大學叢書

高等算學分析

熊慶來著

商務印書館發行

B三二五〇

中華民國二十三年八月初版

（一二五一一）

大學叢書（教本）高等算學分析一冊

平裝每冊定價大洋貳元貳角

外埠酌加運費匯費

著作者 熊慶來

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者胡達聰）

大學叢書委員會

序

牛端 (Issac Newton) 與伯萊尼慈 (G. W. Leibniz) 二氏於十七世紀發明微積分而後,傑出之算學天才如尤拉氏(L. Euler)達朗伯氏 (J. D'Alembert,) 拉格朗日氏 (J. Lagrange) 拉卜來斯氏 (P. S. Laplace) 勒讓德氏 (A. M. Legendre) 伏利野氏 (J Fourier) 等接踵而起,發揮光大,分析學遂蔚然成爲算學重要之一分支.十九世紀以降,各國學者輩出,斯學進步,更見一日千里,貢獻宏富者,那威有亞貝爾氏 (N. H. Abel); 法有歌西氏 (A. Cauchy), 額爾米特氏 (C. Hermite), 普蔭加烈氏 (H. Poincaré), 若爾當氏 (C. Jordan), 亞培爾氏 (Paul Appell) 等; 德有杲士氏 (Gauss), 扎葛比氏 (C. G. J. Jacobi), 狄里克來氏 (P. G. L. Dirichlet), 黎曼氏 (B. Riemann), 維世特阿斯氏(Karl Weierstrass) 等;英有莫爾剛氏 (A. De Morgan), 開烈氏 (A. Cayley) 等;當代之分析學家尚未論及也.

吾國學術落後,於算學分析非特無重要貢獻,卽稍涉高深之著述或翻譯亦不多覯,教學所資,端賴歐美原著,顧吾國學制與歐美迥異,欲求一適當之教本,殊非易事,近年國內大學競用古爾薩氏所著之 Cours d' Analyse Mathématique 原本或赫德理克氏 (Hedrick) 英譯本,或吾友王君尙濟之中譯本.

辜氏爲巴黎大學名師,在分析學上之發明甚夥,其書取材豐富新穎,言理精確透徹,洵可奉爲圭臬.惜乎標準稍高,習者大都無相當根底,學理既難於領會,設題更鮮能演解,是以用力卽勤,獲益亦少,論者每以爲病.不佞嘗受辜氏教益,且先後承乏國立東南大學與國立清華大學講席,試授辜氏書者凡數載,頗知困難所在,因取辜氏書爲藍本,而旁參他籍,纂爲是編,以作實變數之分析教本,斟酌取捨,務求適合吾國學子之程度與需要.於演證嚴守辜氏之精確,於條理則取法昂貝爾氏(G Humbert)與窪烈布散氏(De la Vallée-Poussin)之明晰.鵠的如此,固不敢遽言企及,然據歷年經驗,似於學子尙不無小補,用敢稍加整理,付諸手民.惟自顧譾陋,疵謬在所不免,尙冀海內碩學有以匡正之.

斯編付印先後承清華大學教員周君鴻經唐君培經及助教陳君省身校對印稿,甚爲感激,又承助理華君羅庚不憚煩瑣代編索引並繪圖員邵君繼興代爲繪圖,均於此深致謝意.

民國二十一年六月二十日

熊慶來序於北平國立清華大學西院

例　言

1. 本書除以辜氏 Cours d'Analyse mathématique 爲根據外,其他尙參考下列各書:

   De la Vallée-Poussin. Cours d'Analyse infinitésimale

   G. Humbert, Cours d'Analyse.

   R. Baire, Leçons sur les Théories générales de l'Analyse.

   J. A. Serret, Cours de Calcul differentiel et integral

   W. F. Osgood, Advanced Calculus.

   G. H. Hardy, Course of Pure Mathematics

   E. T. Whittaker & G. N. Watson, Course of Modern Analysis

   C. Jordan, Cours d'Analyse, Tom. I, II.

   E. Picard, Traité d'Analyse, Tom. I.

   H. Laurant, Traité d'Analyse

2. 辜氏書所有習題本書大半採入,惟因其過難,特增較易者以爲階梯.其他有興趣之題或試題之較新者亦酌量增入,且爲使讀者於各部分學理之致用均得練習計,設題務求變化.所增習題或係余向所集錄(間有數問爲余所擬試題)或採自下列諸書:

   P. Aubert et G. Papelier. Exercices d'Algebre d'Analyse et de Trigonomietrie

F. Frenet, Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitesimal

E. Fabry, Problemes d'Analyse mathématique.

G. Julia, Exercices d'Analyse.

J. Edwards, A Treatise on tne Integral Calculus.

Nouvells Annales.

3. 本書習題多附答案,俾讀者演解後,得核其結果之誤否.

4. 本書譯名與科學名詞審查會所規定者未盡符合,一因迫於付印,未暇查對;一因名詞審查會所定名詞亦間有未盡善者,例如 Explicit function 與 Implicit function,余譯為顯函數與隱函數,似覺較陽函數與陰函數之名為佳.

大學叢書

高等算學分析

目　錄

高等算學分析

預　篇

I. 實　數

算學分析爲注重連續性之數學,探本窮源,吾等宜首述無理數以明實數系之連續性.

溯數之生,最初不過正整數(亦曰自然數)而已.於除而整數之用有時窮,吾人乃創分數;於減而正數之用有時窮,吾人乃創負數.然數之推廣若止於此,則其用猶有時而窮也.例有非完全平方之數焉;若 a 爲如是之一數,則任一數 x 之平方非較小於 a 即較大.然則 a 之平方根爲何?欲其有意義必更創新數乃可,斯無理數之所由生.無理數出,實數之系統乃備.

1. 有理數(Rational numbers).

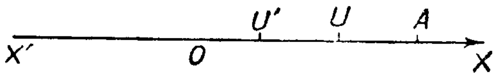
正負整數與分數及零統稱爲有理數,而成爲有理數系(system of rational numbers).其定義及馭算之法,吾等設讀者均已熟知,茲但述其重要特性如次:

1° 於相異之二有理數 a 與 b,其一數 a 當小於他數 b,而

吾等書如 $a<b$, 或 $b>a$. 若有三數 a, b, c 使 $a<b$ 及 $b<c$, 則有 $a<c$. 吾等因稱全體有理數系為序列的 (ordered).

2° 於相異之二有理數 a 與 b 間 ($a<b$), 吾等恆可插入他數 $>a$ 而 $<b$, 使相續之二插入數之差可小至人之所欲. 吾等因是稱有理數系為密接的 (dense).

設一軸 $X'X$ 而於其上取一原點 O, 並定一正向如 OX, 則



第 1 圖

凡有理數 $\frac{p}{q}$ 皆可由軸上一點表之. 吾等可設 $q>O$. 試取 OU 為單位而分之為 q 等分; 若 OU' 為如是之一分, 則視 $\cancel{q}$ p 為正或負, 而於 OX 上或 OX' 上取 OA 等於 $|p|$ 次 OU'; 所得 A 點即表有理數 $\frac{p}{q}$. 此數 $\frac{p}{q}$ 是為 A 點之位標. 因有理數系為密接的, 其表示點亦密佈軸上. 但軸上之點尙有不能由有理數定之者, 例如取 OP 等於邊為 1 之正方形之對角線, 則所得點即不能以一有理數為其位標也.

2. 有理數的分割; 無理數 (Sections of rational numbers; irrational numbers).

無理數定義論者頗不一致, 玆但就狄德頡德氏(Dedekind)之分割學說言之.

舉全體有理數分之為 A 與 B 二部, 使二部皆有數, 並凡 A

部之數小於 B 部之數,是爲於有理數中作一分割(section),吾以 $(A|B)$ 表之.凡作一分割,必發生次述三種情況之一:

I. 於 A 部中有一數 a 大於同部其他各數.若然,則 A 部各數 $\leqq a$,而 B 部各數 $>a$.(因 a 屬於 A 也).反之,凡 $\leqq a$ 之有理數必屬於 A,否則將屬於 B 而 $>a$ 矣.是知 A 部由 $\leqq a$ 之有理數組成,而 B 部由其餘有理數,即 $>a$ 之數組成.吾等可注意 B 部中不能同時有一最小數.

II. A 部中無最大之數,但 B 部中有一最小之數 b.仿上論之.可知 B 部由 $\geqq b$ 之有理數組成,而 A 部則由 $<b$ 之有理數組成.

以上兩種情形顯然可以實現.

III. A 部既無最大數,而 B 部亦無最小數.請先證其可能.

命 r 爲非完全平方之一正有理數.試將負有理數與零及正有理數 x 之合於 $x^2<r$ 不等式者概置於 A 部;而將合於 $x^2>r$ 之正有理數 x 納於 B 部.此顯然成一分割.吾謂 A 部中無最大數,即言任與部中一數 x,吾等恆可得其中一數 $>x$ 也.只須證明吾等可定一正數 h,使

(1) $$(x+h)^2<r.$$

書之如

$$h(2x+h)<r-x^2,$$

則見取 h 合於 $h<r$ 並合於 $h<\frac{r-x^2}{2x+r}$,條件(1)即滿足.

今更證 B 部亦無最小數，卽證 x 爲 B 部任何數，恆可定正數 h 使

$$(x-h)^2>r,$$

卽

$$2\,hx-h^2<x^2-r.$$

欲此不等式合，只須 $2\,hx<x^2-r$ 不等式合；是則取 $h<\frac{x^2-r}{2x}$ 卽可.

結論之，III 種情形爲可能，按定義凡如此情形之一分割 $(A|B)$ 確定一<u>無理數</u> α，大於 A 部諸數，而小於 B 部諸數. A 稱爲關於 α 之<u>下部</u>(lower class)，而 B 爲關於 α 之<u>上部</u>(upper class). 同一分割確定同一數，例如令平方小於 2 之數屬於 A 部，而令平方大於 2 之數屬於 B 部，則確定一無理數，吾人以 $\sqrt{2}$ 表之.

設二無理數 α 與 α'，由分割 $(A|B)$ 與 $(A'|B')$ 而定，若此兩分割不全同. 則 α 與 α' 異. 譬如 A' 有一數 r 不屬於 A，則 r 將屬於 B，而不屬於 B'. 凡 A 之數必 $<r$ 而 B' 之數則 $>r$，可見 A 與 B' 無公有之數，A 包含於 A'，而 B' 包含於 B. 於是全體有理數可別分三等： 1°. 含於 A 因之含於 A' 者，此等數同小於 α 與 α'. 2°. 屬於 B 及 A' 者，此等數 $>\alpha$ 而 $<\alpha'$. 3°. 屬於 B' 因之亦屬於 B 者. 是等數則同大於 α 與 α'.

吾等於此謂 $\alpha<\alpha'$. 反之，若 A 有一數 r 不屬於 A'，則爲 $\alpha'<\alpha$.

設無理數 α 由分割 $(A|B)$ 而定.吾等恆可於 A 中取一數 a 及 B 中取一數 b 使 $b-a$ 等於任與之一小分數 ε. 蓋命 a_1 爲 A 中之一數,則數行

$$a_1,\ \overset{a_1}{\cancel{\alpha_1}}+\varepsilon\quad a_1+2\varepsilon,\quad a_1+3\varepsilon,\cdots\cdots$$

無限增進,必至入於 B 部.設首入之數爲 $b=a_1+n\varepsilon$, 則 $a=a_1+(n-1)\varepsilon$ 必屬於 A 部,而 $b-a=\varepsilon$.

a 稱爲 α 之弱差近値,而 b 爲其強差近値,其差不逾 ε.

3. 實數 (Real numbers).

全體有理數及無理數統稱爲實數.

設二實數 α 與 α' 欲 $\alpha'>\alpha$,必須而只須有一有理數 $r>\alpha$ 而 $<\alpha'$. 若 α 與 α' 均爲有理數,則理爲已知;若其均爲無理數,則由無理數不等之定義而明.

