東北行政委員會教育部規定

高中臨時教材
專科學校適用

平面幾何學

胡敦復
榮方舟 編著

東北書店印行
1949

目　　錄

緒　　論

第一編　直線形

第二編　圓

第三編 面積

第四編 比例

第五編 正多角形及圓

第六編　雜定理及雜例

第七編　作圖題解法

平面幾何學

緒論

§1. **幾何學之目的** 學者於幾何學，在初中已涉獵得其大概. 然常有"幾何學究有何用"之疑問. 蓋幾何學所論者爲虛空圖形，不着實際，故其爲用不著. 夫吾人之思想必須整理，猶筋肉之必須操練然. 體操之爲用，盡人知之. 在操場上作一小時之步行，結果未出操場一步. 蓋其目的固不在乎路程之走得而在乎筋肉之操練. 幾何之爲用亦然. 在課室中作一小時之習題，結果並無何等實用. 蓋其目的亦不在乎問題之解決而在乎思想之整理. 顧筋肉之操練易，思想之整理難. 因思想爲空虛的，必有所依着，方可作秩序之練習. 幾何學實爲整理吾人思想之唯一工具. 依據圖形，推求眞理，以整理吾人之思想，使有條不紊，此幾何學之主要目的也.

§2. **幾何學之要素 體面線點** 幾何學爲研究圖形之學. 圖形之要素，不外乎體，面，線，點. 學者於初中幾何已習知之. 玆不嫌重複再分別述之.

空間有限部分曰體 (solid). 體有形象，有大小，有位置. 但非實質，故與物體不同. 物體於形象之外尙有性質，有色有味，或堅或柔. 幾何中所謂體，則舍形象、大小、

位置外，絕無他物. 體有三個向度（dimensions），爲長（length），廣（breadth）及高（height）.

體之分界曰**面**（surface）. 面有兩個向度，爲長及廣. 面無高，故面不占有空間位置.

面之分界曰**線**（line）. 線有一個向度，爲長.

線之分界曰**點**（point）. 點無向度.

體，面，線，點，或分或合，統稱曰**圖形**（figure）.

試就運動觀察體、面、線、點之關係. 點在空間只有位置而無向度. 設點在空間移動，從一個位置移至他一位置，其所經空間之跡，便有一個向度，長. 故點移動成線. 線有一個向度，若在空間移動，則其所經空間之跡，便又添一向度，廣. 故線移動成面. 面若在空間移動，則其所經空間之跡，便又添一向度，高. 故面移動成體. 體占有了空間一部分，設體之三個向度遞減，減小至無，此時已不復有向度，即已不復占有空間部分. 然其位置固仍存在. 此即所謂點也.

§3. **定義** 用特殊名詞表特殊圖形曰**定義**（definition）.

§4. **定義一 直線 曲線** 固定一線上任意兩點之位置將此線旋轉. 若此全線之位置一無改變，則此線曰**直線**（straight line）無此特殊性質之線都叫**曲線**（curve）.

直線常簡稱曰線. 故以下若但云線時，常指直線而言.

§5. **定義二 平面 曲面** 過面中任意兩點之直線若全在此面中，則此面曰**平面**（plane）. 無此特殊性質之面都叫**曲面**（curved surface）.

§6. **定義三　半射線　線分　折線**　一端有界，一端無界之直線部分曰**半射線**(half lay). 半射線一端之界曰**原點** (origin)。兩端均有界之直線部分曰**線分** (line-segment). 諸線分連接所成之非直線曰**折線** (broken line).

§7. **定義四　角**　共一原點之兩半射線分此兩半射線所在之平面爲兩部分，此各部分皆曰**角** (angle). 兩半射線曰角之兩**邊** (side). 所共原點曰角之**頂點** (vertex). 試就運動觀察半射線與角之關係. 設一半射線固定其原點在平面中旋轉，從一個位置轉至他一位置，其所經平面上之迹便是角. 半射線不占有平面，角則占有平面一部分. 設一角之頂點不動，而減少其所占平面部分，減至於無，此時角之兩邊合而爲一，即爲一半射線.

§8. **線分大小之比較　角大小之比較**　線分與角爲幾何學中兩個重要之量. 凡同類量可比較大小. 故兩線分可比較大小，兩角可比較大小. 幾何學中關於量之比較，重直接，常不假助於單位. 設有甲乙兩線分欲比較其孰大孰小. 將甲合置於乙上，使甲之第一端合於乙之第一端，然後視察其第二端之關係. 若甲之第二端亦合於乙之第二端，則此二線分相等. 若甲之第二端在乙之外，則甲大於乙. 若甲之第二端在乙之內，則甲小於乙. 設有甲乙兩角，欲比較其孰大孰小. 將甲之頂點合於乙之頂點上，且令其一邊相重，然後視察其第二邊之關係. 若甲之第二邊亦合於乙之第二邊上，則此二角相等. 若甲之第二邊在乙之外，則甲大於乙. 若甲之第二邊在乙之內，則甲小於乙.

§9. **合同圖**　兩個圖形，位置不同. 然當第一圖形

移置於第二圖形上，而二圖能完全密合時，則此二圖曰**合同圖**（congruentfigures）.

合同圖亦稱全等形．合同圖之重合部分曰對應部分．等線分及等角皆爲合同圖．

§10. **公理**　凡公衆認爲眞確而毫無疑義之眞理無待證明者曰公理（axiom）.

公理分二類　不專屬於幾何圖形的公理曰**普通公理**（generalaxiom）．專屬於幾何圖形的公理曰**幾何公理**（geometric axiom）.

§11. **普通公理**

1.　全量等於其各部分之和；全量比其任何一部分大.

2.　等量加等量，和相等.

3.　等量減等量，差相等.

4.　等量的同倍數量相等.

5.　等量的同分數量相等.

6.　不等量加等量和不等，原大者和亦大.

7.　不等量減等量差不等，原大者差亦大.

8.　等量減不等量差不等，所減者大差小.

9.　不等量之同倍數量不等，大量之倍量大.

10. 不等量之同分數量不等，大量之分量大.

11. 若甲量大於乙量，乙量大於丙量，則甲量大於丙量.

12. 若甲量大於乙量，丙量大於丁量，則甲、丙二量之和大於乙、丁二量之和.

13. 若甲量大於乙量，丙量小於丁量，則甲量減丙量之差大於乙量減丁量之差.

14. 等式中任何量以其等量代之，此等式依舊成立(等於等量之量相等).

15. 不等式中任何量以其等量代之，此不等式依舊成立.

16. 諸量相加，若改換其加時先後次序，其和不變.

17. 甲乙二量比較大小，或甲大於乙，或甲等於乙，或甲小於乙，三者必居其一.

§12. **幾何公理**

一. 圖形可不變其形象大小而任意變其位置.

二. 合同圖之對應量必相等.

三. 過二點之直線有一無二. 由此更可推得數事：

(a) 二直線有二點重合或有一部分重合，則此二直線完全重合.

(b) 疊置二直線可令全線相合，且令各線上之任意一點相合.

(c) 二直線只能交於一點.

四. 二點在一平面之兩旁，則其聯線必與此平面相交.

五. 在一平面內，二點在一直線之兩旁，則其聯線必與此直線相交.

六. 線分為其兩端間之最短路徑.

幾何公理，不止以上數條，以後隨時添補.

§13. **定理** 根據定義、公理等已認為真確之事而證明之真理曰定理.(theorem).

定理常分爲二部分．一曰假設 (hypothesis)，一曰終決 (conclution)．假設者，假定已知眞確之事．終決者從假設根據公理或已證明之定理可證其爲眞確之事也．

§ 14. **系**　從已證明之定理略加推想，即可斷定爲眞確之定理曰系 (corollary)．

§ 15. **幾何學之分類**　專論同一平面中各圖形者曰平面幾何學 (plane geometry)，不專論同一平面中各圖形者曰立體幾何學 (solid geometry)．

§ 16. **圖形之表法**　凡點常以 A,B,C…… 等大體字母表之．直線，半射線，線分皆以二點表之，即連書二個大字母如 AB,AC,BC…… 等．直線可寫其上任意二點．半射線以一原點及其上任意又另一點表之．線分以兩端點表之．角以頂點冠以∠號表之，如 $\angle A$，$\angle B$…… 等．有時數角共一頂點時，則須連書三字母冠以∠號以資區別，如 $\angle ABC$，其中 B 爲頂點；A,C 爲二邊上各任意一點．其他圖形之表法，下文隨時添註．

§ 17. **語言之符號**　凡常用之語言，爲敍述簡單計，以符號代替如下：

語言	等於	大於	小於	不等於	不大於	不小於	幾等於
符號	$=$	$>$	$<$	$\neq$	$\not>$	$\not<$	$\doteq$

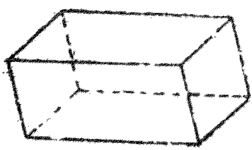
語言	合同於即全等於	相似於	加	減	因	故	平行	不平行
符號	$\equiv$ 或 $\cong$	$\sim$	$+$	$-$	$\because$	$\therefore$	$\parallel$	$\nparallel$

語言	平行且等於	垂直	即爲所求	即爲所證
符號	$\underline{\parallel}$	$\perp$	Q. E. F.	Q. E. D.

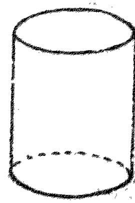
習　題　一

1.　直方體有多少面，多少線，多少點？

2.　圓柱體有多少面，多少線，多少點？

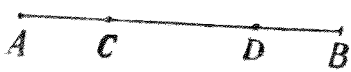


長方體

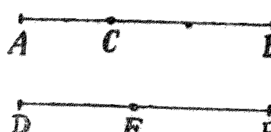


圓柱體

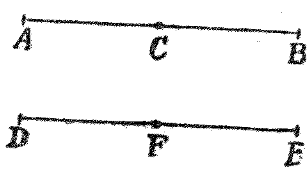
3.　線分 AB 上有 C,D 兩點．若 $AC=DB$，則 $AD=CB$．此理合於普通公理第幾條？



4.　已知圖中 $AB=DE$，又知 $AC<DF$．則 CB,FE 之比較如何？ 且述其根據．



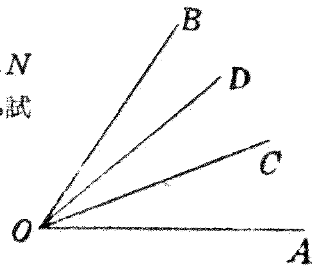
5.　已知圖中 $AB=DE$，又知 $AC=CB,DF=FE$．則 AC，DF 之比較如何？何故？

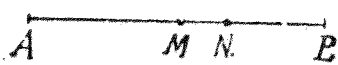


6.　已知 $\angle AOD>\angle COB$，則 $\angle AOC>\angle DOB$．何故？

7.　若$\angle AOC > \angle COD$, $\angle COD > \angle DOB$，則$\angle AOC > \angle DOB$. 何故？

8.　線分AB上有M, N二點. 若已知$AM = MB$,試說明$AN > NB$.



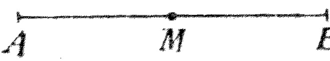


第一編 直線形

第一章 線分與角

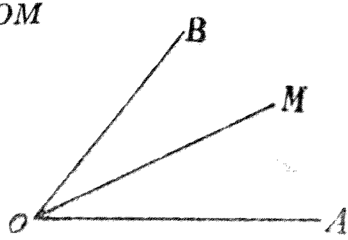
§18. **定義五 中點** 分一線分爲相等兩份之點曰此線分之中點 (mid-point).

線分AB上一點M. 若$AM=MB$,則M爲AB之中點.



§19. **定義六 等分線** 分一角爲相等兩份之半射線曰此角之等分線 (bisector).

$\angle AOB$中一半射線OM. 若$\angle AOM=\angle MOB$, 則OM爲$\angle AOB$之等分線.



§20. **幾何公理**

七. 一線分必有一中點.

八. 一角必有一等分線.

§21. **定理一.** 一線分只有一中點.

〔假設〕 M爲AB之中點. C爲AB上其任意他一點.

〔終決〕 C非AB之中點.

〔證〕 設C在MB上

則　$AC>AM$　（全量比其任何一部分大）

$\because$　$AM=MB$　（假設，定義五）．

$\therefore$　$AC>MB$　（不等式中任何量以其等量代入，此不等式依舊成立）

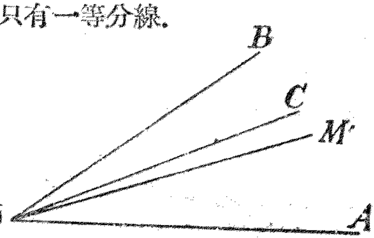
然　$MB>CB$　（全量比其任何一部分大）．

$\therefore$　$AC>CB$　（甲量大於乙量，乙量大於丙量，則甲量大於丙量）．

故　C非AB之中點．$Q.E.D.$

（若C在AM上，學者試自證之）

§22．定理二　一角只有一等分線．



〔假設〕　OM爲$\angle AOB$之等分線．OC爲$\angle AOB$內其他任意一半射線．

〔終決〕　OC非$\angle AOB$之等分線．

〔證〕　設OC在$\angle MOB$內，

則　$\angle AOC>\angle AOM$　（全量比其任何一部分大）．

$\therefore$　$\angle AOM=\angle MOB$　（假設，定義六）．

$\therefore$　$\angle AOC>\angle MOB$　（不等式中任何量以其等量代入，此不等式依舊成立）．

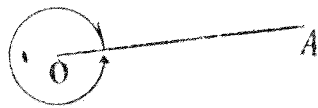
然　$\angle MOB>\angle COB$　（全量比其任何一部分大）．

$\therefore$　$\angle AOC>\angle COB$　（甲量大於乙量，乙量大於丙量，則甲量大於丙量）．

OC非$\angle AOB$之中點．$Q.E.D$

（若OC在$\angle AOM$內，學者試自證之）.

§23. **定義七 周角** 包含完全平面之角曰周角（perigon）.



設固定半射線OA之原點O，而將OA旋轉一周，仍至OA原位置．如此所成之角即周角.

§24. **定義八 相屬角** 一周角所分成之二角曰互爲相屬角（conjugate angles）.

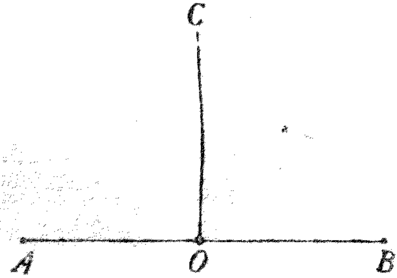
§25. **定義九 直線角** 二邊成一直線之角曰直線角（straight angle）.

直線AB上作一點O. OA, OB視爲角之邊，O爲頂點．如是所成之上下二相屬角，皆爲直線角．簡記爲st∠.

§26. **定義一〇 優角 劣角** 大於直線角之角曰優角（major angle）. 小於直線角之角曰劣角（minor angle）.

從一點引二半射線，常成優劣二角，若但稱曰角，常指劣角而言.

§27. **定義一一 直角** 直線角之半曰直角（right angle）.



在st∠OB中作一等分線OC，則$\angle BOA$, $\angle COA$皆爲直角．簡寫作$R\angle$.

§28. **定義一二 鈍角 銳角** 大於直角

之角曰鈍角 (obtuse angle). 小於直角之角曰銳角 (acute angle).

§29. **定義一三 補角 餘角** 二角之和爲一直線角時,則此二角曰互爲補角 (supplement angles). 二角之和爲一直角時,則此二角曰互爲餘角 (complement angles).

§30. **定義一四 鄰角** 有二角, 共有頂點又共有一邊, 且分居於此共有邊之兩旁. 則此二角曰互爲鄰角 (adjacent angles).

§31. **定義一五 對頂角** 二直線相交, 其不爲鄰角之二角曰互爲對頂角 (vertical angles).

§32. **定理三** 凡直線角皆相等.

〔假設〕 $\angle AOB$, $\angle CPD$ 皆爲 $st\angle$.

〔終決〕 $\angle AOB = \angle CPD$.

〔證〕 移置$\angle AOB$至$\angle CPD$上令OA與PC相重, O合於P〔幾何公理三(b)〕則因$\angle AOB$, $\angle CPD$皆爲直線角, 即AOB, CPD皆爲直線, 故OB與PD亦相重合〔幾何公理三(a)〕. 故$\angle AOB$, $\angle CPD$爲合同圖.

$\therefore$ $\angle AOB = \angle CPD$ (幾何公理二) $Q.E.D.$

§33. **系一** 凡直角皆相等.

§34. **系二** 等角之補角相等.

§35. **系三** 等角之餘角相等.

§36. **系四** 二直線相交成四個角, 若其中一個爲直角, 則其他三個均爲直角.

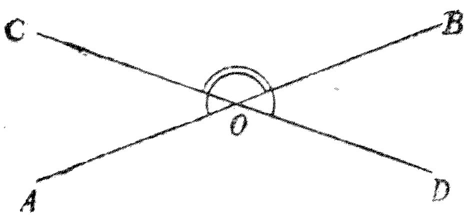
§37. **系五** 一周角等於二直線角；一直線角等於二直角；一周角等於四直角.

§38. **定義一六 垂線 斜線** 二直線相交成直角時，此二直線曰互爲垂線(perpendiculars)，亦曰互相垂直，或互相直交. 二直線相交成非直角時，則此二直線曰互爲斜線 (oblique lines)，亦曰互相斜交. 其交點曰足(foot). 垂線之交點曰垂足 (foot of perpendicular).

§39. **定理四** 對頂角相等.

〔假設〕 $\angle AOC$, $\angle BOD$ 爲對頂角.

〔終決〕 $\angle AOC = \angle BOD$.



〔證〕 $\angle AOC$, $\angle BOD$ 爲對頂角，即 AOB, COD 皆爲直線.

$\therefore$ $\angle AOB$, $\angle COD$ 皆爲 $st\angle$. $\therefore$ $\angle AOB = \angle COD$ (定理三).

$\therefore$ $\angle AOB - \angle BOC = \angle COD - \angle BOC$ (普通公理3).

即 $\angle AOC = \angle BOD$. Q.E.D.

第二章　三　角　形

§40. **定義一七　多角形**　諸線分相接圍成之形曰多角形(Polygon). 此各線分曰多角形之邊(side). 相接兩邊所成之角曰多角形之角(angle). 各角之頂點曰多角形之頂點(vertex) 一邊及其相接邊延線所成之角曰多角形之外角(exterior angle). 不共一邊的兩頂點所聯線分曰多角形之對角線(diagonal). 諸邊之和曰多角形之周(perimeter).

有 n 個角的多角形就叫做 n 角形(n gon).

多角形之各角皆爲劣角時, 此多角形曰凸多角形(convexpolygon). 多角形之各角中有優角時, 此多角形曰凹多角形(concave polygon).

凡凸多角形常簡稱曰多角形. 故以下凡但稱多角形時, 常指凸多角形而說.

多角形之最簡單者爲三角形, 三角形有三邊, 三角及三雙外角. 三角形無對角線.

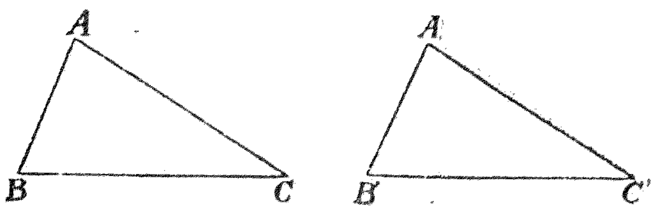
§41. **定義一八　三角形之高與底**　從三角形頂點至對邊或對邊之延線所作垂線曰三角形之高(altitude) 其對邊曰三角形之底(base).

§42. **定義一九　三角形之中線**　三角形頂點及其對邊中點所聯線分曰三角形之中線(median).

§43. **定義二〇　三角形之等分角線**　三角形內角之等分線曰三角形之等分角線(angle bisector).

三角形有三個高，三個中線，三個等分角線。

§44. **定理五** 兩三角形中，一三角形之兩邊及其所夾之角，各等於又一三角形之兩邊及其所夾之角，則此兩三角形為合同圖。



〔假設〕 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle A=\angle A'$

〔終決〕 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$。

〔證〕 移置$\triangle ABC$於$\triangle A'B'C'$上，令A與A'合，AB與$A'B'$相重。則因$\angle A=\angle A'$，$\therefore AC$與$A'C'$亦相重。又$\because AB=A'B'$，$\therefore B$與B'合。$\because AC=A'C'$，$\therefore C$與C'合 故$\triangle ABC$之三個頂點A,B,C皆與$\triangle A'B'C'$之三個頂點A'，B'，C'合，而三邊亦合。

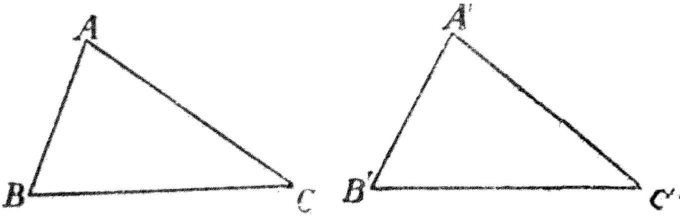
$\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ Q.E.D.

〔註〕 本定理簡為 $s.a.s.=s.a.s.$

§45. **定理六** 兩三角形中，一三角形之一邊及其兩端之角各等於又一三角形之一邊及其兩端之角，則此兩三角形為合同圖。

〔假設〕 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中，$BC=B'C'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$

〔終決〕 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$。



〔證〕 移置$\triangle ABC$於$\triangle A'B'C'$上，令BC與$B'C'$相重，B與B'合．則因$BC=B'C'$，$\therefore C$與C'亦合．又因$\angle B=\angle B'$，$\therefore BA$與$B'A'$相重．

$\angle C=\angle C'$，$\therefore CA$與$C'A'$相重．

故$\triangle ABC$之三邊BC, AC, AB皆與$\triangle A'B'C'$之三邊$B'C'$，$A'C'$，$A'B'$相重，而三頂點亦合．

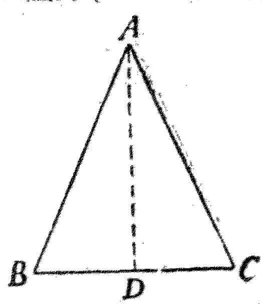
$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$　　　　*Q.E.D.*

〔註〕 本定理簡寫爲 $a.s.a.=a.s.a.$

§46. **定義二一　二等邊三角形**　三角形之三邊中有二邊相等者曰二等邊三角形（isosceles triangle）．其相等之二邊曰邊（Sides）．不等之一邊曰底（baso）．底之對角曰頂角（vertical angle）．其他二角曰底角（base angles）．

§47. **定義二二　等邊三角形**　三角形之三邊皆相等者曰等邊三角形（equilateral triangle）．

§48. **定理七**　二等邊三角形底角相等．



〔假設〕 $\triangle ABC$中，$AB=AC$．

〔終決〕 $\angle B=\angle C$．

〔證〕 作$\angle A$的等分線AD．則

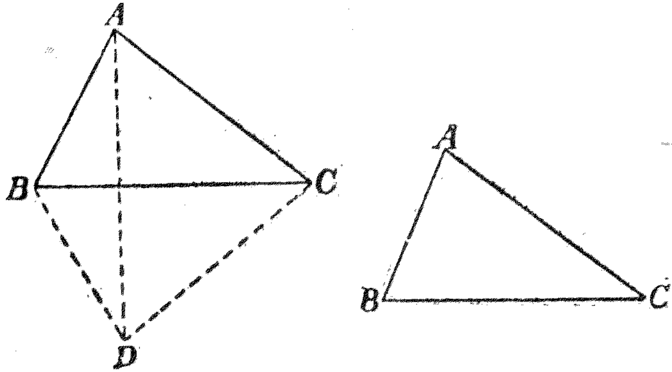
在$\triangle ABD$，$\triangle ACD$中，$AB=AC$，AD為重合部分，$\angle BAD=\angle CAD$。

$\therefore\quad \triangle ABD\cong\triangle ACD$（$s.a.s.=s.a.s.$）。

$\therefore\quad \angle B=\angle C$（合同圖之對應部分）。　$Q.E.D.$

§49．**系．**　等邊三角形之各角皆相等。

§50．**定理八**　兩三角形中，一三角形之三邊各等於又一三角形之三邊，則此兩三角形爲合同圖。



〔假設〕　$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$。

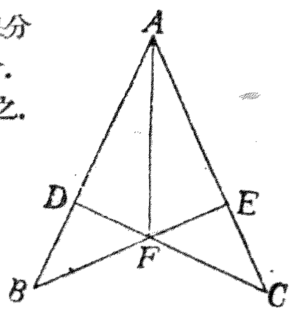
〔終決〕　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$

〔證〕　從B向形外作半射線BD，令$\angle CBD=\angle B'$從C向形外作半射線CD，令$\angle BCD=\angle C'$．BD，CD交於D成$\triangle DBC$則又因$BC=B'C'$，$\therefore\triangle DBC\cong\triangle A'B'C'(a.s.a)$。$\therefore DB=A'B'$，$DC=A'C'$（對應部分）因$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\therefore AB=DB$，$AC=CD$（普通公理14）。聯$AD$，得$\triangle ABD$，$\triangle ACD$皆爲二等邊三角形．$\therefore\angle BAD=\angle BDA$，

$\angle CAD=\angle CDA$（定理七）. $\therefore \angle BAD+\angle CAD=\angle BDA+\angle CDA$，即$\angle BAC=\angle BDC$（普通公理3）. $\therefore \triangle ABC\cong\triangle DBC$（$s.a.s.=s.a.s.$）.

$\therefore \quad \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. Q.E.D.

§51. **合同三角形之應用** 合同三角形在平面幾何學中應用至廣. 凡欲證兩線分相等，或兩角相等，常觀察此需證之線分及角是否合同三角形之對應部分. 若然，則常可應用以上諸定理證之. 舉例如下.



假設 $AB=AC, AD=AE$. BE, CD 交於 F.

終決 AF 爲$\angle A$ 之等分線.

證: 在$\triangle ABE, \triangle ACD$中，$AB=AC$，$AE=AD$，$\angle A$爲公共，$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$. （$s.a.s.=s.a.s.$）

$\therefore \quad \angle ABE=\angle ACD, \angle AEB=\angle ADC$. （對應部分）

$\therefore \quad \angle BEC=\angle CDB$. （等角的補角相等）

在 $\triangle BDF$，$\triangle CEF$中，$\angle BDF=\angle CEF$，$\angle DBF=\angle ECF$，又因$AB=AC$，$AD=AE$，$\therefore DB=EC$. $\therefore \triangle DBF\cong\triangle ECF$ （$a.s.a.=a.s.a.$）

$\therefore \quad DF=EF$（對應部分）. 於是在$\triangle ADF, \triangle AEF$中，$DF=EF, AD=AE, AF$公共，$\therefore \triangle ADF\cong\triangle AEF$（$s.s.s.=s.s.s.$）

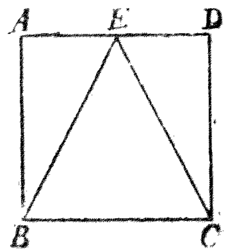
$\therefore \quad \angle DAF=\angle EAF$（對應部分）. 即$AF$爲$\angle A$ 之等分線. Q.E.D.

習 題 二

1. 二等邊三角形底角之等分角線相等.

2. 二等邊三角形等邊上之中線相等.

3. $\triangle ABC$ 爲等邊三角形. 在三邊 AB, BC, CA 上各取點 D, E, F 令 $AD=BE=CF$. 則 $\triangle DEF$ 亦爲等邊三角形.

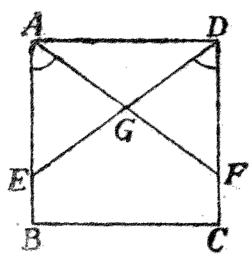


4. 四角形之四邊相等, 則其二對角線互相垂直.

5. $ABCD$ 爲正方形 (即四邊相等, 四角相等) E 爲 AD 之中點, 則 $\angle EBC=\angle ECB$.

6. $ABCD$ 爲正方形, $BE=CF$, 則 $\angle EAF=\angle EDF$.

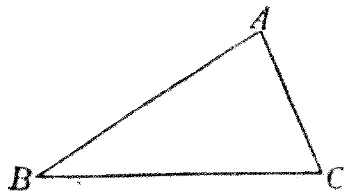
7. $ABCD$ 爲正方形, $BE=CF$, AF, DE 交於 G, 則 $AG=DG$.



8. $\triangle ABC$ 爲等邊三角形. 在三邊 AB, BC, CA 上各取點 D, E, F 令 $AD=BE=CF$. 聯 AE, BF, CD. AE, BF 交於 G. BF, CD 交於 H. CD, AE 交於 K. 求證 $\triangle GHK$ 亦爲等邊三角形.

第三章　不　等　量

§52. **定理九**　三角形三邊中任意二邊之和大於其他一邊.



〔假設〕　$\triangle ABC$.

〔終決〕　$AB+AC>BC$,

$AB+BC>AC$,

$AC+BC>AB$.

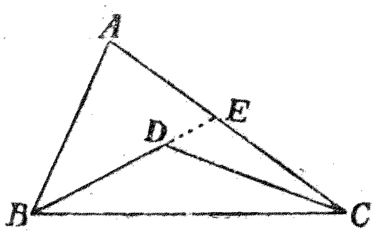
〔證〕　$AB+AC$即折線BAC而BC爲線分.

$\therefore$　$AB+AC>BC$.　　（幾何公理六）

同理　$AB+BC>AC$,

$AC+BC>AB$.　　$Q.E.D.$

§53. **定理一〇**　從三角形內一點至二頂點引線分所成三角形之周比原三角形之周小.



〔假設〕　D爲$\triangle ABC$之任意一點.

〔終決〕　$DB+BC+CD<AB+BC+CA$.

證　延長BD交AC於E.

則　$AB+AE>BE$,　$\therefore$　$AB+AE+EC>BE+EC$,

即　$AB+AC>EB+EC$.

又　$ED+EC>DC$,　$\therefore$　$ED+EC+DB>DC+DB$,

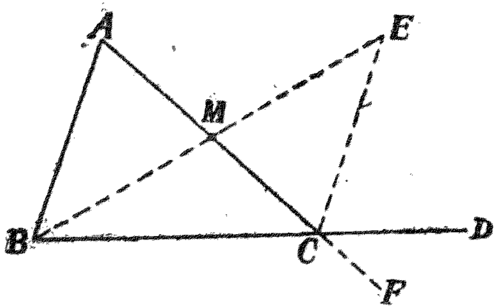
即　$EB+EC>DB+DC$.

$\therefore \quad AB+AC>DB+DC.$

$AB+BC+CA>DB+BC+CD. \quad Q.E.D.$

§54. **定義二三 三角形外角之內對角** 三角形任一外角不相鄰之內角曰此外角之內對角 (opposite interior angle).

§55. **定理一一** 三角形任意一外角大於其內對角.



〔假設〕 $\angle ACD$爲$\triangle ABC$之一外角.

〔終決〕 $\angle ACD>A, \angle ACD>\angle B.$

〔證〕 在AC上取中點M.聯BM延長至E,令$BM=ME$.聯CE.在$\triangle ABM$,$\triangle CEM$中,$AM=MC$,$BM=ME$,$\angle AMB=\angle CME. \quad \therefore \quad \triangle ABM\cong\triangle CEM.$

$\therefore \quad \angle A=\angle ECM.$ (對應部分)

但 $\angle ACD>\angle ECM. \therefore \angle ACD>\angle A.$

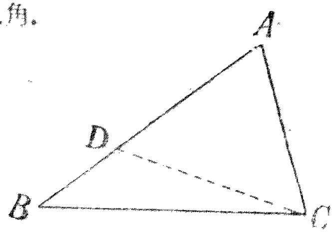
(普通公理15)

同理延長AC至F,可證$\angle BCF>\angle B$.

$\because \quad \angle ACD=\angle BCF. \quad \therefore \angle ACD>\angle B. \quad Q.E.D.$

§56. **定理一二** 三角形二邊不等,則其對角亦不

等；對大邊之角大於對小邊之角.



假設　△ABC中，$AB>AC$.

〔終決〕　$\angle C>\angle B$.

〔證〕　在AB上取D點令$AD=AC$，聯DC. 因D在AB上，故CD在$\angle C$內，$\therefore \angle C>\angle ACD$。　　（普通公理）

又因$AC=AD$，$\therefore \angle ACD=\angle ADC$，$\therefore \angle C>\angle ADC$.

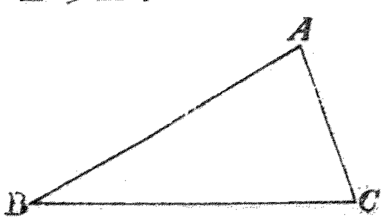
但$\angle ADC$為△DCB之外角，$\therefore \angle ADC>\angle B$.

$\therefore$　$\angle C>\angle B$.　　Q.E.D.

§57. **定理一三**　三角形兩角不等，則其對邊亦不等；對大角之邊大於對小角之邊.

〔假設〕　△ABC中，$\angle C>\angle B$.

〔終決〕　$AB>AC$.



〔證〕　若云$AB=AC$，則依定理七，$\angle B=\angle C$，與假設矛盾.

若云$AB<AC$，則依定理一二，$\angle C<\angle B$，亦與假設矛盾.

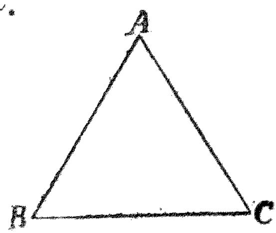
$\therefore$　$AB>AC$.　　Q.E.D.

§58. **窮舉證法**　一定理中，若其終決之反面，能一一證其與假設矛盾時，則其終決之爲眞確無疑. 如此證法名曰窮舉證法（method of exhaustion）.

§59. **定理一四** 若三角形之兩角相等，則此三角形爲二等邊三角形。

〔假設〕 $\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$。

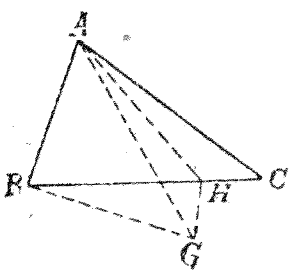
〔終決〕 $\triangle ABC$爲二等邊三角形。

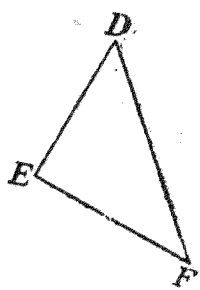


〔證略。學者試用窮舉證法自證之〕。

§60. **系** 若三角形的三角相等，則此三角形爲等邊三角形。

§61. **定理一五** 兩三角形中，一三角形之二邊各等於他三角形之二邊而其夾角不相等，則其第三邊亦不等；夾角大，第三邊亦大。





〔假設〕 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$中，$AB=DE$，$AC=DF$，$\angle A>\angle D$。

〔終決〕 $BC>EF$。

〔證〕 在$\angle A$內作AG，令$\angle BAG=\angle D$，且令$AG=DF$，聯BG。則因$AB=DE$，$\therefore\ \triangle ABG\cong\triangle DEF$。$\therefore\ BG=EF$。

因$\angle A>\angle D$，$\therefore \angle A>\angle BAG$，$\therefore AG$在$\angle A$內作$\angle GAC$之等分線$AH$交$BC$於$H$。聯$GH$。

則因$AC=DF$。$\therefore AG=AC$，$\therefore \triangle AGH\cong\triangle ACH$。

$\therefore\quad GH=CH$。

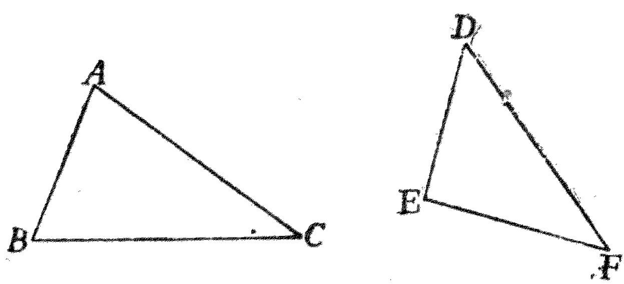
在$\triangle HBG$中，$HB+HG>BG$，（定理九）

$\therefore\quad HB+HC>BG$。（普通公理15）

即　$BC>BG$。

$\therefore\quad BC>EF$　　Q.E.D.

§62。**定理一六**　兩三角形中，一三角形之二邊各等於他三角形之二邊而其第三邊不等，則其夾角亦不等；第三邊大，夾角亦大。



〔假設〕　$\triangle ABC$，$\triangle DEF$中，$AB=DE$，$AC=DF$，$BC>EF$。

〔終決〕　$\angle A>\angle D$。

〔證〕　若云$\angle A=\angle D$，則因$AB=DE$，$AC=DF$。

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle DEF$，$\therefore BC=EF$將與假設矛盾。

若云　$\angle A<\angle D$，則因$AB=DE$，$AC=DF$。

$\therefore$ $BC<EF$ 亦將與假設矛盾。

$\therefore$ $\angle A>\angle D$, Q.E.D.

習 題 三

1. $\triangle ABC$中，$AB=AC$，D爲AB上任意一點．求證$DC>DB$.

2. $\triangle ABC$中，$AB>AC$，$\angle B$，$\angle C$之等分線交於D，求證$DB>DC$.

3. 四邊形兩對角線之和比其周小而比其半周大.

4. 二等邊三角形底上任意點與頂點所聯線分比各邊小.

5. 三角形二邊之和大於第三邊之中線之二倍.

6. 三角形三中線之和小於三角形之周.

7. O爲$\triangle ABC$內任意一點，則$\angle BOC>\angle BAC$.

8. AD爲$\triangle ABC$之中線，E爲AD間任意一點．若 $AB>AC$，則 $EB>EC$.

第四章　平　行　線

§63. **定義二四　平行線**　在同平面內，不相交之二直線曰平行線（parallel lines）.

〔註〕　所謂直線，指無限長說．二線分不相交，未必平行．但當二線分兩端各延長至無限遠而仍不相交，則此二線分亦曰平行．依平行線之定義，可知二直線之位置關係有二種，或平行，或相交．不平行即相交，不相交即平行．AB, CD 兩線平行，寫作 $AB \parallel CD$. AB, CD 兩線相交寫作 $AB \nparallel CD$.

§64. **幾何公理九**　相交二直線，不能平行於同一直線．由此更可推得數事：

（a）　一直線與一雙平行線之一平行，則必與其二亦平行．

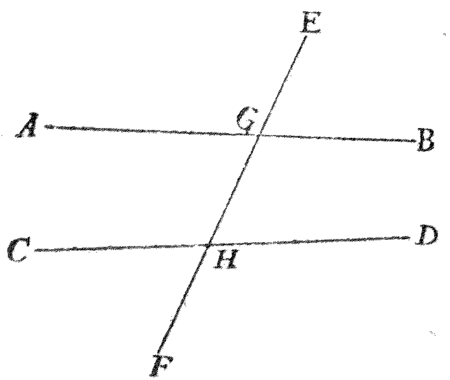
（b）　一直線與一雙平行線之一相交，則必與其二亦相交．

（c）　過一直線外一點之此直線之平行線，有一無二．

§65. **定義二五　截線　內角　外角　同位角　內錯角　外錯角　同旁內角　同旁外角**　一直線與其他諸直線相交，則此直線曰其他諸直線之截線（transversal）.

一截線與兩直線所成諸角有各種名稱．如圖 EF 截 AB, CD 於 G, H．所得諸角中．

$\angle AGF$, $\angle BGF$, $\angle CHE$, $\angle DHE$ 曰內角（interior angles）. $\angle AGE$, $\angle BGE$, $\angle CHF$, $\angle DHF$ 曰外角（exterior angles）. $\angle AGF$ 及 $\angle DHE$, $\angle BGF$ 及 $\angle CHE$ 曰互爲內錯角（alternate interior angles）. $\angle AGE$



及$\angle DHF$，$\angle BGE$ 及 $\angle CHF$ 曰互爲外錯角（alternate exterior angles）。$\angle AGE$及$\angle CHE$，$\angle BGE$及$\angle DHE$，$\angle AGF$及$\angle CHF$，$\angle BGF$及$\angle DHF$曰互爲同位角（corresponding angles）。$\angle AGF$及$\angle CHE$，$\angle BGF$及$\angle DHE$曰互爲同旁內角（interior angles on the same side）。$\angle AGE$ 及 $\angle CHF$，$\angle BGE$ 及 $\angle DHF$ 曰互爲同旁外角（exterior angles on the same side）。

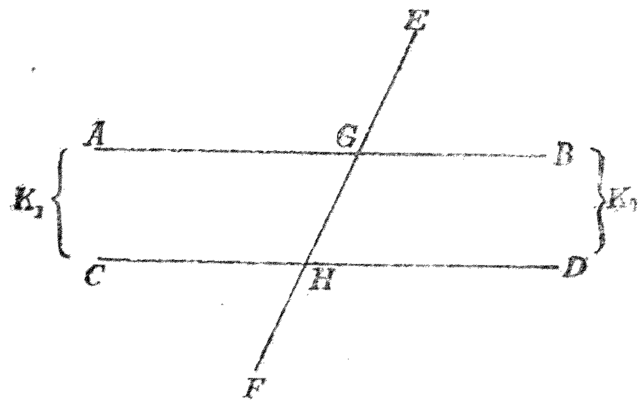
§66. **定理一七**　二直線爲一截線所截，若所得一雙內錯角相等，則此二直線平行。

〔假設〕　EF交AB於G，交CD於H，而$\angle AGF=\angle DHE$。

〔終決〕　$AB \parallel CD$。

〔證〕　若云$AB \nparallel CD$而在遠處有交點K，則EF與AB，CD三線圍成一三角形GHK。

若K在左側如圖K_1，則$\angle AGF<\angle DHE$（定理一一）。



若K在右側如圖K_2，則$\angle AGF > \angle DHE$（定理一一）.

皆與假設矛盾.　　$AB \parallel CD$.　　Q.E.D.

§67. **系一**　二直線爲一截線所截，若所得一雙外錯角，或同位角相等，則此二直線平行.

§68. **系二**　二直線爲一截線所截，若所得一雙同旁內角或同旁外角互爲補角，則此二直線平行.

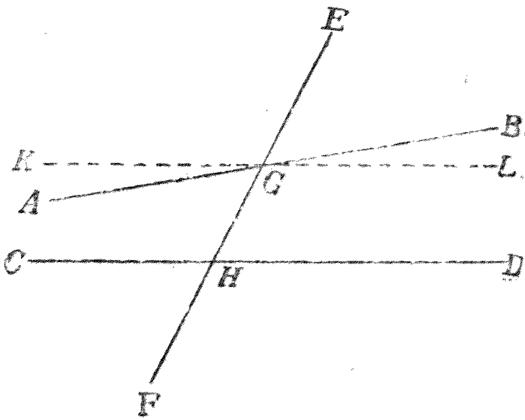
§69. **系三**　垂直於同一直線之二直線互相平行.

§70. **定理一八**　二直線爲一截線所截，若所得一雙內錯角不等，則此二直線不平行.

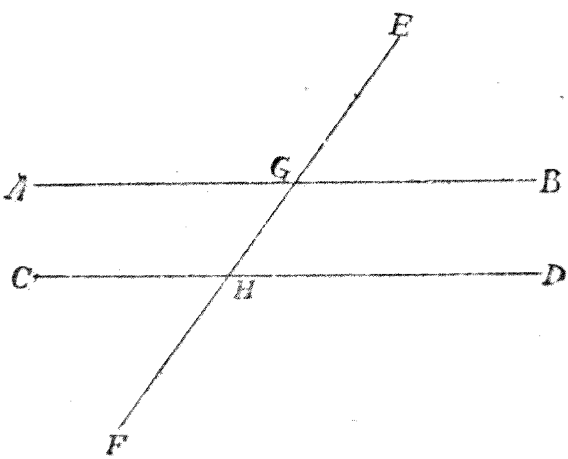
〔假設〕　EF交AB於G，交CD於H，而$\angle AGH \neq \angle GHD$.

〔終決〕　$AB \nparallel CD$.

〔證〕　過G作KL令$\angle KGH = \angle GHD$. 則$KL \parallel CD$. 因$\angle AGH \neq \angle GHD$，$\therefore \angle AGH \neq \angle KGH$. 故$AB$不合於$KL$. $\therefore AB \nparallel CD$.　　（幾何公理九）　Q.E.D.



§ 71. 定理一九 二平行線爲一截線所截，所得各雙內錯角必相等.



〔假設〕　$AB \parallel CD$，EF交AB於G，交CD於H.

〔終決〕　$\angle AGF = \angle DHE$，$\angle BGF = \angle CHE$.

〔證〕　若云$\angle AGF \neq \angle DHE$，則依定理$AB \nparallel CD$，與假設矛盾．$\therefore \angle AGF = \angle DHE$．同理$\angle BGF = \angle CHE$.

Q.E.D.

§72．**系一**　二平行線爲一截線所截，所得各雙外錯角及同位角相等．

§73．**系二**　二平行線爲一截線所截，所得各雙同旁內角及同旁外角互爲補角．

§74．**系三**　一直線垂直於二平行線之一，亦必垂直於其二．

§75．**定義二六**　**公垂線**　垂直於二平行線之直線，其介於二平行線間之線分曰此二平行線之公垂線（common perpendicular）．

§76．**倒定理**　**否定理**　**倒否定理**　二定理中，一定理之假設爲又一定理之終決，一定理之終決爲又一定理之假設，則此二定理曰互爲倒定理（converse theorem）．

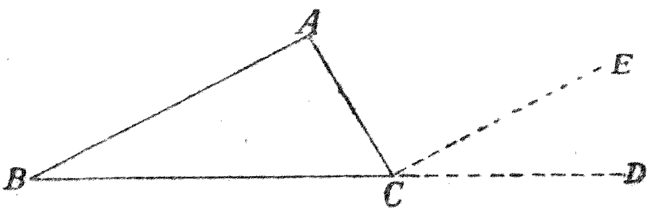
二定理中，一定理之假設爲又一定理假設之反面，一定理之終決爲又一定理終決之反面，則此二定理曰互爲否定理（obverse theorem）．

二定理中，一定理之假設爲又一定理終決之反面，一定理之終決爲又一定理假設之反面，則此二定理曰互爲倒否定理（contraposition）．

定理一七與定理一九互爲倒定理．定理一七與定理一八互爲否定理．定理一八與定理一九互爲倒否定理．

互爲倒定理之二定理並不同時成立．互爲否定理之二定理，亦不同時成立．但互爲倒否定理之二定理，却同時成立．故定理一九即根據定理一八直接證明．其實此二定理的意義完全相同，不過說法不同而已．

§77. **定理二〇** 三角形三角之和等於二直角．



〔假設〕 $\triangle ABC$.

〔終決〕 $\angle A+\angle B+\angle C=2R\angle$.

〔證〕 延長BC成外角$\angle ACD$.過C作CE令$CE \parallel BA$.

則 $\angle ACE=\angle A$（內錯角相等），

$\angle DCE=\angle B$（同位角相等）．

$$\angle A+\angle B+\angle C=\angle ACE+\angle DCE+\angle ACB.$$

因BCD爲直線，$\therefore \angle ACE+\angle DCE+\angle ACB=\text{st}\angle$.

$\therefore \quad \angle A+\angle B+\angle C=\text{st}\angle=2R\angle$. $Q.F.D.$

§78. **系一** 三角形之外角等於其內對角之和．

§79. **系二** 三角形之三角中至多只有一直角或一鈍角．

§80. **系三** 三角形之三角中，若一角爲直角，則其餘二角互爲餘角．

§81. **系四** 兩三角形中，若有兩雙角各相等，則其

第三雙角亦相等.

§82. **系五** 兩三角形中，有兩雙角各相等，及一雙等角之對邊亦相等，則此兩三角形爲合同圖（本定理簡寫爲 $a.a.s.=a.a.s.$）.

§83. **系六** 等邊三角形之各角爲 $\frac{2}{3}R\angle$.

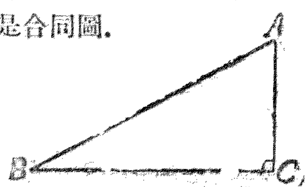
§84. **系七** 從直線外一點至此直線僅有一垂線.

§85. **定義二七** **直角三角形** 三角形三角之中有一角爲直角者曰直角三角形（right angled triangle）. 直角對邊曰斜邊（hypotenuse）. 其他二邊即曰邊（side）.

§86. **定義二八** **鈍角三角形** 三角形三角之中有一角爲鈍角者曰鈍角三角形（obtuse angled triangle）.

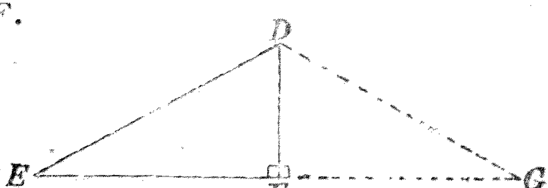
§87. **定義二九** **銳角三角形** 三角形之三角均爲銳角者曰銳角三角形（acute angled triangle）.

§88. **定理二一** 兩個直角三角形中，有一雙邊及一雙斜邊各相等，則此兩三角形是合同圖.



假設 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 中，$\angle C$，$\angle F$ 是直角，$AB=DE$，$AC=DF$.

終決 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$.



證 延長EF至G令$FG=BC$。聯DG。則因$\angle DFG=\angle C=R\angle$，$DF=AC$，$\therefore \triangle DFG\cong\triangle ABC$。

$\therefore$ $DG=AB$。 但 $AB=DE$， $\therefore$ $DE=DG$。

$\therefore$ $\angle E=\angle G$。 又 $\angle DFE=\angle DFG=R\angle$，$DF$公共，

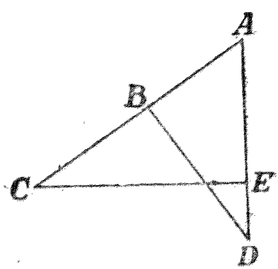
$\therefore$ $\triangle DFE\cong\triangle DFG$。 $\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$。

Q.E.D.

〔註〕 本定理常簡寫爲 $s.s.R.=s.s.R.$

習 題 四

1\. 圖中$CE\perp AD$，$DB\perp AC$。求證$\angle C=\angle D$。



2\. 從直角三角形直角頂點A向斜邊作垂線AD，則$\angle BAD=\angle C$，$\angle CAD=\angle B$。

3\. 二等邊三角形等邊上的兩個高相等。

4\. 過二等邊三角形頂點作底之平行線，此線等分頂角之外角。

5\. $\triangle ABC$爲二等邊三角形，BC爲底。從BC上任意一點D作BC之垂線交AB，AC（或延線）於E，F。求證$\triangle AEF$亦爲二等邊三角形。

6\. 從$\triangle ABC$之頂點A向BC上作二線分AD，AE。令$\angle BAD=\angle C$，$\angle CAE=\angle B$。求證$\triangle ADE$是二等邊三角

形.

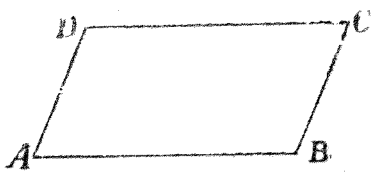
7. 三角形二外角等分線所夾之角等於第三外角之半.

8. 設$\triangle ABC$中$\angle A=2\angle B=3\angle C$. 求各角.

〔註〕 角之量法在幾何中常以直角為單位. 如(8)題中所謂求各角, 即求$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, 各為直角之幾倍或幾分之幾也. 但為便利起見, 亦可以"度", "分", "秒", 表之. "度", "分", "秒", 各簡記為"$^\circ$", "$'$", "$''$". $1R\angle=90^\circ$, $1^\circ=60'$, $1'=60''$.

第五章　平行四邊形

§89. **定義三〇**　平行四邊形　兩雙對邊各互相平行之四角形曰平行四邊形(parallelogram).

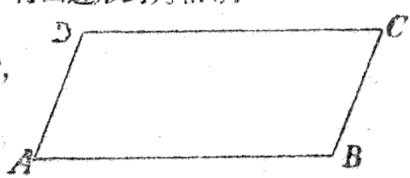


如圖 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, 則$ABCD$. 爲平行四邊形, 簡寫爲$\square ABCD$. 或更簡寫爲$\square AC$, 或$\square BD$.

平行四邊形之任意一雙對邊可爲底, 其間公垂線爲高.

§90. **定義三一**　梯形　四角形之一雙對邊平行, 一雙對邊不平行者曰梯形(trapezoid).一雙平行邊曰底(base).一雙不平行邊曰邊(side).兩底間之公垂線曰高(altitude).

§91. **定理二二**　平行四邊形對角相等.



〔假設〕　$\square ABCD$.

〔終決〕　$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

〔證〕　因$AB \parallel DC$,

$\therefore \angle A$爲$\angle D$之補角.

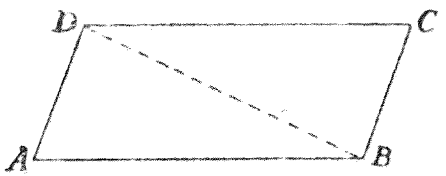
因　$AD \parallel BC$, $\therefore \angle C$爲$\angle D$之補角.

$\therefore \angle A = \angle C$

同理　　$\angle B = \angle D$.　　　*Q.E.D.*

§92. **系**　平行四邊形中有一角爲直角, 則各角皆爲直角.

§93．定理二三　平行四邊形對邊相等．



〔假設〕　▱$ABCD$．

〔終決〕　$AB=DC$，$AD=BC$．

〔證〕　聯BD．在$\triangle ABD$，$\triangle CBD$中，

$\because$　$AB \parallel DC$，$\therefore \angle ABD=\angle CDB$．（內錯角相等）

$\because$　$AD \parallel BC$，$\therefore \angle ADB=\angle CBD$．（內錯角相等）

又 BD爲公共，$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$．

$\therefore AB=DC$，$AD=BC$．　Q.E.D.

§94．系　平行四邊形中，二鄰邊相等，則四邊皆相等．

§95．定義三二　矩形　四角爲直角之平行四邊形曰矩形（rectangle）．

§96．定義三三　菱形　四邊皆相等之平行四邊形曰菱形（rhombus）．

§97．定義三四　正方形　平行四邊形之四邊均相等而四角皆爲直角者曰正方形（square）．

§98．定理二四　四角形之兩雙對邊各相等，則此四角形爲平行四邊形．

§99．定理二五　四角形之一雙對邊平行且相等，則此四角形爲平行四邊形．

§100. **定理二六**　平行四邊形之對角線互相等分.

§101. **定理二七**　四角形之二對角線互相等分，則此四角形爲平行四邊形.

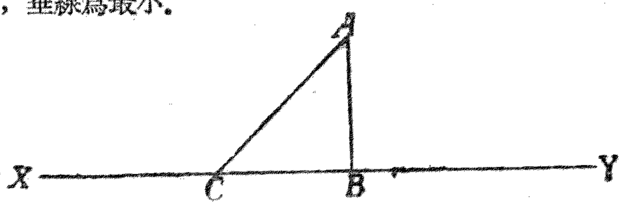
§102. **定理二八**　矩形之二對角線相等.

§103. **定理二九**　平行四邊形之二對角線若相等，則此平行四邊形爲矩形.

§104. **系**　直角三角形斜邊中點，與三頂點等距.

（以上諸定理，學者試自證之）.

§105. **定理三〇**　從直線外一點向此直線上所作諸線分，垂線爲最小.



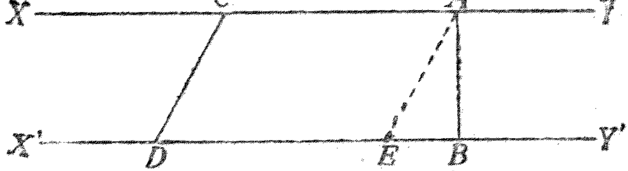
〔假設〕　AB爲從A至XY之垂線，AC爲斜線.

〔終決〕　$AB<AC$.

〔證〕　$\angle ABC \doteq R\angle$，$\angle ACB<R\angle$

$\therefore$　$\angle ACB<\angle ABC$　$\therefore AB<AC$.　Q.E.D.

§106. **定理三一**　介於二平行線間之諸線分，公垂線



為最小。

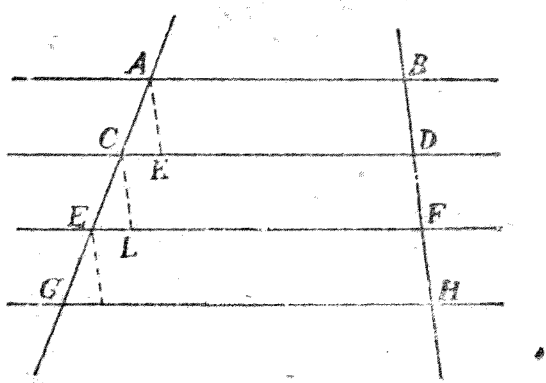
〔假設〕　$XY \parallel X'Y'$，AB為其間之公垂線，CD為
線。

〔終決〕　$AB<CD$.

〔證〕　過A作$AE \parallel CD$. 則得 ▱$AEDC$. $\therefore AE=C$
D. 但$AB<AE$. $\therefore AB<CD$.　　　　Q.E.D.

§107. **定義三五　距離**　二點所聯線分，曰二點間之距離 (distance between two points). 從一點至一直線
作垂線，曰一點與一直線之距離 (distance between a point and a line). 二平行線間之公垂線曰二平行線之距離 (distance between two parallel lines).

§108. **定理三二**　諸平行線若將任意一截線分成相等部分，則將其他一切截線亦分成相等部分。



〔假設〕　$AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$，$AC=CE=EG$.

〔終決〕　$BD=DF=FH$.

〔證〕 作AK, CL平行於BH, 則$AKDB$, $CLFD$皆為平行四邊形. $\therefore AK=BD, CL=DF$. 在$\triangle ACK$, $\triangle CEL$中,

$$\because \quad CD \parallel EF, \quad \therefore \angle ACK=\angle CEL.$$

$$\because \quad AK \parallel CL, \quad \therefore \angle CAK=\angle ECL.$$

$$\text{又} \quad AC=CE.$$

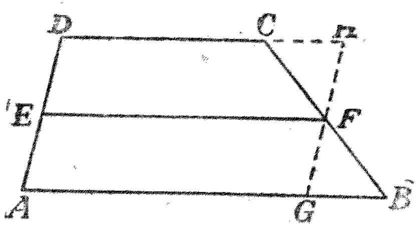
$$\therefore \triangle ACK \cong \triangle CEL, \quad \therefore AK=CL, \quad \therefore BD=DF.$$

同理可證 $\quad BD=DF=FH.$ $\quad$ Q.E.D.

§109. 系一 過梯形一邊中點所作底之平行線必過又一邊之中點.

§110. 系二 過三角形一邊中點所作第二邊之平行線必過第三邊之中點.

§111. 定理三三 梯形兩邊中點所聯線分(1)平行於底(2)等於兩底和之半.



〔假設〕 E, F為梯形$ABCD$兩邊AD, BC之中點.

〔終決〕 (1) $EF \parallel AB \parallel DC$.

(2) $EF=\frac{1}{2}(AB+DC)$.

〔證〕 過F作AD之平行線交AB於G, 交DC之延線於H.

在 $\triangle FGB$, $\triangle FHC$中，因$AB \parallel DH$, $\therefore \angle FBG = \angle FCH$,

又 $\angle GFB = \angle HFC$, $BF = FC$. $\therefore \triangle FGB \cong \triangle FHC$.

$$\therefore \quad GF = FH, \ GB = CH.$$

$\because$ $AGHD$爲平行四邊形, $\therefore$ $AD = GH$.

今 $AE = ED = \frac{1}{2}AD$, $GF = FH = \frac{1}{2}GH$, $\therefore AE = GF$

又因 $AE \parallel GF$, $\therefore AGFE$ 爲平行四邊形.

$$\therefore \quad EF \parallel AB \parallel DC \cdots\cdots\cdots(1) \qquad Q.E.D.$$

因 $AGFE$, $EFHD$ 皆爲平行四邊形,

$\therefore$ $EF = AG = DH$,

$$\begin{aligned} \therefore \quad 2EF &= AG + DH \\ &= AB - GB + DC + CH \\ &= AB + DC. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad EF = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdots\cdots\cdots(2) \qquad Q.E.D.$$

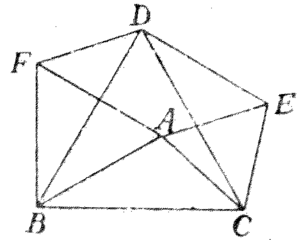
§112. 系 三角形兩邊中點所聯線分(1)平行於第三邊. (2)等於第三邊之半.

習題五

1. 在$\square ABCD$四邊 AB, BC, CD, DA 上各取點 E, F, G, H，令 $AE = CG$, $BF = DH$，則$EFGH$亦爲平行四邊形.

2. 若平行四邊形之兩個

對角線相等，則此平行四邊形為矩形.



3. 在線分 AB 之兩旁各作 ▱$ABCD$ 及 ▱$ABEF$，則 $CDFE$ 亦為平行四邊形.

4. 菱形之對角線互相垂直.

5. $\triangle ABC$ 為任意三角形. 在三邊 AB, AC, BC 上各作正三角形 $\triangle ABF$，$\triangle ACE$，$\triangle BCD$ 如圖. 則 $AEDF$ 為平行四邊形.

6. 梯形 $ABCD$ 之兩邊 AB，CD 若相等，則 $\angle A=\angle D$. $\angle B=\angle C$.

7. D 為 $\triangle ABC$ 一邊 BC 之中點. E 為中線 AD 之中點 BE 延線交 AC 於 F. 則 $FC=2AF$.

8. $ABCD$ 為任意四邊形. E, F, G, H 為順次四邊之中點. 則 $EFGH$ 為平行四邊形.

9. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$. 在 AB 上取 D，AC 之延線上取 E，令 $BD=CE$. DE 交 BC 於 F. 則 F 為 DE 之中點.

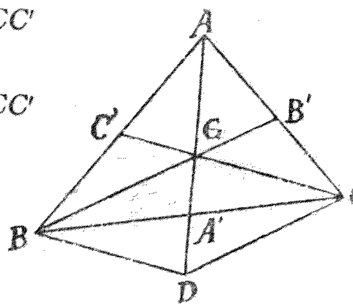
10. 三角形之二中線相等，則此三角形為二等邊三角形.

第六章　三角形之心

§113. **定義三六　共點線**　過公共一點之諸直線曰共點線 (concurrent lines).

§114. **定義三七　共線點**　在公共一直線上之諸點曰共線點 (collinear points).

§115. **定理三四**　三角形之三個中線爲共點線.



〔假設〕　AA', BB', CC' 爲$\triangle ABC$之中線.

〔終決〕　AA', BB', CC' 共點.

〔證〕　設BB', CC'交於G. 聯AG延長至D令$AG=GD$. 聯 BD, CD.

在$\triangle ABD$中, $AC'=C'B$, $AG=GD$,　$\therefore C'G \parallel BD$.

在$\triangle ACD$中, $AB'=B'C$, $AG=GD$,　$\therefore B'G \parallel CD$.

故$BDCG$爲平行四邊形.　$\therefore BC, GD$互相等分. 即GD過BC之中點A'.　$\therefore$ AD與AA'重合.　$\therefore$ AA'亦過G點.

$\therefore$　AA', BB', CC' 共點.　　Q.E.D.

§116. **系**　三角形三中線所共之點與頂點之距離等於其與對邊中點距離之二倍.

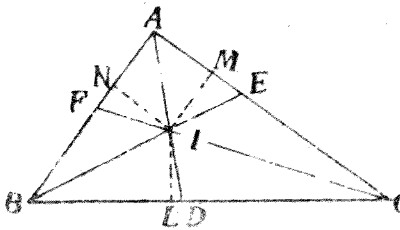
如上圖$AG=GD=2GA'$, $BG=DC=2GB'$, $CG=DB=2GC'$.

§117. **定義三八 重心** 三角形三中線所共之點曰三角形之重心 (centre of gravity or centroid).

§118. **定理三五** 三角形之三個等分角線共點.

〔假設〕 AD, BE, CF 爲$\triangle ABC$之等分角線.

〔終決〕 AD, BE, CF共點.



〔證〕 設 BE, CF 交於I. 作$IL \perp BC$, $IM \perp AC$, $IN \perp AB$.

則在$\triangle IBL$, $\triangle IBN$中,

$\angle IBL = \angle IBN$, $\angle ILB = \angle INB$ $(R\angle)$, IB爲公共邊,

$\therefore$ $\triangle IBL \cong \triangle IBN$, $IL = IN$.

在$\triangle ICL$, $\triangle ICM$中,

$\angle ICL = \angle ICM$, $\angle ILC = \angle IMC$ $(R\angle)$, IC爲公共邊,

$\therefore$ $\triangle ICL \cong \triangle ICM$, $\therefore$ $IL = IM$.

$\therefore$ $IM = IN$. 聯AI.

在$\triangle IAM$, $\triangle IAN$中,

$\angle IMA = \angle INA = R\angle$, $IM = IN$, AI 爲公共邊,

$\therefore$ $\triangle IAM \cong \triangle IAN$ $(s.s.R. = s.s.R.)$

$\therefore$ $\angle IAM = \angle IAN$. 即AI爲$\angle A$之等分線.

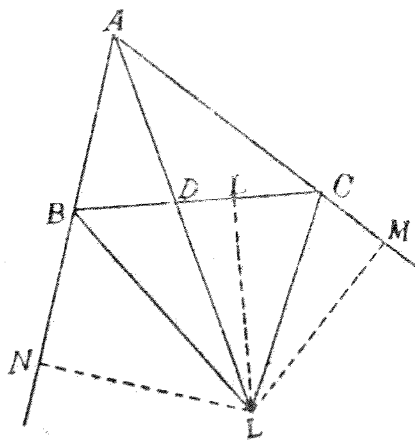
$\therefore$ AI與AD重合 (角之等分線僅有一個). 即AD亦過I.

$\therefore$ AD, BE, CF共點 Q.E.D.

§119. **系** 三角形三等分角線所共之點與此三角形之三邊距離相等.

§120. **定義三九　內心**　三角形三等分角線所共之點曰三角之內心 (in centre).

§121. **定理三六**　三角形一角之等分線及其他兩外角的等分線共點.



〔假設〕 AD 爲 $\angle A$ 之等分線, BI_1, CI_1 爲 $\angle B$, $\angle C$ 之外角等分線.

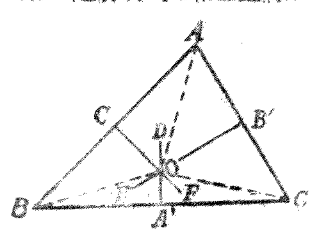
〔終決〕 AD, BI_1, CI_1 共點.

