$ 代入，得

$$2\times2^3+m\times2^2+n\times2+2=0,\quad \therefore\ 2m+n=-9\cdots\cdots(2)$$

解(1)(2)得 $m=-5,\ n=1$。

〔例3〕 將 x^3-2x^2-5x+6 析因式。

〔解〕 由視察可知以 $x=1$ 代入原式，而其值爲 0，故此式可用 $x-1$ 除盡。實行除法，得商 x^2-x-6，故

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$$
$$=(x-1)(x+2)(x-3)。$$

〔注意〕 此例假定 x^3-2x^2-5x+6 之因式爲 $x-a$，則 6 必可爲 a 整除，故發現因式時代入之數即 a 之值，必不出 ±1，±2，±3，±6 之外。

最高公因式之求法

(I) 單項式之最高公因式

求諸單項式之最高公因式，可將各式中所有之公共文字列記，而取各文字中指數之最小者爲指數，各式中係數之最大公因數爲係數。

〔例1〕 求 $36a^3b^2c^5,\ 42a^5b^3c^2,\ 63a^2b^2c^6$ 之 $H.C.F$。

〔解〕 公共文字 a，b，c 中指數之最小者爲 $a^2b^2c^2$，各式中係數 36，42，63 之最大公因數爲 3，故所求之 $H.C.F$ 爲 $3a^2b^2c^2$。

〔例2〕 求 $3x^2y(a-b)$，$-6xy^2(a-b)$ 之 $H.C.F$。

〔解〕 $a-b$ 可視爲一文字，故 $H.C.F$ 爲 $3xy(a-b)$。

(II) 多項式之最高公因式

求諸多項式之最高公因式，可將各式析因式，視各因式爲一文字，與單項式同法求之。

〔例〕 求 $2x^2-5x-3$，$3x^2-10x+3$，$2x^3-x^2-15x$ 之 $H.C.F$。

〔解〕 $2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$，

$3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$，

$2x^3-x^2-15x=x(2x^2-x-15)=x(2x+5)(x-3)$。

故所求之 $H.C.F$ 爲 $x-3$。

(III) 求最高公因式之一般方法

求二整式 A，B 之最高公因式，可先將 A，B 依一文字之降冪排列，設 B 之次數低於 A，則以 B 除 A 得第一餘式，再以第一餘式除 B 得第二餘式，又以第二餘式除第一餘式得第三餘式，如是輾轉相除至除盡爲止，其最後所用爲除式之餘式，卽爲所求之 $H.C.F$。

如求三整式 A，B，C 之 $H.C.F$，可先求 A 與 B 之 $H.C.F$ 設爲 H，次求 C 與 A 之 $H.C.F$，卽爲 A，B，C 之 $H.C.F$。

〔注意 1〕 求二式之 $H.C.F.$ 時，若一式之因式不爲他式之因式，可應以因式除此式，而將其商與他式再求 $H.C.F$。

〔注意 2〕 當輾轉相除時，若察知商之係數爲分數，計算不便，可用適當之數乘被除式各項而避免不便，此與最高公因式毫無影響。

〔例 1〕　求 $2x^2+x-3$ 與 $4x^3+8x^2-x-6$ 之 $L.C.M$。

〔解〕　輾轉相除，以如下寫法較便：

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x & 2x^2+x-3 & 4x^3+8x^2-x-6 & 2x \\
 & 2x^2+3x & 4x^3+2x^2-6x & \\ \hline
-1 & -2x-3 & 6x^2+5x-6 & 3 \\
 & -2x-3 & 6x^2+3x-9 & \\ \hline
 & 0 & \underline{\underline{2x+3}} &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad H.C.F=2x+3。$$

〔例 2〕　求 $2x^3-x^2-8x+4$ 與 $3x^3-x^2-10x+8$ 之 $H.C.F$。

〔解〕　如上例寫法，用分離係數法求之更便：

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
2 & 2-1-8+4 & 3-1-10+8 & \\
 & 2+8+8 & \times 2 & \\ \hline
-9 & -9-16+4 & 6-2-20+16 & 3 \\
 & -9-36-36 & 6-3-24+12 & \\ \hline
 & 20)20+40 & 1+4+4 & 1 \\
 & \underline{\underline{1+2}} & 1+2 & \\ \hline
 & & 2+4 & 2 \\
 & & 2+4 & \\ \hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad H.C.F=x+2。$$

〔注〕　此例以 2 乘第二式，卽係避免得商爲分數之不便。又以 20 除 $20x+40$ 卽因 20 非 x^2+4x+4 之因式故也。

〔例 3〕　求 $3x^3+5x^2-x+2$，$6x^3-11x^2+5x-3$ 與 $9x^3-9x^2+5x-2$ 之 $H.C.F$。

〔解〕　先求 $3x^3+5x^2-x+2$ 與 $6x^3-11x^2+5x-3$ 之 $H.$

$C.F$，得 $3x^2-x+1$，次求 $3x^2-x+1$ 與 $9x^3-9x^2+5x-2$ 之 $H.C.F$ 得 $3x^2-x+1$ 卽所求之 $H.C.F$ 爲 $3x^2-x+1$。

最低公倍式之求法

(I) 單項式之最低公倍式

求諸單項式之最低公倍式，可將各式中所有之不同文字列記，而取各文字中指數之最大者爲指數，各式中係數之最小公倍數爲係數。

〔例 1〕 求 $8x^2y$，$-12x^3z^2$，與 $6xy^3z$ 之 $L.C.M$。

〔解〕 不同文字 x, y, z 中指數之最大者爲 $x^3y^3z^2$，各式中係數 8，-12，6 之最小公倍數爲 24，故所求之 $L.C.M$ 爲 $24x^3y^3z$。

〔例 2〕求 $3(x-y)(x+2y)^2$，$-6(x-y)^2$，$9(x-y)^3(x+2y)$ 之 $L.C.M$。

〔解〕 $x-y$ 及 $x+2y$ 皆可視爲一文字，故 $L.C.M$ 爲 $3(x-y)^3(x+2y)^2$。

(II) 多項式之最低公倍式

求諸多項式之最低公倍式，可將各式析因式，視一因式爲一文字與單項式同法求之。

〔例〕 求 $2x^2-5x-3$，$3x^2-10x+3$，與 $2x^3-x^2-15x$ 之 $L.C.M$。

〔解〕 將三式各析因式爲 $(2x+1)(x-3)$，$(3x-1)(x-3)$，$x(2x+5)(x-3)$〔參看最高公因式之求法(II)例〕，故所求之 $L.C.M$ 爲 $x(2x+1)(2x+5)(3x-1)(x-3)$。

(III) 求最低公倍式之一般方法

求二整式之最低公倍式，可先求其最高公因式，以此最高公因式除二式中之$\overset{\text{非}}{\text{一}}$，得商再乘其他一式卽得。如求諸整式之 $L.C.M$，可先求諸式之 $H.C.F$，依此將各式析因式，如(II)求之。

〔例 1〕 求 $2x^2+x-3$ 與 $4x^3+8x^2-x-6$ 之 $L.C.M$。

〔解〕 先求得 $H.C.F$ 爲 $2x+3$ [參看最高公因式之求法(III)例 1]，故所求之 $L.C.M$ 爲

$$\frac{2x^2+x-3}{2x+3}(4x^3+8x^2-x-6)=(x-1)(4x^3+8x^2-x-6)。$$

〔例 2〕 求 $3x^3+5x^2-x+2$，$6x^3-11x^2+5x-3$ 與 $9x^3-9x^2+5x-2$ 之 $L.C.M$。

〔解〕 先求得三式之 $H.C.F$ 爲 $3x^2+5x-3$ [參看最高公因式之求法(III)例 3]，依此將三式各析因式，得

$$3x^3+5x^2-x+2=(x+2)(3x^2-x+1),$$

$$6x^3-11x^2+5x-3=(2x-3)(3x^2-x+1),$$

$$9x^3-9x^2+5x-2=(3x-2)(3x^2-x+1)。$$

故所求之 $L.C.M$ 爲 $(x+2)(2x-3)(3x-2)(3x^2-x+1)$。

習題

(1) 將下列各式析因式：

(a) $2x^2yz-6xy^2z+8xyz^2$。

(b) a^2bx+ab^2x+adx。

(c) $m(x-y)-n(x-y)$。

(d) $-5(2x-3y)+7a(2x-3y)-3b(2x-3y)$。

(e) $ax-by-bx+ay$。

(f) $1-x+x^2-x^3$。

(g) $3a^3+a-6a^2b-2b$。

(h) $xy^2+xz^2+x^2y+x^2z+y^2z+yz^2+3xyz$。

(i) $4x^2-20xy+25y^2$。

(j) $x^2+x+\frac{1}{4}$。

(k) $z^2+2(y+z)+y^2+2yz$。

(l) x^8-y^8。

(m) $2a^5b-2ab^5$。

(n) $4(2x+y)^2-(x+y)^2$。

(o) $x^2+19x+18$。

(p) $x^2-11x+28$。

(q) $x^2y^2+7xyz-60z^2$。

(r) $x^3y-3x^2y^2-18xy^3$。

(s) $x^2-3xy+2y^2-3x+6y$。

(t) $4x^2-5x-6$。

(u) $35+27x-18x^2$。

(v) $16x^2-24xy^2-27y^4$。

(w) x^3-125。

(x) $8x^3+27y^3$。

(y) $(x^2+1)^3-(y^2-1)^3$。

(z) x^3-x-y^3+y。

(2) 分析下列各式之因式：

(a) $(x^2+x)(x^2+x+1)-42$，

(b) $(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$。

(c) $x^4-9x^2+4x+12$。

(d) $x^5-4x^3y^2-4y^5+x^2y^3$。

(3) 用因式定理將下列各式析因式：

(a) x^3+x-2。 (b) x^3+x+10。

(c) $x^3+5x^2-18x-72$。 (d) $x^4-9x^2+4x+12$。

(4) 證明 10^8-1 有因數 9 及 11。

(5) 求下列各題之最高公因式及最低公倍式：

(a) $x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4$，$x^4y-9x^2y^3$。

(b) x^2+2x+1，x^3+2x^2+2x+1。

(c) $5x^3y^2(x^2-4y^2)$，$10x^2y^2(x^2-4xy+4y^2)$，
$15x^2y^3(3x^2-8xy+4y^2)$，$20x^3y^3(x^3-8y^3)$。

(6) 證明二式之最高公因式與最低公倍式之積，等於二式之積。

(7) 求下列各題之最高公因式及最低公倍式：

(a) $2x^4+x^3-20x^2-7x+24$，$2x^4+3x^3-13x^2-7x+15$。

(b) x^3+x^2-x-1，x^3+3x^2-x-3，x^3+x^2-2x。

第五章　分式

分式 (Fraction expression)， **分母** (Denominator)， **分子** (Numerator)

一整式 B 除他整式（或整數）A 之結果，以 $\frac{A}{B}$ 之形狀表示者，稱爲分式，A 稱爲分母，B 稱爲分子；分母分子總稱分式之項。故分式之分母必爲整式，若分母爲數之分式，仍屬於整式。例如 $\frac{1}{x-2}$， $\frac{a-b}{a+b}$， $\frac{x-1}{x^2-3x+5}$ 等，皆爲分式，而 $\frac{2a+3b}{15}$， $\frac{x}{5}$ 等則皆爲整式。

分式性質

分式之分母分子，各以不等於 0 之同數（或同式）乘之或除之，其值不變，例如 M 爲不等於 0 之數或式，則 $\frac{A}{B}=\frac{MA}{MB}$ 及 $\frac{MA}{MB}=\frac{A}{B}$。

如設 $M=-1$，則 $\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$，故分式之分母分子同時變號，其值不變。又依代數數之除法法則，$\frac{-A}{B}=-\frac{A}{B}$， $\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$，故分式之分母分子有一變號，則分式變號；又分式之前變號，則須將分母分子之一變號。此種性質爲關於分式計算之基礎，頗爲重要。

約分 (Reduction of fraction to its lowest terms) **最簡分式** (Fraction in its lowest terms)

分式之分母分子，以其最高公因式除之，稱爲約分。約分後之分式，稱爲最簡分式或既約分式。凡分母分子有公因式之分式，必須約分化簡。

〔例 1〕 將 $\dfrac{3ax^2}{3ax^2-6ay^2}$ 約分。

〔解〕 $$\frac{3ax^2}{3ax^2-6ay^2}=\frac{3ax^2}{3a(x^2-2y^2)}\ (G.C.M\ 爲\ 3a)$$

$$=\frac{x^2}{x^2-2y^2}。$$

〔例 2〕 將 $\dfrac{2x^2-5x+2}{2x^2+x-1}$ 約分。

〔解〕 $$\frac{2x^2-5x+2}{2x^2+x-1}=\frac{(2x-1)(x-2)}{(2x-1)(x+1)}\ (G.C.M\ 爲\ 2x-1)$$

$$=\frac{x-2}{x+1}。$$

通分 (Reduction of fraction to a common denominator)

將分母不同之諸分式，化爲同分母而不變其値，稱爲通分；而此同分母稱爲公分母。因通分所用之公分母，以次數低者爲便，故通分之法，可先將各式約分，再以諸分母之最低公倍式爲公分母，以各分母除公分母所得之商乘各分子爲新分子。

〔例 1〕 將 $\dfrac{3a}{3a-9}$，$\dfrac{a^2}{a^2-9}$，$\dfrac{a-1}{a+3}$ 通分。

〔解〕　第一分式約分，$\dfrac{3a}{3a-9}=\dfrac{3a}{3(a-3)}=\dfrac{a}{a-3}$；第二分式之分母析因式，$a^2-9=(a+3)(a-3)$；故最小公分母為 $(a-3)(a+3)$，於是

$$\frac{a}{a-3}=\frac{a(a+3)}{(a-3)(a+3)},\quad \frac{a^2}{a^2-9}=\frac{a^2}{(a-3)(a+3)},$$

$$\frac{a-1}{a+3}=\frac{(a-1)(a-3)}{(a-3)(a+3)}。$$

〔例 2〕　將 $\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$，$\dfrac{x-5}{x^2-7x+10}$，$\dfrac{x-1}{x^2-6x+5}$ 通分。

〔解〕　將各分母析因式而約分，

$$\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{x-1},$$

$$\frac{x-5}{x^2-7x+10}=\frac{x-5}{(x-5)(x-2)}=\frac{1}{x-2},$$

$$\frac{x-1}{x^2-6x+5}=\frac{x-1}{(x-1)(x-5)}=\frac{1}{x-5}。$$

故以 $(x-1)(x-2)(x-5)$ 為公分母，而以 $(x-2)(x-5)$，$(x-1)(x-5)$，$(x-1)(x-2)$ 乘各分子，即得

$$\frac{1}{x-1}=\frac{(x-2)(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-5)},$$

$$\frac{1}{x-2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-5)},$$

$$\frac{1}{x-5}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-5)},$$

分式之加法減法

(1) 同分母諸分式相加減，只須依各分子相加減爲分子，同分母爲分母，將結果約分化簡。

(2) 異分母諸分式相加減，可先通分再依上法演算。

〔例 1〕 $$\frac{2m+n}{mn}-\frac{3m-2n}{mn}+\frac{m+3n}{mn}$$

$$=\frac{2m+n-3m+2n+m+3n}{mn}=\frac{6n}{mn}=\frac{6}{m}。$$

〔例 2〕 $$\frac{1}{x^2-7x+12}-\frac{2}{x^2-6x+8}+\frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$=\frac{1}{(x-3)(x-4)}-\frac{2}{(x-2)(x-4)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x-2-2(x-3)+x-4}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{x-2-2x+6+x-4}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{0}{(x-2)(x-3)(x-4)}=0。$$

分式之乘法

諸分式相乘，只須以各式分母之積爲分母，分子之積爲分子，將結果約分化簡。

〔例 1〕 $$\frac{2a}{bc}\times\frac{3b}{ca}\times\frac{4c}{3ab}=\frac{2a\times3b\times4c}{bc\times ca\times3ab}=\frac{8}{abc}。$$

〔例 2〕 $$\frac{x^2+2x}{x^2-9}\times\frac{x^2-3x}{x^2-4}\times\frac{x-2}{x^3}$$

$$=\frac{x(x+2)\times x(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)\times(x-2)(x+2)\times x^3}=\frac{1}{x(x+3)}。$$

分式之除法

以一分式除他分式，只須將除式之分母與分子交換，以乘被除式，將結果約分化簡。

〔例 1〕 $$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)\div\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}\div\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}\times\frac{xy}{x^2+y^2-2xy}$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}。$$

〔例 2〕 $$\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}\times\frac{x^2-9x+20}{x^2-10x+21}\div\frac{x^2-5x}{x^2-7x}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-4)}\times\frac{(x-4)(x-5)}{(x-3)(x-7)}\times\frac{x(x-7)}{x(x-5)}$$

$$=1。$$

繁分式 (Complex fraction)

分式之分母分子有一為分式或二者俱為分式者，稱為繁分式。繁分式可依分式除法以分母除分子化簡。

〔例 1〕 $$\frac{a}{\frac{a+b}{b}}=a\div\frac{a+b}{b}=a\times\frac{b}{a+b}=\frac{ab}{a+b}。$$

〔例 2〕
$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{1-\frac{y^2}{x^2}}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\div\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=\frac{y-x}{xy}\div\frac{x^2-y^2}{x^2}$$

$$=\frac{y-x}{xy}\times\frac{x^2}{x^2-y^2}=\frac{-(x-y)x^2}{xy(x^2-y^2)}$$

$$=\frac{-(x-y)x^2}{xy(x-y)(x+y)}=\frac{-x}{y(x+y)}$$

$$=-\frac{x}{y(x+y)}。$$

習　　題

(1) 將下列各分式約分：

(a) $\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$。　　(b) $\dfrac{(x-y)^2-1}{(x+1)^2-y^2}$。

(c) $\dfrac{x^2-5xy+4y^2}{x^2-16y^2}$。　　(d) $\dfrac{x^2+6xy+5y^2}{x^2-2xy-3y^2}$

(2) 將下列各組之分式通分：

(a) $\dfrac{2a}{3x(x-a)}$, $\dfrac{3b}{2y(x^2-y^2)}$。

(b) $\dfrac{a^2}{x^2-xy}$, $\dfrac{ab}{x^2+xy}$, $\dfrac{b^2}{4(x^2-y^2)}$。

(c) $\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$, $\dfrac{x+1}{x^2+x-6}$, $\dfrac{x-4}{x^2-x-12}$。

(d) $\dfrac{5}{2x^2+3x-2}$, $\dfrac{1}{2x^2-3x+1}$, $\dfrac{3}{2x^2+2x-4}$。

(3) 計算下列各式之代數和:

(a) $\dfrac{2x+1}{x^2-1}+\dfrac{4}{x^2-3x+2}$。

(b) $\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{3}{x^3-27}-\dfrac{x}{(x+3)(x^2+3x+9)}$。

(c) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$。

(d) $\dfrac{1}{a^2+4a+3}-\dfrac{3}{a^2+3a+2}+\dfrac{1}{a^2+5a+6}$。

(e) $\dfrac{a-3}{a^2-2a-3}-\dfrac{2-a}{a^2-3a+2}-\dfrac{1}{1-a^2}$。

(f) $\dfrac{1}{(x-y)(z-y)}+\dfrac{1}{(y-z)(x-z)}+\dfrac{1}{(z-x)(y-x)}$。

(g) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{2x-1}+\dfrac{2x-3}{1-4x^2}$。

(h) $\dfrac{2}{(x^2-1)^2}-\dfrac{1}{2x^2-4x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}$。

(4) 求下列各式之積:

(a) $\dfrac{2a^2}{3bc}\left(-\dfrac{5b^2c^2}{8a^3x^2}\right)$。

(b) $\dfrac{4x^2-1}{2x^2+7x+6}\times\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+5x-3}\times\dfrac{2x^2+9x+9}{2x^2-5x-3}$。

(c) $\dfrac{ax}{x+a}\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$。

(d) $\dfrac{x^3-1}{4x^2-9}\times\dfrac{(2x-3)^2}{x^2+x+1}$。

(5) 求下列各式之商:

(a) $\dfrac{(a^2+2b)^2}{a-b}\div\dfrac{ab+2b^2}{a-ab}$。

(b) $\left(1+\dfrac{x+2}{x^2-x-2}\right)\div\dfrac{x}{x-2}$。

(c) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}\div\left(2+\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)$。

(d) $\left(1+\dfrac{x^3}{y^3}\right)\div\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\div(x^2-xy+y^2)$。

(6) 計算下列各式:

(a) $\dfrac{x^4-y^4}{(x+y)^2}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\div\dfrac{(x-y)^2}{x+y}$。

(b) $\dfrac{2x^2(x+y)}{x^3+y^3}\times\dfrac{x^2-y^2}{3xy}\div\left(1+\dfrac{3xy}{x^2-xy+y^2}\right)$。