若 α 爲有理數,而 α' 爲無理數,則可證之,如次:設 α' 由分割 $(A|B)$ 而定,α 既小於 α'. 當屬於 A 部,但同部中必有 $>\alpha$ 之一數 r, 而 r 因屬於 A, 當 $<\alpha'$. 故條件爲必要.逆論之,設有一有理數 r, 使 $\alpha<r$ 並 $r<\alpha'$, 則 r 屬於 A 部,而 $<r$ 之有理數 α 亦必屬之,故條件亦爲充足.

若 α 爲無理數而 α' 爲有理數,則可仿上證之.

今設三實數 α, β, γ, 使 $\alpha<\beta$ 及 $\beta<\gamma$, 吾謂 $\alpha<\gamma$, 若 β 爲有理數,則準上理卽明.設爲無理數,則吾等恆可取二有理數 a 與 b, 使

$$a<\alpha,\quad \alpha<\beta,\quad \beta<b,\quad b<\gamma.$$

於是由 $\alpha<\beta$ 及 $\beta<b$, 可知 $\alpha<b$ 又由 $\alpha<b$. 與 $b<\gamma$, 可知 $\alpha<\gamma$. 繼由 $a<\alpha$, 與 $\alpha<\gamma$ 即可判斷 $a<\gamma$ 矣.

於此可見實數系爲序列的.

設判別之二實數 α 與 β 由上所論,可知恆能插入一有理數,因之可插入無窮個數,是實數系亦爲密接的.

4. 實數之分劃(Sections of real numbers).

任以一法分全體實數爲 A, B 二部,使:

1°. 二部皆有數.

2° 凡實數皆屬於二部之一.

3° A 部中任何數小於 B 部中任何數.

是爲作一實數分劃,由 3° 可知若一數 α 屬於 A, 則凡 $<\alpha$ 者亦屬之;若一數 β 屬於 B, 則凡 $>\beta$ 者亦屬之.

狄氏定理(Dedekind's theorem). 凡作一實數分劃必得一分界數 L(有理數或無理數),使凡小於 L 之實數屬於 A 部,而凡大於 L 之數屬於 B 部.

證: 以 A_1 與 B_1 依次表 A 與 B 中之二部有理數,則 $(A_1|B_1)$ 成一有理數分劃而可有三種情形如次:

I. 於 A_1 有一數 a 大於部中各數,則 a 即爲分界數 L.蓋 a 屬於 A_1 亦屬於 A, 則凡 $<a$ 之數亦均屬於 A. 吾今謂凡 $>a$ 之數 x 屬於 B. 若 x 爲一有理數,則理甚明,若爲無理數,則於

a與x間,可取一有理數r,此數r屬於B部,可知x亦然.

II. 於B_1部中有一數b小於部中各數,可仿上證明b爲分界數L.

III. A_1部中無最大數,而B_1部中亦無最小數,若是,則分割$(A_1 | B_1)$確定一無理數α,此數α即分界數L,試證之.凡$<\alpha$之有理數屬於A部,而$>\alpha$之有理數屬於B部,理甚顯然.今任設一無理數$\xi<\alpha$,於ξ與α間,可取一有理數r,此數r屬於A,是ξ亦然.同法可知凡$>\alpha$之無理數屬於B.

分界數L,可屬於A部,如第一種情形是.可屬於B部,如第二種情形是.在第三種情形,則L可屬於A,亦可屬於B.

例如取級數$\Sigma\frac{1}{n^\lambda}$,若將使此級數爲發散之數$\lambda$劃歸$A$部而將使之成歛級數之數$\lambda$劃歸$B$部,則顯然成一分割.所得分界數爲$L=1$,屬於$A$部.

5. 實數之運算(Algebraical operations with real numbers).

無理數之定義旣明,當更進而規定其運算之基本法則,吾先明下列數義:

<u>一實數之對稱數</u>. 一有理數之對稱數者,乃與之相等異號之數也,而在無理數,吾人推廣其義如次:設α由有理數分割$(A|B)$而定之一無理數.命A'與B'依次表B與A二部內之數之對稱數.夫每有理數皆爲他一有理數之對稱數,而A'部各數小於B'部各數,故得一分割$(A'|B')$,而確定一無理數.此數稱爲α之對稱數,吾等以$-\alpha$表之.按定義有: $-(-\alpha)=\alpha$.

正負實數;絕對值 凡大於零之實數曰:正實數,而小於零之實數曰:負實數.任一正實數恆大於無窮個正有理數,而任一負實數恆小於無窮個負有理數.凡兩對稱數 α 與 $-\alpha$ 其一必爲正,而其他爲負,正者稱爲此二數之絕對值,恆以 $|\alpha|$ 表之.

一實數之倒數. 設 α 爲異於零之一實數.若其爲有理數,則其倒數爲 $\frac{1}{a}$.若爲無理數,則 α 分割與之同號之一切有理數爲 A, B 二部.命 A' 表 B 部數之倒數 B' 表 A 部數之倒數.除零外,凡一有理數均爲他有理數之倒數;是則分割 $(A'|B')$ 確定與 α 同號之一無理數,稱爲 α 之倒數,而由 $\frac{1}{\alpha}$ 表之.

6. 加法與減法.

設 α 與 α' 爲二實數.取四有理數 a, b, a', b' 使

$$a<\alpha<b, \quad a'<\alpha'<b'.$$

凡形如 $a+a'$ 之數,小於形~~爲~~如 $b+b'$ 之數,且吾等可設 a 與 b 之值近於 α 並 a' 與 b' 之值近於 α' 使 $b-a$ 及 $b'-a'$.因之 $(b+b')-(a+a')$ 小至人之所欲.

吾謂有唯一之一實數 σ 大於 $a+a'$ 各數,而小於 $b+b'$ 各數,此數 σ 名爲 α 與 α' 之和數,而由 $\alpha+\alpha'$ 表之.

證: 設全體實數分割 $(A|B)$,使 B 包含凡大於 $a+a'$ 之實數,而 A 包含其他.特別言之,$a+a'$ 各數屬於 A,而 $b+b'$ 各數屬於 B,因於 $a+a'$ 數中無最大者,$b+b'$ 數中亦無最小者,則

分界數σ必大於$a+a'$各數，而小於$b+b'$各數. 只待證明具此特性之數爲唯一者.假定復有一數σ'，則於σ及σ'間可取二有理數r與r'. 於是$(b+b')-(a+a')$將$>r'-r$而不能小至人之所欲，與所設違背矣.

此定義包有有理數而言.吾等易明由關係

$$\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha$$

$$(\alpha+\alpha')+\alpha''=\alpha+(\alpha'+\alpha'')$$

表示之換位律(commutative law)，及締合律(associative law). 均仍眞確.又

$$\alpha+0=\alpha, \qquad \alpha+(-\alpha)=0.$$

至於減法,乃爲加法之反演.由α減α'云者,乃求一數使加於α'得α也.此數名爲α與α'之差,以$\alpha-\alpha'$表之.欲定此差數,命x表之.按定義有$\alpha'+x=\alpha$. 若加$-\alpha'$於兩端，則得$x=\alpha+(-\alpha')$. 可知差數$\alpha-\alpha'$可於α加α'之對稱數而得.於是減法成爲加法矣.

7. 乘法與除法.

先設二正實數α與α'論之.取正有理數a, b, a', b'合於

$$a<\alpha<b, \qquad a'<\alpha'<b'$$

凡形如aa'之數$<$形如bb'之數,且吾等可設$b-a$, $b'-a'$以及$bb'-aa'$小至人之所欲.仿前可證明有唯一之正實數$\rho>aa'$各數而$<bb'$各數.又乘積aa'與bb'可切近於ρ如人之所欲.此

數 ρ 是爲 a 與 a' 之乘積，而由 aa' 表之.

今若 a 與 a' 中之一爲負，或二者均爲負，則乘積定義可依符號規則

$$aa' = -a(-a') = (-a)(-a')$$

化歸上例.

據此定義，可驗明關於乘法之換位，締合，分配等律 (commutative law, associative law, distributive law):

$$aa' = a'a,$$

$$(aa')a'' = a(a'a'')$$

$$a(a'+a'') = aa' + aa''$$

均仍眞確. 再者有

$$a\cdot\frac{1}{a} = 1,\quad a\cdot 1 = a,\quad |aa'| = |a|\cdot|a'|.$$

又凡數個實數之乘積，只能於有一因數爲零時等於零，而於此恆爲零.

今論除法. 此爲乘法之反演. 以 a' 除 a 者，乃求一數 x 使與 a' 之乘積等於 a 也. 此數名爲 a' 除 a 之商數，而由 $\frac{a}{a'}$ 或 $a:a'$ 表之. 命 x 表此商數，則按定義有 $xa' = a$. 若 a' 異於零，則以 $\frac{1}{a'}$ 乘此等式之兩端，得 $x = a\frac{1}{a'}$. 然則 a' 除 a 之商數，即 a 與 a' 之倒數之乘積. 於是除法成爲乘法矣.

由是不難驗明初等代數上等式不等式之變化配合各規則，於此推廣之數亦均合用.

8. 實數系之連續性及其與幾何量之關係.

吾等稱實數系爲連續的,蓋具有次二特性也:

1°. 於相異之二數間,吾等恆可插入無窮個數,使彼此相近如吾人之所欲;

2°. 若分全體實數爲 A, B 二部,使 A 部各數小於 B 部各數,則恆有一分界數 $L \geqq A$ 部各數,而 $\leqq B$ 部各數,且凡 $< L$ 之數屬於 A. 而凡 $> L$ 之數屬於 B.

若取一有向軸 $x'x$ 如圖 1, 則凡實數皆可由軸上之一點表之. 反之, 吾等設凡軸上之點皆由一實數爲位標定之.

實數尙可用以表其他連續量如面積,體積等之度量. 於此致用,吾等係承認公理:

於每量有一數應之爲其度,而於每數有一量應之.

II. 數羣與極限

9. 數集 (Aggregate of numbers)

合於任一條件之一類實數稱爲一<u>數集</u>,例如整數集,有理數集,小於1之實數集等

吾等若令每實數 a 與一直線 $x'x$ 上位標爲 a 之點相應,則於一數集,有直線上之一羣點與之相應.吾等名之爲一<u>點集</u> (set of points)

設一數集 (E). 若能得一數 a 大於此集中各數,則吾等稱

(E) 囿於上 (bounded above) 而 a 名 (E) 集之一上限. 例如負數集是.

仿此, 若有一數 b 小於 (E) 中各數, 則 (E) 集稱爲囿於下 (bounded below) 而 b 爲其一下限. 例如正數集是.

囿於上下之數集曰囿集, (bounded aggregate). 例如含於 0 與 1 間之正數集是.

與囿數集相當之點集, 其點全位於有定長之一線段上.

10. 高界與低界 (Upper and lower bounds).

設 (E) 爲囿於上之一數集. 吾等可對於 (E), 劃分全體實數爲 A, B 二部如次: 設 x 爲一實數. 若 (E) 之一數或若干數 $>x$, 則置 x 於 A 部. 反之, 若 (E) 內無一數 $>x$, 則以 x 屬 B 部. (E) 集既囿於上, 自然二部均有數, 並 A 部任何數顯然小於 B 部任何數. 是爲一分劃. 命 M 表其分界數, 吾謂 M 有次二特性:

1°. (E) 內無一數 $>M$

2°. 無論正數 ε 若何小, 恆有 (E) 中之一數 $>M-\varepsilon$

證: 1°) 假如 (E) 有 $>M$ 之一數 $M+h (h>0)$, 則 $M+\frac{h}{2}$ 數亦 $>M$, 而將屬於 A 部; 是於分劃之意不合. 2°) $M-\varepsilon$ 屬於 A 部至少當有 (E) 之一數 $>M-\varepsilon$.

(E)

如是得之數 M, 名數集 ~~M~~ 之高界. 此數 M 可屬於 (E), 亦可不屬於 (E). 當 (E) 由一定個數之數而成, 則高界恆屬於數集, 即爲其最大之數. 若 (E) 含有無窮個數, 則情形不定. 例如

平方不逾 2 之有理數集,其高界為 $\sqrt{2}$,不屬於數集.又如平方不逾 $\sqrt{2}$ 之實數集,其高界亦為 $\sqrt{2}$,但屬於數集.