〔證法同定理三五, 學者自證之〕.

§122. **系**　三角形一角之等分線與其他兩外角之等分線所共之點與三邊距離相等.

§123. **定義四〇　旁心**　三角形一角之等分線與其他兩外角之等分線所共之點曰三角形之旁心 (es-centre). 一三角形有三旁心.

§124. **定義四一　垂直等分線**　過線分中點之垂線曰此線分之垂直等分線 (perpendicular bisector).



§125. **定理三七**　三角形三邊之垂直等分線共點.

〔假設〕 $A'D$, $B'E$, $C'F$ 各爲 BC, AC, AB 之垂直等分

線.

〔終決〕 $A'D, B'E, C'F$ 共點.

〔證〕 設 $B'E, C'F$ 交於 O. 聯 OA, OB, OC.

在 $\triangle AOC'$, $\triangle BOC'$ 中, $AC'=C'B$, $\angle AC'O=\angle BC'O$ $(R\angle)$, $C'O$ 為公共邊, $\therefore \triangle AOC' \cong \triangle BOC'$, $\therefore OA=OC$.

在 $\triangle AOB'$, $\triangle COB'$ 中, $AB'=B'C$, $\angle AB'O=\angle CB'O$ $(R\angle)$, $B'O$ 為公共邊, $\therefore \triangle AOB' \cong \triangle COB'$, $\therefore OA=OC$.

$$\therefore \quad OB=OC.$$

聯 OA', 在 $\triangle BOA'$, $\triangle COA'$ 中, $OB=OC$, $BA'=A'C$, $A'O$ 為公共邊, $\therefore \triangle BOA' \cong \triangle COA'$, $\therefore \angle BA'O=\angle CA'O$. $(R\angle)$ $\therefore A'O$ 為垂直等分線, 因此 $A'O$ 合於 $A'D$ (垂直等分線只有一個). $A'D$ 亦過 O 點.

$\therefore \quad A'D, B'E, C'F$ 共點. Q.E.D.

§126. 系 三角形三邊垂直等分線所共之點與三角形之三頂點距離相等

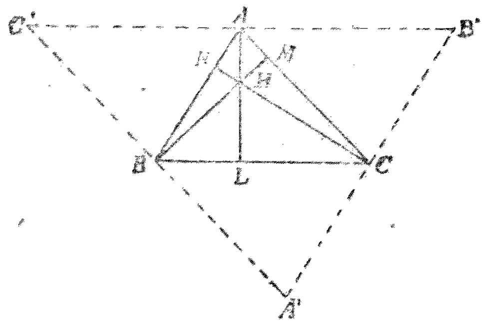
§127. **定義四二 外心** 三角形三邊垂直等分線所共之點曰三角形之外心 (circum-centre).

§128. **定理三八** 三角形之三個高共點.

〔假設〕 AL, BM, CN 為 $\triangle ABC$ 之高.

〔終決〕 AL, BM, CN 共點.

〔證〕 過頂點 A, B, C 作對邊之平行線 $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ 成 $\triangle A'B'C'$. 則 $ABCB'$, $BCAC'$, $CABA'$ 皆為平行四邊形. 故 $AB'=BC=C'A$, 即 A 為 $C'B'$ 之中點, 同理



B, C 各爲 $A'C'$, $A'B'$ 之中點．又 $AL \perp BC$，$\therefore AL \perp C'B'$．$\therefore AL$ 爲 $B'C'$ 之垂直等分線．同理 BM, CN 各爲 $A'C'$, $A'B'$ 之垂直等分線．故 AL, BM, CN 爲 $\triangle A'B'C'$ 三邊之垂直等分線．

$\therefore$ AL, BM, CN 共點． Q.E.D.

129．**定義四三 垂心** 三角形三個高所共之點曰三角形之垂心（orthocentre）．

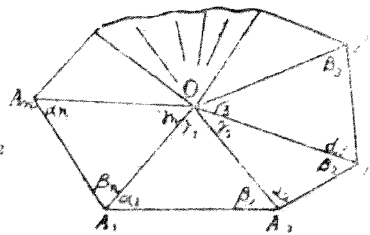
〔註〕三角形之重心及內心必在形內．三角形之三傍心必在形外．三角形之外心及垂心有時在形內，有時在形外．銳角三角形之外心及垂心在形內；鈍角三角形之外心及垂心在形外；直角三角形之外心爲斜邊之中點．其垂心即直角頂點．

第七章　多　角　形

§130. 定理三九　n角形n個內角之和等於直角之(2n－4)倍。

〔假設〕　$\angle A_1A_2A_3\cdots A_n$為$n$角形。

〔終決〕　$\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\cdots+\angle A_n=(2n-4)R\angle$。



〔證〕　在$A_1A_2A_3\cdots A_n$內任取一點O。聯$OA_1, OA_2, OA_3,\cdots,OA_n$。成$\triangle OA_1A_2, \triangle OA_2A_3, \triangle OA_3A_4,\cdots, \triangle OA_nA_1$等$n$個三角形。

在　$\triangle OA_1A_2$內，$\angle\alpha_1+\angle\beta_1+\angle\gamma_1=2R\angle$，

在　$\triangle OA_2A_3$內，$\angle\alpha_2+\angle\beta_2+\angle\gamma_2=2R\angle$，

在　$\triangle OA_3A_4$內，$\angle\alpha_3+\angle\beta_3+\angle\gamma_3=2R\angle$，

……………………………………………

在　$\triangle OA_nA_1$內，$\angle\alpha_n+\angle\beta_n+\angle\gamma_n=2R\angle$。

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}\angle\alpha_1+\angle\alpha_2+\angle\alpha_3+\cdots+\angle\alpha_n\\ +\angle\beta_1+\angle\beta_2+\angle\beta_3+\cdots+\angle\beta_n\\ +\angle\gamma_1+\angle\gamma_2+\angle\gamma_3+\cdots+\angle\gamma_n\end{array}\right\}=2nR\angle.$$

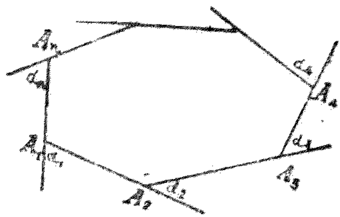
但　$\angle\gamma_1+\angle\gamma_2+\angle\gamma_3+\cdots+\gamma_n=4R\angle$。

$\therefore\quad \angle\alpha_1+\angle\alpha_2+\angle\alpha_3+\cdots+\angle\alpha_n+\angle\beta_1+\angle\beta_2$
$+\angle\beta_3+\cdots+\angle\beta_n=(2n-4)R\angle$

即　$\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\cdots+\angle A_n=(2n-4)R\angle$。Q.E.D.

§131. 系　等角 n 角形每一內角等於 $\frac{n-1}{n}R\angle$.

§132. 定理四〇　任意多角形各外角之和等於四直角.



〔假設〕　$A_1A_2A_3\cdots A_n$爲n角形. $\angle a_1, \angle a_2, \angle a_3, \cdots, \angle a_n$爲其各外角.

〔終決〕　$\angle a_1+\angle a_2+\angle a_3+\cdots+\angle a_n=4R\angle$.

〔證〕　設$\angle a_1$, $\angle a_2$, $\angle a_3, \cdots$, $\angle a_n$之相鄰內角各爲$\angle\beta_1$, $\angle\beta_2$, $\angle\beta_3, \cdots, \angle\beta_n$.

則　$\angle a_1+\angle\beta_1=2R\angle$,

$\angle a_2+\angle\beta_2=2R\angle$,

$\angle a_3+\angle\beta_3=2R\angle$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\angle a_n+\angle\beta_n=2R\angle$.

$\therefore$　$\angle a_1+\angle a_2+\angle a_3+\cdots+\angle a_n$

$+\angle\beta_1+\angle\beta_2+\angle\beta_3+\cdots+\beta_n=2nR\angle$.

但　$\angle\beta_1+\angle\beta_2+\angle\beta_3+\cdots+\angle\beta_n=(2n-4)R\angle$.

故　$\angle a_1+\angle a_2+\angle a_3+\cdots+\angle a^n=4R\angle$. Q.E.D.

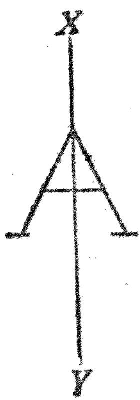
§133. 系　等角 n 角形每一外角等於$\frac{4}{n}R\angle$.

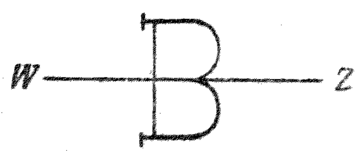
習　題　六

1. 求正六角形每一內角及每一外角.
2. 已知五角形之四個角各爲 105°，求其他一角.
3. 一多角形之各角均爲 144°，則此形爲幾角形？
4. 一凸多角形至多只有三個角是銳角，何故？

第八章 對稱形

§134. **定義四四 軸對稱** 平面中一直線分平面爲二部分. 若以此直線爲摺痕將平面之一部分摺合於又一部分而兩部分中之圖形互相合一時, 則此兩圖形曰關於此直線爲對稱 (symmetrical with respect to a line). 此直線曰對稱軸 (axis of symmetry). 此兩圖形視爲一圖形時曰軸對稱圖形 (symmetrical figure with respect to an axis).



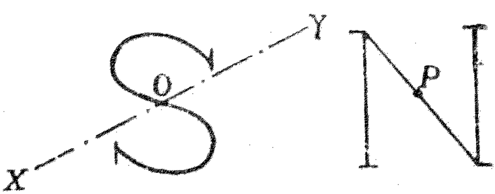


如圖A,B二字皆爲軸對稱圖形, A之左右兩邊關於XY爲對稱, XY爲其對稱軸. B之上下兩邊關於WZ爲對稱, WZ爲其對稱軸.

§135. **定義四五 中心對稱** 平面中一直線上一點分直線爲兩個半射線, 分平面爲兩個直線角. 若固定此點

一直線角旋轉合於又一直線角而兩角內之圖形互相合一時，則此兩圖形曰關於此點爲對稱 (symmetrical with respect to a point)。此點曰對稱中心 (centre of symmetry)。此兩圖形視爲一圖形時曰中心對稱圖形 (symmetrical figure with respect to a centre)。

如圖 S,N 二字皆爲中心對稱圖形，O 爲 S 之對稱中心。因過 O 作任意一直線 XY 成兩個 $st\angle XOY$ 若固定 O 而旋轉令 OX 合於 OY 而 OY 合於 OX 時兩邊圖形合一也。此兩邊圖形關於 O 爲對稱。同樣 P 爲 N 之對稱中心。



凡軸對稱圖形未必爲中心對稱，凡中心對稱圖形亦未必爲軸對稱，如 A,B 非中心對稱，而 S,N 非軸對稱也。然亦有既爲軸對稱，又爲中心對稱者。字母中如 H,I,O,X 等皆是。

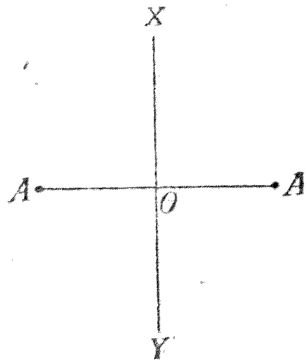
凡兩圖形關於一軸或一中心爲對稱，則此兩圖形爲對稱形。

§136. **定理四一** 兩點關於所聯線分之垂直等分線爲對稱。

〔假設〕 XY 爲 AA' 之垂直等分線。

〔終決〕 A,A' 關於 XY 爲對稱。

〔證〕 $\because XY\perp AA'$，$\therefore \angle XOA=\angle XOA'$。故若以



XY 爲摺痕將左側之 OA 摺至右側時，OA 與 OA' 相重．又

$\because \quad OA=OA'$,

$\therefore \quad A$ 與 A' 合一．故 A, A' 關於 XY 爲對稱． Q. E. D.

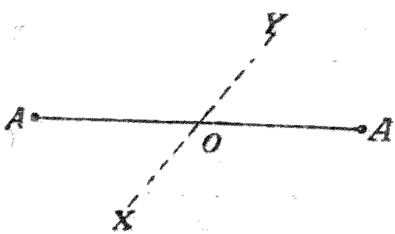
〔註〕軸對稱以 $\wedge$ 記之．如 A 對稱於 A'，寫作 $A \wedge A'$.

§ 137. 系 一雙軸對稱點之聯線垂直於軸．

§ 138. 定理四二 兩點關於所聯線分中點爲對稱．

〔假設〕 O 爲 AA' 之中點．

〔終決〕 A, A' 關於 O 爲對稱．



〔證〕 過 O 任意作一直線 XY．則 $\angle AOX = \angle A'OY$．故若固定 O 旋軸令 OX 合於 OY 時，OA 必與 OA' 相重．又因 $OA=OA'$，$\therefore$ A 合於 A'．

$\therefore \quad A, A'$ 關於 O 爲對稱． Q. E. D.

〔註〕中心對稱以 $\bowtie$ 記之．如 A 對稱於 A'，寫作 $A \bowtie A'$.

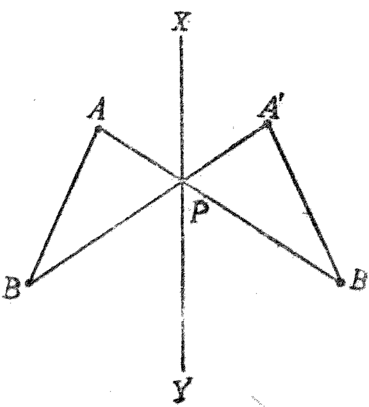
§ 139. 系 一雙中心對稱點與對稱中心共線．

§ 140. 定理四三 兩雙點關於同軸爲對稱，則此兩雙點所聯線分關於此軸爲對稱．

〔假設〕 XY 爲軸，$A \wedge A'$，$B \wedge B'$．

〔終決〕 XY 爲軸，$AB \wedge A'B'$，$AB' \wedge A'B$．

〔證〕 XY 爲軸，$A \wedge A'$，$B \wedge B'$，故以 XY 爲摺痕摺合時，A 合於 A'，B 合於 B'，$\therefore AB$ 合於 $A'B'$. $AB \wedge A'B'$.



又設 AB' 交 XY 於 P. 聯 PA'，PB. 則以 XY 爲摺痕摺合時，

A 合於 A'，$\therefore$ AP 合於 $A'P$. $\because$ B 合於 B'，$\therefore$ BP 合於 $B'P$. 故 $\triangle ABP \cong \triangle A'PB'$.

$\therefore$ $\angle APB = \angle A'PB'$，故 $A'PB$ 亦爲直線.

$\therefore$ $AB' \wedge A'B$. Q.E.D.

§141. **系一** 兩雙點關於同軸爲對稱，則過此兩雙點之一雙直線關於此軸爲對稱.

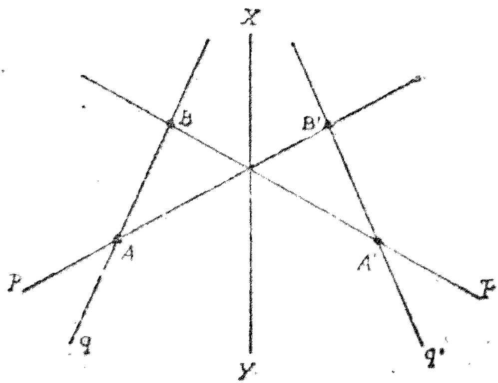
§142. **系二** 軸上任意點與一雙關於此軸之對稱點所聯線分或直線爲對稱.

§143. **系三** 一雙軸對稱直線之交點在其軸上.

§144. **系四** 兩多角形之各雙頂點關於同軸爲對稱，則此兩多角形關於此軸爲對稱.

§145. **系五** 等長線分之一雙對應端點關於某軸爲對稱，則又一雙端點關於此軸爲對稱.

§146. **定理四四** 兩雙直線關於同軸爲對稱，則此兩雙直線之交點關於此軸爲對稱.



〔假設〕 XY為軸，直線$p\wedge p'$，直線$q\wedge q'$，p,q交於A；p',q'交於A'；p',q交於B；p,q'交於B'。

〔終決〕 XY為軸，$A\wedge A'$，$B\wedge B'$。

〔證〕 以XY為摺痕摺合時，

$\because$ $p\wedge p'$ $\therefore$ p合於p'. $\because$ $q\wedge q'$，$\therefore$ q合於q'

$\therefore$ A合於A'，$\therefore$ $A\wedge A'$

又 $\because$ $p'\wedge p$，$\therefore$ p'合於p，$\because$ $q'\wedge q$，$\therefore$ q'合於q

$\therefore$ B合於B'，$\therefore$ $B\wedge B'$ Q.E.D.

§147. 系一 一雙關於某軸之對稱線與該軸之任意垂線之內交上，對關於該軸對稱.

§148. 系二 兩多角形之各雙邊關於同軸為對稱，則此兩多角形關於此軸為對稱.

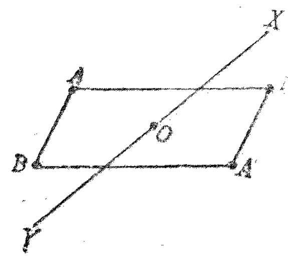
§149. 系三 一角之兩邊關於其等分線為對稱. 兩邊

上與頂點等距之各雙點爲對稱點。

§ 150. 定理四五　兩雙點關於同中心爲對稱，則此兩雙點所聯線分或直線關於此中心爲對稱。

〔假設〕　O 爲中心，$A \bowtie A'$，$B \bowtie B'$，

〔終決〕　O爲中心，$AB \bowtie A'B'$，$AB' \bowtie A'B$。



〔證〕　過O任意作一直線XY。將直線角$\angle XOY$圍繞O旋轉至OX合於OY，OY合於OX時，

$\because$　$A \bowtie A'$故A合於A'，$\therefore$　$B \bowtie B'$，$\therefore$　B合於B'，

$\therefore$　AB合於$A'B'$。$\therefore$　$AB \bowtie A'B'$。

同樣可證　　　$AB' \bowtie A'B$.　　　　　　Q.E.D.

§ 151. 系一　兩多角形之各雙頂點關於同中心爲對稱，則此兩多角形關於此心爲對稱。

§ 152. 系二　一雙中心對稱線爲平行線。

§ 153. 定理四六　兩雙直線關於同中心爲對稱，則其一雙交點關於此中心爲對稱。

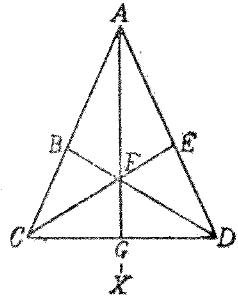
〔證略。學者自證之〕

§ 154. 系一　兩多角形之各雙邊關於同中心爲對稱，則此兩多角形關於此中心爲對稱。

§ 155. 系二　過中心之任意直線與一雙關於此中心之對稱直線之交點關於此中心爲對稱。

§ 156. 系三　一雙對稱線與中心等距。

§157. 系四 一雙相交對稱線與過中心之任意線等距.



§158. 對稱定理之應用 凡對稱圖形之證法，以對稱定理證之，較以合同三角形定理證之爲易. 舉例如下：

$\triangle ACD$ 爲二等邊三角形. 等邊 AC, AD 上取二點 B, E，而 $AB=AE$. DB, CE 交於 F. AF 延線交底 CD 於 G. 求證 $AG\perp CD$.

〔證〕 作 $\angle A$ 之等分線 AX.

以 AX 爲軸，則 $AC\wedge AD$. (§149)

$\because$ $AB=AE$, $\therefore$ $B\wedge E$. (§145)

$\because$ $AC=AD$, $\therefore$ $C\wedge D$. (§145)

$\therefore$ $BD\wedge CE$. (§140)

$\therefore$ BD, CE 之交點 F 在 AX 上. (§143)

即 AFG 合於 AX.

已知 $C\wedge D$, $\because$ $CD\perp AX$. (§137)

即 $AG\perp CD$. Q.E.D.

上題若以合同三角形定理證之，則較繁，須先證 $\triangle ACE\cong\triangle ADB$，依次再證 $\triangle BCF\cong\triangle ECF$，$\triangle ACF\cong\triangle ADF$，$\triangle ACG\cong\triangle ADG$ 方得終決. 學者試自證之.

第九章　證題之方法及雜例

§159. **證法及例**　幾何例題，千變萬化，至爲複雜，故無一定方法，可以普徧應用，以資證明．唯有熟記定理，多作習題．經驗既富，任何題來，自不難得心應手，迎刃而解．其至要者即注意各題之終決．蓋終決爲證題之目的，自當懸以爲鵠，然後着手也．茲將終決分爲數類，分別其着手法如次：

（1）　終決爲線分相等時，着手法可爲

（a）　視其是否爲合同三角形之對應邊．

（b）　視其是否爲平行四邊形之對邊．

（c）　視其是否與第三線分各相等．

（d）　視其兩雙端點是否關於某直線或某點爲對稱．

（e）　若此二線分一端點合一時，聯其他一雙端點，視其是否兩角相等．

（f）　若此二線分相交時，是否爲平行四邊形之對角線．

（2）　終決爲兩角相等時，着手法可爲

（a）　視其是否爲合同三角形之對應角．

（b）　視其是否爲平形四邊形之對角．

（c）　視其是否與第三角各相等，或各爲第三角之補角或餘角．

（d）　視其是否爲二等邊三角形之底角．

（e）　視其是否關於二平行線之內錯角，外錯角或

位角.

（f）視其是否爲二相交直線之對頂角.

（3）終決爲甲線分大於乙線分時，着手法可爲

（a）視圖中有無甲線分之等線分大於乙線分，或乙線分之等線分小於甲線分，或小於甲線分而大於乙線分之線分.

（b）若爲一個三角形之二邊時，視其是否合於 § 57

（c）若爲兩個三角形之各邊時，視其是否合於 § 61

（d）視甲線分是否等於某三角形二邊之和而乙線分爲其第三邊或等於其第三邊.

（4）終決爲甲角大於乙角時，着手法可爲

（a）視圖中有無甲角之等角大於乙角，或乙角之等角小於甲角，或小於甲角而大於乙角之角.

（b）視乙角是否爲甲角之內對角.

（c）若爲一個三角形之二角時，視其是否合於 § 56

（d）若爲兩個三角形之各角時，視其是否合於 § 62

（5）終決爲甲線分等於乙線分之二倍時，着手法可爲

（a）延長乙線分至二倍長而證其與甲線分相等.

（b）在甲線分上取中點而證其線分之半與乙線分相等.

（c）視其是否可應用等量代入法如 (1) (c), (3) (d).

（d）若甲線分爲三角形之一邊，視可否聯其他二邊中點而證其所聯線分等於乙線分.

（6）終決爲甲角等於乙角之二倍時，着手法可爲

（a）仿（5）（a）.

（b）仿（5）（b）.

（c）仿（5）（c）.

（d）視甲角是否爲二等邊三角形頂角之外角而乙

爲其內對角或等於其內對角.

（7）終決爲兩直線平行時，着手法可爲

（a）視其有無一雙內錯角，外錯角，或同位角相等.

（b）視其是否可爲平行四邊形之對邊.

（c）視其是否與第三直線各平行.

（d）視其是否與第三直線各垂直.

（e）視其一直線是否通過以又一直線爲一邊之三

形之其他二邊之中點.

（8）終決爲三線共點時，着手法可爲

（a）證其中二線之交點在第三線上.

（b）視其中二線之交點與第三線上某二點是否共

線.

（c）證其中每二線分之各交點合一.

（d）在三線上各覓一點爲三角形視此三線是否均

爲角形之中線或垂線或等分線等.

（9）終決爲三點共線時，着手法可爲

（a）聯成折線證其夾角爲直線角.

（b）聯成兩線分證其各與第三線平行.

（c）視其中二點之聯線與過第三點之某二直線是否

共點.

（10）終決之關於計算角之大小者，常可以代數方程

式解之.

(11)　圖形之爲對稱者可決其軸或中心而證之.

關於直線形之幾何題，要不出乎以上數類. 唯稍複雜之題，非添補助線仍無從着手. 故補助線之加添，實爲幾何中之要事. 然亦無定法，須審察各題之情形而試之. 但其要點，不外乎以下數事：

(1)　使假設中事與終決中事接近.

(2)　添出線分或角使可適用等量代入法.

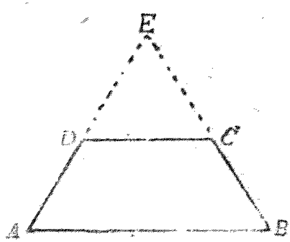
(3)　就假設添出線分俾適合於引用定理.

(4)　就終決添出線分俾適合於引用定理.

(5)　改移一部分圖形之位置俾適合於引用定理.

(6)　改造圖形使變爲一較易證之題.

玆擧實例如下：



(例題一)　四邊形$ABCD$中，已知$AD=BC$，$\angle D=\angle C$. 求證$\angle A=\angle B$.

〔證法一〕　先看終決中$\angle A$，$\angle B$兩角共有一邊AB. 故依上述證法(2)d，可視其是否可爲二等邊三角形之底角. 由是作補助線延長AD及BC使交於一點E. 於是極易看出如下的證明：

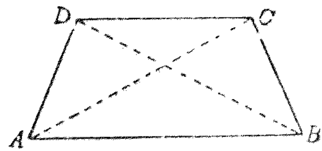
$\because$　$\angle ADC=DCB$，$\therefore$　$\angle EDC=\angle ECD$，

$ED=EC$. 又因$AD=BC$，$\therefore AD+ED=BC+EC$，

則　$EA=EB$. $\therefore \angle A=\angle B$.　　　　Q.E.D.

本證法之補助線，即就終決添出，俾適合於引用定理

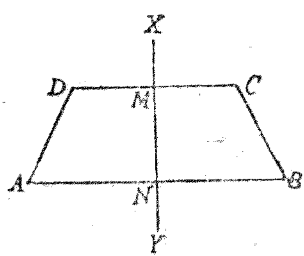
也.



〔證法二〕 因已知 $AD=BC$, $\angle D=\angle C$, 然 DC 可為公邊. 故若添二對角線 AC,BD, 則顯然可得 $\triangle ACD\cong\triangle BDC$ 此兩三角形之合同, 當然有用. 因終決中之 $\angle A$, $\angle B$ 兩角, 依上述證法 (2)a, 可視有此二角之 $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ 之為合同圖而決之. 今從已證得之 $\triangle ACD\cong\triangle BDC$, 可得 $BD=AC$, 又已知 $DA=CB$, AB 為公邊.

故 $\triangle ABD\cong\triangle ABC$. $\therefore\ \angle A=\angle B$. Q.E.D.

本證法之補助線即就假設添出俾適合於引用定理也.



〔證法三〕 此圖顯然當為軸對稱圖, 故依證法 (11) 可添一適宜之軸以證之.

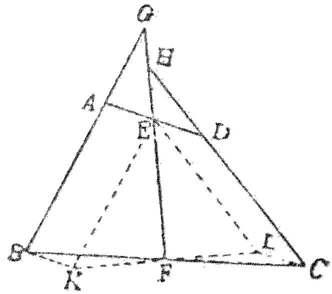
作 DC 之垂直等分線 XY 交 DC 於 M, 交 AB 於 N, 則以 XY 為軸, $D\wedge C$, $\therefore DM\wedge MC$. 因 $\angle D=\angle C$, $\therefore DA\wedge CB$.

$DA=CB$. $\therefore A\wedge B$, $\therefore AN\wedge NB$.

$\therefore\ \angle DAN=\angle CBN$ Q.E.D.

(例題二) 四邊形 $ABCD$ 中 $AB=CD$, E, F 各為 AD, BC 之中點. FE 之延線交 BA 之延線於 G, 交 CD 之延線於 H, 求證 $\angle BGF=\angle CHF$.

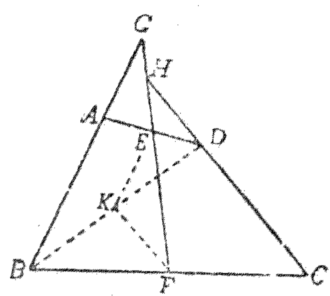
〔證法一〕 本題較例題一為難. 因假設與終決似乎各不相關, 不易着手也. 故想法添出補助線, 俾可適用等量



代入法.

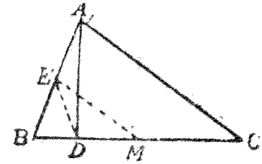
過E作$EK\parallel GB$, $EL\parallel HC$, 則$\angle KEF$, $\angle LEF$各爲$\angle BGF$, $\angle CHF$之同位角. 故只須證$\angle KEF=\angle LEF$即得. 然假設中知$AB=DC$, 故作$\square ABKE$, $\square DCLE$, 則EK必可$=EL$. 聯KF與LF. 成$\triangle KEF$與$\triangle LEF$有公邊EF. 故若$KF=LF$則可爲合同圖而得終決. 試就$\triangle BKF$, $\triangle CLF$觀之, $BK=AE=ED=LC$, $BF=FC$, 又因$BK\parallel AD\parallel LC$, $\therefore$ $\angle KBF=\angle LCF$. $\therefore$ $\triangle BKF\cong\triangle LCF$, $\therefore$ $KF=LF$, $\therefore$ $\triangle EKF\cong\triangle ELF$, $\therefore$ $\angle KEF=\angle LEF$.

$\therefore$ $\angle BGF=\angle CHF$.　　Q.E.D.



〔證法二〕　因已知E, F各爲AD, BC之中點, 故利用§112之定理, 先聯一對角線BD. 取其中點K. 聯KE, KF, 則$KE\parallel BG$, $KF\parallel HC$. $\therefore$ $\angle BGF=\angle KEF$, $\angle CHF=\angle KFE$. 然$\angle KEF$, $\angle KFE$爲一個三角形之二角, 故只須證KE, KF相等. 然$KE=\frac{1}{2}AB$, $KF=\frac{1}{2}CD$. 而已知$AB=CD$, $\therefore$ $KE=KF$,

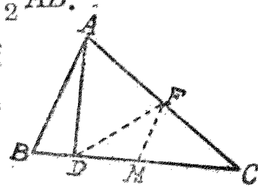
$\therefore$ $\angle KEF=\angle KFE$. $\therefore$ $\angle BGF=\angle CHF$. Q.E.D.



（例題三）$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$. $AD\perp BC$，M為BC之中點．求證$DM=\frac{1}{2}AB$.

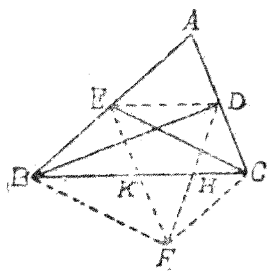
〔證法一〕本題終決為甲線分等於乙線分之二倍．故依上述證法（5）b，取AB之中點E. 然後求證$DM=AE$或EB. 然因DM與AE或BE無直接關係，故更須添補助線以證之．因$AD\perp BC$，故$\triangle ADB$為直角三角形．$\therefore E$當與三頂點等距．因聯ED，而求證$ED=DM$. 於是依上述證法（1）c，聯EM，而求證$\angle DEM=\angle DME$. $\because$假設中尚有一事$\angle B=2\angle C$，$\because EB=ED$，$\therefore \angle EBD=\angle EDB$，又$\because EM\parallel AC$，$\therefore \angle EMB=\angle C$. $\therefore \angle EDB=2\angle EMD$. 又$\because \angle EDB=\angle DEM+\angle DME$，$\therefore 2\angle EMD=\angle DEM+\angle DME$，$\therefore \angle DEM=\angle DME$，$\therefore DM=DE=\frac{1}{2}AB$.　　Q.E.D.

〔證法二〕本題終決為$DM=\frac{1}{2}AB$.



$\because M$為BC之中點，若取AC中點F，聯FM則$FM=\frac{1}{2}AB$. 故本題終決可改為$DM=FM$. 若能證得$\angle MDF=\angle MFD$即得．但因F為AC中點而$\angle ADC$為$R\angle$，$\therefore \angle FDC=\angle C$，又因$AB\parallel FM$，$\therefore \angle FMC=\angle B$. $\because \angle B=2\angle C$，$\therefore \angle FMC=2\angle FDC$. 然$\angle FMC=\angle FDC+\angle MFD$. $\therefore \angle MDF=\angle MFD$. $\therefore DM=FM$.　　$\because DM=\frac{1}{2}AB$.　　Q.E.D.

（例題四）　三角形二邊不等，則大邊上之中線小於小邊上之中線。

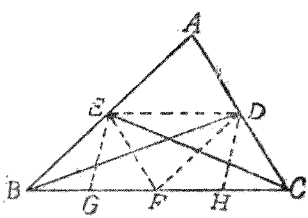


〔假設〕　$\triangle ABC$中，$AB>AC$，BD爲AC上之中線，CE爲AB上之中線。

〔終決〕　$CE<BD$。

〔證法一〕　作$\square BECF$，則$BF=CE$，故終決可改爲$BF<BD$。聯成$\triangle FED$。則因$ED\parallel BC$，K爲EF之中點（BC，EF互相等分），故H爲DF之中點。$\because CF=EB=\frac{1}{2}AB, CD=\frac{1}{2}AC$，已知$AB>AC$，$\therefore CF>CD$。故在$\triangle CHF$，$\triangle CHD$中，$HF=HD$；$HC$爲公邊，$\therefore \angle CHF>\angle CHD$，$\therefore \angle BHF<\angle BHD$。故在$\triangle BFH$，$\triangle BHD$中，$HF=HD$，$HB$爲公邊。

$\therefore$ $BF<BD$。$\therefore$ $CE<BD$。　　　　Q.E.D.

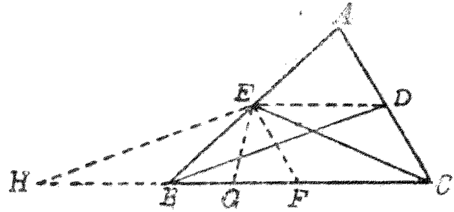


〔證法二〕　取BC之中點F。聯EF。則$EF\parallel AC$且$EF=\frac{1}{2}AC$，而$EB=\frac{1}{2}AB$。因$AB>AC$，$\therefore EB>EF$。作$\triangle EBF$之中線EG，則從$EB>EF$，可得$\angle EGB>\angle EGF$。作$\square GEDH$則$GH=ED=\frac{1}{2}BC$。而$BG=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{4}BC$。$BH=BG+GH=\frac{3}{4}BC$，$GC=BC-BG=\frac{3}{4}BC$。$\therefore BH=GC$。又因$EG\parallel DH$，$\therefore \angle DHB=\angle EGB>\angle EGC$。故在$\triangle EC$

G，$\triangle DBH$ 中，$EG=DH$，$GC=BH$，$\angle EGC<\angle BHD$．

$\therefore \quad EC<BD$． Q.E.D.

〔證法三〕 如證法二作 EF，EG，證得 $\angle EGB>\angle EGF$ 後．作 $\square EDBH$，則 $EH=DB$，$HB=ED=FC$．

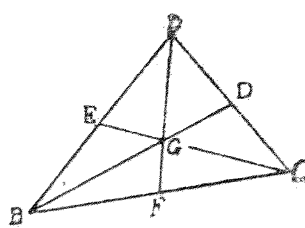


$\therefore \quad HG=GC$．在 $\triangle EHG$，$\triangle ECG$ 中可證得 $EH>EC$．

$\therefore \quad EC<BD$． Q.E.D.

以上證法皆頗費事．然若記得重心定理及其系時，則證之即較易．試看

〔證法四〕 BD，CE 爲中線，故其交點 G 爲 $\triangle ABC$ 之重心．作第三中線 AF，必過 G 點．在 $\triangle ABF$，$\triangle ACF$ 中，$BF=FC$，AF 爲公邊，$AB>AC$，



$\therefore \angle AFB>\angle AFC$．在 $\triangle GBF$，$\triangle GCF$ 中，$BF=FC$，GF 爲公邊，$\therefore BG>GC$．然 $BG=\frac{2}{3}BD$，$CG=\frac{2}{3}CE$．

$\therefore \quad CE<BD$． Q.E.D.

以上諸例，僅見一斑．限於篇幅，未能多舉，舉一反三，是在學者．

習 題 七

1. 四邊形 $ABCD$ 中，E，F 爲一雙對邊 AB，CD 之中

點，G,H為對邊線AC,BC之中點．求證$EGFH$為平行四邊形．

2．四邊形兩雙對邊中點所聯線分互相等分．

3．平行四邊形 $ABCD$中，E,F 各為 AB，CD之中點．AF,EC各交BD於G,H．求證$DG=GH=HB$．

4．AD為 $\triangle ABC$之中線．若 $AB>AC$ 則$\angle BAD<\angle CAD$．

5．AD為 $\triangle ABC$之等分角線．若$AB>AC$，則 $BD>DC$．

6．$\triangle ABC$中，$\angle B$之等分線與$\angle C$ 之外角等分線交於D．過D作BC之平行線交AB於E，交AC於F．則$EF=BE-CF$．

7．直角三角形斜邊上之高與中線所夾之角等於兩銳角之差．

8．P為$\triangle ABC$內任意一點．聯 AP,BP,CP，且延長之各交BC,AC,AB於D,E,F．則

$$AD+BE+CF>\frac{1}{2}(AB+AC+BC).$$

9．三角形三中線之和小於三邊之和而大於三邊和之四分之三．

10．在$\triangle ABC$之各邊BC,AC,AB上向形外各作正三角形 BCD,ACE,ABF 則 $AD=BE=CF$．

11．二等邊三角形底上任意點與二邊距離之和為定長．

12．正三角形中任意點與三邊距離之和等於此三角形之高．

13. $\triangle ABC$之垂心為H，外心為O. 則H與A之距離等於O與BC距離之二倍.

14. 三角形之垂心，重心及外心共線.

15. M為直角三角形ABC斜邊BC之中點. 從M引BC之垂線交$\angle A$之等分線於D. 則$AM=MD$.

16. D,E各為$\triangle ABC$二邊AC,BC之中點. P為AB上任意一點. 聯PD延長至F令$PD=DF$. 聯PE延長至G令$PE=EG$. 則F,C,G共線.

17. XY為$\triangle ABC$ $\angle A$之外角等分線，P為XY上任意一點. 求證$PB+PC>AB+AC$.

18. $\triangle ABC$中，$AB>AC$若過BC中點M所引直線交AB於P，交AC延線於Q而$AP=AQ$. 則$BP=CQ$.

19. $\triangle ABC$中$AB>AC$ P為$\angle A$等分線上任意一點. 求證$PB-PC<AB-AC$.

20. 六角形之三雙對邊各平行且相等，則聯三雙對角之三個對角線共點.

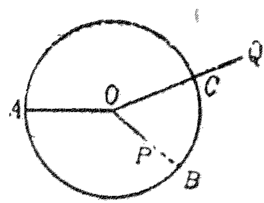
第二編　圓

第十章　圓之基礎性質

§160. **定義四六　圓　圓周　中心　半徑**　一曲線圍成一環狀圖形，此曲線上一切點皆與形內有一定點等距。此圖形曰圓（circle）。此曲線曰圓周（circumference）。形內定點曰圓之中心（center of the circle）。圓周上任意一點與中心所聯線分曰圓之半徑（radius of the circle）。

§161. **幾何公理一〇**　圓內一點與圓外一點所聯線分必與圓周相交。圓內二點所聯線分不與圓周相交而其兩端延線必與圓周相交。

§162. **定理四七**　圓周上一切點與中心距離等於半徑。圓內一切點與中心距離小於半徑。圓外一切點與中心距離大於半徑。



假設　A為⊙O上一點。P為⊙O內一點。Q為⊙O外一點。

終決　OA等於半徑；OP小於半徑；OQ大於半徑。

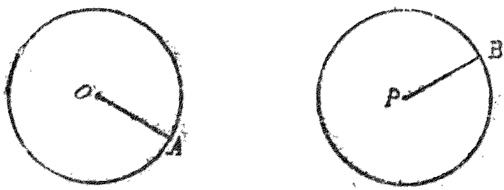
證　A在圓周上，$\therefore OA$即半徑（定義）P在圓內，但O亦在圓內，$\therefore OP$延線交圓周於B。$\therefore OP<OB$，即OP小於半徑。因Q在圓外，O在圓內，$\therefore OQ$必與圓周交於C。$\therefore OQ>OC$，即OQ大於半徑。　　$Q.E.D.$

§163. **定理四八**　一點與圓中心距離等於其半徑，則

此點在圓周上．一點與圓中心距離小於其半徑，則此點在此圓內．一點與圓中心距離大於其半徑，則此點在此圓外．

（學者試根據上節定理用窮舉證法證之）

§164．**定理四九** 兩圓半徑相等，則此兩圓為合同圖．



〔假設〕 ⊙O，⊙P中，$OA=PB$．

〔終決〕 ⊙$O\cong$⊙P．

〔證〕 移置⊙O於⊙P上令O合於P．因$OA=PB$，故A必在⊙P圓周上，B必在⊙O圓周上．即⊙O圓周上一切點皆在⊙P圓周上，⊙P圓周上一切點皆在⊙O圓周上．

∴ ⊙$O\cong$⊙P． Q.E.D.

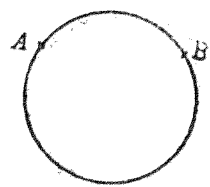
〔註一〕 中心及半徑，是圓之兩要素．中心決定圓之位置．半徑決定圓之大小．

〔註二〕 各圓之形象都相同．故圓有大小之別而無形象之別．兩圓相等，則此兩圓即合同圓．故凡合同圓常簡稱等圓．

§165．**定義四七 弧 半圓周** 圓周之一部分曰弧（arc）．若圓周上兩點分圓周為相等二弧時，則此二弧各為半圓周（semicircumference）．大於半圓周之弧曰優弧（major arc）．小於半圓周之弧曰劣弧（minor arc）．合成一個圓周之二弧曰互為相屬弧（conjugate arcs）．

弧之記法，當寫其兩端點而冠以⌒號．唯優弧須寫優

字，而劣弧則可省去劣字．如圖 $\frown AB$ 指上面一弧說．下面優弧，須寫作優 $\frown AB$．



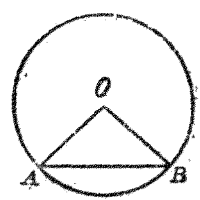
§ 166．**定義四八　弦　直徑**　圓周上兩點所聯線分曰弦 (chord)．過中心之弦曰直徑 (diameter)．

§ 167．**定義四九　弓形　扇形**　一弦與一弧所圍成之形曰弓形 (segment)．兩半徑與一弧所圍成之形曰扇形 (sector)．

弓形與扇形皆圓之一部分．大於半圓之弓形及扇形曰大弓形及大扇形．但稱弓形及扇形皆指小於半圓者而言．

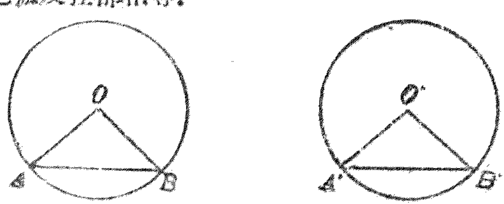
§ 168．**定義五〇　中心角**　兩個半徑所夾之角曰中心角 (central angle)．

在一圓周上取兩點．如圖⊙O 圓周上取 A,B 二點便成 $\frown AB$ 聯 AB 為弦．聯 OA,OB 又成 $\angle AOB$ 為中心角．此 $\frown AB, AB, \angle AOB$ 兩兩謂之相對．



即 $\frown AB$ 對 $\angle AOB$，$\frown AB$ 對 AB，AB 對 $\angle AOB$ 等等．

§ 169．**定理五〇**　在同圓或等圓中，中心角相等，則其所對之弧及弦都相等．



〔假設〕 $\odot O=\odot O'$, $\angle AOB=\angle A'O'B'$.

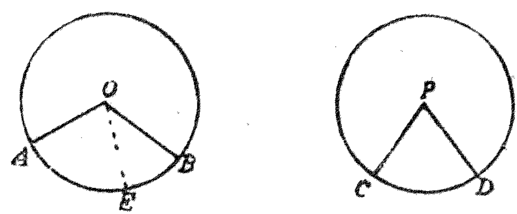
〔終決〕 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$, $AB=A'B'$.

〔證〕 移置$\odot O$於$\odot O'$上，令$\odot O$合於$\odot O'$（等半徑圓爲合同圓）. 令OA合於$O'A'$. 則因$\angle AOB=\angle A'O'B'$, 故OB合於$O'B'$. 故A合於A', B合於B'. $\therefore \overset{\frown}{AB}$合於$\overset{\frown}{A'B'}$, AB合於$A'B'$.

$\therefore \quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}, AB=A'B'$. Q.E.D.

§170. **定理五一** 在同圓或等圓中，中心角不等則所對之弧不等；中心角大，所對之弧亦大.

〔假設〕 $\odot O=\odot P$, $\angle AOB>\angle CPD$.



〔終決〕 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$

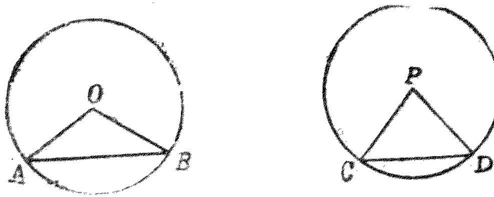
〔證〕 $\because \quad \angle AOB>\angle CPD$, 故可在$\angle AOB$內作$OE$交$\overset{\frown}{AB}$於$E$，且令$\angle AOE=\angle CPD$. $\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$. 但$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{AE}$.

$\therefore \quad \overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$. Q.E.D.

§171. **定理五二** 在同圓或等圓中，中心角不等，則所對之弦不等；中心角大，所對之弦亦大.

〔假設〕 $\odot O=\odot P$, $\angle AOB>\angle CPD$.

〔終決〕 $AB>CD$.



〔證〕 $\triangle OAB$，$\triangle PCD$中，$OA=PC$，$OB=PD$，$\angle AOB=\angle CPD$. $\therefore$ $AB>CD$. Q.E.D.

§172. **系** 在同圓或等圓中，兩個中心優角不等，則所對之弦不等；中心優角大，所對之弦小.

§173. **定理五三** 在同圓或等圓中，弧相等則所對中心角相等．弧不等則所對中心角不等；弧大所對中心角亦大.

（證略．學者試用窮舉證法自證之）

§174. **系一** 在同圓或等圓中，弧相等則所對之弦相等．弧不等則所對之弦不等；弧大所對之弦亦大.

§175. **系二** 在同圓或等圓中，兩個優弧不等，則所對之弦不等，優弧大則所對之弦小.

§176. **定理五四** 在同圓或等圓中，弦相等則所對之中心角及弧皆相等．弦不等則所對之中心角及弧皆不等；弦大所對之中心角及弧亦大，而所對之優中心角及優弧小.

（證略．學者自證之）

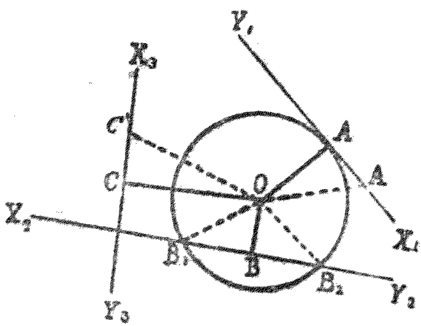
第十一章　直線與圓之關係

§177. **定義五一　切線　割線**　與圓周交於一點之直線曰切線 (tangent). 其所交之點曰切點 (point of tangency). 與圓周交於二點之直線曰割線 (secant).

弦即割線在圓內之一部分.

§178. **幾何公理一一**　直線與圓周至多交於二點.

§179. **定理五五**　**一直線與一圓中心之距離等於其半徑則此線爲切線一直線與一圓中心之距離小於其半徑，則此線爲割線. 一直線與一圓中心之距離大於其半徑，則此線與圓不相交.**



〔假設〕　從O至X_1Y_1所作垂線OA等於⊙O之半徑. 從O至X_2Y_2所作垂線OB小於⊙O半徑. 從O至X_3Y_3所作垂線OC大於⊙O半徑.

〔終決〕　X_1Y_1爲⊙O之切線. X_2Y_2爲⊙O之割線. X_3Y_3與⊙O不相交.

〔證〕　$\because OA$等於⊙O半徑，$\therefore A$在⊙O圓周上. 在X_1Y_1上任意取其他一點A'，聯OA'，則$OA'>OA$. $\therefore A'$在⊙O外. $\therefore X_1Y_1$上除A點外，其他一切點皆在⊙O外. 即X_1Y_1與⊙O圓周之交點只有一點A. $\therefore X_1Y_1$爲⊙O之切線.

∵ OB小於⊙O半徑，∴ B在⊙O內。而X_2Y_2為無限長之直線，其兩端均在圓周外，故依幾何公理一一，B 之兩側必皆與圓周相交於B_1，B_2兩點。故X_2Y_2為⊙O之割線。

∵ OC大於⊙O半徑，故C在⊙O外。在X_3Y_3上任意取其他一點C'。聯OC'，則$OC'>OC$，故OC'更大於⊙O半徑。故C'亦在⊙O外。故X_3Y_3上所有一切點皆在⊙O外。

∴　X_3Y_3與⊙O不相交。　　　　Q.E.D.

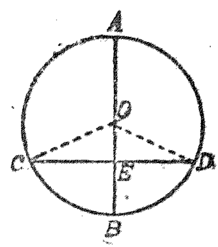
§180. **系一**　切線與圓中心之距離等於半徑。割線與圓中心之距離小於半徑。與圓不相交之直線與圓中心之距離大於半徑。

§181. **系二**　從圓周上一點所作過此點半徑之垂線是切線。從圓周上一點所作過此點半徑之斜線是割線。

§182. **系三**　過圓周上一點之切線有一無二。

§183. **系四**　切點與中心所聯半徑垂直於切線。

§184. **定理五六**　垂直於弦的直徑，等分此弦及此弦所對之相屬二弧。



〔假設〕　直徑AOB與弦CD垂直於E。

〔終決〕　$CE=ED$，$\frown CB=\frown BD$，$\frown CA=\frown AD$。

〔證〕　聯OC，OD。在$\triangle OCE$，$\triangle ODE$中，$OC=OD$（半徑），$\angle OEC=\angle OED$（直角），OE共邊。

$\triangle OCE\cong\triangle ODE$。　∴　$CE=ED$。

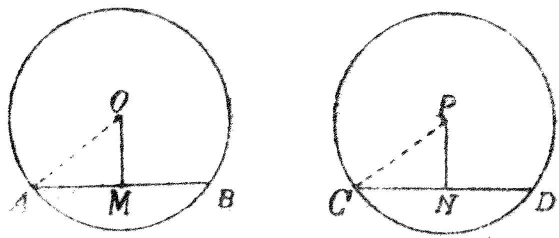
又　$\angle COE=\angle EOD$，　∴　$\frown CB=\frown BD$。

又　$\angle COA=\angle DOA$，$\therefore \frown CA=\frown AD$.　　$Q.E.D.$

§185. 系一　弦中點與中心聯線垂直於此弦.

§186. 系二　弦之垂直等分線必過中心.

§187. 定理五七　在同圓或等圓中，等弦與中心等距.



〔假設〕　$\odot O=\odot P, AB=CD, OM\perp AB, PN\perp CD$.

〔終決〕　$OM=PN$.

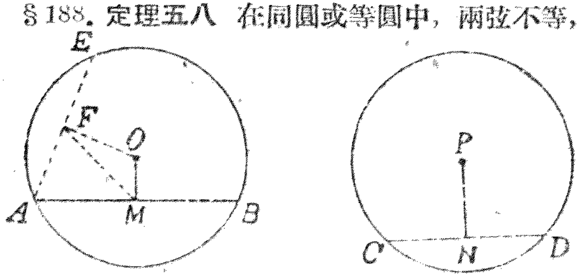
〔證〕　$\because \quad OM\perp AB, \therefore \quad AM=\frac{1}{2}AB$.

$\because \quad PN\perp CD, \therefore \quad CN=\frac{1}{2}CD$.

$\because \quad AB=CD, \therefore \quad AM=CN$.

聯OA, PC. 在$\triangle OAM$，$\triangle PCN$中，$OA=PC$（半徑），$\angle OMA=\angle PNC=R\angle$，$AM=CN$，$\therefore \triangle OAM\cong\triangle PCN$ $(s.s.R.=s.s.R.)$　$\therefore OM=PN$.　　$Q.E.D.$

§188. 定理五八　在同圓或等圓中，兩弦不等，則與



中心距離亦不等；弦大，與中心距離小。

〔假設〕 $\odot O=\odot P$，$AB>CD$，$OM\perp AB$，$PN\perp CD$.

〔終決〕 $OM<PN$.

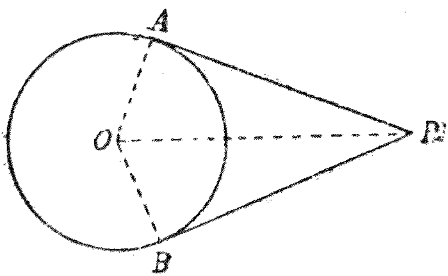
〔證〕 在$\odot O$中作弦$AE=CD$，作$OF\perp AE$，則$OF=PN$（等弦與中心等距）.

$\because$ $AB>CD$，$\therefore AB>AE$，$\therefore AM>AF$（因AM，AF各為AB，AE之半）. 聯MF，則$\angle AFM>\angle AMF$. 又因$\angle AFO=\angle AMO=R\angle$，$\therefore \angle OFM<\angle OMF$.

$\therefore$ $OM<OF$. $\therefore$ $OM<PN$.　　Q.E.D.

§189. 系　在同圓或等圓中，與中心等距之弦相等，與中心距離不等之弦不等，距離大者小.

§190. **定理五九.** 從圓外一點至圓之兩切線相等.



〔假設〕 PA，PB切$\odot O$於A，B.

〔終決〕 $PA=PB$.

〔證〕 聯OP，OA，OB在$\triangle AOP$，$\triangle BOP$中，$OA=OB$，$\angle OAP=\angle OBP=R\angle$，$OP$為公邊，$\therefore \triangle AOP\cong\triangle BOP$.

$\therefore \quad PA=PB.$ Q.E.D.

§191. 系 從圓外一點至圓兩切線所夾之角為此點與中心聯線所等分.

習題八

1. 弦上一切點除兩端外皆在圓內.

2. 直徑為最大之弦.

3. 從圓周上一點A引直徑AB及任意一弦AC，則平行於AC之半徑等分$\frown BC$.

4. 弦CD平行於直徑AB，則$\frown AC=\frown BD$.

5. A,B,C,D為圓周上順次四點. 若弦$AB=CD$，則$AC=BD$.

6. 從圓周上一點A引直徑AB及二弦AC,AD. 若$\angle BAC=\angle BAD$，則$\frown BC=\frown BD$.

7. 若$\frown AB=2\frown CD$，則弦$AB<2CD$.

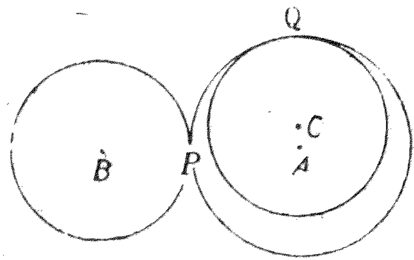
8. 過弦AB中點作其他任意弦CD，則$AB<CD$.

9. 若兩弦AB,CD交於E而$AE=CE$，則$AB=CD$.

10. 過直徑上任意一點作兩弦. 若兩弦與直徑所夾角相等，則此兩弦相等.

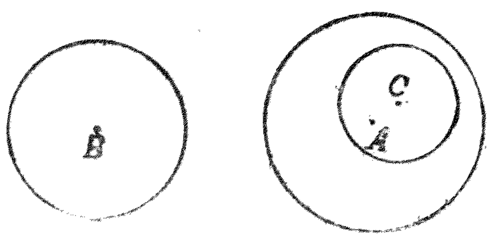
第十二章　二圓之關係

§ 192. **定義五二　相切圓　相離圓　相交圓**　兩圓圓周會於一點，則此兩圓曰相切圓 (tangent circles). 其相會之點曰切點 (point of tangency).



⊙A, ⊙B二圓會於一點P. ⊙A, ⊙C二圓會於一點Q. ⊙A, ⊙B及⊙A, ⊙C皆曰相切圓. ⊙A, ⊙B各在形外曰外切. ⊙C在⊙A內曰內切. P, Q爲切點.

兩圓圓周不相會，則此兩圓曰相離圓.



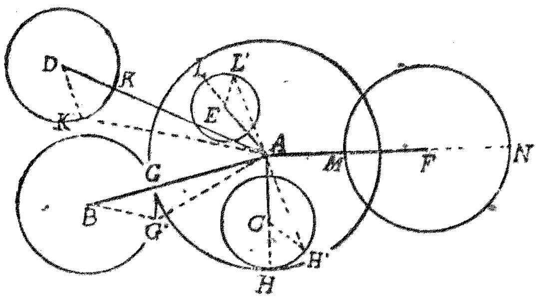
如圖 ⊙A, ⊙B及⊙A, ⊙C皆爲相離圓. ⊙A, ⊙B各在形外曰外離. ⊙C在⊙A內曰內離.

一圓有一部分在他圓之內，一部分在他圓之外，而圓周會於二點者，則此兩圓曰相交圓.

§ 193. **幾何公理一二**　兩圓至多交於二點.

§ 194. **定理六〇**　兩圓中心距離等於其半徑之和，則此兩圓外切. 兩圓中心距離等於其半徑之差，與此兩圓內

切．兩圓中心距離大於其半徑之和，則此兩圓外離．兩圓中心距離小於其半徑之差，則此兩圓內離．兩圓中心距離小於其半徑之和而大於其半徑之差，則此兩圓相交．



〔假設〕 ⊙A，⊙B，⊙C，⊙D，⊙E，⊙F 半徑之長各為a,b,c,d,e,f．(1) $AB=a+b$．(2) $AC=a-c$．(3) $AD>a+d$．(4) $AE<a-e$．(5) $a+f>AF>a-f$．

〔終決〕 (1) ⊙A，⊙B 為外切圓．(2) ⊙A，⊙C 為內切圓．(3) ⊙A，⊙D 為外離圓．(4) ⊙A，⊙E 為內離圓．(5) ⊙A，⊙F 為相交圓．

〔證〕 (1) 設AB交⊙B於G，則$BG=b$．∵ $AB=a+b$，∴ $GA=a$，∴ G在⊙A圓周上．∴ G為⊙A，⊙B兩圓之相會點．在⊙B圓周上任意取其他一點G'，聯AG'，BG'．則$AG'+BG'>AB$，$AG'+BG'>a+b$．∵ $BG'=b$，∴ $AG'>a$．故G'在⊙A外．故⊙B圓周上除G外，其他一切點均在⊙A外．故⊙A，⊙B會於一點而各在形外，故⊙A，⊙B為外切圓．

(2) 設AC延線交⊙C於H．則$CH=c$．∵ $AC=a-c$

$\therefore AH=a$. $\therefore H$在$\odot A$圓周上. $\therefore H$爲$\odot A$, $\odot C$兩圓之相會點. 在$\odot C$圓周上任意取其他一點H', 聯AH', CH'. 則$AH'<AC+CH'=AH$, $\therefore AH'<a$. $\therefore H'$在$\odot A$內. 故$\odot C$圓周上除H外其他一切點均在$\odot A$內. 故$\odot A$, $\odot C$會於一點而$\odot C$在$\odot A$內. 故$\odot A$, $\odot C$爲內切圓.

(3) 設AD交$\odot D$於K, 則$DK=d$. $\because AD>a+d$, $\therefore AK>a$. 故K在$\odot A$外. 在$\odot D$圓周上任意取其他一點K'. 聯AK', DK', 則$AK'+DK'>AD>a+d$. $\because DK'=d$. $\therefore AK'>a$. $\therefore \odot D$上一切點均在$\odot A$外. $\therefore \odot A$, $\odot D$爲外離圓.

(4) 設AE延線交$\odot E$圓周於L, 則$EL=e$, $\because AE<a-e$, $\therefore AL<a$. $\therefore \odot E$在$\odot A$內. 在$\odot E$上任意取其他一點L', 聯AL', EL', 則$AL'<AE+EL'<AL<a$, $\therefore AL'<a$, $\therefore L'$在$\odot A$內. 故$\odot E$上一切點均在$\odot A$內. 故$\odot A$, $\odot E$爲內離圓.

(5) 設AF交$\odot F$於M, 則$FM=f$. $\because AF<a+f$. $\therefore AM<a$. $\therefore M$在$\odot A$內. 又設AF之延線交$\odot F$於N, 則$FN=f$. $\because AF>a-f$. $\therefore AN>a$. $\therefore N$在$\odot A$之外. $\therefore \odot F$有一部分在$\odot A$內, 而有一部分在圓外. $\therefore \odot A$, $\odot F$爲相交圓.

§195. 系一 外切兩圓中心距離等於其半徑之和；內切兩圓中心距離等於其半徑之差；外離兩圓中心距離大於其半徑之和；內離兩圓中心距離小於其半徑之差；相交兩圓中心距離小於其半徑之和，而大於其半徑之差.

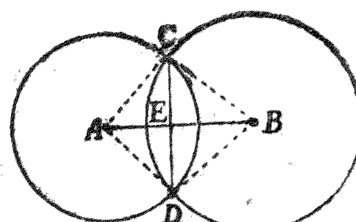
§196. 系二 相切兩圓之切點與其中心共線.

§197. **定義五三 中心線** 過兩圓中心之直線，曰中心線 (line of centres)。

§198. **定義五四 公切線** 切於兩圓之直線曰公切線 (common tangent)。若所切之兩圓在公切線之同旁，則此公切線曰外公切線。若所切之兩圓在公切線之兩旁，則此公切線曰內公切線。

§199. **定義五五 公弦** 相交兩圓交點所聯線分曰公弦 (common chord)。

§200. **定理六一** 相交二圓之中心線爲其公弦之垂直等分線。



〔假設〕 $\odot A$, $\odot B$交於C, D.

〔終決〕 AB爲CD之垂直等分線.

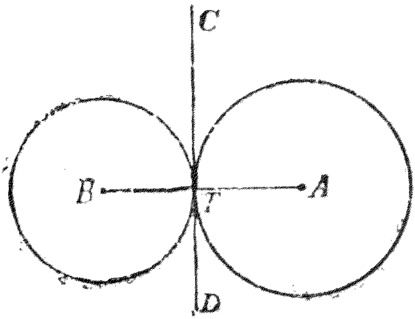
〔證〕 聯AC, BC, AD, BD. 在$\triangle ABC$，$\triangle ABD$中，$AC=AD$，$BC=BD$, AB爲公邊.
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD$. $\therefore \angle CAB=\angle DAB$. 在$\triangle ACE$, $\triangle ADE$中，$AC=AD$及AE爲公邊， $\therefore \triangle ACE \cong \triangle ADE$.
$\therefore CE=ED$，$\angle AEC=\angle AED=R\angle$.

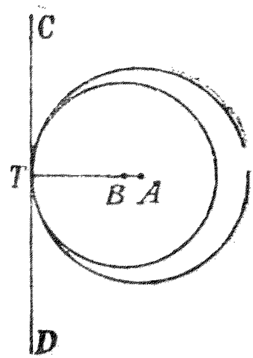
$\therefore$ AB爲CD之垂直等分線. Q. E. D.

§201. **定理六二** 過相切兩圓切點所作中心線的垂線爲兩圓的公切線。

〔假設〕 $\odot A$, $\odot B$切於T. $CTD \perp AB$.

〔終決〕 CD爲$\odot A$ $\odot B$之公切線.



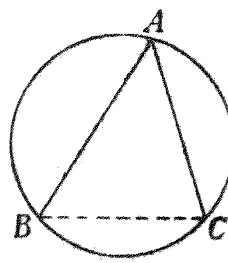


〔證〕 ∵ ⊙A, ⊙B切於T. ∴ A, T, B 共線. 即T在AB上，或AB之延線上.

∴ $AT \perp CD$. CD切⊙A於T. 又$BT \perp CD$. ∴ CD切⊙B於T. ∴ CD為⊙A, ⊙B之公切線. Q.E.D.

第十三章　關於圓之各角

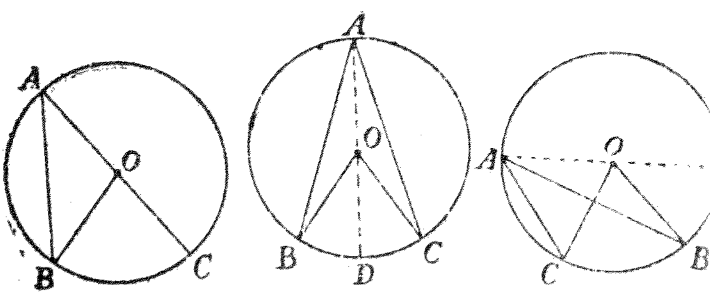
§202. **定義五六　圓周角　弓形角**　過圓周上一點之兩弦所夾之角曰圓周角 (angle at circumference). 此兩弦他端間之弧，曰此圓周角所對之弧.



如圖圓周角$\angle BAC$與$\frown BC$爲相對. $\angle A$爲$\frown BC$所對之圓周角. $\frown BC$爲$\angle A$所對之弧.

聯BC則成弓形BAC. 此圓周角$\angle A$指弓形BAC而言，亦曰弓形角 (angle in a segment).

§203. **定理六三**　圓周角等於其所對弧所對中心角之半.



(1)　　(2)　　(3)

〔假設〕　$\angle BAC$爲$\odot O$之圓周角.

〔終決〕　$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$.

〔證〕（1）$\angle BAC$之一邊AC適爲直徑時．
則因$OA=OB$，$\therefore \angle BAC=\angle OBA$.
然$\angle BOC=\angle BAC+\angle OBA$.

$\therefore \quad \angle BOC=2\angle BAC.\quad \therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$

（2）中心O在$\angle BAC$內．作直徑AOD.
則從(1)，$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$，$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD$.

$\therefore \quad \angle BAD+\angle CAD=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle COD).$

即　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$

（3）中心O在$\angle BAC$外．作直徑AOD.
則從(1)，$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$，$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD$.

$\therefore \quad \angle CAD-\angle BAD=\frac{1}{2}(\angle COD-\angle BOD).$

即　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$　　　　Q.E.D.