(c) $\dfrac{a^3-b^3}{a+b}\div\dfrac{a-b}{a^3+b^3}\times\left(\dfrac{2ab}{a^2+ab+b^2}-1\right)$。

(d) $\left(1+\dfrac{5x-5}{x^2-1}\right)\left(1-\dfrac{6x+3}{x^2-4}\right)\div\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}\div\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-4}$。

(7) 將下列繁分式化簡:

(a) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}$。

(b) $\dfrac{1-\dfrac{2x-x^2+x^4+2}{x^4+4}}{2-\dfrac{2(x^2+2x)+3}{x^2+2x+2}}$。

(c) $\dfrac{\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}}{1-\dfrac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$。

(d) $\dfrac{a^2-x^2}{4a}\left(\dfrac{\dfrac{2ax}{x^2-a^2}+\dfrac{3a}{a+x}+\dfrac{a}{a-x}}{a-x}\right)$。

(e) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$。

(f) $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{y}}+\dfrac{y}{1+\dfrac{y}{x}}-\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$。

(g) $\dfrac{(1-x^2)(1-x^3)}{x(1+x)(1-x)}-\dfrac{x^3+\dfrac{1}{x^3}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}-1}$。

(h) $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$。

第六章　開方與根數根式

方根（Root）

滿足 $x^n=a$ 中 x 之值，即 n 乘方爲 a 者，稱爲 a 之 n 方根或 n 乘根，常以 $x=\sqrt[n]{a}$ 表之，此 $\sqrt{\ }$ 稱根號，n 稱根指數。但二乘根特稱平方根，（其根指數可省寫，如 $\sqrt[2]{a}$ 可省寫爲 $\sqrt{a}$），三乘根特稱立方根，而某數之一乘根即其數之本身。

方根性質

依代數數之乘法，同號二數之積爲正，異號二數之積爲負，準此反求，推得方根之性質如下：

（1）正數 a 之偶數方根有二，絕對值相等而符號相反。正根以 $\sqrt[n]{a}$ 表之，負根以 $-\sqrt[n]{a}$ 表之，但 n 爲偶數，尋常皆取正根。例如 $\sqrt{16}=4$ 或 -4。

（2）正數 a 之奇數方根必有一爲正數，負數 a 之奇數方根，必有一爲負數，以 $\sqrt[n]{a}$ 表之，但 n 爲奇數。例如 $\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$。

（3）負數之偶數方根，不能存在。

根指數定律

依方根之意義，可得根指數定律如下，但式中 m，n 皆爲正整數：

（1）$\sqrt[n]{a^n}=a$。例如

$$\sqrt{9a^2}=3a,\ -\sqrt[3]{-27a^3}=-\sqrt[3]{(-3)^3a^3}=-(-3)a=3a$$

(2) $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$。例如

$$\sqrt{a^2\times b^4\times c^6}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^4}\sqrt{c^6}=a\times b^2\times c^3.$$

(3) $\sqrt[n]{a^{nm}}=a^m$。例如

$$\sqrt{a^{2\times3}}=a^3.$$

(4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$。例如

$$\sqrt[3]{\frac{8a^9b^6}{27x^3y^6}}=\frac{\sqrt[3]{8a^9b^6}}{\sqrt[3]{27x^3y^6}}=\frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{a^9}\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{y^6}}=\frac{2a^3b^2}{3xy^2}。$$

開方 (Evolution)

在 $x^n=a$ 之關係中，a 爲 x 之 n 乘方，x 爲 a 之 n 方根，已知 x 與 n 以求 a 之計算稱爲乘方，反之已知 a 與 n 以求 x 之計算則稱爲開方。特於求平方根稱爲開平方，求立方根稱爲開立方。

整式之開方法

單項式之開方，前於根指數定律中已示其例；簡單多項式之易於析因式者，可先析因式，再視各因式爲一文字，如單項式開方。例如 $\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=2x+1$，及
$\sqrt[3]{27x^6-54x^4y^2+36x^2y^4-8y^6}=\sqrt[3]{(3x^2-2y^2)^3}=3x^2-2y^2$。

整式之開平方通法

(1) 將整式依某文字之降冪排列。

(2) 求首項之平方根，爲根之首項。

(3) 從原式減已得根之平方，所餘爲第一餘積。

(4) 用二倍已得根爲第一試除式，以除第一餘積之首項，得商爲根之次項。

(5) 將第一試除式與新得根之和以新得根乘之，從第一餘積減去，得第二餘積。

(6) 以後依(4)(5)繼續進行，如某次餘積比所用之試除式爲低次，則演算者此止，而原式非完全平方式。

〔例〕 求 $4x^6-4x^5+13x^4-10x^3+11x^2-6x+1$ 之平方根。

〔解〕

$$
\begin{array}{l|r}
 & \overset{(1)}{2x^3}-\overset{(5)}{x^2}+\overset{(10)}{3x}-\overset{(15)}{1} \\
\hline
 & 4x^6-4x^5+13x^4-10x^3+11x^2-6x+1 \\
 & 4x^6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\
\hline
\left.\begin{array}{r} \underset{(4)}{4x^3}-x^2 \\ -x^2 \end{array}\right\}(6) & \begin{array}{r} -4x^5+13x^4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ -4x^5+x^4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7) \end{array} \\
\hline
\left.\begin{array}{r} \underbrace{4x^3-2x^2}_{(9)}+3x \\ +3x \end{array}\right\}(11) & \begin{array}{r} 12x^4-10x^3+11x^2\cdots\cdots(8) \\ 12x^4-6x^3+9x^2\cdots\cdots(12) \end{array} \\
\hline
\left.\begin{array}{r} \underbrace{4x^3-2x^2+6x}_{(14)}-1 \\ -1 \end{array}\right\}(16) & \begin{array}{r} -4x^3+2x^2-6x+1\cdots(13) \\ -4x^3+2x^2-6x+1\cdots(17) \end{array} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

答　$2x^3-x^2+3x-1$。

式中括弧内之數字，係示寫法之次序。

整式之開立方通法

(1) 將整式依某文字之降冪排列。

(2) 求首項之立方根，爲根之首項。

(3) 從原式減已得根之立方，所餘爲第一餘積。

(4) 用已得根平方之三倍爲第一試除式，以除第一餘積之首項，得商爲根之次項。

(5) 將已得根三倍與新得根相加，再用新得根乘之，得積加於第一試除式，爲第一全除式。

(6) 用新得根乘第一全除式，從第一餘積減去，所餘爲第二餘積。

(7) 以後依(4)(5)(6)繼續進行，如某次餘積比所用之試除式爲低次，則演算至此止，而原式非完全立方式。

[例]　求 $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$ 之立方根。

[解]

$$
\begin{array}{l|l}
 & \quad\ (1)\ \ (5)\ \ (11) \\
 & \quad\ x^2-\ x+2 \\
\hline
 & x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
 & x^6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\
\hline
3x^4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4) & -3x^5+9x^4-13x^3 \cdots\cdots\cdots(3) \\
+(3x^2-x)(-x) \cdots\cdots(6) & \\
\hline
3x^4-3x^3+x^2 \cdots\cdots\cdots(7) & -3x^5+3x^4-\ x^3 \cdots\cdots\cdots(8) \\
\hline
3(x^2-x)^2 \cdots\cdots\cdots(10) & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \cdots(9) \\
+\{3(x^2-x)+2\}\times 2 \cdots(12) & \\
\hline
3x^4-6x^3+9x^2-6x+4 \cdots(13) & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \cdots(14) \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

答　x^2-x+2。

式中括弧內之數字，係示寫法之次序。

分式開方

只須將分母分子分別開方卽得（參看根指數定律）。

根數（Radical），**有理數**（Rational number），**無理數**（Irrational number）

開方不能盡之數，稱爲根數，如 $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ 等皆是，根數爲無理數之一種，其他如圓周率 $\pi=3.14159\cdots\cdots$ 亦爲無理數。對於無理數而言，總稱整數分數及 0 爲有理數。故數之種類，可列表如下：

$$\text{數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數（正，負）及}0\\ \text{分數（正，負）}\begin{cases}\text{有限小數}\\ \text{循環小數}\end{cases}\end{cases}\\ \text{無理數}\begin{cases}\text{根數（正，負）}\\ \pi\text{及其他}\end{cases}\end{cases}$$

根式（Radical），**有理式**（Rational expression），**無理式**（Irrational expression）

開方不能盡之代數式，稱爲根式或無理式。對於無理式而言，總稱整式分數爲有理式。故代數式之種類，可列表如下：

$$\text{代數式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{單項式}\\ \text{多項式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{無理式}\end{cases}$$

〔注意〕　無理式未必表無理數，例如 $\sqrt{a+2b}$ 爲無理式，設其中 $a=2$，$b=1$，則 $\sqrt{a+2b}=\sqrt{4}=2$ 表有理數。若設 $a=1$，

$b=2$，則 $\sqrt{a+2b}=\sqrt{5}$ 表無理數。

同次根數，同次根式（Radicals of common index）

根數或根式之根指數，卽爲其次數。有相同次數之根數或根式，稱爲同次根數或同次根式。

根數或根式之變形

（i）根號內如有可能開盡之因數因式，可提出至根號外，將根數或根式化簡。

〔例〕　$\sqrt{180x^3y^4z^5}=\sqrt{36x^2y^4z^4\times 5xz}=6xy^2z^2\sqrt{5xz}$。

（ii）有理數，有理式可依根指數乘方移入根號內。

〔例〕　$2xy^2\sqrt[3]{3x^2y}=\sqrt[3]{(2xy^2)^3\times 3x^2y}=\sqrt[3]{24x^5y^7}$。

（iii）變化根指數

依公式 $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$，可以同數乘根指數及根號內指數，而將根指數變化。故次數不同之根數根式，可化爲同次，卽以各根指數之最小公倍數爲公共根指數。

〔例 1〕　化 $\sqrt[m]{a}$，$\sqrt[n]{b^2}$，$\sqrt[p]{c^3}$ 爲同次根式。

〔解〕　以根指數 m，n，p 之最小公倍數 mnp 爲公共根指數，得

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mnp]{a^{np}}，\sqrt[n]{b^2}=\sqrt[mnp]{b^{2mp}}，\sqrt[p]{c^3}=\sqrt[mnp]{c^{3mn}}。$$

〔例 2〕　比較 $\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[4]{9}$ 之大小。

〔解〕　因 $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$，故可用 2，3 之最小公倍數 6 爲公共根指數，化作同次根數而比較其大小。

$$\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}，\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}，$$

$$\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}。$$

故 $\sqrt{5}>\sqrt[3]{9}>\sqrt[4]{4}$。

(iv) 分母有理化 (Rationalizing denominator)

分數或分式之分母爲根數或根式者，可依公式 $\frac{m}{\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2}=\frac{m\sqrt{a}}{a}$ 使其值不變，而將其分母之根號取去，此卽稱爲分母有理化。

〔例〕 $\sqrt[3]{\frac{3x}{4y^2z}}=\sqrt[3]{\frac{6xyz^2}{8y^3z^3}}=\frac{\sqrt[3]{6xyz^2}}{\sqrt[3]{8y^3z^3}}=\frac{\sqrt[3]{6xyz^2}}{2yz}$。

同類根數同類根式 (Similar radicals)

同次根數或根式之根號內有同一數或式者，稱爲同類。例如 $3\sqrt{2}$，$5\sqrt{2}$ 爲同類根數，$m\sqrt{a}$，$n\sqrt{a}$ 爲同類根式。

根數根式之加法減法

計算之前，將各式化簡，有同類者，依下列公式計算：

$$m\sqrt[k]{a}+n\sqrt[k]{a}-p\sqrt[k]{a}=(m+n-p)\sqrt[k]{a}。$$

〔例 1〕 $2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}$

$$=2\sqrt{4\times2}+5\sqrt{36\times2}-7\sqrt{9\times2}$$

$$=4\sqrt{2}+30\sqrt{2}-21\sqrt{2}$$

$$=(4+30-21)\sqrt{2}=13\sqrt{2}。$$

〔例 2〕 $\sqrt{a^2b}+2a\sqrt{b}-5\sqrt{a^2b}$

$$=a\sqrt{b}+2a\sqrt{b}-5a\sqrt{b}$$

$$=(a+2a-5a)\sqrt{b}=-2a\sqrt{b}。$$

根數根式之乘法除法

同次根數或根式之乘法除法，可依公式 $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$，$\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$ 計算，若次數不同，則先化爲同次。若分母爲根式之代數和，則依公式 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ 將分母有理化。

〔例1〕 $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(5\sqrt{3}-6\sqrt{2})$

$$=10(\sqrt{3})^2-12\sqrt{3}\times\sqrt{2}+15\sqrt{2}\times\sqrt{3}-18(\sqrt{2})^2$$

$$=30-12\sqrt{6}+15\sqrt{6}-36=3\sqrt{6}-6。$$

〔例2〕 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}。$$

〔例3〕 $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}][(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}]}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}。$$

習題

(1) 求下列各式之平方根:

(a) $x^2-10x+25$。

(b) $25x^2-20xy+4y^2$。

(c) x^4-16x^2+64。

(d) $a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^2+b^4$

(e) $x^2-40x^3+30x+16x^4+9$。

(f) $x^{2n}+2x^{n+1}+2x^n-x^2+2x+1$。

(2) 設 $4x^4-12x^3+5x^2+ax+b$ 爲關於 x 之完全平方，則 a, b 之値如何?

(3) 求下列各式之立方根:

(a) $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$。

(b) $8y^6-36y^5+66y^4-63y^3+33y^2-9y+1$。

(4) 有一矩形地長爲闊之 3 倍，面積爲 1587 方丈。問長闊各若干?（面積＝長×闊）

(5) 有甲乙二數，甲爲乙之 5 倍，其積爲 3645。問各數如何?

(6) 甲乙二數之乘積爲 72，甲丙二數之乘積爲 63，乙丙二數之乘積爲 56。求甲乙丙三數各幾何?

(7) 本金 3000 元，依每年複利計算，二年後得本利和 3370.8 元。問年利率如何? [本利和＝本金 $(1+\text{利率})^2$]

(8) 有一長方箱，體積爲 10.368 立方尺，縱爲深之 2 倍，橫爲深之 3 倍。求縱橫深各爲幾尺?（體積＝縱×橫×深）

(9) 將下列各式中根號內可以開方能盡之式，寫在根號外：

(a) $\sqrt{50ax^2y^3}$。　　(b) $\sqrt{8(x^2-y^2)(x+y)}$。

(c) $\sqrt[3]{-a^{10}}$　　(d) $\sqrt[3]{32a^4b^5}$。

(10) 將下列各式之有理式移入根號內：

(a) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\text{[illegible]}}$。　　(b) $3x^2\sqrt{2xy}$。　　(c) $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$。

(11) 化下列各組爲同次根式：

(a) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[4]{2}$。

(b) $\sqrt{xy}$，$\sqrt[4]{x^2yz}$，$\sqrt[6]{2x^3z^2}$。

(12) 比較下列各組數之大小：

(a) $\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{11}$。

(b) $2\sqrt{3}$，$3\sqrt[3]{2}$。

(c) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$　$\sqrt[6]{6}$。

(13) 化簡下列各式：

(a) $\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{3}$。

(b) $2\sqrt[3]{192}+3\sqrt[3]{375}-3\sqrt[3]{81}$。

(c) $2\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{15}+2\sqrt{\frac{3}{5}}$。

(d) $\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{a^2+c^2}{ac}+2}-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{ac}-2}$。

(14) 將下列各式化爲簡式：

(a) $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{9}{5}}$。

(b) $(2\sqrt{15}+5\sqrt{3})(\sqrt{15}-4\sqrt{3})$。

(c) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})$。

(d) $([illegible]-3\sqrt{6})(3+7\sqrt{6})$。

(e) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$。

(f) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$。

(g) $\dfrac{(\sqrt{5}+2)^2-(\sqrt{5}-2)^2}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})(10-\sqrt{15})}$。

(h) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$。

第七章　二次方程

一元二次方程種類

(1) 純二次方程 (Pure quadratic equation) 如 $ax^2+c=0$ 之形，其中 a, c 爲已知數。

(2) 雜二次方程或完全二次方程 (Complete quadratic equation) 如 $ax^2+bx+c=0$ 之形，其中 a, b, c 爲已知數。

純二次方程解法

純二次方程皆可化爲標準式如 $ax^2+c=0$ 之形，解此方程，可先移項得 $ax^2=-c$，次以 x^2 之係數除兩邊，得 $x^2=-\dfrac{c}{a}$，再求 $-\dfrac{c}{a}$ 之平方根爲 x 之根，即 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$。

〔例 1〕　解 $3x^2-8=17-x^2$。

〔解〕　移項化簡，得 $4x^2=25$，　$\therefore\quad x^2=\dfrac{25}{4}$，

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\pm\frac{5}{2}。$$

〔例 2〕　解 $(2x+1)^2=81$。

〔解〕　視 $2x+1$ 爲一文字，如上例解得 $2x+1=\pm\sqrt{81}=\pm9$；從 $2x+1=9$ 得 $x=4$；又從 $2x+1=-9$，得 $x=-5$。

〔例 3〕　解 $(x+3)(x-3)=7$。

〔解〕 展開左邊得 $x^2-9=7$， $\therefore\ x^2=16$，

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{16}=\pm4。$$

完全二次方程解法

(I) 析因式法

完全二次方程皆可化爲標準式如 $ax^2+bx+c=0$ 之形，此方程左邊如可析因式，則先化爲 $(lx+m)(px+q)=0$，其中 l, m, p, q 各不等於 0，故可使各因式等於 0，而得兩個一次方程，其根爲所求之根，卽從 $lx+m=0$ 得 $x=-\dfrac{m}{l}$，又從 $px+q=0$ 得

$$x=-\frac{q}{p}。$$

〔例 1〕 解 $3x^2+7x-6=0$。

〔解〕 左邊析因式，$(3x-2)(x+3)=0$。 從 $3x-2=0$ 得 $x=\dfrac{2}{3}$，又從 $x+3=0$，得 $x=-3$。

〔例 2〕 解 $(x-1)(x-2)=42$。

〔解〕 去括號化簡，$x^2-3x-40=0$， $\therefore\ (x+5)(x-8)=0$。從 $x+5=0$，得 $x=-5$，又從 $x-8=0$，得 $x=8$。

〔例 3〕 解 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}=2(x+2)$。

〔解〕 去分母，移項，化簡，$3x^2-14x-24=0$，

$$\therefore\quad (3x+4)(x-6)=0。\text{解得}\ x=-\frac{4}{3}\ \text{及}\ x=6。$$

(II) 一般解法

二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之左邊，如不易析因式，則可用一般解法，其步驟如下：

(1) 移項，$ax^2+bx=-c$。

(2) 以 x^2 之係數除兩邊 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$。

(3) 兩邊各加 x 之半係數平方，使左邊成完全平方，即

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}。$$

(4) 兩邊各開平方，$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

即得兩個一次方程爲

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad 及\quad x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

(5) 解此二方程，即得原方程之根爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

〔例 1〕　解 $3x^2-7x+2=0$。

〔解〕　移項，$3x^2-7x=-2$，以 3 除兩邊，$x^2-\frac{7}{3}x=-\frac{2}{3}$。

兩邊各加$\left(\frac{7}{6}\right)^2$ 即$\frac{49}{36}$，得 $x^2-\frac{7}{3}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{49}{36}-\frac{2}{3}$，兩邊開

平方，$\therefore\ \left(x-\frac{7}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$，$\therefore\ x-\frac{7}{6}=\pm\frac{5}{6}$。從 $x-\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$，得 $x=\frac{12}{6}=2$，從 $x-\frac{7}{6}=-\frac{5}{6}$，得 $x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。

〔注意〕 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 為二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根之公式，用此公式，可省去中途之計算。如此例以 $a=3$，$b=-7$，$c=2$ 代入公式，得 $x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\times3\times2}}{2\times3}$

$$=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{7\pm5}{6}=2 \text{ 或 } \frac{1}{3}。$$

〔例 2〕 解 $(2x+1)(3x-2)-(5x-7)(x-2)=64$。

〔解〕 去括號，$6x^2-x-2-5x^2+17x-14=64$。移項，$x^2+16x=80$。兩邊各加 $\left(\frac{16}{2}\right)^2$ 即 8^2，得 $x^2+16x+64=80+64$。$(x+8)^2=144$。兩邊開平方，$x+8=\pm12$。從 $x+8=12$，得 $x=4$；從 $x+8=-12$，得 $x=-20$。

〔例 3〕 解 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$。

〔解〕 移項，$x^2-2\sqrt{3}x=-2$。兩邊各加 $(\sqrt{3})^2$ 即 3，得 $x^2-2\sqrt{3}x+3=3-2$，$\therefore\ (x-\sqrt{3})^2=1$。兩邊開平方，$x-\sqrt{3}=\pm1$。從 $x-\sqrt{3}=1$，得 $x=\sqrt{3}+1$。從 $x-\sqrt{3}=-1$，得 $x=\sqrt{3}-1$。