有可注意者:當 M 不屬於 (E) 時,無論正數 ε 若何小,(E) 恆有無窮個數 $>M-\varepsilon$.蓋 (E) 若僅有一定個數之數 $>M-\varepsilon$,則其最大者,卽為 (E) 之高界,而與所設矛盾矣.

仿上可證對於囿於下之數集 (E),有一數 m 具次之特性:

1°. (E) 內無一數 $<m$,

2°. 任與正數 ε 恆有 (E) 之一數 $<m+\varepsilon$.

此數 m 名數集 (E) 之低界.

11. 最大限(The greatest limit).

設 (E) 為含有無窮個數之囿集.吾等可對於 (E) 作實數之分割如次:

設 x 為一實數,若 (E) 內有無窮個數 $>x$,則令 x 屬於 A 部.反之,若 (E) 無一數或僅有一定個數之數 $>x$,則使之屬於 B 部,此顯然合乎分割條件.如是而得之分界數 G 名曰 (E) 數集之最大限.

任取一正數 ε,由 G 之定義,知 $G-\varepsilon$ 屬於 A 部,而 $G+\varepsilon$ 屬於 B 部.然則無論 ε 若何小,恆有 (E) 之無窮個數介於 $G-\varepsilon$ 與 $G+\varepsilon$ 間,而 (E) 內數之 $>G+\varepsilon$ 者,為數只有一定.

12. 聚點(Points of accumulation)

設點集(E).若於一點1,有(E)之無窮個點在其附近,換言之,無論正數ε如何小,恆有(E)之無窮個點介於$1-\varepsilon$與$1+\varepsilon$二點間,則1點稱為點集(E)之聚點,或限點(limiting point).

例如與全體整數相當之點集,則無聚點;與全體有理數相當之點集,則每點皆為聚點.由$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots$等數而定之點集,則有一聚點,卽原點O是.

維氏定理(Weierstrass Theorem) 含有無窮個點之囿集至少有一聚點.

蓋相當數集準前節有一最大限G;而在$G-\varepsilon$與$G+\varepsilon$間有集中無窮個數,易幾何名詞言之,卽在$G-\varepsilon$與$G+\varepsilon$兩點間有點集之無窮個點,是則G為一聚點.

13. 實變數(Real variables)

以一字表經過無窮個實數值之量,是為一實變數,就x值之數集論之,若此數集為囿於上或囿於下,則x亦稱為囿於上或囿於下.數集之高低界,卽稱為x之高低界.

當x以二數a與b及其間之一切實數為值時,吾等稱為x變於隔間(interval)或區域(a, b)內.a與b稱隔間之端.吾等恆設$a<b$,而a與b二數卽x之低界與高界.差數$b-a$名隔間之幅(amplitude).在此隔間名為閉間,若x之值如上,惟a除外,則低界為不可達:吾等以$(a+0, b)$表隔間,而稱之為開間.仿之,若b除外,則隔間以$(a, b-0)$表之;若a與b均除外,則以

$(a+0, b-0)$表之,亦均爲開間.

14. 極限(Limit)

一變數x趨於一極限a(簡稱限)云者,謂x歷經其值以使差數$x-a$小至人之所欲也.換言之,任與小至所欲之正數ε,恆有$|x-a|<\varepsilon$也.吾等表之如$\lim x=a$,或$x\to a$.

準此定義,一變數不能趨於判然之二限a與$b(b>a)$,蓋$|x-a|$與$|x-b|$不能同小於$\frac{1}{2}(b-a)$也.

若x漸變使其值卒超出任何大之正數A,則吾等推廣言之,謂x以$+\infty$爲限.又x漸變而小於任何小之負數B,則謂x以$-\infty$爲限.

III. 貫數與級數

15. 貫數(Sequences).

無窮個數:

$$(1)\qquad s_0,\ s_1,\ s_2,\cdots\cdots,\ s_n.\cdots\cdots$$

依一定規律相續,使每項據一定之位次,是爲一貫數.若s_n於$n\to\infty$時有一定限S,則此貫數稱爲收斂的(convergent);反之,則爲發散的(divergent).

若無論n若何恆有$s_{n+1}-s_n\geqq 0$則(1)稱爲增貫數(increasing sequence). 反之,於$s_{n+1}-s_n\leqq 0$時,則爲減貫數(decreasing sequence).

定理. 凡增貫數,若其普通項 s_n 不能無限增大,則爲收斂的.

證: 此貫數成一囿集 (E), 命 M 表其高界,則可得一整數 N 使 $n \geqq N$ 時有

$$M-\varepsilon<s_n<M+\varepsilon,$$

ε 爲任與正數;由是 $|s_n-M|<\varepsilon$, 卽明 $s_n \to M$.

定理. 凡減貫數,若其普通項大於一定數,則爲收斂的.

證法仿上.

貫數斂性之普通條件由次述定理明之:

定理. 欲貫數(1)收斂,必須而只須於任何正數 ε. 能得一相當數 n 使 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$, 而無論正整數 p 如何大.

證: 條件爲必要者, $s_n \to S$ 可得一相當大數 n, 使

$$|s_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |s_{n+1}-S|<\frac{\varepsilon}{2}, \cdots\cdots, \quad |s_{n+p}-S|<\frac{\varepsilon}{2};$$

由是

$$|s_{n+p}-s_n|=|(s_{n+p}-S)-(s_n-S)|<\varepsilon.$$

條件爲充足者,依題意,任與正數 ε, 可得整數 n, 使無論 p 若何大,恆有 $|s_{n+p}-s_n| \leqq \varepsilon$ 可見貫數(1)自 s_n 項起,各項均含於 $s_n-\varepsilon$ 與 $s_n+\varepsilon$ 二數間,而成一囿集,在隔間 $(s_n-\varepsilon, s_n+\varepsilon)$ 內,有數集之無窮個數,而在其外者,僅一定個數,因之,數集之最大限 S 不能 $<s_n-\varepsilon$, 亦不能 $>s_n+\varepsilon$. 然則 $|s_n-S| \leqq \varepsilon$. 於是由

$$s_{n+p}-S=(s_{n+p}-s_n)+(s_n-S)$$

知 $|s_{n+p}-S|<2\varepsilon$, 而無論 p 若何;即明 $s_{n+p}\to S$.

16. 級數 (Series).

設一貫數 $u_0, u_1, \cdots\cdots u_n, \cdots\cdots$. 吾等稱

(2)
$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

爲一級數.若貫數

$$s_0=u_0,\quad s_1=u_0+u_1, \cdots\cdots,\quad s_n=u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n, \cdots\cdots$$

爲收斂的,則吾等亦稱級數 (2) 爲收斂的;而貫數之限 S 稱爲級數之和:

$$S=u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots=\sum_{m=0}^{+\infty}u_m$$

級數之非收斂者曰發散級數.

由上所言,討論一級數之斂散性,即討論一貫數之斂散性.反之,欲討論貫數 (1), 吾等只須討論級數:

$$s_0+(s_1-s_0)+(s_2-s_1)+\cdots\cdots+(s_n-s_{n-1})+\cdots\cdots.$$

蓋此級數前 $n+1$ 項之和,適爲貫數 (1) 之普通項 s_n 也.將貫數斂性之普通定理用於級數得:

歌氏定理 (Cauchy's Theorem). 欲一級數收斂,必須而只須任與正數 ε, 能得一相當整數 n, 使無論 p 若何大恆有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

又將關於增貫數之定理應用於級數.則得常見引用之定理如次:

定理. 欲一正項級數爲收斂,必須而只須各和數 s_n 小

於一定數.

IV. 函數

17. 函數(Functions).

設二變數 x 與 y. 若於 x 之每數值,有 y 之一數值應之;則 y 稱爲 x 之函數或應數,而吾等書 $y=f(x)$.

設 x 以 (a, b) 爲隔間.若於 (a, b) 內之每 x 值有 y 之一值相應,則吾等謂 y 確定於 (a, b) 內.

設函數 $f(x)$ 確定於 (a, b) 內,而命 (E) 表其在隔間內全體數值所成之數集,若 (E) 爲囿集,則 $f(x)$ 稱爲囿於 (a, b) 內.(E) 之高界 M 低界 m 依次稱爲 $f(x)$ 在 (a, b) 內之高界低界.差數 $M-m$ 爲 $f(x)$ 在 (a, b) 內之界距(oscillation).

於此有可注意者:一函數若對於隔間中每 x 值有一不爲無窮之值應之,似囿於是間矣.實則未必,例如在 $(0, 1)$ 內確定若次之函數

$$f(0)=0, \quad \text{並於 } x>0. \quad f(x)=\frac{1}{x},$$

於 x 在 $(0, 1)$ 內之各值,皆有一定之值,但非囿於是間,蓋命 A 表任何大數,只須 $0<x<\frac{1}{A}$, 吾等卽有 $f(x)>A$ 也.

又囿於 (a, b) 內之函數.其值可切近 M 或 m 如吾人所欲,但未必能達.例如由條件

$$f(0)=0 \quad \text{並於 } 0<x\leqq 1, \ f(x)=1-x$$

問連續性與一致連續性有何區別.

確定於 $(0,1)$ 間之函數 $f(x)$，有 $M=1$ 爲高界，但不能達.

18. 連續性(Continuity).

設 $f(x)$ 爲確定於 (a,b) 內之函數，並命 x_0 爲隔間中一值，若任與一小至所欲之正數 ε，吾等能得一正數 η 使不等式 $|h|<\eta$ 牽涉不等式:

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

則吾等謂 $f(x)$ 於 x_0 爲連續.

若 $f(x)$ 於 a 與 b 間之各數值爲連續，並於正數 $h\to 0$ 時，差數 $|f(a+h)-f(a)|$ 與 $|f(b-h)-f(b)|$ 均趨於零，則吾等謂 $f(x)$ 連續於 (a,b) 內.

於平面內設二位標軸 ox, oy，及一連續曲線 C. 若 oy 之一平行線只遇 C 於一點，則 C 上之點 M 之緯標 y 爲其經標 x 之連續函數，$y=f(x)$. 但反之，於連續函數，吾等不盡能作其表示線，數學家嘗發見一種連續函數，於一任何小隔間內有無窮個極大極小. 對於如是之函數，吾等自不能繪出其表示線也. 故圖表雖爲擅發函數特性之利器，但於理論究不能認爲精確也.

19. 一致連續性.

謂 $f(x)$ 在 (a,b) 內爲一致連續者，乃謂不等式 $|h|<\eta$ 牽涉不等式.

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$$

而無論 x 爲 (a,b) 內任何數值也(於 x 爲 a 與 b 二數值時,上之不等式由 $|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$. 與 $|f(b-h)-f(b)|<\varepsilon$ 代之,而 $b>0$).於此,η 之值僅繫乎 ε,而無涉於 x 稱爲一致連續之模.顯然凡小於一連續模之數,亦爲連續模.

表面觀之,似連續於 (a,b) 內之函數,可由次之理論明其亦爲一致連續者:於每點 x 及每數 ε,有一連續模 η,令 x 變移於 (a,b) 內而 ε 固定,以取諸模中之最小者爲模,則上述條件即可適合.然而此理論未爲眞確.因連續模可以零爲其不能達之低界也.

一致連續定義尙可述如次:任與正數 ε,可定正數 η 使 x' 與 x'' 表 (a,b) 內任二數,不等式 $|x'-x''|<\eta$ 牽涉不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

20. 連續函數之特性.

據連續性定義吾等立可證明次列諸定理以後恆引及之.