§204．**系一**　對同弧之圓周角相等．

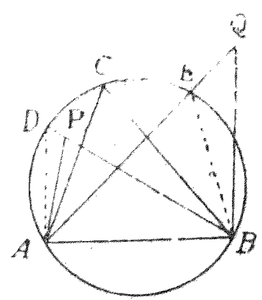
§205．**系二**　在同圓或等圓中兩弧相等，則其所對圓周角相等．兩圓周角相等，則其所對弧相等．

§206．**系三**　在同圓或等圓中，兩圓周角不等，則所對弧不等；圓周角大，所對弧亦大，兩弧不等，則所對之圓周角不等，弧大所對之圓周角亦大．

§207．**系四**　半圓周所對之圓周角爲直角；優弧所對之圓周角爲鈍角；劣弧所對之圓周角爲銳角．若圓周角爲直角，則其所對之弧爲半圓周；若圓周角爲鈍角，則其所對之弧爲優弧；若圓周角爲銳角，則其所對之弧爲劣弧．

§208. **定理六四** 從弓形弧內一點至其弦之兩端所聯線分之夾角，大於此弓形之弓形角；從弓形弧外一點至其弦之兩端所聯線分之夾角，小於此弓形之弓形角.

〔假設〕 P爲弓形ACB內任意一點，Q爲弓形弧外任意一點.

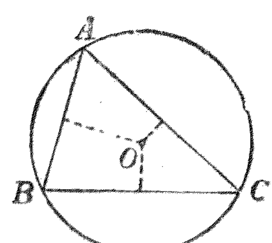


〔終決〕 $\angle APB > \angle ACB$, $\angle AQB < \angle ACB$.

〔證〕 延長BP交弓形弧於D，聯DA. 則$\angle ADB = \angle ACB$. $\because \angle APB > \angle ADB$. $\therefore \angle APB > \angle ACB$. AQ交弓形弧於E，聯BE. 則$\angle AEB = \angle ACB$. $\because \angle AQB < \angle AEB$. $\therefore \angle AQB < \angle ACB$. Q.E.D.

§209. **定義五七** **內接多角形** **外接圓** 一個多角形之各頂點在同一圓周上，則此多角形曰圓內接多角形(inscribed polygon). 此圓曰外接圓(circumscribed circle).

§210. **定義五八** **外切多角形** **內切圓** 一個多角形之各邊爲同一圓周之切線，則此多角形曰圓外切多角形(circumscribed polygon). 此圓曰內切圓 (inscribed circle).



§211. **定理六五** 任意一三角形有一外接圓，只有一外接圓.

〔假設〕 $\triangle ABC$爲一任意三角形.

〔終決〕 過A, B, C有一圓，

只有一圓。

〔證〕　$\triangle ABC$三邊之垂直等分線會於一點O（即其外心），與各頂點等距，即$OA=OB=OC$。
故以O為中心，OA為半徑之圓必過B與C。
故$\triangle ABC$有一外接圓$\odot O$。

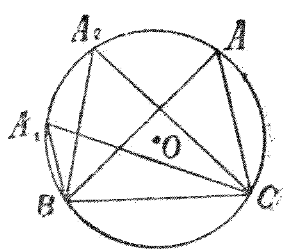
又因線分之垂直等分線有一無二，故三角形之外心只有一個。

$\therefore$　$\triangle ABC$只有一外接圓$\odot O$。　　　　Q.E.D.

§212. **系**　過不共線之三點有一圓而只有一圓。

§213. **定義五九**　四點或四點以上諸點若在同一圓周上，則此諸點曰共圓點。

§214. **定理六六**　諸三角形一邊公共，此公共邊之對角在同旁且相等，則此諸三角形之頂點共圓。



〔假設〕　BC為$\triangle A_1BC$，$\triangle A_2BC$，$\triangle A_3BC$，…之公共邊。
A_1, A_2, A_3，…在BC之同旁，且$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=\cdots$。

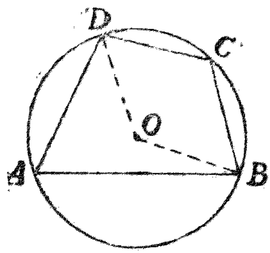
〔終決〕　$A_1, A_2, A_3, \cdots B, C$共圓。

〔證〕　$\triangle A_1BC$有一外接圓$\odot O$。設A_2在弓形BA_1C之內，則$\angle A_2>\angle A_1$；設A_2在弓形BA_1C之外，則$\angle A_2<\angle A_1$皆與假設矛盾。故A_2在$\odot O$圓周上。同理A_3…皆在$\odot O$圓周上。

$\therefore$　$A_1, A_2, A_3, \cdots B, C$共圓。　　　　Q.E.D.

§215. **定理六七**　圓內接四角形之對角互為補角。

〔假設〕 $ABCD$為圓內接四角形.



〔終決〕 $\angle A+\angle C=2R\angle$, $\angle B+\angle D=2R\angle$.

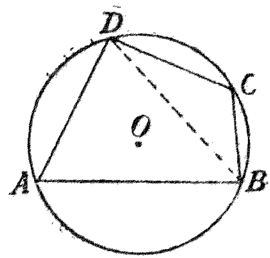
〔證〕 聯OB,OD, 則$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOD$, $\angle C=\frac{1}{2}$優$\angle BOD$.

$\therefore \angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle BOD+$優$\angle BOD)$. 但$\angle BOD+$優$\angle BOD$為一周角. $\therefore \angle A+\angle C=\frac{1}{2}$周角$=2R\angle$.

同理 $\angle B+\angle D=\frac{1}{2}$周角$=2R\angle$. Q.E.D.

§216. **定理六八** 四角形對角互為補角，則其各頂點共圓.

〔假設〕 四角形$ABCD$中，$\angle A=\angle C$.



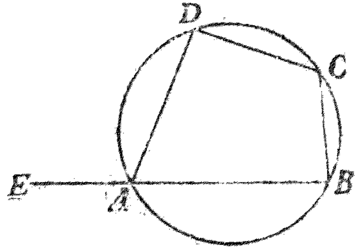
〔終決〕 A,B,C,D共圓.

〔證〕 聯BD. $\triangle ABD$有一外接圓⊙O. 若C在$\frown BD$外，則$\angle C$小於弓形DCB之弓形角. $\therefore \angle A+\angle C<2R\angle$；若$C$在$\frown BD$內，則$\angle C$大於弓形$DCB$之弓形角. $\therefore \angle A+\angle C>2R\angle$ 皆與假設矛盾. $\therefore C$在⊙O上.

$\therefore$ A,B,C,D共圓. Q.E.D.

§217. **定義六〇** **四角形外角之內對角** 四角形相對二角之一內角為其他一外角之內對角.

§218. 定理六九　圓內接四角形之一外角等於其內對角.



〔假設〕　$ABCD$爲圓內接四角形, $\angle DAE$爲一外角.

〔終決〕$\angle DAE=\angle C$.

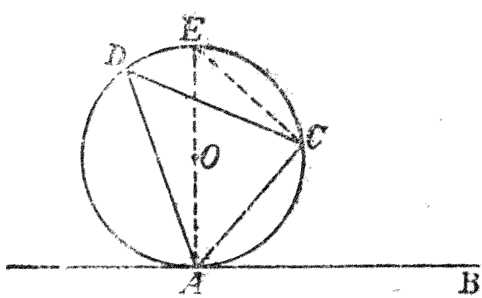
〔證〕　$\angle BAD+\angle C=2R\angle$, $\angle BAD+\angle DAE=2R\angle$.

$\therefore$　$\angle DAE=\angle C$.　　Q.E.D.

§219. 定理七〇　四角形之一外角等於其內對角, 則此四角形之各頂點共圓.

〔證略〕

§220. 定理七一　切線及過其切點之弦所夾之角等於角內弧所對之圓周角.



〔假設〕　AB切⊙O於A. AC爲過A之任意弦.

〔終決〕　$\angle BAC=\angle ADC$.

證 作直徑AOE。聯CE。則因$\frown AE$為半圓周，

$\therefore$ $\angle ACE = R\angle$。 $\therefore$ $\angle CAE + \angle CEA = R\angle$。

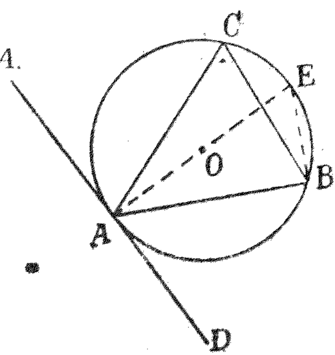
又因$EA \perp AB$， $\therefore \angle CAE + \angle CAB = R\angle$。

$\therefore$ $\angle CAB = \angle CEA = \angle ADC$。 Q.E.D.

§221. **定理七二** 過弦一端之直線，若與此弦所成之角等於其所對之圓周角，則此直線為圓之切線。

〔假設〕 $\angle DAB = \angle C$。

〔終決〕 AD切⊙ABC於A。



〔證〕 作直徑 AOE。聯EB，則$\angle EBA$為$R\angle$。

$\therefore$ $\angle AEB + \angle EAB = R\angle$。

$\because$ $\angle DAB = \angle C = \angle AEB$，

$\therefore$ $\angle DAB + \angle EAB = R\angle$，

即 $EOA \perp AD$。

$\therefore$ AD切⊙ABC於A。

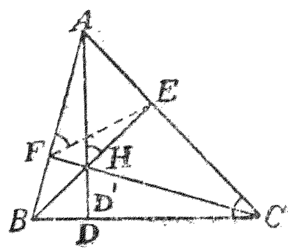
Q.E.D.

第十四章　圓之應用及雜例

§222. 凡圓之定理，最適宜於證角之關係，而定理六三至七二等爲用尤廣. 舉例如下：

（例一） 三角形之三個高共點.（此即定理三八，前借用外心證明，今應用本章定理直接證明之）.

〔假設〕 AD, BE, CF 爲 $\triangle ABC$ 之三個高.



〔終決〕 AD, BE, CF 共點.

〔證〕 設 BE, CF 之交點爲 H. 聯 AH 延長交 BC 於 D'. 聯 EF. 則因 $\angle AFH = R\angle$，$\angle AEH = R\angle$.

$\therefore$　$\angle AFH + \angle AEH = 2R\angle$,

$\therefore$　A, F, H, E 共圓.　（定理六八）

$\therefore$　$\angle AFE = \angle AHE$.　（定理六三系一）

又因 $\angle BFC = R\angle$, $\angle BEC = R\angle$,

$\therefore$　$\angle BFC = \angle BEC$,

$\therefore$　B, F, E, C 共圓.　（定理六三）

$\therefore$　$\angle AFE = \angle BCE$.　（定理六九）

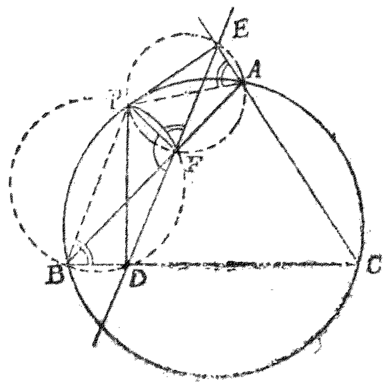
$\therefore$　$\angle AHE = \angle BCE$.

$\therefore$　D', C, E, H 共圓.　（定理七〇）

$\therefore$　$\angle HD'C + \angle HEC = 2R\angle$　（定理六七）

$\therefore$　$\angle HEC = R\angle$，$\therefore \angle HD'C = R\angle$. 即 $AD' \perp BC$.

$\therefore$ AD' 合於AD. $\therefore AD, BE, CF$ 共點. $Q.E.D.$



（例二） 從三角形外接圓周上任意點至三邊所作垂線之足共線.

〔假設〕 P 爲 $\triangle ABC$ 外接圓周上任意一點. $PD \perp BC$, $PE \perp AC$, $PF \perp AB$.

〔終決〕 D, E, F 共線.

〔證〕 聯PA, PB, EF, FD. 則因$\angle PEA = R\angle$, $\angle PFA = R\angle$, $\angle PEA + \angle PFA = 2R\angle$. $\therefore$ P, F, A, E 共圓. $\therefore \angle PAE = \angle PFE$.

又因$\angle PFB = R\angle$, $\angle PDB = R\angle$, $\angle PFB = \angle PDB$. $\therefore P, F, D, B$共圓. $\therefore \angle PFD + \angle PBD = 2R\angle$.

$\because$ P, B, C, A 共圓, $\therefore \angle PAE = \angle PBD$.

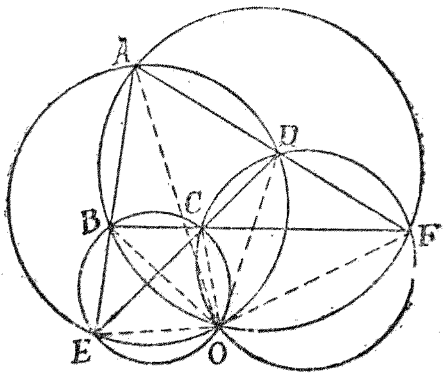
$\therefore$ $\angle PFE = \angle PBD$. $\therefore \angle PFD + \angle PFE = 2R\angle$,

$\therefore$ EFD爲一直線. 即D, E, F共線 $Q.E.D.$

〔註〕 D, E, F 所共之線名曰 P 點之西摩松線 (Simson's line), 以其爲 Simson 氏所發見故也. 惟據 McCay 氏言, 則謂發明此定理者, 實爲 Wallace 氏而非 Simson 氏云.

（例三） 不平行不共點之四直線交於六點成四個三角形. 此四個三角形之外接圓共點.

〔假設〕 AE, AF, ED, FB 四直線交於 A, B, C, D, E, F



六點，成$\triangle ABF$，$\triangle AED$，$\triangle BCE$，$\triangle DCF$.

〔終決〕 $\odot ABF$，$\odot AED$，$\odot BCE$，$\odot DCF$共點.

〔證〕 設$\odot BCE$，$\odot DCF$之交點爲O.

聯AO, BO, CO, DO, EO, FO.

則因E, B, C, O共圓，$\therefore \angle BEO = \angle OCF$.

又因F, D, C, O共圓，$\therefore \angle OCF = \angle ODF$

$\therefore \angle BEO = \angle ODF$，$\therefore E, A, D, O$共圓，

即$\odot AED$過O點.

又$\angle EBO = \angle ECO = \angle AFO$. $\therefore F, A, B, O$共圓，

即$\odot ABF$過O點.

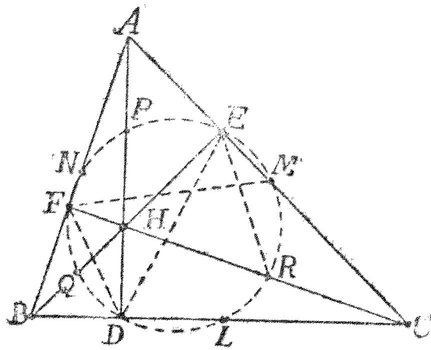
$\therefore \odot ABF, \odot AED, \odot BCE, \odot DCF$共點.

Q.E.D.

〔註〕 此四圓所共之點名曰密圖爾點 (Miguol point).

（例四） 任意三角形三邊之中點，三個高之垂足，及三頂點與垂心間線分之中點，凡九點共圓.

〔假設〕 $\triangle ABC$ 中，L, M, N 各爲 BC, AC, AB 之中點；H 爲垂心，D, E, F 各爲 BC, AC, AB 上之垂足；P, Q, R 各爲 AH, BH, CH 之中點.



〔終決〕 $D, L, R, M, E, P, N, F, Q$ 共圓.

〔證一〕 作⊙DEF。聯 ED, PD, ER, FM。

因 H, F, B, D 共圓（爲何？），$\therefore \angle FDH = \angle FBH$。

因 H, E, C, D 共圓（爲何？），$\therefore \angle EDH = \angle ECH$。

因 B, F, E, C 共圓（爲何？），$\therefore \angle FBH = \angle ECH$。

故 $\angle FDE = \angle FDH + \angle EDH = \angle FBH + \angle ECH = 2\angle ECH$。

因 M 爲直角三角形 AFC 斜邊 AC 之中點，故 $MF = MC$，$\therefore\ \angle MFC = \angle MCF$。$\therefore \angle FME = \angle MFC + \angle MCF = 2\angle MCF$。　　　　Q.C.F.

$\therefore\ \angle FME = \angle FDE$，$\therefore M$ 在⊙DEF 上。

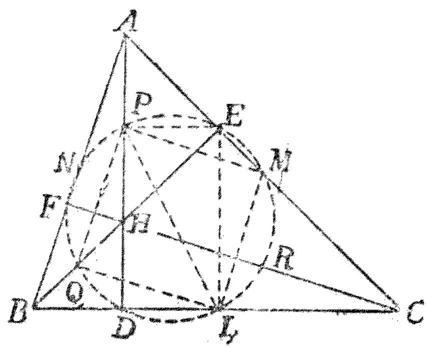
同理 L, N 在⊙DEF 上。

因 R 爲直角三角形 HEC 斜邊 HC 之中點，故 $RC = RE$，$\therefore \angle REC = \angle RCE$。$\therefore \angle FRE = \angle REC + \angle RCE = 2\angle RCE$　$\therefore \angle FRE = \angle FDE$。$\therefore R$ 在⊙DEF 上。

同理 P, Q 在⊙DEF 上。

$\therefore$ D,L,R,M,E,P,N,F,Q 共圓. $Q.E.D.$

〔證二〕 聯PE, PM, PL, PQ, LM, LE, LQ, 以PL爲直徑作圓.



則因$\angle PDL = R\angle$,

$\therefore$ D在圓周上.

P爲直角三角形AHE斜邊AH之中點,

$\therefore$ $PE=PH$, $\therefore \angle PEH=\angle PHE=\angle BHD$.

L爲直角三角形EBC斜邊BC之中點,

$\therefore$ $LB=LE$, $\therefore \angle BEL=\angle EBL$.

$\therefore$ $\angle PEL=\angle PEH+\angle BEL=\angle BHD+\angle EBL=\angle HDC=R\angle$.

$\therefore$ E在圓周上. 同樣可證F在圓周上.

因P,M各爲AH,AC之中點, $\therefore PM \parallel HC$;

因Q,L各爲BH,BC之中點, $\therefore QL \parallel HC$;

因P,Q各爲AH,BH之中點, $\therefore PQ \parallel AB$;

因M,L各爲AC,BC之中點, $\therefore ML \parallel AB$.

$\because$ $AB \perp HC$, $\therefore PMLQ$爲矩形, $\therefore \angle PML=\angle PQL=R\angle$. $\therefore M,Q$皆在圓周上. 同樣可證N,R皆在圓周上.

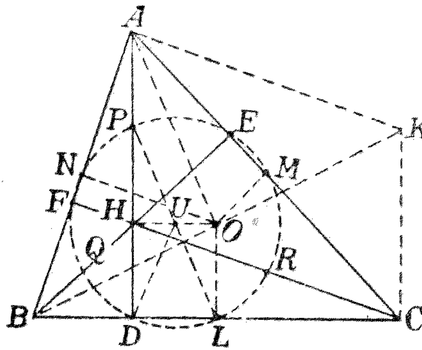
$\therefore$ D,L,R,M,E,P,N,F,Q 共圓. $Q.E.D.$

〔證三〕 作BC,AC,AB之垂直等分線LO,MO,NO交於外心O. 聯OH. 以OH之中點U爲中心, $\triangle ABC$外接圓

半徑之半爲半徑（即OA之半）作$\odot U$.

因U,P各爲HO,HA之中點，　$\therefore UP=\frac{1}{2}OA$，即等於$\odot U$之半徑　$\therefore P$在$\odot U$圓周上.

同理 Q,R在$\odot U$圓周上.



聯BO延長至K令$BO=OK$。聯AK,CK

則因O,L各爲BK,BC之中點. $\therefore KC\parallel OL\parallel AD, OL=\frac{1}{2}KC$.

又因O,N各爲BK,BA之中點，　$\therefore KA\parallel ON\parallel CH$.

$\therefore$　$AHCK$爲平形四邊形.　　　$\therefore AH=KC$.

$\because$　$OL=\frac{1}{2}KC$，$\therefore OL=\frac{1}{2}AH=PH$. 又　$\because OL\parallel PH$,

$\therefore$　$\angle PHO=\angle HOL$.又$HU=UO$, $\therefore \triangle PHU\cong\triangle OLU$.

$\therefore$　$UL=UP=\frac{1}{2}OA$.　$\therefore L$在$\odot U$圓周上.

同理M,N在$\odot U$圓周上.

既得$\triangle PHU\cong\triangle OLU$，　$\therefore \angle PUH=\angle OUL$，　$\therefore P$, U,L爲一直線.　　$\therefore U$爲直角三角形PDL斜邊PL之中點.

$\therefore UD=UP=\frac{1}{2}OA$.　$\therefore D$在$\odot U$圓周上.

同理E,F在$\odot U$圓周上.

故　D,L,R,M,E,P,N,F,Q 共圓.　　　Q. E. D.

〔註〕 $\odot U$名曰$\triangle ABC$之九點圓 (nine-point circle). 從〔證三〕可知三角形之九點圓心，爲外心重心聯線之中點. 其半徑等於外接圓半徑之半.

習 題 九

1. 兩圓外離，其兩個外公切線相等.

2. ⊙A，⊙B外切於T. 過T作任意一直線交⊙A於P，交⊙B於Q. 則$AP \parallel BQ$.

3. ⊙A，⊙B外切於T. 在過T之公切線上任意取點P. 作PC切⊙A於C，作PD切⊙B於D. 則$PC=PD$.

4. 以二等邊三角形一邊爲直徑所作之圓周必過其底之中點.

5. 若AB,CD兩弦平行，則$AC=BD$.

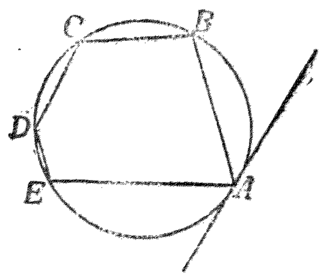
6. ⊙O，⊙P兩等圓交於A,B兩點. 過A作任意直線交⊙O於C，交⊙P於D. 則$BC=BD$.

7. A,B,C,D爲圓周上順次四點. 若$\frown AB=\frown CD$，則$BC \parallel AD$.

8. 內接於圓之梯形，其兩邊必相等.

9. ⊙O，⊙P交於A,B過A作直線交⊙O於C，交⊙P於D. 過B作直線交⊙O於E，交⊙P於F. 則$CE \parallel DF$.

10. $ABCD$爲圓外切四邊形，則$AB+CD=BC+AD$.



11. $ABCD$爲圓內接四角形，其對角線AC,BD交於E求證過E所作⊙ABE之切線與CD平行.

12. $ABCDE$ 內接於圓. $AB \parallel ED$, $AE \parallel BC$. 求證CD

平行於過A之切線。

13. 直角三角形ABC中，以直角邊AC為直徑畫圓交斜邊BC於D。過D作切線交AB於M。求證M為AB之中點。

14. $\triangle ABC$中，$\angle C$為直角，其內切圓切AB於D，切BC於E。DE交AC延線於F。則$BD=CF$。

15. 從二同心圓外一點P，作外圓之切線PA，作內圓之二切線PB,PC。二圓之中心為O。則$\angle OAB=\angle OAC$。

16. 二圓內切於A。外圓之弦BC切內圓於D。則$\angle BAD=\angle CAD$。

17. AOB為⊙O之直徑。C為任意一點，CA,CB各交圓周於P,Q。則OP,OQ為⊙CPQ之切線。

18. P為正三角形ABC外接圓周$\frown BC$上任意一點。求證$PA=PB+PC$。

19. AB,CD為⊙O內平行二弦，M為CD中點BM交圓周於E。求證A,O,M,E共圓。

20. AA'為⊙O，⊙O'之公切線，中心線OO'兩端延長各交圓周於B,B'。則$AB,A'B'$或平行，或垂直。

第十五章　軌　　跡

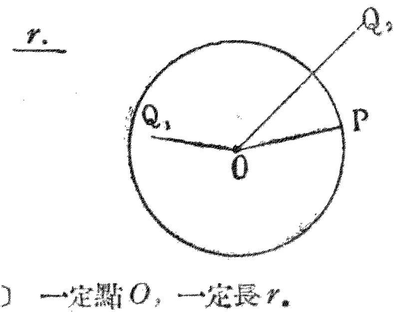
§223. **定義六一**　點之軌跡　一圖形上之所有點均適合於某條件，而此圖形外之所有點均不適合於此條件，則此圖形曰適合於此條件之點之軌跡（locus of points）.

證某圖形爲適合於某條件之點之軌跡，須證兩方面：

（1）　證圖形上任何點適合於此條件.

（2）　證圖形外任何點不適合於此條件，或凡適合於此條件之點必在此圖形上.

§224. **定理七三**　與所設定點之距離等於所設定長之點之軌跡爲以定點爲中心定長爲半徑所作之圓周.



〔已設〕　一定點O，一定長r.

〔條件〕　一動點P，$PO=r$.

〔軌跡〕　P之軌跡爲以O爲中心r爲半徑所作之圓周.

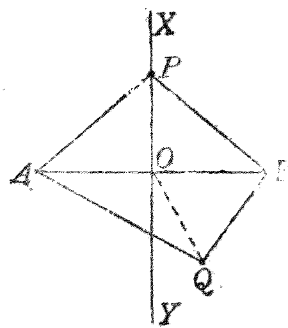
〔證〕　（1）在⊙O上任意一點P與中心O之距離爲r，即⊙O圓周上任何點適合於條件.

（2）　設Q_1在⊙O內，則$Q_1O<r$. Q_2在⊙O外，則Q_2O

$>r$. 即⊙O圓周外任何點不適合於條件.

$\therefore$ ⊙O圓周為P之軌跡. Q.E.D.

§225. **定理七四** 與所設兩定點等距之點之軌跡為此兩定點所聯線分之垂直等分線.



〔已設〕 兩定點 A,B.

〔條件〕 動點 P, $AP=BP$.

〔軌跡〕 P 之軌跡為 AB 之垂直等分線 XY.

〔證〕 (1) P 為 XY 上任意一點. 聯 AP,BP. 則$\triangle AOP\cong\triangle BOP$.

$\therefore$ $PA=PB$. 即 XY 上任何點適合於條件.

(2) Q為XY外任意一點. 聯AQ,BQ,OQ. $\because OY\perp AB$. $\therefore OQ$不$\perp AB$, $\therefore \angle AOQ\neq\angle BOQ$. 又$AO=OB$, OQ為$\triangle AOQ$, $\triangle BOQ$之公邊. $\therefore$ $AQ\neq BQ$. 即XY外任何點不適合於條件.

$\therefore$ XY為P之軌跡. Q.E.D.

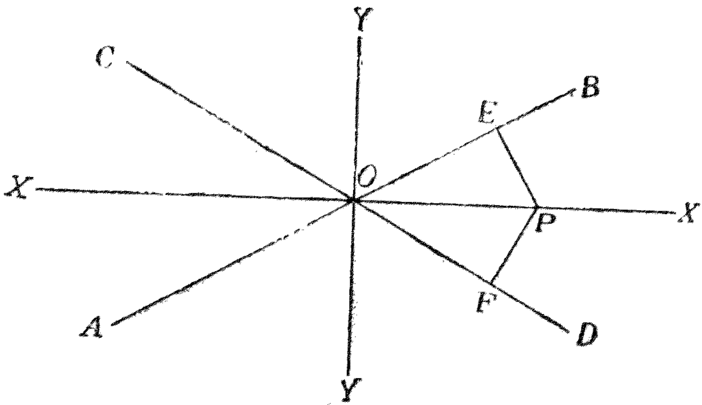
§226. **定理七五** 與所設相交兩定直線等距之點之軌跡為其交角的一雙等分線.

〔已設〕 AB,CD兩直線交於O.

〔條件〕 從動點P作$PE\perp AB$, $PF\perp CD$而$PE=PF$.

〔軌跡〕 P之軌跡為AB,CD交角之一雙等分線 XX', YY',

〔證〕 (1) 在 XX' 或 YY' 上任意取一點P. 作$PE\perp$



AB. $PF\perp CD$. 則在$\triangle POE$，$\triangle POF$中，$\angle PEO=\angle PFO=R\angle$，$\angle POE=\angle POF$，$OP$為公邊. $\therefore\triangle POE\cong\triangle POF$. $\therefore PE=PF$. 即XX'，YY'上任何點適合於所設條件.

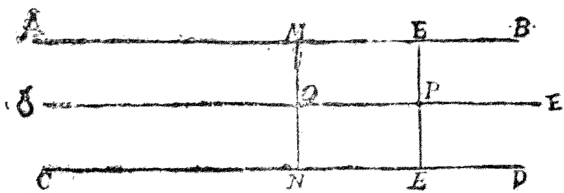
（2） 設P為適合於條件之點. 作$PE\perp AB$，$PF\perp CD$，聯PO. 則在$\triangle POE$，$\triangle POF$中，$\angle PEO=\angle PFO=R\angle$，$PE=PF$，$OP$為公邊，$\therefore\triangle PEO\cong\triangle PFO$. $\therefore\angle POE=\angle POF$. 即$OP$為$AB$，$CD$夾角之等分線. 即適合於條件之點必在$XX'$或$YY'$上.

$\therefore$ XX'，YY'為P之軌跡. Q.E.D.

§227. **定理七六** 與所設兩平行線等距之點之軌跡為過其公垂線中點之一個平行線.

〔已設〕 兩直線$AB\parallel CD$.

〔條件〕 從動點P作$PE\perp AB$，$PF\perp CD$，而$PE=PF$.



〔軌跡〕 P之軌跡爲過AB, CD公垂線MN之中點O所作AB, CD之平行線XY.

〔證〕 (1) 在XY上任意取一點P. 作$PE \perp AB, PF \perp CD$. 則因MN爲AB, CD之公垂線, $\therefore$ $MOPE$, $NOPF$皆爲矩形.

$\therefore$ $PE = OM, PF = ON$. $\because OM = ON$, $\therefore PE = PF$.
即XY上任何點適合於條件.

(2) 設P爲適合於條件之點. 作$PE \perp AB$, $PF \perp CD$, 則$PE = PF$. 又因MN爲AB, CD之公垂線, $\therefore PE \parallel MN, PF \parallel MN$, $\therefore EPF$爲一直線, 而$MNFE$爲矩形,
$\therefore EF = MN$. $EP = \frac{1}{2}EF$, $MO = \frac{1}{2}MN$, $\therefore PE = OM$,
$\therefore OP \parallel AB$. $\therefore P$在XY上, 即適合於條件之點在XY上.

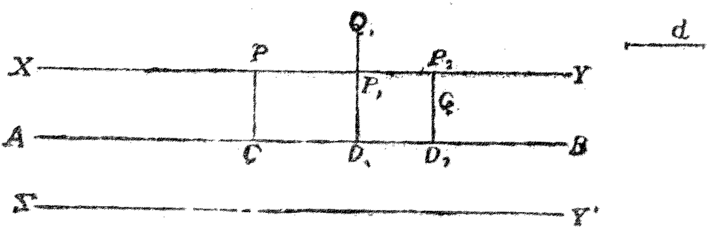
$\therefore$ XY爲P之軌跡. Q.E.D.

§228. **定理七七** 與所設定直線之距離等於所設定長之點之軌跡爲此定直線的一雙平行線, 各在定直線之一旁, 各與定直線之距離等於所設定長.

〔已設〕 一定直線AB, 一定長 d.

〔條件〕 從動點P作$PC \perp AB$, 而$PC = d$.

〔軌跡〕 P之軌跡爲AB兩旁之一雙平行線$XY, X'Y'$, 與AB之距離各等於 d.

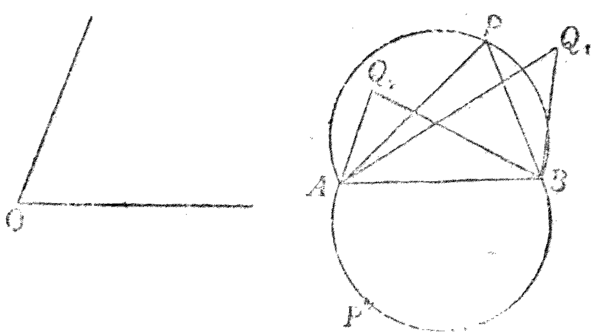


〔證〕（1）從XY（或$X'Y'$）上任意一點P作$PC\perp AB$，則因$XY\parallel AB$，$\therefore PC$為XY AB之公垂線．$\therefore PC=d$．$\therefore XY$（或$X'Y'$）上任何點適合於條件．

（2）設Q為XY及$X'Y'$外任意一點．作$QD\perp AB$．若Q與D在XY之兩旁如圖Q_1D_1，則Q_1D_1必交XY於P_1．$\therefore Q_1D_1>P_1D_1$，$\therefore Q_1D_1>d$，若Q與D在XY之同旁如圖Q_2D_2，則D_2Q_2之延線必交XY於P_2．$\therefore Q_2D_2<P_2D_2$，$\therefore Q_2D_2<d$．即凡XY及$X'Y'$外之任何點不適合於條件．

$\therefore$　XY，$X'Y'$為P之軌跡．　　　　Q．E．D．

§229．**定理七八**　從一動點至所設兩定點各作直線．此兩線所夾之角等於所設定角．則此動點之軌跡為以兩定



點所聯線分爲弦之一雙弓形弧，其弓形角等於所設定角.

〔已設〕 二定點A,B.一定角O.

〔條件〕 從動點作PA,PB而$\angle APB=\angle O$.

〔軌跡〕 P之軌跡爲以AB爲弦，$\angle O$爲弓形角所作之一雙弓形弧$\frown APB$，$\frown AP'B$.

〔證〕 (1) 設P爲弓形弧上任意點聯PA, PB.則$\angle APB=\angle O$，故弓形弧上任何點適合於條件.

(2) 設Q爲$\frown APB$，$\frown AP'B$外任意一點，聯AQ，BQ. 若Q在弓形外如圖Q_1，則$\angle AQ_1B<\angle O$. 若Q在弓形內如圖Q_2，則$\angle AQ_2B>\angle O$. 故弓形弧外任何點不適合於條件.

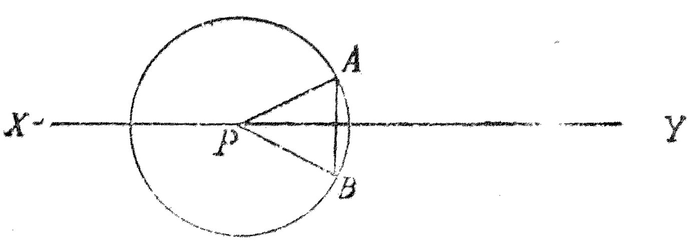
$\therefore$ $\frown APB$，$\frown AP'B$爲P之軌跡.　　Q.E.D.

§230. **系** 從一動點至所設兩定點各作直線，此兩線所夾之角等於直角，則此動點之軌跡爲以兩定點所聯線分爲直徑之圓周.

§231. **軌跡定理之應用及雜例**

以上數節爲軌跡之基本定理. 多數軌跡題，可應用以上諸節定理證明之. 舉例如下：—

(例一) 一動圓恆過所設兩定點，則此動圓中心之軌



跡爲兩定點所聯線分之垂直等分線.

〔已設〕　二定點A,B.

〔條件〕　動圓⊙P,其圓周可必過A,B二點.

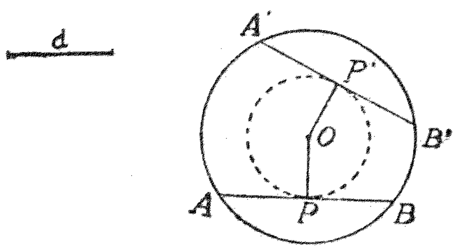
〔軌跡〕　P之軌跡爲AB之垂直等分線XY.

〔證〕　⊙P圓周過A,B二點，∴$PA=PB$. ∵A,B爲二定點. ∴P之軌跡爲AB之垂直等分線.（定理七四）

Q.E.D.

有時題中但設條件，須求出軌跡再證明之．如

（例二）　求所設圓內諸等弦中點之軌跡.



〔已設〕　一定圓⊙O（圖中外圓）．一定長d.

〔條件〕　動弦$AB=d$. 其中點爲P

求P之軌跡.

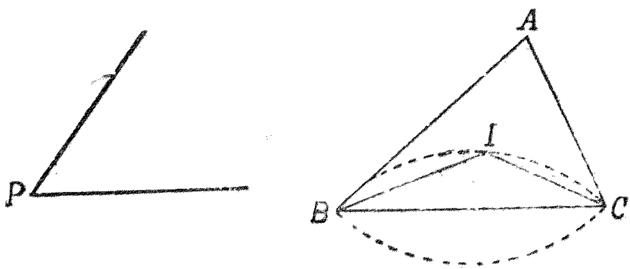
〔解析〕　在⊙O內任意二弦AB, $A'B'$各等於d. 各取中點P,P'. 聯OP,OP'. 則$OP\perp AB, OP'\perp A'B'$. ∵$AB=A'B'$, ∴$OP=OP'$. 故得

〔軌跡〕　P之軌跡爲O爲中心，O與AB之距爲半徑所作之圓周（圖中內圓）.

〔證〕　O爲定點，OP爲定長. ∴P之軌跡爲以O爲定點，OP爲半徑所作之圓周.　（定理七三）　Q.E.D.

求軌跡時，可先解析如上例．唯解析部分可以不必寫出．有時亦可將解析部分詳細寫明，求得軌跡後，不必再證明．因證法實已包括在解析內也．如下：

（例三） 一動三角形，底邊之位置大小一定，頂角之大小一定．求此三角形內心之軌跡．



〔已設〕 定線分BC，定角$\angle P$．

〔條件〕 動$\triangle ABC$，以BC爲底，$\angle A=\angle P$．I爲$\triangle ABC$之內心．

求I之軌跡．

〔解析〕 $\because$ I爲$\triangle ABC$之內心，故BI,CI各爲$\angle B$，$\angle C$之等分線．

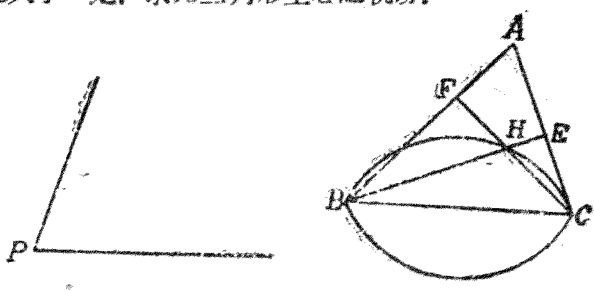
$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle BIC&=2R\angle-(\angle IBC+\angle ICB)\\&=2R\angle-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)\\&=2R\angle-\frac{1}{2}(2R\angle-\angle A)\\&=2R\angle-R\angle+\frac{1}{2}\angle A\\&=R\angle+\frac{1}{2}\angle A\end{aligned}$$

$$=R\angle+\frac{1}{2}\angle P.$$

今B,C是兩定點，$\angle BIC=R\angle+\frac{1}{2}\angle P$是定角．$\therefore I$之軌跡爲以$BC$爲弦以$\angle R+\frac{1}{2}\angle P$爲弓形角之一雙弓形弧．（定理七八）　$Q.E.D.$

軌跡題之求法，最重解析．然有時每發生謬誤必愼重討論之．試看

（例四）一動三角形，其底邊之位置及大小一定，頂角之大小一定．求此三角形垂心之軌跡．



〔已設〕　定線分BC，定角$\angle P$．

〔條件〕　動$\triangle ABC$,BC爲底，$\angle A=\angle P$．H爲$\triangle ABC$之垂心．

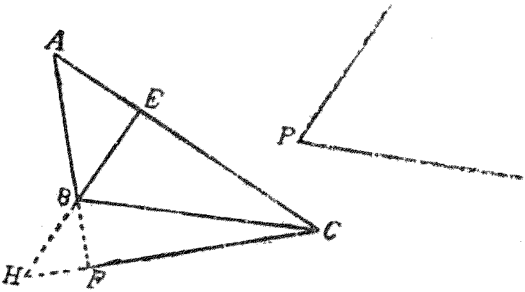
求H之軌跡．

〔解析〕　$\because H$爲$\triangle ABC$之垂心，故$BHE\perp AC$,$CHF\perp AB$，即$\angle AEH=R\angle$，$AFH=R\angle$．

$\therefore\ \angle BHC=\angle EHF=2R\angle-\angle A=2R\angle-\angle P$．其大小一定．$\therefore H$之軌跡爲以$BC$爲弦，以$2R\angle-\angle P$爲弓形角之一雙弓形弧．　（定理七八）　$Q.E.D.$

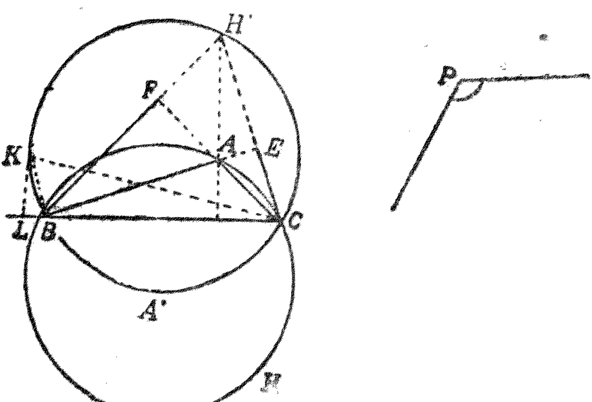
以上解法似乎並無錯誤．然按諸實際所得兩弧並非眞正軌跡．茲討論之如下：

設所設定角$\angle P<R\angle$如下圖．則$\angle B$可大於$R\angle$．故H



在$\triangle ABC$形外．而$\angle BHC\neq 2R\angle-\angle P$．$\therefore H$不在以$BC$為弦以$R\angle-\angle P$為弓形角之一雙弓形弧上．即適合於條件之點未必在所得圖形上．故上法所得之一雙弓形弧非H之軌跡．

設所設$\angle P>R\angle$如下圖．則A之軌跡為以BC為弦，



$\angle P$為弓形角之一雙小弓形弧$\frown BAC$，$\frown BA'C$. 若於以BC為弦，$2R\angle-\angle P$為弓形角之一雙大弓形弧$\frown BHC$，$\frown BH'C$上取一點K而令$\angle KBC>R\angle$，從K作$KL\perp BC$，則L必不在BC上而在其延線上. 故KL不與小弓形弧$\frown BAC$，$\frown BA'C$相交. $\therefore KL$不能過A點. 然垂心與頂點之聯線必垂直於底. 故K不能為動$\triangle ABC$之垂心. 故弓形弧$\frown BHC$，$\frown BH'C$上非任何點皆適合於條件. 故上法所得之一雙弓形弧非H之軌跡.

綜上而觀，無論所設定角$\angle P$為銳角或鈍角，以BC為弦以$2R\angle-\angle P$為弓形角所作之一雙弓形弧皆非H之軌跡. 蓋軌跡須兼具"必需"性及"足够"性 (necessary and sufficient). 今則前者不"足够"而後者非"必需"皆不得謂為軌跡也.

H之軌跡究如何，學者試自解之.

習　題　十

1. 二等邊三角形底之位置一定. 求頂點之軌跡.

2. 三角形底之位置一定，高之大小一定. 求頂點之軌跡.

3. 一動圓半徑為定長，此動圓恆與一定圓相切. 求此動圓中心之軌跡.

4. 一動圓恆切一定直線上一定點. 求此圓中心之軌跡.

5. 定圓中動弦之長一定. 求此動弦中點之軌跡.

6. 定圓中動弦恆與一定直線平行．求此動弦中點之軌跡．

7. A為定點，XY為定直線，P為XY上一動點．求AP中點之軌跡．

8. A為定點，$\odot O$為定圓，P為$\odot O$圓周上一動點．求AP中點之軌跡．

9. $\triangle ABC$中，BC之位置一定，中線BB'之大小一定．求A之軌跡．

10. $\triangle ABC$中，BC之位置一定，$\angle A$之大小一定．求其重心之軌跡．

第十六章　作　圖　題

§232. **作圖題**　求作一圖形令合於所設條件曰作圖題 (problem of construction).

一個圖形，決其存在爲一事，如何作法又爲事．例如一線分必有一中點，此爲已知之事．然在線分中如何取得其無數點中之一點確能爲此線分之中點，此卻另爲一事，本書尙未講過．以前證定理時作補助線，僅知其可有此線而假定爲可作而已．

作圖題分兩部分；一部分爲已設，一部分爲求作．解決一作圖題分三步；第一步作出求作之圖形曰解法，第二步證明所作之圖合於求作之條件曰證，第三步研究解法與題中已設之關係曰討論．

§233. **公法**　公衆認爲可解決之作圖題，無需解法者曰公法 (postulate).

§234. **系**　從已解決之作圖題可直接推得之作圖題，亦曰系 (corollary).

§235. **公法一**　過兩定點作一直線．

用直尺令其邊靠緊所設兩點，沿邊畫線即得．

§236. **系一**　聯兩定點成一線分．

§237. **系二**　延長一線分爲半射線或直線．

§238. **公法二**　以一定點爲中心，一定長爲半徑作一圓．

用圓規張兩足令兩足尖端距離等於定長．以一足尖端

固定於定點而旋轉，則其他一足尖端所畫之線即圓周.

§239. 系一 以一定點爲中心，一定長爲半徑作一弧.

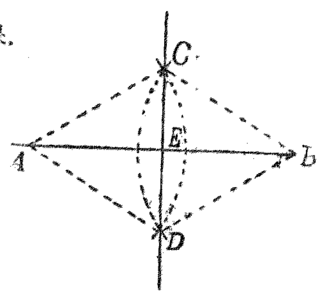
§240. 系二 從一定直線上截取一線分令等於一定長.

（注意） 一切作圖題解法都根據以上公法及系，及已解決之作圖題. 一切作圖題所許用之器具，就只以上兩公法所用之器具，直尺及圓規.

§241. 作圖題一 作所設線分之垂直等分線.

〔已設〕 一線分AB.

〔求作〕 AB之垂直等分線.



〔解法〕 以A爲中心，任意長（唯須大於AB之半）爲半徑作⊙A（公法二）. 以B爲中心，⊙A之半徑爲半徑作⊙B（公法二）. 兩圓交於C，D聯CD（公法一）.

CD即AB之垂直等分線. Q.E.F.

〔證〕 聯CA，CB，DA，DB. $\because$ ⊙A=⊙B.

$\therefore CA=CB$，$DA=DB$，又CD爲$\triangle ACD$，$\triangle BCD$之公邊.

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD$. $\therefore \angle ACD=\angle BCD$. 設$CD$，$AB$之交點爲$E$，則在$\triangle CAE$，$\triangle CBE$中，$CA=CB$，$\angle ACE=\angle BCE$，$CE$爲公邊，$\therefore \triangle CAE \cong \triangle CBE$.

$\therefore$ $AE=EB$，$\angle AEC=\angle BEC=R\angle$.

$\therefore$ CD爲AB之垂直等分線. Q.E.D.

〔討論〕 任何線分有一垂直等分線，僅有一垂直等分線

〔註〕 以後凡作圖題之解答，從以前定理已知其爲有一無二者，恆省去討論.

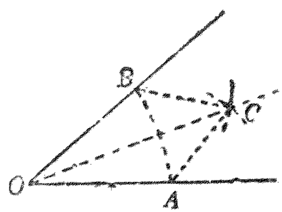
§242. 系一　在所設線分上取其中點.

§243. 系二　以所設線分爲直徑作圓.

§244. 作圖題二　作所設角之等分線.

〔已設〕　一角$\angle O$.

〔求作〕　$\angle O$之等分線.



〔解法〕　以O爲中心，任意長爲半徑作弧交$\angle O$之兩邊於A，B（公法二系）. 以A爲中心，任意長（唯須大於AB距離之半）爲半徑作⊙A（公法二）. 以B爲中心，⊙A之半徑爲半徑作弧交⊙A於C（公法二系）. 聯OC（公法一系）.

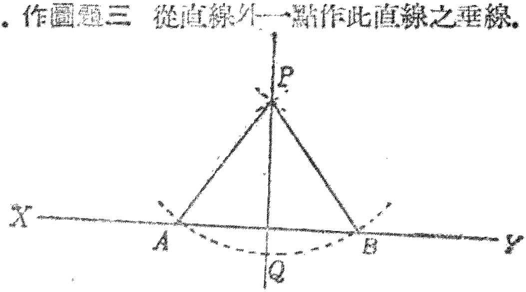
則OC即$\angle O$之等分線.　Q.E.F.

〔證〕　聯AC，BC，則$\triangle OAC \cong \triangle OBC$.（s.s.s. = s.s.s.）

$\therefore$　$\angle AOC = \angle BOC$. 即OC爲$\angle O$之等分線.

§245. 系　從直線上一點作此直線之垂.　Q.E.D.

§246. 作圖題三　從直線外一點作此直線之垂線.



〔已設〕 直線XY及其外一點P.

〔求作〕 一直線過P且垂直於XY.

〔解法〕 以P爲中心，任意長（惟須大於P與XY之距離）爲半徑作圓交XY於A,B二點（公法二）作AB之垂直等分線PQ（作圖題一）

則PQ即所求. Q.E.F.

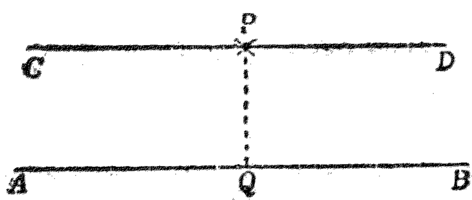
〔證〕 PQ爲AB之垂直等分線，故爲與A,B等距之點之軌跡. $\because PA=PB$，故PQ必過P點. 又$PQ\perp XY$.

$\therefore$ PQ爲所求作之線. Q.E.D.

§247. 作圖題四 從直線外一點作此直線之平行線.

〔已設〕 直線AB及其外一點P.

〔求作〕 一直線過P且平行於AB.



〔解法〕 過P作$PQ\perp AB$（§247）過P作$CD\perp PQ$.

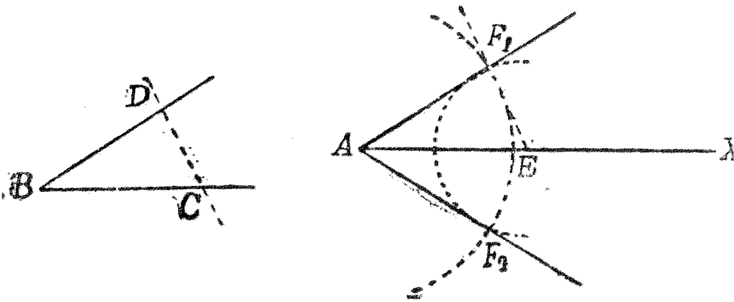
則CD即所求. Q.E.F.

〔證〕 $AB\perp PQ$，$CD\perp PQ$，$\therefore CD\parallel AB$. 又$CD$過$P$點.

$\therefore$ CD即爲所求. Q.E.D.

§248. 作圖題五 從所設半射線之原點，作一半射線令其所成之角等於一所設角.

〔已設〕 一半射線AX及一角$\angle B$.



〔求作〕　一半射線以A爲原點，與AX所成之角等於$\angle B$.

〔解法〕　任意作一直線截$\angle B$之兩邊於C,D.

在AX上截取線分$AE=BC$　　（公法二系二）

以A爲中心，BD之長爲半徑作⊙A.

以E爲中心，CD之長爲半徑作⊙E，交⊙A於F_1，F_2聯AF_1，AF_2. 則AF_1，AF_2皆爲所求.　　Q.E.F.

〔證〕　聯EF_1. 則 $\because AE=BC, AF_1=BD, EF_1=CD$.

$\therefore \quad \triangle AEF_1 \cong \triangle BCD. \quad \therefore \angle EAF_1=\angle CBD$.

同理$\angle EAF_2=\angle CBD$.

$\therefore \quad AF_1, AF_2$皆爲所求.　　Q.E.D.

〔討論〕　本題恆有兩個解答，在所設半射線之兩側.

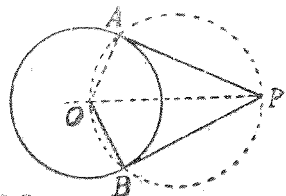
§249. 系一　作一三角形令其兩邊及一夾角各等於所設二定長及一定角.

§250. 系二　作一三角形令其兩角及其間一邊各等於所設二角及一定長.

§251. 系三　作一三角形令其三邊各等於三個所設定長.

§252. 系四 過所設直線外一點作一直線，令與原直線之交角等於一所設角。

〔以上四條，學者試自解之〕



§253. 作圖題六 過所設點作所設圓之切線。

〔已設〕 一⊙O及一點P.

〔求作〕 一直線過P且切於⊙O.

〔解法〕 聯OP. （公法一系）

以OP為直徑作圓交⊙O於A,B. （作圖題一系）

聯PA,PB. 則PA,PB皆為所求. Q.E.F.

〔證〕 聯OA,OB. 則因OP為直徑，$\therefore \angle OAP=R\angle$.

$\therefore$ PA為切線。又PA過P點. $\therefore PA$為所求.

同理 PB為所求. Q.E.D.

〔討論〕 若P在⊙O外，則有兩個解答，如上圖。若P在⊙O圓周上，則有一個解答，因OP為直徑所作之圓與⊙O內切於P，只有一交點。若P在⊙O內，則OP為直徑所作之圓與⊙O內離，故無解答。

§254. 作圖題七 以所設線分為弦作一弓形，令弓形角等於所設定角。

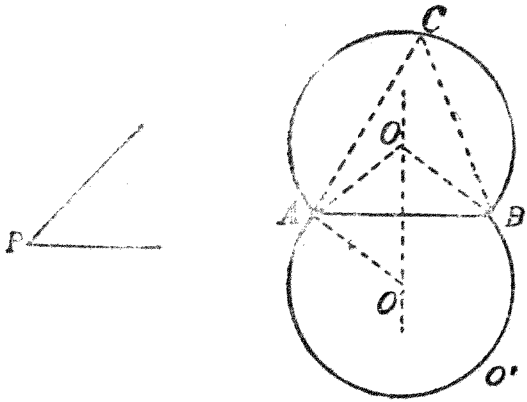
〔已設〕 線分AB及一$\angle P$.

〔求作〕 一弓形以AB為弦，其弓形角等於$\angle P$.

〔解法〕 作AB之垂直等分線OO'. （作圖題一）

過A作直線AO及AO'，交OO'於O及O'，令$\angle AOO'=\angle AO'O=\angle P$. （作圖題五系四）

以O,O'為中心，OA為半徑作弧$ACB,AC'B$.



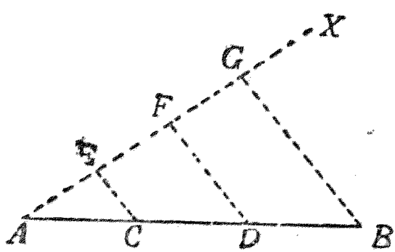
則弓形ACB及弓形$AC'B$皆爲所求. $Q.E.F.$

〔證〕 聯OB, OO'爲AB之垂直等分線, $\therefore OA=OB$.
故$\frown ACB$必至B點. 在弓形弧上任意取C, 取AC, BC,
則 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle AOO'=\angle P$.

$\therefore$ 弓形ACB爲所求.

同理 弓形$AC'B$爲所求. $Q.E.D.$

〔討論〕 本題恆有兩個解答. 若$\angle P<R\angle$, 則所得爲一雙大弓形. 若$\angle P>R\angle$, 則所得爲一雙小弓形. 若$\angle P=R\angle$, 則所得爲一雙半圓, 即以AB爲直徑所作之圓.



§255. 作圖題八 分所設線分爲三等分.

〔已設〕 一線分AB.

〔求作〕 在AB上兩點分AB爲相等三分.

〔解法〕 過A作任意半射線AX. 在AX上截取任意長AE. 在EX上截取F令$EF=AE$. 再在FX上截取FG令$FG=AE$. 聯GB. 過E,F各作GB之平行線交AB於C,D. 則C,D即所求之分點. Q.E.F.

〔證〕 $\because$ $EC \parallel FD \parallel GB$,

$\because$ $AE=EF=FG$,

$\therefore$ $AC=CD=DB$,

$\therefore$ C,D爲所求之分點. Q.E.D.

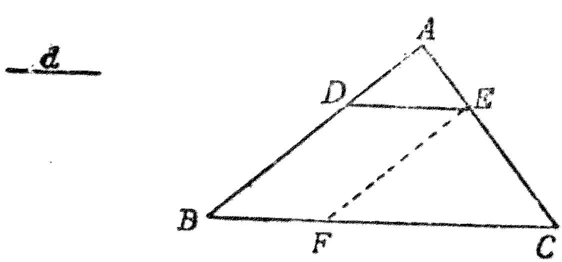
〔討論〕 本題恆有一組解答.

§256. 系 分所設線分爲n等分(n爲任意整正數).

§257. 作圖題之應用及雜例

以上諸節爲基本作圖題. 一切作圖題之解法皆依此及公法爲根據. 玆舉例如下:

(例一) 在所設$\triangle ABC$內求作BC之平行線交AB於D, 交AC於E, 且令DE等於所設定長d.



〔已設〕 $\triangle ABC$及一定長d.

〔求作〕 一直線交AB於D, 交AC於E. 令$DE \parallel BC$,

$DE=d$.

〔解法〕 在BC上截取$BF=d$. （公法二系二）

過F作AB之平行線交AC於E. （作圖題四）

過E作BC之平行線交AB於D. （作圖題四）

則DE即所求. Q.E.F.

〔證〕 $DBFE$為平行四邊形.

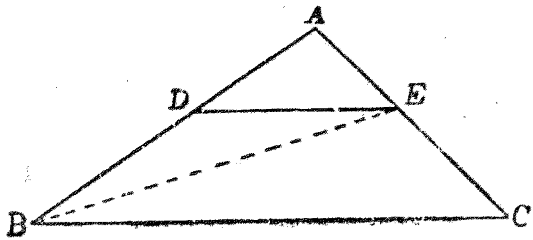
$\therefore$ $DE=BF=d$. 又 $DE \parallel BC$.

$\therefore$ DE為所求. Q.E.D.

〔討論〕 若所設定長$d \geqq BC$時，則本題無解答.

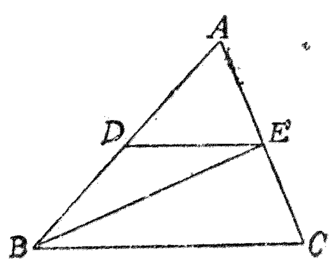
（注意一） 凡作圖題之曲折而不易直接得解法者，可先假定一已解好之圖形而解析之. 如

（例二） 在所設 $\triangle ABC$ 內求作BC之平行線交AB於D，交AC於E，且令$DE=DB$.



〔已設〕 一三角形ABC.

〔求作〕 一線分交AB於D，交AC於E，令$DE \parallel BC$，$DE=DB$.



本題較例一為難，因在未得DE之時，DB之長亦未知也

然DE之位置，不可任意。雖BC之平行線可以無數，而過上則$DE<DB$，過下則$DE>DB$。故本題僅有一適當解答可知。今假定圖中DE已爲適當之解答。即$DE=DB$。又$DE \parallel BC$。試聯BE觀之。則因$DB=DE$，

$\therefore$ $\angle DBE=\angle DEB$.又因$DE \parallel BC$, $\therefore \angle DEB=\angle EBC$

$\therefore$ $\angle DBE=\angle EBC$.即可知BE爲$\angle B$之等分線。然$\angle B$爲已設定角，故可即得解法如下：

〔解法〕 作$\angle B$之等分線BE交AC於E.（作圖題二）過E作BC之平行線交AB於D. （作圖題四）

則DE即所求. Q.E.F.

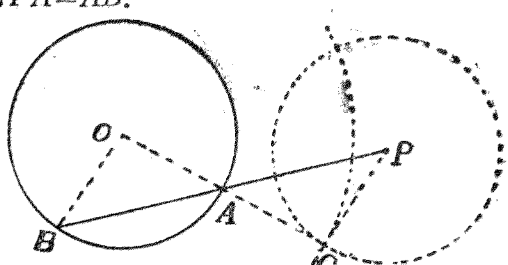
〔證〕 $\because$ $DE \parallel BC$, $\therefore$ $\angle DEB=\angle EBC$.

$\because$ BE等分$\angle B$，即 $\angle EBC=\angle DBE$, $\therefore$ $\angle DEB=\angle DBE$. $\therefore$ $DE=DB$. $\therefore$ DE即爲所求. Q.E.D.

〔討論〕 本題僅有一解答.

（注意二） 解析爲作圖題之要事. 多數作圖題，不經解析，不易發見解法. 唯解析部分，自可不必寫出，蓋解析爲發見解法之幫助，所需要者仍爲解法也.

（例三） 從所設圓外一所設點P作圓之割線交圓周於A,B，令$PA=AB$.



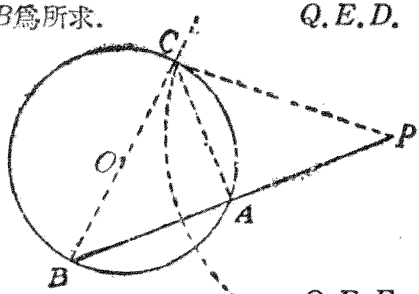
〔已設〕 ⊙O及其外一點P.

〔求作〕 一割線PAB令$PA=AB$.

〔解法一〕 以P爲中心，⊙O半徑之長爲半徑作⊙P. 以O爲中心，⊙O半徑二倍之長爲半徑作弧交⊙P圓周於C. 聯OC交⊙O圓周於A. 聯PA延長再交⊙O圓周於B. 則PAB即所求. Q.E.F.

〔證〕 聯OB,PC. 則 $\because OC=2OA, PC=OA$, $\therefore OB=OA=CA=CP$. $\therefore \angle OBA=\angle OAB$, $\angle CPA=\angle CAP$ 又$\angle OAB=\angle PAC$, $\therefore \angle OBA=\angle CPA$. $\therefore \triangle ABO\cong\triangle APC$, $\therefore PA=AB$.

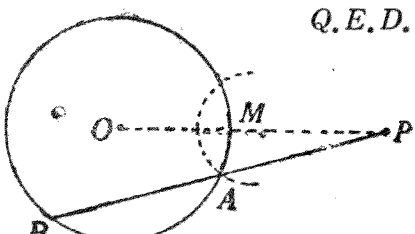
$\therefore$ PAB爲所求. Q.E.D.



〔解法二〕 以P爲中心，⊙O半徑二倍之長爲半徑作弧交⊙O圓周於C. 聯成直徑COB.聯BP交⊙O圓周於A. 則PAB即所求. Q.E.F.

〔證〕 $PC=CB$, $CA\perp PB$, $\therefore PA=AB$.

$\therefore$ PAB爲所求. Q.E.D.



〔解法三〕 聯OP. 取OP中點M. 以M爲中心，以⊙O半徑一半之長爲半徑作弧交⊙O圓周

於A. 聯PA延長至B，令$PA=AB$.

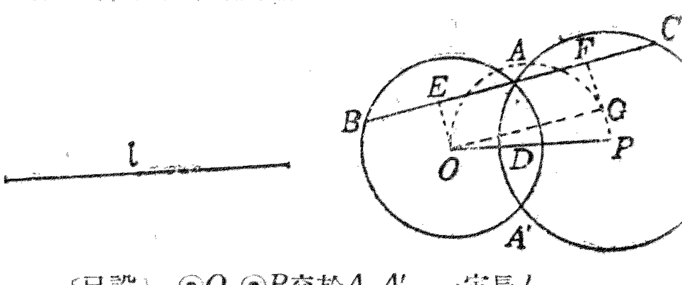
則PAB卽所求. $Q.E.F.$

〔學者試自證之〕

〔討論〕 若OP大於⊙O半徑之三倍，則本題無解答；若OP小於⊙O半徑之三倍，則本題有兩個解答；若OP等於⊙O半徑之三倍，則本題有一個解答，卽PO聯線.

（注意三） 以上三種解法，並非憑空想得到，皆由解析得來. 唯解析部分未寫出而已. 有時亦可將解析部分詳細寫明，而解法及證反可從略. 則因解法及證已在解析中甚顯明也.

（例四） 過相交二圓之一交點作一割線，令其爲兩圓所截之部分等於所設定長.



〔已設〕 ⊙O, ⊙P交於A, A'. 一定長l.

〔求作〕 過A一直線交⊙O於B, 交⊙P於C, 令$BC=l$.

〔解析〕 設BC爲所求之線. 從O, P各作BC之垂線OE, PF. 則$EA=\frac{1}{2}AB, AF=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore \quad EF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}l$. 作$OG\perp PF$, 則$OGFE$爲平行四邊形.

$\therefore \quad OG=EF=\frac{1}{2}l$. 又$\angle OGP=R\angle$. 故$G$在$OP$爲直徑所作之圓周上. 故可先以$OP$爲直徑作半圓在半圓, 內作弦$OG=\frac{1}{2}l$. 過$A$所作$OG$之平行線$BC$即所求. $Q.E.F.$

〔解法已見解析中，證略〕

〔討論〕　若l大於OP之二倍時，則無解答；等於OP之二倍時，有一解答；小於OP之二倍時，有二解答.

〔註〕　作圖題其他種種解法詳見第17章.

習題十一

1.　在一定直線上求作一點,令與其他所設二點等距.

2.　在一圓周上求作一點，令與其他所設二點等距.

3.　過一所設點求作一直線,令與其他所設二點等距.

4.　過一所設點求作一直線，令與其他一所設點之距離等於一所設長.

5.　過一所設點求作一直線，令與所設相交二直線成等角.

6.　求作一直線,令平行於一所設直線且切一所設圓.

7.　以所設長爲半徑求作一圓，令過一所設點且切一所設直線.

8.　以所設長爲半徑求作一圓，令過一所設點且切一所設圓.

9.　求作一圓，令切一所設直線，且切一所設圓於其上一所設點.

10.　求作一圓，令切一所設圓，且切一所設直線於其

上一所設點.

11. 過一所設點求作一直線令與所設二平行線相交，且令其介乎二平行線間之部分等於所設長.

12. 過一所設點求作一直線令與所設圓相交，且令其圓內部分（即弦）等於所設長.

13. 過所設相交兩圓之一交點求作一直線令其為兩圓周所截部分等於所設長.

14. 過所設角$\angle XOY$內一點P，求作一直線交OX，OY於A,B，令$AP=PB$.

15. 求作一割線交$\odot O$於A,A'，交$\odot P$於B,B'，令弦AA'，BB'各等於所設定長a,b.

16. 求作一正方形，令其對角線等於所設長.

17. 求作一正方形，令其對角線與一邊之和等於所設長.

18. 求作一三角形，令其兩角各等於所設角，其周等於所設長.