虛數 (Imaginary number) **實數** (Real number)

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根之公式，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

中，如 b^2-4ac 表負數，則依方根性質，不能開其平方，從而方程之解爲不可能。然以前欲使減法常爲可能而定一負數，同法，欲使二次方程之解法常爲可能，亦可定一新數即所謂虛數。虛數之單位爲 $\sqrt{-1}$，常以 i 表之，於是 $\sqrt{-1}=i$，$(\sqrt{-1})^2=i^2=-1$，而 $i^3=i^2i=-i$，$i^4=i^2i^2=(-1)(-1)=1$，$i^5=i^4i=i$，其餘可依此類推。

對於虛數而言，總稱有理數與無理數爲實數。二次方程之根爲虛數時，此虛數之根稱爲虛根，對於虛根而稱實數之根爲實根，實數與虛數爲全然不同之兩種數，兩者間之大小無可比較。虛數雖可與實數同樣看待，但在根指數定律中，若根號內爲負數，則不能成立。例如 $\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}=\sqrt{(-3)\times(-12)}=\sqrt{36}=6$ 即爲大誤，應作 $\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}=\sqrt{3(-1)}\times\sqrt{12(-1)}$ $=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{12}\,i=\sqrt{36}\,i^2=6\times(-1)=-6$。

〔例 1〕　計算 $\sqrt{-16}+3\sqrt{-1}+2\sqrt{-25}$。

〔解〕　$\sqrt{-16}+3\sqrt{-1}+2\sqrt{-25}$

$$=\sqrt{16(-1)}+3\sqrt{-1}+2\sqrt{25(-1)}$$

$$=4i+3i+10i=17i。$$

〔例 2〕　計算 $(3+\sqrt{-2})^2$。

〔解〕　$(3+\sqrt{-2})^2=(3+i\sqrt{2})^2$

$$=3^2+6i\sqrt{2}+i^2(\sqrt{2})^2=9+6i\sqrt{2}+(-1)\times 2$$

$$=7+6i\sqrt{2}。$$

〔例3〕 化簡 $\sqrt{-8}\div\sqrt{-6}$。

〔解〕 $\sqrt{-8}\div\sqrt{-6}=i\sqrt{8}\div i\sqrt{6}=\dfrac{i\sqrt{8}}{i\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$

$$=\frac{\sqrt{48}}{6}=\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}。$$

判別式(Discriminant)

設一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之二根

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 及 \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

爲 α 及 β,則有下列性質:

(i) 若 $b^2-4ac>0$,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 爲實數,則 α,β 皆爲實數,且 $\alpha\neq\beta$。

反之,若 $\alpha\neq\beta$ 且 α,β 皆爲實數,則 $b^2-4ac>0$。

(ii) 若 $b^2-4ac=0$,則 $\sqrt{b^2-4ac}=0$,故 α,β 皆爲實數,且 $\alpha=\beta$。

反之,若 $\alpha=\beta$,則 $b^2-4ac=0$。

(iii) 若 $b^2-4ac<0$,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 爲虛數,故 α,β 皆爲虛數,且 $\alpha\neq\beta$。

反之,若 $\alpha\neq\beta$,且 α,β 皆爲虛數,則 $b^2-4ac<0$

依上所述,b^2-4ac 爲判別方程 $ax^2+bx+c=0$ 兩根性質必要之式,故稱爲二次方程根之判別式。但二次方程之二根,以上述三種爲限,決不能一實一虛,亦決不能爲相等虛數,此點必須注意。

〔例1〕 判別下列各方程之根:

(a) $3x^2-8x-5=0$。　　(b) $3x^2-4x-7=0$。

(c) $4a^2+12x+9=0$。　　(d) $3x^2+5x+4=0$。

〔解〕 (a) 之判別式爲 $(-8)^2-4\times3\times(-5)=124>0$，故有不等二實根。

(b) 之判別式爲$(-4)^2-4\times3\times(-7)=100>0$，故有不等二實根。

(c) 之判別式爲 $12^2-4\times4\times9=0$，故有相等二實根。

(d) 之判別式爲 $5^2-4\times3\times4=-23<0$，故有不等二虛根。

因(b)之判別式等於 $100=10^2$，故(b)之二根爲有理數。一般言之，判別式爲完全平方者，根爲有理數。

〔例 2〕 方程 $kx^2-(3k-2)x+4-k=0$ 之二根相等，求 k 之值。

〔解〕 判別式爲 $(3k-2)^2-4k(4-k)=0$，去括號化簡，

$13k^2-28k+4=0$，即 $(13k-2)(k-2)=0$，故 $k=\frac{2}{13}$ 及 $k=2$。

〔例 3〕 設 a, b 爲不等之實數，證明

$$(a^2+b^2)x^2-2(a+b)x+2=0 \text{ 有虛根。}$$

〔證〕 判別式爲 $4(a+b)^2-4\times2(a^2+b^2)$

$$=-4a^2+8ab-4b^2=-4(a^2-2ab+b^2)$$

$$=-4(a-b)^2$$

因 a, b 爲不等之實數，故 $(a-b)^2>0$，即 $-4(a-b)^2<0$，而方程有虛根。

根與係數之關係

設一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之二根為 α,β 即

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

則二根之和為 $$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}。$$

二根之積為 $$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}。$$

故　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，此二式稱為根與係數之關係公式，用此公式，可不解方程而求二根之和與積。

又由此公式，設 $x^2+px+q=0$ 之二根為 α,β 則 $\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$，故以二數 α,β 作根之方程為 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$。由是以已知二數為二根可作二次方程。又已知二數之和與積而求此二數之問題，亦可歸屬於作二次方程而解之。

〔例1〕　設 $x^2+x+1=0$ 之二根為 α,β，求

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\quad 及\quad \frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$$

之值。

〔解〕　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=1$。

故　$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(-1)^2-2\times1}{1}=1-2=-1。$$

及　$$\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2}$$

$$=\frac{(-1)^3-3\times1(-1)}{1^2}=2。$$

〔例2〕　試以 7，-8 爲二根作方程。

〔解〕　$7+(-8)=-1$，$7\times(-8)=-56$。

故所求之方程爲 $x^2+x-56=0$。

〔例3〕　已知二根之和爲 m，積爲 n，求作方程，並求二根之値。

〔解〕　所求之方程爲 $x^2-mx+n=0$，而二根爲

$$x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4n}}{2}。$$

二次三項式析因式

設一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α，β，則由根與係數之關係，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，　$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，

故　　$\frac{b}{a}=-(\alpha+\beta)$，$\frac{c}{a}=\alpha\beta$。於是

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta)。$$

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

由是得法則如下：

欲將二次三項式　$ax^2+bx+c=0$　析因式，可先求

$$ax^2+bx+c=0$$

之二根 α，β，即得　　$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$。

〔例〕　將 $12x^2+17x-40$ 析因式。

〔解〕　$12x^2+17x-40=0$，由根之公式，

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\times12\times(-40)}}{2\times12}$$

$$=\frac{-17\pm\sqrt{2209}}{24}=\frac{-17\pm47}{24}=\frac{5}{4}\text{或}-\frac{8}{3}。$$

故　　$$12x^2+17x-40=12\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{8}{3}\right)$$

$$=4\left(x-\frac{5}{4}\right)\times3\left(x+\frac{8}{3}\right)$$

$$=(4x-5)(3x+8)。$$

二次方程應用題解法

解二次方程應用題，與解一次方程應用題大致相同。但解二次

方程所得之根，常有適合於方程而不適合於問題之解答者，此點須十分注意。

〔例 1〕　將某數之二乘方誤爲二倍，以致答數少 35，試求正確之答數。

〔解〕　設某數爲 x，則依題意得 $x^2-2x=35$，

$$\therefore\quad x^2-2x-35=0。\qquad \therefore\quad (x-7)(x+5)=0,$$

故 $x=7$ 或 -5，而正確之答數爲 7^2 或 $(-5)^2$ 卽 49 或 25。

〔例 2〕　有矩形地面，縱比橫長 14 尺，若縱減 6 尺，橫增 6 尺，則面積比原面積之二倍少 632 方尺。求矩形之縱橫。

〔解〕　設橫爲 x 尺，則縱爲 $x+14$ 尺，依題意得

$$(x+14-6)(x+6)=2x(x+14)-632,$$

去括號，　$x^2+14x+48=2x^2+28x-632,$

$$\therefore\quad x^2+14x-680=0,$$

$$\therefore\quad (x-20)(x+34)=0,$$

故 $x=20$ 或 -34。但負數不合於題意，故 $x=20$，$x+14=34$，而答爲縱 34 尺，橫 20 尺。

〔例 3〕　直角三角形之斜邊爲 40 寸，夾直角二邊之差爲 8 寸。求此二邊之長。

〔解〕　設夾直角之二邊中，小者爲 x 寸，則大者爲 $x+8$ 寸，依畢氏定理，得 $x^2+(x+8)^2=40^2$，化簡得 $x^2+8x-768=0$，

$$\therefore\quad (x-24)(x+32)=0。$$

$$\therefore\quad x=24 \text{ 或 } -32。$$

因負數不合於題意，故 $x=24$，$x+8=32$，而答爲 24 寸與 32 寸。

習題

(1) 解下列各方程:

(a) $3x^2=48$。

(b) $7x^2-8=4x^2+28$。

(c) $(x-3)^2-25=0$。

(d) $(x-15)(x+15)=175$。

(e) $(x+m)(x-m)=2m+1$。

(f) $\dfrac{x^2-19}{5}+\dfrac{x^2-33}{4}=10$。

(2) 解下列各方程:

(a) $x^2-8x+15=0$。　(b) $x^2-3x-40=0$。

(c) $2x^2-7x+3=0$。　(d) $6x^2+5x-56=0$。

(e) $3x^2-4x+1=0$。　(f) $35-3x-2x^2=0$

(g) $\left(\dfrac{3x+4}{5}\right)^2-\dfrac{12}{5}x=8\dfrac{1}{5}$。　(h) $\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{2x-1}{x+6}$。

(3) 計算下列各式:

(a) $5\sqrt{-4}+\sqrt{-9}-3\sqrt{-1}$。

(b) $\sqrt{-5}-4\sqrt{-5}+\sqrt{-20}+2\sqrt{-45}$。

(c) $\sqrt{-25}\sqrt{-36}$。

(d) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$。

(4) 設方程 $x^2+k(x+1)+3=0$ 之兩根相等,求 k 之值。

(5) 方程$(2+k)x^2+2kx+1=0$ 之二根相等，求 k 之值。

(6) k 爲何數，則方程 $(k-4)x^2+(k-2)x+2=0$ 有相等之實根？

(7) 方程 $(m+2)x^2-2mx+1=0$ 之根爲虛爲實或相等，與 m 之値有何關係，試詳論之。

(8) 判別 $x^2+7=4x$ 之根之性質。

(9) 求作二次方程，令其二根爲 $3+2i$，$3-2i$。

(10) 方程 $2x^2-3x+7=0$ 之根爲 α，β，求作以 $2\alpha+\beta$ 及 $\alpha+2\beta$ 爲根之方程。

(11) 已知方程之二根爲 $\frac{4}{3}$，$-\frac{3}{2}$，求作此方程。

(12) 一方程之根爲 $3x^2-4x-1=0$ 之三倍，其方程爲何？

(13) 將下列各式析因式：

(a) $6x^2-19x+15$。　(b) $4x^2-151x+1365$。

(c) $48x^2-38xy+5y^2$。　(d) $5x^2-4x-1$。

(14) 兩數之和爲 18，其積爲 77，求此兩數。

(15) 二數之較爲 12，其平方之和爲 1130，求此二數。

(16) 設相鄰兩整數之積爲 72，求此二數。

(17) 今有連續兩數，其和之平方較其平方之和多 220；問二數爲何？

(18) 有二位之數，其數等於其數字之積之二倍，而其十位之數字比其個位之數字少 3。問原數如何？

(19) 一長方形地與正方形地的面積相等。但長方形的長比正

方形每邊的2倍少6尺,寬比正方形的邊少4尺。求長方形地長寬各幾尺?

(20) 有甲乙二人解 $x^2+px+q=0$, 甲誤書第二項之係數而得3與 -8 之二根,乙誤書第三項而得5與 -7 之二根;問眞正之方程式之根爲何?

第八章　二次聯立方程

二元二次聯立方程

解此類方程，消去其一元後而得二次以上之一元方程者甚多，須用高等代數解之，非本書範圍所能及。今就二元二次聯立方程之能用消去法化爲一元二次方程者，分類說明其解法。

一次與二次之聯立方程解法

從一次方程以一未知數表他一未知數之值，代入二次方程而解之。

〔例〕　解 $2x-y=1\cdots\cdots(1)$　$4xy+3y^2=51\cdots\cdots(2)$

〔解〕　從 (1) 得　$y=2x-1\cdots\cdots(3)$

代入 (2)，　$4x(2x-1)+3(2x-1)^2=51$。

化簡，$20x^2-16x-48=0$，用 4 除，得 $5x^2-4x-12=0$。

$\therefore\quad (x-2)(5x+6)=0\qquad \therefore\quad x=2$ 或 $-1\frac{1}{5}$。

以 $x=2$ 代入(3)，得 $y=2\times2-1=3$。

以 $x=-1\frac{1}{5}$代入(3)，得 $y=2\left(-\frac{6}{5}\right)-1=-3\frac{2}{5}$。

故答有二組：$x=2$，$y=3$ 及 $x=-1\frac{1}{5}$，$y=-3\frac{2}{5}$。

〔注意〕　此例求得 x 後，須代入 (3) 以求 y，若代入 (2) 而求 y，則對於 x 之每一值，y 各有兩值，其中只有一值能適合於 (1)，因 (2) 爲二次方程故也。故解二次方程求得之根，須加以檢驗。

二次與二次之聯立方程解法

(A) 二次項可消去者

〔例〕 解 $x^2+xy-y+1=0$ ………(1)

$2x^2+2xy+3x+3=0$……(2)

〔解〕 $(2)-(1)\times2$，$3x+2y+1=0$，

$$\therefore\quad y=-\frac{3x+1}{2}\cdots\cdots(3)$$

以(3)代入(1)，得 $x^2-\dfrac{3x^2+x}{2}+\dfrac{3x+1}{2}+1=0$。

化簡，$x^2-2x-3=0$， $\therefore\ (x+1)(x-3)=0$，

$\therefore\quad x=-1$ 或 3。

以 $x=-1$ 代入(3)，得 $y=1$。以 $x=3$ 代入(3)，得 $y=-5$。

故答有二組：$x=-1$，$y=1$，或 $x=3$，$y=-5$。

(B) 一方程可析為兩個一次方程者

〔例〕 解 $x^2-3xy+2y^2=0$……(1)　$2xy-y^2=3$……(2)

〔解〕 將(1)析因式，$(x-y)(x-2y)=0$。

$\therefore\quad x=y$ 及 $x=2y$。

以 $x=y$ 代入(2)，得 $2y^2-y^2=3$，

$\therefore\ y^2=3$，$\therefore\ y=\pm\sqrt{3}$ 而 $x=\pm\sqrt{3}$。

以 $x=2y$ 代入(2)，得 $4y^2-y^2=3$，

$\therefore\ 3y^2=3$ $\therefore\ y=\pm1$，而 $x=\pm2$。

故答有四組：$x=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}$；$x=-\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$；

$x=2$，$y=1$；$x=-2$，$y=-1$。

(C) 不含一次項或一次項可以消去者

〔例 1〕　解 $x^2-3xy-y^2=9\cdots\cdots\cdots(1)$

$$2x^2+2xy+3y^2=7\cdots\cdots(2)$$

〔解〕　消去常數項，$(2)\times9-(1)\times7$，得

$$11x^2+39xy+34y^2=0,\quad\therefore\ (x+2y)(11x+17y)=0。$$

$$\therefore\quad x=-2y\ \text{或}\ -\frac{17}{11}y。$$

以 $x=2y$ 代入 (1)，得

$$(-2y)^2-3(-2y)y-y^2=9,$$

$$\therefore\ 9y^2=9,\quad\therefore\ y=\pm1,\quad\text{而}\ x=\mp2。$$

以 $x=-\dfrac{17}{11}y$ 代入 (1)，得

$$\left(-\frac{17}{11}y\right)^2-3\left(-\frac{17}{11}y\right)y-y^2=9,$$

$$\therefore\ 729y^2=9\times11^2,\qquad\therefore\ 27y=\pm(3\times11),$$

$$y=\pm\frac{11}{9},\quad\text{而}\ x=\mp\frac{17}{9}。$$

故答有四組：$x=2,\ y=-1;\quad x=-2,\ y=1;$

$$x=\frac{17}{9},\quad y=-\frac{11}{9};\quad x=-\frac{17}{9},\ y=\frac{11}{9}。$$

〔例 2〕　解 $2x^2-3xy+y^2=4y\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$8x^2+2xy-3y^2=-12y\cdots\cdots(2)$$

〔解〕　消去一次項，$(1)\times3+(2)$，得

$$14x^2-7xy=0,\qquad\therefore\ 2x^2-xy=0,$$

$$\therefore\quad x(2x-y)=0。\qquad\therefore\quad x=0\ \text{或}\ y=2x。$$

以 $x=0$ 代入 (1)，得 $$y^2=4y,$$

$$\therefore\ y=0\ 或\ 4。$$

以 $y=2x$ 代入 (1)，得 $$2x^2-6x^2+4x^2=8x,$$

$$\therefore\ 8x=0,\ \therefore\ x=0,\ 而\ y=0。$$

故答有二組：$x=0,\ y=0;\ x=0,\ y=4$。

有特殊情形之二次聯立方程解法

〔例 1〕　解 $x+y=7\cdots\cdots(1)\quad xy=12\cdots\cdots(2)$

〔解〕　$(1)^2-(2)\times4$，得 $$x^2-2xy+y^2=1,$$

$$\therefore\ (x-y)^2=1,\ \therefore\ x-y=\pm1。$$

以 $x+y=7$ 與 $x-y=1$ 聯立解之，得 $x=4,\ y=3$。

以 $x+y=7$ 與 $x-y=-1$ 聯立解之，得 $x=3,\ y=4$。

故答有二組：$x=4,\ y=3;\ x=3,\ y=4$。

〔例 2〕　解 $x-xy+y=2\cdots\cdots(1)\quad x^2+y^2=12\cdots\cdots(2)$

〔解〕　設 $x+y=u,\ xy=v$，則

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v。$$

從 (1)，$u-v=2\cdots\cdots(3)$，從 (2)，$u^2-2v=12\cdots\cdots(4)$

$(4)-(3)\times2$，得 $u^2-2u-8=0$，$\therefore\ (u+2)(u-4)=0$。

$\therefore\ u=-2$ 或 4。以 $u=-2$ 代入 (3)，得 $v=-4$；

以 $u=4$ 代入 (3)，得 $v=2$。故得

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x+y=-2\\ xy=-4\end{cases}\quad 及\quad (\mathrm{II})\begin{cases}x+y=4\\ xy=2\end{cases}.$$