定理 A. 設 $f(x)$ 爲 (a,b) 內之一連續函數,任與正數 ε.隔間 (a,b) 恆可析爲多數隔間,使對於 x 在每小隔間內之任意二值 x' 與 x'' 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

證:假如不然命 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 而分 (a,b) 爲相等之二隔間 (a,c) 與 (c,b),則必有其一與 (a,b) 同性,即不可分之爲小隔間,使合於題中所言條件也.以 (a_1,b_1) 表此隔間,而再均分之爲二隔

間 (a_1, c_1) 與 (c_1, b_1), 總有其一與 (a_1, b_1) 同性,亦即與 (a, b) 同性, 又以 (a_2, b_2), 表之;如是推論;則得一貫之隔間, (a, b). (a_1, b_1), (a_2, b_2),........, (a_n, b_n) 其任一隔間之幅為其前者之半. 又無論若何大,恆可於 (a_n, b_n) 內得二數 x' 與 x'' 使 $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon$. 夫 $a, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n, \cdots\cdots$ 成一增貫數,而各項皆小於 b, 則是按15節理有一限 λ 又 $b, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n, \cdots\cdots$ 成一減貫數而各項大於 a, 是則亦有一限 λ'. 夫 $b_n-c_n=\dfrac{b-a}{2^n}$, 於 n 無限增大時可小至吾人之所欲,足見 $\lambda'=\lambda$.

λ 屬於 (a, b) 隔間,設其含於 a 與 b 間,則 $f(x)$ 於 λ 為連續,吾可得一正數 η, 使一有 $|x-\lambda|<\eta$, 便有 $|f(x)-f(\lambda)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$; 今取 n 之大數值使 (a_n, b_n) 含於 $(\lambda-\eta, \lambda+\eta)$ 內,若是,命 x', x'' 為 (a_n, b_n) 中之二數,則 $|f(x')-f(\lambda)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$; $|f(x'')-f(\lambda)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

因之 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 而與上假設之理相矛盾,故定理果合.

<u>系 I.</u>　<u>凡在 (a, b) 內為連續之函數囿於 (a, b) 內</u>

蓋設 $a, x_1, x_2, \cdots\cdots x_{p-1}\cdots\cdots$, b 分 (a, b) 隔間為 p 個小隔間而合於上所言條件,則在 (a, x_1) 內有

$$|f(x)|<|f(a)|+\varepsilon;$$

而特別言之,有 $|f(x_1)|<|f(a)|+\varepsilon$. 同理在 (x_1, x_2) 內有

$$|f(x)|<|f(x_1)|+\varepsilon;$$

尤有 $|f(x)|<|f(a)|+2\varepsilon$; 特別論之,有

$$|f(x_2)|<|f(a)|+2\varepsilon.$$

如是類推,至最後 (x_{p-1}, b) 內有

$$|f(x)|<|f(x_{p-1})|+\varepsilon<|f(a)|+p\,\varepsilon$$

即見 $f(x)$ 在 (a, b) 內之絕對值,常小於 $|f(a)|+p\,\varepsilon$ 也.

系 II. 凡連續於 (a, b) 內之函數在 (a, b) 內一致連續.

試分 (a, b) 爲 p 個小隔間,使對於 x 在每小隔間內之任意二值 x' 與 x'', 有 $|f(x')-(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$, 若取小於 $x_1-a, x_2-x_1, \cdots\cdots,$ $b-x_{p-1}$ 各差數之一正數 η, 而設 (a, b) 內之任意二數 x' 與 x'' 合於 $|x'-x''|<\eta$, 則吾謂 $|f(x')-f(x'')|$ 即小於 ε. 蓋 x' 與 x'' 二數若同在一小隔間內,則有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. 反之, x' 與 x'' 亦必屬於相續之二小隔間,則亦有 $|f(x')-f(x'')|<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ 也.

定理 B. 設 $f(x)$ 爲連續於 (a, b) 內之函數,若 N 爲介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間之任一數,則在 a 與 b 間,至少有 x 之一數值使 $f(x)=N$.

先就一特例論之:設 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號,例有 $f(a)<0$ 而 $f(b)>0$. 吾往證 a 與 b 間至少有 x 之一數值使 $f(x)=0$. 試注意 $f(x)$ 於 a 附近爲負,而於 b 附近爲正. (a, b) 內 x 之值之使 $f(x)$ 爲正者,成一囿類,命 λ 爲其低界 $(a<\lambda<b)$. 由低界定義,知對於 h 之一切正值有 $f(\lambda-h)\leqq 0$. 夫 $f(\lambda)$ 爲 $f(\lambda-h)$ 之限;是亦有 $f(\lambda)\leqq 0$. 但就他方面論,吾等不能有 $f(\lambda)<0$. 蓋假設 $f(\lambda)=-m\,(m>0)$, 則因函數 $f(x)$ 於 $x=\lambda$ 爲連續,可求一正數 η 使 $|x-\lambda|<\eta$ 牽涉 $|f(x)-f(\lambda)|<m$. 由是,對於 x 含於 λ 與 $\lambda+\eta$ 間之值, $f(x)$ 爲負而

λ將非使$f(x)>0$之x諸數值之低界矣.然則$f(\lambda)=0$.

今證a與b間至少有x之一值使$f(x)=N$.設函數$F(x)=f(x)-N$,此函數於a於b有相異之號,據適所證明之理,至少有x之一值含於(a,b)內,而使$\overset{F}{\cancel{f}}(x)=0$.是即$f(x)=N$.

<u>定理 C. 凡連續於一域(a,b)內之函數,至少達於其高界低界各一次</u>.

由前所證明者,知如是之函數在(a,b)內有一高界M及一低界m.請證a與b間至少有x之一值使$f(x)=M$.

設平分(a,b)爲(a,c),與(c,b)二隔間,則必有其一使$f(x)$於其內以M爲高界.命(a_1,b_1)表此隔間,以代(a,b)而推論之,則如上得一貫隔間$(a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots\cdots$每隔間爲其前者之半,而$f(x)$在各隔間之高界皆爲$M$.命λ爲$a,a_1,a_2,\cdots\cdots$與$b,b_1,b_2,\cdots\cdots$兩貫數之公限,則吾謂$f(\lambda)=M$.假如不然,而有$f(\lambda)=M-h\,(h>0)$,則可求一正數$\eta$,使$x$若位於$\lambda-\eta$與$\lambda+\eta$間,$f(x)$即在$f(\lambda)-\frac{h}{2}$與$f(\lambda)+\frac{h}{2}$間而小於$M-\frac{h}{2}$.繼取至大之數$n$使$|a_n-\lambda|<\eta$及$|b_n-\lambda|<\eta$.若是,則$a_n$與$b_n$將含於$(\lambda-\eta,\lambda+\eta)$內,而$f(x)$於$(a_n,b_n)$內之高界不能等於$M$矣.

<u>注意</u>.上所論隔間,自然指閉間者言,此條件至要.例如確定於開間$(0\overset{<}{\cancel{\leqq}}x\leqq1)$之函數$f(x)=1-x$,在是域內爲連續,但不能達於其高界$M=1$.

21. 間斷性(Discontinuity).

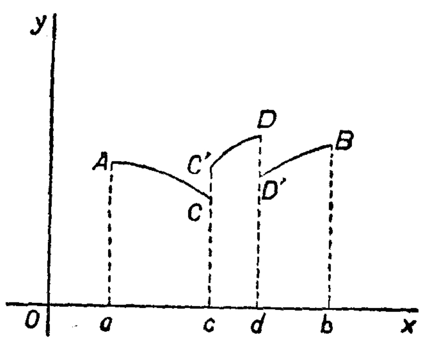
設 $y=f(x)$ 於確定於 (a, b) 內之一函數,若此函數於 (a, b) 內之一數值 x_0 不爲連續,則 x_0 點稱爲 $f(x)$ 之一間斷點 (point of discontinuity). 若然,則 $f(x_0+\varepsilon)$ 與 $f(x_0-\varepsilon)$ 二數於正數 ε 趨於零時,至少必有其一不趨於 $f(x_0)$.

若於 $\varepsilon\to 0$ 時, $f(x_0-\varepsilon)$ 與 $f(x_0+\varepsilon)$ 各有一確定之限,則 x_0 稱爲第一種間斷點,而二限依次由 $f(x_0-0)$ 與 $f(x_0+0)$ 表之. 如 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, 則欲 x_0 爲間斷點, 必 $f(x)\neq f(x_0-0)$. 於是改換 $f(x_0)$ 之值, 可使 x_0 變爲一連續點. 反之, 若有 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 則無論與 $f(x_0)$ 以何值, x_0 終爲間斷點. 若有

$$f(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$

則間斷點 x_0 稱爲有法的 (regular) 其例吾等將於由級數確定之函數中遇之.

設 $y=f(x)$ 於 (a, b) 內有一定個數之間斷點, 皆爲第一種者. 又設 (a, b) 間之極大極小爲數僅有一定, 則其圖線乃由不相連絡之若干曲線弧合成, 如 圖 2 之 AC, $C'D$, $D'B$ 所示者是. $f(c)$ 與 $f(d)$ 之值爲任意者, 若 c 與 d 係有法點, 則 CC' 與 DD' 之中點屬於圖線.



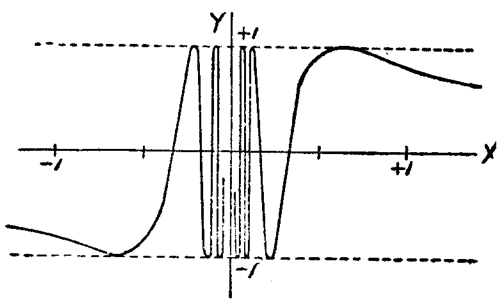
第 2 圖

例如函數 $y=\frac{|\sin x|}{x}$，由二支連續線合成；其一止於 $(0,-1)$ 點，其一止於 $(0,+1)$ 點.

若於 $\varepsilon\to 0$ 時，至少有 $f(x_0-\varepsilon)$ 與 $f(x_0+\varepsilon)$ 二數之一不趨於定限，則 x_0 爲第二種間斷點；其情形則有種種，茲舉數例以明之.

例 1. 設 $f(x)=\frac{1}{x-a}$. $f(a)$ 無意義. 但 $x\to a$ 則 $|x-a|\to 0$，而 $\left|\frac{1}{x-a}\right|$ 無限增大；因之吾等謂 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲無窮. 在此，卽與 $f(a)$ 以其他任何值，亦不能令 $f(x)$ 於 $x=a$ 變爲連續.

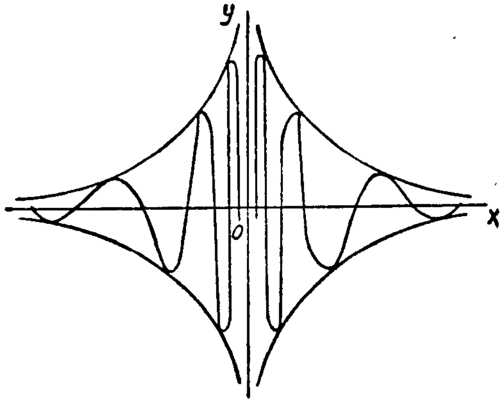
例 2. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. $f(0)$ 無意義，且於 $x\to 0$ 時，$\sin\frac{1}{x}$ 不趨於定限，而於 -1 與 $+1$ 間循環消長不已(圖 3). 蓋設 $|A|<1$，則方程式 $\sin\frac{1}{x}=A$ 恆有無窮個根介於 0 與一正數 ε 間而無論 ε 若何小也. 無論與 $f(0)$ 以何值，0 恆爲一間斷點，此種間斷點稱爲擺斷點 (point of oscillatory discontinuity).



第　3　圖

例 3. $y=f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$. $f(0)$ 無意義，當 $x\to 0$，y 之值恆消長於 $\pm\frac{1}{x}$ 二數間，而圖線於兩雙曲線 $y=\pm\frac{1}{x}$ 間，作擺動狀，且

其輻無限增大(圖 3′) 0 亦爲一擺斷點,而不能免除.



第 3′ 圖

22. 單調函數 (Monotone functions).

確定於 (a, b) 內之單調函數 $f(x)$ 者,乃以 x_1 與 x_2 表 (a, b) 內任二數值而 $(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]$ 之號常爲一定也,若此積數常爲正或零,則 $f(x)$ 名曰<u>增函數</u> (increasing function). 反之,若其常爲負或零,則名 $f(x)$ 曰<u>減函數</u> (decreasing function).

若設 $x_2>x_1$, 則於增函數.恆有 $f(x_2)-f(x_1)\geqq 0$; 而於減函數恆有 $f(x_2)-f(x_1)\leqq 0$, 又在 (x_1, x_2) 內之單調函數若 $f(x_2)=f(x_1)$ 則其在 (x_1, x_2) 內之值,必爲常數.