19. 求作一三角形，令其兩邊及第三邊上之中線各等於所設三個定長.

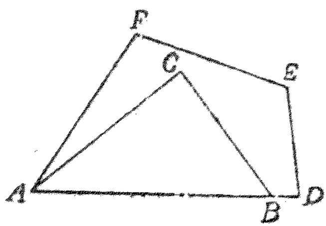
20. 求作一梯形，令其兩底及兩對角線各等於所設四個定長.

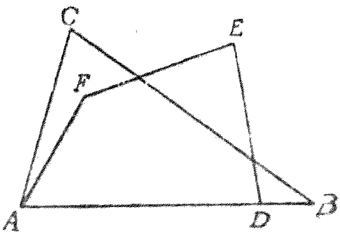
第三編　面　　積

第十七章　等　積　形

§258. **定義六二**　**面分**　**面積**　平面之有限部分，曰面分 (Plane segment). 面分之大小曰面積 (area).

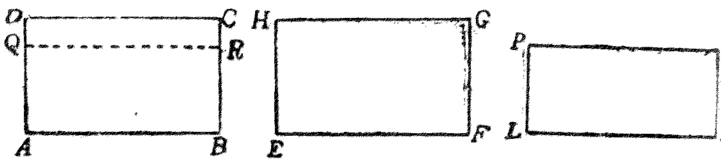
面分有種種形象，如三角形，平行四邊形，圓等皆是．兩個面分．若為合同圖，則其面積相等．但面積相等之兩面分，未必為合同圖．故比較兩面分之面積，其意義雖與比較兩線分之長相同．然較為復雜．若疊置兩面分時，甲面分完全在乙面分內，則甲面分小於乙面分．如圖$\triangle ABC$全在四角形$ADEF$內，則$\triangle ABC<ADEF$．猶諸$AB<AD$，自不成問題．然任意兩面分疊置時，決無如此簡單．如下圖，當$\triangle ABC$與$ADEF$之一邊重合時，$\triangle ABC$之一部分在$ADEF$之外，而$ADEF$之一部分卻又在$\triangle ABC$之外，故兩形之究竟孰大孰小，須另有他種根據以決之．此本編之要義也．





兩面分面積相等，簡稱曰相等，或曰等積．

§259. **定理七九**　兩個矩形中，兩雙鄰邊各相等，則此兩矩形之面積相等；一雙邊相等，其一雙鄰邊不等，則此兩矩形不等，鄰邊大者面積大.



〔假設〕　$\square ABCD$，$\square EFGH$，$\square LMNP$ 中，$AB=EF=LM$，$AD=EH>LP$.

〔終決〕　$\square ABCD=\square EFGH>\square LMNP$.

〔證〕　$\because AB=EF, AD=EH, \angle A=\angle E=R\angle$

$\therefore\ \square ABCL\cong\square EFGH$.　$\therefore \square ABCD=\square EFGH$.

$\because AD>LP$，故可在AD上取Q令$AQ=LP$. 作$QR\parallel AB$. 則$\square ABRQ=\square LMNP$，但$\square ABCD>\square ABRQ$（全量大於其一部分）.

$$\therefore\quad \square ABCD>\square LMNP. \qquad Q.E.D.$$

§260. **系一**　兩個等積矩形之一雙邊相等，則其他各雙邊皆相等.

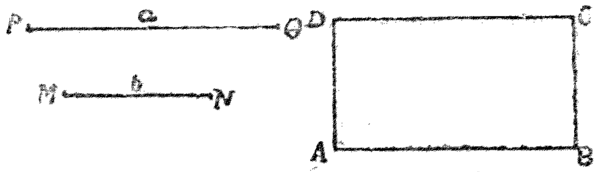
§261. **系二**　兩個正方形中，一雙邊相等，則此兩正方形面積相等，一雙邊不等，則此兩正方形面積不等，邊大者面積大.

§262. **系三**　兩個等積正方形之各雙邊相等.

§263. **定義六三**　**兩線分所包之矩形**　以兩線分爲兩鄰邊所成之矩形，曰此兩線分所包之矩形.

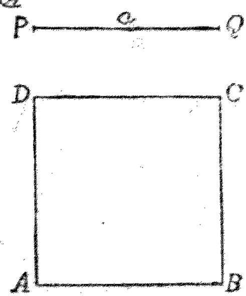
如圖矩形$ABCD$中，$AB=PQ$，$AD=MN$. 則矩形

$ABCD$爲PQ, MN所包之矩形. 以$PQ\cdot MN$表之. 卽
$\square ABCD=PQ\cdot MN$.



爲簡便計, 常以一個小字母表線分之長. 如以a表PQ, 以b表MN. 則$\square ABCD=ab$.

§264. **定義六四**　以一線分爲邊所成之正方形, 曰此線分上之正方形.

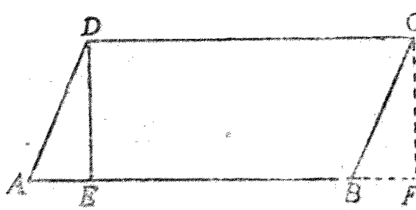


如圖正方形$ABCD$中各邊皆等於$PQ=a$, 則$ABCD$爲PQ上之正方形, 或簡曰a上之正方形. 以$\overline{PQ}^2$或a^2表之.

卽$\square ABCD=\overline{PQ}^2=a^2$.

§265. **定理八**

○　平行四邊形等於其底及高所包之矩形.



〔假設〕　DE爲$\square ABCD$之高.

〔終決〕　$\square ABCD=AB\cdot DE$.

〔證〕　從C作AB之垂線交AB延線於F. 則$DEFC$爲矩形而其面積爲$DC\cdot DE$.

在$\triangle ADE$, $\triangle BCF$中, $AD=BC$, $DE=CF$,

$\angle AED=\angle BFC=R\angle$. $\therefore \triangle ADE\cong\triangle BCF$.

$\therefore$ $\triangle ADE=\triangle BCF$. $\therefore \triangle ADE+DEBC=\triangle BCF+DEBC$

即$\square ABCD=\square EFCD=DC\cdot DE=AB\cdot DE$ Q.E.D.

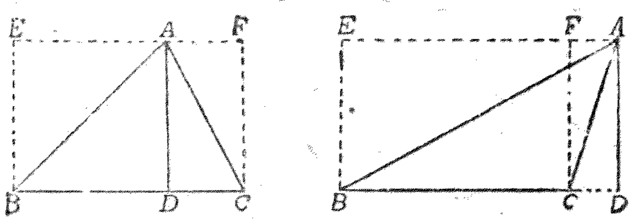
§266. **系一** 等底等高之平行四邊形相等.

§267. **系二** 兩平行四邊形中, 底等高不等, 則此兩平行四邊形不等; 高大者面積大.

§268. **系三** 兩平行四邊形中, 高等底不等, 則此兩平行四邊形不等; 底大者面積大.

§269. **系四** 等積兩平行四邊形中, 底等者高等, 高等者底等.

§270. **定理八一** 三角形之面積等於其底及高所包矩形之半.



〔假設〕 $\triangle ABC$中, $AD\perp BC$.

〔終決〕 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AD\cdot BC$.

〔證〕 過A作BC之平行線EF. 從B, C作$BE\perp EF$, $CF\perp EF$. 則$ADBE$, $ADCF$皆爲矩形.

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ABE$, $\therefore$ $\triangle ABD=\frac{1}{2}\square ADBE$.

又 $\triangle ACD \cong \triangle ACF$，∴ $\triangle ACD = \frac{1}{2} \square ADCF$.

$$\therefore \quad \triangle ABD \pm \triangle ACD = \frac{1}{2}(\square DE \pm \square DF),$$

即 $$\triangle ABC = \frac{1}{2} \square BCFE$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} EB \cdot BC = \frac{1}{2} AD \cdot BC. \qquad Q.E.D.$$

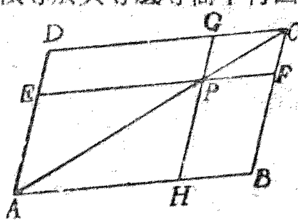
§271. **系一** 等底等高之三角形相等.

§272. **系二** 兩三角形中，底等高不等，則此兩三角形不等，高大者面積大.

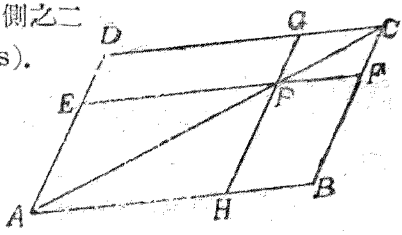
§273. **系三** 兩三角形中，高等底不等，則此兩三角形不等，底大者面積大.

§274. **系四** 等積兩三角形中，高等者底亦等，底等者高亦等.

§275. **系五** 三角形之面積等於其等底等高平行四邊形之半.



§276. **定義六五 平行四邊形之餘形** 過平行四邊形對角線上一點，引二鄰邊之平行線，將原形分成四個平行四邊形，其中在原對角線兩側之二形曰餘形(complements).



如圖P為$\square ABCD$對角線AC上任意一點. $EF \parallel AB$; $GH \parallel AD$. 則$\square EG$,

▱HF曰▱$ABCD$中之餘形.

§277. **定理八二** 平行四邊形中之二餘形相等.

〔假設〕 ▱EG, ▱HF為▱$ABCD$中之兩餘形.

〔終決〕 ▱EG=▱HF.

〔證〕 ▱$ABCD$中, $\triangle ADC\cong\triangle ABC$;

▱$AHPE$中, $\triangle AEP\cong\triangle AHP$;

▱$PFCG$中, $\triangle PGC\cong\triangle PFC$.

$\therefore \triangle ADC-\triangle AEP-\triangle PGD=\triangle ABC-\triangle AHP-\triangle PFC$.

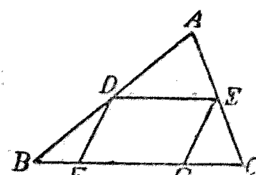
即▱EG=▱HF. Q.E.D.

習題十二

1. 兩個三角形底邊公共, 頂點之聯線平行於底, 則此兩三角形等積.

2. 兩個等積三角形底邊公共, 頂點在底之兩旁, 則頂點所聯線分為底所等分.

3. D, E為$\triangle ABC$兩邊AB, AC之中點. $DF \parallel EG$, 則▱$DFGE=\frac{1}{2}\triangle ABC$.

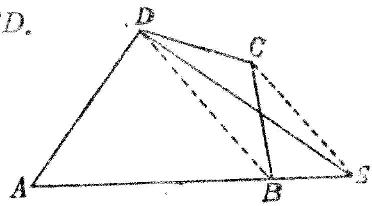


4. 順次聯一四邊形各邊中點所得新四邊形等於原四邊形之半.

5. P為$\triangle ABC$中線AD上任意一點, 則$\triangle ABP=\triangle ACP$.

6. 梯形之面積等於兩底和與高所包矩形之半.

§278. **作圖題九.** 將一四角形改成一等積三角形.



〔已設〕 一四角形$ABCD$.

〔求作〕 一三角形令與$ABCD$等積.

〔解法〕 聯BD，過C作DB之平行線交AB延線於E. 聯DE. 則$\triangle DAE$即所求. Q.E.F.

〔證〕 $\triangle EDB$，$\triangle CDB$中，DB爲其公共底.

$\because$ $CE \parallel DB$，$\therefore$ 其高相等. $\therefore$ $\triangle EDB = \triangle CDB$.

$\therefore$ $\triangle ABD + \triangle EDB = \triangle ABD + \triangle CDB$.

即 $\triangle DAE = ABCD$. Q.E.D.

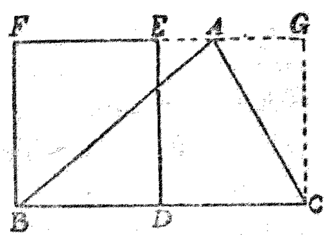
§279. **系一** 將一n角形改成一等積$(n-1)$角形（n爲任意整正數.）

§280. **系二** 將一n角形改成一等積三角形.

§281. **作圖題一〇** 將一三角形改成一等積矩形.

〔已設〕 $\triangle ABC$.

〔求作〕 一矩形令與$\triangle ABC$等積.



〔解法〕 過A作BC之平行線FG.

作BC之垂直等分線DE交FG於E，交BC於D.

作$BF \parallel DE$交FG於F.

則$\square BDEF$即所求. Q.E.F.

〔證〕 作$CG \parallel DE$交FG於G. 則$\triangle ABC = \frac{1}{2}\square BCGF$

$\because$　D爲BC之中點，　$\therefore$　$BD=DC$.

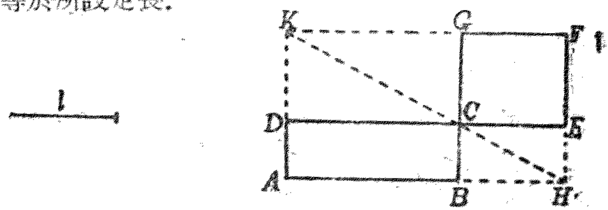
$\therefore$　$\square BDEF=\square DCGE=\frac{1}{2}\square BCGF$.

$\therefore$　$\square BDEF=\triangle ABC$.　　　　Q.E.D.

§282. 系一　將一平行四邊形改成一等積矩形.

§283. 系二　將一 n 角形改成一等積矩形.

§284. 作圖題一一　將一矩形改成一等積矩形令其一邊等於所設定長.



〔已設〕　$\square ABCD$及一定長 l.

〔求作〕　一矩形令其面積等於$\square ABCD$，其一邊等於l.

〔解法〕　延長AB至H令$BH=l$，聯HC延長之交AD之延線於K. 作KF，HF成$\square AHFK$. 延長DC，BC成$\square CEFG$.

則$CEFG$卽所求矩形.　　　　Q.E.F.

〔證〕　在$\square AHFK$中，$\square ABCD$，$\square CEFG$爲餘形.

$\therefore$　$\square CEFG=\square ABCD$. 又　$CE=BH=l$.

$\therefore$　$\square CEFG$卽所求.　　　　Q.E.D.

§285. 系一　將一三角形改成一等積矩形. 且令其一邊等於所設定長.

§286. 系二　將一 n 角形改成一等積矩形，且令其一

邊等於所設定長。

§287. 系三 將一平行四邊形改成一等積等角平行四邊形令其一邊等於所設定長。

習 題 十 三

1. 將一三角形改成一等積新三角形而令其一角等於一所設角。

2. 作一三角形令其面積等於一所設三角形，其一邊等於所設長。

3. 作一三角形令其面積等於一所設三角形，其一邊等於所設長，其一角等於一所設角。

4. 過三角形一邊上一點，求作一直線令等分此三角形。

5. 將一三角形改成一等積二等邊三角形。

6. 作一三角形令等於兩個所設三角形之和。

7. 過任意四角形一邊上所設點作一直線等分此四角形。

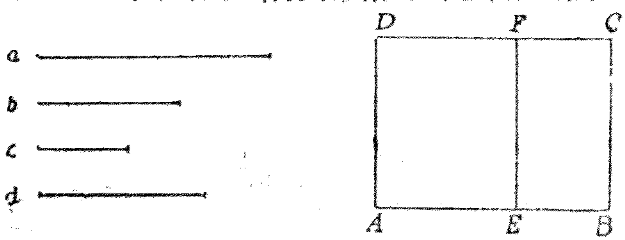
8. 作一平行四邊形令等於一所設矩形，且令其二邊各等於所設二定長。

9. 過四角形頂點，求作二直線，分此四角形爲三等分。

10. 過三角形一邊上一點，求作二直線，分此三角形爲三等分。

第十八章　正方形矩形

§288. **定理八三**　一線分等於二線分之和，則此線分與他線分所包矩形等於二線分各與線分所包矩形之和.



〔假設　線分$a=b+c$，d爲其他任意一線分.

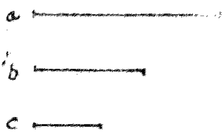
〔終決　$ad=bd+cd$.

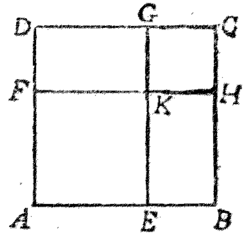
〔證〕　作矩形$ABCD$令$AB=a$，$AD=d$，則$\square ABCD=ad$. 在AB上取E，令$AE=b$. 則$EB=AB-AE=a-b=c$. 作$EF\perp AB$成$\square AEFD$，$\square EBCF$. 則$\square AEFD=bd$，$\square EBCF=cd$. 然$\square ABCD=\square AEFD+\square EBCF$.（全量等於其各部分之和）即$ad=bd+cd$.　　Q.E.D.

§289. **系一**　一線分等於二線分之差，則此一線分與他線分所包矩形等於二線分各與他線分所包矩形之差.

§290. **系二**　一線分等於諸線分之和，則此一線分與他線分所包矩形等於諸線分各與他線分所包矩形之和.

§291. **定理八四**　一線分等於二線分之和，則此一線分上之正方形等於二線分上正方形之和加此二線分所包矩形之二倍.





〔假設〕 $a=b+c$.

〔終決〕 $a^2=b^2+c^2+2bc$.

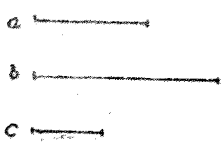
〔證〕 作正方形$ABCD$令$AB=a$,則$\square ABCD=a^2$.在AB,DC,AD,BC上各取點E,G,F,H,令$AE=DG=AF=BH=b$,則$EB=GC=FD=HC=a-b=c$.聯FH,EG交於K.則$\square AK=b^2$;$\square KC=c^2$, $\text{▭}KB=BH\cdot BE=bc$; $\text{▭}KD=DG\cdot FD=bc$.今$\square ABCD=\square AK+\square KC+\text{▭}KB+\text{▭}KD$.

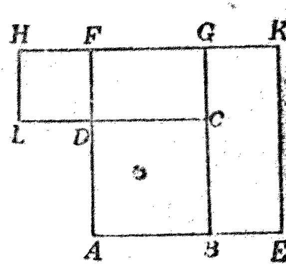
$\therefore\ a^2=b^2+c^2+2bc$. Q.E.D.

§292. **系一** 一線分等於他線分之二倍,則此線分上之正方形等於他線分上正方形之四倍.

§293. **系二** 一線分等於他線分之n倍,則此線分上之正方形等於他線分上正方形之n^2倍.

§294. **定理八五** 一線分等於二線分之差,則此一線





分上之正方形等於二線分上正方形之和減去此二線分所包矩形之二倍.

〔假設〕 $a=b-c$.

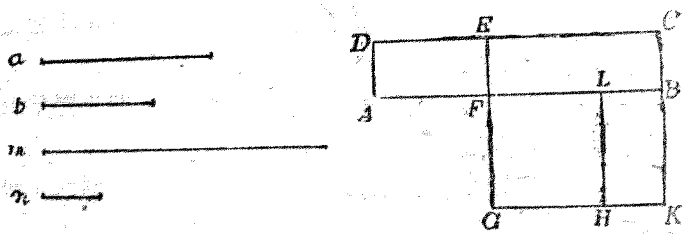
〔終決〕 $a^2=b^2+c^2-2bc$.

〔證〕 設圖中$\square ABCD=a^2$, $\square AEKF=b^2$, $\square DFHL=c^2$. 則$FG=DC=AB=a$, $\therefore\ HG=HF+FG=c+a=b$, $\therefore \square LG=HG\cdot HL=bc$ 又 $GK=FK-FG=b-a=c$, $\therefore\ \square GE=KE\cdot GK=bc$. 因$\square AC+\square GE+\square LG=\square AK+\square LF$,

即 $a^2+bc+bc=b^2+c^2$.

$a^2=b^2+c^2-2bc$. Q.E.D.

§295. **定理八六** m為a,b兩線分之和, n為a,b兩線分之差, 則m,n所包矩形等於a,b上正方形之差.



〔假設〕 a,b,m,n四線分中, $m=a+b$, $n=a-b$.

〔終決〕 $mn=a^2-b^2$.

〔證〕 設圖中$\square GC=a^2$, $\square GL=b^2$, $DE=b$

則 $DC=DE+EC=a+b=m$

$AD=FE=GE-GF=a-b=n$,

$HK=GK-GH=a-b=n$. $\therefore\ \square AE=DE\cdot FE=bn$.

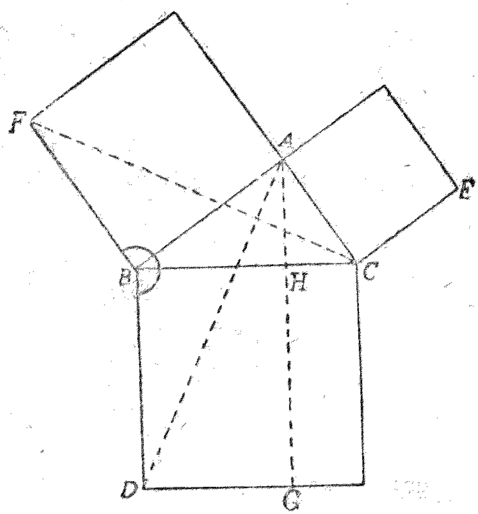
▭$HB=HL\cdot HK=bn$, ▭$AC=DC\cdot AD=mn$.

今▭$AC=$▭$AE+$▭$FC=$▭$HB+$▭$FC=$□$GC-$□GL.

$\therefore\quad mn=a^2-b^2$.　　　　　　　　　　　　$Q.E.D.$

〔註〕　以上諸定理適與代數乘法公式相合。如$(a+b)m=am+bm$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b_2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. 但代數式中之a,b,c等表數，數可行乘法；幾何中之a,b,c等表線分，線分與線分不能相乘。故式雖相同而義意不同。例如ab在代數中表a，b二數相乘之積，而在幾何中則表，a,b二線分所包矩形。學者於此，不妨利用代數公式之形以便記憶，但不可忘幾何中之意義而視爲乘法也。

§296. **定理八七**　直角三角形斜邊上正方形等於其他二邊上正方形之和



〔假設〕　$\triangle ABC$中，$\angle BAC=R\angle$

〔終決〕 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.

〔證〕 在BC,AB,AC上各作正方形□DC,□AF,□AE。過A作BD之平行線AG分□DC爲兩個矩形▭BG,▭CG,聯AD,FC。則在△ABD,△FBC中,$AB=FB$,$BD=BC$,

$\angle ABD=\angle FBC$(同爲$\angle ABC+B\angle$)．∴△$ABD\cong$△FBC.

然▭$BG=2$△ABD,□$AF=2$△FBC.(定理八一系五)

∴　▭$BG=$□AF. 同理可證▭$CG=$□AE

∴　□$DC=$▭$BG+$▭$CG=$□$AF+$□AE.

卽　$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.　　　　Q.E.D.

〔註〕 本定理在歐美皆稱之爲 Pythagoras' theorem(畢氏定理),因其爲畢氏所首先發見。其實在我國三代周初時商高先生早已發見此理,故當稱之曰商定理。

§297. 系一　直角三角形中斜邊上之高所分斜邊一部分與全斜邊所包矩形等於此部分鄰邊上之正方形(上圖中 $BH\cdot BC=\overline{AB}^2$, $HC\cdot BC=\overline{AC}^2$).

∵　$BH\cdot BC=BH\cdot BD=$▭$DH=$□$AF=\overline{AB}^2$.

§298. 系二　直角三角形中斜邊上之高分斜邊所成兩部分所包矩形等於此高上之正方形 (上圖中 $BH\cdot HC=\overline{AH}^2$).

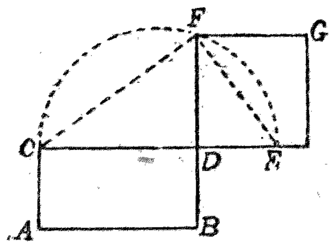
∵　$\overline{AB}^2=BH\cdot BC$　　　　(本定理系一)

$=BH(BH+HC)=\overline{BH}^2+BH\cdot HC$(定理八三)

又　$\because$　$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$.　　　（本定理）

$\therefore$　$BH\cdot HC=\overline{AH}^2$（各為 $\overline{AB}^2-\overline{HB}^2$）

§299. **作圖題一二**　將一矩形改成一等積正方形.



〔已設〕　一矩形$ABDC$.

〔求作〕　一正方形令與▭$ABDC$等積.

〔解法〕　延長矩形之一邊CD至E令$DE=DB$以CE為直徑作半圓周交BD之延線於F. 以DF為一邊作正方形□DG即所求.

〔證〕　聯FC、FE，則$\angle CFE=R\angle$.

$\therefore$　$\overline{DF}^2=CD\cdot DE$.　　　（定理八七系二）

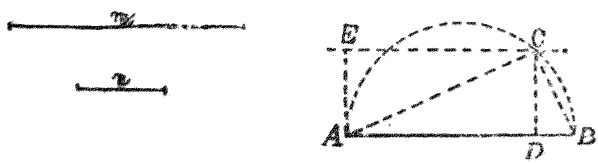
$=CD\cdot DB$.

$\therefore$　□$DG=$▭$ABDC$.　　　Q.E.D.

§300. **系**　將一多角形改為等積正方形.

〔註〕　凡直線形面分均可改爲等積正方形而正方形可從其一邊決定，故以後凡作圖題中有已設定面積時，恆以其等積正方形一邊之長表之. 舉例如下：

（例）　作二線分令其和等於一所設定長，其所包矩形等於一所設定面積.



〔已設〕 二定長m, n.

〔求作〕 二線分令其和等於m其所包矩形等於n上之正方形.

〔解法〕 作$AB=m$. 以AB爲直徑畫半圓周. 從A作AB之垂線$AE=n$. 作$EC \parallel AB$交半圓周於C. 作$CD \perp AB$. 則AD, DB卽所求. Q.E.F.

〔證〕 聯AC, CB.則$\angle ACB=R\angle$. $\therefore AD \cdot DB=\overline{CD}^2$.

$\because$ $ADCE$爲矩形, $\therefore CD=AE$. $\therefore AD \cdot DB=\overline{AE}^2=n^2$.

又$AD+DB=AB=m$. $\therefore AD, DB$爲所求之二線分.

Q.E.D.

〔討論〕 若n大於$\frac{1}{2}$m則本題無解答.

習題十四

1. $\triangle ABC$中, $AB>AC$, AD爲高. 則$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$.

2. 若四角形之兩對角線互相垂直, 則兩雙對邊上正方形之和相等.

3. 直角三角形之一銳角等於他一銳角之二倍, 則大

銳角對邊上之正方形等於小銳角對邊上正方形之三倍.

4.　從任意點P與矩形$ABCD$之各頂點聯成線分，則$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$.

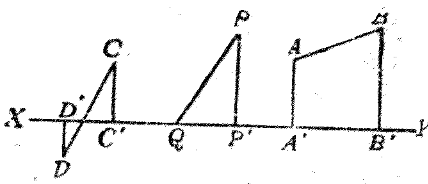
5.　作一正方形令等於所設三正方形之和.

6.　作一正方形令等於所設正方形之半.

7.　作二線分令其和等於所設定長，其上正方形之和等於定面積.

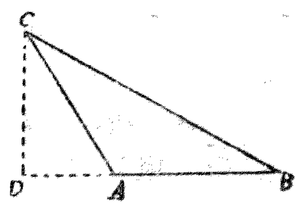
§301. **定義六六　正射影**　從一點至一直線引垂線，則此垂線之足曰此點在此直線上之正射影 (orthographic projection) 從一線分兩端至一直線各引垂線，則此兩垂足爲端點之線分爲原線分在此直線上之正射影.

如圖AA', BB', CC', DD', PP' 皆垂直於XY，則A', B', C', D', P'各爲A, B, C, D, P在XY上之正射影. $A'B'$, $C'D'$, $P'Q$各爲AB, CD, PQ在XY上之正射影.



正射影，亦曰垂直射影，簡稱曰射影.

§302. **定理八八**　在鈍角三角形中，鈍角對邊上正方形等於其他二邊上正方形之和加二邊中一邊及他一邊在此邊上射影所包矩形之二倍.



〔假設〕　$\triangle ABC$中，$\angle A > R\angle$，AD爲AC在AB上之射影。

〔終決〕　$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB\cdot AD$.

〔證〕　因AB爲AC在AB上之射影，$\therefore$ $CD\perp DB$.

$\therefore$　$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{DB}^2$　　　　（定理八七）

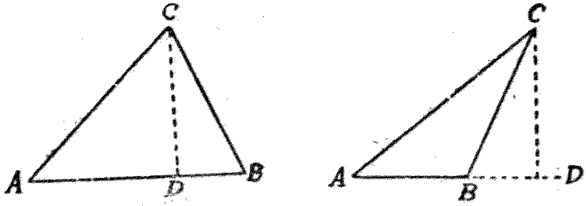
$=\overline{CD}^2+(AD+AB)^2$

$=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2+\overline{AB}^2+2AB\cdot AD$.　（定理八四）

$\because$　$\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AC}^2$,　　　　（定理八七）

$\therefore$　$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB\cdot AD$.　　Q.E.D.

§303. **定理八九**　三角形中，銳角對邊上正方形等於其他二邊上正方形之和減去二邊中一邊及他一邊在此邊上射影所包矩形之二倍.



（圖一）　　　　（圖二）

〔假設〕　$\triangle ABC$中$\angle A < R\angle$，AD爲AC在AB上之射影.

〔終決〕　$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB\cdot AD$.

〔證〕　因AD爲AC在AB上之射影，$\therefore CD\perp AB$.

$\therefore$　$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{DB}^2$.

即 $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+(AB-AD)^2$（如圖一），

或 $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+(AD-AB)^2$（如圖二），

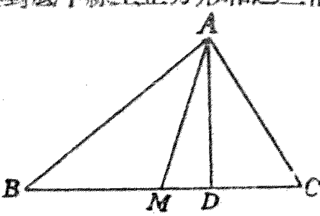
∴ $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2+\overline{AB}^2-2AB\cdot AD$.

∵ $\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AC}^2$.

∴ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB\cdot AD$. Q. E. D.

§304. **系** 三角形一邊上正方形等於其他二邊上正方形之和，則此邊對角爲直角；大於其他二邊上正方形之和，則此邊對角爲鈍角；小於其他二邊上正方形之和，則此邊對角爲銳角.

§305. **定理九〇** 三角形二邊上正方形之和等於半底上正方形與對底中線上正方形和之二倍.



〔假設〕 $\triangle ABC$中，AM爲BC上之中線.

〔終決〕 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$.

〔證〕（1） 設$AM\perp BC$，則根據商高定理，$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2$，$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2$. ∵ $BM=MC$，

∴ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$.

（2） 設AM不與BC直交，作$AD\perp BC$.

則MD爲AM在BC上之射影．

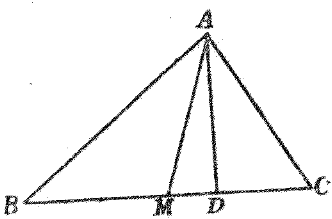
$\therefore\quad \overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+2BM\cdot MD.$　　（定理八八）

$\quad\ \ \overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2-2CM\cdot MD.$　　（定理八九）

$\because\quad BM=MC.\quad \therefore\quad \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2).$

Q.E.D.

§306. **定理九一**　三角形二邊上正方形之差等於底邊與中線在底上射影所包矩形之二倍．



〔假設〕　$\triangle ABC$中，$AB>AC$，AM爲中線，MD爲AM在BC上之射影．

〔終決〕　$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2BC\cdot MD.$

〔證〕　$\because\quad AB>AC,\quad \therefore\quad \angle AMB>\angle AMC.$

$\therefore\quad \angle AMB>R\angle,\quad \angle AMC<R\angle.$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+2BM\cdot MD.$$

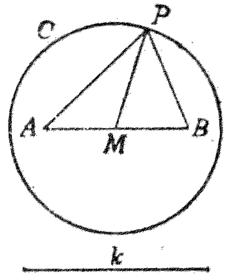
$$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{CM}^2-2CM\cdot MD.$$

$\because\quad BM=CM,\quad \therefore\quad \overline{BM}^2=\overline{CM}^2.$

$\therefore\quad \overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2BM\cdot MD+2CM\cdot MD$

$\qquad\qquad\qquad =2MD(BM+CM)$

$=2MD\cdot BC$ Q.E.D.



§307. **定理九二** 一動點與所設二定點聯線上正方形之和等於一定面積，則此動點之軌跡為一圓周.

〔已設〕 二定點A,B,及一定長k.

〔條件〕 動點P, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=k^2$.

〔軌跡〕 P之軌跡為一圓周C，其中心為AB之中點M，其半徑為 $\sqrt{\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}}$

〔證〕 C上任意取點P聯PA,PB,PM.

則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$.

$\therefore\ \overline{PM}^2=\frac{1}{2}(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)-\overline{AM}^2$

$=\frac{1}{2}(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)-\frac{\overline{AB}^2}{4}=\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}$

$\therefore\ PM=\sqrt{\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}}$ 為定長，又M為定點.

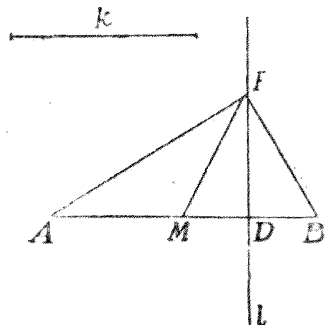
$\therefore$ P之軌跡為圓周C. Q.E.D.

§308. **定理九三** 一動點與所設二定點聯線上正方形之差等於一定面積，則此動點之軌跡為一直線.

〔已設〕 二定點A,B及一定長k.

〔條件〕 動點P, $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=k^2$.

〔軌跡〕 P之軌跡為一直線l,與AB直交於D，D與AB中點M之距離為$\frac{k^2}{2AB}$.



〔證〕（1） 設P為l上任意點，聯PA,PB,PM。

則　$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=2MD\cdot AB=2\left[\frac{k^2}{2AB}\right]\cdot AB=k^2$

∴　l上任何點適合於條件

（2） 設P為適合於條件之點，聯PA,PB,PM。作$PD'\perp AB$，則 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=2MD'\cdot AB=k^2$。

∴　$MD'=\frac{k^2}{2AB}=MD$。　∴　D'合於D。　∴　P在l上。

∴　適合於條件之點在l上。

P之軌跡為直線l。　　　　Q.E.D.

習　題　十　五

1. P為二等邊三角形底BC上任意一點，

則　$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP\cdot CP$。

2. 平行四邊形四邊上正方形之和等於二對角線上正方形之和。

3. P為二等邊直角三角形ABC斜邊BC上任意一點，

則　$BP^2+CP^2=2AP^2$.

4. A, B, C, D為一直線上順次四點，

則　$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

5. M為AB之中點，P為AB上任意點，

則　$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MP}^2)$.

6. M為AB之中點，P為AB延線上任意點，

則　$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MP}^2)$.

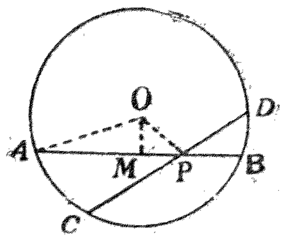
〔注意〕　本題終決與前題相同.

7. M為AB之中點，P為AB線外任意點，則可得前兩題同樣終決否？

8. 5, 6 兩題終決之左節若為$\overline{AP}^2-\overline{BP}^2$，則右節當得何式？

第十九章　正方形矩形與圓

§309. **定理九四**　圓內相交兩弦中，各弦為交點所分兩部分所包矩形相等。



〔假設〕　$\odot O$內AB,CD兩弦交於P。

〔終決〕　$AP\cdot PB=CP\cdot PD$。

〔證〕　作$OM\perp AB$，則$AM=MB$。聯OA,OP。

則　$AP\cdot PB=(AM+MP)(MB-MP)=\overline{AM}^2-\overline{MP}^2$

又因　$\overline{OA}^2=\overline{AM}^2+\overline{OM}^2$，$\overline{OP}^2=\overline{MP}^2+\overline{OM}^2$

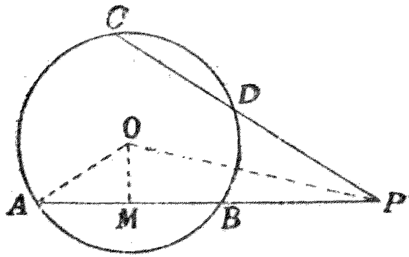
$\therefore$　$\overline{OA}^2-\overline{OP}^2=\overline{AM}^2-\overline{MP}^2$ $\therefore$　$AP\cdot PB=\overline{OA}^2-\overline{OP}^2$。

同理可證　$CP\cdot PD=\overline{OC}^2-\overline{OP}^2$

$\because$　$OA=OC$。$\therefore$　$AP\cdot PB=CP\cdot PD$。　　Q.E.D.

§310. **系**　過圓內一定點所作任意弦，其為此定點分成兩部分所包矩形之面積一定。

§311. **定理九五**　兩弦延長交於圓外，則各弦兩端點與交點間線分所包矩形相等。



〔假設〕 ⊙O內AB,CD兩弦延線交於P.

〔終決〕 $AP\cdot BP=CP\cdot DP$.

〔證〕 作$OM\perp AB$，則 $AM=MB$. 聯OA,OP.

則 $AP\cdot BP=(MP+AM)(MP-BM)=\overline{MP}^2-\overline{AM}^2$

又因 $\overline{OP}^2=\overline{MP}^2+\overline{OM}^2$，$\overline{OA}^2=\overline{AM}^2+\overline{OM}^2$

$\therefore\ \overline{OP}^2-\overline{OA}^2=\overline{MP}^2-\overline{AM}^2$. $\therefore\ AP\cdot BP=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2$

同理可證 $CP\cdot DP=\overline{OP}^2-\overline{OC}^2$.

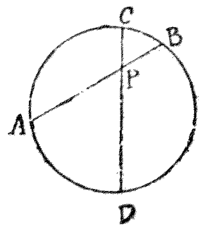
$\because\ OA=OC$. $\therefore\ AP\cdot BP=CP\cdot DP$. Q.E.D.

§312. **系一** 從圓外一點作任意割線，其全割線分與圓外線分所包矩形之面積一定.

§313. **系二** 從圓外一點所作割線之全割線分與圓外線分所包矩形等於從此點所作切線分上之正方形.

（注意） 定理九四及九五，除兩弦交點一在內一在外，其餘均相同. 學者可注意其證法亦完全相同.

§314. **定理九六** 二線分相交，若各線分中爲交點所分成之二部分所包矩形相等，則此兩線分之四端點共圓.



〔假設〕　AB, CD交於P，$AP\cdot PB=CP\cdot PD$.

〔終決〕　A, B, C, D共圓.

〔證〕　過A, C, B作圓，設圓周交CD於D'，

則　$AP\cdot PB=CP\cdot PD'$.　　　　（定理九四）

今　$AP\cdot PB=CP\cdot PD$，$\therefore$　$CP\cdot PD'=CP\cdot PD$.

$\therefore$　$PD=PD'$（定理七九系一）$\therefore$　D合於D'.

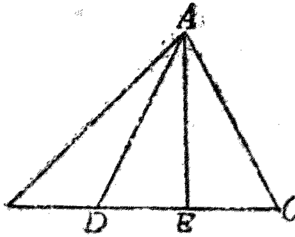
$\therefore$　A, B, C, D共圓.　　　　Q. E. D.

§315. 系　二線分延線相交，若各線分之兩端點與交點間線分所包矩形相等，則此二線分之四端點共圓.

第二十章　面積題證法及雜例

§316. **面積題之證法較直線形及圓爲難**　因直線形及圓中諸題不外乎線分與角之大小比較及點與線之位置關係，大抵可由圖中直接觀察之．其定理亦易於記憶．面積則不然．因面積大小之比較由圖中不易看出，故定理每易忘記或誤記．如定理九〇，九一等爲用至廣，而學者則最不易記憶，因不若直線形中"對頂角相等"或"二等邊三角形底角相等"等諸定理學者已視爲當然，證題時俯拾即是也．故證面積題時，第一須將各定理熟記之．舉例如下：

（例一）　D,E爲$\triangle ABC$底BC上二點，而$BD=DE=EC$．求證$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2$.



〔證〕在　$\triangle ABE$中，

$$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{DE}^2.$$

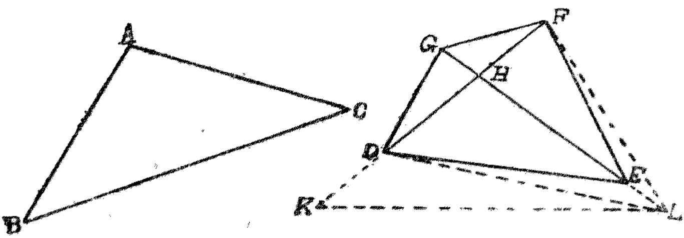
在$\triangle ADC$中，$\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2$.

$$\therefore\quad \overline{AB}^2+\overline{AE}^2+\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.\quad Q.E.D.$$

（注意一）　面積中關於等積形之題，則可注意圖中等底等高三角形．如

（例二） 三角形之二邊及其所夾角，各等於一四角形之二對角線及其所夾角，則此三角形與四角形等積。



〔假設〕 $\triangle ABC$，四角形$DEFG$中，$AB=FD$ $AC=GE$，$\angle A=\angle DHE$。

〔終決〕 $\triangle ABC=DEFG$。

〔證〕 延長HD,HE各至K,L令$DK=FH,EL=GH$，聯KL。則$HK=FD=AB,HL=GE=AC$，$\therefore \triangle HKL\cong\triangle ABC$。

聯DL,FL。$\because$ $DK=FH$，$\therefore$ $\triangle LDK=\triangle LFH$。

$\because$ $HL=GE$，$\therefore$ $\triangle LFH=\triangle EFG$。

$\therefore$ $\triangle LDK=\triangle EFG$。

又 $\because$ $EL=GH$，$\therefore$ $\triangle DLE=\triangle DGH$。

$\because$ $\triangle HKL=\triangle HDE+\triangle DLE+\triangle LDK$.

$=\triangle HDE+\triangle DGH+\triangle EFG$

$=DEFG$。

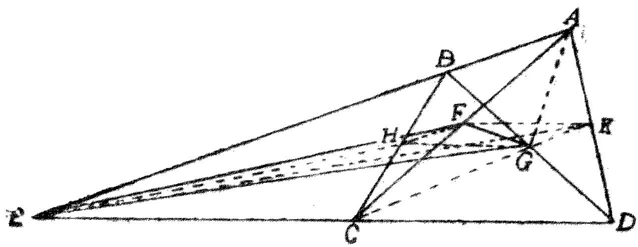
$\therefore$ $\triangle ABC=DEFG$。 Q.E.D.

（注意二） 題中涉及等高三角形時，平行點之應用最廣。如

（例三） E 爲四角形 $ABCD$ 一雙對邊AB,DC之交

點。F，G各爲對角線AC，BD之中點．求證

$$\triangle EFG=\frac{1}{4}ABCD.$$



〔證〕　在BC上取中點H。聯HE，HF，HG，CG。

∵　H，G各爲BC，BD之中點，∴　$HG \parallel ED$。

∴　$\triangle EHG=\triangle CHG=\triangle BHG=\frac{1}{2}\triangle CGB=\frac{1}{2}\triangle CGD$.

$$=\frac{1}{4}\triangle CBD.$$

同樣可證　$\triangle EHF=\frac{1}{4}\triangle BCA$.

∴　$\triangle EFG=\triangle EHG+\triangle EHF+\triangle HFG$

$$=\frac{1}{4}\triangle CBD+\frac{1}{4}\triangle BCA+\triangle HFG.$$

在AD上取中點K。聯KE，KF，KG，AG。

∵　K，G各爲AD，BD之中點，∴　$KG \parallel AE$。

∴　$\triangle EKG=\triangle AKG=\triangle DKG=\frac{1}{2}\triangle AGD$.

$$=\frac{1}{2}\triangle AGB=\frac{1}{4}\triangle ABD.$$

同樣可證　$\triangle EKF=\frac{1}{4}\triangle ACD$.

$\therefore \quad \triangle EFG = \triangle EKG + \triangle EKF - \triangle KFG.$

$\qquad = \frac{1}{4}\triangle ABD + \frac{1}{4}\triangle ACD - \triangle KFG.$

$\therefore \quad 2\triangle EFG = \frac{1}{4}\triangle CBD + \frac{1}{4}\triangle ABD + \frac{1}{4}\triangle BCA.$

$\qquad + \frac{1}{4}\triangle ACD + \triangle HFG - KFG.$

$\because$ $FHGK$為▱，$\therefore$ $\triangle HFG = \triangle KFG.$

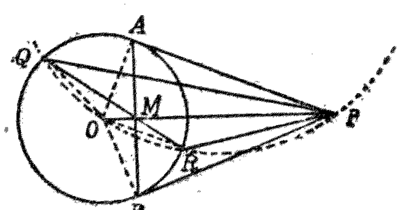
$\therefore \quad 2\triangle EFG = \frac{1}{4}(\triangle CBD + \triangle ABD) + \frac{1}{4}(\triangle BCA + \triangle ACD)$

$\qquad = \frac{1}{4}ABCD + \frac{1}{4}ABCD = \frac{1}{2}ABCD.$

$\therefore \quad \triangle EFG = \frac{1}{4}ABCD.$ Q.E.D.

（注意三） 有時題意並不涉及面積，然須引用面積定理證之.

（例四） PA, PB切⊙O於A, B. PO交AB於M，QR為過M之任意弦. 求證PO等分$\angle QPR$



〔證〕 聯OA, OB, OQ, OR.

$\because$ PA, PB為切線，

$\therefore$ $\angle OAP = R\angle$,

$\angle OBP = R\angle$, $\therefore \angle OAP + \angle OBP = 2R\angle$, $\therefore A, O, B, P$共圓

$\therefore \quad OM \cdot MP = AM \cdot MB.$ （定理九四）

又因A, Q, B, R共圓，$\therefore$ 同理$QM \cdot MR = AM \cdot MB$.

$\therefore \quad OM \cdot MP = QM \cdot MR.$ （定理九六）

$\because \quad OQ = OR,$

$\therefore \quad \frown OQ = \frown OR$. （同圓中等弦對等弧）

$\therefore \quad \angle OPQ = \angle OPR$. （同圓中等弧對等圓周角）

$\therefore \quad PO$等分$\angle QPR$. $Q.E.D.$

習 題 十 六

1. 梯形$ABCD$中，AD, BC為底，其對角線AC, BD交於E. 求證$\triangle ABE = \triangle CDE$

2. 梯形二底中點所聯線分分原形為相等二份.

3. P, Q為二同心圓外圓及內圓上各任意點，外圓直徑AB交內圓於C, D. 求證

$$\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{QA}^2 + \overline{QB}^2$$

4. E為四角形$ABCD$對角線AC之中點. 求證

$$\triangle BDE = \frac{1}{2}(\triangle ABD - \triangle CBD).$$

5. 以梯形一不平行邊為底，對邊中點為頂點所成三角形等於梯形之半.

6. 過平行四邊形$ABCD$之頂點A作直線交CD於E，交BC延線於F，則$\triangle BCE = \triangle DEF$.

7. 平行四邊形$ABCD$對角線BD之平行線交BC於P，交CD於Q 則$\triangle ABP = \triangle ADQ$.

8. 三角形各邊上正方形之三倍等於其各中線上正方形之四倍.

9. G為$\triangle ABC$之重心，P為任意一點. 求證

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3 \cdot \overline{PG}^2.$$

10. E,F爲不平行四邊形$ABCD$兩對角線之中點.求證

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2$$

11. 梯形$ABCD$中$AD \parallel BD$. 求證

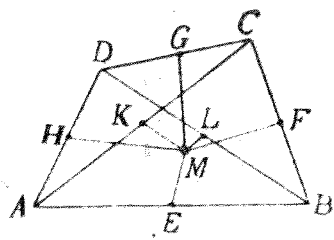
$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2AD\cdot BC.$$

12. 平行四邊形$ABCD$之對角線交於 E. P爲$\triangle ABE$內任意點 求證 $\triangle PCD-\triangle PAB=\triangle PAC+\triangle PBD$.

13. 梯形$ABCD$中, $AD \parallel BC$. AC,BD交於E. 過 E 作BC之平行線交AB於F, 交CD於G. 則$EF=EG$.

14. E,F,G,H,K,L各爲AB,BC,CD,DA,AC,BD之中點. $KM \parallel DB, LM \parallel AC$. 求證

四角形$AEMH=BFME=CGMF=DHMG$.



15. AB, CD爲⊙O內二弦直交於P. 求證PA, PB, PC, PD上正方形之和等於直徑上之正方形.

16. P爲⊙O直徑AB上任意點. 弦$CD \parallel AB$. 求證

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$$

17. 外切二圓外公切線上之正方形等於二圓直徑所包之矩形.

18. 從半圓直徑AB兩端各引弦AC,BD交於E. 則

$$AC\cdot AE+BD\cdot BE=\overline{AB}^2.$$

19. 從⊙O外一點 P 引切線PA,PB. 弦AB中點爲M

過P引任意割線交圓周於Q,R. 則AM等分$\angle QMR$.

20. $\odot A$, $\odot B$為二定圓. 一動點P至$\odot A$, $\odot B$所作切線相等, 則P之軌跡為垂直於AB之直線.

21. 一動線分介乎三角形二邊之間而與底平行, 則此動線分中點之軌跡為一直線.

22. 作一二等邊三角形令其底等於所設定長, 面積等於所設定面積.

23. 在$\triangle ABC$內求一點P, 令$\triangle PBC=2\triangle PAB$, 又$\triangle PAC=3\triangle PAB$.

24. 求作二線分令其和等於所設長, 其正方形之和等於定面積.

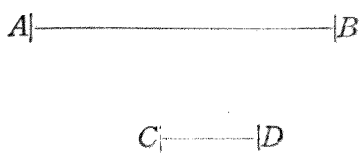
25. 求作二線分令其和等於所設長, 其正方形之差等於定面積.

26. 求作二線分令其差等於所設長, 其正方形之和等於定面積.

第四編　比　　例

第二十一章　比及比例概論

§317. **定義六七　量之比**　二同類量中，一量爲他量之倍數曰此二量之比(ratio). 第一量曰前項(antecedent). 第二量曰後項 (consequent)



AB, CD, 二線分中，若AB爲CD之三倍，則曰AB對於CD之比爲3. 記作$AB:CD=3$,或$\dfrac{AB}{CD}=3$. 式中AB爲前項，CD爲後項．若以CD爲前項，以AB爲後項,則爲$CD:AB=\dfrac{1}{3}$,因AB既爲CD之三倍，則CD爲AB之$\dfrac{1}{3}$也．普徧言之，若$a=nb$，則曰$a:b=n$,n或爲整數，或爲分數，且可爲無理數．

由上述定義可得以下數事：

（1）　兩比後項相等，則前項大者比亦大．

（2）　兩比前項相等，則後項大者比小．

（3）　比之前後項各乘或除以同數時，所得之比與原比相等．

（4）　一比之後項等於他比之前項，則此二比之積等

於第一比之前項與第二比之後項之比。

§318. **定義六八 反比** 一比等於他比之逆數，則此二比曰互爲反比。

§319. **定義六九 複比** 一比等於其他諸比之積，則此比名曰其他諸比之複比。

§320. **定義七〇 二乘比 三乘比** 一比等於他比之平方，則此比名曰他比之二乘比。一比等於他比之立方，則此比名曰他比之三乘比。

§321. **定義七一 約量 倍量** 二量之比若爲整數，則後項爲前項之約量(measure)，前項爲後項之倍量(multiple)。如上節中CD爲AB之約量，AB爲CD之倍量。

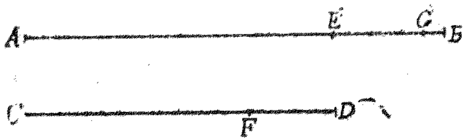
§322. **定義七二 公約量** 二量各爲第三量之倍量，則此第三量爲二量之公約量(common measure)。

若EF爲AB，CD之公約量，而$AB=mEF$，$CD=nEF$ (m,n爲整數)。則$AB:CD=m:n$。

§323. **作圖題一三** 求所設二線分之公約線分。

〔已設〕 二線分AB，CD。

〔求作〕 AB，CD之公約線分。



〔解法〕 設$CD<AB$，在AB上截取CD之倍量，得$AE=CD$。餘$EB<CD$，再在CD上截取EB之倍量，得$CF=2EB$。餘$FD<EB$，再在EB上截取FD之倍量，得EG

$=FD$, 餘$GB<FD$，再在FD上截取GB之倍量，得$FD=$ GB. 無餘. 則GB為AB，CD之公約量. Q.E.F.

〔證〕 $FD=4GB$.

$\therefore \quad EB=EG+GB=FD+GB=4GB+GB$
$=5GB$.

$\therefore \quad CD=CF+FD=2EB+FD=10GB+4G$
$B=14GB$.

$\therefore \quad AB=AE+EB=CD+EB=14GB+5G$
$B=19GB$.

$\therefore \quad GB$為AB, CD之公約量. Q.E.D.

〔討論〕 若$FD>4GB$時，則FD上可截取$FH=4GB$ 餘$HD<GB$. 故可如上繼續求之. 若累次繼續求之而仍有餘量，雖至此餘量為極小，然仍不等於零，則無解答.

§324. 系一 求所設二線分之比.

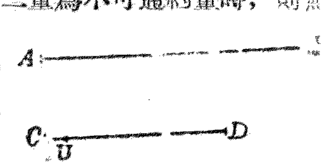
如上節$AB=19GB$, $CD=14GB$，則$AB:CD=19:14$.

§325. 系二 求所設二定角之公約角.

§326. 系三 求所設二定角之比.

§327. **定義七三 可通約量 不可通約量** 有公約量之二量曰可通約量(commensurable quantity). 無公約量之二量曰不可通約量(incommensurable quantity).

§328. **不可通約量之比** 二量為不可通約量時，則無公約量，故不能得其比值。然可得其比之近似值如下：



設 AB CD 為不可通約二線分。將 CD 分為 n 等分，

設所得每份之長爲CU，則$CD=nCU$，　而CU爲CD之約量。因AB,CD無公約量，$\therefore$　CU不爲AB之約量，即AB不爲CU之倍量　設$mCU<AB<(m+1)CU$，

則　$AB:CD>m:n$。

又　$AB:CD<(m+1):n$。

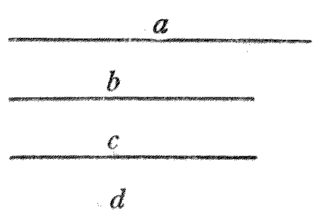
$\therefore$　$\dfrac{m}{n}<AB:CD<\dfrac{m+1}{n}$。

若n爲極大之數時則$\dfrac{m+1}{n}-\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{n}$爲值極小幾等於零，故$\dfrac{m}{n}$幾等於$\dfrac{m+1}{n}$，即$\dfrac{m}{n}$或$\dfrac{m+1}{n}$皆幾等於$AB:CD$。故得$AB:CD$之近似値$\dfrac{m}{n}$或$\dfrac{m+1}{n}$。

§329. **定義七四　比例**　二量之比等於其他二量之比，則此四量曰成比例（in proportion）。此四個量曰比例量（proportionals）。

若$a:b=m:n$，

$c:d=m:n$，



則a,b,c,d四線分成比例，寫作$a:b=c:d$.其中a,d曰比例式之兩外項（extremes）；b，c曰比例式之兩內項（means）。a,b,c,d各曰比例式之第一，第二，第三，第四比例項。

§330. **定義七五　連比例**　三個同類量中，第一量與第二量之比等於第二量與第三量之比，則此三量曰成連比例（continued proportion）。

若 $a:b=b:c$ 則 c,b,c 成連比例. 其中 b 曰 a,c 之比例中項 (mean proportional). c 曰a, b 之第三比例項 (third proporeditional).

〔註〕 以上各比之量皆以線分爲例. 量之種類甚多. 僅就幾何學而論, 線分外尙有角, 等圓之弧, 面積等. 爲普徧起見, 下節以大體字母表任何種量, 以小體字母表不名數. 唯一比中之二項當然所表者爲同類量.

§331. **比例之普通定理.**

以下諸定理不僅適合於幾何學中之量,故曰普通定理:

(1) 若$A:B=C:D$則$B:A=D:C$.

〔證〕 設$A:B=m$,則$A=mB$. $\therefore\ B=\frac{1}{m}A$,

$\therefore\ B:A=\frac{1}{m}$. $\because\ A:B=C:D$, $\therefore\ C:D=m$,

同樣可得 $D:C=\frac{1}{m}$. $\therefore\ B:A=D:C$. Q.E.D.

〔註〕 本定理名曰反比定理 (invertendo).

(2) 若A,B,C,D皆爲同類量, 而$A:B=C:D$, 則 $A:C=B:D$.

〔證〕 設$A:B=m$, 則$A=mB$ $\because\ A:B=C:D$, $\therefore\ C:D=m, C=mD$. $\therefore A:C=mB:mD=B:D$. Q.E.D.

〔註〕 本定理名曰更比定理(alternando).

(3) 若$A:B=C;D$:則$(a)\ A+B:B=C+D:D$, $(b)\ B:A+B=D:C+D$, $(c)\ A+B:A=C+D:C$, $(d)\ A:A+B=C:C+D$.

〔證〕 設$A:B=m$, $A=mB$, 同樣$C=mD$.

$\therefore\ A+B:B=mB+B:B=(m+1)B:B=m+1$.

$C+D:D=mD+D:D=(m+1)D:D=m+1$.

$\therefore \quad A+B:B=C+D:D\cdots(a)$

$\therefore \quad B:A+B=D:C+D\cdots(b)$　（反比定理）

又 $A+B:A=mB+B:mB=(m+1)B:mB=\dfrac{m+1}{m}$

$C+D:C=mD+D:mD=(m+1)D:mD=\dfrac{m+1}{m}$

$\therefore \quad A+B:A=C+D:C\cdots(c)$

$\therefore \quad A:A+B=C:C+D\cdots(d)$　（反比定理）

Q.E.D.

〔註〕 本定理名曰合比定理(componendo)。

（4）若 $A:B=C:D$；則 $(a)A-B:B=C-D:D$, $(b)\ B:A-B=C:C-D$, $(c)A-B:A=C-D:C$, $(d)\ A:A-B=C:C-D$.

〔證略〕

〔註〕 本定理名曰分比定理(dividendo)。

（5） 若 $A:B=C:D$；則 $(a)A+B:A-B=C+D:C-D$. $(b)\ A-B:A+B=C-D:C+D$.

〔證〕 $\because \quad A:B=C:D$,

$\therefore \quad A+B:B=C+D:D$,　（合比定理）

又 $A-B:B=C-D:D$.　（分比定理）

$$\frac{\dfrac{A+B}{B}}{\dfrac{A-B}{B}}=\frac{\dfrac{C+D}{D}}{\dfrac{C-D}{D}}.$$

$\therefore \quad A+B:A-B=C+D:C-D,\cdots(a)$

$\therefore \quad A-B:A+B=C-D:C+D.\cdots(b)$ Q.E.D.

〔註〕 本定理名曰合分比定理(componendo and dividendo)。

（6） $A,B,C,D,E,F\cdots$皆為同類量，而$A:B=C:D=E:F\cdots$，則$A+C+E+\cdots:B+D+E+\cdots=A:B$.

〔證〕 設$A:B=m$，則$A=mB$。同樣$C=mD, E=mF$.

$\therefore\quad A+C+E+\cdots:B+D+F\cdots$

$=mB+mD+mF+\cdots:B+D+F+\cdots$

$=m(B+D+F+\cdots):(B+D+F+\cdots)=m.$

$\therefore\quad A+C+E+\cdots:B+D+F+\cdots=A:B.$

Q.E.D.

〔註〕 本定理名曰加比定理 (addendo)。

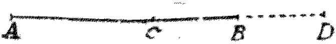
習 題 十 七

1. A,B,C,D為同類量，而$A:B=C:D$，則
$$A-C:B-D=A:B.$$
2. 若$A:B=P:Q, B:C=Q:R$，則$A:C=P:R$.
3. 若$A:B=B:C$，則$A:C=(A:B)^2$.
4. 若$A:B=C:D$，則$mA:nB=mC:nD$.
5. 若$A+B:A-B=P+Q:P-Q$，則$A:B=P:Q$.
6. 若$A:B=C:D=E:F$，則
$lA+mC+nE:lB+mD+nF=A:B$
7. 若$A:B=C:D$而$A>B$，則$C>D$.

第二十二章　比例線分

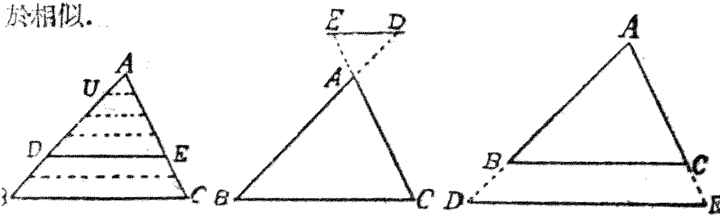
§332. **定義七六**　內分及外分　一線分爲其中一點分爲兩份曰內分 (divide internally). 一線分爲其延線上一點分爲兩份曰外分(divide externally).

如圖線分AB爲C內分爲兩份AC,BC;爲D外分爲兩份AB,BD.



§333. **定義七七**　相似分割　二線分各爲一點所分（內分或外分），各線分上所分成兩份之比相等，則曰此二線分分於相似 (be divided similarly).

§334. **定理九七**　三角形一邊之平行線將其他二邊分於相似.



〔假設〕　$\triangle ABC$中，$DE \parallel BC$,交AB，AC或其延線於D,E.

〔終決〕　$AD:DB=AE:EC$

〔證〕（1）　若AD,DB爲可通約量，則可求得其公約線分AU。若$AD=mAU,DB=nAU$，則$AD:DB=m:n$,將AD分成m等分,DB分成n等分，過各分點作BC之

平行線．則因此諸平行線分 AD、DB爲 m, n 等分，故分 AE, EC亦爲m, n分等．

$\therefore \quad AE : EC = m : n. \quad \therefore \quad AD : DB = AE : EC.$

Q.E.D.

（２） 若AD, DB爲不可通約量．先將DB分成 n 等分（令 n 爲極大之數），每份之長爲 AU（AU極小）．以 AU 爲單位量AD得$mAU < AD < (m+1)AU$．

$$\therefore \quad \frac{m}{n} < \frac{AD}{DB} < \frac{m+1}{n}. \quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}.$$

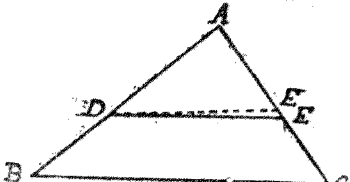
過各分點作BC之平行線，則此諸平行線亦分 EC 爲 n 等分，分AE爲 m 等分有餘而$m+1$等分不足．

$$\therefore \frac{m}{n} < \frac{AE}{EC} < \frac{m+1}{n}. \quad \therefore \frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}.$$

$\therefore \quad AD : DB = AE : EC. \qquad$ Q.E.D.

§335. 系　$\triangle ABC$中，BC之平行線交AB, AC 或其延線於D, E．則$AB : AD = AC : AE$, $AB : BD = AC : CE$, $AD : AE = DB : EC$, $AB : AC = AD : AE$, $AB : AC = BD : CE$等等．

§336. 定理九八　將三角形二邊分於相似之二點之聯線平行於其第三邊．



〔假設〕　$\triangle ABC$中，$AD : DB = AE : EC$

〔終決〕　$DE \parallel BC$

〔證〕　從D作BC之平行線交AC於E'，則$AD : DB = AE' : E'C$．今$AD : DB = AE :$

EC.

$\therefore\quad AE':E'C=AE:EC$.

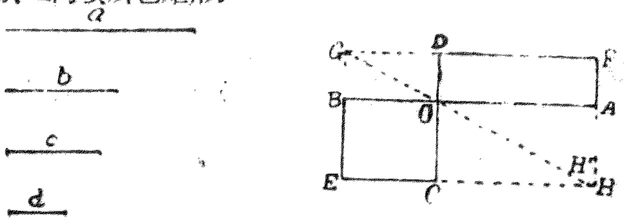
$\therefore\quad AE'+E'C:E'C=AE+EC:EC$,

即 $\quad AC:E'C=AC:EC$.

$\therefore\quad E'C=EC$, $\therefore$ E'合於E, DE'合於DE.

$\therefore\quad DE \parallel BC$. Q.E.D.

§337. **定理九九** 四線分成比例，則兩外項所包矩形等於二內項所包矩形.



〔假設〕 a,b,c,d, 四線分$a:b=c:d$.

〔終決〕 $ad=bc$.

〔證〕 作AB,CD直交於O. 令$OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$, 作矩形OE,OF. 延長EB,FD交於G. 聯GO延長之交FA,EC之延線於H,H'

則因$OD \parallel HF$, $\therefore GO:OH=GD:DF=OB:OA=b:a$.

又因$OB \parallel H'E$, $\therefore GO:OH'=GB:BE=OD:OC=d:c$.

$\because a:b=c:d$, $\therefore b:a=d:c$, $\therefore GO:OH=GO:OH'$

$\therefore OH=OH'$, $\therefore H$合於H' $\therefore GH$為$\square EHFG$之對角線而O為GH上一點. $\therefore \square OE$, $\square OF$為$\square EF$之餘形

$\therefore \square OF=\square OE$. $\therefore ad=bc$.

Q.E.D.

〔注意〕 在代數中，若a,b,c,d 四數成比例，則兩外項相乘積ad等於兩內項相乘積bc。故本定理與代數公式適相符合。

§338. **定理一〇〇** 相等兩矩形之兩雙鄰邊成比例；一雙鄰邊為外項，又一雙鄰邊為內項。

〔假設〕 $\square ad=\square bc$。

〔終決〕 $a:b=c:d$。

〔證〕 設$a:b=c:d'$，

則$ad'=bc$。

今 $ad=bc$，∴ $ad'=ad$。

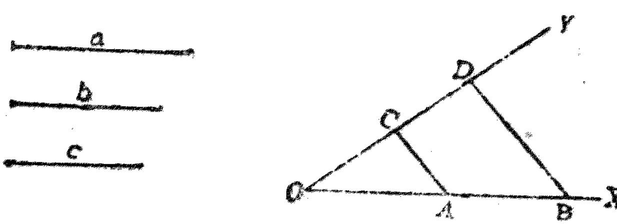
∴ $d'=d$(等積矩形之一雙邊相等，則其各雙邊皆等)。

∴ $a:b=c:d$。　　　　Q.E.D.

§339. **系一** 等積二矩形一雙邊之比等於他雙邊之反比。

§340. **系二** 等積二三角形底與高互為反比。

§341. **作圖題一四** 作所設三線分之第四比例項。



〔已設〕　三線分 a, b, c.