依例 1 解之，從 (I) 得 $x=-1+\sqrt{5},\ y=-1-\sqrt{5}$；

及 $x=-1-\sqrt{5},\ y=-+1\sqrt{5}$。從 (II) 得

$x=2+\sqrt{2}$, $y=2-\sqrt{2}$；及 $x=2-\sqrt{2}$, $y=2+\sqrt{2}$。

高次聯立方程解法

〔例〕　解 $x+y=5\cdots\cdots(1)$　$x^3+y^3=35\cdots\cdots(2)$

〔解〕　(2)÷(1) 得　$x^2-xy+y^2=7\cdots\cdots(3)$

$(1)^2-(3)$，得　$3xy=18$，$\therefore\ xy=6\cdots\cdots(4)$

(3)－(4)，得 $x^2-2xy+y^2=1$，$\therefore\ x-y=\pm1$。

就 (1) 與 $x-y=1$ 解之，得 $x=3$，$y=2$。

就 (1) 與 $x-y=-1$ 解之，得 $x=2$，$y=3$。

多元聯立方程解法

〔例 1〕　解 $xy=12\cdots\cdots(1)$　$xz=15\cdots\cdots(2)$　$yz=20\cdots\cdots(3)$

〔解〕　(1)×(2)×(3)，$x^2y^2z^2=12\times15\times20$，

$\therefore\ xyz=\pm3\times4\times5\cdots\cdots(4)$

(4)÷(1)，得 $z=\pm5$；(4)÷(2)，得 $y=\pm4$；

(4)÷(3)，得 $x=\pm3$。

故答有二組：$x=3$, $y=4$, $z=5$ 及 $x=-3$, $y=-4$, $z=-5$。

〔例 2〕　解 $x(x+y+z)=2\cdots\cdots(1)$

$y(x+y+z)=4\cdots\cdots(2)$　$z(x+y+z)=3\cdots\cdots(3)$

〔解〕　(1)+(2)+(3)，得 $(x+y+z)^2=9$，

$\therefore\ x+y+z=\pm3\cdots\cdots(4)$

(1)÷(4)，得 $x=\pm\dfrac{2}{3}$。(2)÷(4)，得 $y=\pm\dfrac{4}{3}$。

(3)÷(4)，得　$z=\pm1$。

〔例 3〕　解 $x+y+z=19\cdots\cdots(1)$　$x^2+y^2+z^2=133\cdots\cdots(2)$

$xz=y^2\cdots\cdots(3)$

〔解〕 $(1)^2-(2)$，得 $2(xy+xz+yz)=228$，

$\because$ $xy+xz+yz=114$，即 $y(x+z)+xz=114\cdots\cdots(4)$

從 (1) 得 $x+z=19-y\cdots\cdots(5)$，

以 (3) (5) 代入 (4)，得 $y(19-y)+y^2=114$，

$$\therefore\ 19y=114,\qquad \therefore\ y=6。$$

以 $y=6$ 代入 (3) (5)，得 $x+z=13$，$xz=36$。

聯立解之，得 $x=4$，$z=9$，或 $x=9$，$z=4$。

故答有二組：$x=4$, $y=6$, $z=9$ 及 $x=9$, $y=6$, $z=4$。

二次聯立方程應用題解法

〔例 1〕 有矩形地面，縱減 2 尺，橫增 3 尺，則面積不變。若縱減 5 尺，橫增 9 尺，則面積爲$\frac{3}{4}$。求縱橫各幾何？

〔解〕 設縱爲 x 尺，橫爲 y 尺，則面積爲 xy 方尺。故依題意得

$$(x-2)(y+3)=xy\ \cdots\cdots(1)$$

$$(x-5)(y+9)=\frac{3}{4}xy\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 得 $3x-2y-6=0$，$\therefore\ x=\dfrac{2y+6}{3}\cdots\cdots(3)$

從 (2) 得 $xy+36x-20y-180=0\cdots\cdots(4)$

以 (3) 代入 (4)，得 $\dfrac{y(2y+6)}{3}+12(2y+6)-20y-180=0$。

化簡得 $y^2+9y-162=0$，$\therefore\ (y-9)(y+18)=0$。

$$\therefore\ y=9\ 或\ -18。$$

負數不合題意，故以 $y=9$ 代入 (3) 得 $x=8$。

答縱 8 尺，橫 9 尺。

〔例 2〕　有款 1300 元，依不同之利率分借與甲乙兩戶，一年之利息相等。若甲戶依乙戶利率借出，則一年之利息爲 36 元。若乙戶依甲戶利率借出，則一年之利息爲 49 元。求各戶之借款及年利率。

〔解〕　設甲戶借款 x 元，乙戶借款爲 $1300-x$ 元，甲乙兩戶之年利率各爲 y, z，故得　　$xy=(1300-x)z\cdots\cdots(1)$

$$xz=36\cdots\cdots(2)\qquad (1300-x)y=49\cdots\cdots(3)$$

$(1)\times(2)\times(3)$，　　$49x^2yz=36(1300-x)^2yz$，

因 y, z 各不爲 0，故以 yz 除兩邊，得　$49x^2=36(1300-x)^2$，

$$\therefore\quad 7x=\pm6(1300-x)\qquad \therefore\quad x=600 \text{ 或 } -7800.$$

負數不合題意，故取 $x=600$，代入 (2) (3) 得

$$z=\frac{6}{100},\qquad y=\frac{7}{100}。\text{而 } 1300-x=1300-600=700.$$

故甲戶 600 元，年利率 7 厘，乙戶 700 元，年利率 6 厘。

習　　題

(1) 解下列二次聯立方程：

(a) $\begin{cases}2x-3y=4,\\ x^2-y^2=21.\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}x-y=10,\\ x^2+y^2=25.\end{cases}$

(c) $\begin{cases}2x+3y=4,\\ 2xy+y^2=7y-2.\end{cases}$　　(d) $\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=0,\\ x^2+xy-6=0.\end{cases}$

(e) $\begin{cases}xy+y^2=18,\\x^2-2xy=21。\end{cases}$ (f) $\begin{cases}2x+y^2+3=2y,\\4x-3y^2+6=0。\end{cases}$

(g) $\begin{cases}5x^2+3xy-2y^2=0,\\x^2-y^2+21=0。\end{cases}$ (h) $\begin{cases}x^2-xy-2y^2=0,\\x^2+2xy+3y^2=11。\end{cases}$

(i) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3,\\2x^2-xy-y^2=9。\end{cases}$ (j) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2=9y,\\2x^2-3xy+2y^2=4y。\end{cases}$

(k) $\begin{cases}x^2-5xy+4y^2=22,\\xy=3。\end{cases}$ (l) $\begin{cases}x^2+y^2-xy=48,\\x^2+y^2=3xy-28。\end{cases}$

(2) 解下列高次聯立方程:

(a) $\begin{cases}x^3-y^3=98,\\x-y=2。\end{cases}$ (b) $\begin{cases}x^2y+xy^2=30,\\6x+6y=5xy。\end{cases}$

(c) $\begin{cases}x^4-y^4=240,\\x^2-y^2=12。\end{cases}$

(3) 解下列多元聯立方程:

(a) $\begin{cases}x(y+z)=6,\\y(z+x)=12,\\z(x+y)=10。\end{cases}$ (b) $\begin{cases}xy=8,\\xz=4,\\y^2+z^2=5。\end{cases}$

(c) $\begin{cases}(y+z)(x+y+z)=6,\\(z+x)(x+y+z)=8,\\(x+y)(x+y+z)=-6。\end{cases}$

(4) 二數平方之和爲 90,其積爲 27,求二數。

(5) 有二數,其和與積及平方之差皆相等,求此二數。

(6) 直角三角形之斜邊爲 13 寸,其他二邊之和爲 17 寸;問其

他二邊各長幾何?

(7) 慢車比快車每時少行 1 里，二車同行 72 里，慢車比快車多行 1 時。求快車每時行幾里?

(8) 會員聚餐，若到會者多 3 人，每人多出費 6 角，則共用 39.6 元。若到會者少 2 人，每人少出費 2 角，則共用 23.4 元。求預定到會人數及每人餐費。

(9) 雇工搬運子彈從甲地至乙地，預定 9 次可畢。若增工 7 人，每次每人少搬 2 個，則 8 次可畢。若減工 4 人，每次每人多搬 1 個，則須 10 次可畢。求人數及子彈數。

第九章　分式方程

分式方程 (Fraction equation), **整方程** (Integral equation)

含分式之方程，稱爲分式方程，換言之，卽分式方程之諸項中，必有分母含未知數之分式。若各項對於未知數俱爲整式之方程，則稱爲整方程。例如 $\frac{2x+5}{3x-2}-7x=\frac{1}{3}$ 爲分式方程，$\frac{3}{4}x^2+\frac{3x-1}{7}=6$ 爲整方程。

分式中若分母之值爲 0，則無意義。故分式方程中所含各分式之分母，決不爲 0，卽分母之最低公倍式決不爲 0，解法中須特別注意。

普通分式方程之解法

(1) 以分母之最低公倍式乘兩邊，去其分母而得一整方程。

(2) 解此整方程而求未知數之值。

(3) 在所得未知數之值中，代入原方程之分母而分母不爲 0 者，卽爲所求之根。

〔例 1〕　解 $\frac{2x+1}{3x-2}=\frac{2x-3}{3x-4}$。

〔解〕　去分母，$(2x+1)(3x-4)=(2x-3)(3x-2)$，

去括號，$6x^2-5x-4=6x^2-13x+6$，　$\therefore\ 8x=10$，　$\therefore\ x=\frac{5}{4}$。

此 x 之值不使分母爲 0，故 $\frac{5}{4}$ 爲所求之根。

〔例 2〕　解 $\dfrac{3}{x^2-5x+6}-\dfrac{9}{x^2-7x+10}=\dfrac{x}{x^2-8x+15}$。

〔解〕　將原方程之各分母析因式，

$$\frac{3}{(x-2)(x-3)}-\frac{9}{(x-2)(x-5)}=\frac{x}{(x-3)(x-5)}。$$

以分母之最低公倍式 $(x-2)(x-3)(x-5)$ 乘兩邊，得

$3(x-5)-9(x-3)=x(x-2)$。化簡，$x^2+4x-12=0$。

$\therefore\ (x+6)(x-2)=0,\qquad \therefore\ x=2$ 或 -6。

因 $x=2$ 能使原方程之分母爲 0，故非其根。$x=-6$ 不使分母爲 0，故爲所求之根。

〔注意〕　此例中 $x=2$ 稱爲增根 (Extraneous root)。如將原方程移項合併，則得

$$\frac{3(x-5)-9(x-3)-x(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-5)}=0,$$

$$\therefore\qquad \frac{x^2+4x-12}{(x-2)(x-3)(x-5)}=0,$$

$$\therefore\qquad \frac{(x+6)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-5)}=0。$$

故此增根是由分母分子之公因式未約去而發生，並非原方程之根。

〔例 3〕　解 $\dfrac{2x^2}{x^2-4}-\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{x}{x+2}+1$。

〔解〕　將原方程之第二項變形，寫作

$$\frac{2x^2}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=\frac{x}{x+2}+1,$$

以分母之最低公倍式 (x^2-4) 乘兩邊，得

$$2x^2+x(x+2)=x(x-2)+x^2-4。$$

化簡，　　$x^2+4x+4=0$，

$\therefore\ (x+2)^2=0$，　$\therefore\ x+2=0$，　$\therefore\ x=-2$。

此 $x=-2$ 能使原方程之分母爲 0，故非所求之根，卽原方程無根或不可能。

特殊形狀之分式方程解法

有特殊形狀之分式方程，亦可不去分母而解法較簡。

〔例 1〕　解 $\dfrac{1}{3x+2}-\dfrac{1}{3x+3}=\dfrac{1}{3x+7}-\dfrac{1}{3x+8}$。

〔解〕　兩邊分別計算，

$$\frac{3x+3-(3x+2)}{(3x+2)(3x+3)}=\frac{3x+8-(3x+7)}{(3x+7)(3x+8)}。$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(3x+2)(3x+3)}=\frac{1}{(3x+7)(3x+8)}。$$

故 $(3x+2)(3x+3)=(3x+7)(3x+8)$，化簡，$30x=-50$，

$\therefore\ x=-\dfrac{5}{3}$。此值不使原方程之分母爲 0，故爲所求之根。

〔例 2〕　解 $\dfrac{4x-3}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{4x-15}{x-4}+\dfrac{x+5}{x+4}$。

〔解〕　各項中以分母除分子，

$$\left(4+\frac{1}{x-1}\right)+\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=\left(4+\frac{1}{x-4}\right)+\left(1+\frac{1}{x+4}\right),$$

卽　　$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+4},$$

移項，　$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+1}$，

$$\therefore\quad \frac{-3}{(x-1)(x-4)}=\frac{-3}{(x+4)(x+1)},$$

$$\therefore\quad (x+4)(x+1)=(x-4)(x-1),$$

$$\therefore\quad x^2+5x+4=x^2-5x+4,$$

$$\therefore\quad x=0。$$

此値不使原方程之分母爲 0，故爲所求之根。

〔例 3〕　解 $\dfrac{4-x}{3x+5}+\dfrac{10+6x}{4-x}=-\dfrac{19}{3}$。

〔解〕　原方程爲 $\dfrac{4-x}{3x+5}+\dfrac{2(3x+5)}{4-x}=-\dfrac{19}{3}$。

設 $\dfrac{4-x}{3x+5}=y$，則得 $y+\dfrac{2}{y}=-\dfrac{19}{3}$，去分母，$3y^2+19y+6=0$，

$\therefore\ (y+6)(3y+1)=0$，　　$\therefore\ y=-6$ 或 $-\dfrac{1}{3}$。

解 $\dfrac{4-x}{3x+5}=-6$，得 $x=-2$。解 $\dfrac{4-x}{3x+5}=-\dfrac{1}{3}$，得 $17=0$ 爲不可能。

$x=-2$，不使原方程之分母爲 0，故爲所求之根。

分式聯立方程解法

先去各分式方程之分母，再依整方程解之；在特別情形，亦可不去分母。但求得未知數之值，須不使原方程之分母爲 0 者，始爲所求之根。

〔例 1〕 解 $\frac{2}{x+2}=\frac{3}{y+3}$ ………(1)

$$\frac{3x+4}{2x-5}-\frac{3y-2}{2y-9}=0……(2)$$

〔解〕 從 (1) 得 $2(y+3)=3(x+2)$， $\therefore\ 2y=3x$……(3)

從 (2) 得 $(3x+4)(2y-9)-(3y-2)(2x-5)=0$，

$\therefore\ 23y-23x-46=0$，　　$\therefore\ y-x=2$……(4)

解 (3) (4)，得 $x=4$，$y=6$。此 x，y 之值，不使分母為 0，故為所求之根。

〔例 2〕 解 $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y+1}=1$……(1)

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2}{y+1}=1……(2)$$

〔解〕 設 $\frac{1}{x-1}=X$，$\frac{1}{y+1}=Y$，則從 (1)，

$2X+3Y=1$……(3)　　$3X+2Y=1$……(4)

$(4)\times3-(3)\times2$，得 $5X=1$，$\therefore\ X=\frac{1}{5}$，

代入 (3)，得 $\frac{2}{5}+3Y=1$，　$\therefore\ Y=\frac{1}{5}$。

解 $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{5}$，$\frac{1}{y+1}=\frac{1}{5}$，得 $x=6$，$y=4$。

此 x，y 之值，不使原方程之分母為 0，故為所求之根。

分式方程應用題解法

〔例 1〕 某人以現款 1750 元買進某公司股票若干股，留起

10 股，其餘賣出，賣價比買價高 3 元，計得 1680 元。求買進時之股數。

〔解〕　設買進 x 股，則賣出 $x-10$ 股，每股買價爲 $\frac{1750}{x}$ 元，賣價爲 $\frac{1680}{x-10}$ 元。故 $\frac{1750}{x}+3=\frac{1680}{x-10}$，

去分母　　$1750(x-10)+3x(x-10)=1680x$，

化簡　　$3x^2+40x-17500=0$，

$$\therefore\ (x-70)(3x+250)=0,\qquad \therefore\ x=70\ \text{或}\ -\frac{250}{3}。$$

此二値皆不使原方程之分母爲 0，但股數必爲正整數，故棄 $-\frac{250}{3}$ 而答爲 70 股。

〔例 2〕　甲乙兩地相距 60 里，A 從甲往乙，5 時後，B 從乙往甲。二人在途中相會後，再過 6 時，A 至乙而 B 至甲。求各人每時之速度。

〔解〕　設每時速度 A 爲 x 里，B 爲 y 里。因相會後 6 時，二人各到目的地，故相會處距甲爲 $6y$ 里，距乙爲 $6x$ 里，故得

$$6x+6y=60\cdots\cdots(1)\qquad \frac{6y}{x}-5=\frac{6x}{y}\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 得　　$x+y=10$，　　$\therefore\ x=10-y\cdots\cdots(3)$

從 (2) 得　　$6y^2-5xy-6x^2=0\cdots\cdots(4)$

以 (3) 代入 (4)，$6y^2-50y+5y^2-600+120y-6y^2=0$，

$$\therefore\ 5y^2+70y-600=0,\qquad \therefore\ y^2+14y-120=0,$$

$\therefore\ (y-6)(y+20)=0,\qquad \therefore\ y=6$ 或 -20。

負數不合理，故取 $y=6$，而 $x=4$。即 A 每時 4 里，B 每時 6 里。

文字方程 (Literal equation)

以文字表已知數全部或一部之方程，稱爲文字方程。文字方程之解，可爲同類問題之一般解。又從文字方程可得一般方程求根之公式。解文字方程例如 $ax=ab$，設 $a\neq 0$，則以 a 除兩邊，得 $x=b$，若 $a=0$，則無論 x 爲何值，方程皆能成立。

〔例 1〕 解 $ax+by=c\cdots\cdots(1)\quad a'x+b'y=c'\cdots\cdots(2)$

〔解〕 $(1)\times b'-(2)\times b,\quad (ab'-a'b)x=cb'-c'b$。

又 $(2)\times a-(1)\times a',\quad (ab'-a'b)y=ac'-a'c$。

如 $ab'-a'b\neq 0$，則從上之二方程得

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}。$$

此爲二元一次聯立方程根之公式。無論如何之一元二次聯立方程，皆可依此公式求根。若 $ab'-a'b=0$，則方程爲不定或不能。

用公式解 $3x+2y=7$，$4x-8y=-12$，則 $a=3$，$b=2$，$c=7$，$a'=4$，$b'=-8$，$c'=-12$，得

$$x=\frac{7\times(-8)-(-12)\times 2}{3\times(-8)-4\times 2}=\frac{-32}{-32}=1,$$

$$y=\frac{3\times(-12)-4\times 7}{3\times(-8)-4\times 2}=\frac{-64}{-32}=2。$$

〔例 2〕 解 $\dfrac{x-a}{x+b}+\dfrac{x-b}{x+a}=2$。

〔解〕 兩邊各減 2，$\frac{x-a}{x+b}-1+\frac{x-b}{x+a}-1=0$，

$$\therefore \quad \frac{-(a+b)}{x+b}+\frac{-(a+b)}{x+a}=0。$$

設 $a+b\neq 0$，則以 $-(a+b)$ 除兩邊，$\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a}=0$。去分母，$x+a+x+b=0$，$\therefore\ x=-\frac{a+b}{2}$。以此值代入原方程之分母，$x+b=-\frac{a+b}{2}+b=\frac{b-a}{2}$，$x+a=-\frac{a+b}{2}+a=\frac{a-b}{2}$。

故 $a+b\neq 0$，$a-b\neq 0$ 時，$-\frac{a+b}{2}$為原方程之根。

習 題

(1) 解下列分式方程：

(a) $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{2x+1}$。

(b) $\frac{4}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1-x}=0$。

(c) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{x-1}{x^2-4}$。

(d) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2-x}=\frac{3}{x-3}$。

(e) $\frac{x+2}{x-3}+\frac{2}{3}=\frac{x-3}{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$。

(f) $\dfrac{6x+15}{8x-15}-\dfrac{1+8x}{15}=\dfrac{1-x}{3}+\dfrac{3-x}{5}$。

(g) $\dfrac{2x-3}{3x-5}+\dfrac{3x-5}{2x-3}=\dfrac{5}{2}$。

(h) $\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{2x-1}{x+6}$。

(2) 解下列分式聯立方程:

(a) $\dfrac{x+y-1}{x-y+2}=3$, $\dfrac{y-x-1}{x-y+1}=1$。

(b) $\dfrac{3x+1}{2}=y+1$, $\dfrac{y+x}{y-x}=6$。

(c) $\dfrac{3x+y-1}{x-y+2}=\dfrac{6}{7}$, $\dfrac{x+9}{y+4}=\dfrac{x+3}{y+3}$。

(d) $\dfrac{3}{2x}-\dfrac{7}{y}=18$, $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{2}{y}=3$。

(e) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\dfrac{1}{2}$, $x+y=6$。

(f) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}$, $x^2-y^2=3$。

(3) 有汽車依每時一定之速度走 600 公里;若速度每時增 10 公里,則時間可少 2 時。求此汽車每時之速度。

(4) 兩車同行 200 里,甲車比乙車每小時快 7 里,而先到 1 小時45 分鐘,求兩車之速度。

(5) 甲乙二人合作 20 日可成之工程,如令乙獨作之,則須比

甲獨作之要多 9 日。問甲乙獨作時各要幾日？

(6) 三人合作一事，預定若干日可成。若甲一人獨作，則要比原定日期多 6 日。乙一人獨作，則要比甲獨作日期多 9 日。丙一人獨作，則要原定日期之 2 倍。求各人獨作完成之日數。

(7) 團體旅行，預定費用 200 元，由各人勻擔。臨時有 10 人不到，因此參加者每人要多出 1 元。求預定人數。

(8) 解下列文字方程：

(a) $ax+5a=a^2+6+3x$，

(b) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{x}+\frac{a}{y}=1$。

(c) $(a+b)x-(a-b)y=4ab$，

$(a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2$。

(d) $\frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}=a^2+b^2$，

$\frac{a-b}{x}+\frac{a+b}{y}=a^2-b^2$。

第十章　根式方程

根式定理

設 a，b，c，d 爲有理數，而 $\sqrt{b}$，$\sqrt{d}$ 爲無理數，若 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，則 $a=c$，$b=d$。