單調函數可於其隔間 (a, b) 內有任若干間斷點; 但盡爲第一種者,試就增函數論之,設 x_0 爲一間斷點,則於正數 $\varepsilon\to 0$ 時, $f(x_0-\varepsilon)$ 之值不能減,而常 $\leqq f(b)$. 然則 $f(x_0-\varepsilon)$ 有一限

$f(x_0-0)$. 同理 $f(x_0+\varepsilon)$ 有一限 $f(x_1+0)$. x_0 爲任何點常有 $f(x_0-\varepsilon)$ $\leqq f(x_0+\varepsilon)$. 是可斷

$f(x_0-0)\leqq f(x_0+0)$. 若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, 是必有 $f(x_0)=f(x_0-0)$ 而函數於 x_0 爲連續.但若 $f(x_0-0)<f(x_0+0)$, 則 $f(x_0)$ 爲其間之任一數.

注意. 增函數與恆增函數減函數與恆減函數有時須分別論之.所謂恆增或恆減函數者,乃設 $x_2>x_1$ 而恆有 $f(x_2)>f(x_1)$ 或 $f(x_2)<f(x_1)$ 者也.

23. 囿變函數 (Function of bounded variation).

設函數 $f(x)$ 囿於 (a, b) 內; 以合於不等式:

$$a<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<b$$

之數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ 分割 (a, b) 爲小隔間, 而設

$$V=|f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots\cdots+|f(b)-f(x_{n-1})|$$

每分割 (a, b) 一次,即得一如是之一正數 V 名爲 $f(x)$ 對於此分割之變量 (variation) 若由一切可能之分割而得之變量成一囿集,則吾等謂 $f(x)$ 爲於 (a, b) 間之一囿變函數,囿集之高界 V 名爲 $f(x)$ 於 (a, b) 內之總變量 (total variation).

由定義立可斷定.

二囿變函數之和,仍爲一囿變函數.

若 $f(x)$ 在 (a, b) 內爲囿變函數,則在含於 (a, b) 隔間內之任一隔間 (a_1, b_1) 內,亦爲囿變者.

24. 定理.

凡單調函數在其隔間(a,b)內為囿變者.

蓋對於一增函數其變量為

$$V=[f(x_1)-f(a)]+[f(x_2)-f(x_1)]+\cdots\cdots+[f(b)-f(x_{n-1})]$$
$$=f(b)-f(a),$$

而對於一減函數,其變量為

$$V=-[f(x_1)-f(a)]-[f(x_2)-f(x_1)]-\cdots\cdots-[f(b)-(x_{n-1})]$$
$$=f(a)-f(b);$$

概二列言之,有$V=|f(a)-f(b)|$而V為常數,明所欲證.

25. 正負總變量.

於諸差數$f(x_i)-f(x_{i-1})$中之為正數者,以p表其和;而其為負數者,以$-n$表其和,則顯有

$$V=p+n,\qquad f(b)-f(a)=p-n.$$

因之,

$$V=2p+f(a)-f(b),$$
$$V=2n+f(b)-f(a),$$

若$f(x)$為囿變函數,則由(a,b)一切可能之分割而得之p數集與n數集,亦為囿集.此囿集之高界P與N名為$f(x)$之正總變量與負總變量.準上所論,於$V.P.N.$三數間,有關係.

$$V=2P+f(a)-f(b)$$
$$V=2N+f(b)-f(a)$$

26. 定理.

凡囿變函數為二增函數之差.

命 x 為 a 與 b 間之一數並 $V(x)$, $P(x)$ 與 $N(x)$ 依次為 $f(x)$ 在 (a, x) 域內之總變量及正負總變量則由上節有

$$V(x)=2P(x)+f(a)-f(x), \quad V(x)=2N(x)+f(x)-f(a);$$

因之得

$$f(x)=f(a)+P(x)-N(x).$$

夫 x 增大時 $P(x)$ 與 $N(x)$ 均不能減小,由定義甚明;是 $f(a)+P(x)$ 與 $N(x)$ 皆為增函數,而明所欲證.

27. 多元函數(Function of several variables).

設於 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 一變數之一組值,有變數 U 之一值以應之,則 U 稱為 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 等 n 個變數之函數,是為一 n 元函數,吾等以 $U=f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 表之. 為便於講解計,設二元函數 $Z=f(x, y)$ 論之吾等可視此二數 x 與 y 為平面上一點之位標面上一部分稱之為一域(domain),若於域中每點有 Z 之一值應之,則謂函數 Z 確定於是域內.

一域 A 可由一迴綫或稱斂口綫(closed curve)所限部分而成,或由數迴綫所限之部分而成,其一線 C 在外,他一綫或數綫 C'', C'',……在內. C, C', C'',……諸線為域之周(coutour)通常視為屬於域之本體,例以 C 論,即於其每點 Z 皆有確定之相值應也.若是則域稱為閉域(closed domain); 反之,則為開域

(open domain). 域若能以完全在其內之一折線連其內任意二點,則名曰通域(connected domain).

一函數 $Z=f(x, y)$ 對於一域 A 各點之值若成一囿類,則稱囿於是域.如前有高界低界距等名.

28. 連續性與一致連續性.

設 $M_0(x, y)$ 為 A 域中一點;謂函數 $f(x, y)$ 於 M_0 為連續者,乃任與正數 ε.能得他一正數 η 使 $|h|<\eta$ 與 $|k|<\eta$ 牽涉 $|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$ 也.以幾何理言之,其意義若下:

設於 xy 面上,以 M_0 點為心作一邊等於 2η 而平行於位標軸之一正方形;當 $|h|<\eta$, $|k|<\eta$, 時,則 $M(x_0+h, y_0+k)$ 點卽在正方形內.若是謂 $f(x, y)$ 對於 $x=x_0$, $y=y_0$ 為連續者,乃謂吾人能取正方形甚小,使其內任一點之值 $f(x, y)$ 與 $f(x_0, y_0)$ 之差,絕對小於 ε 也.

吾人倘可以一圓代正方形,蓋上有之條件於正方形內諸點合,則於其內切圓諸點亦合.反之,此條件於一圓諸點合,則於所包正方形諸點亦合.於是連續性之定義可視為能以 η 應 ε 使 $\sqrt{h^2+k^2}<\eta$ 牽涉

$$|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

同理吾等謂 $f(x, y)$ 於 A 域之周上一點 $M_1(x_1, y_1)$ 為連續者,乃謂 $M(x, y)$ 表域中鄰近 M_1 之一點,則當 M_1M 距離趨於零時,$f(x, y)$ 趨於 $f(x_1, y_1)$ 也.

一函數$f(x, y)$在一域A內及其周上各點爲連續,則稱爲於此域內連續.

若任與正數ε,能得正數η,使對於A域內一切之點(x, y),不等式$|h|<\eta$與$|k|<\eta$均牽涉不等式:

$$|f(x+h, y+k)-f(x, y)|<\varepsilon.$$

則$f(x, y)$稱爲在A域內一致連續,此定義亦可述如次:任與正數ε,能得正數η使於A中任二點$M'(x', y')$與$M''(x'', y'')$之距離$<\eta$時,即有

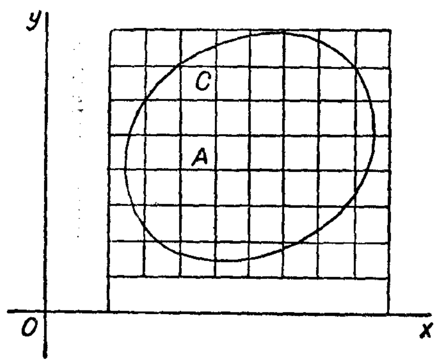
$$|f(x', y')-f(x'', y'')|<\varepsilon.$$

29. 連續函數之特性.

二元函數與一元函數有類似之定理:

定理. 設$Z=f(x, y)$爲於A域內之連續函數;任與正數ε,恆可分A爲小域,使Z於每小域內任二點(x, y), (x', y')之值之差絕對小於ε.

證:以經緯軸之平行綫分A域爲小域,設相鄰二平行線之距皆爲δ,則所得域爲各邊等於δ而完全在C內之正方形,及邊等於δ之正方形限於C內之部分.若是,苟



第　4　圖

定理對於 A 域不合,則至少對於小域之一 A_1 亦不合,按前法分 A_1 而推論,則得一貫之正方或正方之部分 A, A_1 ……… A_n ………於其每域內,定理皆不合.設 A_n 完全含於 $x=a_n$ 與 $x=b_n$ 二線及 $y=c_n$ 與 $y=d_n$ 二線間;當 n 無量增大時 a_n 與 b_n 有一公限 λ_1,並 C_n 與 d_n 有一公限 μ. 於是 A_n 域趨於限點 $M(\lambda, \mu)$ 在 A 內或在其周 C 上.於是可仿前證明;假如定理不合,則 $f(x, y)$ 不能於 (λ, μ) 點爲連續,而與所設矛盾矣.

系. 設取至相近之平行線,使 Z 於一小域內任意二點之值之差絕對小於 $\frac{\varepsilon}{2}$,命 η 爲相鄰二線之距,(x', y') 與 (x'', y'') 爲 A 內或其周上任二點,但設其距小於 η,此二點同屬於 A 內之一小域,或有公尖之二小域,總之 $|f(x', y')-f(x'', y'')| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 然則亦爲一致連續.

由上理可如前證明凡連續於 A 內之函數囿於是域

由分析區域法可證明:

定理. 連續於 A 內之函數達於高界 M 低界 m 至少各一次,相應之點在 A 內,或在 C 上.

設 p 爲與 $Z=m$ 相應之點,及 P 爲與 $Z=M$ 相應之點.以完全在包於 C 內之一折線連 p 於 P,而令 $Q(x, y)$ 點移行於此線上,則 Z 爲 p, Q 二點間折線長 S 之連續函數,而經過 m 與 M 間各值 μ 至少一次,因可作無窮折線連 p 與 P,足見 C 內有無窮個點使 $Z=\mu$.

注意. 凡二變數x與y之一連續函數,自然爲每變數之連續函數,但逆理則不必然;例有確定如:

$$f(0,0)=0,\text{ 而於 } x\neq 0,\ y\neq 0 \text{ 時, } f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

之函數,若設y爲常數則$f(x,y)$爲x之連續函數;反之亦然.但設x, y均變則$f(x,y)$於$x=y=0$點不爲連續,蓋令(x,y)點由直線$y=mx$趨於原點0,則$f(x,y)$以$\frac{2m}{1+m^2}$爲限,而其值因m而變也.在此,任給與$f(0,0)$以何值於原點之斷續性,終不能免除,理甚顯然.

又如確定如:

$$f(0,0)=0,\text{ 而於 } x\neq 0,\quad y\neq 0 \text{ 時, } f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

之函數,則於$x=y=0$爲連續,因$|f(x,y)|\leqq|x|$也.

凡上所論不難推及於二元以上之函數.

30. 連續曲線(Continuous curves).

於上所論,吾等隱認一平面曲線C分平面爲內外二部D與D'使內外二點絕不能以一折綫連之而不經過C.凡見於幾何學上之曲線吾等由直覺知其有此特性.但欲作精確之理論,吾等當與曲線以一分析的定義:

設$f(t), \phi(t), \psi(t)$爲變數t之三個連續函數;以

$$x=f(t),\quad y=\phi(t),\quad Z=\psi(t). \tag{3}$$

爲位標之一切點即成空間之一連續曲線Γ;簡曰曲線.

設此三函數有一週期ω即有

(4) $$f(t+\omega)=f(t),\quad \phi(t+\omega)=\phi(t),\quad \psi(t+\omega)=\psi(t),$$

只須使t在幅爲ω之任意一隔間$(a, a+\omega)$內變,卽得Γ線各點,若是則Γ名爲一迴綫(closed curve).吾等自可設ω爲正.今再設其爲合於關係(4)之最小數值.若於相異二數値,t'與t'',其差數$t'-t''$不爲ω之倍數,而有

(5) $$f(t')=f(t''),\quad \phi(t')=\phi(t''),\quad \psi(t')=\psi(t''),$$

則Γ線上相對待之點爲一重點(double point).