〔求作〕　線分 d 令 $a : b = c : d$.

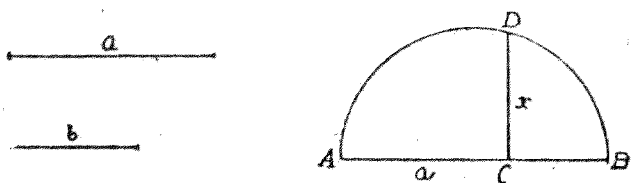
〔解法〕　在任意角 $\angle XOY$ 之一邊上截取 $OA = a$, $AB = b$, 在又一邊上截取 $OC = c$. 聯 AC. 過 B 作 AC 之平行線交又一邊於 D. 則 CD 即所求之 d.　　Q.E.F.

〔證〕　$\because AC \parallel BD$, $\therefore OA : AB = OC : CD$.

$\therefore$　$a : b = c : CD$.　$\therefore$　CD 即所求 d.　　Q.E.D.

§342. 系　作所設二線分之第三比例項.

§343. 作圖題一五　作所設二線分之比例中項.



〔已設〕　二線分 a, b.

〔求作〕　線分 x 令 $a : x = x : b$.

〔解法〕　在任意直線上截取 $AC = a$, $CB = b$. 以 AB 爲直徑作半圓周. 從 C 作 AB 之垂線交半圓周於 D. 則 CD 即所求之 x　　Q.E.F.

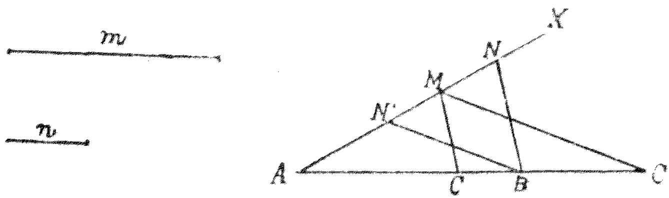
〔證〕　$\because$　$\overline{CD}^2 = AC \cdot CB$.

$\therefore$　$AC : CD = CD : CB$.

$\therefore$　$a : CD = CD : b$.

$\therefore$　CD 爲所求之 x.　　Q.E.D.

§344. 作圖題一六　將一所設線分分爲二份, 令其比等於其他所設二線分之比.



〔已設〕 線分AB及m,n.

〔求作〕 AB上一分點C令$AC : CB = m : n$.

〔解法〕 過A作任意一半射線AX. 在AX上截取$AM=m$, $MN=n$. 聯NB. 作$MC \parallel NB$交AB於C. 則C即所求點. Q.E.F.

〔證〕 $\because MC \parallel NB, \therefore AC:CB=AM:MN=m:n$.

$\therefore C$為所求分點. Q.E.D.

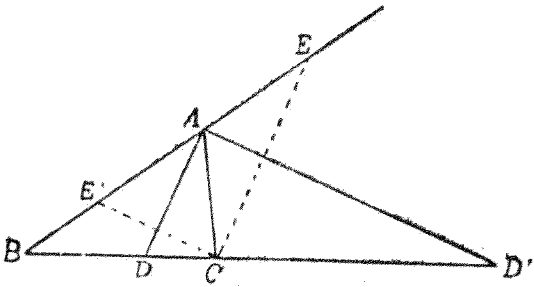
〔討論〕 若$m \neq n$, 則有兩個解答如圖C, C'. C為AB之內分點, C'為AB之外分點. 若$m=n$, 則有一個解答即AB之中點.

§345. **定義七八 調和分割** 一線分為其內分點及外分點所分二部分之比相等, 則曰此線分為此二點分於調和 (be divided harmonically).

線分AB內分於C, 外分於D, 而$AC : CB=AD : DB$, 則AB為C,D分於調和. 依更比定理, 若$AC : CB=AD : DB$, 則 $AC : AD=CB : DB$.

$\therefore CD$亦為A,B分於調和. 如此一直線上互分於調和之四點A,B,C,D曰調和點列 (harmonic range). A,B與C,D互稱曰調和相屬點 (conjugate harmonical points).

§346. **定理一〇一** 三角形一角之等分線以二鄰邊之比內分對邊其外角等分線以同比外分對邊.



〔假設〕 $\triangle ABC$中，AD, AD' 各爲$\angle BAC$之內等分線及外等分線，

〔終決〕 $BD:DC=AB:AC, BD':D'C=AB:AC$.

〔證〕 作$CE \parallel DA$交BA於E.

則$\angle AEC=\angle BAD=\angle DAC=\angle ACE$. $\therefore AE=AC$

在$\triangle BCE$中，$DA \parallel CE$，$\therefore BD:DC=BA:AE$

$$\therefore \quad BD:DC=AB:AC$$

同樣作$CE' \parallel D'A$交BA於E'，

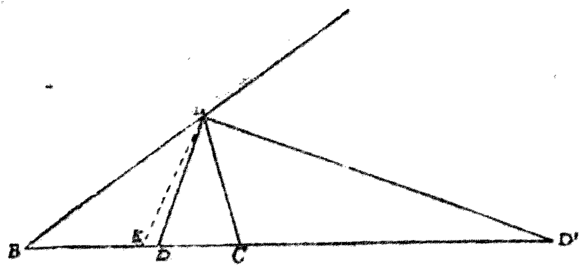
可證 $BD':D'C=AB:AC$. Q.E.D.

§347. 系 三角形一角之內外等分線分對邊於調和.

§348. **定理一〇二** 過三角形一角頂之線若以二鄰邊之比內分（或外分）其對邊，則此線爲此角之等分線（或外等分線）.

〔假設〕 $BD:DC=AB:AC, BD':D'C=AB:AC$.

〔終決〕 AD 爲$\angle BAC$ 之等分線，AD' 爲$\angle BAC$之



外等分線.

〔證〕 作$\angle BAC$之等分線AE.

則 $BE:EC=AB:AC$. 今$BD:DC=AB:AC$.

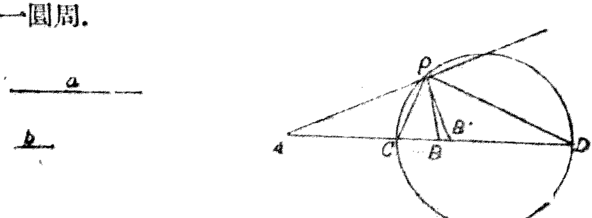
$\therefore$ $BE:EC=BD:DC$. $\therefore BE+EC:EC=BD+DC:DC$.

即 $BC:EC=BC:DC$. $\therefore$ $EC=DC$, $\therefore$ E合於D,

$\therefore$ AE合於AD. $\therefore$ AD為$\angle BAC$之等分線

同樣可證 AD'為$\angle BAC$之外等分線 Q.E.D.

§349. **定理一〇三** 與兩定點距離等於定比之點之軌跡為一圓周.



〔已設〕 A,B二定點, a,b二定長.

〔條件〕 動點P, $PA:PB=a:b$.

〔軌跡〕 以$a:b$內分AB於C, 外分AB於D. P之軌跡

爲以 CD 爲直徑所作之圓周.

證　(1)　設 P 爲圓周上一點，聯 PA PB PC, PD. 作 PB' 令 $\angle CPB'=\angle APC$，交 AD 於 B'.

則　PC 爲 $\angle APB'$ 之等分線，　$\therefore$ $AC:CB'=PA:PB'$。

$\because$　$\angle CPD=R\angle$，$\therefore$ PD 爲 $\angle APB'$ 之外等分線.

$\therefore$　$AD:DB'=PA:PB'$，$\therefore$ $AC:CB'=AD:DB'$.

$\therefore$　$AC:AD=CB':DB'$.　　(更比定理)

$\therefore$　$AC+AD:AD=CB'+DB':DB'=CD:DB'$

(合比定理)

今　$AC:CB=AD:DB$，$\therefore$ $AC:AD=CB:DB$.

$\therefore$　$AC+AD:AD=CB+DB:DB=CD:DB$.

$\therefore$　$CD:DB'=CD:DB$.　$\therefore$ $DB'=DB$.　$\therefore$ B' 合於 B.

故　PB' 合於 PB.　$\therefore$ PC 爲 $\angle APB$ 之等分線

$\therefore$　$PA:PB=AC:CB=a:b$.

$\therefore$　圓周上任何點適合於所設條件.

(2)　設 P 爲適合於條件之點，則 $PA:PB=a:b=AC:CB=AD:DB$.　$\therefore$ PC, PD 各爲 $\angle APB$ 之等分線及外等分線.

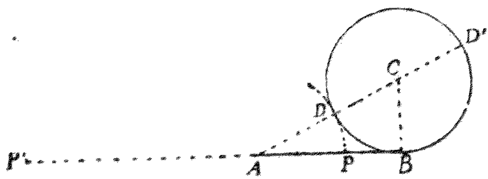
$\therefore$　$\angle CPD=R\angle$.　$\therefore$　P 在圓周上.

$\therefore$　適合於條件之點在此圓周上.

故此所作圓周爲動點 P 之軌跡.　　$Q.E.D.$

§350. **作圖題一七**　在所設線分上求一點分所設線分爲兩部分，令此兩部分之比等於其一部分與全線分之比.

〔已設〕　線分 AB.



〔求作〕 AB上一點P，令$BP:AP=AP:AB$.

〔解法〕 從B作AB之垂線BC令等於$\frac{1}{2}AB$. 以C爲中心CB爲半徑作⊙C. 聯AC交⊙C於D,D'. 在AB上取P令$AP=AD$. 又在BA之延線上取P'令$AP'=AD'$. 則P,P'即所求之內外二分點. Q.E.D.

〔證〕 聯BD,BD'. 則因$CB\perp AB$, 故AB爲⊙C之切線.

$\therefore\quad \overline{AB}^2=AD\cdot AD'$, $\therefore AD:AB=AB:AD'$.

$\therefore\quad AD:AB-AD=AB:AD'-AB$.

$\because\quad AP=AD, DD'=AB$,

$\therefore\quad AP:AB-AP=AB:AD'-DD'$, 即$AP:PB=AB:AD$.

$$\therefore\quad PB:AP=AP:AB.$$

再從$AD:AB=AB:AD'$, 可得$AD+AB:AB=AB'+AD':AD'$.

$\therefore\quad AP'=AD', DD'=AB$. $\therefore AD+DD':AB=AB+AP':AP'$

即$AP':AB=BP':AP'$.

$$\therefore\quad P'B:AP'=AP':AB$$

$\therefore$ P, P' 爲所求二分點。 Q.E.D.

〔註〕 本題爲古來一著名問題，名曰"黃金分割"，亦曰"將一線分爲中末比"。

習 題 十 八

1. 二圓之外公切線以二圓半徑之比外分其聯心線分。

2. 二圓內切於A。過A隨意作大圓之二弦AB, AC各交小圓於B', C'。則$AB' : B'B = AC' : C'C$。

3. 過相切二圓（外切或內切）之切點任意作割線，則此割線爲二圓所截二弦之比等於其半徑之比。

4. E爲$\triangle ABC$，$\triangle ABD$公共邊上任意一點。$EF \parallel AC$交BC於F。$EG \parallel AD$交BD於G則$FG \parallel CD$。

5. D, E各爲$\triangle ABC$邊AB, AC，上之點。BE, CD交於F。若$AD : DB = AE : EC$，則$BF : FE = CF : FD$。

6. 梯形$ABCD$二對角線AC, BD。交於E，則$AE : DE = BE : CE$。

7. 過梯形對角線交點所作底之平行線爲此交點所等分。

8. 過圓外一點P作圓之切線PT，及任意割線交圓於A, B。則PT爲PA, PB之比例中項。

9. A, P, B, Q爲調和點列，M爲AB之中點，則MA爲MP, MQ之比例中項。

10. $\triangle ABC$中，$\angle A$爲直角，$AD \perp BC$。$\angle B$之等分線交AD於F，交AC於E。則$AE : EC = DF : AF$。

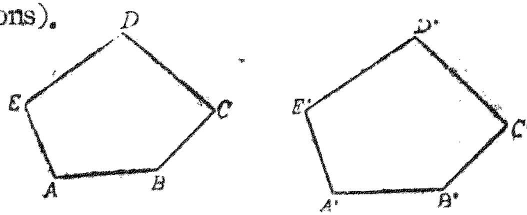
11. AM爲$\triangle ABC$之中線. MD, ME 各爲$\angle AMB$ $\angle AMC$之等分線, 各交AB, AC於D, E. 則$DE \parallel BC$.

12. 過一定點求作一直線令與一定角$\angle AOB$交於A, B且令$OA : OB$等於所設定比.

第二十三章　相似多角形

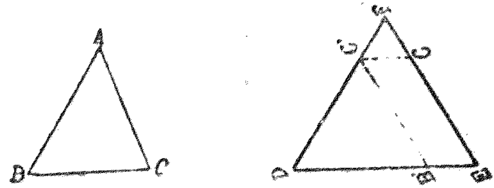
§ 351. **定義七九**　**互等角多角形**　兩個同邊數多角形中，順次各雙角皆相等，則此二形曰互等角多角形.(mutually equiangular). 此各雙等角曰對應角，二雙對應角間之邊曰對應邊.

§ 352. **定義八〇**　**相似多角形**　兩個互等角多角形中，各雙對應邊之比皆相等，則此二形曰相似多角形(similar polygons).



例如多角形$ABC\cdots E$，及$A'B'C'\cdots E'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\cdots\angle E=\angle E'$. 又$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots=\frac{EA}{E'A'}$，則此二形相似. 記作$ABC\cdots E\backsim A'B'C'\cdots E'$. 相似多角形各雙對應邊之比曰二形之相似比(ratio of similitude).

§ 353. **定理一〇四**　互等角三角形爲相似形.



〔假設〕 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$中，$\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$.

〔終決〕 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

〔證〕 在DE,DF上各取B',C'令$DB'=AB$,$DC'=AC$. 聯$B'C'$. 因$\angle D=\angle A$, $\therefore \triangle DB'C'\cong\triangle ABC$.

$\therefore\quad \angle DB'C'=\angle B=\angle E$, $\angle DC'B'=\angle C=\angle F$.

$\therefore\quad B'C'\parallel EF$, $\therefore DB':DE=DC':DF$.

$$\therefore AB:DE=AC:DF.$$

過C'作$CG\parallel DE$，則$EGC'B'$爲平行四邊形。

$\therefore\quad B'C'=EG$, 故$DC':DF=EG:EF$.

$$\therefore\quad AC:DF=B'C':EF=BC:EF.$$

$$\therefore\quad AB:DE=AC:DF=BC:EF.$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle DEF.$$ Q.E.D.

§354. **系一** 兩個三角形中，兩雙角各相等，則此兩形爲相似形。

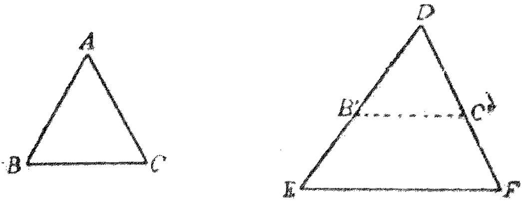
§355. **系二** 兩個直角三角形中，一雙銳角相等，則此兩形爲相似形。

§356. **系三** 三角形一邊之平行線與他二邊所成之三角形與原形相似。

§357. **系四** 兩三角形之各雙邊互相平行或互相垂直，則此兩形相似。

§358. **定理一〇五** 兩個三角形中，一雙角相等，且夾此雙角之兩雙邊成比例，則此兩形相似。

〔假設〕 $\triangle ABC$,$\triangle DEF$中，$\angle A=\angle D$,$AB:DE=AC:DF$.



〔終決〕 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

〔證〕 在 DE, DF 上各取 B', C'，令 $DB' = AB$, $DC' = AC$. 聯 $B'C'$. 則因 $\angle A = \angle D$, $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DB'C'$.

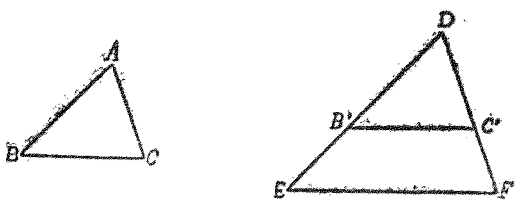
$\because \quad AB : DE = AC : DF$, $\therefore DB' : DE = DC' : DF$.

$\therefore \quad DB' : DE - DB' = DC' : DF - DC'$, 即 $DB' : B'E = DC' : C'F$.

$\therefore \quad B'C' \parallel EF$. $\therefore \quad \triangle DB'C' \backsim \triangle DEF$.

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$. Q.E.D.

§359. **定理一〇六 兩三角形中，三雙邊之比相等，則此兩形爲相似形.**



〔假設〕 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$中, $AB : DE = AC : DF = BC : EF$.

〔終決〕 $\triangle ABC \backsim \triangle EDF$.

〔證〕 在 DE, DF 上各取B', C'，令 $DB' = AB, DC' = AC$. 聯$B'C'$，則因 $AB : DE = AC : DF$.

$\therefore \quad DB' : DE = DC' : DF$, $\angle D$為公共角，$\therefore \triangle DB'C' \backsim \triangle DEF$.

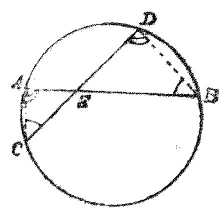
$\therefore \quad DC' : DF = B'C' : EF$. 但 $AC : DF = BC : EF$，而 $DC' = AC$.

$\therefore \quad B'C' = BC$. $\therefore \triangle DB'C' \cong \triangle ABC$ (s.s.s.=s.s.s.)

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$. Q.E.D.

〔注意〕 §353—§359為相似三角形之基本定理，其為用之廣，如直線形中之合同三角形同．多數等積矩形定理，可用相似三角形證之．舉例如下：

（例一） 圓內相交兩弦中，各弦為交點所分兩部分所包矩形相等．



〔假設〕 圓內兩弦AB，CD交於E.

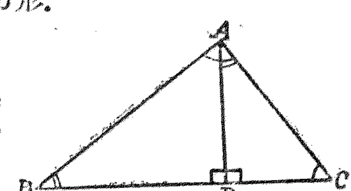
〔終決〕 $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

〔證〕 聯AC，BD．在$\triangle ACE$，$\triangle BDE$中，$\angle C = \angle B$，$\angle A = \angle D$，$\therefore \triangle ACE \backsim \triangle BDE$.

$\therefore \quad AE : DE = CE : BE$.

$\therefore \quad AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Q.E.D.

（例二） 直角三角形中，斜邊上之高分斜邊所成兩部分所包矩形等於此高上之正方形．



〔假設〕 $\angle BAC = R\angle$.

$AD \perp BC$.

〔終決〕 $BD \cdot DC = \overline{AD}^2$.

〔證〕 $\because \quad AD \perp BC$,

$\therefore \quad \angle B + \angle BAD = R\angle$,

$\because \angle BAC = R\angle$,

$\therefore \quad \angle DAC + \angle BAD = R\angle. \quad \therefore \angle B = \angle DAC.$

同理 $\quad \angle C = \angle DAB.$

$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle ACD, \quad \therefore \ BD : AD = AD : DC.$

$$\therefore \quad BD \cdot DC = \overline{AD}^2. \qquad\qquad Q.E.D.$$

習 題 十 九

1. $\triangle ABC$中，$\angle A$的等分線交 BC 於 M，交其外接圓周於N，則 $AB \cdot AC = AM \cdot AN$.

2. AE爲$\triangle ABC$外接圓之直徑，AD爲從A至BC之高，則$AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

3. 在兩個相似三角形內，一雙對應中線之比等於其相似比

4. 在兩個相似三角形內，一雙對應高之比等於其他雙對應高之比.

5. 兩個相似三角形外接圓半徑之比等於其相似比.

6. 兩個相似多角形周圍之比等於其相似比.

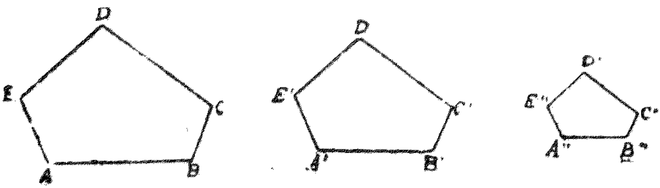
7. 兩三角形中，一雙底角相等，又對底之高與底成比例，則此兩形相似.

8. 兩三角形中，兩雙邊第三雙邊上之中線成比例，則此兩形相似.

9. P爲$\odot O_1$, $\odot O_2$ 之兩外公切線交點，過P之割線交兩圓周於順次四點 A_1, B_1, A_2, B_2. 則 $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, $O_1B_1 \parallel O_2B_2$.

10. $\triangle ABC$中，$AB=AC$. 以B爲中心，BC爲半徑作圓再交AC或其延線於D. 則BC爲CA, CD之比例中項.

§360. **定理一〇七** 兩個多角形各與第三形相似，則此兩形互相似.



〔假設〕 $ABC\cdots E \backsim A''B''C''\cdots E''$,

$A'B'C'\cdots E' \backsim A''B''C''\cdots E''$

〔終決〕 $ABC\cdots E \backsim A'B'C'\cdots E'$.

〔證〕 $\because$ $ABC\cdots E \backsim A''B''C''\cdots E''$,

$\therefore$ $\angle A=\angle A''$, $\angle B=\angle B''$, $\cdots \angle E=\angle E''$, 又 $\dfrac{AB}{A''B''}$

$$=\frac{BC}{B''C''}=\cdots=\frac{EA}{E''A''}.$$

$\because$ $A'B'C'\cdots E' \backsim A''B''C''\cdots E''$,

$\therefore$ $\angle A'=\angle A''$, $\angle B'=\angle B''\cdots \angle E'=\angle E''$, 又 $\dfrac{A'B'}{A''B''}$

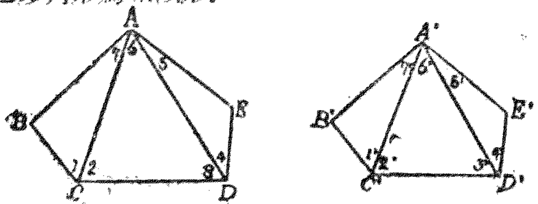
$$=\frac{B'C'}{B''C''}=\cdots=\frac{E'A'}{E''A''}.$$

$\therefore$ $\angle A=\angle A'$. $\angle B=\angle B'\cdots \angle E=\angle E'$，又 $\dfrac{AB}{A'B'}$

$$=\frac{BC}{B'C'}=\cdots=\frac{EA}{E'A'}.$$

$\therefore$ $ABC\cdots E \backsim A'B'C'\cdots E'$. Q.E.D.

§361. **定理一〇八** 同個數相似三角形各依相似位置合成之多角形為相似形.



〔假設〕 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$, $\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$. $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ 合成一多角形$ABCDE$. $\triangle A'B'C'$, $\triangle A'C'D'$, $\triangle A'D'E'$ 依相似位置合成一多角形$A'B'C'D'E'$

〔終決〕 $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$

〔證〕 $\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,

$\therefore$ $\angle B = \angle B'$, $\angle 1 = \angle 1'$, $\angle 7 = \angle 7'$, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ $\because$ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$, $\therefore$ $\angle 2 = \angle 2'$, $\angle 3 = \angle 3'$, $\angle 6 = \angle 6'$, $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{AD}{A'D'}$.

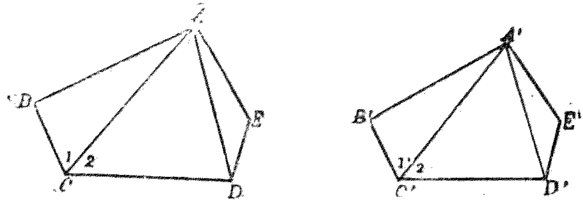
$\because \triangle ADE \backsim \angle A'D'E'$,

$\therefore$ $\angle 4 = \angle 4'$, $\angle E = \angle E'$, $\angle 5 = \angle 5'$, $\dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{AE}{A'E'}$.

$\therefore$ $\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 = \angle 5' + \angle 6' + \angle 7'$, 即$\angle A = \angle A'$, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 1' + \angle 2'$, 即$\angle C = \angle C'$. $\angle 3 + \angle 4 = \angle 3' + \angle 4'$, 即 $\angle D = \angle D'$. 又$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{AE}{A'E'}$.

$\therefore \quad ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$.　　Q.E.D.

§362. 定理一〇九　聯兩個相似多角形各對應對角線所分成諸三角形爲各雙相似三角形.



〔假設〕　$ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$. $AC, A'C'$; AD, AD'爲對應對角線.

〔終決〕　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$,

$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$.

〔證〕　$\because ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$, $\therefore \angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. $\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$. 又 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$.

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. $\therefore \angle 1 = \angle 1'$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

$\therefore \quad \angle C - \angle 1 = \angle C' - \angle 1'$, 即$\angle 2 = \angle 2'$, $\therefore \triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$同樣可證$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$.　　Q.E.D.

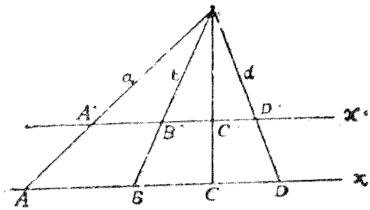
§363. 系　相似多角形各雙對應對角線之比等於其相似比.

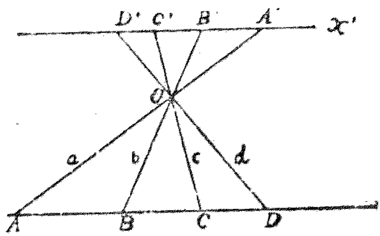
§364. 定理一一〇　共點諸線將平行二直線分於相似.

〔假設〕　$a, b, c, d \cdots$諸直線共有O點, 截二平行線x, x'

於$A, B, C, D, \cdots A', B'$, $C', D' \cdots$等.

〔終決〕　$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \cdots$.





〔證〕　$\because A'B' \parallel AB$, $\therefore \triangle OA'B' \backsim \angle OAB$. $\therefore AB : A'B' = OB : OB'$. $\because B'C' \parallel BC$, $\therefore \triangle OB'C' \backsim \triangle OBC$, $\therefore BC : B'C' = OB : OB'$ $\therefore AB : A'B' = BC : B'C'$. 同理 $BC : B'C' = CD : C'D'$.

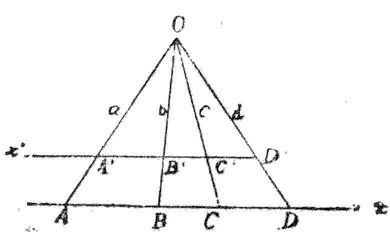
$$\therefore \quad AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \cdots.$$

Q.E.D.

§365. 定理———

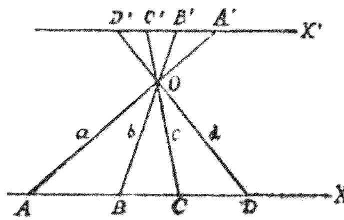
不平行諸直線，將二平行線分於相似則此諸線共點.

〔假設〕　$a, b, c, d \cdots$ 諸不平行直線截二平行線 x, x' 於 $A, B, C, D \cdots, A', B', C', D' \cdots$諸點，而 $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \cdots$.



〔終決〕　$a, b, c, d \cdots$ 諸

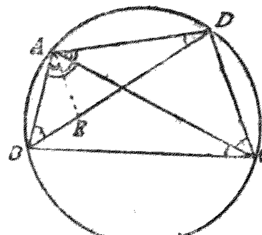
線共點.



〔證〕 設a,b交於O_1, b,c,交於O_2.
則因$A'B' \parallel AB$, $\therefore \triangle O_1A'B' \backsim \triangle O_1AB$.
$\therefore \quad O_1B : O_1B' = AB : A'B'$. 又因$B'C' \parallel BC$,
$\therefore \quad \triangle O_2B'C' \backsim \triangle O_2BC$. $\therefore O_2B : O_2B' = BC : B'C'$
$\because \quad AB : A'B' = BC : B'C'$, $\therefore O_1B : O_1B' = O_2B : O_2B'$
$\therefore \quad O_1B - O_1B' : O_1B' = O_2B - O_2B' : O_2B'$, 即$BB' : O_1B' = BB' : O_2B'$, $O_1B' = O_2B'$. $\therefore O_1$ 合於 O_2, $\therefore a,b,c$共點.
同理可證 b,c,d 共點.

$\therefore \quad a,b,c,d\cdots$諸線共點. Q.E.D.

§366. 定理一一二 圓內接四邊形二對角線所包矩形等於二雙對邊所包矩形之和.



〔假設〕 $ABCD$ 內接於圓

〔終決〕 $AC\cdot BD = AB\cdot CD + AD\cdot BC$.

〔證〕 作AE令$\angle BAE = \angle CAD$, 交BD於E. 在$\triangle ABE$, $\triangle ACD$中. $\angle BAE = \angle CAD$, $\angle ABE = \angle ACD$, $\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ACD$. $\therefore AB : AC = BE : CD$, $\therefore \quad AB\cdot CD = AC\cdot BE$. 在$\triangle ABC$, $\triangle AED$中, $\angle BAC = \angle EAD$, $\angle ACB = ADE$, $\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AED$
$\therefore \quad BC : ED = AC : AD$, $\therefore \quad AD\cdot BC = AC\cdot ED$.

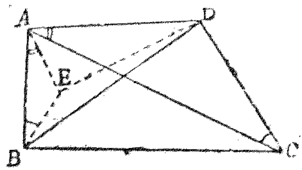
$\therefore\quad AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BE+AC\cdot ED.$

$$=AC(BE+ED)=AC\cdot BD.$$

Q.E.D.

〔註〕本定理名曰Ptolomy氏定理。

§367. **定理一一三**　非圓內接四邊形兩對角線所包矩形小於二雙對邊所包矩形之和。



〔假設〕 $ABCD$ 爲非圓內接四邊形。

〔終決〕 $AC\cdot BD<AB\cdot CD+AD\cdot BC$.

〔證〕作AE, BE, 令$\angle BAE=\angle CAD$, $\angle ABE=\angle ACD$'

則　$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$. $\therefore$ $AB:AC=BE:CD$. $\therefore AB\cdot CD=AC\cdot BE$. 又$AB:AC=AE:AD$, $\angle BAC=\angle EAD$.

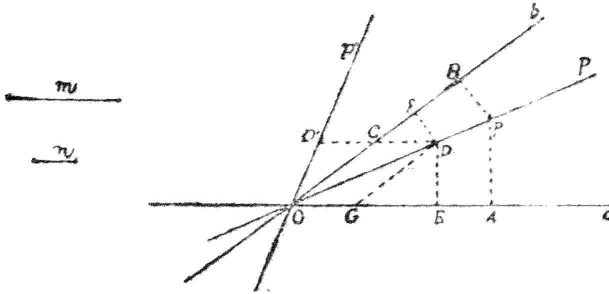
$\therefore\quad\triangle ABC\backsim\triangle AED$. $\therefore BC:ED=AC:AD$. $\therefore$ $AD\cdot BC=AC\cdot ED$. $\therefore$ $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BE+AC\cdot ED=AC(BE+ED)$ $\because BD<BE+ED$, $\therefore AC\cdot BD<AC\cdot(BE+ED)$

$$\therefore\quad AC\cdot BD<AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

Q.E.D.

§368. **系**　四角形兩對角線所包矩形等於其二雙對邊所包矩形之和，則爲圓內接四邊形。

§369. **定理一一四**　一動點與所設相交二直線距離之比等於一定比，則此動點之軌跡爲過此二直線交點之一雙直線。



〔已設〕 二直線a,b交於O，二定長m,n，

〔條件〕 動點P，與a,b距離之比等於$m:n$.

〔軌跡〕 在b上取C，令$OC=m$。過C作a之平行線，在其上截取線分CD及$CD'=n$。則過OD,OD'之二直線p,p'爲P之軌跡。

〔證〕 (1) 設P爲p或p'上任意一點。作$PA\perp a, PB\perp b, DE\perp a, DF\perp b, DG\parallel b$。$\angle DGE=\angle AOB=\angle DCF$. $\therefore \triangle DEG\backsim\triangle DFC$. $\therefore DE:DF=DG:DC=OC:DC=m:n$. 又因$PA:DE=OP:OD=PB:DF$, $\therefore PA:PB=DE:DF=m:n$. 故$p$或$p'$上任何點適合於條件。

(2) 設P爲適合於條件之點，聯OP交CD於D'，則如前作$PA\perp a, PB\perp b, D'E'\perp a, D'F'\perp b, D'G'\parallel b$. 同前理可得$PA:PB=D'E':D'F'=D'G':D'C=OC:CD'$. 但$PA:PB=m:n=OC:CD$, $\therefore OC:CD'=OC:CD$. $\therefore CD'=CD$. $\therefore D'$合於D. 即P'在過OD之直線p上 $\therefore$ 適合於條件之點在p或p'上

$\therefore$ p,p'爲動點P之軌跡。 Q.E.D.

習 題 二 十

1. 一直線切⊙O於T，交⊙O之其他二平行切線於A,B．則OT爲AT,BT之比例中項．

2. 二圓外切，則其外公切線之長爲一圓直徑之比例中項．

3. 從圓周上一點至一弦所引垂線上之正方形等於從此弦兩端至過此點切線所引二垂線所包之矩形．

4. $\triangle ABC$中$AB \neq AC$．在AB延線上取D，在AC上取E．令$BD=CE$．聯DE交BC於F．則$EF:FD=AB:AC$．

5. 從平行四邊形$ABCD$各頂角至對角線引垂線AE,BF,CG,DH，則$EFGH$亦爲平行四邊形且與$ABCD$相似．

6. 一直線DEF與$\triangle ABC$之邊BC,AC,AB（或延線）交於D,E,F，且與AB,AC成等角，則$BD:CD=BF:CE$．

7. $\triangle ABC$底BC之平行線與二邊AB,AC各交於D,E．BE,CD交於F．則AF延線等分BC．

8. ⊙O_1，⊙O_2外切於T．過T作三割線A_1TA_2，B_1TB_2，C_1TC_2，各交⊙O_1於A_1,B_1,C_1，交⊙O_2於A_2,B_2,C_2．則$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$．

9. 四角形$ABCD$中，$\angle B=\angle D=R\angle$從$D$引$AC$之垂線交$AB$（或延線）於$E$，則$\triangle ADB \backsim \triangle ADE$．

10. $\triangle ABC$中，$AB \neq AC$．在AB,AC上各取D,E令$BD=CE$．DE,BC延線交於F．則$EF:DF=AB:AC$．

11. I 爲$\triangle ABC$之內心。AI 之延線交$\triangle ABC$ 外接圓於D。求證$AI\cdot ID=2Rr$。(R, r各爲$\triangle ABC$ 外接圓及內切圓半徑）.

12. A 爲定點，XY 爲定直線。Q 爲 XY 上任意一點。P爲AQ上一分點，$AP:PQ$ 之比值一定。求 P之軌跡。

13. A爲定點，$\odot O$ 爲定圓。Q 爲 $\odot O$ 圓周上任意一點。P 爲 AQ 上一分點，$AP:PQ$ 之比值一定。求 P 之軌跡。

14. AD 爲$\triangle ABC$中$\angle A$ 之等分線。I 爲內心。
求證 $AI:ID=AB+AC:BC$。

15. M, N, P, Q 各爲四角形$ABCD$ 邊 AB, BC, CD, DA 上之點，而 $AM:MB=AQ:QD, BN:NC=DP:PC$,
則$MQ \parallel NP$。

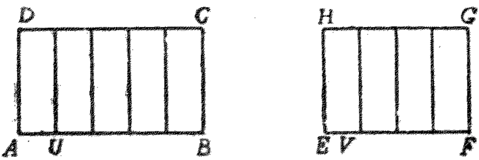
16. I 爲$\triangle ABC$之內心。過 I 作 AI 之垂線交 AB 於 D, 交 AC 於E。則 $ID\cdot IE=BD\cdot CE$。

17. D 爲正$\triangle ABC$ 外接圓 $\frown BC$ 上任意一點。AB, CD 延線交於 E。AC, BD 延線交於 F。則 BC爲 BE, CF 之比例中項。

18. 從圓外一點 P 引切線 PA, PB 及割線 PCD。則 $AC\cdot BD=AD\cdot BC$。

第二十四章　面積之比

§370. **定理一一五**　二矩形一邊相等，則其面積之比等於其他邊之比。



〔假設〕　$\square AC$，$\square EG$中，$AD=EH$。

〔求證〕　$\square AC:\square EG=AB:EF$。

〔證〕（1）若 AB、EF 為可通約量，而其公約量為 AU，$AB=mAU$，$EF=nAU$。則 $AB:EF=m:n$。將 AB 分為 m 等分，EF 分為 n 等分．過各分點作垂線與對邊相交，則 $\square AC$ 分成 m 個相等矩形 $AD\cdot AU$。$\square EG$ 分成 n 個相等矩形 $EH\cdot AU$。

$\therefore\quad \square AC:\square EG=mAD\cdot AU:nEH\cdot AU$。$\because AD=EH$，

$\therefore\quad AD\cdot AU=EH\cdot AU$。$\therefore\quad \square AC:\square EG=m:n$。

$\therefore\quad \square AC:\square EG=AB:EF$。　Q.E.D.

（2）若 AB，EF 為不可通約量。可將 EF 分成 n 等分（令 n 為極大之數）．每份之長為 EV（EV 為極小）．以 EV 為單位量 AB，得 $mEV<AB<(m+1)EV$．$\therefore m:n<AB:EF<(m+1):n$。$\therefore AB:EF\doteq m:n$。同前可得 $\square EG=nEH\cdot EV$，$mAD\cdot EV<\square AC<(m+1)AD\cdot EV$　$\therefore\ \square AC:\square EG\doteq m:n$

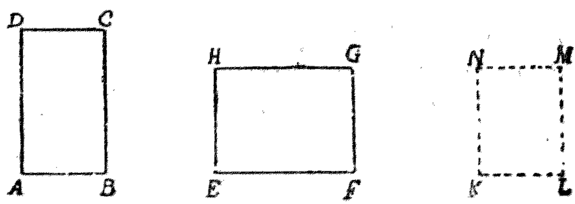
$\therefore\ \square AC : \square EG = AB : EF.$ Q.E.D.

〔注意〕 從比之定義，知 $ma : mb = a : b$. 其中 m 表數. 以言語表之即比之前後項各乘以（或除以）同數時，其比值不變. 若 m 與 a, b 皆表線分，則此式今亦通，即本節定理所云也.

§371. **系一** 等高平行四邊形之比等於其底之比；等底平行四邊形之比等於其高之比.

§372. **系二** 等高三角形之比等於其底之比；等底三角形之比等於其高之比.

§373. **定理一一六** 二矩形二邊各不相等，則其面積之比等於其二雙邊之比之複比.



〔假設〕 $\square AC, \square EG$ 中，其各邊 AB, AD, EF, EH 各不相等.

〔終決〕 $\square AC : \square EG = (AB : EF)\cdot(AD : EH).$

〔證〕 作矩形 $KLMN$ 令 $KL = AB, KN = EH.$

則 $\square AC : \square KM = AD : KN = AD : EH.$

$\square KM : \square EG = KL : EF = AB : EF$

$\therefore\ (\square AC : \square KM)\cdot(\square KM : \square EG) = (AD : EH)\cdot(AB : EF)$

即 $\square AC : \square EG = (AD : EH)\cdot(AB : EF).$

$Q.E.D.$

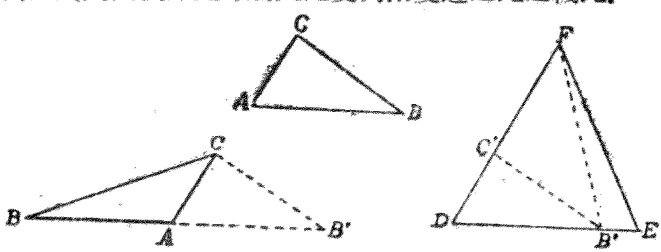
〔注意〕　在代數中$ac:bd=(a:b)(c:d)$,或$\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$,式中$a,b,c,d$皆表任何數。若$a,b,c,d$皆表線分，則此式今亦通，即本節定理所云也。

§374. **系一**　正方形面積之比等於其邊之二乘比〔即$a^2:b^2=(a:b)^2$〕。

§375. **系二**　平行四邊形面積之比等於其底之比與高之比之複比。

§376. **系三**　三角形面積之比等於其底之比與高之比之複比。

§377. **定理一一七**　兩個三角形有一雙角相等或互爲補角，則其面積之比等於夾此雙角兩雙邊之比之複比。



〔假設〕　$\triangle ABC,\triangle DEF$中（1）$\angle A=\angle D$，或（2）$\angle A+\angle D=2R\angle$。

〔終決〕　$\triangle ABC:\triangle DEF=(AB:DE)\cdot(AC:DF)$。

〔證〕（1）在DE,DF上各取$B'C'$令$DB'=AB,DC'=AC$。聯$B'C',FB'$.則因$\angle A=\angle D$，$\therefore\triangle ABC\cong\triangle DB'C'$。

又因$\triangle DB'C':\triangle DB'F=DC':DF$,

$$\triangle DB'F : \triangle DEF = DB' : DE.$$

$$\therefore \quad (\triangle DB'C' : \triangle DB'F)\cdot(\triangle DB'F : \triangle DEF)$$

$$= (DC' : DF)(DB' : DE)$$

$$\therefore \quad \triangle DB'C' : \triangle DEF = (DC' : DF)\cdot(DB' : DE).$$

$$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle DEF = (AC : DF)\cdot(AB : DE).$$

Q.E.D.

（2） 延長BA至B''令$BA=AB''$.則$\triangle ABC=\triangle AB''C$

$$\because \quad \triangle AB''C : \triangle DEF = (AB'' : DE)\cdot(AC : DF)$$

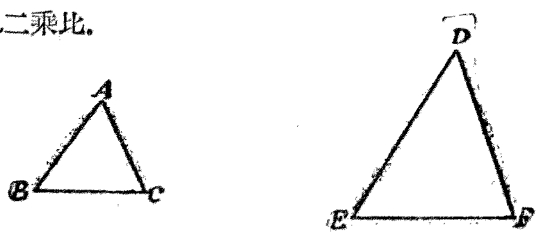
$$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle DEF = (AB : DE)\cdot(AC : DF).$$

Q.E.D.

§378. **系一** 兩個三角形有一雙角相等，或互為補角，則其面積之比等於夾此雙角兩邊所包矩形之比.

§379. **系二** 兩個互等角平行四邊形之比等於其鄰邊所包矩形之比.

§380. **定理一一八** 相似三角形面積之比等於其一雙對應邊之二乘比.



〔假設〕 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

〔終決〕 $\triangle ABC : \triangle DEF = (AB : DE)^2$.

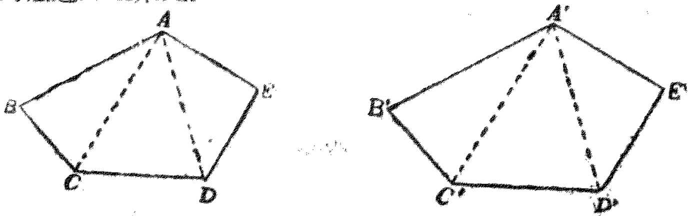
〔證〕 $\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF, \quad \therefore \quad \angle A = \angle D,$

$AB : DE = AC : DF, \quad \therefore \quad \triangle ABC : \triangle DEF,$

$=(AB:DE)\cdot(AC:DF)=(AB:DE)^2$,　　$Q.E.D.$

§381. 系　相似三角形面積之比，等於其一雙對應邊上正方形之比。

§382. **定理一一九**　相似多角形面積之比等於其一雙對應邊之二乘比。



〔假設〕　$ABC\cdots E \backsim A'B'C'\cdots E'$.

〔終決〕　$ABC\cdots E : A'B'C'\cdots E'=(AB:A'B')^2$.

〔證〕　從一雙對應角頂 A, A' 作對角線 $AC, A'C'; AD, A'D', \cdots$ 成各雙相似三角形 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'; \triangle ACD, \triangle A'C'D'; \cdots\cdots$

$\therefore\quad \triangle ABC : \triangle A'B'C'=(AB:A'B')^2$,

$\triangle ACD : \triangle A'C'D'=(AC:A'C')^2=(AB:A'B')^2$,

$\triangle ADE : \triangle A'D'E'=(AD:A'D')^2=(AB:A'B')^2$.

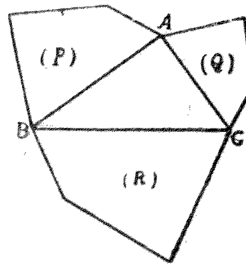
$\therefore\quad \triangle ABC+\triangle ACD+\cdots : \triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\cdots=(AB:A'B')^2$.

$\therefore\quad ABC\cdots E : A'B'C'\cdots E'=(AB:A'B')^2$. $Q.E.D.$

§383. 系　相似多角形面積之比等於其一雙對應邊上正方形之比。

§384. **定理一二〇**　以直角三角形三邊為對應邊各作相似多角形，則斜邊上多角形之面積等於他二邊上多角形

之和。



〔假設〕 $\triangle ABC$中，$\angle A=R\angle$. 以AB, AC, BC 爲對應邊，在其上作相似多角形(P),(Q),(R)。

〔終決〕 $(P)+(Q)=(R)$.

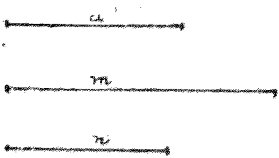
〔證〕 $\because (P)\backsim(Q)$, $\therefore (P):(Q)=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

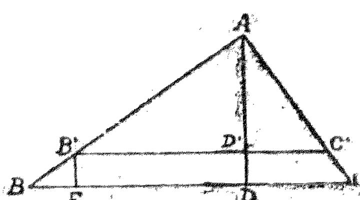
$$\therefore \quad \frac{(P)}{\overline{AB}^2}=\frac{(Q)}{\overline{AC}^2}，\text{同理可得}\quad \frac{(P)}{\overline{AB}^2}=\frac{(R)}{\overline{BC}^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{(P)}{\overline{AB}^2}=\frac{(Q)}{\overline{AC}^2}=\frac{(R)}{\overline{BC}^2}=\frac{(P)+(Q)}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}.$$

$\because \quad \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$. $\therefore (P)+(Q)=(R)$. Q.E.D.

§385. **作圖題一八** 求作一線分令與一所設線分之比等於所設二面積之比。





〔已設〕 三定長 a, m, n.

〔求作〕 一線分x，令 $a:x=m^2:n^2$.

〔解法〕 作直角三角形 ABC，令 $\angle A=R\angle$. $AB=m$, $AC=n$. 作 $AD\perp BC$，作 BC 之平行線交 AB, AD, AC 於 B', D', C'. 令 $B'D'=a$. 則 $D'C'$ 即所求線分 x.

Q.E.F.

〔證〕 $\overline{AB}^2=BD\cdot BC, \overline{AC}^2=DC\cdot BC,$

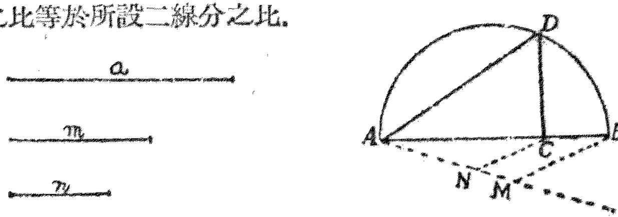
$\therefore$ $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BD\cdot BC:DC\cdot BC=BD:DC,$

又 $\because B'C'\parallel BC,\ \therefore B'D':D'C'=BD:DC,$

$\therefore$ $B'D':D'C'=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$ $\therefore a:D'C'=m^2:n^2.$

$\therefore$ $D'C'$ 即所求線分 x. Q.E.F.

§386. **作圖題一九** 求作一正方形令與一所設正方形之比等於所設二線分之比.



〔已設〕 三定長 $a, m, n.$

〔求作〕 一線分 x 令 $a^2:x^2=m:n.$

〔解法〕 作 $AB=a$ 在 AB 上取 C 令 $AB:AC=m:n.$ 以 AB 爲直徑作半圓. 過 C 作 AB 之垂線交半圓周於 D. 聯 AD 即所求線分 x. Q.E.F.

〔證〕 $\overline{AD}^2=AB\cdot AC,$

$\therefore$ $\overline{AB}^2:\overline{AD}^2=\overline{AB}^2:AB\cdot AC=AB:AC=m:n.$

AD 即所求線分 x. Q.E.F.

習題二十一

1. AD, BE 爲 $\triangle ABC$ 之二中線，其交點爲 G.

求$\triangle AGB:\triangle DGE$之比值。

2. $\triangle ABC$中，$\angle A=\angle R$，$AD\perp BC$。求證

$$\triangle ABD:\triangle ABC=\overline{AB}^2:\overline{BC}^2.$$

3. D,E,F為$\triangle ABC$邊BC,AC,AB上各點，而$BD:DC=CE:EA=AF:FB=1:2$。求$\triangle DEF:\triangle ABC$之比值。

4. $\triangle ABC$中，$AC=2BC$，$\angle C$之內外等分線各交AB及其延線於D及E。則$\triangle BCD:\triangle ACD:\triangle ACB:\triangle DCE=1:2:3:4$。

5. AD為直角$\triangle ABC$斜邊BC上之高，$\triangle ABE$，$\triangle ACF$為正三角形，則$\triangle ABE:\triangle ACF=BD:DC$。

6. $\triangle ABC$中，$\angle A$之等分線交BC於D，$\angle ADB$，$\angle ADC$之等分線各交AB,AC於E,F。求證$\triangle BEF:\triangle CEF=AB:AC$。

7. E為圓內接四邊形$ABCD$對角線之交點。求證$AB\cdot AD:BC\cdot CD=AE:CE$。

8. P為$\triangle ABC$底BC上任意一點，從P引AC,AB之平行線各交AB,AC於X,Y。則$\triangle AXY$為$\triangle BPX$及$\triangle CPY$之比例中項。

9. $\triangle ABC$中，$\angle C$為直角，$CD\perp AB$，$\triangle ACD$，$\triangle BCD$之內切圓半徑各為r_1,r_2，則$r_1^2+r_2^2=(s-c)^2$。

10. P為$\triangle ABC$邊BC上任意一點，從P引AC,AB之平行線各交AB,AC於Q,R。則$\triangle AQR$為$\triangle BPQ$，$\triangle CPR$之比例中項。

第二十五章　量之度數

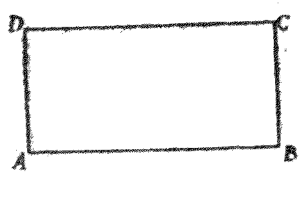
§387. **單位量**　一量取之爲標準以度諸同類量者曰單位量 (unit).

在實用方面，長之單位有里，丈，尺，…等，面積之單位有畝，分，平方尺，……等. 在幾何學中，線分之單位不拘定長. 唯在一題內，各線分之單位須相同，各面分之單位亦須相同且須與線分之單位相符. 如線分之單位任擇一定長 OU，則面積之單位爲 OU 上之正方形，即 $\overline{OU}^2$.

§388. **度數**　一量所含單位量之倍數曰此量之度數 (number of measure).

兩線分 AB, CD, 若 AB 爲 OU 之 m 倍，CD 爲 OU 之 n 倍，則 AB, CD 之度數各爲 m, n. 兩面分 $(P), (Q)$, 若 (P) 爲 $\overline{OU}^2$ 之 p 倍，(Q) 爲 $\overline{OU}^2$ 之 q 倍，則 $(P), (Q)$ 之度數各爲 p, q (OU 爲任擇之單位量，m, n, p, q 爲不名數，或整數，或分數，或爲無理數)

§389. **定理一二一**　矩形面積之度數等於兩邊度數之相乘積.



〔假設〕　▭$ABCD$, AB 之度數爲 m，AD 之度數爲 n.

〔終決〕 $\square ABCD$之度數爲mn.

〔證〕 設AB, CD所取之單位爲OU. 則$AB=mOU$, $AD=nOU$. 以OU爲一邊作正方形$OUVW$. $OU=OW$.

則
$$\begin{aligned}\square ABCD : \square OUVW &= (AB : OU)\cdot(AD : OW)\\ &= (mOU : OU)\cdot(nOU : OU)\\ &= mn.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \square ABCD = mn\cdot\square OUVW.$$

但$\square OUVW=\overline{OU}^2$爲單位.

$\therefore$ $\square ABCD$之度數爲mn.　　Q.E.D.

〔注意〕 量與量不能相乘，故兩線分不能相乘. 本定理若簡稱謂"矩形面積等於其兩邊之相乘積"，於意義便不通. 唯數與數可相乘，故如本定理所云.

§390. **系一** 正方形面積之度數等於其一邊度數之平方；正方形一邊之度數等於其面積度數之平方根.

§391. **系二** 平行四邊形面積之度數等於其底及高度數之相乘積.

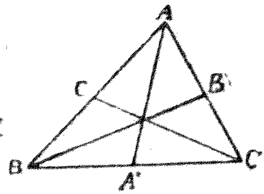
§392. **系三** 三角形面積之度數等於其底及高度數相乘積之半.

§393. **系四** 梯形面積之度數等於其兩底半和及高度數之相乘積.

§394. **系五** 菱形面積之度數等於其兩對角線度數相乘積之半.

§395. **定理一二二** 若三角形三邊之度數各爲a, b, c,

則三個中線之度數各爲 $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.



〔假設〕 $\triangle ABC$中，AA', BB', CC' 爲中線，BC, AC, AB 之度數各爲 a, b, c。

〔終決〕 AA', BB', CC' 之度數各爲 $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}, \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

〔證〕 AA' 爲 BC上之中線，$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AA'}^2+\overline{BA'}^2)$ $\therefore\ \overline{AA'}^2=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)-\overline{BA'}^2$。$\therefore\ \overline{AA'}^2$之度數爲$\frac{1}{2}(c^2+b^2)-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[2(b^2+c^2)-a^2\right]$。$\therefore\ AA'$，之度數爲$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.

同理 BB', CC' 之度數各爲 $\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$,

$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. $Q.E.D.$

〔註〕 吾人常以 m_a, m_b, m_c 各表AA', BB', CC',之度數，故得已知三角形三邊求中線之公式:$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$,

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

§ 396. **定理一二三**　若三角形三邊之度數各爲a, b, c，則此三角形面積之度數爲

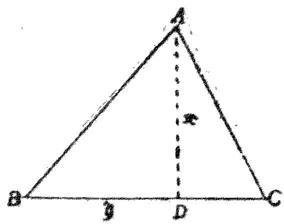
$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

〔假設〕　$\triangle ABC$中，BC，AC，AB之度數各爲a,b,c。

〔終決〕　$\triangle ABC$之度數爲

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

〔證〕　在一邊BC上作高AD。設AD之度數爲x，BD之度數爲y。



則因$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\cdot BD$，

$$\therefore b^2=c^2+a^2-2ay.$$

$$\therefore\ y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$$

又因$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$，　$\therefore$　$c^2=x^2+y^2$，

$$\therefore\quad x^2=c^2-y^2=(c+y)(c-y)$$

$$=\left(c+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(c-\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)$$

$$=\frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2a}\times\frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2a}$$

$$=\frac{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

$$\because\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}AD\cdot BC$$

$$\therefore\quad \triangle ABC之度數爲\frac{1}{2}x\cdot a$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Q.E.D.

〔註〕　若三角形之半周度數以 s 表之，即 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，則 $a+b+c=2s$，

$$b+c-a=a+b+c-2a=2s-2a=2(s-a),$$

$$c+a-b=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b),$$

$$a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c).$$

則 $\triangle ABC$ 之度數爲 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

吾人常以 S 表 $\triangle ABC$ 之度數，故得已知三邊之長求面積之公式

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

§397. 系　h_a, h_b, h_c，各表 $\triangle ABC$ 中，BC, AC, AB 上之高之度數，則

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_c=\frac{2S}{c}=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

§398. **定理一二四**　三角形三邊之度數各爲 a,b,c，其半周之度數爲 s. 則其內接圓半徑之度數爲 $\frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

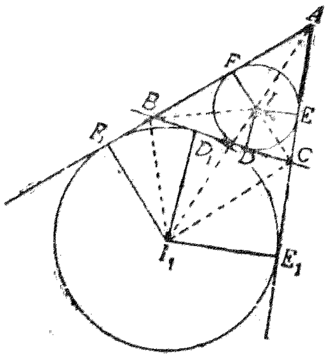
其三個旁接圓半徑之度數各爲 $\frac{1}{s-a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\frac{1}{s-b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\frac{1}{s-c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

〔假設〕　$\triangle ABC$ 中，I 爲內心，ID, IE, IF 爲 I 與三邊之距離，其度數爲 r. I_1 爲 $\angle A$ 內之旁心. I_1D_1,

I_1E_1, I_1F_1 爲 I_1 與三邊之距離，其度數爲 r_1. 又 $\angle B$, $\angle C$ 內之旁接圓半徑之度數各爲 r_2, r_3.



〔終決〕 $r=\frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

$r_1=\frac{1}{s-a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

$r_2=\frac{1}{s-b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

$r_3=\frac{1}{s-c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

〔證〕 $\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle IAC+\triangle IAB$

$=\frac{1}{2}BC\cdot ID+\frac{1}{2}AC\cdot IE+\frac{1}{2}AB\cdot IF$.

$\therefore\quad S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$,

$=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$.

$$\therefore \quad r=\frac{S}{s}=\frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

又 $\triangle ABC=\triangle I_1AC+\triangle I_1AB-\triangle I_1BC$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot I_1E_1+\frac{1}{2}AB\cdot I_1F_1-\frac{1}{2}BC\cdot I_1D_1.$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}br_1+\frac{1}{2}cr_1-\frac{1}{2}ar_1$$

$$=\frac{1}{2}(b+c-a)r_1=(s-a)r_1,$$

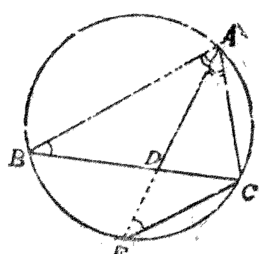
$$\therefore \quad r_1=\frac{S}{s-a}=\frac{1}{s-a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

同理 $r_2=\dfrac{S}{s-b}=\dfrac{1}{s-b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$

$$r_3=\frac{S}{s-c}=\frac{1}{s-c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Q. E. D.

§399. **定理一二五** 三角形三邊之度數各為 a, b, c, 其半周之度數為 s. 則其等分角線之度數各為 $\dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$, $\dfrac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c}$, $\dfrac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$.



〔假設〕 AD 為 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 之等分線, 其度數為 t_a, 又 $\angle B$, $\angle C$ 之等分線度數各為 t_b, t_c.

〔終決〕 $t_a=\dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$,

$$t_b=\frac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c},$$

$$t_c=\frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}.$$

〔證〕 延長 AD 交 $\triangle ABC$ 之外接圓周於 E. 聯 EC. 則因 $\angle BAD=\angle EAC$, $\angle ABD=\angle AEC$, $\therefore$ $\triangle ABD\sim\triangle AEC$, $\therefore$ $AB:AE=AD:AC$. $\therefore$ $AB\cdot AC=AD\cdot AE=AD(AD+DE)=\overline{AD}^2+AD\cdot DE=\overline{AD}^2+BD\cdot DC$.

設 BD, DC 之度數各爲 x, y, 則 $bc=t_a^2+xy$.

又$\because$ $BD:DC=AB:AC$, $\therefore$ $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{BD+DC}{AB+AC}=\dfrac{BC}{AB+AC}$.

$$\therefore \quad BD=\frac{AB\cdot BC}{AB+AC},\ DC=\frac{AC\cdot BC}{AB+AC}.\quad \therefore x=\frac{ac}{b+c}$$

$$y=\frac{ab}{b+c}.$$

$$\therefore \quad bc=t_a^2+xy=t_a^2+\left(\frac{ab}{b+c}\right)\left(\frac{ac}{b+c}\right)$$

$$\therefore \quad t_a^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right).$$

$$\therefore\quad t_a=\sqrt{bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}$$

$$=\sqrt{bc\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}}$$

$$=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}$$

$$=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc\cdot 2s\cdot 2(s-a)}.$$

$$\therefore\quad t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}.$$

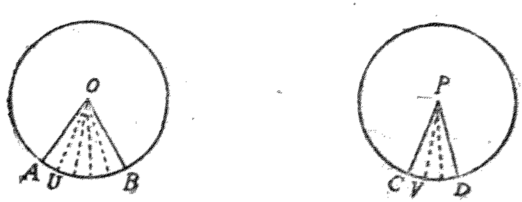
同理　$t_b=\dfrac{2}{c+a}\sqrt{acs(s-b)},$

$t_c=\dfrac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$　　　Q. E. D.

§ 400. **計算題**　從一圖形中已知量之度數，求出其他未知量之度數曰計算題.

以上諸定理若終決部分不先示知，而待求時則爲計算題.

§ 401. **定理一二六**　在同圓或等圓中，二個中心角之比等於其所對弧之比.



〔假設〕 $\odot O=\odot P$.

〔終決〕 $\angle AOB:\angle CPD=\frown AB:\frown CD$.

〔證〕 (1) 若$\frown AB$, $\frown CD$ 爲可通約量，而其公約量爲$\frown AU$, $\frown AB=m\frown AU$, $\frown CD=n\frown AU$. 則$\frown AB:\frown CD=m:n$. 將$\frown AB$ 分爲 m 等分，$\frown CD$ 分爲 n 等分. 過各分點作半徑將 $\angle AOB$ 分成 m 等分，$\angle CPD$ 分成等 n 分，每份皆等於 $\angle AOU$.

$\therefore\quad \angle AOB=m\angle AOU$, $\angle CPD=n\angle AOU$.

$\therefore\quad \angle AOB:\angle CPD=m:n$.

$\therefore\quad \angle AOB:\angle CPD=\frown AB:\frown CD$.

(2) 若$\frown AB$, $\frown CD$ 爲不可通約量，則可將$\frown CD$ 分成 n 等分，令 n 爲極大之數，每份之長爲$\frown OV$ ($\frown OV$ 爲極小)，以$\frown CV$ 爲單位量$\frown AB$，得 $m\frown CV<\frown AB<(m+1)\frown CV$. $\therefore\ m:n<\frown AB:\frown CD<(m+1):n$. $\therefore\frown AB:\frown CD\doteq m:n$. 過各分點作半徑，可得$\angle CPD=n\angle CPV$. $m\angle CPV<\angle AOB<(m+1)\angle CPV$. $\therefore$ $m:n<\angle AOB:\angle CPD<(m+1):n$. $\therefore\ \angle AOB:\angle CPD\doteq m:n$

$\therefore\quad \angle AOB:\angle CPD=\frown AB:\frown CD$. Q.E.D.

〔註〕 在實用分面常以直角之$\frac{1}{90}$爲角之單位，以象限弧之$\frac{1}{90}$爲弧之單位。在幾何學中角與弧之單位亦可不拘大小。唯在一題內所取單位須相同。且單位弧所對中心角須爲單位角。例如在本節定理中若以$\angle AOU$爲單位角，則$\frown AU$即爲單位弧。$\angle AOB=m\angle AOU$, $\frown AB=m\frown AU$, 則$\angle AOB$之度數爲 m, $\frown AB$之度數亦爲 m.

§402. **系一**　圓中心角與所對弧之度數相等。

§403. **系二**　圓周角之度數等於其所對弧之度數之半。

§404. **系三**　切線及過切點弦所夾角之度數等於角內弧之度數之半。

§405. **系四**　圓內兩弦交角之度數等於此角及其對頂角所對兩弧度數之半和。

§406. **系五**　兩割線（或切線）圓外交角之度數等於此角內兩弧度數之半差。

習題二十二

1. $\triangle ABC$ 中，BC 之度數為 10，BC 之平行線 DE 等分 $\triangle ABC$ 之面積．求 DE 之度數．

2. 梯形二底之度數為 4，7，其高之度數為 5，一線分平行於底而等分其面積．求其度數．

3. 梯形 $ABCD$ 中，AD,BC 為底，AC,BD 交於 O；已知 $AD=36$，$BC=57$，$OD=12$，求 BD．

4. 五角形 $ABCDE$ 中，AB,BC,CD,DE,EA 之度數各為 a,b,c,d,e，又對角線 AC,AD 之度數各為 f,g 求其面積

5. CF 為六角形 $ABCDEF$ 之對角線，從 A,B,C,D,E 至 CF 作垂線 AA',BB',DD',EE'；已知其度數各為 a,b,d,e，又知 $CF',FA',FE',CB'\ CD'$ 之度數各為 $l,m,n\ p,q$．求此六角形之面積．

6. 三角形之三邊各等於他一三角形之三中線，求此二三角形面積之比。

〔註〕以下諸題中、h_a, h_b, h_c 表 $\triangle ABC$ 三個高之度數，r, r_1, r_2, r_3 表 $\triangle ABC$ 之內接圓半徑及三個旁接圓半徑之度數，S 表面積。

7. 證 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$

8. 證 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}$。

9. 證 $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}=\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}$。

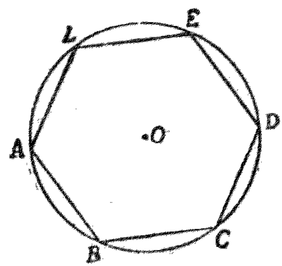
10. 證 $S^2=rr_1r_2r_3$。

第五編　正多角形及圓

第二十六章　圓內接及外切正多角形

§407. **定理一二七**　圓周上諸點分圓周爲諸等弧，則順次聯此諸分點所成之多角形爲圓內接正多角形

〔假設〕　⊙O圓周上諸點A, B,C,$\cdots L$,而$\frown AB=\frown BC=\cdots=\frown LA$.



〔終決〕　$ABC\cdots\cdots L$爲圓內接正多角形.

〔證〕　$\because \frown AB=\frown BC=\cdots=\frown LA$,

$$\therefore\quad AB=BC=\cdots=LA.$$

又$\frown AB+\frown BC=\frown BC+\frown CD=\cdots=\frown LA+\frown AB$.

即$\frown AC=\frown BD=\cdots=\frown LB$,

$\therefore$優$\frown AC=$優$\frown BD=\cdots=$優$\frown LB$.

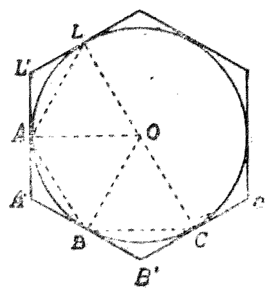
$\therefore\quad \angle B=\angle C=\cdots=\angle A$.