〔證〕 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ 移項，$a-c+\sqrt{b}=\sqrt{d}$。兩邊各自乘，$(a-c)^2+b+2(a-c)\sqrt{b}=d$。

$$\therefore\quad 2(c-a)\sqrt{b}=(a-c)^2+b-d。$$

然左邊爲無理數，右邊爲有理數，若此等式能成立，非兩邊各等於0不可。如兩邊各等於0，則 $c=a$，而 $b=d$。

根式 $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ 之變形

設 $$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

兩邊各平方，$a\pm\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$，

故 $x+y=a\cdots\cdots(1)$ 　　$2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$ 即 $4xy=b$，

故 $$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b,$$

$$\therefore\quad x-y=\sqrt{a^2-b}\cdots\cdots(2)$$

解 (1) (2) 得

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},\quad y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2},$$

故 $$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}。$$

此公式中若 a^2-b 爲完全平方，則右邊比左邊較簡。

〔例 1〕 化簡 $\sqrt{11-2\sqrt{30}}$。

〔解〕 以 $a=11$，$b=2^2\times30=120$ 代入上之公式，得

$$\sqrt{11-2\sqrt{30}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{11^2-120}}{2}}-\sqrt{\frac{11-\sqrt{11^2-120}}{2}}$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{5}。$$

〔注意〕 此例與上之演算比較，$x+y=11$，$xy=30$，此二方程，可由視察而得 $x=6$，$y=5$。故此類問題，易於化簡。

〔例 2〕 化簡 $\sqrt{9+3\sqrt{5}}$。

〔解〕 以 $a=9$，$b=3^2\times5=45$ 代入公式，得

$$\sqrt{9+3\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{9^2-45}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{9^2-45}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{9+6}{2}}+\sqrt{\frac{9-6}{2}}=\sqrt{\frac{15}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{30}+\sqrt{6}}{2}。$$

〔例 3〕 化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{11+\sqrt{120}}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-\sqrt{120}}}$。

〔解〕 原式 $=\dfrac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{30}}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{6}}{6-5}=2\sqrt{6}。$$

根式$\sqrt{a\pm ib}$之變形

設　　$$\sqrt{a\pm ib}=\sqrt{x}\pm i\sqrt{y},$$

兩邊各平方，　$a\pm ib=x-y\pm 2i\sqrt{xy}$。

故　　$x-y=a\cdots\cdots(1)$　$2i\sqrt{xy}=ib$，　而　$4xy=b^2$；

故　　$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=a^2+b^2,$$

$$\therefore\quad x+y=\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots(2)$$

解(1)(2)得

$$x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\quad y=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

故　$$\sqrt{a\pm ib}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}。$$

此公式中，若a^2+b^2為完全平方，則右邊較簡。

〔例〕　化簡　$\sqrt{-1\pm 4i\sqrt{5}}$，

〔解〕　以　$a=-1$，$b=\sqrt{4^2\times 5}=\sqrt{80}$　代入公式，得

$$\sqrt{-1\pm 4i\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{80})^2}-1}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{80})^2}+1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{9-1}{2}}\pm i\sqrt{\frac{9+1}{2}}=\sqrt{4}\pm i\sqrt{5}=2\pm i\sqrt{5}。$$

根式方程（Radical equation）

方程中含有未知數之根式者，稱為根式方程或無理方程，解法之步驟如下：

(1) 將含未知數之根式，移至方程之一邊，其餘移至另一邊。

(2) 兩邊各平方；若平方一次後，尙有未知數之根式，則移項再平方。

(3) 解最後所得之整方程。

(4) 以未知數之各値代入原方程，能適合者卽爲所求之根，否則爲增根，應捨去。

〔例 1〕　解 $x+\sqrt{x+5}=7$。

〔解〕　移項，$\sqrt{x+5}=7-x$。

兩邊平方，$x+5=49-14x+x^2$，卽 $x^2-15x+44=0$，

$\therefore\ (x-4)(x-11)=0$。　　$\therefore\ x=4$ 或 11。如 $x=4$，則原方程左邊爲 $4+\sqrt{4+5}=7$，故 $x=4$ 爲所求之根。如 $x=11$，則原方程左邊爲 $11+\sqrt{11+5}=15$，故 $x=11$ 非所求之根。又若取 $11+\sqrt{11+5}=11-4=7$，雖左右兩邊亦相等，但在根式方程中，平方根常取正數，故 $x=11$ 非原方程之根，卽爲增根。

〔例 2〕　解 $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+7}=6$。

〔解〕　移項，$\sqrt{3x-5}=6-\sqrt{3x+7}$。

兩邊平方，　$3x-5=36+3x+7-12\sqrt{3x+7}$。

化簡，$\sqrt{3x+7}=4$。兩邊再平方，$3x+7=16$，$\therefore\ x=3$。此 3 爲所求之根。

〔例 3〕　解 $\sqrt{3x-1}-\sqrt{4x-5}=-\sqrt{x-4}$。

〔解〕

兩邊平方，$3x-1+4x-5-2\sqrt{(3x-1)(4x-5)}=x-4$。

$\therefore\quad \sqrt{(3x-1)(4x-5)}=3x-1$。

兩邊再平方，　$(3x-1)(4x-5)=9x^2-6x+1$。

去括號化簡　　　$3x^2-13x+4=0$。

$\therefore\quad (x-4)(3x-1)=0,\qquad \therefore\quad x=4$ 或 $\frac{1}{3}$。

此 4 及 $\frac{1}{3}$ 皆爲所求之根。

〔例 4〕　解　$x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$。

〔解〕　將 x^2-7x 與根號內之 $x^2-7x+18$ 比較，只少 $+18$ 一項，故若兩邊各加 18，即可視 $\sqrt{x^2-7x+18}$ 爲一文字而解之。

兩邊加 18，　$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}=24+18$，

$\therefore\quad (x^2-7x+18)+\sqrt{x^2-7x+18}-42=0$。

析因式，　$(\sqrt{x^2-7x+18}+7)\ (\sqrt{x^2-7x+18}-6)=0$。

$\therefore\ \sqrt{x^2-7x+18}=6$ 或 -7。但 $\sqrt{x^2-7x+18}$ 不能表負數，即不適合於原方程，　故取　$\sqrt{x^2-7x+18}=6$。兩邊平方，$x^2-7x+18=36$。　$\therefore\ x^2-7x-18=0$。　$\therefore\ (x-9)(x+2)=0$，$\therefore\ x=9$ 或 -2。此 9 及 -2 皆爲所求之根。

根式方程應用題解法

〔例〕　周圍 30 寸面積 30 方寸之直角三角形，其三邊之長各幾寸？

〔解〕　設夾直角二邊之長爲 x 寸 y 寸，則斜邊之長爲 $\sqrt{x^2+y^2}$ 寸，面積爲 $\frac{xy}{2}$ 方寸。故得

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=30\cdots\cdots(1)\qquad xy=60\cdots\cdots(2)$$

從 (1)，　$\sqrt{x^2+y^2}=30-(x+y)$，

兩邊平方　$x^2+y^2=900-60(x+y)+x^2+y^2+2xy$。

$\therefore \quad 2xy-60(x+y)+900=0$，

以 (2) 代入，　$2\times 60-600(x+y)+900=0$。

化簡，$x+y=17\cdots\cdots(3)$　解 (2) (3)，得 $x=12$，$y=5$，此二值俱能滿足題意，故 $\sqrt{x^2+y^2}=13$。卽三邊爲 5 寸，12 寸與 13 寸。

習　題

(1) 化簡下列各式：

(a) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$。　(b) $\sqrt{16+2\sqrt{60}}$。

(c) $\sqrt{2m-2\sqrt{m^2-n^2}}$。　(d) $\sqrt{18-8\sqrt{5}}$。

(e) $\sqrt{5-12i}$。　(f) -1

(g) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{24-8\sqrt{5}}$。

(h) $\dfrac{1}{\sqrt{14+2\sqrt{45}}}+\dfrac{1}{\sqrt{14-2\sqrt{45}}}$。

(i) $\dfrac{\sqrt{45}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$。

(j) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$。

(2) 解下列各方程：

(a) $x^4-6x^2+1=0$。

(b) $x^4+1=10x^2$。

(3) 解下列各根式方程：

(a) $x-7-\sqrt{x-5}=0$。

(b) $\sqrt{3x^2-5x-1}-x=2$。

(c) $\sqrt{x+36}-\sqrt{x}=2$。

(d) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}$。

(e) $\sqrt{x+9}=\sqrt{2x+35}-\sqrt{x+2}$。

(f) $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$。

(g) $x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x+7}-8=0$。

(h) $3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0$。

(4) 有大小兩數，和為65，正平方根之差為3。求此二數。

(5) 有直角三角形，夾直角二邊之長，相差5寸，周圍60寸。求三邊之長。

第十一章　不等式

不等式 (Inequality)

(1) 表示一式大於或小於他式(或數)之式,稱爲不等式。例如

$3x+8>7\cdots\cdots(1)$　$x-6<2\cdots\cdots(2)$　$a^2+b^2>2ab\cdots\cdots(3)$

皆爲不等式,其中 $>$, $<$ 稱爲不等號(Sign of inequality),尖所向之一邊較小,口所向之一邊較大。

(2) 兩個不等式中之不等號,口向同側者稱同向,口向異側者爲異向。如上三例中,(1)與(3)爲同向,(1)與(2)爲異向

(3) 不等式中之文字,無論以任何實數值代入常能成立者,稱絕對不等式 (Absolutely inequality),僅限於以特別值代入方能成立者,稱爲條件不等式 (Conditional inequality)。

(4) 虛數不能比較大小,故不等式中所論之數,以實數之範圍爲限。

不等式性質

(1) 二數之大小,可從其差之爲正或負決定之。例如

設 $a>b$, 則 $a-b>0$; 設 $a<b$, 則 $a-b<0$。

反之,設 $a-b>0$, 則 $a>b$; 設 $a-b<0$, 則 $a<b$。

(2) 不等式之兩邊,各加或減同數,不等號之向不變。例如

設 $a>b$, 則 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$。

由此性質,可將不等式之某項變號,從一邊移至他邊。

(3) 不等式之兩邊,以同一正數乘除,不等號之向不變。例如

設 $a>b$, $n>0$, 則 $na>nb$, $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$。

(4) 不等式之兩邊，以同一負數乘除，則不等號變向。例如

設 $a>b$, $m<0$, 則 $ma<mb$, $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$。

(5) 不等式之兩邊皆變號，則不等號變向。例如

設 $a-b>c-d$, 則 $b-a<d-c$。

條件不等式解法

〔例 1〕 解 $\frac{1}{2}(x-3)<\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}$。

〔解〕 以 12 乘兩邊, $6x-18<9x-4$,

$\therefore\ 9x-6x>4-18$, $\therefore\ 3x>-14$, $\therefore\ x>-\frac{14}{3}$。

〔注意〕 求不等式中未知數之值，亦與解方程相仿，但求得之值，只能定其大於或小於某數之界限。

〔例 2〕 解 $3-4x<7\cdots\cdots(1)$ $5x+10<20\cdots\cdots(2)$

〔解〕 從 (1), $4x>3-7$, $\therefore\ 4x>-4$, $\therefore\ x>-1$。

從 (2), $5x<20-10$, $\therefore\ 5x<10$, $\therefore\ x<2$。

故 $-1<x<2$。

〔例 3〕 解聯立不等式: $2x+5y>25\cdots\cdots(1)$

$2x-3y=1\cdots\cdots(2)$

〔解〕 $(1)-(2)$, $8y>24$, $\therefore\ y>3$,

$(1)\times3+(2)\times5$, $16x>80$, $\therefore\ x>5$。

〔例 4〕　解二次不等式 $x^2+2x>24$。

〔解〕　移項，$x^2+2x-24>0$。左邊析因式，$(x-4)(x+6)>0$，故兩因式必同爲正或同爲負，卽

$$(1)\begin{cases}x-4>0\\x+6>0\end{cases}\quad 及 \quad (2)\begin{cases}x-4<0\\x+6<0。\end{cases}$$

從 (1) 得 $x>4$，$x>-6$。此二式須同時成立。但 $x>4$，能滿足 $x>-6$，而 $x>-6$ 不能滿足 $x>4$，故 $x>4$。

又從 (2) 得 $x<4$，$x<-6$，同理，$x<-6$，能滿足 $x<4$，故 $x<-6$。

故答爲 $x>4$，$x<-6$，換言之，卽 x 在 -6 至 4 之間無滿足原式之值。

〔例 5〕　解 $\dfrac{3}{x^2-3x-10}>0$。

〔解〕　因左邊大於 0，故分母分子必爲同號，卽

$$x^2-3x-10>0, \quad \therefore \ (x+2)(x-5)>0,$$

故 $x>5$，及 $x<-2$。

絕對不等式證法

〔例〕　證明 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$。

〔證〕　$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

因 a, b, c 為實數,故 $(a-b)^2>0$, $(b-c)^2>0$, $(c-a)^2>0$。

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)>0,$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca。$$

不等式證明題

〔例 1〕 證明 $x^2+10x+29>0$。

〔解〕 $x^2+10x+29=x^2+10x+25+4=(x+5)^2+4$。

因 x 為實數,故 $(x+5)^2\geqq 0$, $\therefore\ (x+5)^2+4>0$。

故 $x^2+10x+29>0$。

〔注意〕 如 $x=-5$, 則 $x+5=0$, 而 $x^2+10x+29$ 有最小值 4。

〔例 2〕 對於 x 之實數值,求二次式 $8-6x-x^2$ 之最大值。又此時 x 之值如何?

〔解〕 設 $8-6x-x^2=m$, 則 $x^2+6x+m-8=0$, 因 x 為實數,故判別式必須為正或 0, 即 $6^2-4(m-8)\geqq 0$,

$\therefore\quad 9-m+8\geqq 0\quad \therefore\quad m\leqq 17$。故原式等於 17 時為最大。

又此時判別式為 0,故方程有等根,即 $x=-\dfrac{6}{2}=-3$。

〔例 3〕 設二次方程 $x^2+(m+1)x-4(m-2)=0$ 之根為實數,求 m 所取值之範圍。

〔解〕 因此方程有實根,其必要且充分之條件,係判別式為正或 0, 即 $4(m+1)^2+4^2(m-2)\geqq 0$,

$\therefore\ (m+1)^2+4(m-2)\geqq 0$, $\quad\therefore\ m^2+6m-7\geqq 0$,

$\therefore\ (m-1)(m+7)\geqq 0$, $\quad\therefore\ m\geqq 1$ 及 $m\leqq -7$。

〔例 4〕　設 x 爲實數，試證 $\frac{x^2-3x+2}{31x-x^2-30}$ 必可取實數值。

〔解〕　設 $\frac{x^2-3x+2}{31x-x^2-30}=k$，則 $x^2-3x+2=k(31x-x^2-30)$，

化簡，$(1+k)x^2-(3+31k)x+2+30k=0$。

因 x 爲實數，故 $(3+31k)^2-4(1+k)(2+30k)\geqq 0$，即

$$841k^2+58k+1\geqq 0,\qquad \therefore\ (29k+1)^2\geqq 0$$

此式對於 k 之任何實數値皆能成立，故原式必可取實數値。

不等式應用題解法

〔例〕　聚餐會之費用，由與會者派出。若每人出 2.5 元，則多餘 3.5 元。若每人出 2.4 元，則最後一人祇須出 0.55 元以下。求與會者人數之範圍。

〔解〕　設與會者 x 人，則費用總數爲 $(2.5x-3.5)$ 元。又每人出 2.4 元，則 $(x-1)$ 人所出之總數爲 $2.4(x-1)$ 元。故最後一人所出爲 $(2.5x-3.5)-2.4(x-1)$ 元；依此得不等式

$$0.55>(2.5x-3.5)-2.4(x-1)\geqq 0,$$

$$\therefore\ 0.55>0.1x-1.1>0,\qquad \therefore\ 5.5\geqq x-11>0。$$

解 $5.5\geqq x-11$，得 $x\leqq 16.5$，解 $x-11\geqq 0$，得 $x\geqq 11$。

因 x 爲人數，即必爲正整數，故 x 爲 11 至 16 間之正整數，即與會者爲 11 人，12 人，13 人，14 人，15 人，16 人。

習　題

(1) 解下列不等式：

(a) $5x-2<7x+4$。 (b) $\frac{1}{5}x-6x>\frac{1}{3}-\frac{4}{5}x$。

(c) $\frac{5x-6}{5}-\frac{3x}{4}<\frac{x-9}{10}$。 (d) $ax-b>cx-d$。

(2) 求下列各組不等式中之公共解答:

(a) $2(1-x)>3x+7$, $3x+2<5x+8$。

(b) $9x-23>2x+5$, $5x-7<2x+8$。

(3) 解下列聯立不等式:

(a) $7-5x=3y$, $3x+2y>4$。 (b) $x=y+4$, $x-2y>8$。

(4) 解下列不等式:

(a) $3x^2+4x-7<0$。 (b) $\frac{5}{x^2-5x-6}>0$。

(5) 問 x 爲何值時,不等式 $\frac{3-x}{x+2}>1$ 能成立?

〔提示〕 以 $(x+2)^2$ 乘兩邊,再化簡解之。

(6) 設 $x>y>0$, 證 $\frac{1}{2}(x+y)>\sqrt{xy}$。

(7) 設 a, b, c 爲不等之正整數,證 $a^3+b^3+c^3>3abc$。

(8) 設 a, b, c 爲不等之正實數,求證

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}>6。$$

(9) 對於 x 之實數值,求 $x^2-8x+54$ 之最小值。又求此時 x 之值。

(10) 以款賑災,若每人給 0.5 元,則多 3.2 元。若每人給 0.8 元,則分到最後一人不及 0.8 元。求災民人數之範圍。

第十二章　比，比例與變數

比 (Ratio)

(1) 某數（或量）a 為他數（或量）b 幾倍之關係，稱為 a 對於 b 之比，以 $a:b$ 表之，其 a 稱前項 (Antecedent)，b 稱後項 (Consequent)。

(2) a 為 b 幾倍之關係，以 b 除 a 定之，分式 $\frac{a}{b}$ 之大小，稱為比 $a:b$ 之值。比之值或單稱比，$a:b$ 可取 $\frac{a}{b}$ 代用。

比之性質

(1) 比之兩項，以不等於 0 之同數乘之或除之，比之值不變。

(2) 同種類二量之比，與所用之單位無關係。

正比 (Direct ratio) 反比 (Inverse ratio)

(1) 交換比之兩項所得之比，稱為原比之反比，例如 $b:a$ 為 $a:b$ 之反比。

(2) 對於反比稱原比為正比。

(3) 比與反比之積常為 1。

(4) $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ 為 $a:b$ 之反比。

複比 (Compound ratio)

(1) 二以上之比，以其前項之積為前項，後項之積為後項，所得之比，稱為此諸比之複比。如 $a:b$ 與 $c:d$ 之複比為 $ac:bd$。

(2) 二個同比之複比,稱爲二乘比(Duplicate ratio),三個同比之複比稱爲三乘比(Triplicate ratio)。

(3) 複比之值,等於各比值之積。

(4) 設 $a, b, c, \cdots\cdots k, l$ 等數中,順次每取其二作諸比 $a:b$, $b:c, \cdots\cdots k:l$,此諸比所成之複比,等於 $a:l$。

比之問題

〔例 1〕 設 $9x^2-3xy-2y^2=0$, 求 $x:y$。

〔解〕 左邊析因式, $(3x+y)(3x-2y)=0$。

從 $3x+y=0$, 得 $3x=-y$, 兩邊以 $3y$ 除之, $\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{3}$。

從 $3x-2y=0$, 得 $3x=2y$, 兩邊以 $3y$ 除之, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$。

故答爲 $-1:3$ 或 $2:3$,

〔例 2〕 設 a, b, x 爲正,則 $a:b$ 與 $a+b:b+x$ 之大小如何?