若不能得t'與t''二數,使$t'-t''$非ω之倍數而又合於(5)式則曲線Γ無重點.

於上設$\psi(t)=0$卽得關於平面曲線之相當定義.

若爾當氏(Jordan)嘗精確證明無重點之一平面迴線C分平面爲內外二部使同在一部內之任二點常可以一折線連之.而不經過C,致凡連內外二點之連續線必過C.(1)

此與幾何直覺之理相符.但情形不必盡如此分析的連續曲線,其性狀有甚奇異者,貝阿諾氏(peano)曾示一連續曲線可填滿一正方形.(2)不過吾等以後所論皆非如是之曲線耳.

---

(1) 見 Jordan Cours d' Aanalyse Tome I,

(2) 見 Picard, Traité d' Aanalye, Tome I, p. 28

亦見 Peano, Sur une Courbe qui remplit toute une aire plane (Math. Annalen, t. XXXVI).

習　題

1. 設 a 爲有理數，λ 爲無理數，證明 $a+\lambda$, $a\lambda$, $\frac{\lambda}{a}$ 均爲無理數：又設 a, b, c, d 爲有理數，λ 爲無理數，則 $\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$ 爲有理數，抑爲無理數？

*2. 證二有理數間恆有一個無理數，因之於其間有無窮個無理數.

3. 下列各數集之高界低界聚點最大限爲何？試一一言之：——

$$(E)\qquad \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{6}{5},\cdots\cdots,$$

$$(F)\qquad u_1=\frac{1}{2},\quad u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\quad u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\cdots\cdots,$$

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n},\cdots\cdots;$$

(G)

a. $u=6.\ v=-4,$ 有何作？ $\quad u_n=2+\frac{1}{n}$ 而 $n=4k$

b. $\quad u_n=2-\frac{1}{2n}\qquad n=4k+1$

c. $\quad u_n=1-\frac{1}{n^2}\qquad n=4k+2$

d. $\quad u_n=1+\frac{1}{n^3}\qquad n=4k+3$

k 表一正整數.

4. 設曲線 $y=\sin\frac{1}{x}$ 與 x 軸之一切交點爲一集；此點集有聚點否？同樣，設 $y=\sin\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ 論之.

5. 設(E)爲含有無窮之圍集；試用分割隔間法證明(E)至少有一限點.

6. 設含無窮點之圍集 (E) 具多數限點，則此諸點又成一圍集 (E')，名 (E) 之子集 (derived set). 試證 (E) 集之最大限卽爲 (E') 之高界.

7. 試據貫數

$$u_1=\sqrt{6},\quad u_2=\sqrt{6+u_1},\cdots\cdots,\quad u_n=\sqrt{6+u_{n-1}},\cdots\cdots;$$

證明

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\cdots}}}$$

於根號無窮增多時有一限，且定其值.

8. 設貫數 $s_0=1$, s_1, s_2, s_3,……, s_n,……由公式

$$2s_{n+1}=s_n+\sqrt{s^2_n+a_n} \qquad (n>1)$$

確定而 a_n 爲一正項級數之普通項

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$$

(1) 證 $$s_{n+1}<s_n+\frac{a_n}{4}.$$

並據是以斷定級數若爲收斂的，則貫數亦然.

(2) 若所設貫數爲收斂的，證明級數亦然.

9. 命 (x) 表不能大於 x 之最大整數，而設函數 $y=x-(x)$: 證明 (1) 函數之於各整數之值爲間斷的，而於其他之值爲連續的; (2) 其在含任一整數之隔間內之低界爲 0 而高界爲 1, 低界可達而高界不可達; (3) 繪其圖線.

10. 設一函數於 x 爲整數時爲 $y=0$, 而於 x 非整數時則由 $y=x$ 定之; 其圖線何如?

11. 設函數 $\phi(x)$; 於 x 爲有理數而等於不可約之分數 $\pm\frac{p}{q}$ 時, $\phi(x)=\frac{1}{q}$, 但於 x 爲無理數時則 $\phi(x)=0$, 試證 $\phi(x)$ 對於各無理數爲連續的，而於各有理數爲間斷的.

12. 證二囿變函數之積，仍爲囿變函數.

13. 若 $f(x)$ 爲一囿變函數，則 $|f(x)|$ 亦然，證之.

14. 一函數若於隔間 (a, b) 內連續而具有一定數之極大極小，則在是間爲囿變函數.

15. $f(x)$ 爲一函數; 設能分 (a, b) 爲 p 個小隔間，使於每小間內 $f(x)$ 爲單調函數，並設此函數只具一定數之有法間斷續點; 試證 $f(x)$ 爲囿變函數.

16. 欲一函數爲囿變者，必須而即須於各小隔間內界距之和不爲無窮.

17. 凡 x 之循環函數不能爲 x 之有理函數，試證之.

18. 若函數 $f(x, y)$ 在一域內對於每自變數爲一致連續，則在此域內爲二自變數之連續函數.

第 一 章

顯函數之微分

I. 紀 數

係數.)

31. 紀數(Derivatives).

設 $y=f(x)$ 爲確定於 (a,b) 間之函數，並 x 爲間中一點.與 x 一增量 $\Delta x=h$，(爲負或正)則函數之相當數量爲 $\Delta y=f(x+h)-f(x)$. 若 h 任由何種情狀趨於零時，分數:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

趨於確定之限，則吾等稱此一限爲函數於 x 之紀變數，簡曰紀數.[1] 而有下列種種符號表之:

$$\begin{array}{llll} y' & \text{即} & f'(x), & \text{(Lagrange)} \\ Dy & \text{即} & Df(x), & \text{(Arbogast)} \\ D_x y & \text{即} & D_x f(x). & \text{(Cauchy)} \end{array}$$

若 h 由正數趨於零時 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有一限，則此限稱爲函數之右紀數.仿之，若 h 由負數趨於零時，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有一限，則爲左紀數，當

(1) Derivative 或譯作引數，微係數，子函數等，譯名雖多無一恰當者，科學名詞審查會於此名亦未確定.

左右二紀數相等,則函數於 x 有唯一紀數,有如上所言者,吾等於是簡言函數於 x 有一紀數.

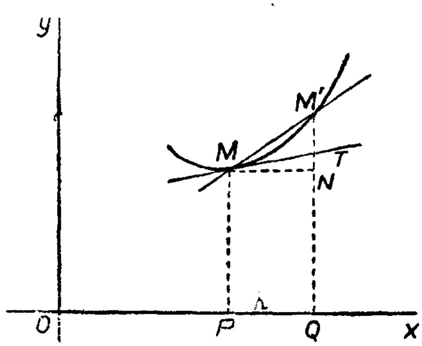
若 $f(x)$ 於 (a, b) 內每點有一紀數,且於 a 有右紀數,於 b 有左紀數,則吾等稱 $f(x)$ 於 (a, b) 爲可求紀的(derivable).

注意. 凡函數於某點若有紀數;顯然必於是點連續,但反之則不必然.例如確定如

$$f(0)=0 \text{ 而於 } x \neq 0,\ f(x)=x\sin\frac{1}{x}.$$

之函數,於 $x=0$ 爲連續,但於是點無紀數,因 $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\sin\dfrac{1}{h}$ 無定限也.猶有甚焉者,連續函數尙可對於 x 之任何值均無紀數,特其例[1]不常見,證理亦繁難耳.

32. 紀數之幾何意義.



第 5 圖

設 $y=f(x)$ 爲連續於 (a, b) 內之函數;當 x 由 a 變至 b,則 (x, y) 點作一段曲綫 AB.設 M, M' 爲相鄰二點,依次以 x 及 $x+h$ 爲經標,則直線 MM',之斜率(slope)爲:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

(1) 參考 Gaursat, Cours d' Analyse, Tom I. 及 Hobson's Theory of Functions of Real variables.

當 $h\to 0$，則 M' 點趨近於 M，若函數於此有一紀數，則 MM' 直線之斜率趨於定限 y'，而 MM' 直線有一線 MT 爲限，則所謂曲線於 M' 之切線(tangent). 其方程式爲

$$Y-y=y'(X-x).$$

X 與 Y 爲活動經緯標.

推論之，設一空間曲線.

$$x=f(t),\quad y=\phi(t),\quad z=\psi(t)$$

於其上取相鄰二點 M 與 M' 依次與參變數 t 之值 t 與 $t+h$ 相應，直線 MM' 之方程式爲

$$\frac{X-f(t)}{f(t+h)-f(t)}=\frac{Y-\phi(t)}{\phi(t+h)-\phi(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi(t+h)-\psi(t)},$$

若以 h 除各分數之分母而令 $h\to 0$，則 MM' 以一直線 MT 爲限，稱爲 (C) 於 M 點之切線而由方程式

$$\frac{X-f(t)}{f'(t)}=\frac{Y-f(t)}{\phi'(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi'(t)}$$

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

定之，三紀數係切線之定向係數(direction parameters).

當 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 於 $\Delta x\to 0$ 時，趨於 $+\infty$ 或 $-\infty$，吾等稱 y 之紀數爲 $+\infty$ 或 $-\infty$，而 $y=f(x)$ 之圖線於相當點之切線平行於 y 軸，例如 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 於原點是.

若 $f(x)$ 於一點 x_0 有不等之左右紀數，則圖線於是點有判然之二切線. 例如 $y=x\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 於 $x=0$ 爲零. 而 $\frac{y}{x}$ 則視 x 之由正

數或負數趨於零有不同之二限.曲線於原點呈角狀而有二切線.

33. 高級紀數(Derivatives of higher order).

函數$f(x)$之紀數$f'(x)$仍爲(x)之函數,若$f'(x)$有一紀數,則吾等稱之爲$f(x)$之二級紀數(second derivative),而以y''或$f''(x)$抑D_2y等符號表之;仿是,二級紀數之紀數爲$f(x)$之三級級紀(third derivative),由$y'''(x)$或$f'''(x)$抑D_3y等表之.推之,$(n-1)$級之紀數,名$f(x)$之n級紀數(nth derivative),由$y^{(n)}$或$f^{(n)}(x)$抑D_ny等表之.

34. 洛氏定理(Rolle's theorem).

設函數$f(x)$於(a, b)內爲連續,並對於$x=a$及$x=b$爲零;若$f(x)$對於x在a與b間之每值有一紀數,則a與b間至少有x之一值,使此紀數等於零.

按所設$f(a)=f(b)=0$命M與m爲函數在(a, b)內之高界與低界;若$M=m=0$,則$f(x)$在(a, b)內恆爲零,其紀數亦然.否則,於$M>0$,與$m<0$二條件必有其一.

設$M>0$,則a與b間至少有一數x_0使$f(x_0)=M$.蓋命h爲一正數,則下式

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

必爲負或零,因之,其限$f'(x_0)$不能爲正,然則$f'(x_0)\leqq 0$.今若視

$f'(x_0)$ 爲

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

之限.則見當有 $f'(x_0)\geqq 0$. 比較兩結果,可斷 $f'(x_0)=0$.

35. 增量公式或中值公式(Law of the mean).

設二函數 $f(x)$ 與 $\phi(x)$, 於 (a, b) 內爲連續,而對於其內每值(a 與 b 可不在內)有一紀數.

吾人可求三係數 A, B, C 使補助函數:

$$\psi(x)=A\,f(x)+B\,\phi(x)+C$$

對於 $x=a$ 與 $x=b$ 爲零.欲如此,必須且只須有

$$A f(a)+B\,\phi(a)+C=0,$$

$$A f(b)+B\,\phi(b)+C=0.$$

由此二式得

$$A[f(a)-f(b)]+B[\phi(a)-\phi(b)]=0,$$

因上關係式僅確定 A, B, C 之比,吾可取

$$A=\phi(a)-\phi(b),\qquad B=f(b)-f(a).$$

並因之定 C 之值.