$\therefore\quad ABC\cdots L$爲圓內接正多角形.　　　　*Q.E.D.*

§408. **定理一二八**　圓周上諸點分圓周爲諸等弧，則過此諸分點之切線所成之多角形爲圓外切正多角形.

〔假設〕　⊙O圓周上諸點A,B,C,$\cdots L$,而$\frown AB=\frown BC=\cdots=\frown LA$,過$A$,$B$,$C$,$\cdots L$所作切線交於$A'$,$B'$,$C'$,$\cdots L'$成多角形$A'B'C'\cdots L'$.

〔終決〕 $A'B'C'\cdots\cdots L'$ 爲圓外切正多角形.



〔證〕 聯AB, BC, $\cdots\angle A$.

則∵ $\frown AB=\frown BC=\cdots=\frown LA$

∴ $AB=BC=\cdots=LA$.

∵ $\angle A'AB$, $\angle A'BA$之度數等於$\frown AB$度數之半,

$\angle B'BC$, $\angle B'CB$之度數等於$\frown BC$度數之半,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\angle L'LA$, $\angle L'AL$之度數等於$\frown A$度數之半,

∴ $\angle A'AB=\angle A'BA=\angle B'BC=\angle B'CB=\cdots$
$=\angle L'LA=\angle L'AL$.

∴ $\triangle A'AB\cong\triangle B'BC\cong\cdots\cong\triangle L'LA$.

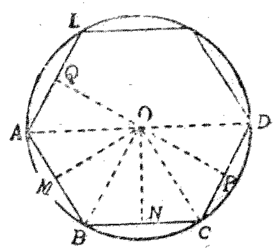
∴ $\angle A'=\angle B'=\cdots=\angle L'$

又 $A'A=A'B=B'B=B'C=\cdots=L'L=L'A$.

∴ $A'B+B'B=B'C+C'C=\cdots=L'A+A'A$,

即 $A'B'=B'C'=\cdots=L'A'$

∴ $A'B'C'\cdots L'$爲圓外切正多角形 Q.E.D.



§ 409. 定理一二九 正多角形可內接於圓及外切於圓.

〔假設〕 $ABC\cdots L$爲正多角形.

〔終決〕 $ABC\cdots L$可內接於一圓及外切於一圓.

〔證　作$\angle A$，$\angle B$之等分線交於O $\because \angle OAB=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\angle OBA$，$\therefore OA=OB$。聯$OC$，則因$\angle OBA=\angle OBC$，$BA=BC$，$OB$爲公邊，$\therefore$ $\triangle OBA\cong\triangle OBC$，$\therefore$ $OA=OC$，$\angle OCB=\angle OAB=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C=\angle OCD$，而$OC$亦爲$\angle C$之等分線。聯$OD$，同樣可證$OD=OB$，$OD$亦爲$\angle D$之等分線。依此類推可得

$$OA=OB=OC=\cdots=OL.$$

故以O爲中心，OA爲半徑所作之圓必過$B, C, \cdots L$。

$\therefore$ $ABC\cdots L$內接於圓。　Q.E.D.

從O作AB，BC，CD，$\cdots LA$各邊之垂線OM，ON，OP，$\cdots OQ$，則因弦$AB=BC=CD=\cdots=LA$，

$\therefore$ $OM=ON=OP=\cdots=OQ$。故以O爲中心，OM爲半徑所作之圓必過N，P，$\cdots Q$，而AB，BC，CD，$\cdots LA$皆爲其切線。

$\therefore$ $ABC\cdots L$外切於過M，N，P，$\cdots Q$諸點之圓。　Q.E.D.

§410. **系一**　正多角形之外接圓與內切圓爲同心圓。

§411. **系二**　正多角形爲軸對稱形，其各角之等分線及各邊之垂直等分線皆可爲對稱軸。

§412. **系三**　雙數邊數之正多角形爲中心對稱形，其外接圓，內切圓所共圓心爲對稱中心。

§413. **定理八一　正多角形之中心半徑邊心距及中心角**　正多角形之外接圓及內切圓所共之中心曰此正多角形之中心（centre）。其外接圓半徑曰此正多角形之半徑（ra dius)．其內切圓半徑曰此正多角形之邊心距(apothem)．相鄰兩半徑所夾之角曰此正多角形之中心角（central angle）．

§414. **定理一三〇**　同邊數正多角形爲相似形，其半徑之比及邊心距之比皆等於其相似比．

〔略證〕　設兩形之邊數爲n則兩形之各角均爲$\frac{2(n-2)}{n}$ $R\angle$，故相等，又各邊之比均相等，故兩形相似．

§415. **定理一三一**　正多角形面積之度數等於其周及邊心距之度數相乘積之半．

〔略證〕　設正多角形爲$ABC\cdots L$，其中心爲O．則$ABC\cdots L=\triangle OAB+\triangle OBC+\cdots+\triangle OLA$．

$\because$　$\triangle OAB,\triangle OBC,\cdots,\triangle OLA$之度數各爲$AB,BC,\cdots,LA$之度數與邊心距之度數相乘積之半，故$ABC\cdots L$之度數等於$AB+BC+\cdots+LA$之度數與邊心距之度數相乘積之半，即其周及邊心距之度數相乘積之半．

§416. **定理一三二**　正六角形之各邊等於其半徑．

〔學者自證之〕

§417. **定理一三三**　正方形之各邊等於其邊心距之二倍．

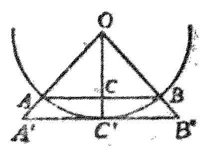
〔學者自證之〕

〔註〕　以上二定理可易言之曰"圓內接正六角形之各邊等於半徑，外切正四角形之各邊等於半徑之二倍"．若以r表圓半徑之度數，S_n表圓內接正n角形每邊之度數，S_n表圓外接正n角形每邊之度數，則定理一三二可寫作$S_6=r$，定理一三二可寫作$S_4=2r$．

§418. **定理一三四**　設圓半徑之度數爲 r，其內接正 n 角形每邊之度數爲 s_n，外切正 n 角形每邊之度數爲 S_n（以下諸定理中之表法同）

則
$$S_n=\frac{rs_n}{\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}},\tag{1}$$

$$s_n=\frac{rS_n}{\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}}.\tag{2}$$



〔證〕　設弦 AB 爲⊙O 內接正 n 角形之一邊，過 $\frown AB$ 之中點 C' 作 ⊙O 之切線 $A'B'$ 交 OA,OB 之延線於 A'，B'，則 $A'B'$ 即爲⊙O 外切正 n 角形之一邊（證略）。

$\because\quad AB\parallel A'B'$，$\therefore OAB\sim OA'B'$。

$\therefore\quad AB:A'B'=OA:OA'=OC:OC'$。

$\because\quad \overline{OA'}^2=\overline{OC'}^2+\overline{A'C'}^2=\overline{OC'}^2+\left(\frac{A'B'}{2}\right)^2$，其度數爲 $r^2+\left(\frac{S_n}{2}\right)^2$，

$\overline{OC}^2=\overline{OA}^2-\overline{AC}^2=\overline{OA}^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2$，其度數爲 $r^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2$。

$\therefore\quad OA'$ 之度數爲 $\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}$，$OC$ 之度數爲 $\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}$

$$\therefore \quad s_n : S_n = r : \sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}} = \sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}} : r.$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{r s_n}{\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}} \cdots(1) \qquad s_n = \frac{r S_n}{\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}} \cdots(2) \quad Q.E.D.$$

（注意）本定理爲圓內接及外切正多角形每邊度數換算公式

§419. 系一 $S_6 = \dfrac{r s_6}{\sqrt{r^2-\frac{s_6^2}{4}}} = \dfrac{r^2}{\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}} = \dfrac{r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} r}$

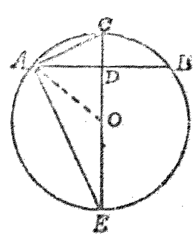
$= \dfrac{2}{\sqrt{3}} r.$

§420. 系二 $s_4 = \dfrac{r S_4}{\sqrt{r^2+\frac{S_4^2}{4}}} = \dfrac{2r^2}{\sqrt{r^2+\frac{4r^2}{4}}} = \dfrac{2r^2}{\sqrt{2}\, r}$

$= \sqrt{2}\ r$

§421. 定理一三五 $s_{2n} = \sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-s_n^2})}$.

〔證〕設弦AB爲⊙O內接正n角形之一邊.引直徑$COE \perp AB$,則AC爲⊙O內接正$2n$角形之一邊.



$\because \quad \overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AD}^2, \quad \therefore \quad OD$之度數爲 $\sqrt{r^2-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}$.

又 $CD=OC-OD$, $\therefore$ CD之度數爲$r-\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}$.

又 $\overline{AC}^2=CE\cdot CD$,故$AC$之度數爲

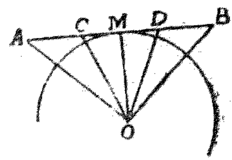
$$s_{2n}=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-s_n^2})}\qquad Q.E.D.$$

§422. **系** 若以半徑爲單位，則$s_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}$.

（注意） 本定理爲已知s_n求s_{2n}之公式.

§423. **定理一三六** $S_{2n}=\frac{2r}{S_n}\left\{\sqrt{4r^2+S_n^2}-2r\right\}$.

〔證〕 設切線AB爲⊙O外切正n角形之一邊，M爲切點,則亦爲AB之中點.聯OA,OB,OM. 作$\angle AOM$,$\angle BOM$之等分線OC,OD交AB於C,D,則M亦爲CD之中點. 又因$\angle COD=\frac{1}{2}\angle AOB$,故$CD$即爲⊙$O$外切正$2n$角形之一邊.



$\because$ CO等分$\angle AOM$, $\therefore$ $AC:CM=OA:OM$.

$\therefore$ $AC+CM:CM=OA+OM:OM$.

即 $AM:CM=OA+OM:OM$.

$\because$ $\overline{OA}^2=\overline{OM}^2+\overline{AM}^2$, $\therefore$ OA之度數爲$\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}$,而

$AM=\frac{1}{2}AB$,其度數爲$\frac{S_n}{2}$; $CM=\frac{1}{2}CD$,其度數爲$\frac{S_{2n}}{2}$.

$$\therefore\quad \frac{S_n}{2}:\frac{S_{2n}}{2}=S_n:S_{2n}=\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}+r:r$$

$$\therefore\ S_{2n}=\frac{rS_n}{\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}+r}=\frac{rS_n\left(\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}-r\right)}{r^2+\frac{S_n^2}{4}-r^2}$$

$$=\frac{4rS_n\left(\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}-r\right)}{S_n^2}$$

$$\therefore\ S_{2n}=\frac{2r}{S_n}\left\{\sqrt{4r^2+S_n^2}-2r\right\}.\qquad Q.E.D.$$

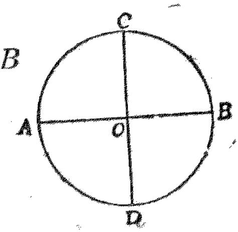
§424. 系 若以半徑爲單位，則

$$S_{2n}=\frac{2}{S_n}\left\{\sqrt{4+S_n^2}-2\right\}.$$

（注意） 本定理爲已知S_n求S_{2n}之公式.

§425. **作圖題二〇 分所設圓周爲四等分.**

〔解法〕 過中心O，作垂直二直徑AB, CD. 則A, C, B, D即所求分點. $Q.E.F.$



〔證〕 ∵ $\angle AOC=\angle COB=\angle BOD=\angle DOA$.

$\therefore\ \frown AC=\frown CB=\frown BD=DA$

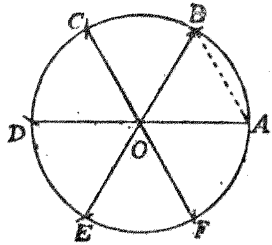
$\therefore\ A, C, B, D$爲所求分點.

$Q.E.D.$

§426. 系一 分所設圓周爲八等分，十六等分，…，2^n等分.

§427. 系二 作所設圓之內接正方形，正八角形，正十六角形，…正2^n角形.

§428. 系三 作所設圓之外切正方形，正八角形，正十六角形，…正2^n角形



§429. **作圖題二一** 分所設圓周爲六等分.

〔解法〕 以圓周上任意點 A 爲中心，以半徑 AO 爲半徑作弧交圓周於B.再以 B爲中心，以同半徑作弧再交圓周於C.如是繼續再得D,E,F.則A,B,C,D,E,F.即所求之分點. $Q.E.F.$

〔證〕 聯OA,OB,AB,OC,OD,OE,OF. 因$AB=AO=OB$,故$\triangle AOB$爲正三角形， $\therefore$ $\angle AOB=\frac{2}{3}R\angle$,同理$\angle BOC,\angle COD,\angle DOE,\angle EOF$皆爲$\frac{2}{3}R\angle$.

$\therefore$ $\angle FOA=4R\angle-5\left(\frac{2}{3}R\angle\right)=\frac{12-10}{3}R\angle=\frac{2}{3}R\angle.$

$\therefore$ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=\angle FOA.$

$\therefore$ $\frown AB=\frown BC=\frown CD=\frown DE=\frown EF=\frown FA.$

$\therefore$ A,B,C,D,E,F爲所求分點. $Q.E.D.$

§430. **系一** 分所設圓周爲 3 等分，12等分，24等分，… 3×2^n 等分.

§431. **系二** 作所設圓之內接正三角形，正六角形，正十二角形，…，正3×2^n角形

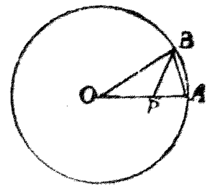
§432. **系三** 作所設圓之外切正三角形，正六角形，正十二角形，…正3×2^n角形.

§433. **作圖題二二** 分所設圓周爲十等分.

〔解法〕 在任意半徑上取P，令$OA:OP=OP:PA$（§350中末比分法）. 以A爲中心，OP 爲半徑作弧交圓

周於B。

則A,B即所求二鄰點。 Q.E.F.



〔證〕 聯BO,BP,BA。∵ $OA:OP=OP:PA$，而$AB=OP$，∴ $OA:AB=AB:AP$，$\angle A$爲$\triangle AOB$，$\triangle ABP$之共有角，∴ $\triangle AOB\backsim\triangle ABP$.

∴ $OA:AB=OB:BP$.

然$OA=OB$，∴ $AB=BP$ ∴ $OP=BP$，

∴ $\angle POB=\angle PBO$ 又 $\angle AOB=\angle ABP$，

∴ $\angle OBA=\angle OBP+\angle PBA=2\angle AOB$.

又 $\angle OAB=\angle OBA=2\angle AOB$.故在$\triangle AOB$中，

$\angle OAB+\angle OBA+\angle AOB=5\angle AOB=2R\angle$.

$\angle AOB=\frac{2}{5}R\angle=\frac{1}{10}$周角。∴ $\frown AB=\frac{1}{10}$圓周。

∴ A,B爲所求二鄰點. Q.E.D.

§434. 系一 分所設圓周爲5等分，20等分，40等分，……，5×2^n等分。

§435. 系二 作所設圓之內接正五角形，正十角形，正二十角形，…，正5×2^n角形。

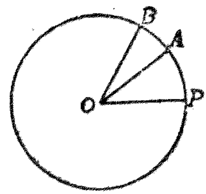
§436. 系三 作所設圓之外切正五角形，正十角形，正二十角形，…，正5×2^n角形。

§437. 作圖題二三 分所設圓周爲十五等分。

〔解法〕 作$\frown PB=\frac{1}{6}$圓周．在$\frown PB$上取A令$\frown PA=\frac{1}{10}$圓周．則A，B即所求二鄰點。 Q.E.F.

〔證〕 $\frown AB = \frown PB - \frown PA = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)$ 圓周 $= \frac{1}{15}$ 圓周.

∴ A, B 爲所求二鄰點.



§438. 系一 分所設圓周爲30等分，60等分，…，15×2^n 等分.

§439. 系二 作所設圓之內接正十五角形，正三十角形，…，正 15×2^n 角形.

§440. 系三 作所設圓之外切正十五角形，正三十角形，…，正 15×2^n 角形

習題二十三

1. 正多角形之中心角與其內角互爲補角.

2. 正多角形之半徑等於其邊心距之二倍.

3. 圓內接正六角形之面積等於同圓內接正三角形面積之二倍.

4. 圓內接正六角形之面積爲同圓內接及外切正三角形之比例中項.

5. 圓內接正六角形之面積等於同圓外切正六角形之 $\frac{3}{4}$.

6. 正五角形對角線互分於中末比.

7. 將正五角形一頂點爲中心，對角線爲半徑所作之圓，則其內接正十角形之邊等於此五角形之邊.

8. AB 是⊙O 內接正六角形之一邊. AC 爲⊙O 之切線，其長等於 AB，且與 AB 分居半徑 AO 之兩旁. OC，BC 各交圓周於 E, F，則 EF 爲圓內接正二十四角形之一邊

第二十七章　圓之度數

§441. **定量及變量**　在某種條件之下，一量之值始終不變者曰定量．一量之值時時變更者曰變量．

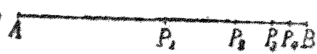
例如過圓內一定點P作弦AB，則$AP\cdot PB$之面積爲定量．但AB之長爲變量．

又如從弓形弧上一點P聯弓形弦AB之兩端，則PA，PB皆爲變量，而$\angle APB$爲定量．

§442. **極限**　一變量在某種條件之下繼續改變，若(1)愈改變愈與某定量接近，(2)儘管改變仍不能與此定量相等，則曰此變量無窮接近此定量而以此定量爲極限．

例如在定線分AB上取P_1令$AP_1=\frac{1}{2}AB$，

再在P_1B上取P_2令$P_1P_2=\frac{1}{2}P_1B$，



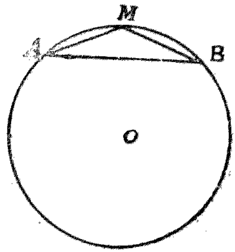
再在P_2B上取P_3令$P_2P_3=\frac{1}{2}P_2B$，

如此繼續取$P_4,P_5,\cdots,P_n$（n爲任意整正數）．則AP_n爲變量，而n愈大，AP_n愈與定量AB接近．然n無論如何大，AP_n仍不等於AB．即AP_n無窮接近於AB而以AB爲極限．

§443. **幾何公理一三**　圓外切多角形之周大於圓周．圓內接多角形之周小於圓周．

§444. **定理一三七**　圓內接正多角形邊數遞次倍增時，其周之長接近於圓周而以圓周爲極限．

〔證〕　設AB爲$\odot P$內接正n角形之一邊，其度數爲s，其周之度數爲$p=ns$，M爲$\frown AB$之中點，故$AM=MB$爲



$\odot O$內接正$2n$角形之一邊其度數爲s_{2n}，其周之度數爲$p_{2n}=ns_{2n}$.

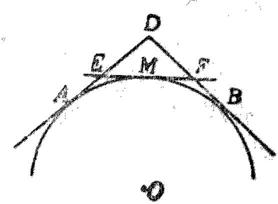
$\because\quad AM+MB>AB$,

$\therefore\quad 2s_{2n}>s_n$.　$\therefore\quad 2n\cdot s_{2n}>n\cdot s_n$

$\therefore\quad p_{2n}>p_n$. 但一切圓內接多角形之周恆比圓周小，設圓周之度數爲c,則n爲無論何數時$p_n<c$.　$\therefore\quad p_n<p_{2n}<c$.

$$\therefore\quad p_4<p_8<p_{16}<\cdots<p_{2^n}<c,$$
$$p_6<p_{12}<p_{24}<\cdots<p_{3\times2^n}<c,$$
$$p_r<p_{2r}<p_{4r}<\cdots<p_{2^n r}<c.\quad Q.E.D.$$

§445. **定理一三八**　圓外切正多角形邊數遞次倍增時，其周之長接近於圓周而以圓周爲極限。



〔證〕　設DA,DB切$\odot O$於A,B各爲$\odot O$外切正n角形之半邊，其度數各爲$\frac{1}{2}S_n$. $\therefore\quad DA+DB$之度數爲S_n. 此多角形周之度數爲$P=n\cdot S$, M爲$\frown AB$之中點. EF切$\odot O$於M,　$\therefore\quad EA=EM=MF=FB$,各爲$\odot O$外切正$2n$角形之半邊，其度數爲$\frac{1}{2}S_{2n}$.

$\therefore\quad AE+EM+MF+FB$之度數爲$2S_{2n}$. 此多角形周之度數爲$P_{2n}=2n\cdot S_n$.則因$DE+DF>EF$, $\therefore DA+DB>AE+EF+FB$,

$\therefore\quad S_n>2S_{2n}$.　$\therefore\quad nS_n>2n\cdot S_{2n}$,即$P_n>P_{2n}$.但一切圓外切多角形之周恆比圓周大，設圓周之度數爲c，則n爲無

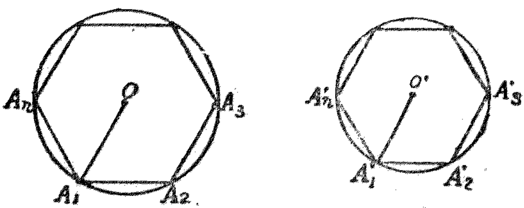
論何數時，$P_n > c$，　∴　$P_n > P_{2n} > c$。

∴　$P_4 > P_8 > P_{16} > \cdots > P_{2^n} > c$，

$P_3 > P_6 > P_{12} > \cdots > P_{3\times 2^n} > c$，

∴　$P_r > P_{2r} > P_{4r} > \cdots > P_{2^n\cdot r} > c$。　Q.E.D.

§446. **定理一三九**　二圓周之比等於其半徑之比。



〔假設〕　設⊙O, ⊙O'之周各爲c, c'，其半徑各爲R, R'。

〔終決〕　$c : c' = R : R'$。

〔證〕　在⊙O, ⊙O'內各作內接正n角形$A_1A_2A_3\cdots A_n$。$A'_1A'_2A'_3\cdots A'_n$，其周各爲P, P'。則因$A_1A_2A_3\cdots A_n$, $A'_1A'_2A'_3\cdots A'_n$爲同邊數正多角形，　∴　$A_1A_2A_3\cdots A_n \backsim A'_1A'_2A'_3\cdots A'_n$。

$$\frac{R}{R'} = \frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = \cdots = \frac{A_nA_1}{A'_nA'_1}$$

$$= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots\cdots + A_nA_1}{A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + \cdots + A'_nA'_1} = \frac{P}{P'},$$

設n無限增大時P, P'各自接近於c, c'而各以c, c'爲極限．

∴　$R : R' = P : P' = c : c'$。

∴　$c : c' = R : R'$。　　　Q.E.D.

§447. **系一**　二圓周之比等於其直徑之比。

§448. **系二**　任何圓之周與直徑之比爲一定值。

§449. **定理一四〇**　圓周與直徑之比，其定值大於3.14159，小於3.14160。

〔證〕 設以圓半徑爲單位，s_n表內接正 n 角形各邊之度數，p_n表內接正n角形周之度數. S_n表外切正 n 角形各邊之度數，P_n表外切正n角形周之度數，則從 § 420，可得

$$s_4=\sqrt{2r}=1.41421356, \quad \therefore \quad \frac{1}{2}P_4=2.8284271.$$

再從 § 422，可得

$$s_8=\sqrt{2-\sqrt{4-s_4^2}}=0.7653694, \therefore \frac{1}{2}p_8=3.0614675.$$

繼續從 § 422，可得$s_{16}, s_{32}, \cdots$各值而求得$\frac{1}{2}p_{16}$, $\frac{1}{2}p_{32}, \cdots$各值（見下表）.

又從 § 417，知$S_4=2r=2$， $\therefore \frac{1}{2}P_4=4$.

再從 § 424，可得$S_8=\frac{2}{S_4}\{\sqrt{4+S_n^2}-2\}=0.82842712$，

$$\therefore \quad \frac{1}{2}P_8=3.3137085.$$

繼續從 § 424，可得 $S_{16}, S_{32}, \cdots$各值而求得$\frac{1}{2}P_{16}$，$\frac{1}{2}P_{32}, \cdots$各值（見下表）.

玆將求出各值列表如下：

n	$\frac{1}{2}p_n$	$\frac{1}{2}P_n$
4	2.8284271	4.0000000
8	3.0614675	3.3137085
16	3.1214452	3.1825979
32	3.1365485	3.1517249
64	3.1403312	3.1441184
128	3.1412773	3.1422236
256	3.1415138	3.1417504
512	3.1415729	3.1416321
1024	3.1415877	3.1416025
2048	3.1415914	3.1415951

設以 c 表圓周之度數,則因n爲無論何數時, $\frac{1}{2}p_n<\frac{1}{2}c<\frac{1}{2}P_n$.

$\because$　$3.1415914<\frac{1}{2}c<3.1415951$。　$\because$　直徑之度數爲2。

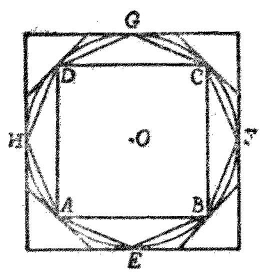
$\therefore$　圓周與直徑之比,其値爲$\frac{1}{2}c$,大於3.14159,小於3.1416。

Q.E.D.

§450. **圓周率**　圓周與直徑之比値曰圓周率，常以π表之，即$\pi=3.1416$爲一常數. 以c,d,r各表圓周，直徑，半徑之度數，則依上述定理，可得$c=\pi d=2\pi r$.

§451. **定理一四一**　圓內接或外接正多角形邊數遞次倍增時，其面積接近於圓面積而以圓面積爲極限.

〔證〕　設$ABCD$爲⊙O內接正方形，$AEBFCGDH$爲⊙O內接正八角形，則$AEB\cdots\cdots H=ABCD+\triangle ABE+\triangle FBC+\cdots$.



$\therefore$　$AEB\cdots H>ABCD$. 若以A表圓內接正 n 角形面積之度數，則$A_8>A_4$。

同理$A_{16}>A_8$。但n爲無論何數時，圓面積等於 n 角形面積加 n個小弓形。若以A表圓面積之度數，則$A_n<A$。

$$\therefore\quad A_4<A_8<A_{16}<\cdots<A_{2^n}<A.$$

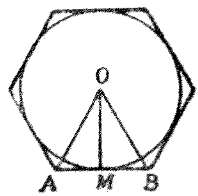
同理　$$A_r<A_{2r}<A_{4r}<\cdots<A_{2^n r}<A.$$

若以A'_n表圓外切正n角形面積之度數，同樣可證

$$A'_r > A'_{2r} > A'_{4r} > \cdots > A'_{2^n r} > A. \quad Q.E.D.$$

§452. **定理一四二**　圓外切正多角形之面積等於其周與圓半徑所包矩形之半.

〔假設〕　⊙O半徑之度數爲r，其外切正n角形周之度數爲P_n，面積之度數爲A_n.



〔終決〕　$A_n=\frac{1}{2}rP_n$.

〔證〕　設AB爲⊙O外切正n角形之一邊其數爲S_n，則$P_n=nS_n$. AB切⊙O於M,

$\therefore$　$OM\perp AB$.　$\therefore$　$\triangle OAB=\frac{1}{2}OM.AB$，其度數爲$\frac{1}{2}rS_n$. 因正$n$角形之面積爲$\triangle OAB$之$n$倍,

$$\therefore \quad A_n=\frac{1}{2}rS_n\cdot n=\frac{1}{2}r\cdot nS_n=\frac{1}{2}rP_n. \qquad Q.E.D.$$

§453. **定理一四三**　圓面積等於其周與半徑所包矩形之半.

〔假設〕　設圓面積，周，半徑之度數各爲A, c, r.

〔終決〕　$A=\frac{1}{2}cr$.

〔證〕　設$B_1B_2B_3\cdots B_4$爲此圓之外切正n角形. 其面積及周之度數各爲A_n，P_n. 則$A_n=\frac{1}{2}rP_n$. 但當n遞次倍增時A_n以A爲極限，P_n以C爲極限，$\therefore$　$A=\frac{1}{2}rc$.　$Q.E.D.$

§454. **系一**　二圓面積之比等於其半徑或直徑之二乘比.

§455. **系二** 圓面積與半徑上正方形面積之比一定，其定值爲π.

$$\because \quad A=\frac{1}{2}rc\text{，而}c=2\pi r, \qquad \therefore \quad A=\frac{1}{2}r(2\pi r)=\pi r^2.$$

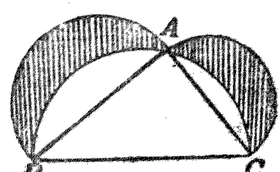
§456. **系三** 扇形面積等於弧及半徑所包矩形之半.

§457. **系四** 同圓或等圓中，兩扇形面積之比等於其弧之比或中心角之比.

§458. **系五** 扇形面積與全圓面積之比等於其中心角與周角之比.

若扇形中心角爲k度（k°），則其面積之度數爲$\frac{k\pi r^2}{360}$.

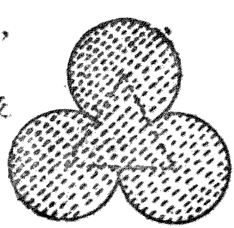
習題二十四

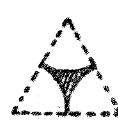


1. 以直角三角形 ABC 之三邊各爲直徑作半圓，則半圓周間所成兩個新月形面積之和等於$\triangle ABC$.

2. 正三角形每邊之長爲$2a$.以各頂點爲中心，a爲半徑 各在三角形外作弧. 求此三弧之共長及所圍之面積（左圖）.

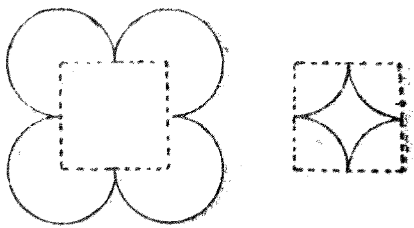
又若三弧在三角形內則如何？（右圖）



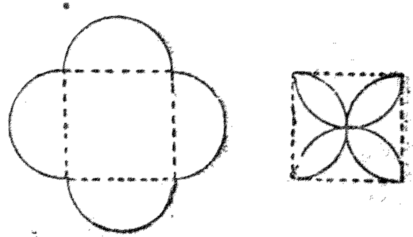


以前題正三角形各邊爲直徑各向形外作半圓．求所成曲線形之周面積（左圖）又形內時如何？（右圖）

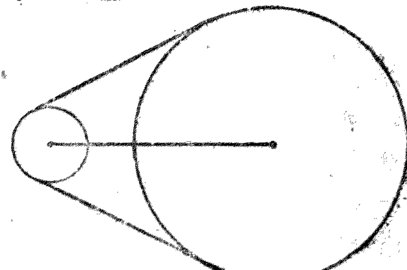
4. 正方形每邊之長爲$2a$．以各頂點爲中心，a爲半徑向形外作弧．求所成曲線形之周及面積(左圖)．又形內時如何？(右圖)



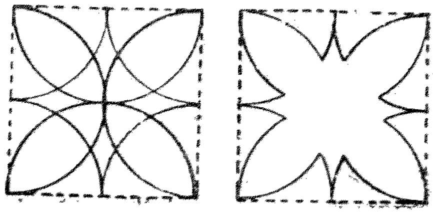
5. 以前題正方形各邊爲直徑各向形外作半圓．求所成曲線形之周及面積(左圖)．又形內時如何？(右圖)



6. 二輪中心距離14尺．其半徑各爲[illegible]尺及2尺．以皮帶聯其周而轉動．求皮帶之長及皮帶所圍平面之面積．

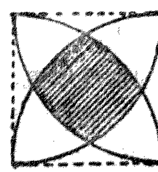


7. 右圖爲內

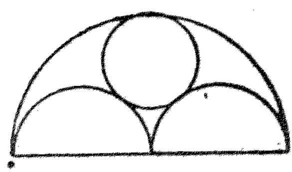


接於邊長$2a$正方形之曲線形．求其周及面積（左圖示其作法）．

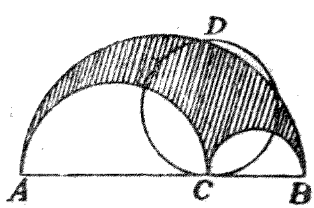
8．　正方形每邊之長為$2a$．以各頂點為中心，$2a$為半徑向形內作弧．四弧圍成中間一曲線四邊形．求其周及面積．



9．　圖中大半圓之半徑為$2a$．小半圓之半徑為a．求內接於此三半圓周之小圓之半徑．



10．　以圓內接正方形之各邊為直徑向形外各作半圓，則此四個半圓周與原圓所成之新月形面積之和等於原圓面積．



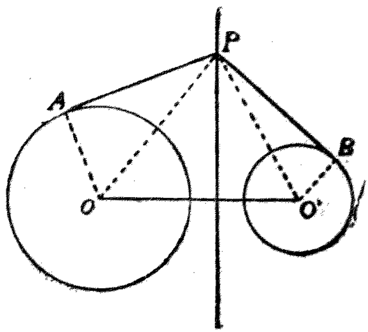
11．　C為AB上任意一點．$CD \perp AB$．以AB, AC, CB為直徑，在AB同側各作半圓周所圍成之面積等於以CD為直徑所作全圓之面積．

12．　求作一正多角形令與一所設正多角形邊數相等而面積倍之．

第六編　雜定理及雜例

第二十八章　根軸及根心

§459. **定理一四四**　一動點至二定圓所引之切線恆相等，則此動點之軌跡爲垂直於二圓中心線之一直線.



〔已設〕　二定圓⊙O，⊙O.

〔條件〕　動點P，PA切⊙O於A，PB切⊙O'於B. $PA=PB$. 求P之軌跡.

〔解析〕　聯OA，$O'B$. 則△PAO，△PBO'皆爲直角三角形. $\therefore \overline{PA}^2=\overline{PO}^2-\overline{OA}^2, \overline{PB}^2=\overline{PO'}^2-\overline{O'B}^2$. $\because PA=PB$，$\therefore \overline{PA}^2=\overline{PB}^2$，$\therefore \overline{PO}^2-\overline{OA}^2=\overline{PO'}^2-\overline{O'B}^2$.

$$\therefore \quad \overline{PO}^2-\overline{PO'}^2=\overline{OA}^2-\overline{O'B}^2.$$

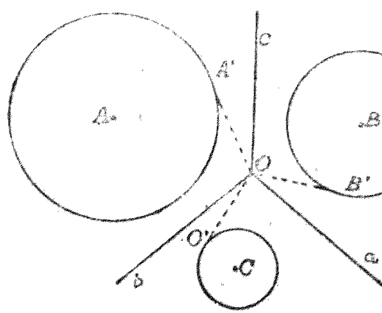
今O，O'爲定點，$\overline{OA}^2-\overline{O'B}^2$爲定面積.

$\therefore$　P之軌跡爲垂直於OO'之直線，其垂足與OO'中點之距離爲$\dfrac{\overline{OA}^2-\overline{O'B}^2}{2\,OO'}$.　　§308　　*Q.E.F.*

〔討論〕 二定圓若相離時，則P之軌跡爲完全直線；相交時則爲其公共弦之延線；相切時則爲過切點之公切線；同心圓時爲不可能.

§460. **定義八二 根軸** 一直線爲至二定圓所引切線恆相等之點之軌跡曰此二圓之根軸（radical axis）.

§461. **定理一四五** 三定圓中，每二定圓之根軸共三直線共點.



〔假設〕 $\odot A$, $\odot B$, $\odot C$ 爲三定圓. a,b,c 各爲 $\odot B$ $\odot C$；$\odot C$, $\odot A$；$\odot A$, $\odot B$ 之根軸.

〔終決〕 a,b,c 共點.

〔證〕 設 a,b 二直線交於O. 從O作三圓之切線 OA', OB', OC'. 則因O在 a 上，$\therefore OB'=OC'$.

又因O在 b 上，

$\therefore$ $OC'=OA'$. $\therefore$ $OA'=OB'$. $\therefore$ O在 c 上.

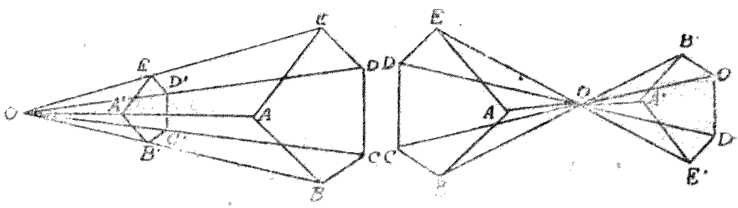
$\therefore$ a,b,c 共點. Q.E.D.

§462. **定義八三 三圓之根心** 三圓間三根軸所共之點曰三圓之根心（radical center）.

第二十九章　相似中心及相似軸

§463. **定義八四　應位相似**　二相似多角形各雙對應邊置於平行位置時曰此二形應位相似(homothetic).

§464. **定理一四六**　二應位相似多角形各雙對應頂點之聯線共點.



〔假設〕　$ABC\cdots E \backsim A'B'C'\cdots E'$，但非合同形. $AB \parallel A'B'$，$BC \parallel B'C'$，$\cdots EA \parallel E'A'$.

〔終決〕　$AA', BB', CC', \cdots, EE'$ 諸線共點.

〔證〕　設 AA', BB' 交於 O_1，BB', CC' 交於 O_2.

則因 $A'B' \parallel AB$，$\therefore \triangle O_1A'B' \backsim \triangle O_1AB$，$\therefore O_1B:O_1B' = AB:A'B'$.

又因 $B'C' \parallel BC$，$\therefore \triangle O_2B'C' \backsim \triangle O_2BC$，$\therefore O_2B:O_2B' = BC:B'C'$.

但 $ABC\cdots E \backsim A'B'C'\cdots E'$，$\therefore AB:A'B' = BC:B'C'$，

$\therefore O_1B:O_1B' = O_2B:O_2B'$. $\therefore O_1B - O_1B':O_1B' = O_2B - O_2B':O_2B'$，即 $BB':O_1B' = BB':O_2B'$，$\therefore O_1B' = O_2B'$，

$\therefore O_1$ 合於 O_2. $\therefore AA', BB', CC'$ 共點. 同理可證 BB', CC'，

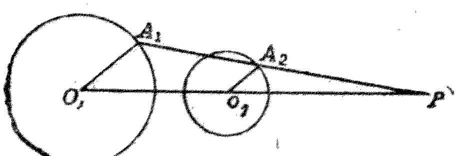
$\cdots, EE'$ 共點.

$\therefore \quad AA', BB', \cdots, EE'$ 共點. $\quad Q.E.D.$

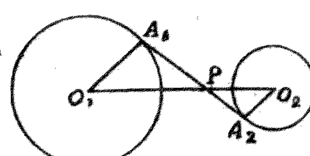
§465. **定義八五 相似中心 相似外心 相似內心** 二應位相似多角形各雙對應頂點聯線所共之點曰二形之相似中心 (homothetic centre). 若二形在相似中心之同旁, 則此相似中心曰相似外心. 若二形在兩旁則曰相似內心.

§466. **系** 相似多角形之相似中心與兩形對應頂點距離之比等於此兩形之相似比.

§467. **定理一四七** 不等二圓中, 同向平行半徑端點之聯線以二圓半徑之比外分中心線分; 反向平行半徑端點之聯線以二圓半徑之比內分中心線分.



〔假設〕 $\odot O_1, \odot O_2$ 爲不等二圓. $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, A_1A_2 交O_1O 於P.



〔終決〕 $O_1P : O_2P = O_1A_1 : O_2A_2$.

〔證〕 $\because \ O_1A_1 \parallel O_2A_2$, $\therefore$ $\triangle PO_1A_1 \backsim \triangle PO_2A_2$.

$\therefore \ O_1P : O_2P = O_1A_1 : O_2A_2$. $\quad Q.E.D.$

§468. **系一** 不等二圓中, 各雙同向平行半徑端點之聯線共點; 各雙反向平行半徑端點之聯線共點.

〔註〕 任意二圓可視爲相似形, 此所共之點爲二圓之相似中心, 同

向平行半徑端點聯線所共之點爲相似外心；反向平行半徑端點聯線所共之點爲相似內心.

§469. **系二**　不等二圓有兩個相似中心.

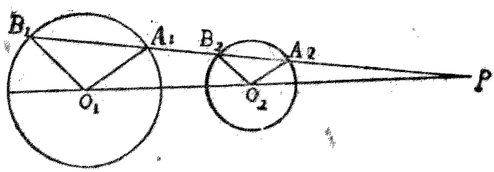
§470. **系三**　不等二圓之兩個相似中心與二圓中心爲調和點列.

§471. **系四**　二圓公切線過相似中心.

§472. **系五**　過二圓相似中心所作直線若與一圓不相會，或不相切，或不相交，則與他圓亦不相會，或不相切，或不相交.

§473. **系六**　從不等二圓之相似中心所作割線與二圓之交點爲兩雙平行半徑之端點.

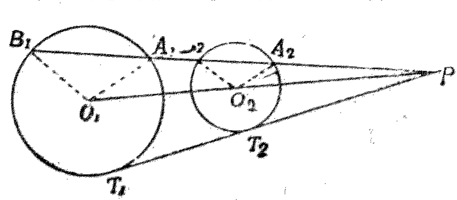
如圖P爲⊙O_1，⊙O_2之相似中心. 過P之割線交⊙O_1



於A_1B_1，交⊙O_2於A_2, B_2. 則$O_1A_1 \parallel O_2A_2$，$O_1B_1 \parallel O_2B_2$.

〔註〕　四交點中，A_1 A_2 及 B_1, B_2 曰對應點. A_1 B_2 及 B_1 A_2 曰非對應點.

§474. **定理一四八**　從二定圓相似中心作任意割線，其各雙非對應點與此相似中心距離所包矩形一定.



〔假設〕　P爲⊙O_1，⊙O_2之相似中心.

PB_1 爲過 P 之任意割線交⊙O_1 於 A_1, B_1, 交⊙O_2 於 A_2, B_2.

〔終決〕 $PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2$ 等於一定面積.

〔證〕 聯 O_1A_1, O_1B_1, O_2A_2, O_2B_2. 設 $O_1A_1 = O_1B_1 = r_1$, $O_2A_2 = O_2B_2 = r_2$. 則因 $O_1A_1 \parallel O_2A_2$,

$\therefore \quad PA_1 : PA_2 = O_1A_1 : O_2A_2 = r_1 : r_2.$

$\therefore \quad PA_1 \cdot PB_2 : PA_2 \cdot PB_2 = r_1 : r_2, \therefore AP_1 \cdot PB_2 = \dfrac{r_1}{r_2}(PA_2 \cdot PB_2).$

又因 $O_1B_1 \parallel O_2B_2$, $\therefore PB_1 : PB_2 = O_1B_1 : O_2B_2 = r_1 : r_2.$

$\therefore PB_1 \cdot PA_2 : PB_2 \cdot PA_2 = r_1 : r_2 \therefore PB_1 \cdot PA_2 = \dfrac{r_1}{r_2}(PA_2 \cdot PB_2).$

$$\therefore \quad PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2.$$

又因 $PA_2 \cdot PB_2$ 之面積一定, $r_1 : r_2$ 爲定比.

$$\therefore \quad PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2 \text{ 爲定面積.}$$

Q.E.D.

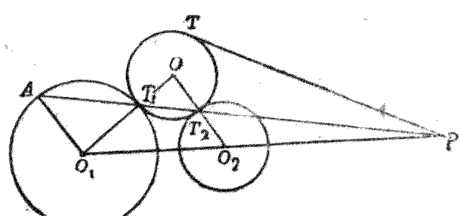
（注意） 圖中 P 爲⊙O_1, ⊙O_2 之相似外心. 若 P 爲⊙O_1, ⊙O_2 之相似內心時, 其結果完全相同.

§475. 系 PT_1T_2 爲公切線, 則

$$PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2 = PT_1 \cdot PT_2.$$

§476. 定理一四九 一動圓 O 切二定圓 O_1, O_2 於 T_1, T_2. 則直線 T_1T_2 過⊙O_1, ⊙O_2 之相似中心.

〔假設〕 ⊙O_1, ⊙O_2 爲二定圓. 一動⊙O 切⊙O_1, ⊙O_2



於T_1，T_2。T_1T_2交O_1O_2於P。

〔終決〕　P為O_1，O_2之相似中心。

〔證〕　T_1T_2交O_1於A。聯O_1A。

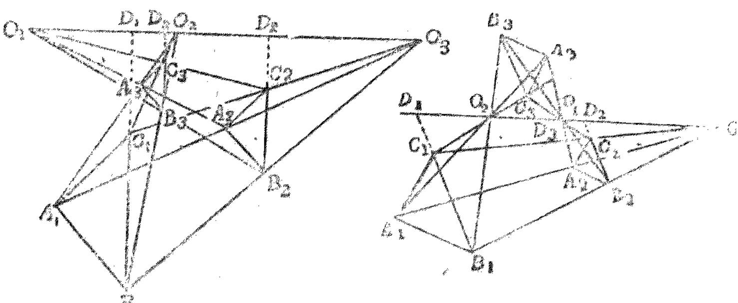
則　$\angle O_1AT_1=\angle O_1T_1A=\angle OT_1T_2=\angle OT_2T_1=\angle O_2T_2P$。

$\therefore$　$O_1A \parallel O_2T_2$。$\therefore P$為⊙O_1，⊙O_2之相似中心。

Q. E. D.

§477. 系　從P所作動圓O之切線PT為定長。

§478. 定理一五〇　三個應位相似多角形，其中每兩個之相似中心凡三點共線。



〔假設〕　$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$為應位相似形。

$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$之相似中心為O_3，

$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_3B_3C_3$之相似中心為O_2，

$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$之相似中心為O_1，

〔終決〕　O_1，O_2，O_3共線。

〔證〕　聯O_1O_2交B_1C_1於D_1，交B_2C_2於D_2，交B_3C_3於D_3。

$\because$ $B_2D_2 \parallel B_3D_3$，而B_2B_3，C_2C_3，D_2D_3共點O_1，$\therefore B_2C_2:C_2D_2=B_3C_3:C_3D_3$。又$B_1D_1 \parallel B_3D_3$，而$B_1B_3$，$C_1C_3$，$D_1D_3$共點$O_2$，

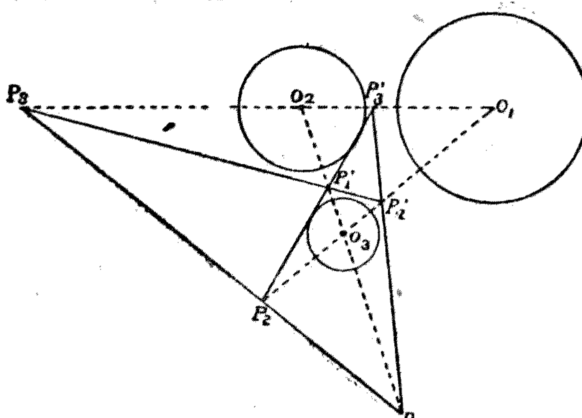
$\therefore$ $B_1C_1:C_1D_1=B_3C_3:C_3D_3$。 $\therefore B_1C_1:C_1D_1=B_2C_2:C_2D_2$。

$\because$ $B_1D_1 \parallel B_2D_2$， $\therefore B_1B_2$，C_1C_2，D_1D_2共點。即D_1D_2過B_1B_2，C_1C_2之交點O_3。

$\therefore$ O_1，O_2，O_3共線。 Q.E.D.

§479. **定義八六 相似軸** 三個應位相似形三個相似中心所共之線曰三形之相似軸（similar axis）。

§480. **系** 三個圓其中每兩個圓之相似外心凡三點共線。一組相似外心及其他兩組相似內心凡三點共線。



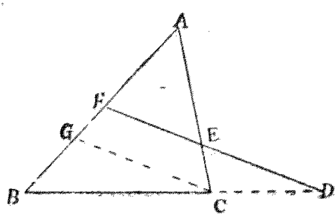
如圖P_1，P'_1各為$\odot O_2$，$\odot O_3$之相似外心及相似內心。P_2，P'_2各為$\odot O_3$，$\odot O_1$之相似外心及相似內心。P_3，P'_3各為$\odot O_1$，$\odot O_2$之相似外心及相似內心。則P_1，P_2，P_3共線。又P_1，P'_2，P'_3共線；$P_2P'_3P'_1$共線；$P_3P'_1P'_2$共線。

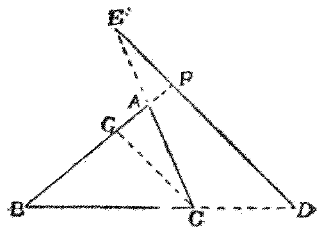
〔證法與定理同，學者自證之〕。

第三十章　Menelaus 氏定理
Ceva 氏定理調和線束極線及極點

§481. **定理一五一**　一截線交$\triangle ABC$之邊BC, AC, AB或其延線於D, E, F. 則

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1.$$





〔證〕　作$CG \parallel DF$.

則　$\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{GF}$, $\frac{AF}{GF}=\frac{AE}{CE}$.

故　$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{BF}{GF}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{GF}$

$$=\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AE}{CE}=1. \qquad Q.E.D.$$

§482. **定理一五二**　D, E, F各爲$\triangle ABC$邊BC, AC, AB上一點. 而$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$, 且其中一點在邊之延線上或三點皆在各邊之延線上, 則D, E, F共線.

〔證〕　設直線DE交AB於F',

則 $\dfrac{BD}{CD}\cdot\dfrac{CE}{AE}\cdot\dfrac{AF'}{BF'}=1$.　今 $\dfrac{BD}{CD}\cdot\dfrac{CE}{AE}\cdot\dfrac{AF}{BF}=1$,

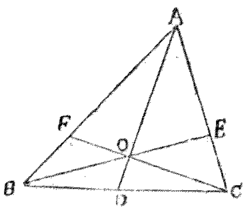
$\therefore\ AF':BF'=AF:BF$.　$\therefore\ F'$合於F.

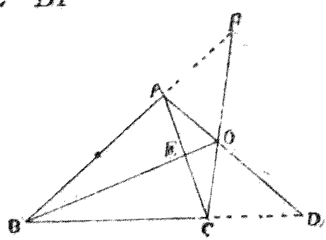
$\therefore\ D,E,F$共線.　　　　　Q.E.D.

〔註〕 定理一五一與定理一五二互爲對定理，名曰 Monolans 氏定理.

§483. **定理一五三**　過$\triangle ABC$之頂點A,B,C作共點三直線各交對邊BC,AC,AB或其延線於D,E,F,則

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1.$$





〔證〕 設AD,BE,CF所共之點爲O. 則因直線CF交$\triangle ABD$之邊AB,BD,AD於F,C,O,

$$\therefore\ \frac{AF}{BF}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DO}{AO}=1.$$

又因直線BE交$\triangle ADC$之邊AD,DC,AC於O,B,E,

$$\therefore\ \frac{AO}{DO}\cdot\frac{DB}{CB}\cdot\frac{CE}{AE}=1.$$

$$\therefore\ \frac{AF}{BF}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DO}{AO}\cdot\frac{AO}{DO}\cdot\frac{DB}{CB}\cdot\frac{CE}{AE}=1.$$

$$\therefore\ \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1.\qquad Q.E.D.$$

§484. **定理一五四**　D,E,F各爲$\triangle ABC$邊$BC,AC,$

AB上一點，而$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$，且其中二點在邊之延線上，或三點皆在邊上，則$AD,BE,CF$共點．

〔證〕 設BE,CF交於O，AO交BC於D'．

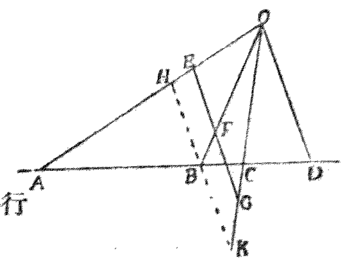
則 $\frac{BD'}{CD'}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$． 今 $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$，

$\therefore$ $BD':CD'=BD:CD$． $\therefore$ D合於D'．

$\therefore$ AD,BE,CF共點． Q.E.D.

〔註〕 定理一五三及定理一五四互爲對定理，名曰Ceva氏定理．

§485．**定理一五五** 從直線外一點聯直線上調和點列成四直線．此四直線中任意一線之平行線爲其他三直線所截成二線分相等．



〔假設〕 A,B,C,D爲調和點列．OD之平行線EG交OA,OB,OC於E,F,G．

〔終決〕 $EF=FG$．

〔證〕 過B作OD之平行線，交OA,OC於H,K．

則 $\triangle ABH\backsim\triangle ADO$， $\therefore$ $HB:OD=AB:AD$．

又 $\triangle CBK\backsim\triangle CDO$， $\therefore$ $KB:OD=CB:CD$．

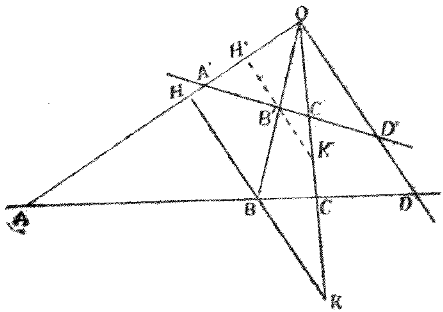
今A,B,C,D爲調和點列， $\therefore$ $AB:AD=CB:CD$．

$\therefore$ $HB:OD=KB:OD$． $\therefore$ $HB=KB$．

$\because$ $EG\parallel OD\parallel HK$． $\therefore$ $EF=FG$． Q.E.D.

§486．**定理一五六** 一截線與共點四直線相交，其交點若爲調和點列，則其他截線與此四直線相交之交點亦爲調和點列．

〔假設〕 AD交OA,OB,OC,OD於A,B,C,D.$A'D'$交OA,OB,OC,OD於A',B',C',D'. A,B,C,D爲調和點列.



〔終決〕 A',B',C',D' 亦爲調和點列.

〔證〕 過B,B'各作OD之平行線$HK,H'K'$.

因 A,B,C,D爲調和點列,故$HB=BK$, $\therefore H'B'=B'K'$.

$\because$ $\triangle A'B'H' \backsim \triangle A'D'O$, $\therefore B'H':D'O=A'B':A'D'$.

$\because$ $\triangle B'C'K' \backsim \triangle D'C'O$. $\therefore B'K':D'O=B'C':C'D'$,

$\because$ $B'H'=B'K'$, $\therefore B'H':D'O=B'K':D'O$.

$\therefore$ $A'B':A'D'=B'C':C'D'$.

$\therefore$ A',B',C',D' 爲調和點列. Q.E.D.

§487. **定義八七** **調和線束** 共點四直線以任意一直線截之所得四個交點爲調和點列時,此四直線曰調和線束(harmonical pencil).

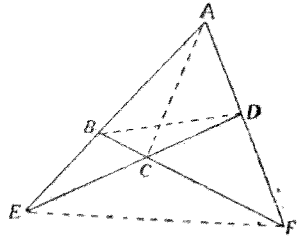
如上圖OA,OB,OC,OD爲調和線束.寫作$O(ABCD)$. OA,OC 及 OB,OD 爲兩雙調和相屬線(conjugate rays).

§488. **定義八八** **完全四邊形** 不平行四邊形四邊共交於六點曰完全四邊形(complete quadrilateral).不共線

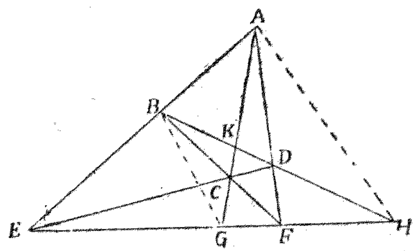
二點之聯線曰對角線。

完全四邊形有六個頂點，三個對角線如圖。

如圖 $ABCDEF$ 爲完全四邊形。AC, BD, EF 爲其三個對角線。



§ 489. **定理一五七**　完全四邊形一對角線之兩端點及此對角線與其他兩對角線之交點共四點成調和點列。



〔假設〕　$ABCDEF$ 爲完全四邊形，其對角線 AC, BD, EF 互交於 G, H, K。

〔終決〕　E, G, F, H；B, K, D, H；A, K, C, G 皆爲調和點列。

〔證〕　BH 截 $\triangle AEF$ 之三邊 AE, AF, EF 於 B, D, H。

$\therefore \quad \dfrac{EB}{AB}\cdot\dfrac{AD}{FD}\cdot\dfrac{FH}{EH}=1$。又 FC, EC, AC 各交 $\triangle AEF$ 之三邊 AE, AF, EF 於 B, D, G。$\therefore \quad \dfrac{EB}{AB}\cdot\dfrac{AD}{FD}\cdot\dfrac{FG}{EG}=1$。

$\therefore \quad \dfrac{EB}{AB}\cdot\dfrac{AD}{FD}\cdot\dfrac{FH}{EH}=\dfrac{EB}{AB}\cdot\dfrac{AD}{FD}\cdot\dfrac{FG}{EG}$.　$\therefore FH:EH=FG:EG$。

$\therefore \quad E, G, F, H$ 爲調和點列。

聯 AH，則因 E, G, F, H 爲調和點列。

故 $A(EGFH)$ 為調和線束。

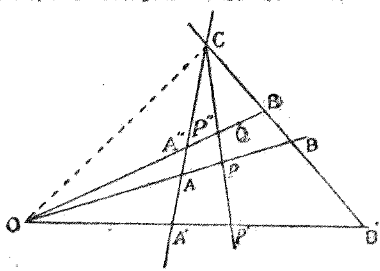
故 B, K, D, H 為調和點列。

聯 BG, 則因 E, G, F, H 為調和點列。

$\therefore$ $B(EGFH)$ 為調和線束。

$\therefore$ A, K, C, G 為調和點列。 Q.E.D.

§490. 定理一五八 一動點與一定點所聯線分為相交二定直線分於調和，則此動點之軌跡為過二定直線交點之一直線.



〔已設〕 一定點O, 二定直線AC,BC交於C。

〔條件〕 動點P,OP為CA, CB分於調和。

〔軌跡〕 P之軌跡為過C之一直線.

〔證〕 OP為A,B分於調和， 即O,A,P,B為調和點列。故C $(OAPB)$ 為調和線束。

（1） 設P'為CP上任意一點. 聯OP交CA,CB於A', B'. 則O, A',P', B' 為調和點列.

故 CP上任何點適合於所設條件。

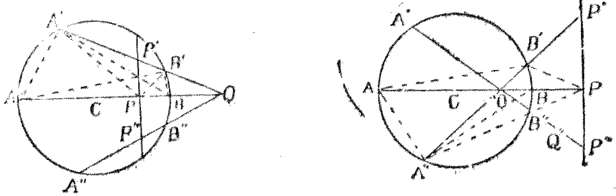
（2） 設Q為CP外之任意一點. 聯OQ交CA,CP,CB於A'', P'',B'', 則O,$A''$$P''$,$B''$ 為調和點列. 故O, A'', Q, B'' 非調和點列，即OQ不為A'', B'' 分於調和。

故CP外任何點不適合於所設條件。

$\therefore$ CP為P之軌跡. Q.E.D.

〔註〕 CP 曰 O 點關於 CA CB 之極線 (polar)；O曰CP關於 CA, CB之極點 (pole)。

§491. **定理一五九** 一動點與一定點所聯線分爲一定圓圓周分於調和，則此動點之軌跡爲垂直於定點與定圓中心聯線之一直線。



〔已設〕 一定點O，一定圓 ⊙C。

〔條件〕 動點P，OP爲⊙C圓周分於調和。

〔軌跡〕 P之軌跡爲垂直於OC之一直線。

〔證〕 聯直線OC交圓周於 A, B，取P點令 A, P, B, O 爲調和點列。作 $PP' \perp OC$。

（1） 設P'爲PP'上任意一點。聯OP'交圓周於A'，B'。聯$A'A, A'P, A'B, B'A, B'P, B'B$。則因$A, P, B, O$爲調和點列。

故若$BP:BO=m:n$，

則$AP:AO=BP:BO=m:n$，因AB爲⊙C之直徑，故⊙C上任意點與P, O距離之比等於$m:n$。 §349

$\therefore A'P:A'O=B'P:B'O=m:n$。 $\therefore A'P:B'P=A'O:B'O$，

$\therefore$ PO爲$\angle A'PB'$之外角等分線。 §348

又因$PP' \perp PO$， $\therefore PP'$爲$\angle A'PB'$之內等分線。

故O, P'分$A'B'$於調和。 §347

故 PP' 上任何點適合於所設條件。

（2） 設Q爲PP'外任意一點。聯OQ交圓周於A'', B''

交PP'於P''，則A'',P'',B'',O爲調和點列，故A'',Q,B'',O非調和點列。

故PP'外任何點不適合於所設條件。

故PP'爲P之軌跡。 Q.E.D.

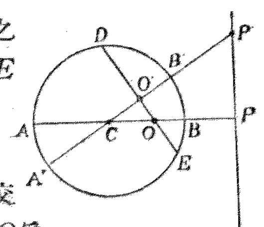
〔註〕 PP'曰O點關於⊙C之極線（polar）；O曰PP'關於⊙C之極點（pole）。

§492. **系一** 若O在⊙C之外則其極線過從O所作⊙C切線之切點。

§493. **系二** 弦關於圓之極點爲過其兩端所作切線之交點。

§494. **系三** 直徑關於圓無極點。

§495. **定理一六〇** 一直線上諸點關於一圓之極線恆過此直線關於此圓之極點。



〔假設〕 O爲PP'關於⊙C之極點。P'爲PP'上任意一點。DE爲P'關於⊙C之極線。

〔終決〕 DE過O點。

〔證〕 CP'交⊙C於A',B'交DE於O'，COP交⊙C於A,B。∵ O爲PP'之極點，∴ A,O,B,P爲調和點列。

∴ $OA:OB=PA:PB$。

∴ $OA+OB:OA-OB=PA+PB:PA-PB$。

即 $AC+CO+OB:AC+CO-OB=AC+CP+PB:AC+CP-PB$。∵ $AC=CB$，∴ $2CB:2CO=2CP:2CB$。

$$\therefore \quad CB : CO = CP : CB.$$

$$\therefore \quad CO \cdot CP = \overline{CB}^2$$

因$DO'E$為P'之極線，$\therefore A', O', B', P'$ 為調和點列.

故同樣可證　　　$CO' \cdot CP' = \overline{CB'}^2.$

但$CB = CB'$，$\therefore \; CO \cdot CP = CO' \cdot CP'.$

$\therefore \; O, P, P', O'$ 共圓.

$\because \quad \angle CO'O = \angle CPP' = R\angle.$

$\therefore \quad O'O$與DE相重合，即DE過O點.　　　$Q.E.D.$

§496. 系一　過一定點之諸直線關於一圓之極點恆在此定點關於此圓之極線上.

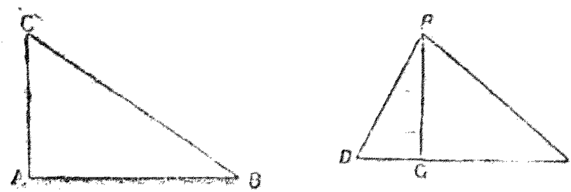
§497. 系二　從定圓外直線上任意一點作兩切線，其切點所聯之弦必過此直線之極點.

§498. 系三　過圓內一點之任意弦，其兩端所引切線之交點必在此點之極線上.

第三十一章　極大極小

§499. **定義八九　極大極小**　適合於所設條件之各圖形中，其量最大者曰極大（maximum），最小者曰極小（minimum）.

§500. **定理一六一**　三角形二邊之長一定，則此二邊爲直角邊之直角三角形爲極大.



〔假設〕　$\triangle ABC$，$\triangle DEF$中，$AB=DE$，$AC=DF$，$\angle A=R\angle$. $\angle D\neq R\angle$.

〔總決〕　$\triangle ABC>\triangle DEF$.

〔證〕　作$FG\perp DE$，則$FG<FD$.

$$\triangle DEF=\frac{1}{2}FG\cdot DE<\frac{1}{2}DF\cdot DE,$$

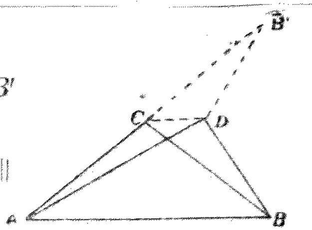
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}DE\cdot DF.$$

$\therefore\quad \triangle ABC>\triangle DEF.$　　　Q.E.D.

§501. **定理一六二**　共底等積三角形以二等邊三角形之周爲極小.

〔假設〕　$\triangle ABC=\triangle ABD$，$AB$爲共底，$AC=BC$，$AD\neq BD$.

〔總決〕　$AB+BC+AC<$



$AB+BD+AD$.

〔證〕 延長AC至B'令$CB'=AC=CB$. 聯CD, DB'.

因 $\triangle ABC=\triangle ABD$, $\therefore CD \parallel AB$.

$\therefore \quad \angle B'CD=\angle CAB=\angle CBA=\angle BCD$.

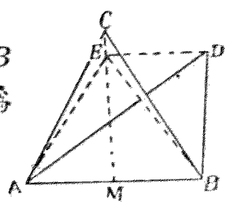
$\therefore \quad \triangle B'CD \cong \triangle BCD$. $\therefore B'D=BD$.

$\therefore \quad AD+DB=AD+DB'>AB'$. 然 $AB'=AC+CB'=AC+CB$,

$\therefore \quad AC+BC<AD+BD$.

$\therefore \quad AB+BC+AC<AB+BD+DA$. Q.E.D.

§502. **定理一六三** 共底等周三角形，以二等邊三角形之面積爲極大.



〔假設〕 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$中$AB+BC+AC=AB+BD+AD$, AB爲共底，$AC=BC$; $AD \neq BD$.

〔終決〕 $\triangle ABC>\triangle ABD$

〔證〕 作$CM \perp AB$. 作$DE \parallel AB$, 交CM於E. 聯AE, BE.

則 $\triangle ABD=\triangle ABE$. $\because CA=CB$, $\therefore EA=EB$.

$\therefore \quad AB+BE+AE<AB+BD+AD=AB+BC+AC$.

$\therefore \quad BE+AE<BC+AC \quad \therefore AE<AC$.

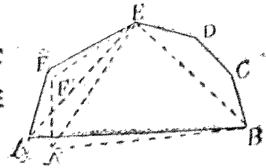
$\therefore \quad EM<CM$. $\because \triangle ABC=\frac{1}{2}AB \cdot CM$, $\triangle ABD=\frac{1}{2}AB \cdot EM$.

$\therefore \quad \triangle ABC>\triangle ABD$. Q.E.D.

§503. **系一**　等周三角形中，等邊三角形面積爲極大.

§504. **系二**　等積三角形中，等邊三角形之周爲極小.

§505. **定理一六四**　多角形除一邊外其餘各邊皆等於定長，則其面積爲極大者，必爲圓內接形而以不定長一邊爲直徑.