〔解〕 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+x}{b+x}=\dfrac{a(b+x)-b(a+x)}{b(b+x)}=\dfrac{(a-b)x}{b(b+x)}$。

因 b, x 爲正,故分母爲正。

如 $a>b$, 則 $\dfrac{(a-b)x}{b(b+x)}>0$, $\therefore\ a:b>a+x:b+x$。

如 $a<b$, 則 $\dfrac{(a-b)x}{b(b+x)}<0$, $\therefore\ a:b<a+x:b+x$。

如 $a=b$, 則 $\dfrac{(a-b)x}{b(b+x)}=0$, $\therefore\ a:b=a+x:b+x$。

〔例 3〕　甲乙二人收入之比如 4:3，支出之比如 8:5。一年間兩人各儲蓄 1000 元。問兩人之收入各幾何？

〔解〕　設甲乙兩人之收入，各爲 $4x$，$3x$ 元，支出爲 $8y$，$5y$ 元，則得

$$4x-8y=1000\cdots\cdots(1)\qquad 3x-5y=1000\cdots\cdots(2)$$

$(2)\times 8-(1)\times 5,\qquad 4x=3000,\qquad \therefore\quad x=750,$

而　$4x=3000,\quad 3x=2250$。

故兩人之收入爲甲 3000 元，乙 2250 元。

比例 (Proportion)

(1) 設 $a:b=c:d$，則稱 a，b，c，d 成比例，a，d 稱比例之外項 (Extremes)，b，c 稱內項 (Means)。

(2) 設 $a:b=b:c$，則 b 稱爲 a，c 之比例中項 (Mean proportional)，c 稱爲 a，b 之第三比例項 (Third proportional)。

(3) 比例中外項之積，等於內項之積。

(4) 設二數 a，d 之積等於二數 b，c 之積，則 a，b，c，d 成比例。

(5) 設 $a:b=c:d$，則

(a) $a:c=b:d$ 及 $d:b=c:a$，稱爲更迭定理 (Proportion by alternation)。

(b) $b:a=d:c$，稱爲反轉定理 (Proportion by inversion)。

(c) $a+b:b=c+d:d$，稱爲合比定理 (Proportion by composition)。

(d) $a-b:b=c-d:d$，稱爲分比定理 (Proportion by division)。

(e) $a+b:a-b=c+d:c-d$，稱爲合分比定理 (Proportion by composition and division)。

(6) 求比例中之未知項，稱爲解比例。

〔例 1〕 解 $6+x:3+2x=10-x:13-3x$。

〔解〕 $(6+x)(13-3x)=(3+2x)(10-x)$。

$\therefore\quad 78-5x-3x^2=30+17x-2x^2$，

$\therefore\quad x^2+22x-48=0$，　$\therefore\quad (x-2)(x+24)=0$。

故　$x=2$ 或 -24。

〔例 2〕 設 $a:b=c:d$，試證 $a^2+b^2:c^2+d^2=b^2:d^2$。

〔解〕 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，兩邊平方，$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{d^2}$。

依合比定理，　$\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=\dfrac{c^2+d^2}{d^2}$。

交換內項，　$\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\dfrac{b^2}{d^2}$。

〔別解〕 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，則 $a=bk$，$c=dk$。

$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2k^2+b^2}{d^2k^2+d^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{d^2(k^2+1)}=\frac{b^2}{d^2}。$$

〔例 3〕 設 $a:b=c:d$，試證 $\dfrac{a^2-c^2}{ab-cd}=\dfrac{ab+cd}{b^2+d^2}$。

〔解〕 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, 則 $a=bk$, $c=dk$。

$$\therefore \quad \frac{a^2-c^2}{ab-cd}=\frac{b^2k^2-d^2k^2}{b^2k-d^2k}=\frac{k^2(b^2-d^2)}{k(b^2-d^2)}=k,$$

$$\frac{ab+cd}{b^2+d^2}=\frac{b^2k+d^2k}{b^2+d^2}=\frac{k(b^2+d^2)}{b^2+d^2}=k,$$

故 $\frac{a^2-c^2}{ab-cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$。

〔別解 1〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\therefore \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\therefore \frac{a^2}{c^2}=\frac{ab}{cd}$。

$$\therefore \quad \frac{a^2-c^2}{c^2}=\frac{ab-cd}{cd},$$

$$\therefore \quad \frac{a^2-c^2}{ab-cd}=\frac{c^2}{cd}=\frac{c}{d}。$$

又 $\frac{ab}{cd}=\frac{b^2}{d^2}$, $\therefore \frac{ab+cd}{cd}=\frac{b^2+d^2}{d^2}$,

$$\therefore \quad \frac{ab+cd}{b^2+d^2}=\frac{cd}{d^2}=\frac{c}{d}。$$

故 $\frac{a^2-c^2}{ab-cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$。

〔別解 2〕 欲證明 $\frac{a^2-c^2}{ab-cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ 成立,祇須證明

$$(a^2-c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)(ab-cd) \text{ 成立。}$$

去括號,$a^2b^2-b^2c^2+a^2d^2-c^2d^2=a^2b^2-c^2d^2$, $\therefore a^2d^2=b^2c^2$。故又祇須證明此式成立可矣。然由假設,

$ad=bc$, $\therefore$ $a^2d^2=b^2c^2$。故原式成立。

〔例 4〕 解 $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}=\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}$。

〔解〕 依合分比定理，$\dfrac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-2}}=\dfrac{2\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-4}}$，

$$\therefore\quad \frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x-4},$$

$$\therefore\quad (x+1)(x-4)=(x-3)(x-2),$$

解之，$x=5$。以此代入原方程中，兩邊果相等，故 5 爲所求之根。

〔例 5〕 甲乙二人以不同之資本經營商業。若甲損失 100 元，乙得利 200 元，則資金之比如 3:5。若甲得 200 元，乙損失 150 元，則資金之比如 18:13。問最初之資本各幾何？

〔解〕 設甲乙兩人之資本各爲 x 元，y 元，則

$$x-100:y+200=3:5\cdots\cdots(1)$$

$$x+200:y-150=18:13\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 得 $3(y+200)=5(x-100)$，

$$\therefore\quad 5x-3y=1100\cdots\cdots(3)$$

從 (2) 得 $18(y-150)=13(x+200)$，

$$\therefore\quad 13x-18y=-5300\cdots\cdots(4)$$

$(3)\times 6-(4)$，$17x=11900$，$\therefore$ $x=700$，代入 (3)，$y=800$。

故兩人資本甲爲 700 元，乙爲 800 元。

連比 (Continued ratio) 連比例 (Continued proportion)

(1) 設 $A:B=a:b$，$B:C=b:c$，$A:C=a:c$，可書作 $A:B:C=a:b:c$，稱爲 A, B, C 與 a, b, c 成比例。

(2) $A:B:C$ 及 $a:b:c$ 稱爲連比。

(3) 連比之各項，以不等於 0 之同數乘之或除之，仍得相等之連比，例如 $a:b:c:\cdots\cdots=ma:mb:mc:\cdots\cdots$，

$$a:b:c:\cdots\cdots=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}:\frac{c}{m}:\cdots\cdots。$$

(4) 互爲比例之二組數中，對應二數之二比相等，又二組數中對應二數之比相等，則此二組數互爲比例，即

$$a:b:c:\cdots\cdots=a':b':c':\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots(2)$$

表同一事實。

(5) 加比之理 (Addends)

設 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$ 則各等於 $\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}$

一般，$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\frac{pa+qb+rc+\cdots\cdots}{pa'+qb'+rc'+\cdots\cdots}$

$$=\frac{\sqrt[n]{pa^n+qb^n+rc^n+\cdots\cdots}}{\sqrt[n]{pa'^n+qb'^n+rc'^n+\cdots\cdots}}。$$

(6) 設一組數 $a,b,c,d\cdots\cdots$ 之間，有 $a:b=b:c=c:d$ 之關係，則此等諸數成連比例。

(7) 設 a,b,c 成連比例，則比 $a:c=a^2:b^2$。

〔例 1〕　設 $x:y=5:4$，$y:z=6:7$，求 $x:y:z$。

〔解〕　與 y 對應之數爲 4，6，求其最小公倍數爲 12，故

$x:y=5:4=15:12$，$y:z=12:14$，$\therefore$ $x:y:z=15:12:14$。

〔例 2〕 設$2x+3y:3y+4z:4z+5x=4a-5b:3b-a:2b-3a$，

試證 $7x+6y+8z=0$。

〔解〕 由假設，$\dfrac{2x+3y}{4a-5b}=\dfrac{3y+4z}{3b-a}=\dfrac{4z+5x}{2b-3a}=k$，則

$2x+3y=k(4a-5b)$，$3y+4z=k(3b-a)$，

$4z+5x=k(2b-3a)$。

相加，$7x+6y+8z=k(4a-a-3a-5b+3b+2b)=k\times 0$。

$$\therefore\quad 7x+6y+8z=0。$$

〔別解〕 由加比之理，

$$\frac{2x+3y}{4a-5b}=\frac{3y+4z}{3b-a}=\frac{4z+5x}{2b-3a}$$

$$=\frac{2x+3y+3y+4z+4z+5x}{4a-5b+3b-a+2b-3a}$$

$$=\frac{7x+6y+8z}{0}。$$

故 $7x+6y+8z=0$。

〔例 3〕 設 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$，

試證 $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$。

〔解〕 設 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$，則 $x=ak$，$y=bk$，$z=ck$。

$$\therefore\quad \frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{a^3k^3}{a^2}+\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{c^3k^3}{c^2}$$

$$=ak^3+bk^3+ck^3=k^3(a+b+c)。$$

又　$\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}=\dfrac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}=\dfrac{k^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}$

$$=k^3(a+b+c)。$$

故　$\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$。

〔例 4〕　設 $x-2y:2x-3z:2y+z=1:2:3$，求 $x:y:z$。

〔解〕　設　$\dfrac{x-2y}{1}=\dfrac{2x-3z}{2}=\dfrac{2y+z}{3}=k$，則

$$x-2y=k\cdots\cdots(1)\qquad 2x-3z=2k\cdots\cdots(2)$$

$$2y+z=3k\cdots\cdots(3)$$

$(1)+(3)$，$x+z=4k\cdots\cdots(4)$，$(4)\times2-(2)$，　$5z=6k$，

$$\therefore\quad z=\frac{6}{5}k。$$

以 z 之值代入 (4)，$x+\dfrac{6}{5}k=4k$，　$\therefore\ x=\dfrac{14}{5}k$。

又以 z 之值代入 (3)，$2y+\dfrac{6}{5}k=3k$，　$\therefore\ y=\dfrac{9}{10}k$。

$\therefore$　　$x:y:z=\dfrac{14}{5}k:\dfrac{9}{10}k:\dfrac{6}{5}k=28:9:12$。

〔例 5〕　解聯立方程：$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}\cdots\cdots(1)$

$$x+y+z=24\cdots\cdots(2)$$

〔解〕　從(1)，　$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=\dfrac{x+y+z}{3+4+5}=\dfrac{x+y+z}{12}\cdots\cdots(3)$。

以(2)代入(3)，$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{24}{12}=2$。

於是 $\frac{x}{3}=2$，$\therefore\ x=6$；$\frac{y}{4}=2$，$\therefore\ y=8$；

$$\frac{z}{5}=2,\quad \therefore\ z=10。$$

比例配分(Proportional parts)

將一數量依定比分為各部分之法，稱為比例配分。

〔例 1〕 甲乙丙三人依 l, m, n 之比分款 a 元，問各得幾元?

〔解〕 設甲乙丙所得各為 x 元，y 元，z 元，則得

$$x+y+z=a,\qquad \frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}。$$

$$\therefore\quad \frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=\frac{x+y+z}{l+m+n}=\frac{a}{l+m+n}。$$

$$\therefore\quad x=\frac{la}{l+m+n},\ y=\frac{ma}{l+m+n},\ z=\frac{na}{l+m+n}。$$

〔例 2〕 以款 360 元，分給男女童工共 200 人；男女童工全體所得之比如 5:4:3，又一人所得之比如 3:2:1。求男女童工之人數及各一人所得之款。

〔解〕 設男女童工各為 x 人，y 人，z 人，各一人所得為 $3a$ 元，$2a$ 元，a 元，故得 $x+y+z=200$ …………(1)

$$3ax+2ay+az=360 \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{3ax}{5}=\frac{2ay}{4}=\frac{az}{3} \cdots\cdots(3)$$

從 (2) (3)，　$\frac{3ax}{5}=\frac{2ay}{4}=\frac{az}{3}=\frac{3ax+2ay+az}{5+4+3}$

$$=\frac{360}{12}=30。$$

$$\therefore\quad x=\frac{50}{a},\qquad y=\frac{60}{a},\qquad z=\frac{90}{a}。$$

代入 (1)，　$\frac{50}{a}+\frac{60}{a}+\frac{90}{a}=200$，　$\therefore a=1$。

故 $x=50$，$y=60$，$z=90$，$3a=3$，$2a=2$。

卽男 50 人，每人 3 元；女 60 人，每人 2 元，童 90 人，每人 1 元。

混合比例 (Alligation proportion)

將種類相同價値不同之原料依比例混合所用之法，稱爲混合比例。分爲二種：

(1) 已知原料之價値及混合之比，定混合物之比。

(2) 已知原料及混合物之價値，定混合之比。

〔例 1〕　將每斤價 a 元，b 元，c 元之三種酒混合，其分量之比爲 $l:m:n$。求平均每斤之價。

〔解〕　設三種酒各爲 lk 斤，mk 斤，nk 斤，平均每斤之價爲 x 元，則　$alk+bmk+cnk=(lk+mk+nk)x$，

$$\therefore\quad x=\frac{k(al+bm+cn)}{k(l+m+n)}=\frac{al+bm+cn}{l+m+n}。$$

〔例 2〕　有成色 0.75，0.85 與 0.9 之三種銀塊，須依如何之比混合，方能得成色 0.8 之銀塊？但限定成色 0.75 與 0.85 分量之比如 3:2。

〔解〕 設成色 0.75 與 0.85 之銀塊各取 $3x$ 兩，$2x$ 兩，而成色 0.9 者取 y 兩，則比較混合前後三種銀塊之分量，得

$$0.75\times3x+0.85\times2x+0.9y=0.8(3x+2x+y);$$

$$\therefore\quad 0.05x=0.1y,\qquad \therefore\ x=2y。$$

故所求之比為 $3x:2x:y=6y:4y:y=6:4:1$。

正變（Vary directly）

(1) 設互有關係之二量 X,Y，當 X 為 m 倍時，Y 亦為 m 倍，如是 X 增減之比與 Y 增減之比常相等者，稱為 X 依 Y 而正變，以 $X\propto Y$ 表之。

(2) 設 X 依 Y 而正變時，其任何對應數值為 x, y，則 $\dfrac{x}{y}=k$，即 $x=ky$（k 為常數）之等式能成立。

(3) 反之，設 X 與 Y 為互有關係之二變量，其任何對應數值 x, y 之間，有 $\dfrac{x}{y}=k$，即 $x=ky$（k 為常數）之等式能成立者，則 X 依 Y 而正變，或 Y 依 X 而正變。

(4) 設相伴變化之二量 X, Y，其對應數值 x, y 之間，有 $x=ky^2$（k 為常數）之等式能成立者，稱為 X 依 Y 之平方而正變。

〔例 1〕 職工 14 日之工錢為 21 元，求此職工得工錢 18 元之日數。

〔解〕 設 x, y 為工錢與日數之對應數值，因工錢依日數而正變，故 $x=ky$（k 為常數）；依題意，$x=21$, $y=14$ 為對應值，

$$\therefore\quad 21=14k,\qquad \therefore\quad k=\frac{3}{2}。$$

今　$x=18$，則 $18=\frac{3}{2}y$，　$\therefore\ y=12$，卽所求爲 12 日。

〔注意〕　此例之常數 k 表一日之工錢。

〔例 2〕　物體從靜止時落下，其落下之距離，依所費時間之平方而正變。今於 2 秒鐘落下 19.6 公尺，求 5 秒點落下之距離。

〔解〕　設距離與時間之對應數值爲 S 與 t，依題意，$S=kt^2$（k 爲常數），而 $S=19.6$，$t=2$ 爲對應數值，故

$$19.6=k\times 2^2,\qquad \therefore\ k=4.9。$$

今 $t=5$，則 $S=k\times 5^2=4.9\times 25=122.5$ 公尺。

〔注意〕　此例之常數 k 表地心吸力之 $\frac{1}{2}$。

〔例 3〕　設 $2x+3y$ 依 $4x+5y$ 而正變，試證 x 依 y 而正變。

〔證〕　依題意設 k 爲常數，則

$$2x+3y=k(4x+5y),\qquad \therefore\quad 2(1-2k)x=(5k-3)y。$$

若 $k\neq 0$，則 $x=\dfrac{5k-3}{2(1-2k)}y$。

因 k 爲常數，故 $\dfrac{5k-3}{2(1-k)}$ 亦爲常數，卽 x 依 y 而正變。

反變 (Vary inversely)

(1) 設互有關係之二變量 X，Y，當 X 爲 m 倍時，與其對應之 Y 爲 $\frac{1}{m}$ 倍，則稱爲 X 依 Y 而反變，以 $X\propto\frac{1}{Y}$ 表之。

(2) 設 X 依 Y 而反變，則表此二量對應數值之積常為一定。即設 x, y 為 X, Y 之任何對應數值，k 為常數，則

$$xy=k, \text{ 或 } x=\frac{1}{y}k。$$

(3) 設互有關係之二變量 X, Y，其對應之任何數值為 x, y，而有 $xy=k$ 之關係者，則 X 依 Y 而反變，或 Y 依 X 而反變。

〔例 1〕 有工人 20 人 12 日可成之事，今限 16 日作成，須用工人幾人？

〔解〕 設對應之人數與日數為 x 與 y，因成一定之事，人數依日數而反變，故 $xy=k$（k 為常數）。

依題意 $x=20$，與 $y=12$ 相對應，故 $k=20\times 12$。

今 $y=16$，則 $16x=20\times 12$，$\therefore\ x=\frac{20\times 12}{16}=15$，

即須用 15 人。

〔注意〕 此例之常數 k，表一日作成之人數，或一人作成之日數。

〔例 2〕 物體受光之強度，依光源距離之平方而反變。今與光源距離 3 尺之處有物體，問何處遠之物體，受光之強度為前者 $\frac{1}{4}$？

〔解〕 設物體與光源之距離為 d，光之強度為 f，則

$$f=k\times\frac{1}{d^2}。$$

今 $d=3$， 則 $f=k\times\frac{1}{9}$。

又設所求距離為 x 尺，則 $f_1=k\times\frac{1}{x^2}$，而 $f_1=\frac{1}{4}f$。

故 $k\times\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}k\times\frac{1}{9}$， $\therefore\ x=\pm 6$，即距光源前後各6尺。

〔例3〕 設 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 依 $x-y$ 而反變，試證 xy 依 x^2+y^2 而反變。

〔證〕 依題意，$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x-y)=k$（$k$ 為常數），

$$\therefore\quad \frac{-(x-y)^2}{xy}=k,\quad \therefore\quad (2-k)xy=x^2+y^2,$$

若 $k\neq 2$，則 $xy=\frac{1}{2-k}(x^2+y^2)$。

因 k 為常數，故 $\frac{1}{2-k}$ 亦為常數，即 xy 依 x^2+y^2 而反變。

聯變 (Vary jointly)

(1) 設與二量以上如 X, Y, Z 有關係而變化之量為 U。當 Y, Z 一定時，U 依 X 而正變；X, Z 一定時，U 依 Y 而正變；X, Y 一定時，U 依 Z 而反變。則稱為 U 依 X 與 Y 而正變，依 Z 而反變，總稱為 U 依 X, Y, Z 而聯變。

(2) 設 X 依二量依 Y, Z 而正變，其任何對應之數值為 x, y, z 則 $x=kyz$（k 為常數）之等式能成立。

(3) 設 X 依 Y 而正變，依 Z 而反變，其任何對應之數值為 x, y, z 則 $x=k\times\frac{y}{z}$（k 為常數）之等式能成立。

〔例 1〕　直圓錐之體積，依高而正變，依底面半徑之平方而正變。設底面之半徑 7 寸，高 15 寸，其體積爲 770 立方寸，則底面之半徑 6 寸，高 14 寸，其體積如何？

〔解〕　設底面之半徑爲 r 寸，高爲 h 寸，體積爲 v 立方寸，則 $v=kr^2h$（k 爲常數）。

今 $r=7$，$h=15$ 時 $v=770$，卽 $770=k\times 7^2\times 15$，

$$\therefore\quad k=\frac{770}{7^2\times 15}。$$

故 $r=6$，$h=14$ 時，$v=k\times 6^2\times 14=\dfrac{770}{7^2\times 15}\times 6^2\times 14=528$ 立方寸。

〔例 2〕　氣體之體積，依其絕對溫度而正變，依壓力而反變。設有氣體，壓力爲 1.5 氣壓，絕對溫度爲 280°，其體積爲 400 立方寸。今壓力增 0.5 氣壓，溫度增 20°，則其體積如何？

〔解〕　設體積爲 V 立方寸，絕對溫度爲 T 度，壓力爲 P 氣壓，則

$$V=k\times\frac{T}{P}\ (k\ 爲常數)。$$

今 $P=1.5$，$T=280$ 時 $V=400$，$\therefore\ 400=k\times\dfrac{280}{1.5}$，

$$\therefore\quad k=\frac{400\times 1.5}{280}=\frac{15}{7}。$$

故 $P=1.5+0.5=2$，$T=280+20=300$ 時，

$$V=\frac{15}{7}\times\frac{300}{2}=321\frac{3}{7}\ 立方寸。$$

習　題

(1) 化簡下列各式:

(a) $(x+y)^2:x^2-y^2$。　(b) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}:\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$。

(c) $\frac{x^2}{a^2-1}:\frac{x^4}{(a-1)^2}$。

(2) 從下列等式求 $x:y$ 之值:

(a) $3x^2-6y^2=7xy$。　(b) $6x^2-19xy+10y^2=0$。

(3) 從 $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, $\frac{y}{z}=\frac{c}{d}$, 求 $x:z$。

(4) 設 a 及 b 皆爲正,而 $a>b$, 則 $a+b:a-b$ 與 $a^2+b^2:a^2-b^2$ 孰大?