A, B, C 之值既若是確定,則 $\psi(x)$ 對於 $x=a$ 與 $x=b$ 爲零.又因 $f(x)$, $\phi(x)$ 對於 x 於 a 與 b 間之各值有一紀數,則 $\psi(x)$ 當亦然,於是準前定理有 a 與 b 間之一數 c 使紀數

$$\psi'(x)=A f'(x)+B\,\phi'(x)$$

爲零,即

$$[\phi(a)-\phi(b)]f'(c)+[f(\underset{b}{a})-f(\underset{a}{b})]\phi'(c)=0.$$

以$\phi'(c)[\phi(a)-\phi(b)]$除式之兩端,得

(1) $$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(c)}{\phi'(c)}.$$

設$\phi(x)=x$.則上式變爲

(2) $$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

而得中量定理:

若$f(x)$爲一函數於(a,b)內連續而對於x在a與b間之每值有一唯一紀數,則(a,b)內有x之一值c使合於(2)式.

(2)式稱爲增量公式,亦名中值公式,尚可寫作

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h). \qquad (0<\theta<1)$$

其幾何意義爲學者所熟知,玆不述及.

(1)式名廣義中值公式(generalised law of the mean)設$f(a)=0$與$\phi(a)=0$,並易b爲x,則由(1)式立可推出阿比達氏定則(Hospital's theorem):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

里卜希慈氏條件(Lipsichitz condition). 若於上所論,更設紀數$f'(x)$囿於(a,b)內,卽$|f'(x)|<k$,而k爲>0之常數,則命x_1, x_2表(a,b)內之任意二數,函數$f(x)$合於不等式:

(3) $$|f(x_2)-f(x_1)|<k|x_2-x_1|.$$

稱爲里氏條件

36 偏紀數(Partial derivatives).

設二元函數 $z=f(x, y)$ 確定於一域 D 內;令二自變數中之一如 y 不變,則 z 成一唯一自變數 x 之函數,而可對此變數有紀數.若然,則吾人以 $f'_x(x, y)$ 表之.同理視 x 為常數 y 為變數,則 z 可對於 y 有一紀數,而吾等以 $f'_y(x, y)$ 表之.$f'_x(x, y)$ 與 $f'_y(x, y)$ 均稱為 $f(x, y)$ 之偏紀數.此等偏紀數仍為 x, y 之函數,亦可具有偏紀數,名為 $f(x, y)$ 之二級偏紀數,而由 $f''_{x^2}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{y^2}(x, y)$ 表之.推之 $f(x, y)$ 之 $n-1$ 級偏紀數之偏紀數為 $f(x, y)$ 之 n 級偏紀數.更普通論之.設有多元函數 $U=f(x, y, z, \cdots\cdots t)$, 其一 n 級紀數者,乃對於所含之數個變數,依照某次序連取 n 次偏紀數之結果也.吾往證所循次序無論若何,結果皆同,請先證

命 $z=f(x, y)$ 為二元函數,若其偏紀數 f''_{xy} 與 f''_{yx} 為連續函數則彼此相等.

證:設

$$U=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x, y)$$

若命 y 為一變數而設

$$\phi(y)=f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$$

則可書

$$U=\phi(y+\Delta y)-\phi(y)$$

準增量公式,得

$$U=\Delta y\,\phi'_y(y+\theta\Delta y), \qquad (0<\theta<1)$$

或以 ϕ'_y 之值代入

$$U=\Delta y[f'_y(x+\Delta x, y+\theta\Delta y)-f'_y(x, y+\theta\Delta y)].$$

再據增量公式變函數 $f'_y(x, y+\theta\Delta y)$，得

$$U=\Delta x\Delta y f''_{yx}(x+\theta'\Delta x,\ y+\theta\Delta y). \qquad (0<\theta'<1).$$

按 $x, y, \Delta x, \Delta y$ 於 U 式內成均勢，是交換 x, y 之作用尙可得

$$U=\Delta y\Delta x f''_{xy}(x+\theta'_1\Delta x, y+\theta_1\Delta y),$$

其中 θ_1 及 θ'_1 爲小於 1 之正數：然則

$$f''_{xy}(x+\theta'_1\Delta x, y+\theta_1\Delta y)=f''_{yx}(x+\theta'\Delta x; y+\theta\Delta y)$$

紀數 f''_{xy} 與 f''_{yx} 旣爲連續，則使 $\Delta x, \Delta y$ 趨於零時，上式之二端趨於 $f''_{xy}(x, y)$ 與 $f''_{yx}(x, y)$，卽明所欲證.

察上所證明之理，當函數於 x, y 外，尙含有其他變數時亦合，因他變數在此當視爲常數也.

今若偏紀數符號之足碼多於二，吾謂可更換連續二數之位次而不變其結果，譬如吾言：

$$f^{(5)}_{xyxxy}=f^{(5)}_{xxyxy}$$

蓋據上所證明之理，設 $f'_x=\phi$，則 $\phi''_{yx}=\phi''_{xy}$，卽

$$f'''_{xyx}=f'''_{xxy},$$

再將此兩式兩端對於 x, y 依次取紀數卽得前式矣.

夫更換連續二數之位次若干回，可令諸數有任何位次，是一偏紀數之値，與其符號諸足碼之位次無關，而明所欲證，於是吾人可改變偏紀數之符號，使之但顯明對於每變數所取紀數之次數足矣.例如三元函數 $U=f(x, y, z)$ 之 n 級偏紀數可由

$$f^{(n)}{}_{x^p y^q z^r}(x, y, z). \qquad (p+q+r=n).$$

表之.

37. 多元函數之增量公式.

設二元函數, $f(x, y)$; 試寫 $f(x+h, y+k)-f(x, y)=[f(x+h, y+k)-f(x, y+k)]+[f(x, y+k)-f(x, y)]$ 而引用一元函數之增量公式, 則得關於二元函數之一增量公式:

(7) $f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf'_x(x+\theta h, y+k)+kf'_y(x, y+\theta' h)$, θ 及 θ' 爲小於一之正數.

此公式含有未定數二 θ 與 θ', 吾等尙可得一公式僅含一未定數. 設補助函數:

$$\phi(t)=f(x+ht, y+k)+f(x, y+kt)$$

顯然有

$$f(x+h, y+k)-f(x,y)=\phi(1)-\phi(0)=\phi'(\theta), \qquad (0<\theta<1)$$

卽

(8) $f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf'_x(x+\theta h, y+k)+kf'_y(x, y+\theta k)$.

(7) 與 (8) 二式與前 (2) 式相類, 且顯然可推及於多元函數.

若 f_x' 與 f_y' 爲連續, 則公式尙可書如

(9) $f(x+h, y+k)-f(x, y)=h[f'_x(x, y)+\varepsilon]+k[f'_x(x, y)+\varepsilon']$. $\varepsilon, \varepsilon'$ 隨 hk 趨於零.

里卜希慈氏條件. 設一函數 $f(x, y)$ 在由 $(x_0\leqq x\leqq X, y_0\leqq y\leqq Y)$ 條件確定之域 D 內爲連續, 并有囿於域內之偏紀數 f_x',

f'_y 設於 D 內任何點,$f'_x<H$, $f'_y<K$, H 與 K 爲二正數,則由公式(7),(8)得不等式

$$|f(x_2, y_2)-f(x_1, y_1)|<H|x_2-x_1|+K|y_2-y_1|$$

與前(3)式相似,(x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 爲 D 內任意二點.

38. 曲面之切面 (Tangent plane to a surface).

命

$$Z=F(x, y) \tag{10}$$

爲一曲面 S 之方程式;設函數 F 於 x, y 平面上一點 (x_0, y_0) 爲連續,幷有連續偏紀數,則於此點,有 Z 之值 z_0 及 S 之一點 M_0 (x_0, y_0, z_0) 與之相應,今取在 S 面上經過 M_0 點之曲線 C 而設

$$x=f(t), \quad y=\phi(t), \quad z=\psi(t) \tag{11}$$

爲其方程式論之. $f(t)$, $\phi(t)$ 及 $\psi(t)$.

爲變數 t 之連續函數,若 t_0 爲 t 與 x_0, y_0, z_0 相應之值,則曲線 C 於 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 點之切線由方程式

$$\frac{X-x_0}{f'(t_0)}=\frac{Y-y_0}{\phi'(t_0)}=\frac{Z-z_0}{\psi'(t_0)} \tag{12}$$

表之.

按 C 線既在 S 面上,常有

$$\psi(t)=F[f(t), \phi(t)],$$

而無論 t 若何皆然;是此式兩端相恆等,準湊合函數(composite function)求紀數公式以求紀,並令 $t=t_0$ 則得

$$\psi'(t_0)=f'(t_0)F'x_0+\phi'(t_0)F'y_0. \tag{13}$$

注 $F'x_0$ 即 $F'_x(x_0, y_0)$ 之意.

由 (12) 與 (13) 二式消去 $f'(t_0)$, $\phi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$

則有

(14) $$Z-Z_0=(x-x_0)F'x_0+(Y-y_0)F'y_0.$$

此方程式表一平面,乃曲面上過 M_0 點諸曲線於是點之切線軌跡,名曰曲面於 M_0 點之切面.

II. 微分

微分符號創自萊伯尼慈氏(Leibniz)於分析上雖非必要,但在公式中,每有對稱性與普遍性,爲用稱簡便焉.

39. 微分(Differentials).

微分乃就無窮小(infinitesimal)立論,無窮小者,變數之以零爲限者也.於一問題中,每有數個無窮小,吾等擇其一數以爲比較標準,名曰主無窮小(principal infinitesimal),設 α 與 β 爲二無窮小而取 α 爲主論之,若於 $\alpha\to 0$ 時 $\frac{\beta}{\alpha}\to 0$,則 β 稱爲對於 α 之高級無窮小(infinitesimal of higher order). 若 $\frac{\beta}{\alpha}$ 於 $\alpha\to 0$ 有一定限 k, 則 β 稱爲對於 α 之初級無窮小(infinitesimal of first order). 在此

$$\frac{\beta}{\alpha}=k+\varepsilon$$

ε 亦爲一無窮小,由是有

$$\beta=\alpha(k+\varepsilon)=k\alpha+\alpha\varepsilon$$

$k\alpha$ 稱爲 β 之主值(principal part).致 $\alpha\varepsilon$ 對 α 爲一高級無窮小.

普通若於 $\alpha\to 0$ 時, $\frac{\beta}{\alpha^n}\to k\neq 0$, 則 β 爲對於 α 之 n 級無窮小, 而

$$\frac{\beta}{\alpha^n}=k+\varepsilon$$

$$\beta=k\,\alpha^n+\alpha^n\varepsilon$$

$k\alpha^n$ 爲 β 之主值.

斯義明,設 $y=f(x)$ 爲連續且有紀數之函數;今與 x 以一增量 Δx, 而命 Δy 爲 y 相應之增量,則按紀數定義有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon.$$

ε 與 Δx 同時趨於零.若視 Δx 爲主無窮小,則 Δy 亦一無窮小,其主值爲 $f'(x)\Delta x$ (自然設須 $f'(x)\neq 0$). 吾等稱此量爲 y 之微分,而以 dy 表之:

$$dy=f'(x)\Delta x$$

若 $f(x)=x$, 則此式變爲 $dx=\Delta x$, 卽自變數之微分等於其增量.吾等於是寫

$$dy=f'(x)dx.$$

由此可見 Δy 與 dx 除對於使 $f'(x)$ 爲零或無窮之 x 數值外,恆爲同級無窮小.嘗以極位標確定之曲線方程式 $\rho=f(\theta)$ 論之, $\Delta\rho$ 與 $d\theta$ 通常爲同級無窮小.

就幾何言,微分之意義若下:於 $y=f(x)$ 圖線上,取經標爲 x 與 $x+dx$ 之兩點 M 與 M' (見圖 5), 在 MTN 三角形內有

$$NT=MN\tan N\hat{M}T=dx\cdot f'(x)$$

是微分 dy 由 NT 表之,而 Δy 則等於 NM'. 因 dy 爲 Δy 之主值,其差 $\Delta y-dy$ 即 TM' 爲對於 dy 亦即對於 dx 之高級無窮小.