〔假設〕　$ABCDEF$ 爲 BC, CD, DE, EF, FA 各等於定長之各形中之最大者.

〔終決〕　$ABCDEF$ 內接於以 AB 爲直徑之圓.

〔證〕　從任意一頂點 E 聯 EA, EB. 則 $ABCDEF=\triangle EFA+BCDE+\triangle ABE$. 若 $\angle AEB\neq R\angle$. 則可固定 E 點旋轉 $\triangle EFA$ 至 $EF'A'$ 之位置而令 $\angle A'EB=R\angle$. 則成 $A'BCDEF'=\triangle EF'A'+BCDE+\triangle A'BE$. $\because$ $\triangle EF'A'\cong\triangle EFA$, $\triangle EA'B>\triangle EAB$.

$$\therefore\quad A'BCDEF'>ABCDEF.$$

然 $A'BCDEF'$ 中除 $A'B$ 外其他各邊仍皆各等於定長.

$\therefore$　$ABCDEF$ 之面積非極大與假設矛盾.

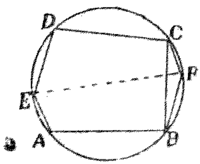
$\therefore$　$\angle AEB=R\angle$. $\therefore$ E 在 AB 爲直徑之圓周上. 因 E 爲任意一頂點，故諸頂點皆在此圓周上.

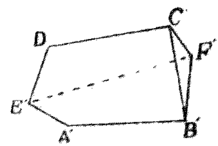
$\therefore$　$ABCDEF$ 內接於以 AB 爲直徑之圓. $Q.E.D.$

§506. **定理一六五**　多角形各邊之長皆一定，則內接於圓者面積爲極大.

〔假設〕　$ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$ 中，各雙邊皆依次相等，$ABCDE$ 內接於圓，$A'B'C'D'E'$ 不內接於圓.

〔終決〕　$ABCDE>A'B'C'D'E'$.



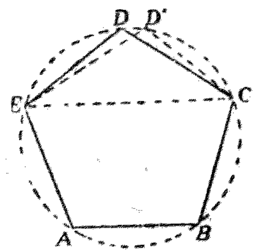


〔證〕　作直徑EF．聯BF，CF．作$\triangle B'C'F' \cong \triangle BCF$．聯$E'F'$．則$ABFE > A'B'F'E'$，$EFCD > E'F'C'D'$．

$\therefore$　$ABFCDE > A'B'F'C'D'E'$．但$\triangle BCF \cong \triangle B'C'F'$．

$\therefore$　$ABCDE > A'B'C'D'E'$．　　　　　Q.E.D.

§507．**定理一六六**　周為定長之多角形，其面積極大者為正多角形．



〔假設〕　多角形$ABCDE$周長一定，面積極大．

〔終決〕　$ABCDE$為正多角形．

〔證〕　引任意相鄰二邊DE，DC之兩端點成$\triangle DEC$，則$ABCDE = ABCE + \triangle DEC$．

若　$DE \neq DC$，則在EC同側可作一$\triangle D'EC$令$D'E = D'C = \frac{1}{2}(DE + DC)$，而$\triangle D'EC > \triangle DEC$．則得周長不變之多角形．

$$ABCD'E = ABCE + \triangle D'EC > ABCE + \triangle DEC.$$

$\therefore$　$ABCDE$面積非極大與假設矛盾．

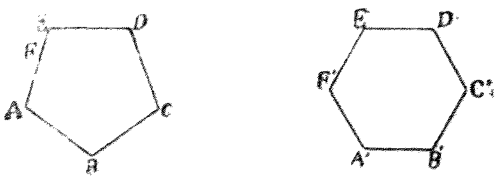
$\therefore$　$DE = DC$．因DE，DC為任意相鄰二邊，故凡相

鄰二邊皆相等，即 $AB=BC=CD=DE=EA$.

又 $ABCDE$ 面積極大，故為圓內接多角形.

$\therefore$ $ABCDE$ 為正多角形. Q.E.D.

§508. **定理一六七** 二正多角形周之長相等，邊數不等，則邊數多者面積大.



〔假設〕 $ABCDE$為正五角形，$A'B'C'D'E'F'$為正六角形. $AB+BC+CD+DE+EA=A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'F'+F'A'$.

〔終決〕 $A'B'C'D'E'F'>ABCDE$.

〔證〕 在AE任作一點F，則$ABCDEF$可視為一六角形而非正六角形.

$\therefore$ $A'B'C'D'E'F'>ABCDEF$.

即 $A'B'C'D'E'F'>ABCDE$. Q.E.D.

§509. **系一** 圓面積大於與圓周等長之周之一切多角形.

§510. **系二** 周等於定長之各形，圓之面積為極大.

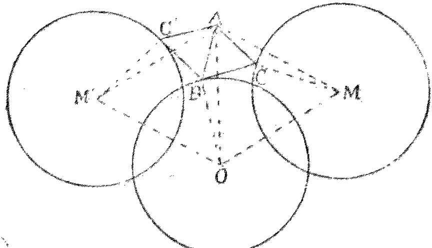
§511. **系三** 二正多角形面積相等，邊數不等，則邊數多者周小.

§512. **系四** 面積相等之各形中，圓之周為極小.

第三十二章　雜　　例

§513. **軌跡解法雜例**　軌跡證法已見第二編，凡軌跡之較爲複雜者，常重解析，茲再舉數例如下：

（例一）　⊙O 爲定圓，A 爲定點．B 爲⊙O 圓周上任意一點．$\triangle ABC$爲正三角形．求C之軌跡．



〔解析〕　聯 AO 作正三角形AOM.聯BO, CM。

則因$AB=AC, AO=AM$，$\angle BAO=\angle CAM=(60°-\angle OAC)$。

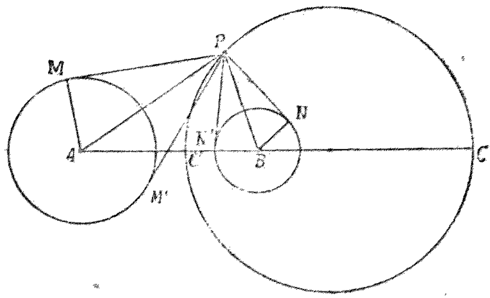
$\therefore\quad \triangle ACM\cong\triangle ABO$。

$\therefore\quad MC=OB$。因A, O皆爲定點，故M亦爲定點．OB爲定圓半徑，故MC爲定長．

故 C 之軌跡爲以 AO 爲一邊所作正三角形 AOM，AOM' 之頂點 M, M' 爲中心，以 ⊙O 半徑爲半徑所作之二圓周。　　　　$Q.E.F.$

（例二）　⊙A, ⊙B爲二定圓．P 爲動點．從P 至⊙A 作二切線PM'，PM'，至 ⊙B作二切線PN, PN'．$\angle MPM'=\angle NPN'$。求P之軌跡．

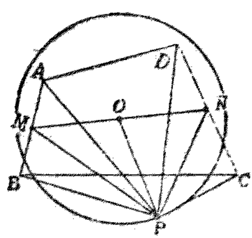
〔解析〕　聯 PA, PB, AM, BN。則因 $\angle MPM'=\angle NPN'$，



$\therefore\quad \angle MPA=\angle NPB$, 又 $\angle AMP=\angle BNP=R\angle$,

$\therefore\quad \triangle PAM \backsim \triangle PBN$. $\therefore\ PA:PB=AM:BN$ 即兩圓半徑之比. 故P之軌跡爲以$\odot A$, $\odot B$之相似内心及外心所聯線分CC'爲直徑所作之圓周. Q.E.F.

(例三) 從動點P至四角形$ABCD$各頂點距離上正方形之和一定. 求P之軌跡.



〔解析〕 AB上取中點M, CD上取中點N, MN上取中點O. 聯PM, PN, PO.

則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PM}^2+2\overline{AM}^2$,

$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2\overline{PN}^2+2\overline{CN}^2$,

$\therefore\quad \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{PN}^2)+2(\overline{AM}^2+\overline{CN}^2)$.

又因 $\overline{PM}^2+\overline{PN}^2=2\overline{PO}^2+2\overline{MO}^2$.

$\therefore\quad \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=4\overline{PO}^2+4\overline{MO}^2+2\overline{AM}^2+2\overline{CN}^2$.

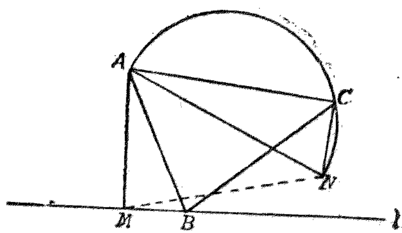
$\therefore\quad 4\overline{PO}^2=(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)-(4\overline{MO}^2+2\overline{AM}^2+2\overline{CN}^2)$.

因　$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$爲一定,又$MO,AM,CN$皆一定,

$\therefore$　$4\overline{PO}^2$爲定量，故OP之長一定，但O之位置一定．故P之軌跡爲以O爲中心，定長OP爲半徑所作之圓周.

Q.E.F.

（例四）　$\triangle ABC$之面積一定，頂點A之位置一定，頂角A之大小一定，B在定直線l上移動．求C之軌跡.



〔解析〕　作$AM\perp l$.

作　$\triangle MAN$令合於條件.

則因　$\angle MAN=\angle BAC$,

$\therefore$　$\angle MAB=\angle NAC$．又因　$\triangle MAN=\triangle ABC$,

$\therefore$　$AM\cdot AN=AB\cdot AC$．$\therefore$　$AM:AC=AB:AN$.

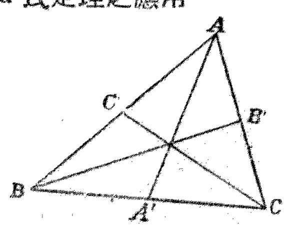
$\therefore$　$\triangle ABM\backsim\triangle ANC$．$\therefore$　$\angle ACN=\angle AMB=R\angle$.

今$\triangle AMN$爲定三角形,故AN爲定線分,$\angle ACN$爲直角.

故C之軌跡爲以AN爲直徑所作之圓周.　　Q.E.F.

§514. Menelaus 氏定理 Ceva 氏定理之應用

（例五）　三角形之三中線共點.



A',B',C'各爲$\triangle ABC$邊BC,AC,AB之中點.

求證 AA',BB',CC'共點.

〔證〕　因$BA'=CA',AB'=$

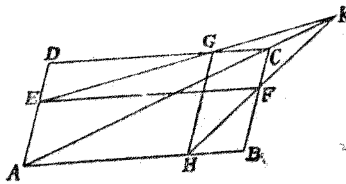
CB', $AC'=BC'$,

$\therefore\quad \dfrac{BA'}{CA'}\cdot\dfrac{CB'}{AB'}\cdot\dfrac{AC'}{BC'}=1\times1\times1=1$.

$\therefore\quad AA', BB', CC'$ 共點.　　　　Q.E.D.

〔註〕 本題爲重心定理，第一編中已證過。但若應用 Ceva 氏定理證之如上，則便易多多矣。其他關於共點共線諸題，亦常可應用此定理或 Menelaus 氏定理證之。

(例六) 平行四邊形 $ABCD$ 中，EF, GH 爲各邊之任意平行線.



求證 EG, AC, HF 共點.

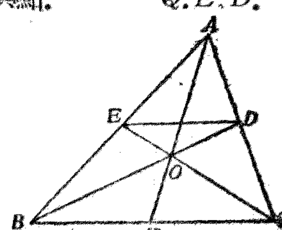
〔證〕 設 EG, AC 交於 K. 則因直線 EGK 交 $\triangle ACD$ 之各邊 AD, DC, AC 於 E, G, K.

$\therefore\quad \dfrac{AE}{DE}\cdot\dfrac{DG}{CG}\cdot\dfrac{CK}{AK}=1$. 但 $AE=BF$, $DE=CF$, $DG=AH$, $CG=BH$, $\therefore\ \dfrac{BF}{CF}\cdot\dfrac{AH}{BH}\cdot\dfrac{CK}{AK}=1$. $\therefore H,F,K$ 共線.

故 HF 過 K. 即 EG, AC, HF 共點.　　　　Q.E.D.

(例七) O 爲 $\triangle ABC$ 中線 AM 上任意一點. BO, CO 之延線各交 AC, AB 於 D, E.

求證 $ED \parallel BC$.



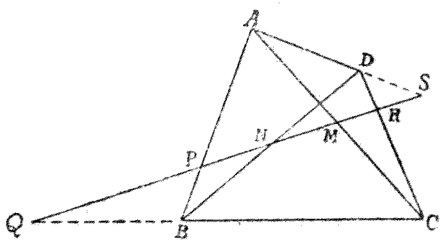
〔證〕 因 AM, BD, CE 共點

$\therefore\quad \dfrac{BM}{CM}\cdot\dfrac{CD}{AD}\cdot\dfrac{AE}{BE}=1$. 因 $BM=MC$.

$$\therefore \frac{CD}{AD}\cdot\frac{AE}{BE}=1,\quad \therefore \frac{CD}{AD}=\frac{BE}{AE},\quad \therefore ED \parallel BC.$$

Q.E.D.

（例八） M, N 爲四角形$ABCD$對角線AC, BD之中點. 直線MN交AB, BC, CD, AD於P, Q, R, S.



求證 (1) $\frac{AP}{BP}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{CR}{DR}=\frac{AS}{DS}$ (2) $\frac{PM}{QM}=\frac{RM}{SM}=\frac{PN}{SN}=\frac{RN}{QN}$.

〔證〕 (1) QS交$\triangle ABC$邊AB, BC, AC於P, Q, M.

$$\therefore \frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CM}{AM}=1.\quad \because AM=CM,\quad \therefore \frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{CQ}=1.$$

$\therefore \frac{AP}{BP}=\frac{CQ}{BQ}$. 又$QS$交$\triangle BCD$邊$BC$, CD, BD於Q, R, N.

$$\therefore \frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CR}{DR}\cdot\frac{DN}{BN}=1.\quad \because BN=DN,\quad \therefore \frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CR}{DR}=1,$$

$\therefore \frac{CQ}{BQ}=\frac{CR}{DR}$. 同樣在$\triangle ACD$中可證$\frac{CR}{DR}=\frac{AS}{DS}$.

$$\therefore \frac{AP}{BP}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{CR}{DR}=\frac{AS}{DS}.$$

(2) AC交$\triangle PQB$邊PQ, QB, PB於M, C, A.

$\therefore \frac{PM}{QM}\cdot\frac{QC}{BC}\cdot\frac{BA}{PA}=1$. 又$AC$交$\triangle RSD$邊$RS$, SD, RD於M, A, C. $\quad\therefore \frac{RM}{SM}\cdot\frac{SA}{DA}\cdot\frac{DC}{RC}=1.$

$$\therefore \frac{PM}{QM}\cdot\frac{QC}{BC}\cdot\frac{BA}{PA}=\frac{RM}{SM}\cdot\frac{SA}{DA}\cdot\frac{DC}{RC}.$$

$\because \frac{CQ}{BQ}=\frac{AS}{DS}$, $\therefore \frac{CQ}{CQ-BQ}=\frac{AS}{AS-DS}$, 即$\frac{QC}{BC}=\frac{SA}{DA}$.

$\because \frac{AP}{BP}=\frac{CR}{DR}$, $\therefore \frac{AP}{AP+BP}=\frac{CR}{CR+DR}$, 即$\frac{PA}{BA}=\frac{RC}{DC}$.

$$\therefore \frac{PM}{QM}=\frac{RM}{SM}.$$

又BD交$\triangle PSA$邊PS, SA, PA於N, D, B.

$$\therefore \frac{PN}{SN}\cdot\frac{SD}{AD}\cdot\frac{AB}{PB}=1.$$

$$\therefore \frac{RM}{SM}\cdot\frac{SA}{DA}\cdot\frac{DC}{RC}=\frac{PN}{SN}\cdot\frac{SD}{AD}\cdot\frac{AB}{PB}.$$

$$\because \frac{SA}{DA}\cdot\frac{DC}{RC}\cdot\frac{AD}{SD}\cdot\frac{PB}{AB}=\frac{SA}{SD}\cdot\frac{DC}{RC}\cdot\frac{PB}{AB}=\frac{PA}{PB}\cdot\frac{DC}{RC}$$

$$\cdot\frac{PB}{AB}=\frac{PA}{AB}\cdot\frac{DC}{RC}=\frac{RC}{DC}\cdot\frac{DC}{RC}=1.$$

$\therefore \frac{SA}{DA}\cdot\frac{DC}{RC}=\frac{SD}{AD}\cdot\frac{AB}{PB}$. $\therefore \frac{RM}{SM}=\frac{PN}{SN}$.

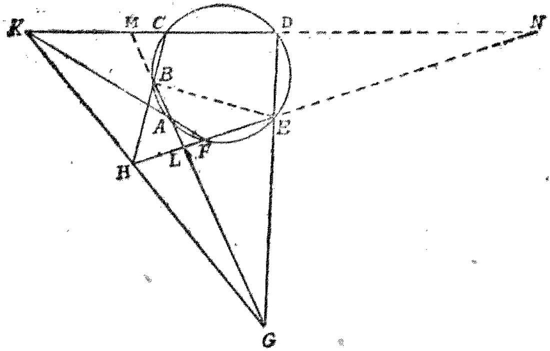
同樣可證 $\frac{PN}{SN}=\frac{RN}{QN}$. $\therefore \frac{PM}{QM}=\frac{RM}{SM}=\frac{PN}{SN}=\frac{RN}{QN}$

Q.E.D.

(例九) 圓內接六角形三雙對邊之交點為共線點.

(證) 圓內接六角形$ABCDEF$邊AB, DE交於G; BC, EF交於H; CD, FA交於K. 延長AB, CD, EF互交於L, M, N成$\triangle LMN$. BC截其各邊LM, MN, NL於B, C, H.

$$\therefore \frac{LB}{MB}\cdot\frac{MC}{NC}\cdot\frac{NH}{LH}=1. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



又DE截其各邊LM, MN, NL於G, D, E,

$$\therefore \quad \frac{LG}{MG}\cdot\frac{MD}{ND}\cdot\frac{NE}{LE}=1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又AF截其各邊LM, MN, NL於A, K, F,

$$\therefore \quad \frac{LA}{MA}\cdot\frac{MK}{NK}\cdot\frac{NF}{LF}=1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

聯BE, 則$LA\cdot LB=LF\cdot LE$,

$$\therefore \quad \frac{LF}{LA}\cdot\frac{LE}{LB}=1. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同理　$$\frac{MA}{MD}\cdot\frac{MB}{MC}=1. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\frac{NC}{NF}\cdot\frac{ND}{NE}=1. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

從(1), (2), (3), (4), (5), (6)作相乘比, 得

$$\frac{NH}{LH}\cdot\frac{LG}{MG}\cdot\frac{MK}{NK}=1.$$

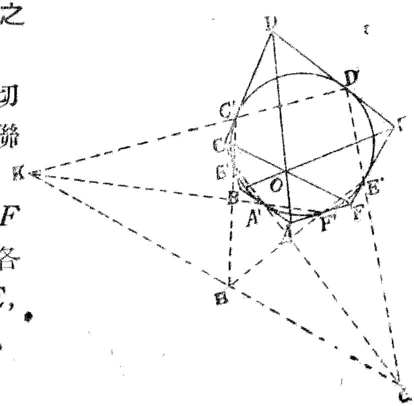
今H, G, K各在$\triangle LMN$邊LN, LM, MN之延線上.

$\therefore$ H, G, K共線.　　Q. E. D.

〔註〕本例名曰 Pascal 氏定理.

§515. 極線極點之應用

（例一〇） 圓外切六角形各雙對頂點之聯線爲共點線.



〔證〕 $ABCDEF$ 爲圓外切六角形，其各邊AB, BC, CD, DE, EF, FA, 切圓於A', B', C', D', E', F'.

$A'B'$, $D'E'$交於G, $B'C'$, $E'F'$交於H, $C'D'$, $F'A'$交於K.

A爲$A'F'$之極點，D爲$C'D'$之極點，

故 AD之極點爲$A'F'$, $C'D'$之交點K.

同理BE之極點爲$A'B'$, $D'E'$之交點G,

CF之極點爲$B'C'$, $E'F'$之交點H.

故 KG之極點爲AD, BE之交點O,

GH之極點爲BE, CF之交點O'.

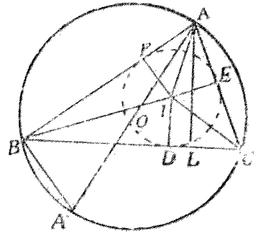
然從上例知KG. GH爲一直線，故O'合於O.

$\therefore$ AD, BE, CF共點. Q.E.D.

〔註〕 本例名曰 Brianchon 氏定理.

§516. 關於三角形之計算題

（例一一） $Rr=\dfrac{abc}{4s}$〔a, b, c爲$\triangle ABC$三邊之度數，R, r爲其外接圓及內切圓半徑，$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$〕.



〔證〕 O為$\triangle ABC$之外心. I為$\triangle ABC$之內心. $AOA'=2R$. $ID=IE=IF=r$. 作$AL\perp BC$則因$\angle ABA'=R\angle=\angle ALC$, 又$\angle AA'B=\angle C$.

$\therefore\quad \triangle A'AB\backsim\triangle ACL$.

$\therefore\quad AA':AB=AC:AL$. $\therefore\quad AB\cdot AC=2R\cdot AL$.

$$\therefore\quad R=\frac{bc}{2AL}=\frac{bc\cdot BC}{2AL\cdot BC}=\frac{abc}{4\triangle ABC}.$$

又因$\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle IAC+\triangle IAB$

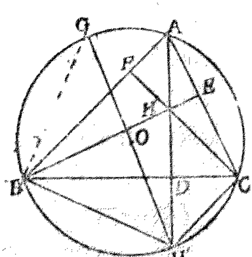
$$=\frac{1}{2}ID\cdot BC+\frac{1}{2}IE\cdot AC+\frac{1}{2}IF\cdot AB$$

$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs.$$

$$\therefore\quad r=\frac{\triangle ABC}{s}.$$

$$\therefore\quad Rr=\frac{abc}{4\triangle ABC}\cdot\frac{\triangle ABC}{s}=\frac{abc}{4s}.\qquad Q.E.D.$$

(例一二) H為$\triangle ABC$之垂心, AH, BH, CH之度數各為x, y, z. 則$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=\dfrac{abc}{xyz}$.



〔證〕 H為$\triangle ABC$之垂心, O為其外心. 延長AHD交⊙ABC於H'. 作直徑$H'OG$. 聯BH', CH'. 則$BH'=BH=y$, $CH'=CH=z$, $H'D=HD$. $\because\ \triangle BH'G\backsim\triangle DH'C$

$\therefore\quad BH'\cdot CH'=H'G\cdot H'D$.

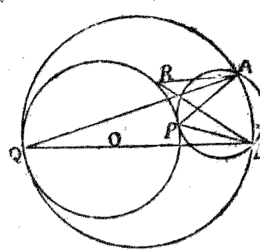
$\therefore\quad yz=2R\cdot HD$. 同理$xz=2R\cdot HE$，$xy=2R\cdot HF$.

$$\therefore\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}$$
$$=\frac{2R(a\cdot HD+b\cdot HE+c\cdot HF)}{xyz}$$
$$=\frac{2R(BC\cdot HD+AC\cdot HE+AB\cdot HF)}{xyz}$$
$$=\frac{2R(2\triangle HBC+2\triangle HAC+2\triangle HAB)}{xyz}$$
$$=\frac{2R\cdot 2\triangle ABC}{xyz}$$

然從例一一已證得$R=\dfrac{abc}{4\triangle ABC}$.

$$\therefore\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}.$$ Q.E.D.

§517. 極大極小例題

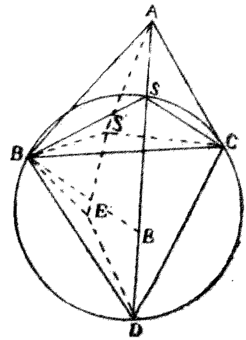


（例一三）　A,B為定圓O外二定點. ⊙ABP與⊙O外切於P. ⊙ABQ與⊙O內切於Q. 則⊙O周上一切點為A,B所張之角，其中以$\angle APB$為最大，$\angle AQB$為最小.

〔證〕　設R為⊙O周上任意一點. 則因⊙ABP與⊙O外切，故R在⊙ABP外，$\therefore\ \angle ARB<\angle APB$. 又因⊙$ABQ$與⊙$O$內切，故$R$在⊙$ABQ$內，$\therefore\ \angle ARB>\angle AQB$.

$\therefore\quad \angle APB$為最大，$\angle AQB$為最小. Q.E.D.

（例一四）　$\triangle ABC$內一點S，當$\angle BSC=\angle CSA=\angle ASB=120°$時，$SA+SB+SC$為極小.



〔證〕 AS延線交⊙BCS於D. 聯BD, CD. $\because$ $\angle BSC=120^\circ$, $\therefore$ $\angle BDC=60^\circ$. 又$\angle DBC=\angle DSC$
$=180^\circ-\angle ASC$

$$=180^\circ-120^\circ=60^\circ.$$

$\therefore$ $\triangle BCD$為正三角形. 作BE令$\angle DBE=\angle CBS$交AD於E. 則$\angle SBE=\angle CBD=60^\circ$. 又$\angle BSD=\angle BCD=60^\circ$, $\therefore$ $\triangle BES$為正三角形, $\therefore$ $BS=SE$. 又$BE=BS$, $BD=BC$, $\therefore$ $\triangle BCS\cong\triangle BDE$.

$\therefore SC=ED$. $\therefore SA+SB+SC=AS+SE+ED=AD$.

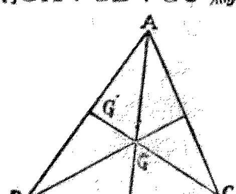
在$\triangle ABC$中任意取其他一點S'. 聯$S'A, S'B, S'C$. 作BE'令$\angle DBE'=\angle CBS'$, $BE'=BS'$. 聯$S'E', E'D$. 則$\angle E'BS'=\angle DBC=60^\circ$, $\therefore\triangle BE'S'$為正三角形. $\therefore S'B=S'E'$. 又$\triangle BCS'\cong\triangle BDE'$, $\therefore S'C=E'D$.

$\therefore$ $S'A+S'B+S'C=S'A+S'E'+E'D>AD$.

$$\therefore \quad SA+SB+SC<S'A+S'B+S'C.$$

$$\therefore \quad SA+SB+SC\text{為極小.} \qquad Q.E.D.$$

（例一五） G為$\triangle ABC$之重心，則$\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$為極小.



〔證〕 設G'為其他任意一點. 則

$$\overline{G'A}^2+\overline{G'B}^2+\overline{G'C}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{GG'}^2$$

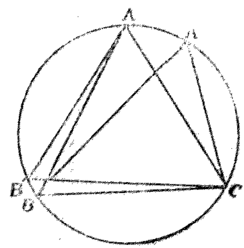
(按此爲面積例題之一，學者試自證之).

故 $\overline{G'A}^2+\overline{G'B}^2+\overline{G'C}^2>\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$

$\therefore$ $\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$ 爲極小. $Q.E.D.$

(例一六) 定圓內接三角形中以正三角形面積爲極大.

〔證〕 設$\triangle ABC$爲任意三角形. $AB \neq AC$. 在優$\frown BC$上取中點A'. 聯$A'B, A'C$. 則$\triangle ABC<\triangle A'BC$ (因BC爲共底，而 $\triangle A'BC$之高大). 設$A'B \neq BC$, 則再在優$\frown A'C$上取中點B'. 聯$A'B', CB'$. 則同上 $\triangle A'BC<\triangle A'B'C$.



故若三角形之有二邊不等者決非最大形.

故最大者必三邊相等.

$\therefore$ 正三角形面積爲極大. $Q.E.D.$

習題二十五

1. 二圓平行直徑兩端聯線必過此二圓之相似中心.

2. 從$\odot O_1$, $\odot O_2$之相似中心P, 作割線交二圓於A_1, B_1及A_2, B_2. 再過P作切線切二圓於T_1, T_2. 則T_1, T_2, A_2, B_1共圓. T_1, T_2, B_2, A_1共圓.

3. 從二圓相似中心作任意二割線，則一割線上之非對應點與他割線上之非對應點共圓.

(注意) 本題共有四組共圓點.

4. $\triangle ABC$ 中，$AB \neq AC$. AB, AC 上各取 D, E 令

$BD=EC.DE$, BC 延線交於 F. 則$FD:FE=AC:AB$.

5. $\triangle ABC$中, 在AB上取B', 在AC延線上取 C' 令 $BB'=CC'$. $B'C'$ 交BC於D. 則$AB\cdot B'D=AC\cdot C'D$.

6. AB爲圓之直徑. 從A作弦AP_1, AP_2, AP_3各交AB之垂線於Q_1, Q_2, Q_3. 則 $AP_1\cdot AQ_1=AP_2\cdot AQ_2=AP_3\cdot AQ_3$.

7. A爲定點, XY爲定直線. Q爲XY上任意一點. P爲AQ上一點而$AQ\cdot AP$之面積一定. 則P之軌跡爲一圓周.

8. A爲定點, $\odot O$爲定圓. Q爲$\odot O$圓周上任意一點. P爲AQ上一點而$AQ\cdot AP$之面積一定. 求P之軌跡.

9. A爲定點, XY爲定直線. B爲XY上任意一點. $\triangle ABC$爲正三角形. 求C之軌跡.

10. A爲定點, $\odot O$ 爲定圓. B 爲$\odot O$ 圓周上任意一點. $\triangle ABC$爲正三角形. 求C之軌跡.

11. $AB, A'B'$ 爲$\odot O$之二直徑. P, Q分AB於調和. $P'Q'$分$A'B'$於調和. 則P, Q, P', Q' 共圓.

12. D, E, F 爲 $\triangle ABC$ 內接圓與各邊BC, AC, AB之切點. 聯EF延長之交BC之延線於D'. 則B, D, C, D' 爲調和點列.

13. I爲$\triangle ABC$之內心, I_1爲$\triangle ABC\angle A$內之旁心. AI_1交BC於D. 則 A, I, D, I_1 爲調和點列.

14. 圓內接正方形與同圓半圓內接正方形面積之比等於5:2.

15. 同圓或等圓內接三角形面積之比等於其三邊度數相乘積之比.

16. $\triangle ABC$中，$AC>BC$, AD, BE 爲高. 則 $AC+BE>BC+AD$.

17. $\triangle ABC$中，$\angle A$爲直角，AD爲高. 則$AD+BC>AB+AC$.

18. 一動點至一定圓所作二切線之夾角恆等於至他一定圓所作二切線之夾角. 求此動點之軌跡.

19. $\triangle ABC$中，D, E 各在AB, AC上，而$DE \parallel BC$. BE, CD 交於F. 則AF過BC之中點.

20. 前題之AF交DE於H, 交BC於K. 則A, H, F, K爲調和點列.

21. P, Q爲$\triangle ABC$邊AB, AC上各一點, 而$AP=AQ$. $\triangle ABC$之中線AM交PQ於O. 則$PO:OQ=AC:AB$.

22. O爲$\triangle ABC$內任意一點. 作 $\angle BOC$, $\angle AOC$, $\angle AOB$之等分線OP, OQ, OR各交BC, AC, AB於P, Q, R. 則

$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=1.$$

23. 以$\odot O$之半徑OA爲直徑作小圓. 從OA上任意點作垂線交大圓周於P, 小圓周於Q. 則$\overline{AP}^2=2\overline{AQ}^2$.

24. 若四角形同時可內接於一圓及外切於他圓，則其對邊上對於內圓切點之聯線互爲垂線.

25. 二等邊三角形底邊BC之平行線交AB於D, 交AC於E. 求證$\overline{BE}^2=\overline{EC}^2=BC\cdot DE$.

26. M, N 爲四角形$ABCD$兩對角線AC, BD之中點MN之延線交AB於P, 交CD於Q. 求證 $\triangle ABQ=\triangle CDP=\frac{1}{2}ABCD$.

27. 過三角形重心引任意直線分原形爲一個四角形及一個三角形，則四角形之面積較三角形爲大.

28. 圓內接矩形中，以正方形之面積爲最大.

29. 二圓交於A, B. 過A作二割線ACD, AEF各交二圓於C, D, E, F，且與AB成等角，則$CD=EF$.

30. AM爲$\triangle ABC$之中線，AD爲$\angle A$之等分線. 從C作AD之垂線交AD於P，交AM於Q. 則$QD \parallel AC$.

31. O爲$\triangle ABC$中線AD之中點. BO, CO之延線各交AC, AB於E, F. 求證$\frac{AE}{CE}=\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$，$\frac{EO}{BO}=\frac{FO}{CO}=\frac{1}{3}$.

32. 從$\triangle ABC$各頂角至對邊引共點三線AD, BE, CF若$CE=\frac{1}{4}AC, AF=\frac{1}{4}AB$，則$BD=\frac{9}{10}BC$.

33. 一動點與相交二定直線距離之和爲一定長，求此動點之軌跡.

34. 一動點與相交二定直線距離之差爲一定長，求此動點之軌跡.

35. 四角形$ABCD$內一點O, $OA+OB+OC+OD$爲極小. 則O爲對角線AC, BD之交點.

36. 聯矩形各邊上一點成一四角形. 當此四角形各邊與矩形對角線平行時，其周爲最小.

37. 一直線截三角形之三邊AB, AC, BC於D, E, F. 若$BD=CE$，則$AB : AC=EF : DF$.

38. A', B', C'各爲$\triangle ABC$邊BC, AC, AB之中點. H爲$\triangle ABC$之垂心. A'', B'', C''各爲AH, BH, CH之中點. 求證$A'A'', B'B'', C'C''$共點.

39. $\square ABCD$中，從A, C向BD上作垂線AM, CN，從B, D向AC上作垂線BP, DQ, M, N, P, Q各爲垂足．則$MQNP$亦爲平行四邊形，且與原形$ABCD$爲相似形．

40. 從線分AB之兩端A, B各作垂線AC, BD. AD, BC交於E作$EF \perp AB$，垂足爲F．則$\angle AFC = \angle BFD$．

41. 四角形$ABCD$中，若$\angle A, \angle C$兩角等分線之交點在BD上，則$\angle B, \angle D$兩角等分線之交點在AC上．

42. l, m, n爲$\triangle ABC$之三個高，則

$$2R(l+m+n)=bc+ca+ab.$$

43. $\triangle ABC$三邊之長a, b, c成等差級數，b爲中項，則$6Rr=ac$．

（可應用例一一證之）

44. 設從$\triangle ABC$外心O至BC, AC, AB之距離各爲l, m, n，則$4\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\right)=\frac{abc}{lmn}$.

45. P爲正方形$ABCD$外接圓上任意點．求證$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2$（圓直徑）^{2}．

46. A爲定圓O內一定點，AB, AC爲任意二垂直線分交$\odot O$於B, C．求證BC中點之軌跡爲一圓．

47. 在AB爲直徑之半圓內，兩弦AD, BE交於F．求證$AF \cdot AD + BF \cdot BE = \overline{AB}^2$．

48. 弧形橋洞離水面高18尺，水面闊60尺．求此橋洞弧半徑之長．

49. $\triangle ABC$內三個高AD, BE, CF交於H．求證$\overline{AB}^2+$

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2(AD\cdot AH+BE\cdot BH+CF\cdot CH)$.

50. 四角形$ABCD$,對邊BA,CD交於E,AD,BC交於F對角線AC,BD交於O.過O作BC之平行線交AF於G,交EF於H。則$OG=GH$.

51. $ABCD$為圓內接四角形,從外接圓$\frown AB$中點E聯EC交BD於F,ED交AC於G.則$EF:EG=ED:EC$.

52. $ABCD$為圓外切四角形,各邊切圓於A',B',C',D'.求證AC,BD,$A'C'$,$B'D'$會於一點.

53. 從半圓直徑AB兩端點引AB之垂線AC,BD從半圓周上任意點E引切線交AC於C,交BD於D.從E作$EG\perp AB$.EG,BC交於F.則F為EG之中點.

54. 上題中求證AD,BC.EG共點.

55.兩圓內切於A,AB為內圓之直徑.從內圓圓周上任意一點P引AB之垂線交外圓圓周於Q.則$AP:AQ$為定值.

56. 圓內弦$CD\perp$直徑AB.E為CD上任意點.AE,BE延線各交圓周於F,G.求證$CF:DF=CG:DG$.

57. 一截線截⊙O於A,B.截⊙O'於A',B'而$AB=A'B'$從A作⊙O切線AT從A'作⊙O'切線$A'T$與AT交於T.則$AT:A'T=r:r'$(r,r'各為⊙O.⊙O'之半徑).

58. $\triangle ABC$為正三角形.D為AB上任意點.以AD,DB為邊各向形外再作正三角形ADE,DBF.$\triangle ABC$,$\triangle ADE$,$\triangle BDF$之重心各為G,H,K.求證$\triangle GHK$亦為正三角形.

59. $\triangle ABC$中,D為AB上點,F為AB延線上點而$AD=BF$.又E為AC上點,G為AC延線上點而$AE=CG$

BG, CF交於H. 求證$\triangle HFG = \triangle HBC + \triangle ADE$.

60. 直角$\triangle ABC$中，$\angle A$爲直角，AD爲高. $DE \perp AB$, $DF \perp AC$. 求證$\triangle BEF : \triangle CEF = (AB : AC)^4$.

61. 直角$\triangle ABC$中，A爲直角. 以AB, AC爲邊各向形外作正方形$ABDE, ACFG$. BF, CD各交AC, AB於H, K求證$\overline{AH}^2 = \overline{AK}^2 = BH \cdot CK$.

62. $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$內接於同圓，則$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = (AB : A'B')(AC : A'C')(BC : B'C')$.

63. ⊙O內接正六角形$ABCDEF$. AC交OB於A'. $A'D$交OC於B'. $B'E$交OD於C'. $C'F$交OE於D'. $D'A$交OF於E'. 則$OA' = \frac{1}{2}r, OB' = \frac{1}{3}r, OC' = \frac{1}{4}r, OD' = \frac{1}{5}r, OE' = \frac{1}{6}r, \cdots\cdots$($r$爲⊙$O$之半徑).

64. $\triangle ABC$之內切圓，切BC, AC, AB於X, Y, Z. 求證AX, BY, CZ共點.

65. 四角形$ABCD$邊AB, BC, CD, DA上各點E, F, G, H. 若AC, EF, GH共點，則BD, EH, FG亦共點.

66. 定三角形內接矩形面積極大等於原三角形面積之半.

67. $\triangle ABC$底BC上一點P. 從P作$PD \perp AB, PE \perp AC$. 則當$BP = PC$時，$PD \cdot PE$面積爲極大.

68. $\triangle ABC$中，AM爲中線，AD爲$\angle A$之等分角線. 從B作AD之垂線交AM於E，交AD於F. 則$MF \parallel AC, ED \parallel AB$.

69. P爲定角$\angle XOY$內一定點. 過P作一直線交OX, OY於A, B. 則當$OA = OB$時，$PA \cdot PB$面積爲極小

第七編　作圖題解法

第三十三章　作圖題解法

§ 518.　**軌跡交截法**　凡作圖題之可先決一點者，通常可用軌跡交截法解之．茲爲便利計，將需用之軌跡列舉如下：

軌跡 1.　與一定點距離爲定長之點之軌跡爲以定點爲中心，定長爲半徑所作之圓周．　　（定理七三）

軌跡 2.　與二定點等距之點之軌跡爲二定點所聯線分之垂直等分線．　　（定理七四）

軌跡 3.　與相交二定直線等距之點之軌跡爲其交角之一雙等分線．　　（定理七五）

軌跡 4.　與平行二定直線等距之點之軌跡爲過其公垂線中點之一平行線．　　（定理七六）

軌跡 5.　與一定直線距離爲定長之點之軌跡爲此直線兩旁之一雙平行線．　　（定理七七）

軌跡 6.　一角之大小一定其二邊各過一定點，則此角頂點之軌跡爲以二定點所聯線分爲弦，兩側之一雙弓形弧．　　（定理七八）

軌跡 7.　與二定點距離平方之和等於定面積之點之軌跡爲一圓周．　　（定理九二）

軌跡 8.　與二定點距離平方之差等於定面積之點之軌

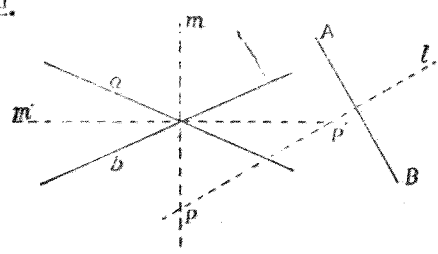
跡為一直線.　　　　　　　　　　　　（定理九三）

軌跡 9.　與二定點距離之比為定比之點之軌跡為一圓周.　　　　　　　　　　　　（定理一〇三）

軌跡 10. 與二相交定直線距離之比為定比之點之軌跡為一雙直線.　　　　　　　　　　（定理一一四）

以上諸條為軌跡之最重要者. 尤適用於解作圖題. 玆舉例如下：

（例一）　求作一點令與所設二定點等距，又與所設二定直線等距.



A, B 為所設二定點. a, b 為所設二定直線. P 為所求之點. 因 P 與 A, B 等距，故 P 必在 AB 之垂直等分線 l 上（軌跡 2）. 又因 P 與 a, b 等距，故 P 必在 a, b 交角之等分線 m 或 m' 上（軌跡 3）. 故得解法如下：

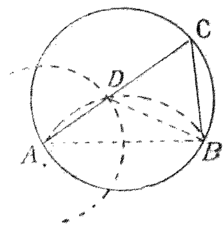
〔解法〕　聯 AB. 作 AB 之垂直等分線 l. 作 a, b 交角之等分線 m, m', 交 l 於 P, P'. P, P' 即所求之點.（證略）

Q. E. F.

〔討論〕　本題有二解答. 但若 l 平行於 m 或 m' 時，則僅有一解答. 又若 a, b 為平行線時，則根據（軌跡 4）作之僅有一解答. 又若 $a \parallel b$ 而 AB 為 a, b 之公垂線時，則

無解答.

（例二）　定圓周上有二定點 A, B. 求在此圓周上再取一點 C, 令 $AC-BC$ 等於定長 d.



〔解析〕　設 C 爲所求之點. 在 AC 上取 D 令 $CD=CB$. 則 $AC-BC=AC-DC=AD=d$. 故 D 在以 A 爲中心, d 爲半徑之圓周上(軌跡 1). 又因 $CD=CB$,

$$\therefore\quad \angle CDB=\angle CBD=\frac{1}{2}[\angle CDB+\angle CBD]$$

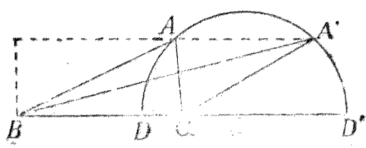
$$=\frac{1}{2}[180^\circ-\angle C]=90^\circ-\frac{1}{2}\angle C.$$

$$\therefore\quad \angle ADB=180^\circ-\angle CDB=180^\circ-(90^\circ-\frac{1}{2}\angle C)=90^\circ$$

$+\frac{1}{2}\angle C$. 因 $\angle C$ 之大小一定, 故 $\angle ADB$ 之大小一定. 故 D 在 AB 爲弦 $90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$ 爲圓周角之弓形弧上 (軌跡6). 故可先得 D 點. 延長 AD 交所設圓周於 C. 即所求解答.

(解法及證略)　　$Q.E.F.$

（例三）　已知三角形之底及高, 又知其二邊之比作此三角形.

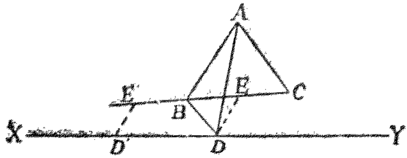


設已知之底爲 a, 高爲 h_a, 二邊之比爲 $m:n$.

〔解法〕　先作 $BC=a$ 在 BC 上取內, 外分點 D, D' 令 $BD:DC=BD':D'C$

$=m:n$. 以 DD' 爲直徑作半圓周. 再作 BC 之平行線令與 BC 距離爲 h_a 交半圓周於 A, A'. 則 $\triangle ABC, \triangle A'BC$ 皆爲所求. (證略) $Q.E.F.$

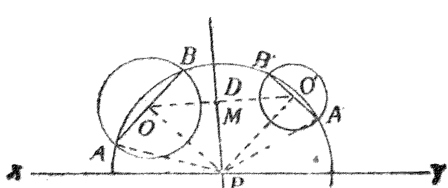
(例四) A, B, C 爲三定點, XY 爲定直線. 求在 XY 上作一點 D 令 $\triangle ABD = \frac{1}{2}\triangle ABC$.



〔解析〕 設 D 爲所求之點. 因 $\triangle DAB = \frac{1}{2}\triangle ABC$,

$\therefore$ D 與 AB 之距離爲 C 與 AB 距離之半. 故爲定長. 故 D 之軌跡爲 AB 之一雙平行線 (軌跡 5). 故在 BC 上取 E, E' 令 $BE = BE' = \frac{1}{2}BC$. 過 E, E' 作 AB 之平行線交 XY 於 D, D', 即解答. $Q.E.F.$

(例五) $\odot O, \odot O'$ 爲二定圓, XY 爲定直線. 求作一圓, 其圓周等分 $\odot O, \odot O'$ 二圓周, 其中心在 XY 上.



〔解析〕 設⊙P 爲所求之圓，其圓周交⊙O 於A, B. 交⊙O' 於 A', B'. 則$AB, A'B'$ 各爲⊙O, ⊙O' 之直徑. 聯 PO, PO', PA, PA'. $PO \perp AB, PO' \perp A'B'$.

$\therefore \quad \overline{PO'}^2-\overline{PO}^2=(\overline{PA'}^2-\overline{O'A'}^2)-(\overline{PA}^2-\overline{OA}^2)=\overline{OA}^2-\overline{O'A'}^2$
爲定值. 故 P 之軌跡爲垂直於 OO' 之一直線DP(軌跡8).

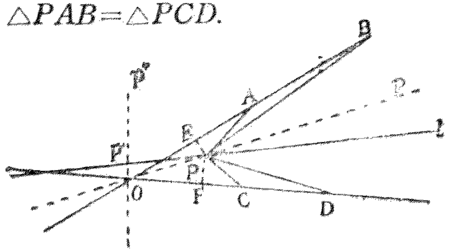
在 OO' 上取中點 M, 則 $\overline{PO'}^2-\overline{PO}^2=2\,OO' \cdot DM$.

$\therefore \quad 2\,OO' \cdot DM=\overline{OA}^2-\overline{O'A'}^2$.

$\therefore \quad DM=\dfrac{\overline{OA}^2-\overline{O'A'}^2}{2\,OO'}$ 爲定長. 故可先求得 D, 從D作 OO' 之垂線交 XY 於 P. P 即所求圓之中心. (解法及證略)

Q. E. F.

(例六) AB, CD 爲二定線分. 求在一定直線 l 上作一點 P 令 $\triangle PAB=\triangle PCD$.



〔解析〕 設 P 爲所求之點. 作 $PE \perp AB$, $PE \perp CD$.
$\because \quad \triangle PAB=\triangle PCD \quad \therefore PE:PF=CD:AB$ 爲定比.
即 P 與AB, CD 兩直線距離之比一定. 故可過 AB, CD 之交點 O 作 P 之軌跡 p, p' 與 l 交於 P, P', 即所求之點（軌跡 10）.

Q. E. F.

§ 519. **代數解析法**　有多數作圖題可用代數方程式解法解之．以下數條，爲代數式作圖法之根據（式中$a, b, c, d, \cdots$爲已知長，x爲所求之長，m, n爲整正數）

1. $x=a\pm b$.　　（公法二）
2. $x=ma\pm nb$.　　（公法二）
3. $x=\dfrac{a}{m}$.　　（作圖題八）
4. $x=\dfrac{bc}{a}$, 或 $a:b=c:x$.（作圖題一一，或一四）
5. $x=\dfrac{b^2}{a}$, 或 $a:b=b:x$.　　（同 4）
6. $x=\sqrt{ab}$　　（作圖題一二，或一五）
7. $x=\dfrac{b^2d}{a^2}$.　　（作圖題一八）
8. $x=a\sqrt{\dfrac{b}{c}}$.　　（作圖題一九）
9. $x=\sqrt{n}\,a$.　　（同 6）

（因 $x=\sqrt{n}\,a=\sqrt{na^2}=\sqrt{(n\,a.\,a)}$）

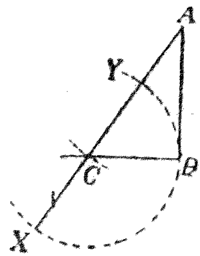
10. $x=\sqrt{a^2\pm b^2}$.　　（應用商高定理）
11. $x=\sqrt{ab\pm cd}$.

〔先求$\sqrt{ab}=y$, $\sqrt{cd}=z$(6). 則 $\sqrt{ab\pm cd}=\sqrt{y^2\pm z^2}$〕

12. $x=\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-b^2}$.

此爲二次方程式 $x^2-ax+b^2=0$ 之二根．解法如下：作直角三角形 ABC, $\angle B$ 爲直角，$AC=\dfrac{a}{2}$, $AB=b$. 以 C

為中心，CB 為半徑作圓交 AC 於 X, Y. 則 AX, AY 即所求之長 x. Q. E. F.



〔證〕 $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2=\frac{a^2}{4}-b^2.$

$$\therefore \quad BC=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}.$$

$$\therefore \quad AX=AC+CX=AC+BC=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2},$$

$$AY=AC-CY=AC-BC=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$$

$\therefore$ AX, AY 為所求之長 x. Q. E. D.

(例一) 已知二線分之和，及其所包矩形之面積，求作此二線分.

〔解析〕 設二線分為 x, y, 其和等於 a, 其所包矩形等於 b^2. 則

$$x+y=a, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=b^2. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

依代數法解之，從 (1) $y=a-x$, 代入 (2)

$x(a-x)=b^2$, $x^2-ax+b^2=0$.

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b^2}}{2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2},$$

$$y=a-x=a-\left(\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}\right)=\frac{a}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}.$$

故從根據12之作法所得之AX, AY 即所求之二線分.

Q. E. F.

（例二）　已知二線分之差爲 a, 其所包矩形等於 b^2. 求此二線分.

〔解析〕　設所求二線分之長爲 x, y. 則須適合於兩個方程式

$$x-y=a, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=b^2. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

式中 a, b 爲已設之量，x, y 爲未知之量．故可用代數法解方程組如下：

從(1)，　$x=a+y$.

代入(2)，（$a+y$）$y=b^2$. 即 $y^2+ay-b^2=0$.

依二次方程式根之公式，得

$$y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$$

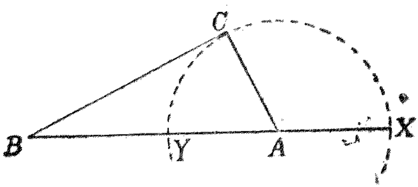
但線分可常視爲正，

$$\therefore\quad y=\frac{\sqrt{a^2+4b^2}-a}{2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}-\frac{a}{2}.$$

$$x=a+y=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}+\frac{a}{2}$$

依此可得解法如下：

〔解法〕　作直角三角形 ABC, 令 $\angle C=R\angle$, $CA=\frac{a}{2}$, $CB=b$.



則　$$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2.$$

$$\therefore\quad AB=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}.$$

以 A 爲中心，AC 爲半徑作圓交 BA 於 X, Y.

則 $BX=AB+AX=AB+AC=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}+\frac{a}{2}=x,$

$$BY=AB-AY=AB-AC=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}-\frac{a}{2}=y.$$

$\therefore$　BX, BY 即所求二線分.　　Q. E. F,

〔證〕　$BX-BY=XY=2AC=2\times\frac{a}{2}=a.$

$BX.BY=(BA+AX)(BA-AY)=(BA+AC)$

$(BA-AC)=\overline{BA}^2-\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=b^2.$

$\therefore$　BX, BY 即所求二線分.　　Q. E. D.

（例三）　求作二線分令其所包矩形及各線分上正方形之和各等於定面積.

〔已設〕　二定長 a, b.

〔求作〕　二線分 x, y, 令 $xy=a^2$, ……………………(1)

$x^2+y^2=b^2$. ………………(2)

〔解析〕

(2)加(1)之二倍，得$(x+y)^2=b^2+2a^2$,

$$\therefore\quad x+y=\sqrt{b^2+2a^2}\ (3)$$

(2)減(1)之二倍，得$(x-y)^2=b^2-2a^2$,

$$\therefore\quad x-y=\sqrt{b^2-2a^2}\ (4)$$

(3)加(4)，得$2x=\sqrt{b^2+2a^2}+\sqrt{b^2-2a^2}$,

$$x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{b^2+2a^2}+\sqrt{b^2-2a^2}\right]$$

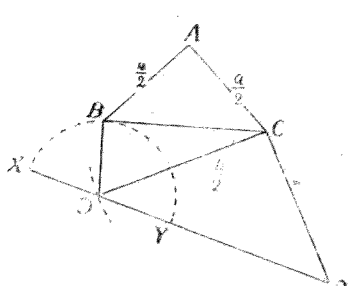
$$=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

(3)減(4)，得 $y=\sqrt{b^2+2a^2}-\sqrt{b^2-2a^2}$.

$$y=\frac{1}{2}\left[\sqrt{b^2+2a^2}-\sqrt{b^2-2a^2}\right]$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

依此可得解法如下：



〔解法〕 作 $R\triangle ABC$, 令 $AB=AC=\frac{a}{2}$, $\angle A=R\angle$. 則 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

作 $BD\perp BC$, 以 C 爲中心，$\frac{b}{2}$爲半徑作弧交 BD 於 D.

聯 DC, 則 $\overline{BD}^2=\overline{DC}^2-\overline{BC}^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2$. 作 $CE\perp CD$,

且令 $CE=CB$. 聯 DE. 則 $\overline{DE}^2=\overline{DC}^2+\overline{CE}^2=\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2$. 以 D 爲中心, DB 爲半徑作圓交 DE 於 X, Y.

則 $EX=DE+DX=DE+DB$

$$=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2}=x,$$

$EY=DE-DY=DE-DB$

$$=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2}=y.$$

$\therefore$ EX, EY 即所求之二線分. $Q.E.F.$

以上解法, 根據解析所得結果按步作圖. 故其實已無待乎再證明下面之證, 表示其決無不合, 照理已可省去.

〔證〕 $EX\cdot EY=(ED+DX)(ED-DY)$

$$=(ED+DB)(ED-DB)$$

$$=\overline{ED}^2-\overline{DB}^2$$

$$=(\overline{DC}^2+\overline{CE}^2)-(\overline{DC}^2-\overline{BC}^2)$$

$$=\overline{CE}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BC}^2$$

$$=2(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=2(2\overline{AB}^2)$$

$$=4\overline{AB}^2=4\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2.$$

又 $\overline{EX}^2+\overline{EY}^2=(ED+DX)^2+(ED-DY)^2$

$$=(ED+DB)^2+(ED-DB)^2$$

$$=\overline{ED}^2+\overline{DB}^2+2ED\cdot DE+\overline{ED}^2+\overline{DB}^2$$

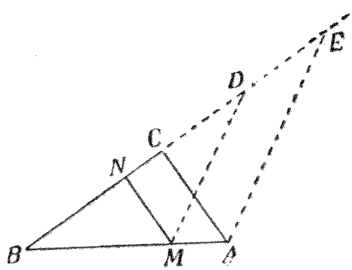
$$-2ED\cdot DB$$

$$=2(\overline{ED}^2+\overline{DB}^2)$$
$$=2(\overline{DC}^2+\overline{EC}^2+\overline{DC}^2-\overline{BC}^2)$$
$$=2(2\overline{DC}^2)=4\overline{DC}^2=4\left(\frac{b}{2}\right)^2=b^2.$$

$\therefore$ EY, EY 即所求之二線分。 Q. E. D.

（例四） 在定三角形 ABC 內求作 AC 之平行線交 AB 於 M，交 BC 於 N，且令 $BM-CN$ 等於一定長 d.

〔解析〕 設 $AB=c, BC=a, BM=x$. 則因 $MN \parallel AC$，
$\therefore$ $\triangle BMN \sim \triangle BAC$, $\therefore$ $BM : BN=BA : BC$.
即 $BM : (BC-NC)$
$=BA : BC$.
又因 $BM-CN=d$,
$\therefore$ $CN=BM-d$
$=x-d$. 以各量代入比例式，得 $x:[a-(x-d)]=c : a$.
$\therefore$ $ax=c(a+d-x)$,
$ax+cx=c(a+d)$,
$$\therefore\ x=\frac{c(a+d)}{a+c}.$$



〔解法〕 在 BC 延線上取 E 及 D 令 $CE=AB=c$, $CD=d$.聯 EA. 過 D 作 EA 之平行線交 AB 於 M，作 $MN \parallel AC$ 即所求。 Q. E. F.

〔證〕 $\because$ $DM \parallel EA$, $\therefore$ $MB : BD=AB : BE$
即 $MB : BC+CD=AB : BC+CE$, 即 $x : a+d=c : a+c$,

$$\therefore\ x=\frac{c(a+d)}{a+c}.$$

$\because\ MN \parallel AC,\quad \therefore\ NC:NB=MA:MB.$

即　$NC:a-NC=c-x:x$

$\therefore\ xNC=(a-NC)(c-x)=a(c-x)-NC(c-x).$

$\therefore\ [x+(c-x)]\,NC=a(c-x).$

$$\therefore\ NC=\frac{a(c-x)}{c}=\frac{a}{c}\left(c-\frac{c(a+d)}{a+c}\right)$$

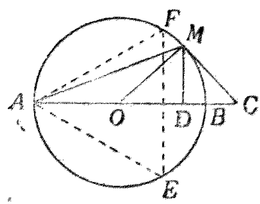
$$=a\left(\frac{(a+c)-(a+d)}{a+c}\right)=\frac{a(c-d)}{a+c}.$$

$$MB-NC=\frac{c(a+d)}{a+c}-\frac{a(c-d)}{a+c}=\frac{ac+cd-ac+ad}{a+c}=d.$$

Q.E.D.

（例五）AB為定圓O之一定直徑。求在圓周上取一點M，從M作切線MC交AB延線於C令$MA:MC=2:1$.

〔解析〕設M為所求之點。



作$MD \perp AB$. 今$OA=OB=OM=r$，$OD=x$。則$\overline{MD}^2=\overline{OM}^2-\overline{OD}^2=r^2-x^2$。又因$MC$為切線，

$\therefore\ \angle OMC=R\angle,$

$\therefore\ \overline{MD}^2=OD\cdot DC,$

$$\therefore\ DC=\frac{\overline{MD}^2}{OD}=\frac{r^2-x^2}{x}.$$

$$\therefore\ \overline{MC}^2=\overline{MD}^2+\overline{DC}^2=r^2-x^2+\left(\frac{r^2-x^2}{x}\right)^2=(r^2-x^2)$$

$1+\frac{r^2-x^2}{x^2}\Big)=(r^2-x^2)\frac{r^2}{x^2}$.

又 $\overline{MA}^2=\overline{MD}^2+\overline{AD}^2=r^2-x^2+(r+x)^2$.

因 $MA=2MC$, ∴ $\overline{MA}^2=4\overline{MC}^2$.

$$\therefore\quad r^2-x^2+(r+x)^2=4\frac{r^2}{x^2}(r^2-x^2).$$

$$\therefore\quad x^2(r^2-x^2+r^2+2rx+x^2)=4r^2(r^2-x^2).$$

$$2rx^2(r+x)=4r^2(r+x)(r-x).$$

∵ $r\neq0,\ r+x\neq0$, ∴ $x^2=2r(r-x)$, $x^2+2rx-2r^2=0$.

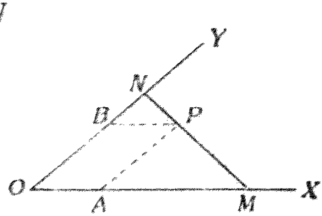
從可解得 $x=-r\pm\sqrt{3r^2}=\sqrt{3}r-r$.

$$\therefore\quad AD=r+x=\sqrt{3}r.$$

〔解法〕 作⊙O內接正三角形△AEF. 在AB上取D令$AD=AE$. 作$DM\perp AB$交圓周於M, 則M即所求點.

Q.E.F.

(例六) P爲定角XOY內一定點. 求過P作一直線交OX, OY於M, N而令OM, ON之差爲定長k.



〔解析〕 作 $PA\parallel OY$, $PB\parallel OX$. 令$PA=a$, $PB=b$, $OM=x$, $ON=y$. 則△NBP∽△PAM.

∴ $NB:PA=BP:AM$. 即$ON-OB:PA=PB:OM-OA$. ∴ $y-a:a=b:x-b$.

∴ $(x-b)(y-a)=ab$, ∴ $xy-ax-by=0$, ………(1)

又 $x-y=k$. ………(2)

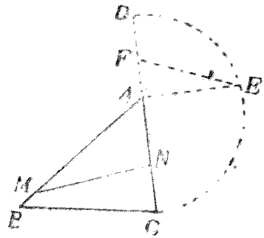
從(2)，$y=x-k$ 代入(1)得 $x(x-k)-ax-b(x-k)=0$.

$$\therefore\quad x^2-(a+b+k)x+bk=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{a+b+k}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^2-bk}$$ 爲已知長，

故可在OX上求得M點．聯MP交OY於N即得．（解法及證略）

Q.E.F.



（例七）求作一直線平分定三角形之面積及周．

〔解析〕設$\triangle ABC$爲定三角形，MN爲所求直線．$\triangle AMN=\frac{1}{2}\triangle ABC$，

$$AM+AN=\frac{1}{2}(AB+AC+BC).$$

令　$AM=x, AN=y, AB+AC+BC=c+b+a=2s$.

則因　$\dfrac{\triangle AMN}{\triangle ABC}=\dfrac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}=\dfrac{xy}{bc}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\ xy=\dfrac{1}{2}bc$，⋯

又 $x+y=s$.⋯⋯(2)

解之得　$x=\dfrac{s}{2}+\sqrt{\dfrac{s^2}{4}-\dfrac{bc}{2}}$，　$y=\dfrac{s}{2}-\sqrt{\dfrac{s^2}{4}-\dfrac{bc}{2}}$.

〔解法〕延長CA至D令$AD=\frac{1}{2}AB$.

以CD爲直徑作半圓周．

作$AE\perp CD$交半圓周於E.

E爲中心$\frac{1}{2}s$即$\frac{1}{4}(AB+AC+BC)$爲半徑作弧交CD於F．在DC上取N令$FN=FE$．在AB上取M令$AM=$

$EF+AF$. 聯MN即所求之直線.　　　　Q.E.F.

〔證〕 $$\overline{AF}^2=\overline{EF}^2-\overline{AE}^2=\left(\frac{s}{2}\right)^2-AC\cdot AD=\frac{s^2}{4}-AC\cdot\frac{AB}{2}=\frac{s^2}{4}-\frac{bc}{2}.$$

$$\therefore\quad AM=EF+AF=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{bc}{2}}$$

$$AN=FN-AF=EF-AF=\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{bc}{2}}.$$

$$\therefore\quad AM+AN=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{bc}{2}}+\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{bc}{2}}$$

$$=\frac{s}{2}+\frac{s}{2}=s.$$

$$AM\cdot AN=\left(\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{bc}{2}}\right)\left(\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{bc}{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{s}{2}\right)^2-\left(\frac{s^2}{4}-\frac{bc}{2}\right)=\frac{bc}{2}.$$

$$\therefore\quad \triangle AMN=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$　　　　Q.E.D.

（例八） 已知二線分上正方形之差及其所包矩形，求此二線分之長.

設二定面積爲 a^2, b^2, 所求二定長爲 x, y.

則 $$x^2-y^2=a^2,\cdots(1)$$
$$xy=b^2.\cdots(2)$$

〔解析〕 令 $y=mx$, 則 $x^2-m^2x^2=a^2,\cdots(3)$

$$mx^2=b^2.\cdots(4)$$

$$\therefore\quad \frac{x^2(1-m^2)}{mx^2}=\frac{a^2}{b^2},\qquad\therefore\quad b^2(1-m^2)=a^2m.$$

$$b^2m^2+a^2m-b^2=0.$$

$$m=\frac{-a^2\pm\sqrt{a^4+4b^4}}{2b^2}.$$ 代入(4)

$$x^2=\frac{b^2}{m}=\frac{2b^4}{-a^2\pm\sqrt{a^4+4b^4}}$$

$$=\frac{2b^4(-a^2\mp\sqrt{a^4+4b^4})}{(-a^2\pm\sqrt{a^4+4b^4})(-a^2\mp\sqrt{a^4+4b^4})}$$

$$=\frac{2b^4(-a^2\mp\sqrt{a^4+4b^4})}{(-a^2)^2-(a^4+4b^4)}$$

$$=\frac{2b^4(-a^2\mp\sqrt{a^4+4b^4})}{-4b^4}$$

$$=\frac{1}{2}(a^2\pm\sqrt{a^4+4b^4}).$$

代入(1)

$$y^2=x^2-a^2=\frac{1}{2}(a^2\pm\sqrt{a^4+4b^4})-a^2$$

$$=\frac{1}{2}(-a^2\pm\sqrt{a^4+4b^4}).$$

$\because\ \sqrt{a^4+4b^4}>a^2$，故取正號，得

$$x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^4+4b^4}+a^2)$$

$$y^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^4+4b^4}-a^2).$$

以上結果不適宜於作圖，因四次項在幾何中無意義也．故改造之如下：

$$x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^4+4b^4}+a^2)$$

$$=\sqrt{\frac{a^4}{4}+b^4}+\frac{a^2}{2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4+b^4}+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad \left(令\frac{a}{\sqrt{2}}=c\right)$$

$$=\sqrt{c^4+b^4}+c^2$$

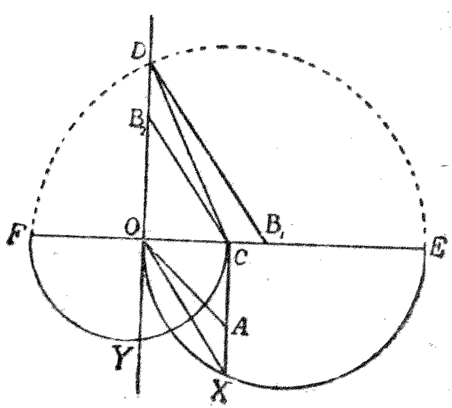
$$=\sqrt{\left(c^2+\frac{b^4}{c^2}\right)c^2}+c^2$$

$$=c\left[\sqrt{c^2+\left(\frac{b^2}{c}\right)^2}+c\right] \qquad \left(令\frac{b^2}{c}=d\right)$$

$$=c[\sqrt{c^2+d^2}+c]$$ 同樣可得

$$y^2=c[\sqrt{c^2+d^2}-c].$$

〔解法一〕 作EF,DY 直交於O. 作$\angle YOE$之等分線 $OA=a$,作$AC\perp OE$$\left(OC=CA,\because \overline{OC}^2=\overline{OC}^2+\overline{CA}^2=\overline{OA}^2=a^2,\right.$



$\therefore \quad OC=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=c\Big)$. 在$OE, OD$上各取$B_1, B_2$令$OB_1=OB_2$ $=b$. 聯CB_2. 作$B_1D \parallel CB_2$交OD於$D\Big(OC:OB_1=OB_2:OD$,

$\therefore \quad OD=\dfrac{OB_1 \cdot OB_2}{OC}=\dfrac{b^2}{c}=d.\Big)$聯$CD$, $(\overline{CD}^2)=\overline{OC}^2+\overline{OD}^2$,

$\therefore \quad CD=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OD}^2}=\sqrt{c^2+d^2})$. 以$C$爲中心，$CD$爲半徑作圓交 EF 於 E, F $(OE=CE+OC=CD+OC=$ $\sqrt{c^2+d^2}+c$. $OF=CF-OC=CD-OC=$

$\sqrt{c^2+d^2}-c)$.