(5) 設 $a-x:b-x$ 等於 $a:b$ 之平方比,求 x 之值。

(6) 甲乙二車速度之比如 5:3,同行 120 里,甲遲開半時而早到半時。求二車之速度。

(7) 有雞甲乙二羣,雞數之比,甲羣與乙羣如 7:9。而雌雄之比,甲羣如 3:4,乙羣如 7:5。問二羣合併,其中雌雄之比如何?

(8) 設 $a:b=c:d$,求證下列各式:

(a) $\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$。

(b) $b(a+b-c-d)=(a+b)(b-d)$。

(9) 解下列聯立比例:

(a) $x:y=3:4$, $x-1:y+2=1:2$。

(b) $x:y=y:162$, $x:6=6:y$。

(10) 設 $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{y+z}{y-z}$ 試證 y 爲 x 與 z 之比例中項。

(11) 求 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ 與 $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$ 之第三比例項。

(12) 二數之和爲 60,若加 10 於各數,則其比爲 5:3。求此二數。

(13) 甲乙二組工人,從甲組移 3 人到乙組,則二組人數相等。若甲組裁 4 人,乙組裁 5 人,則甲乙人數之比如 8:7。求二組人數。

(14) 於下列各題中求 $x:y:z$

(a) $y:z=2b:3c$, $x:z=3a:4c$。

(b) $x-2y:2y+3z:2x-3z=1:2:3$。

(15) 甲乙丙三人分款 410 元,甲乙所得之比如 5:3,乙丙所得之比如 4:3。問三人各得幾何?

(16) 甲出資 5000 元經營商業,4 個月後,乙出資 3000 元加入。再經 8 個月,共得利益 1680 元。今依出資額及月數分配利益,問各人可得幾何?

(17) 純金爲 24 開。今欲將 18 開,14 開,12 開金熔成 16 開金,預定 14 開金與 12 開金分量之比如 3:2,問 18 開金應如何熔合?

(18) 有酒精與水之混合液二瓶。甲瓶中酒精與水之比爲 5:1,乙瓶中酒精與水之比爲 25:3。今從甲乙兩瓶中取 6 與 7 之比混合,則其中酒精與水之比如何?

(19) 圓之面積,依其半徑之平方而正變。設半徑 5 寸之圓面積約為 78.5 方寸,則半徑 6 寸之圓面積約為幾方寸?又圓之面積,等於半徑 6.5 寸, 6 寸二圓面積之差者,其半徑如何?

(20) 設 y 依 $x+a$ (a 為常數) 而正變。當 $x=1$ 時, $y=5$。又 $x=5$ 時, $y=35$。問 $x=2$ 時, y 之值如何?

(21) 鐘表中擺之振動數,依長之平方而反變。設長 1 公尺之擺, 2 秒鐘振動一次。問每秒鐘振動 4 次,則擺長幾何?

(22) 某家買米一宗,預算每人日食 5 合,可支持 36 日。今每人日食 4.5 合,則可支持幾日?

(23) 有一事,用職工 60 人,每日作 10 時, 30 日可成。今限 12 日作成,每日作 12 時,問須添職工幾人?

(24) 槍彈進行時所受空氣之抵抗, 各依其直徑之平方及速度而正變。設直徑 $\frac{3}{5}$ 公分,速度每秒 450 公尺之槍彈,所受空氣之抵抗為 1.152 公斤。問直徑 $\frac{3}{4}$ 公分,速度每秒 300 公尺之槍彈,所受空氣之抵抗如何?

第十三章　級數

級數 (Progression)

依一定法則有一定順序之一列數，稱爲級數，其各數稱爲此級數之項。

等差級數或算術級數 (Arithmetical progression)

(1) 級數之第二項以下，各等於其前一項加一定之代數數者，稱爲等差級數，常略記爲 $A.P.$ 其所加一定之數，稱爲此等差級數之公差(Common difference)。例如 2, 5, 8, 11 其第二項以下各等於前一項加 3，即爲 $A.P.$，其 3 爲公差。

(2) 設 $A.P.$ 之首項爲 a，公差爲 d，項數爲 n，末項爲 l，則第二項 $a+d$，第三項爲 $a+2d$，依此推得第 n 項即末項爲 $l=a+d(n-1)$，而 $d=\dfrac{l-a}{n-1}$。

(3) 設幾個數成 $A.P.$，則中間之諸數稱爲兩端二數之等差中項 (Arithmetical means)。設於二數 a，b 之間插入 m 個等差中項，其公差爲 d，則依 (2)，$d=\dfrac{b-a}{m+1}$。

設二數 a，b 之等差中項爲 A，則 $A=\dfrac{b-a}{2}$，此二數之等差中項，稱爲相加平均或算術平均 (Arithmetical average)。

〔例 1〕　有 $A.P.$ 之首項爲 60，第十三項爲 12，求公差。

〔解〕　設公差爲 d，則第十三項爲 $60+12d=12$，$\therefore\ d=-4$。

〔例 2〕 首項 6，公差 -3 之 $A.P.$，其第幾項爲 -21?

〔解〕 設所求爲第 n 項，則 $-21=6+(n-1)\times-3$，解之，得

$$n=10。$$

〔例 3〕 $A.P.$ 之第二項與第三項之和爲 19，第五項與第七項之和爲 40，則其第十五項如何?

〔解〕 設首項爲 a，公差爲 d，則第二項第三項之和爲

$$(a+d)+(a+2d)=19,\quad \therefore\ 2a+3d=19\cdots\cdots(1),$$

第五項第七項之和爲

$$(a+4d)+(a+6d)=40,\quad \therefore\ 2a+10d=40\cdots\cdots(2),$$

從 (2) 減 (1)， $7d=21$， $\therefore\ d=3$。

代入 (1)，得 $a=5$。

故第十五項爲 $a+14d=5+14\times3=47$。

〔例 4〕 試於 8 與 24 之間，插入七個等差中項。

〔解〕 插入之後，24 爲第九項，設公差爲 d，則 $24=8+8d$，$\therefore\ d=2$，故七個等差中項爲 10，12，14，16，18，20，22。

〔例 5〕 設 $\dfrac{a}{b+c}$，$\dfrac{b}{c+a}$，$\dfrac{c}{a+b}$ 爲 $A.P.$，試證 a^2，b^2，c^2 亦爲 $A.P.$。但 $a+b+c\neq0$。

〔證〕 依題意 $$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{2b}{c+a},$$

兩邊各加 2， $$\frac{a}{b+c}+1+\frac{c}{a+b}+1=\frac{2b}{c+a}+2,$$

兩邊計算， $$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+b}=\frac{2(a+b+c)}{c+a},$$

因 $a+b+c\neq 0$，故 $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{2}{c+a}$，

去分母，$(a+b)(c+a)+(b+c)(c+a)=2(a+b)(b+c)$，

化簡，$a^2+c^2=2b^2$，　　故 a^2，b^2，c^2 亦為 $A.P.$。

等差級數之總和

設等差級數之首項為 a，公差為 d，末項為 l，至第 n 項之總和為 S，則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l \text{（各項順列）}$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a \text{（各項倒列）}$$

相加，$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)=n(a+l)$

故得總和之公式為 $S=\dfrac{n(a+l)}{2}$，或 $S=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$。

〔例 1〕　求等差級數 2，－2，－6，……至第二十項之和。

〔解〕　首項為 2，公差為 $-2-2=-4$，項數為 20，總和為 S，則

$$S=\frac{20[2\times 2+(20-1)\times(-4)]}{2}=10[4-76]=-720。$$

〔例 2〕　等差級數之總和為 63，首項與第三項之和為 21，第二項與第六項之和為 18。求項數。

〔解〕　設首項為 a，公差為 d，則

$a+(a+2d)=24\cdots\cdots(1)$　　$(a+d)+(a+5d)=18\cdots\cdots(2)$

$$\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}=63\cdots\cdots(3)$$

從 (1)，$a+d=12\cdots\cdots(4)$　　從 (2)，$a+3d=9\cdots\cdots(5)$

解 (4) (5)，　　$d=-\dfrac{3}{2}$，　　$a=\dfrac{27}{2}$，

代入 (3)，　$$\frac{n\left[2\times\frac{27}{2}+(n-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right]}{2}=63,$$

即　$3n^2-57n+252=0$，　　$\therefore\ n^2-19n+84=0$，

$\therefore\ (n-7)(n-12)=0$，　　$\therefore\ n=7$ 或 12。

〔注意〕　此例 n 之二根皆合題意，因公差為 $-\dfrac{3}{2}$，故第八項至第十二項之和因抵消而等於 0，讀者可寫全各項而驗之。

〔例 3〕　求 500 至 1000 之間，能為 13 整除之數之總和。

〔解〕　$500=13\times38+6$，$1000=13\times76+12$，故設所求之和為 S，則

$$S=13\times39+13\times40+\cdots\cdots+13\times76=13(39+40+\cdots\cdots+76)$$

$$=13\times\frac{(76-38)(39+76)}{2}\ [76-38\ 為\ A.\ P.\ 之項數]$$

$$=13\times\frac{38\times115}{2}=13\times19\times115=28405。$$

〔例 4〕　三數成 $A.\ P.$ 其和為 24，其平方之和為 210。求此三數。

〔解〕　因三數成 $A.\ P.$，故可以 $x-y$，x，$x+y$ 表此三數，由題意，得

$$x-y+x+x+y=24\cdots\cdots(1)$$

$$(x-y)^2+x^2+(x+y)^2=210\cdots\cdots(2)$$

從 (1)，$3x=24$，　　$\therefore\ x=8$。從 (2)，$3x^2+2y^2=210$。

以 $x=8$ 代入，得 $2y^2=18$，　　$\therefore\ y=\pm3$。

故三數為5，8，11或11，8，5。

〔例5〕 有棋子361個，第一回取1個，第二回取2個，第三回取3個，如是每回多取1個，至第幾回後不能再取？又最後尚餘幾個？

〔解〕 設所求之回數為n，所取棋子之總數為S，則

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{n(n+1)}{2}\leqq 361。\quad 今取\ \frac{n(n+1)}{2}=361，則$$

$$n^2+2n-722=0,\qquad \therefore\ n=\frac{-1\pm\sqrt{2889}}{2}=\frac{-1\pm 53\cdots\cdots}{2}。$$

因n之負值不合題意，故n之值必為正整數，即$n=26$，

$$而\quad 361-S=361-\frac{26(26+1)}{2}=361-351=10。$$

故答為第26回後餘10個。

等比級數或幾何級數(Geometrical progression)

(1) 級數之第二項以下，各等於以一定之數乘其前項者，稱為等比級數，常略記為$G.P.$ 其所乘一定之數，稱為公比(Common ratio)。例如3，6，12，24，48，其第二項以下各等於以2乘其前一項，即為$G.P.$，其2為公比。

(2) 設$G.P.$之首項為a，公比為r，第n項為l，則第二項為ar，第三項為ar^2，依此推得第n項即末項為$l=ar^{n-1}$，而$r^{n-1}=\dfrac{l}{a}$。

(3) 設幾個數成 $G.P.$，則中間之諸數稱爲兩端二數之等比中項 (Geometrical means)。

設於二數 a, b 之間插入 m 個等比中項時,公比爲 r,則從(2),

$$r^{m+1}=\frac{b}{a}。$$

設三數 a,b,c 成 $G.P.$，則 b 爲 a 與 c 之等比中項。因 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 故 $b^2=ac$，或 $b=\sqrt{ac}$，故 b 爲 a, c 之比例中項,與比例中項之意義相同。此 $b=\sqrt{ac}$ 稱爲 a,c 之相乘平均或幾何平均 (Geometrical average)。

〔例 1〕 $G.P.$ 之首項爲 3，第四項爲 192。求公比。

〔解〕 設公比爲 r，則 $3r^{4-1}=192$，$\therefore\ r^3=64$，$\therefore\ r=4$。

〔例 2〕 $G.P.$ 之第三項爲 12，第七項爲 $2\frac{10}{27}$。求此級數之首項,公比及第八項。

〔解〕 設首項爲 a，公比爲 r，則第三項爲 $ar^2=12\cdots\cdots(1)$，第七項爲 $ar^6=2\frac{10}{27}\cdots\cdots(2)$。以 (1) 除 (2) $r^4=\frac{16}{81}$，$\therefore\ r=\pm\frac{2}{3}$ (捨虛根)。代入 (1)，$a\times\frac{4}{9}=12$，$\therefore\ a=27$。而第八項爲

$$ar^7=2\frac{10}{27}\times\left(\pm\frac{2}{3}\right)=\pm\frac{128}{81}=\pm1\frac{47}{81}。$$

〔例 3〕 $G.P.$ 之首項爲 3，公比爲 2，則其第幾項爲 96?

〔解〕 設第 n 項爲 96，則 $3\times2^{n-1}=96$，$\therefore\ 2^{n-1}=32=2^5$，$\therefore\ n-1=5$，$\therefore\ n=6$。故第六項爲 96。

〔例 4〕 試於 7 與 224 之間，插入四個等比中項。

〔解〕 插入之後，7 爲首項，224 爲第六項，故 $7r^5=224$，$\therefore r^5=32=2^5$，$\therefore r=2$。

故所求之四個等比中項爲 14，28，56，112。

〔例 5〕 設相異之四個正數 a，b，c，d 成 $G.P.$，試證

$$a+d>b+c。$$

〔證〕 設 r 爲公比，則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$。

$$\therefore a+d-(b+c)=a+ar^3-(ar+ar^2)=a(1+r^3-r-r^2)$$
$$=a(1+r^3-r-r^2)=a(1+r)(1-r)^2。$$

依題意，a，b，c，d 爲正數，故 $a>0$，$r>0$，$\therefore 1+r>0$。又四數相異，故 $r\neq 1$，$\therefore (1-r)^2>0$。$\therefore a+d-(b+c)>0$。$\therefore a+d>b+c$。

等比級數之總和

設 $G.P.$ 之首項爲 a，公比爲 r，第 n 項爲 l，總和爲 S，則

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}\cdots\cdots(1)$$

$(1)\times r$，得 $\quad rS=\quad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n\cdots\cdots(2)$

$(2)-(1)$，得 $rS-S=ar^n-a$。$\therefore (r-1)S=a(r^n-1)$。

故 $\quad S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ 或 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ （$r>1$ 時用前式，$r<1$ 時用後式）。

又以 $l=ar^{n-1}$ 代入上式，又可得 $S=\dfrac{lr-a}{r-1}$。

〔例 1〕 $G.P.$ 之第二項爲 10，第四項爲 1000，求其前六項之和。

〔解〕　設首項爲 a，公比爲 r，則由題意

第二項爲 $ar=40\cdots\cdots(1)$　第四項爲 $ar^3=1000\cdots\cdots(2)$

$(2)\div(1)$，$r^2=25$，$\therefore$ $r=\pm5$。代入(1)，得 $a=\pm8$。

故設六項之和爲 S，

如 $r=5$，$a=8$，則 $S=\dfrac{8(5^6-1)}{5-1}=31248$，

如 $r=-5$，$a=-8$，則 $S=\dfrac{-8[1-(-5^6)]}{1+5}=20832$。

〔例 2〕　有三數成 $G.P.$，其和爲 19，其平方之和爲 133。求各數。

〔解〕　因三數成 $G.P.$，故可以 x^2，xy，y^2 表此三數（公比爲 $\dfrac{y}{x}$）而得

$x^2+xy+y^2=19\cdots\cdots(1)$　　$x^4+x^2y^2+y^4=133\cdots\cdots(2)$

$(2)\div(1)$，　　$x^2-xy+y^2=7\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(1)-(3)$，　　$2xy=12$　$\therefore$ $xy=6\cdots\cdots(4)$

$(1)+(4)$，　　$(x+y)^2=25$，$\therefore$ $x+y=\pm5$。

$(3)-(4)$，　　$(x-y)^2=1$，$\therefore$ $x-y=\pm1$。

解 $\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=5\\x-y=-1\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-5\\x-y=1\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-5\\x-y=-1\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$　$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$　$\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$　$\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$

故所求之三數爲 4，6，9。

〔例 3〕　設 $G.P.$ 首 n 項之和及其倒數之和各爲 A，B，又 n

項之連乘積爲 P，試證 $P^2=\dfrac{A^n}{B^n}$。

〔解〕 設 $G.P.$ 之首項爲 a，公比爲 r，則

$$A=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}。$$

$$B=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{ar^{n-1}}=\frac{\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{1}{r^n}\right)}{1-\dfrac{1}{r}}$$

$$=\frac{\dfrac{r^n-1}{r^{n-1}}}{a(r-1)}=\frac{r^n-1}{ar^{n-1}(r-1)}=\frac{1-r^n}{ar^{n-1}(1-r)}。$$

$$\therefore\quad \frac{A}{B}=\frac{\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}{\dfrac{1-r^n}{ar^{n-1}(1-r)}}=a^2r^{n-1}。$$

$$\therefore\quad \frac{A^n}{B^n}=a^{2n}r^{n(n-1)}。$$

又 $P=a\cdot ar\cdot ar^2\cdots\cdots ar^{n-1}=a^nr^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}=a^nr^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

$\therefore\quad P^2=a^{2n}r^{n(n-1)}$，　　　故　$P^2=\dfrac{A^n}{B^n}$。

無限等比級數 (Infinite geometrical progression)

等比級數之項數多至無限者，稱爲無限等比級數。此級數中，若公比之絕對值大於 1，則總和之絕對值漫無限制；若公比之絕對值小於 1，則總和之絕對值漸近於有限値，可求此有限値而作爲總和。

前述等比級數總和之公式爲

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r},$$

此式中若項數 n 無限增大，而 $-1<r<1$，則爲無限等比級數，其 r^n 無限減小而漸近於 0，即 $\frac{ar^n}{1-r}$ 可當作 0。故設其總和爲 S_∞，

則 $S_\infty=\frac{a}{1-r}$。

〔例 1〕 求無限等比級數 3，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{27}$……之和。

〔解〕 初項爲 3，公比爲 $-\frac{1}{9}$，

$$S_\infty=\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=\frac{3}{1+\frac{1}{9}}=\frac{27}{10}=2\frac{7}{10}。$$

〔例 2〕 設 a，b 爲同號之數，試求

$$\frac{a}{a+b}+\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\cdots\cdots 之和。$$

〔解〕 a，b 既爲同號之數，則公比 $\frac{a}{a+b}$ 爲正而小於 1，故

$$S_\infty=\frac{\frac{a}{a+b}}{1-\frac{a}{a+b}}=\frac{a}{a+b-a}=\frac{a}{b}。$$

調和級數（Harmonic progression）

(1) 設 a，b，c，……之倒數即 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$，…… 爲等差級

數，則稱為 $a, b, c, \cdots\cdots$ 成調和級數，常略記為 $H.P.$。故 $H.P.$ 之問題，皆可化為 $A.P.$ 而解之。

(2) 設幾個數成 $H.P.$，則中間之諸數稱為兩端二數之調和中項 (Harmonic means)。如單稱某二數之調和中項，則專指一個調和中項。

(3) 設二數 a, b 之調和中項為 H，則

$$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H}, \quad \therefore \frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab},$$

$$\therefore \quad H=\frac{2ab}{a+b}。$$

〔例 1〕 試於 6 與 24 之間，插入兩個調和中項。

〔解〕 插入之後，24 為第四項。因 6 與 24 之倒數為 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{24}$，故先求 $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{24}$ 間之兩個等差中項，設其公差為 d，則

$$\frac{1}{24}=\frac{1}{6}+3d, \qquad \therefore \quad d=-\frac{1}{24}。$$

故等差中項為 $\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$，$\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$ 即所求之調和中項為 8，12。

〔例 2〕 設 a, b, c 成 $H.P.$，試證 $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2$。

〔解〕 因 b 為 a, c 之調和中項，故 $b=\frac{2ac}{a+c}$。

$$\therefore\quad \frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=\frac{\dfrac{2ac}{a+c}+a}{\dfrac{2ac}{a+c}-a}+\frac{\dfrac{2ac}{a+c}+c}{\dfrac{2ac}{a+c}-c}$$

$$=\frac{2ac+a(a+c)}{2ac-a(a+c)}+\frac{2ac+c(a+c)}{2ac-c(a+c)}$$

$$=\frac{a^2+3ac}{ac-a^2}+\frac{3ac+c^2}{ac-c^2}$$

$$=\frac{a+3c}{c-a}+\frac{3a+c}{a-c}=\frac{a+3c}{c-a}-\frac{3a+c}{c-a}$$

$$=\frac{2(c-a)}{c-a}=2。$$

〔例 3〕　設 a 爲 b 與 c 之等差中項，b 爲 a 與 c 之等比中項，試證 c 爲 a 與 b 之調和中項。

〔解〕　因 a 爲 b 與 c 之等差中項，故 $2a=b+c$，

$$\therefore\quad 2ab=b^2+bc\cdots\cdots(1)$$

又因 b 爲 a 與 c 之等比中項，故 $b^2=ac\cdots\cdots(2)$

以(2)代入(1)，$2ab=ac+bc$。以 abc（不等於 0）除之，得 $\dfrac{2}{c}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}$。故 c 爲 a 與 b 之調和中項。

級數雜例

〔例 1〕　求 $a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots$ 至 n 項之和，但 $a\neq 1$。

〔解〕

$$S=a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots+na^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$aS=\qquad a^2+2a^3+3a^4+\cdots\cdots+(n-1)a^n+na^{n+1}\cdots\cdots(2)$$

(1)−(2), $(1-a)S=a+a^2+a^3+a^4+\cdots\cdots+a^n-na^{n+1}$

$$=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-na^{n+1}$$

$$=\frac{a[1-(n+1)a^n+na^{n+1}]}{1-a}$$

$$\therefore\ S=\frac{a[1-(n+1)a^n+na^{n+1}]}{(1-a)^2}。$$

〔例 2〕　求 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots\cdots$至 n 項之和,再求無限級數之和。

〔解〕　因 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

故　$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$,　$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,……

設所求 n 項之和爲 S,則

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}。$$

又　$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, 如 n 爲無限大,則 $\frac{1}{n}$ 漸近於 0, 故無限級數之和 $S_\infty=\frac{1}{1}=1$。

〔例 3〕　求級數 $7+77+777+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

〔解〕　$S=7+77+777+\cdots\cdots=\frac{7}{9}(9+99+999+\cdots\cdots)$

$$=\frac{7}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots\cdots]$$

$$=\frac{7}{9}[(10+10^2+10^3+\cdots\cdots+10^n)-n]$$

$$=\frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right]=\frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]。$$

〔例 4〕　求 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$。

〔解〕　設於恆等式 $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$ 中，順次以 $n, n-1, \cdots\cdots, 2, 1$ 代 x，則

$$\begin{array}{lllll}
(n+1)^3-n^3 & & =3n^2 & +3n & +1 \\
n^3 & -(n-1)^3 & =3(n-1)^2 & +3(n-1) & +1 \\
\cdots\cdots & & & & \\
3^3 & -2^3 & =3\times2^2 & +3\times2 & +1 \\
2^3 & -1^3 & =3\times1^2 & +3\times1 & +1
\end{array}$$

將此 n 個等式各邊相加，而以 S 表所求之和，則得

$$(n+1)^3-1^3=3S+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$

$$=3S+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n,$$

$$\therefore\quad 6S=2(n+1)^3-2\times1^3-3n(n+1)-2n=2n^3+3n^2+n$$

$$=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1),$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

習　　題

(1) 有級數 11, 16, 21, 26 等，級數之和爲 279，求級數之項。

(2) 等差級數之第一項爲 -5，第七項爲 13，求公差。

(3) 有三數成等差級數，其和爲 6，其各數之平方和爲 14。求各數。

(4) $A.P.$ 之第五項爲 -13，第八項爲 -33，問第幾項爲 -98?

(5) 求於 18 與 43 之間，插入四個等差中項。

(6) 求級數 5, 2, -1, ……, -55 之總和。

(7) 一人往某處，路程 280 里，從第一日起，每日遞減 5 里，7 日走到，求第一日所行之路程。

(8) 試證從 1 起任何個奇數之和必爲平方數。

(9) 設一等比級數之第一項爲 2，第四項爲 1024，求第二項與第三項。

(10) 設 a, b, c, d 成 $G.P.$，試證 a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2 亦爲 $G.P.$。

(11) 有三數成 $A.P.$，其和爲 36，若順次加 1, 4, 43 則成 $G.P.$。求此三數。

(12) 級數 1, 2, 2^2, …… 至第 $2n$ 項之和與 1, 3, 3^2 …… 至第 n 項之和，何者較大?

(13) 甲乙丙三人依等比級數分款 760 元，乙丙二人所得之差，爲甲乙二人所得之差之 $\frac{2}{3}$。問三人各得幾元?

(14) 相異之三數，能否同時成 $A.P.$ 及 $G.P.$?

(15) 求下列無限等比級數之和：

(a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots\cdots$　　(b) $100-25+6.25-\cdots\cdots$

(16) 設 a 與 b 皆爲正數，求無限等比級數 $(a+b)^2$, a^2-b^2, $(a-b)^2$, $\cdots\cdots$ 之和。

(17) 調和級數 $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots\cdots$ 之第幾項爲 $-\frac{1}{4}$?

(18) 設 a, b, c 成 $H.P.$, 試證 $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$ 亦成 $H.P.$。

(19) 試證相異二正數之比例中項，必爲此二數之等差中項與調和中項之比例中項。

(20) 二數之等差中項爲 10，調和中項爲 $8\frac{2}{5}$。求此二數。

(21) 求 $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

(22) 求 $3+33+333+\cdots\cdots$ 至第 n 項之和。

第十四章　對數

一般指數律

（1）以前所述之指數律，皆就指數爲正整數者而言，今再說明指數爲0或負數或分數時在次之規約下能成立，推廣爲一般指數律：

0指數　$a^0=1$　　$\because\ \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$，設 $m=n$，則 $1=a^0$.

負指數 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$　在 $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ 中，設 $m=0$，則 $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$。

分指數 $a^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{a^p}$，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$　　$\because\ (a^m)^n=a^{mn}$，

設 $mn=p$，則 $m=\dfrac{p}{n}$，故 $\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n=a^p$，

但 $(\sqrt[n]{a^p})^n=a^p$，故 $\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n=(\sqrt[n]{a^p})^n$，

$\therefore\ a^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{a^p}$，若 $p=1$，則 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

（2）用一般指數律，則開方乘方皆包括於指數計算之内，可依同一法則，簡單而統一。

〔例1〕　化簡 $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^5\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{-7}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-6}$

〔解〕　原式 $=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^5\left(\dfrac{1-x}{1}\right)^7\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^6$

$$=\frac{(1-x)^7(1+x)^6}{(1+x)^5(1-x)^6}=(1-x)(1+x)。$$

〔例 2〕　試以 $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ 乘 $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$。

〔計算〕

$$\begin{array}{l}
a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\\
\underline{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\qquad\qquad}\\
a\ -a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\\
\underline{\quad +a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b}\\
a\qquad\qquad\qquad\quad +b
\end{array}$$

∴　積爲 $a+b$，此例如設 $a^{\frac{1}{3}}=A$，$b^{\frac{1}{3}}=B$，則 $(A^2-AB+B^2)(A+B)=A^3+B^3$ 卽易於得答。

〔例 3〕　計算　$(x^{\frac{2}{5}}+2x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1})\div(x^{\frac{1}{5}}+y^{-\frac{1}{2}})$

〔計算〕

$$\begin{array}{r|l}
 & x^{\frac{1}{5}}+y^{-\frac{1}{2}}\\ \hline
x^{\frac{1}{5}}+y^{-\frac{1}{2}} & x^{\frac{2}{5}}+2x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}\\
 & \underline{x^{\frac{2}{5}}+\ x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{2}}}\\
 & \qquad\quad x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}\\
 & \qquad\quad \underline{x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}}\\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

∴　商爲 $x^{\frac{1}{5}}+y^{-\frac{1}{2}}$ 此例如設 $x^{\frac{1}{5}}=X$，$y^{-\frac{1}{2}}=Y$，則 $(X^2+2XY+Y^2)\div(X+Y)=X+Y$，亦易於得答。

〔例 4〕　計算　$\dfrac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+a}$。

〔解〕　原式 $=\dfrac{1+a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{4}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+a}$

$$=\frac{2(1+a^{\frac{1}{2}})+2(1-a^{\frac{1}{2}})}{1-a}+\frac{4}{1+a}$$

$$=\frac{4(1+a)+4(1-a)}{1-a^2}=\frac{8}{1-a^2}。$$

〔例 5〕　解　$x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}=6$。

〔解〕　設　$x^{-\frac{1}{2}}=X$，　則得　$X^2+X-6=0$，

即 $(X-2)(X+3)=0$，$\therefore X=2$ 或 -3，但 $x^{-\frac{1}{2}}$ 不表負數，

故捨 -3，　$\therefore x^{-\frac{1}{2}}=2$，　$\therefore x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$，　$\therefore x=\dfrac{1}{4}$。

對數 (Logarithm)

(1) 設 $a^x=N$，則可寫爲 $x=\log_a N$，前者稱爲指數式，後者稱爲對數式。

(2) $x=\log_a N$ 中，a 稱底數 (Base)，x 稱以 a 爲底時 N 之對數，N 稱對數 x 之眞數。

〔例〕　以 10 爲底，求 1000 與 0.01 之對數。

〔解〕　因 $1000=10^3$，　$0.01=\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{10^2}=10^{-2}$，

故 $\log_{10}1000=3$，$\log_{10}0.01=-2$，

〔注意〕　以 10 爲底時，常不寫出底數 10，如 $\log 1000$ 即表 $\log_{10}1000$。

對數之性質

(1) 不論底數如何，1之對數爲0。此因 $a^0=1$，故 $\log_a 1=0$。

(2) 不論底數如何，底數本身之對數爲1。此因 $a^1=1$，故 $\log_a a=1$。

(3) 負數無對數，此因 $a^x=N$ 式中，a 必爲正數，x 無論爲正或負，N 必爲正數，故負數必無對數。

(4) 積之對數，等於各因數對數之和。此因設 $\log_a M=m$，$\log_a N=n$，則 $a^m=M$，$a^n=N$，故 $MN=a^m a^n=a^{m+n}$，

$$\therefore\ \log_a MN=m+n=\log_a M+\log_a N。$$

(5) 商之對數，等於被除數對數減除數對數之差。此因設 M，N，m，n 如上，故 $\dfrac{M}{N}=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

$$\therefore\ \log_a\frac{M}{N}=m-n=\log_a M-\log_a N。$$

(6) 某數之冪之對數，等於以冪指數（爲正負整數或分數）乘此數之對數。此因設 $\log_a M=m$，則 $a^m=M$，$\therefore\ M^n=a^{mn}$，

$\therefore\ \log_a M^n=mn=n\log_a M$。若設 $n=\dfrac{q}{p}$，則 $\log_a M^{\frac{q}{p}}=\dfrac{q}{p}\log_a M$，

$\therefore\ \log_a\sqrt[p]{M^q}=\dfrac{q}{p}\log_a M$。再設 $q=1$，則 $\log_a\sqrt[p]{M}=\dfrac{1}{p}\log_a M$。

〔例1〕　已知 $\log 2=0.30103$，求 $\log 5$。

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.30103=0.69897。$$

〔例 2〕 化簡 $\log\frac{28}{33}-\log\frac{1}{35}+\log\frac{99}{98}-\log3$。

〔解〕 原式$=\log\left(\frac{28}{33}\div\frac{1}{35}\times\frac{99}{98}\div3\right)=\log\left(\frac{28\times35\times99}{33\times98\times3}\right)$

$=\log10$。

〔例 3〕 解 $\log_a(x-2)+\log_a(x-3)=0$〔如此者稱爲對數方程(Logarithmic equation)〕。

〔解〕 原方程可化爲 $\log_a(x-2)(x-3)=\log_a1$,

$\therefore\ (x-2)(x-3)=1$, $\therefore\ x^2-5x+5=0$

$\therefore\ x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$, 但 $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, 則 $x-2$, $x-3$ 皆爲負數,

與負數無對數之理不合,故 $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$。

〔例 4〕 證明 $\log_a b\log_b c\log_c x=\log_a x$。

〔證〕 設 $\log_a b=p$, $\log_b c=q$, $\log_c x=r$,

則 $\log_a b\log_b c\log_c x=pqr\cdots\cdots(1)$

又 $b=a^p$, $c=b^q$, $x=c^r$, 故 $x=c^r=(b^q)^r=b^{qr}=(a^p)^{qr}=a^{pqr}$,

$\therefore\ \log_a x=pqr\cdots\cdots(2)$

(1)(2)之右邊相等,故 $\log_a b+\log_b c+\log_c x=\log_a x$。

常用對數(Common logarithm)

(1) 以 10 爲底之對數,稱爲常用對數。例如 $\log2=0.30103$ 爲常用對數,因 $\log20=\log(10\times2)=\log10+\log2=1+0.30103=1.30103$, $\log0.2=\log\frac{2}{10}=\log2-\log10=0.30103-1=\bar{1}.30103$

(其中 $\bar{1}$ 爲負數,0.30103 爲正數),故常用對數由整數小數兩部

合成，整數部稱指標(Characteristic)，小數部稱假數(Mantissa)。

(2) 數字之排列完全相同，祇有小數點位置不同之各數，其對數之假數皆相同；對數表 (Table of logarithm) 卽載此種假數，故用時可從表中查得，如(1)中 log2, log20, log0.2 之假數皆爲 0.30103，可從表中求得。

(3) 整數部有 n 位之數，其對數之指標爲 $n-1$，若整數部爲 0，而小數自第 n 位起始有有效數字之數，其對數之指標爲 $\bar{n}$ 卽 $(-n)$，故指標可由視察決定，如(1)中 log2, log20, log0.2 之指標順次爲 $0, 1, \bar{1}$。

〔例 1〕 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$,

求 $\log\dfrac{\sqrt{0.05}\sqrt{0.3}}{\sqrt[3]{2}}$ 之值。

〔解〕
$$\log\frac{\sqrt{0.05}\sqrt{0.3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2}\log 0.05+\frac{1}{2}\log 0.3-\frac{1}{3}\log 2$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\log 0.3-\frac{1}{3}\log 2$$
$$=\frac{1}{2}(-\log 20+\log 0.3)-\frac{1}{3}\log 2$$
$$=\frac{1}{2}(-1.3010+\bar{1}.4771)-\frac{1}{3}\times 0.3010$$
$$=\frac{1}{2}(\bar{2}.6990+\bar{1}.4771)+\frac{1}{3}(\bar{1}.6990)$$
$$=\bar{1}.0881+\frac{1}{3}(-3+2.8990)$$
$$=\bar{1}.0881+\bar{1}.8997=\bar{2}.9878。$$

〔例 2〕　$(1.25)^{100}$ 為有幾位整數之數？　但 $\log 2=0.3010$。

〔解〕　設 $\log(1.25)^{100}=100\ \log 1.25=100\ \log\frac{10}{8}$

$$=100(\log 10-3\log 2)$$
$$=100(1-3\times 0.3010)$$
$$=100\times 0.0970=9.70$$

故 $(1.25)^{100}$ 之整數有 $(9+1)$ 位即 10 位。

〔例 3〕　解 $2^{2x+1}-2^{x+1}=112$（如此者稱指數方程〔Exponential equation〕）

〔解〕　將原方程變形為 $2\times 2^{2x}-2\times 2^{x}=112$，以 2 除兩邊，

$$2^{2x}-2^{x}-56=0$$

視 2^x 為一文字析因式，$(2^x-8)(2^x+7)=0$.

$$\therefore\ 2^x=8 \text{ 或 } 2^x=-7.$$

但 $2^x=-7$ 不合理，故　$2^x=8=2^3$，　$\therefore\ x=3$。

〔例 4〕　解 $2^{x+y}=9\cdots\cdots(1)$　$3^{x-y}=4\cdots\cdots(2)$

但 $\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，求至小數三位。

〔解〕　各方程中兩邊取對數。

從(1)，　$(x+y)\log 2=2\log 3$，$\therefore\ x+y=\dfrac{2\log 3}{\log 2}\cdots\cdots(3)$

從(2)，　$(x-y)\log 3=2\log 2$，$\therefore\ x-y=\dfrac{2\log 2}{\log 3}\cdots\cdots(4)$

解　(3)(4)，　$x=\dfrac{(\log 3)^2+(\log 2)^2}{\log 2\log 3}$

$$=\frac{0.22762441+0.090601}{0.1436071}=2.216。$$

$$y=\frac{(\log 3)^2-(\log 2)^2}{\log 2 \log 3}$$

$$=\frac{0.22762441-0.090601}{0.1436071}=0.954。$$

習　題

(1) 化簡下列各式：

(a) $27^{-\frac{2}{3}}$　　(b) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

(c) $32^{0.4}$　　(d) $(-64)^{\frac{5}{3}}$

(e) $(-125)^{\frac{2}{3}}$　　(f) $100^{1.5}$

(g) $0.25^{0.5}$　　(h) $25^4\times 4^{-4}$

(2) 將下列各式化簡：

(a) $4^{\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{4}{3}}\times 4^{-\frac{5}{3}}$　　(b) $a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{7}{12}}$

(c) $\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{x^3}\sqrt[5]{x^4}$　　(d) $(1+x)^{-5}\times(1-x)^7\times\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5$

(3) 將下列各式以冪之形表之：

(a) $\sqrt[6]{(x-y)^3(a-b)^{-7}}$　　(b) $\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}}$

(4) 將下列各式以正整數爲指數表之：

(a) $\dfrac{2x(a^2+1)^{-1}}{3x^{-1}(a^2-1)^3}$　　(b) $\dfrac{2a^{-2}bx^{-1}}{3^{-1}b^{-3}x^{-2}y^2}$

(5) 化簡下列各式：

(a) $x^{\frac{1}{12}}[xy^{-2}(x^2y^3)^{\frac{1}{6}}(xy^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}$

(b) $\dfrac{4a^{-n}b^{-3}}{5x^{-4}y^{-m}}\times\dfrac{15x^{-2}y^{3-m}}{14a^{n}b^{n-3}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{x^{-\frac{5}{3}}y^{3}z^{-\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}y^{4}z^{-1}}}$

(d) $(1-a^{\frac{1}{8}})(1+a^{\frac{1}{8}})(1+a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{2}})$

(6) 計算下列各式:

(a) $(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)(a^{\frac{1}{3}}-1)$

(b) $(x^{-\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})(x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})$

(c) $(a^{\frac{3}{4}}+8b)\div(a^{\frac{1}{4}}+2b^{\frac{1}{3}})$

(d) $(x^{n}-y^{-n})\div(x^{\frac{n}{3}}-y^{-\frac{n}{3}})$

(7) 解下列各方程:

(a) $2^{x+2}=2\sqrt{2}$

(b) $x^{\frac{3}{4}}+8x^{-\frac{3}{4}}=9$

(c) $x+y=13,\ x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=1$

(d) $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^{2x}}=\left(\frac{6}{5}\right)^{4-x}$

(8) 用對數式改記下列各式:

(a) $3^{4}=81$　　(b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{1}{64}$　　(c) $9^{\frac{3}{2}}=27$

(9) 用指數式改記下列各式:

(a) $\log_{2}8=3$

(b)　$\log_{25}5=\frac{1}{2}$

(c)　$\log_2\frac{1}{16}=-4$

(10)　求下列各式中文字之值：

(a)　$\log_4 64=x$　　(b)　$\log_3 x=-2$　　(c)　$\log_a 8=3$

(11)　求下列各式之值：

(a)　$\log_{10}\sqrt[3]{10000}$　　(b)　$\log_4\frac{1}{8}$　　(c)　$\log_3 27\sqrt{3}$

(12)　下列各式，試以 $\log a$，$\log b$，$\log c$，表之：

(a)　$\log\frac{bc}{a}$

(b)　$\log\frac{b^3c^2}{a^4}$

(c)　$\log(\sqrt[3]{ab^2c^3}\times\sqrt{abc^2})$

(13)　化簡下列各式：

(a)　$\log\frac{28}{15}+2\log\frac{14}{3}-3\log\frac{7}{6}$

(b)　$(2\log 2+\log 3)\div(1+\frac{1}{2}\log 0.36+\frac{1}{3}\log 8)$

(14)　若 $a^2+b^2=7ab$，試證

$$\log\left[\frac{1}{3}(a+b)\right]=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$$

15) 求適合於下列各式中 x 之值：

(a) $\log_2(x+1)+\log_2(x-2)=2$

(b) $\log_a(x+4)+\log_a(x-3)=0$

(c) $\log 16x-\log 8x^2=\log 8x^2-2\log 4x$

(16) 已知 $\log 2=0.30103$，$\log 3=0.47712$，$\log 5=0.69897$，求 $\log 4$，$\log 5$，$\log 6$，$\log 8$，$\log 9$，$\log 180$ 之各值。

(17) 16^{25} 有幾位整數？ 但 $\log 2=0.30103$。

(18) 解下列各方程：

(a) $\log(x^3-y^2)=2$，$\log(x-y)=0$

(b) $2^x=8^{y+1}$，$9^y=3^{x-9}$

(c) $\log_x 64=3$

(19) 求 x 之值：$6^{x+1}=8$。已知 $\log 2=0.30103$，$\log 3=0.47712$。

(20) 解 $6^x=\frac{10}{3}-6^{-x}$ 至小數三位。($\log 2$，$\log 3$ 見前)

世界