以OE爲直徑作半圓交CA於X. 聯OX.

以FC爲直徑作半圓交DY於Y.

則 OX, OY 即所求 $\qquad$ Q.E.F.

〔證〕 $\overline{OX}^2-\overline{OY}^2=OE\cdot CO-OF\cdot OC$

$$=OC(OE-OF)$$

$$=OC\{CE+OC-(CF-OC)\}$$

$$=OC\{OC+CD-CD+OC\}$$

$$=2\overline{OC}^2=\overline{OC}^2+\overline{AC}^2=\overline{OA}^2=a^2.$$

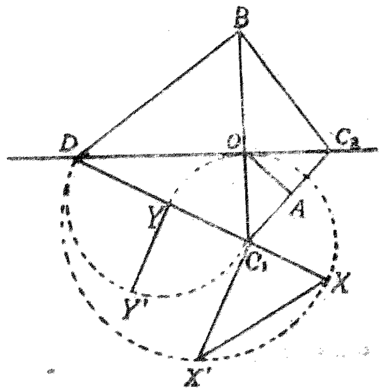
$$OX\cdot OY=\sqrt{OE\cdot OC}\cdot\sqrt{OF\cdot OC}$$

$$=\sqrt{OE\cdot OF}\cdot OC$$

$$=OD\cdot OC=OB_1\cdot OB_2=b^2.$$

Q.E.D.

〔解法二〕 作 DC_2 BC_1 直交於 O. 作 $\angle C_1OC_2$ 之等分線 $OA=\frac{a}{2}$ 過 A 作 OA 之垂線 C_1C_2 交 BC, DC_2 於 C_1, C_2 $\left(AC_1=AC_2=OA=\frac{a}{2},\ C_1C_2=a,\ OC_1=OC_2=\frac{a}{\sqrt{2}}=c\right)$. 在 BC_1 上



取 B 令 $OB=b$. 聯 C_2B. 作 $BD\perp BC_2$ 交 DC_2 於 D $\left(\overline{OB}^2=OD\cdot OC_2,\ OD=\frac{\overline{OB}^2}{OC_2}=\frac{b^2}{c}=d\right)$. 聯 DC_1. 以 C_1 爲中心, C_1O 爲半徑作圓交 DC_1 於 X, Y. 以 DX, DC_1 爲直徑作半圓周. 作 DX 之垂線 C_1X', YY' 聯 XX'. 則 XX', YY' 即所求.

Q.E.F.

〔證〕
$$\begin{aligned}\overline{XX'}^2-\overline{YY'}^2 &= DX\cdot C_1X-DY\cdot C_1Y\\ &=DX\cdot OC_1-DY\cdot OC_1\\ &=OC_1(DX-DY)\\ &=OC_1\cdot XY=2\overline{OC_1}^2\\ &=\overline{OC_1}^2+\overline{OC_2}^2=\overline{C_1C_2}^2=a^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}XX'\cdot YY' &=\sqrt{DX\cdot C_1X}\cdot\sqrt{DY\cdot C_1Y}\\ &=\sqrt{DX\cdot DY}\cdot\sqrt{C_1X\cdot C_1Y}\end{aligned}$$

$=DO\cdot OC_2$

〔∵ DO 爲 $\odot O_1$ 之切線〕
〔又$C_1X=C_1Y=OC_1=OC_2$〕

$=\overline{OB}^2=b^2$ $Q.E.D.$

（例九） $x=\dfrac{a^{n+1}}{b^n}$（n爲任意正整數）.

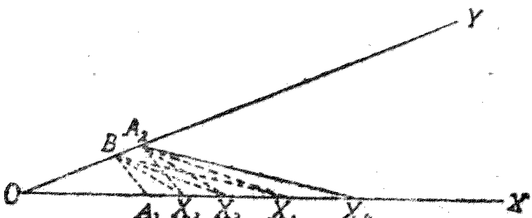
（注意） a, b 爲二已知線分，故 $n>2$時，a^{n+1} 在幾何中已無意義. 然 $\dfrac{a^{n+1}}{b^n}$ 則爲一次式，故x仍可以一線分表之，而本題仍不失爲一作圖題.

〔解析〕 $\dfrac{a^{n+1}}{b^n}=a\cdot\dfrac{a^n}{b^n}=a\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

設 $a\cdot\dfrac{a}{b}=x_1$, $a\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=x_1\dfrac{a}{b}=x_2$, $a\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=x_2\dfrac{a}{b}=x_3$,

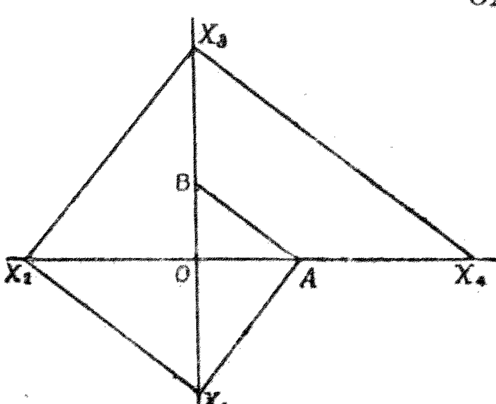
……, $a\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=a\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{a}{b}=x_{n-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)=x_n$.

〔解法一〕 作任意角XOY，在OX上取A_1令$OA_1=a$. 在OY上取A_2, B, 令$OA_2=a$, $OB=b$. 聯BA_1作$A_2X_1\parallel BA_1$ 交 OY 於 X_1. 則得 $OX_1=\dfrac{OA_1\cdot OA_2}{OB}=\dfrac{a^2}{b}=x_1$. 聯 BX_1.

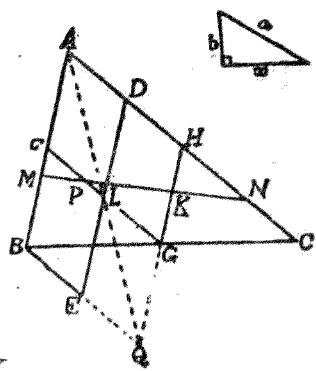


作 $A_2X_2 \parallel BX_1$ 交 OX 於 X_2。則得 $OX_2=\frac{OX_1\cdot OA_2}{OB}=x_2$。聯 BX_2 作 $A_2X_3 \parallel BX_2$ 交 OX 於 X_3。則得 $OX_3=\frac{OX_2\cdot OA_2}{OB}=x_3$。如上繼續求之可在 OX 上求得 $X_4, X_5 \cdots X_{n-1}, X_n$ 諸點，令 $OX_4=x_4=\frac{a^5}{b^4}$，$OX_5=x_5=\frac{a^6}{b^5}$，…，$OX_{n-1}=x_{n-1}=\frac{a^n}{b^{n-1}}$，$OX_n=x_n=\frac{a^{n+1}}{b^n}$　　Q.E.F.

〔解法二〕 作 X_1X_3, X_2X_4 直交於 O。在 OX_3, OX_4 上取 B, A, 令 $OB=b$, $OA=a$。作直角 BAX_1 交 OX_1 於 X_1。則 $\overline{OA}^2=OB\cdot OX_1$，$\therefore$ $OX_1=\frac{\overline{OA}^2}{OB}=\frac{a^2}{b}=x_1$。作直角 AX_1X_2 交 OX_2 於 X_2。則 $\overline{OX}_1^2=OA\cdot OX_2$，$\therefore$ $OX_2=\frac{\overline{OX}_1^2}{OA}=\frac{x_1^2}{a}$



$=\frac{a^3}{b^2}=x_2$. 作直角AX_2X_3交OX_3於X_3. 則同上$OX_3=\frac{\overline{OX_2}^2}{OX_1}$
$=\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{a^4}{b^3}=x_3$. 如上繼續作直角可求得$X_4, X_5, \cdots X_{n-1}\,X_n$諸點令$OX_4=x_4=\frac{a^5}{b^4}$, $OX_5=x_5=\frac{a^6}{b^5}\cdots OX_{n-1}=\frac{a^n}{b^{n-1}}$, $OX_n=x_n=\frac{a^{n-1}}{b^n}$.　　$Q.E.F.$



（例一〇）過定三角形ABC內一定點P求作一直線平分此三角形之面積.

〔解析一〕設MPN為所求之直線. $\triangle AMN=\frac{1}{2}\triangle ABC$. 過$P$作$AC$之平行線$FG$. 作$\square AFGH=\frac{1}{2}\triangle ABC$則因$\square AFGH=\triangle AMN$.
$\therefore \triangle GPK=\triangle FPM+\triangle HNK$.
然　$\triangle GPK \backsim \triangle FPM \backsim \triangle HNK$,

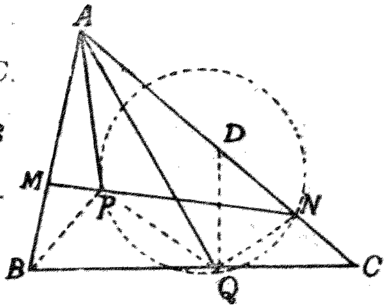
$$\therefore\quad \triangle GPK : \triangle FPM : \triangle HNK=\overline{PG}^2 : \overline{PF}^2 : \overline{HN}^2.$$

$\therefore\quad \overline{PG}^2=\overline{PF}^2+\overline{HN}^2$. 令$PG=a, PF=b, HN=x$.
則　$a^2=b^2+x^2$, $\therefore\ x=\sqrt{a^2-b^2}$, 故若$\square AFGH$可作時, 本題即可解決.

〔解法〕在AC上取D令$AD=\frac{1}{4}AC$. 作平行四邊形$BADE$$\left(\square BADE=\frac{1}{2}\triangle ABC\right)$. 過$P$作$FG \parallel AC$交$DE$於

L. AL, BE延線交於Q. 作平行四邊形$ABQH$, QH交FG於G $\left(\square AFGH=\square ABED=\frac{1}{2}\triangle ABC\right)$. 令$PG=a$, $PF=b$, 以a爲斜邊，b爲一直角邊作直角三角形，得其他一邊之長x($x^2=a^2-b^2$). 在HC上取N令$HN=x$. 聯NP交AB於M. 則MPN即爲所求直線. Q.E.F.

〔解析二〕 設MPN爲所求之直線. 則



$$\triangle AMN=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

$\therefore AM\cdot AN=\frac{1}{2}AC\cdot AB=\frac{1}{2}bc$. 在形內作$AQ$令$\angle NAQ=\angle MAP$，又令$AQ=\frac{bc}{2AP}$.

則 $AP\cdot AQ=\frac{bc}{2}=AM\cdot AN$, $\therefore AP:AN=AM:AQ$.

$\therefore$ $\triangle AMP\backsim\triangle AQN$. $\therefore\angle AMP=\angle AQN$, $\therefore$ A, M, Q, N共圓. $\therefore$ $\angle MNQ=\angle MAQ$. 即$\angle PNQ$爲已知角. 由此即可求得N.

〔解法〕 聯PB, 從AC中點D作DQ令$\angle ADQ=\angle APB$. 從A作AQ令$\angle CAQ=\angle BAP$. AQ, DQ交於Q. 以PQ爲弦，$\angle BAQ$爲弓形角作弓形弧交AC於N. 聯NP交AB於M，則MNP即所求. Q.E.F.

〔證〕 $\because\angle MNQ=\angle MAQ$, $\therefore A, M, Q, N$共圓.

$\therefore$ $\angle AMP=\angle AQN$. 又因$\angle MAP=\angle QAN$.

$\therefore$ $\triangle AMP\backsim\triangle AQN$. $AM:AQ=AP:AN$.

$\therefore\quad AM\cdot AN=AP\cdot AQ.$

又因$\angle BAP=\angle QAD$，$\angle APB=\angle ADQ$，

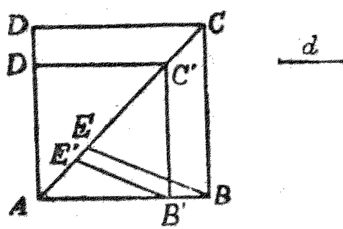
$\therefore\quad \triangle ABP\backsim\triangle AQD\quad \therefore AB:AQ=AP:AD.$

$\therefore\quad AP\cdot AQ=AB\cdot AD=AB\cdot\dfrac{AC}{2}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC$

$\therefore\quad AM\cdot AN=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC.\quad \triangle AMN:\triangle ABC=AM\cdot AN:AB\cdot AC,$

$\therefore\quad \triangle AMN=\dfrac{1}{2}\triangle ABC.$　$\therefore MN$為所求　　Q.E.D.

§520. **相似法**　有許多作圖題不易求其解答，往往可利用相似形各對應邊成比例而解之，舉例如下：



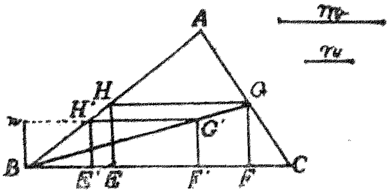
（例一）　作一正方形令其對角線減去一邊之差等於一定長 d。

〔解法〕　先作任意一正方形$AB'C'D'$在對角線AC'上取E'令$C'E'=B'C'$。聯$E'B'$。於是在AC'上取E令$AE=d$。從E作$E'B'$之平行線交AB'於B，作$BC\parallel B'C'$，作$CD\parallel C'D'$。則$ABCD$即所求正方形。　　Q.E.F.

〔證〕　$\because BE\parallel B'E'$，$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle AB'E'$，$\triangle CBE\backsim\triangle C'B'E'$。$\therefore \dfrac{CE}{C'E'}=\dfrac{CB}{C'B'}=\dfrac{BE}{B'E'}=\dfrac{AB}{AB'}$　$\because AB'=B'C'=C'E'$，$\therefore AB=BC=CE$。$\therefore ABCD$為正方形。$AC-BC=AC-CE=AE=d$。

Q.E.D.

（例二）　在所設三角形 ABC 內作一內接矩形令其二邊之比等於定比 $m:n$.



〔解法〕　作 BC 之平行線令其與 BC 之距離爲 n 交 AB 於 H'. 作矩形 $E'F'G'H'$ 令 $E'F'=m$. 聯 BG' 交 AC 於 G. 作 $GF\perp BC$, $GH\parallel BC$, $HE\perp BC$. 則 $EFGH$ 即所求.　　　　Q.E.F.

〔證〕　$\because H'G'\parallel HG$,　$\therefore \triangle BH'G'\backsim\triangle BHG$.

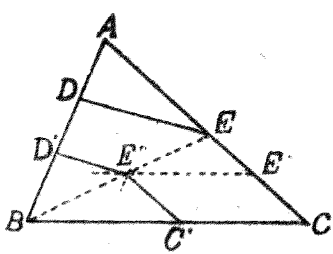
$\therefore$　$H'G':HG=BG':BG$, 又 $\because G'F'\parallel GF$,

$\therefore$　$\triangle BG'F'\backsim\triangle BGF$.　$\therefore G'F':GF=BG':BG$

$\therefore$　$H'G':HG=G'F':GF$.　$\therefore HG:GF=H'G':G'F'$ $=m:n$.　　　　Q.E.D.

（例三）　在所設三角形 ABC 之邊 AB, AC 上作 D, E 令 $BD=DE=EC$.

〔解法〕　在 AB 上任意取一點 D'. AC 上取 E' 令 $BD'=CE'$. 作 $E'E''\parallel BC$. 以 D' 爲中心 $D'B$ 爲半徑作弧交 $E'E''$ 於 E'', 聯 BE'' 交 AC 於 E. 作 $ED\parallel E''D'$. 則 D, E 即所求.　　　　Q.E.F.



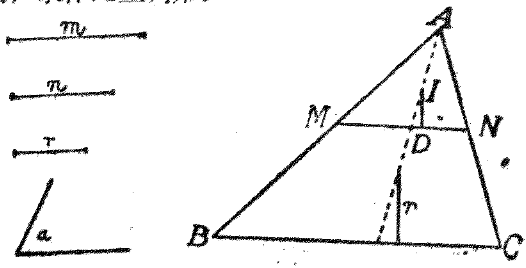
〔證〕　作 $E''C'\parallel AC$. 則因 $E''E'\parallel C'C$　$\therefore C'CE'E''$ 爲平行四邊形.　$\therefore E''C'=E'C=D'B=D'E''$.

因 $D'E''\parallel DE$, $C'E''\parallel CE$,　$\therefore \triangle BD'E''\backsim\triangle BDE$,

$\triangle BC'E'' \backsim \triangle BCE$. $\therefore \dfrac{BD}{BD'}=\dfrac{DE}{D'E''}=\dfrac{BE}{BE''}=\dfrac{EC}{E''C'}$.

$\therefore\quad BD=DE=EC$.　　　　Q.E.D.

（例四）已知三角形二邊之比及其所夾角，及內接圓半徑之長，求作此三角形.



〔已設〕　定長 m, n, r，及定角 $\angle a$.

〔求作〕　$\triangle ABC$ 令 $AB:AC=m:n$，$\angle A=\angle a$，其內接圓半徑等於 r.

〔解法〕　先作 $\triangle AMN$ 令 $\angle A=\angle a$，$AM=m$ $AN=n$. 則 $\triangle AMN$ 必爲所求 $\triangle ABC$ 之相似形.

次作 $\triangle AMN$ 之內接圓半徑 ID，則 ID 與 r 之比爲 $\triangle AMN$ 與 $\triangle ABC$ 之相似比.

$\therefore\quad ID:r=m:AB=n:AC$.

故可在 AM, AN 上求得 B, C. 聯 BC，

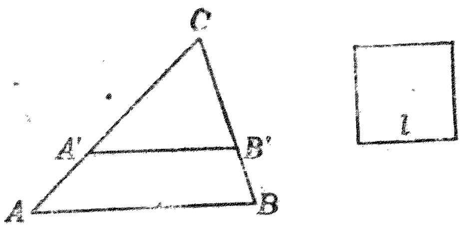
則 $\triangle ABC$ 即所求.　　　　Q.E.F.

（例五）已知三角形之二角及面積，求作此三角形.

〔已設〕　定角 a, β，定長 l.

〔求作〕　$\triangle ABC$ 令 $\angle A=\angle a, \angle B=\angle \beta$, $\triangle ABC=l^2$,

〔解法〕　先作任意 $\triangle A'B'C'$ 令 $\angle A'=\angle a'$, $\angle B'=\beta'$,



則 $\triangle A'B'C'$ 爲所求 $\triangle ABC$ 之相似形. 次將 $\triangle A'B'C$ 改爲等積正方形 l'^2, 則 $\triangle A'B'C' : \triangle ABC = l'^2 : l^2$.

但 $\triangle A'B'C : \triangle ABC = \overline{CA'}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{CB'}^2 : \overline{CB}^2$

$\therefore \quad l'^2 : l^2 = \overline{CA'}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{CB'}^2 : \overline{CB}^2$.

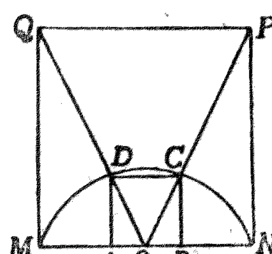
$\therefore \quad l' : l = CA' : CA = CB' : CB$.

故可在 CA', CB' 上求得 A, B. 聯 AB.

則 $\triangle ABC$ 即所求. Q.E.F.

（注意） 凡已知三角形二邊之比及夾角，或已知三角形之二角者皆可作其相似形，故若更知其一任何量時，皆可仿以上二例作之.

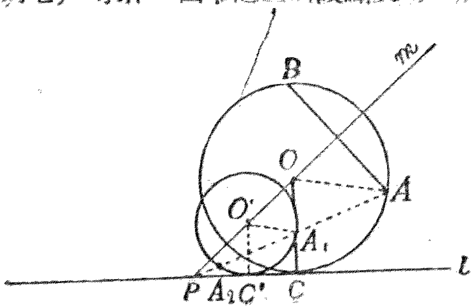
（例六） 在所設弓形內求作一內接正方形，令其一邊合於弓形弦，其他二頂點在弓形弧上.



（解法） 以弓形弦 MN 爲一邊作正方形 $MNPQ$. 取 MN 之中點 O, 聯 OP, OQ 交弓形弧於 C, D. 則 C, D 即所求正方形之二頂點. $\square ABCD$ 即所求. Q.E.F.

（證略）

（例七）　求作一圓令過二所設點及切一所設直線。



〔已設〕　二定點 A, B, 一定直線 l.

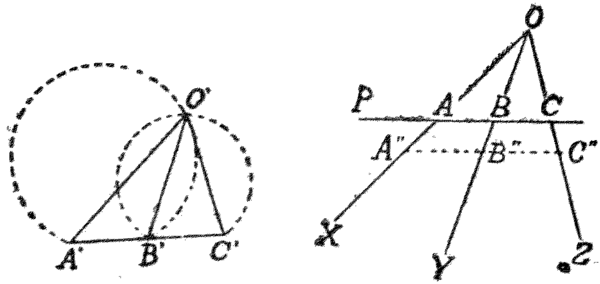
〔求作〕　一圓過 A, B, 且與 l 相切.

〔解法〕　作 AB 之垂直等分線 m 交 l 於 P. 在 m 上取任意點 O' 爲中心, l 之垂線 $O'C'$ 爲半徑作⊙O' 聯 AP 交⊙O' 於 A' 從 A 作 $A'O'$ 之平行線交 m 於 O. 以 O 爲中心. OA 爲半徑作 ⊙O 即所求.　　Q.E.F.

〔證〕　作 $OC \perp l$. 則 $\triangle POC \backsim \triangle PO'C'$, $\therefore$ $OC : O'C' = PO : PO'$. 又 $OA \parallel O'A'$, $\therefore$ $\triangle POA \backsim \triangle PO'A'$, $\therefore$ $OA : O'A' = PO : PO'$. $\therefore$ $OC : O'C' = OA : O'A'$. $\because$ $O'C' = O'A'$, $\therefore$ $OC = OA$. 又 m 爲 AB 之垂直等分線 $\therefore$ $OB = OA$. $\therefore$ ⊙O 爲所求.　　Q.E.D.

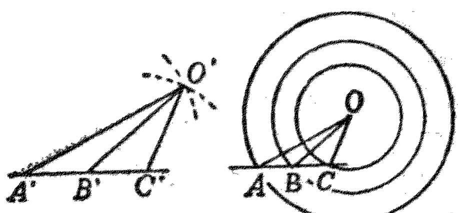
〔討論〕　若 A, B 在 l 之兩旁時, 則本題無解答. 若 A, B 在 l 同旁而其聯線平行於 l 時, 則有一個解答, 普通則有兩個解答. 因如圖 PA 交⊙O' 於兩點 A'_1, A'_2. 故以 A'_2 代 A'_1 同樣尚可得一解答也.

（例八）　OX, OY, OZ 爲所設共點之三直線, P 爲所設點. 求過 P 作直線交 OX, OY, OZ 於 A, B, C 而令 $AB = BC$.



〔解法〕　在任意線分$A'C'$上取中點B'. 以$A'B'$爲弦，$\angle XOY$爲弓形角作弓形. 以$B'C'$爲弦，$\angle YOZ$爲弓形角作弓形. 兩弓形交於O'在OX, OY, OZ上取A'', B'', C''令$OA''=O'A', OB''=O'B', OC''=O'C'$過$P$作$A''B''C''$之平行線$PABC$即所求.（證略）　　　　Q.E.F.

（例九）　作所設三同心圓之割線ABC交外圓於A，中圓於B，內圓於C，令$AB=BC$.



〔解法〕　在任意直線上取三點A', B', C'令$A'B'=B'C'$.

作與A', B'距離之比等於$OA:OB$之點之軌跡
又與B', C'距離之比等於$OB:OC$之點之軌跡 }（軌跡10）

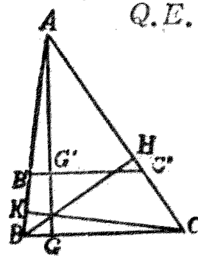
二軌跡交於O'. 聯$O'A', O'B'$.

於是從O作外圓半徑OA，中圓半徑OB令$\angle AOB=\angle$

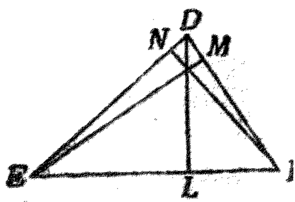
$A'O'B'$. 聯AB延長之交內圓於C. 直線ABC即所求.

（證略）　　　　Q.E.F.

（例一〇）　已知三角形之三個高，求作三角形.



〔解法一〕　設 l,m,n 爲所設三個高之長. 先作三角形DEF令$EF=l$, $DF=m$, $DE=n$. 在$\triangle DEF$內作三個高DL, EM, FN. 再作三角形$AB'C'$令$B'C'=DL$, $AC'=EM, AB'=FN$. 在$\triangle AB'C'$內再作高$AG'\perp B'C'$延長至G令$AG=EF=l$. 過G作$B'C'$的平行線交AB'於B, 交AC'於C. 則$\triangle ABC$即所求之三角形.



Q.E.F.

〔證〕　作$BH\perp AC, CK\perp AB$.

則因　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AG\cdot BC=\frac{1}{2}BH\cdot AC=\frac{1}{2}CK\cdot AB$,

$$\therefore\quad AG:BH:CK=\frac{1}{BC}:\frac{1}{AC}:\frac{1}{AB}$$

$$=\frac{1}{B'C'}:\frac{1}{AC'}:\frac{1}{AB'}$$

$$=\frac{1}{DL}:\frac{1}{EM}:\frac{1}{FN}.$$

又因　$\triangle DEF=\frac{1}{2}DL\cdot EF=\frac{1}{2}EM\cdot DF=\frac{1}{2}FN\cdot DE$,

$$\therefore\quad EF:DF:DE=\frac{1}{DL}:\frac{1}{EM}:\frac{1}{FN}.$$

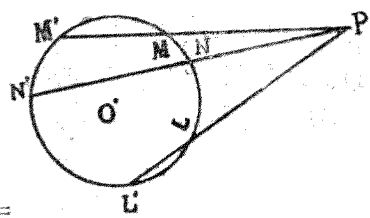
$$\therefore\quad AG:BH:CK=EF:DF:DE=l:m:n$$

但因　$AC=l$,　$\therefore$ $BH=m$, $CK=n$.

故$\triangle ABC$即所求之三角形.　　　　　　　Q.E.D.

（注意）以上解法，似甚巧妙，然並不普徧．因若當$m+n\leqq l$時，上述作法，不能成立．然三角形之兩個高之和並不定須大於第三個高．則當$m+n\leqq l$時，本題依舊有解答．故上述解法之非爲圓滿之法可以顯見．然從上述解法，可知其根據實爲“三角形三邊之比等於其各對應高之反比”．故從已知三個高即可知三邊之比，而得其相似形．故本題實爲求已知三線分之反比線分而已．則固可用他種較好方法求之．茲舉一較好之法如下：

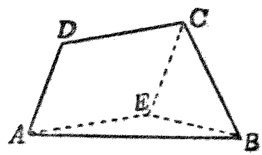
〔解法二〕　從任意圓⊙O外任意點P至⊙O作三線分$PL=l$, $PM=m$, $PN=n$. PL, PM, PN各交⊙O於又一點L', M', N'. 作$\triangle A'B'C'$令$B'C'=PL'$, $A'C'=PM'$, $A'B'=PN'$. 則$\triangle A'B'C'$即所求$\triangle ABC$之相似形.　　　　　　　Q.E.F.



（$\triangle ABC$之作法及證略）

§521. **平形移動法　旋轉移動法**　圖形諸部分相隔離，作圖無從着手發生困難，有時可用平行或旋轉移動法以接近之．以下例一至例八爲用平行移動法，例九至例一二爲用旋轉移動法．茲序述如次．

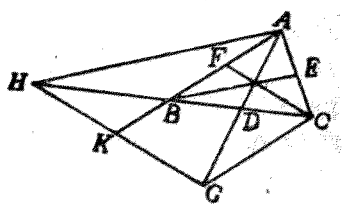
（例一）已知四角形之四個角及一雙對邊，求作此四角形.



〔解析〕 設$ABCD$爲所求四角形，$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$爲已知角，$AB, CD$爲已知邊．作$AE \,\underline{\parallel}\, DC$（即將$DC$平行移動至$AE$）．聯$CE, EB$．則$\angle BAE = \angle A - \angle DAE = \angle A - (180^\circ - \angle D) = \angle A + \angle D - 180^\circ$爲已知角，又$AB, AE$爲已知邊．

$\therefore$ $\triangle ABE$爲可作形．又因$\angle A, \angle B$爲已知角，故AD, BC之方向一定．$EC \parallel AD$．故可得EC, BC之交點C．作成▱$AECD$得D．即得解答．　　Q.E.F.

（例二） 已知三角形三中線，求作此三角形．



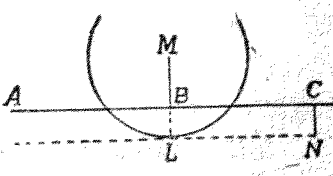
〔解析〕 設AD, BE, CF爲$\triangle ABC$之三中線．從A作$AH \parallel EB$，交CB於H．

$\because$ $AE = EC$，$\therefore$ $AH = 2BE$，$HB = BC$．從C作$CG \parallel AB$，交AD於G．$\because$ $BD = DC$，$\therefore$ $AG = 2AD$，$AB = GC$．聯HG交AB於K，則因$BK \parallel CG$，$HB = BC$，$\therefore$ $BK = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}AB = BF$．$\therefore$ $KG = HK = FC$．$\therefore$ $HG = 2FC$．

$\therefore$ $\triangle AGH$之三邊各爲已知三中線之二倍爲可作形．B爲$\triangle AGH$之重心即可求得$\triangle ABC$　　Q.E.F.

〔解法及證略〕

（例三） A, M, N爲三定點求過A作一直線令M, N分居此直線之兩旁且與此直線距離之和等於一定長k．



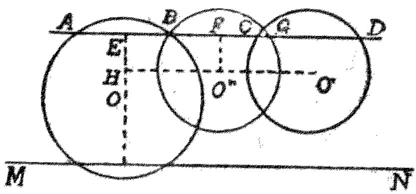
〔解析〕　設ABC爲所求之直線。$MB+NC=k$。

將CN平行移動至BL與MB接成一直線，則$ML=k$。又 ∵$BLNC$爲矩形，∴$\angle MLN$爲直角。故NL爲以M爲中心，k爲半徑之圓之切線。因得解法如下：

〔解法〕　以M爲中心，k爲半徑畫圓。從N作⊙M之切線NL。過A作LN之平行線ABC即所求。

（證略）　　　　　　　　　　　　　　　　Q.E.F.

（例四）⊙O，⊙O'爲二定圓，MN爲定直線。求作MN之平行線令所截⊙O，⊙O'之二弦之和等於定長k。



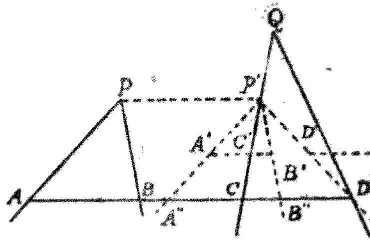
（解析）　設AD爲所求之直線。$AB+CD=k$又$AD \parallel MN$。將⊙O'平行移動至⊙O''令C合於B，D合於G，則$AG=k$。作$OE \perp AB$，$O''F \perp BG$。則$EF=\frac{1}{2}k$。$O'O''$交OE於H，則$HO'=EF=\frac{1}{2}k$。因得解法如下：

〔解法〕　從O作MN之垂線，從O'作MN之平行線，二線交於H。$O'H$上取O''令$HO''=\frac{1}{2}k$。以O''爲中心，⊙O'之半徑爲半徑作⊙O''交⊙O於B。過B作MN之平行線AD，即所求。（證略）　　　　　　Q.E.F.

（例五）$\angle APB$，$\angle CQD$爲二定角。求作一定方向之直線交二角之各邊於A, B, C, D令$AB=CD$。

〔解法〕　依所設定方向作PP'交QC於P'，作$P'A'' \parallel PA$，$P'B'' \parallel PB$。作PP'之任意一平行線$A'D'$交$P'A''$於

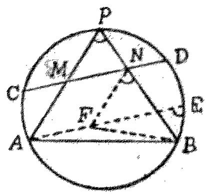
A', $P'C$ 於 C'. $P'B''$ 於 B'. 在 $A'D'$ 上取 D' 令 $A'B'=C'D'$. 聯 $P'D'$ 交 QD 於 D. 過 D 作 PP' 之平行線 AD 即所求.



（證略）　　Q.E.F.

（例六）　AB, CD 爲圓內二定弦. 求在 $\frown CD$ 上作點 P 令 PA, PB 在 CD 上截取部分等於定長 k.

〔解析〕　設 P 爲所求之點. $MN=k$. 作 $AE \parallel CD$, $NF \parallel PA$. 則 $AF=MN=k$. 又 $\angle FNB=\angle APB=\angle AEB$. 因得解法如下：

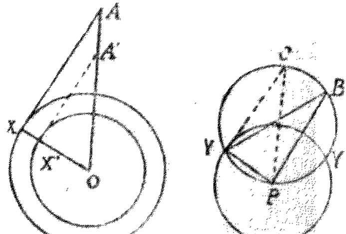


〔解法〕　作 $AE \parallel CD$ 在 AE 上取 F 令 $AF=k$. 作⊙FBE 交 CD 於 N. 聯 BN 交 $\frown CD$ 於 P 即得.

Q.E.F.

（例七）　⊙O, ⊙P 爲二定圓, A, B 爲二定點. 求作二圓之平行半徑 OX, PY 令 $\angle OAX=\angle PBY$.

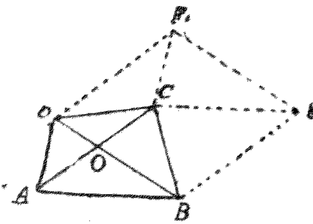
〔解法〕　聯 OA. 在 OA 上取 A' 令 $OA:OA'$ 等於⊙O 半徑：⊙P 半徑. 從 P 作 PC 令 $PC \perp OA'$. 作⊙PBC 交⊙P 於 Y. 聯 PY 作 $OX \parallel PY$. OX, PY 即所求.



（證略）　　Q.E.F.

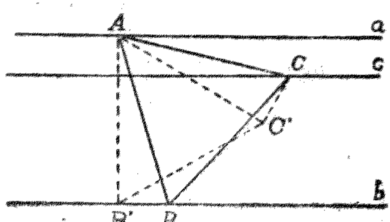
（例八）　已知四角形之任意二邊及二對角線之長，又

知二對角線之夾角，求作此四角形.



〔解析〕 設$ABCD$爲所作之四角形. 令AB平行移動至CE, AD平行移動至CF. 聯DF, FE, BE.
則$\triangle CEF \cong \triangle ABD$. $ACFD$, $ABEC$, $DBEF$皆爲平行四邊形. $\therefore BE=AC, FE=DB$, $\angle DFE=\angle AOB$皆爲已知量，故可先作$\square DBEF$.
又因$CE=AB, CF=AD$. $\therefore$從C至$\square DBEF$各頂點之距離即爲原四角形$ABCD$各邊之長. 故任意知其二邊之長，即可決得C點而得解答.（解法略） Q.E.F.

（例九） 在已設三平行線上各取一點A,B,C令$\triangle ABC$爲正三角形.



〔解析〕 設$\triangle ABC$爲所求之正三角形. 將AB依A點旋轉至與所設三直線垂直交b於B'. 同時AC亦依A點旋轉至AC'; 且令$AC'=AB'$.
則因$AB=AC, AB'=AC'$，又$\angle BAB'=\angle CAC'$. 故$\triangle ABB' \cong \triangle ACC'$. $\therefore \angle AC'C=\angle AB'B=R\angle$. 因得如下之解法：

〔解法〕 作a,b之公垂線AB'. 以AB'爲一邊作正三角形$AB'C'$. 從C'作AC'之垂線交c於C. 聯AC, 作AB

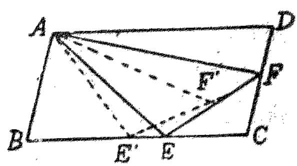
令$\angle CAB=60^\circ$交b於B。聯BC。則$\triangle ABC$即所求。

Q.E.F.

〔證〕 $\angle CAB=60^\circ=\angle C'AB'$，$\angle CC'A=R\angle=\angle BB'A$，又$AC'=AB'$，$\therefore \triangle ACC'\cong ABB'$。$\therefore AC=AB$。又$\angle CAB=60^\circ$，$\therefore$ $\triangle ABC$為正三角形。 Q.E.D.

（注意） 上述解法中，AB'並非必須為a, b之公垂線，任意一截線交a, b於A, B'均可。只須作$C'C$時令$\angle AC'C=\angle AB'B$，其他完全無異。

（例一〇） 在平行四邊形$ABCD$之二邊BC, DC上各取點E, F，令$\triangle AEF$與所設三角形相似。



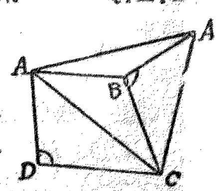
〔解法〕 在BC上任取E'。作$\triangle AEF'$令與所設三角形相似。作$F'F$令$\angle AF'F=\angle AE'C$交CD於F作AE令$\angle FAE=\angle F'AE'$交BC於E，則$\triangle AEF$即所求。 Q.E.F.

〔證〕 $\because \angle FAE=\angle F'AE'$，$\therefore \angle FAF'=\angle EAE'$，又$\angle AF'F=\angle AE'E$ $\therefore \triangle FAF'\backsim\triangle EAE'$ $\therefore AF:AE=AF':AE'$。又$\angle FAE=\angle F'AE'$

$$\therefore \quad \triangle AEF\backsim\triangle AE'F'$$

$\therefore$ $\triangle AEF$與所設三角形相似。 Q.E.D

（例一一） 求作四角形$ABCD$，已知$AB, AD, \angle B, \angle D$及$BC:CD$。



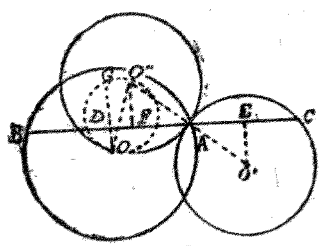
〔解析〕 設$ABCD$為所求之四角形聯AC以BC為一邊作$\triangle A'BC$令相似於$\triangle ADC$。則$BA':AD=BC:DC$為已

知比. ∵ AD爲已知長, ∴ BA'爲已知長. 又 $\angle ABA'=4R\angle-(\angle ABC+\angle A'BC)=4R\angle-(\angle B+\angle D)$ 爲已知角. 又AB亦爲已知. ∴可先作得 $\triangle ABA'$.

又因$\angle ABC$爲定角, 故BC之方向一定.

又$AC:A'C=CD:BC$爲定比. 故可應用軌跡, 求得C之軌跡與BC交於C. 於是再可求得D, 而得所求之四角形$ABCD$. (解法及證略) Q.E.F.

(例一二) 過相交二定圓O, O'之一交點A. 求作一割線BAC令BA, AC二弦之差等於定長d.



〔解析〕 設 BAC 爲所求之線. 作$OD \parallel O'E \perp BC$. 則 $AD=\frac{1}{2}AB, AE=\frac{1}{2}AC$. ∴ $AD-AE=\frac{1}{2}(AB-AC)=\frac{1}{2}d$. 在$AD$上取$F$令$AF=AE$, 則 $DF=AD-AF=AD-AE=\frac{1}{2}d$.

故可倣照 §257 例四, 得如下之解法:

〔解法〕 固定A點旋轉$\odot O'$兩直角至$\odot O''$ 聯OO''以OO''爲直徑作$\odot OGO''$. 作弦$O''G=\frac{1}{2}d$. 過A作$O''G$之平行線交$\odot O, \odot O'$於B, C. 則BAC即所求之直線.

Q.E.F.

〔證〕 聯OG交BC於D, 則因$BC \parallel GO''$ $\angle OGO''=R\angle$, ∴$GD \perp BC$, ∴ $AB=2AD$. 作$O''F \parallel O'E \perp BC$. 則$\triangle AO''F \cong \triangle AO'E$, ∴ $AF=AE$. ∴ $AC=2AE=2AF$.

$\therefore\quad AB-AC=2AD-2AF=2(AD-AF)=2DF.$

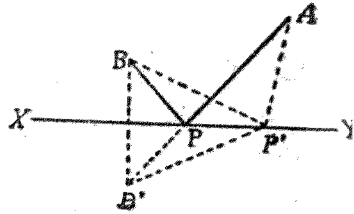
但$DFO''G$為矩形，$\therefore DF=O''G=\frac{1}{2}d$

$\therefore\quad AB-AC=2DF=d$

$\therefore\quad BAC$為所求之直線.　　Q.E.D.

§522. **對稱法　轉換法**　作圖題有甚多須利用對稱定理解者如例一至八，亦有用轉換法解者如例九例十.

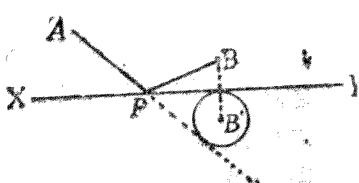
（例一）　A,B為定直線XY同側二定點. 求在XY上作一點P令$AP+PB$為最小.



〔解法〕　作B關於XY之對稱點B'. 聯AB'交XY於P. P即所求點.　Q.E.F.

〔證〕　設P'為XY上其他一點. 則$AP'+P'B'>AB'=AP+PB'$. $\because P'B=P'B', PB=PB'$, $\therefore AP'+P'B>AP+PB$. 即$AP+PB$為最小.　　Q.E.F.

（例二）　A,B為定直線XY同側二定點. 求在XY上作一點P令$\angle APX=2\angle BPY$.



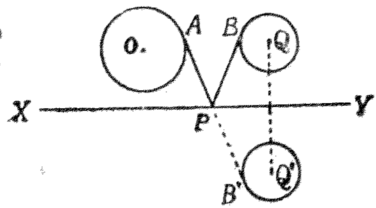
〔解法〕　作B關於XY之對稱點B'，以B'為中心，作XY之切圓$\odot B'$. 從A作$\odot B'$之切線交XY於P. P即所求點.（證略）　　Q.E.F.

（例三）　$\odot O, \odot Q$為定直線XY同側二定圓. 求在XY

上作一點P令從P至⊙O,⊙Q所作切線與XY成等角.

〔解法〕 作⊙Q關於XY之對稱形⊙Q'. 作⊙O, ⊙Q'. 之公切線AB'交XY於P. P即所求點

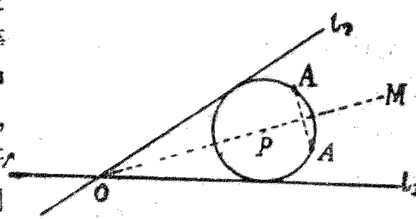
(證略) Q.E.F.



本題有四解答

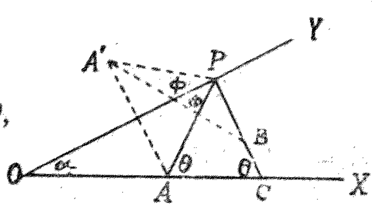
(例四) 作一圓令過所設一定點A,且切二定直線l_1,l_2.

〔解析〕 設l_1,l_2交於O, OM爲交角之等分線. P爲所求圓之中心. 則因l_1,l_2同切⊙P,故P必在OM上⊙P旣過A點, 則亦必過A關於OM之對稱點A'. 故可先作OM, 繼作A'. 於是可作一圓令過A,A'兩定點, 再切l或l'一直線即得. Q. E. F.



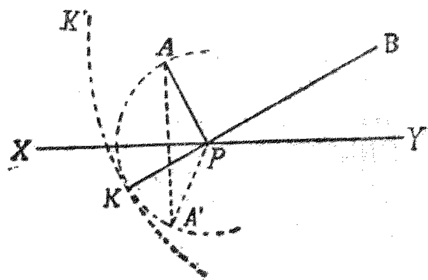
(例五) A爲定角XOY邊OX上一定點. B爲角內一定點. 求在OY上作一點P. 令PB延線交OX於C而$PA=PC$.

(解析) 設P爲所求之點. $PA=PC$,則$\angle PAC=\angle PCA$令$\angle XOY$爲α, $\angle PAC=\angle PCA$爲θ, $\angle OPA$爲ϕ.則$\angle OPC=\phi+\angle APC=\phi+(180^\circ-2\theta)=\phi+180^\circ-2(\alpha+\phi)=180^\circ-2\alpha-\phi$. 故$\angle OPC$



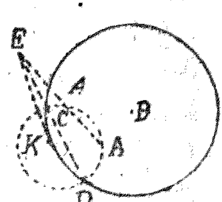
$+\phi=180^\circ-2\alpha$ 爲已知角．故若取A關於OY之對稱點A'，聯PA'，則$\angle A'PB=\angle A'PO+\angle OPC=\phi+\angle OPC=180^\circ-2\alpha$。故以$A'B$爲弦，$180^\circ-2\alpha$爲弓形角作弓形弧即得與$OY$之交點$P$，即爲所求。　　Q.E.F.

（例六）A,B爲二定點，XY爲定直線。求在XY上取點P令$AP+PB$等於定長k。



〔解析〕設P爲所求之點．延長BP至K令$PK=PA$．則$BK=BP+PA=k$爲所設之長．以B爲中心，k爲半徑作弧KK'．作A關於XY之對稱點A'．則P必爲過A,A'且切$\frown KK'$之圓之中心可知，故若知過二定點且切一定圓之圓之作法，本題即得解決．但此爲一普通作圖題，玆述其解法如下：

〔補助作圖題〕求作一圓令過二定點A,A'且切一定圓B.

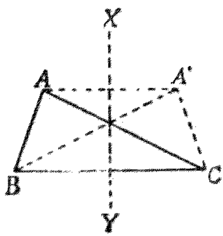


〔解法〕過A,A'作任意一圓交$\odot B$於C,D聯AA'，CD交於E．從E作EK切$\odot B$於K．$\odot AA'K$即所求．　　Q.E.F.

因照作法$\overline{EK}^2=EC\cdot ED=EA\cdot EA'$.

$\therefore$ EK切$\odot AA'K$於K．$\therefore$ EK爲二圓之公切線，其切點爲K。$\therefore \odot B$，$\odot AA'K$切於K．　　Q.E.D.

（例七）已知三角形之二邊及此二邊對角之差，作此三角形.

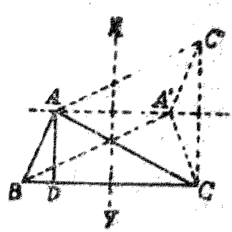


〔解析〕設 $\triangle ABC$ 爲所求之三角形、AC, AB爲已知長，$\angle B-\angle C$爲已知角度.

以BC之垂直等分線XY爲軸作A之對稱點 A'. 聯AA', BA', CA'. 則因B, C互爲對稱點，故 $\triangle A'BC$, $\triangle ABC$關於XY爲對稱而爲合同形. $\therefore \angle ABA'=\angle ABC-\angle A'BC=\angle ABC-\angle ACB$爲已知角. 又$A'B=AC$爲已知長. 故可先作$\triangle ABA'$, 以$AA'$之垂直等分線$XY$爲軸，作$B$之對稱點$C$即得.

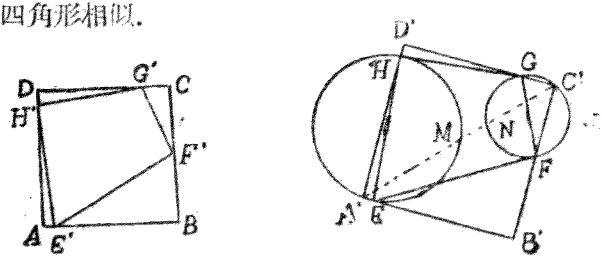
（證略）　　$Q.E.F.$

（例八）已知三角形之底，高及兩底角之差. 求作此三角形.



〔解析〕設 $\triangle ABC$ 爲所求之三角形，底BC及高AD爲已知長，$\angle B-\angle C$ 爲已知角度以 BC 之垂直等分線XY爲軸，作A之對稱點A'. 以AA'爲軸作 C 之對稱點C'，聯 $A'B, A'C, A'C', AC', CC'$. 則$AB=A'C=A'C'$, $A'B=AC=AC'$, $\therefore ABA'C'$. 爲▱. $\therefore \angle BAC'=2R\angle-\angle ABA'=2R\angle-(\angle ABC-\angle A'BC)=2R\angle-(\angle B-\angle C)$爲已知角. 又因$CC'=2AD$爲已知長. 故$C'$爲已知點. 故可先作 $R\triangle BCC'$, 再以BC'爲弦作弓形令弓形角等於 $2R\angle-(\angle B-\angle C)$而得$A$點.（證略）　　$Q.E.F.$

（例九）　在一所設正方形內求作一內接四角形令與一所設四角形相似.



〔已設〕　正方形 $ABCD$, 四角形 $EFGH$.

〔求作〕　四角形 $E'F'G'H'$, 其頂點各在 $ABCD$ 各邊上, 且與 $EFGH$ 相似.

〔解法〕　先作$EFGH$之外接正方形如下：以EH, FG各爲直徑作圓, 在形內半圓周上各取中點M, N, 聯MN延長之, 交外半圓周於A', C', 聯$A'E$, $C'F$延長之交於B', 聯$A'H$, $C'G$ 延長之交於D', 則 $A'B'C'D'$ 爲正方形.

既得$EFGH$之外接正方形$A'B'C'D'$, 於是可用比例法AB在上取 E' 令AE' : $A'E$ = AB : $A'B'$.

同樣再在各邊上取F', G', H', 聯$E'F'$, $F'G'$, $G'H'$, $H'E'$.

則 $E'F'G'H'$ 即所求.　　　　Q. E. F.

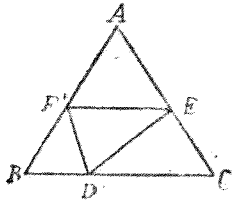
（學者自證之）

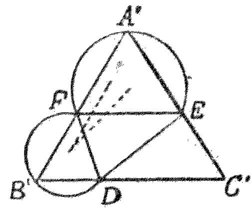
（例一〇）　在一所設三角形內作一內接三角形令與他一所設三角形爲合同形.

〔已設〕　二三角形ABC, DEF.

〔求作〕　$\triangle D'E'F'$ 內接於$\triangle ABC$且與$\triangle DEF$合同.

〔解法〕　先作$\triangle DEE$ 之外接三角形$A'B'C'$ 令合同於





$\triangle ABC$如下：作弓形$FA'E$, $FB'D$令其弓形角各等於$\angle A$, $\angle B$. 過F作直線令為兩弓形弧所截之部分等於AB(§257例四). 聯$A'E$, $B'D$延長之交於C'.

則得$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

於是可在BC上取D'令$BD'=B'D$. 同樣在AB, AC上取F', E'. 聯成$\triangle D'E'F'$即所求. Q.E.F.

(證略)

〔討論〕 參閱 §257 例四.

§523. **求作圓之數要例** 凡圓常以三條件決之. 玆舉要例如下：

(例一) 過三定點.

〔解法〕 即三定點為頂點所成三角形之外接圓. 若三定點共線時無解答, 否則有一解答.

(例二) 切三定直線.

〔解法〕 即三定直線所成三角形之內切圓及旁切圓. 故普通可有四解答. 若二直線平行時, 有二解答. 三直線平行時無解答. 三直線共點時, 則四圓合一成一點.

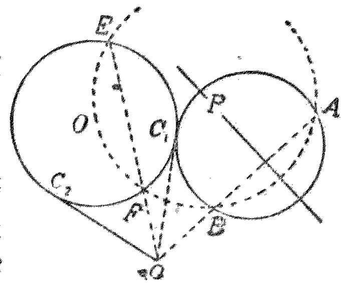
(例三) 過二定點切一定直線.

〔解法〕 見相似法例七.

(例四) 過一定點切二定直線.

〔解法〕　見對稱法例四。

（例五）　過二定點切一定圓。



〔解法〕　設⊙O爲定圓，A，B爲定點。在AB之垂直等分線上取任意點P作⊙P令過A，B且交⊙O於E，F。EF，AB交於G。從G作⊙O之切線GC_1，GC_2。則過A，B，C（C_1或C_2）所作之圓即所求。　Q.E.F.

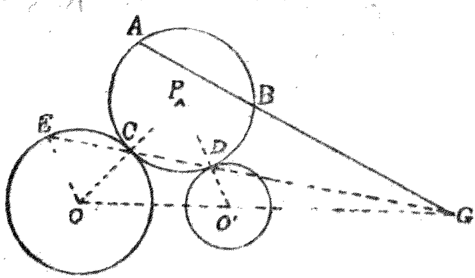
〔證〕　因$\overline{GC}^2=GE\cdot GF=GA\cdot GB$，

$\therefore$　GC爲⊙O及⊙ABC之公切線。

$\therefore$　⊙ABC切⊙O於C。　Q.E.D.

〔討論〕　本題普通有二解答，若一定點在定周上，則有一解答；若二定點一在圓內一在圓外時，則無解答。

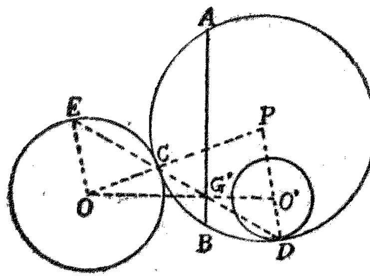
（例六）　過一定點，切二定圓。



〔解析〕　設A爲定點，⊙O，⊙O′爲定圓。⊙O爲所求之圓，切⊙O於C，切⊙O′於D。聯CD交OO'於G，交⊙O於又一點E。聯OE，OP，$O'P$。因C，D爲切點，故OP，$O'P$過

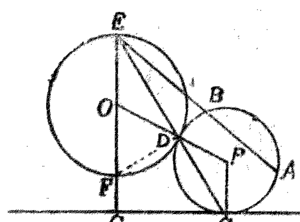
C, D; 故 $\angle OEC = \angle OCE = \angle PCD = \angle PDC = \angle O'DG$. $\therefore OE \parallel O'D$. $\therefore G$爲⊙O, ⊙O' 之相似中心. 聯AG交⊙P於又一點B, 則$GA \cdot GB = GC \cdot GD$. 因$C, D$爲一雙非對應點, 故 $GC \cdot GD$ 爲定値, 故 $GA \cdot GB$ 爲定値. 故可求得B點. 即可依上例解之. Q.E.F.

〔討論〕 本題普通有四解答. 因例五可有二解答. 然二圓有兩個相似中心. 故同樣如右圖從相似內心G' 可別得一點 B', 又可得二解答.



（例七） 過一定點, 切一定直線及一定圓.

〔解析〕 設⊙P爲所求之圓, 過所設定點A, 切所設定直線GC於 C, 切所設定圓 ⊙O於D. 聯OP. 因D爲切點, 故在OP上. 聯CD延長之交⊙O於E. 聯 EO延長之交 ⊙O於 F, 交CG於G. 則因$\angle GED = \angle ODE = \angle PDC = \angle PCD$, $\therefore EG \parallel PC \perp GC$. $\because EF$爲直徑, $\therefore \angle EDF = R\angle = \angle EGC$, $\therefore G, F, D, C$共圓. $\therefore ED \cdot EC = EF \cdot EG$.



聯EA交⊙P於又一點B. 則$EA \cdot EB = EC \cdot ED$.

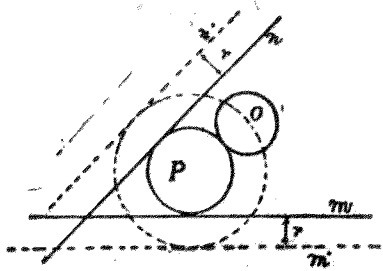
$\therefore$ $EA \cdot EB = EG \cdot EF$.

故可先從O作GC之垂線$EOFG$. 再在EA上求B令EB

$=\dfrac{EF\cdot EG}{EA}$. 於是可依例三或例五解之.　Q.E.F.

〔討論〕 本題普通有二解答與例三例五同.

(例八) 切二定直線及一定圓.

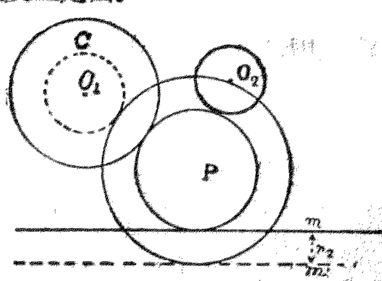


設 m, n 爲定直線, ⊙O 爲定圓, 其半徑爲 r.

〔解法〕 作 m, n 之平行線 m', n' 令其間距離爲 r. 依照例四作 ⊙P 過 O 點切直線 m', n' 即所求圓之同心圓.　Q.E.F.

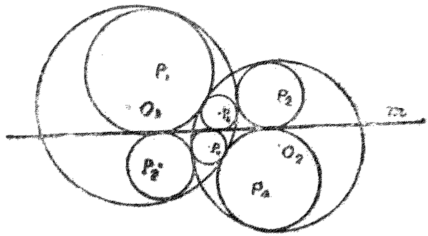
〔討論〕 本題普通有四解答. 因例四可有二解答. 而 m, n, 之其他一側尙有一雙距離爲 r 之平行線, 又可得二解答也.

〔例九〕 切一定直線及二定圓.

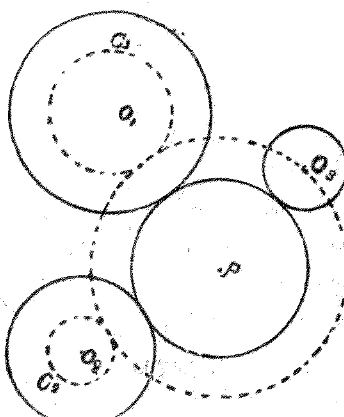


〔解法〕 設 ⊙O_1, ⊙O_2 爲所設二定圓, 其半徑各爲 r_1, r_2, m 爲所設定直線. 以 r_1-r_2 (或 r_1+r_2) 爲半徑作 O_1 之同心圓 C. 作 m 之平行線 m' 令其與 m 之距離爲 r_2, 依照例七作 ⊙P 令過 O_2 點切 ⊙C 及切直線 m', 即所求圓之同心圓.　Q.E.F.

〔討論〕 本題最多可有六解答. 如下圖當 m 與 ⊙O_1, 與 ⊙O_2 互交時.



(例一〇) 切三定圓.



〔解法〕 ⊙O_1,⊙O_2,⊙O_3爲所設三定圓. 其半徑各爲r_1,r_2,r_3以r_1-r_3(或r_1+r_3)半徑作⊙O_1之同心圓C_1. 以r_2-r_3(或r_2+r_3)爲半徑作⊙O_2之同心圓C_2,依照例六作⊙P令過O_3點且切⊙C_1及⊙C_2,即所求圓之同心圓.

Q.E.F.

〔討論〕 本題最多可有八解答. 圖僅示三定圓全在⊙P外之一種,三定圓可全在⊙P內又一種,二圓在⊙P外一圓在⊙P內有三種,二圓在⊙P內一圓在⊙P外又有三種;共計有八種也.

習題二十六

1. 作一圓令過一定點而與二同心圓相切.
2. 作一圓令與一定直線及二同心圓相切.

3.　已設定圓直徑兩端二切線，求作第三切線令介乎二切線間之部分等於定長.

4.　已設一定點P及二平行線$XY, X'Y'$. 求在$XY, X'Y'$內作一線分令等於定長，且從P至此線分所作垂線過其中點.

5.　已知三角形之頂角及底邊爲頂角等分線所分二部分之長，求作此三角形.

6.　P爲$\angle XOY$內一定點. 求過P作一直線交OX, OY於A, B令$PA : PB$等於定比.

7.　P爲$\angle XOY$內一定點. 求在OX, OY上各取點A, B令$PA=PB$且$\angle APB$爲直角.

8.　AB, CD爲不平行而未相交之二線分. P爲一定點. 求過P作一直線與AB, CD之延線共點.

9.　AB, CD爲不平行而未相交之二線分. 求作一直線令等分AB, CD延線之夾角.

10. 求在一定直線上取一點令與一定角二邊之距離之差爲定長.

11. 過定圓周上二定點作二平行弦令其和等於定長.

12. 以所設弓形弧上一定點爲頂點作正三角形令內接於此弓形.

13. 過二定點求作一圓令與一定圓相交所得之公共弦與一定直線平行.

14. 在定圓內作一內接直角三角形令其二直角邊各過一定點.

15. 過定圓內一定點求作一弦令此弦爲定點所分兩部

分之差爲定長.

16. P, Q 爲二定點. $XY, X'Y'$ 爲二定平行線. 求過 P 作一直線交 $XY, X'Y'$ 於 A, B 令 $QA=QB$.

17. 在定圓內作一內接直角三角形令其一邊過一定點，一銳角等於一定角.

18. AB, CD 爲圓內二定弦. 求在 CD 上取一點 E，令 AE, BE 延長交圓周於 F, G 而 FG 爲定長.

19. P, Q 爲二定點；$XY, X'Y'$ 爲二定平行線. 求作一菱形令一雙對邊在 $XY, X'Y'$ 上而又一雙對邊過 P, Q.

20. 在三角形底邊上求作一點令與其他二邊距離之和爲定長.

21. 在所設三角形內求作一內接正方形.

22. 過相交二圓一交點求作一直線令其被二圓所截二弦之比等於一定比.

23. 過所設點 P 求作一直線交所設圓周於 A, B 令 $PA : PB$ 爲定比.

24. 在 $\triangle ABC$ 內求作一點 P，令

$$\triangle PAB : \triangle PAC : \triangle PBC = 1 : 2 : 3.$$

25. 在三角形內求作一點令與三邊距離之比等於 $1 : 2 : 3$.

26. 過一定點求作一直線，令與其他二定點距離之比等於 $1 : 2$.

27. P 爲定角 $\angle XOY$ 內一定點. 求在 OX 上取一點 A，令 AP 等於 A 與 OY 之距離.

28. P 爲定角 $\angle XOY$ 內一定點. 求作一圓令與 OX,

OY 相切，且過P點.

29. 在所設三角形內求作一內接三角形令其三邊各與三直線平行.

30. 在所設梯形內求作一底之平行線令其爲二對角線三等分.

31. 在所設扇形內求作一內接正方形.

32. 在所設三角形內求作底之平行線令等分此三角形之面積.

33. 在所設三角形內求作底之垂線令等分此三角形之面積.

34. 在所設三角形內求作底之平行線令等分此三角形之周.

35. 在所設三角形內求作底之垂線令等分此三角形之周.

36. 在同心二圓內求作大圓弦令其等於爲小圓所截弦之二倍.

37. 在一所設正方形內作內接正方形令與所設其他一正方形爲合同形.

38. 在所設扇形內求作一內接三角形令與一所設三角形爲合同形.

39. A, B 爲定直線XY同旁二定點，求在XY上取一點P令$\angle APX=\angle BPY$.

40. A, B 爲定直線XY兩旁二定點，求在XY上取一點P令$\angle APX=\angle BPX$.

41. P, Q 爲定角$\angle XOY$內二定點，求在OX, OY上

各取M, N令折線$PMNQ$之長爲最小.

42. A, B爲定直線XY同旁二定點. 求在XY上取一點P, 令$\angle APX$, $\angle BPY$之差等於一定角.

43. 在二定圓內公切線上求作一點令從此點至二圓作二切線之夾角等於所設角.

44. 在定圓內求作一直徑令一定弦在此直徑上之射等於定長.

45. 過一定點求作一直線令爲所設三平行線所截部之差等於所設定長.

46. A, B爲所設二平行線外二定點. 求作二平行線公垂線MN令折線$AMNB$之長爲最小.

47. 過定圓周上二定點求作二平行弦令其差等於長.

48. 已設二同心圓及一定點A. 求在二圓周上各取X, Y, 令XY等於定長, $\angle XAY$等於定角.

〔註〕以下各題中, A, B, C表$\triangle ABC$之三角; a, b, c表其各對m_a, m_b, m_c表各對應中線; h_a, h_b, h_c表各對應高.

求作$\triangle ABC$, 已知:

49. A, h_a, $b:c$.

50. A, a, $b:c$.

51. A, $a+b$, $a+c$.

52. A, B, $a:b$.

53. $a:b$, $a:c$, $m_a+m_b+m_c$.

54. A, m_b, m_c.

55. A, $a:b$, $a+b+c$.

56. A, $b:c$, $3a+2h_a$.

57. h_a, h_b, m_c.

58. m_a, m_b, h_c.

59. A, m_a, h_a.

60. A, m_a, $b+c$.

61. 在所設正方形內求作一內接正方形令等於一定正方形.

62. 以所設正方形一邊上一定點爲頂點求作一內接正三角形.

63. P,Q爲$\angle XOY$內二定點. 求在OX, OY作點A,B令$PA+AB+BQ$爲最小.

64. 已知梯形之二底及高, 並其二對角線之夾角. 求作此梯形.

65. 求過定角內一定點作一直線令與定角兩邊所成三角形之周等於定長

66. P爲$\triangle ABC$內一定點. 求過P作直線交AB, AC於X, Y令$BX+XY+YC$等於定長.

67. 求作所設三角形之外接三角形令與一定三角形相似且面積爲最大.

68. 求作所設三角形之內接三角形令與一定三角形相似且面積最小.

69. 在所設三角形內作一內接三角形令其面積爲最小.

平面幾何學

1949. 4. 初版 長. 1—5,000.

基本定價： 750元