今論高級微分,視增量 dx 爲定量,以求初級微分 dy 之微分,並設此次所與 x 之增量仍與初次者等,則所得結果名爲 y 之二級微分(differential of second order),而由 d^2y 表之:

$$d^2y=d(dy)=[f''(x)dx]dx=f''(x)dx^2$$

注 dx^2 为 $d(x)$ 分隔
而 d^2x 是不同

再視 dx 爲定量並與 x 以增量 dx (與前者相等)而求 d^2y 之微分,則得三級微分

$$d^3y=(d^2y)=[f''(x)dx^2]dx=f_{(x)}'''dx^3;$$

如是推之,n 級微分乃 $n-1$ 級微分之微分,而有下式

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n.$$

注意. 於上見微分由紀數而定,反之,紀數亦可用微分顯之如次:

$$y'=\frac{dy}{dx},\qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\cdots\cdots,\qquad y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$$

關於求紀數之每規律,均有求微分之一規律與之相應;但微分式每較簡於紀數式,如就一函數之函數論之.設 $y(u)$ 而 $u=\phi(x)$,吾等有

$$f'_x=f'(u)\phi'(x),$$

以 dx 乘兩端得

$$y'_xdx=f'(u)\phi'(x)dx,$$

$$dy=f'(u)du,$$

此公式與 u 爲自變數時之公式無異.若用紀數符號則判爲二式,如

$$y'_x=f'(x) \quad 與 \quad y'_x=f'(u)u'_x.$$

再取一湊合函數 $y=f(u, v, w)$ 論之,吾人有

$$y'_x=u'_x f'_u+v'_x f'_v+w'_x f'_w.$$

以 dx 乘兩端得

$$y'_x dx=u'_x d_x f'_u+v'_x dx f'_v+w'_x d_x f'_w$$

$$dy=f'_u du+f'_v dv+f'_w dw$$

卽如

$$d(uv)=udv+vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

此等公式仍與 $u, v, w,$ 爲自變數時者同,但對於高級微分則不然,設以函數之函數:

$y=f(u)$ 論之.已知

$$dy=f'(u)du,$$

今欲求 d^2y 須注意 du 不應視爲定量,因 u 非自變數也.然則須視 $f'(u)du$ 爲一湊合函數,其中 u 及 du 爲其中間函數,於是

$$d^2y=f''(u)du^2+f'(u)d^2u.$$

欲求 d^3y 則須視 d^2y 爲 u, du, d^2u 三中間函數之湊合函數,若是得

$$d^3y=f'''(u)du^3+3f''(u)du\, d^2u+f'(u)d^3u.$$

如是類推.因有含 d^2u, d^3u……等量之項 d^2y, d^3y……微分式與 u 爲自變數時異.

多元函數之偏紀數,萊氏(Leibniz)亦以相似之符號表之,如 $f(x, y, z)$ 之 n 級偏紀數,書作

$$\frac{\partial^n f}{\partial_x{}^p \partial_y{}^q \partial_z{}^r}, \qquad (p+q+r=n)$$

但此乃爲一記號耳,非如關於單元函數之 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\cdots$ 均爲一分數也.

40. 全微分(Total differentials).

就三元函數 $U=f(x, y, z)$ 論之,設其具有連續之初級偏紀數.若與三自變數以增量 dx, dy, dz, 則 U 相應之增量 ΔU 由下式定之

$$\Delta U=(f'_x+\varepsilon)dx+(f'_y+\varepsilon')dy+(f'_z+\varepsilon'')dz.$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, 與 dx, dy, dz 同時趨於零.

於此式中略去 $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, 所得之結果,是爲 U 之全微分而以 dU 表之

$$dU=f_x'dx+f_y'dy+f_z'dz$$

或

$$dU=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

積數 $\frac{\partial f}{\partial x}dx, \frac{\partial f}{\partial y}dy, \frac{\partial f}{\partial z}dz$, 稱爲 U 之偏微分(partial differentials).

於初級全微分,視增量 dx, dy, dz 爲定量,而求其全微分,則得二級全微分,所取新增量與舊者同,按定義

$$d^2U=d(dU)=\frac{\partial\, dU}{\partial x}dx+\frac{\partial\, dU}{\partial y}dy+\frac{\partial\, dU}{\partial z}dz;$$

展之
$$d^2U=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dz\right)dx$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dz\right)dy$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz.$$

若於式中易$\partial^2 f$爲∂f^2則右端變爲

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

之平方之展式.吾等以

$$d^2U=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(2)},$$

符號記之,右端開展後,當易∂f^2爲$\partial^2 f$.

二級全微分之全微分爲三級全微分,推之$(n-1)$級全微分之全微分爲n級全微分,吾謂

$$d^nU=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)};$$

卽言視此式右端爲括弧所包之量之n次方而展開,並易∂f^n爲$\partial^n f$便得d^nU之值.此規律對於初級二級全微分已合,只須假定其對於n級者合,而求證對於$n+1$級者亦合卽可.按假定

$$d^nU=\Sigma A_{p,\,q,\,r}\frac{\partial^n f}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}dx^pdy^qdz^r,$$

其中 $p+q+r=n$, 係 $A_{p,\,q,\,r}$ 與 $(a+b+c)^n$ 之展式中 $a^pb^qc^r$ 者同,

即　　$$A_{p,\,q,\,r}=\frac{1\cdot 2\cdots\cdots n}{1\cdot 2\cdots\cdots p\cdot 1\cdot 2\cdots\cdots q\cdot 1\cdot 2\cdots\cdots r}=\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

就上式求全微分有

$$d^{n+1}U=d(d^nU)=\Sigma A_{p,\,q,\,r}\Big[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{p+1}\partial y^q\partial z^r}dx^{p+1}dy^qdz^r.$$

$$+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^{q+1}\partial z^r}dx^pdy^{q+1}dz^r+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^q\partial z^{r+1}}dx^pdy^qdz^{r+1}\Big];$$

今若易 $\partial^{n+1}f$ 爲 ∂f^{n+1}, 則此式右端可書知

$$\Sigma A_{pqr}\frac{\partial f^n}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}dx^pdy^qdz^r\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right),$$

或　　$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{d z}dy\right)^{(n)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right).$$

然則　　$$d^{n+1}U=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dx\right)^{(n+1)},$$

明所欲證.

<u>注意</u>. 一設任由一法得

(15)　　$$dU=P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

P, Q, R 爲 ~~X, Y, Z~~ x, y, z. 之函數,按全微分定義有

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

由此二式得

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}-P\right)dx+\left(\frac{dU}{\partial y}-Q\right)dy+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-R\right)dz=0.$$

因 dx, dy, dz, 爲任意之量, 應有

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial U}{\partial z}=R, \tag{16}$$

16

是(15)式與(13)三式相當,而由此式同時得 U 之一切初級偏微分.

推論之,設任由何法得

$$d^nU=\Sigma C_{p,\ q,\ r}dx^p dy^q dz^r$$

則係數 $C_{p,\ q,\ r}$ 等於 U 之 n 級偏紀數與一數字係數之乘積.

41. 湊合函數之微分 (Differentials of composite functions)

設 $U=F(u, v, w)$ 爲 u, v, w 之函數, 而 u, v, w 又爲 x, y, 等自變數之函數, 取 U 之初級偏紀數, 有

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$

以 dx, dy, 依次乘此二式而加之, 則於左端得 dU, 而於右端見 $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial F}{\partial w}$ 之係數順序等於 du, dv, dw, 然則得

$$dU=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw \tag{17}$$

如是 $U=F(u, v, w)$ 之初級全微分於 u, v, w 爲他自變數之函數時,與於其爲自變數時無異.當 u, v, w 爲中間函數時,無論自變數爲何,爲若干,(17)式之形均不改.倘自變數爲 m 個,則此一式與 m 個紀數式相當,是微分符號之單簡便利也.

據適所得之規則,可求 d^2U 但須注意(17)式右端含有六個中間函數 $u, v. w, du, dv, dw$. 若是得

$$d^2U=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w}du\,dw+\frac{\partial F}{\partial u^2}d^2u$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}dv\,dw+\frac{\partial F}{\partial v}d^2v$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w}du\,dw+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}dv\,dw+\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}dw^2+\frac{\partial F}{\partial w}d^2w,$$

約之可以前所見之符號記如下

$$d^2U=\left(\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F}{\partial v}d^2v+\frac{\partial F}{\partial w}d^2w.$$

此公式較繁於 u, v, w. 爲自變數時者.蓋於彼 d^2u, d^2v, d^2w 爲零也.

同法由 d^2U 得 d^3U 而 d^3U 含有中間函數九;如是以往,全微分之式漸演漸繁.普通 d^nU 爲 $du, dv, dw, d^2u,\cdots\cdots, d^nu, d^nv, d^nw$ 之一整函數而含 d^nu, d^nv, d^nw 之項爲

$$\frac{\partial F}{\partial u}d^nu+\frac{\partial F}{\partial v}d^nv+\frac{\partial F}{\partial w}d^nw$$

若於 d^nU 內代 $u, v, w, du, dv, dw,\cdots\cdots$ 以其對於自變之值,則得 dx, dy, 之一多項式,其係數等於 U 之 n 級偏紀數與一數字之乘積,於是同時得 U 之 n 級諸偏紀數.

例如設湊合函數 $v=f(u)$, 其 $u=\phi(x, y)$; 試求 v 之一級與二級偏紀數;如直接求之,則先有

(18) $$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y};$$

繼有

$$
(19)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial v}{\partial u}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2}\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial u}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial v}{\partial u}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{cases}
$$

今如代全微分,則(18),(19)五式可由次二式代之:

$$
(20)\qquad
\begin{cases}
dv=\dfrac{\partial v}{\partial u}du\\[2ex]
d^2v=\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2}du^2+\dfrac{\partial v}{\partial u}\,d^2u
\end{cases}
$$

若代 du 以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{du}{\partial y}dy$, 並代 d^2u 以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$ 於此二式內,則第一式中 $dx^2, 2dx\,dy, dy^2$ 之係數即爲 v 之二級偏紀數矣.

42. 乘積之 n 級微分;萊氏公式(Leibniz's formula)

湊合函數之 n 級全微分,其公式有時變簡,例如 $U=uv$ 是吾等有

$$dU=v\,du+u\,dv,\quad d^2U=v\,d^2u+2\,du\,dv+ud^2\,v,\cdots\cdots$$

觀此等微分產生之規律,普通顯有

$$d^nU=vd^nu+C_1\,dvd^{n-1}u+C_2d^2vd^{n-2}u+\cdots\cdots+u\,d^nv$$

$C_1, C_2,\cdots\cdots$ 爲正整數,吾等不難逐漸證明諸係數與 $(a+b)^n$ 展式之係數同.但簡妙莫如次法:試注意 $C_1, C_2,\cdots\cdots, C_p,\cdots\cdots$, 無

論 u, v 函數爲何皆同,吾等可取 $u=e^x$, $v=e^y$ 其 x, y 爲二自變數. 於是有

$$U=e^{x+y},\ dU=e^{x}(dx+dy),\cdots\cdots,\ d^nU=e^{x+y}(dx+dy)^n$$

$$du=e^xdx,\ d^2u=e^x\,dx^2,\cdots\cdots,\ d^nu=e^xdx^n,$$

$$dv=e^ydy,\ d^2v=e^ydy^2,\cdots\cdots,\ d^nv=e^x\,dy^n$$

以此諸值代入上列之普通公式,而以 e^{x+y} 除之,得

$$(dx+dy)^n=dx^n+C_1dy\,dx^{n-1}+C_2\,dy^2\,dx^{n-2}+\cdots\cdots+dy^n.$$

因 dx 與 dy 爲任意之量,當有

$$C_1=\frac{n}{1},\ C_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\cdots\cdots,\ C_p=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots p},\cdots\cdots$$

故

$$(21)\qquad d^n(uv)=vd^nu+\frac{n}{1}dvd^{n-1}\,u+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2vd^{n-2}\,u+\cdots\cdots+ud^nv$$

是爲萊氏公式,可以簡單符號書如

$$d^n(uv)=(du+dv)^{(n)}.$$

此公式無論有若干自變數皆合.若 u, v 同爲一自變數 x 之函數,則以 dx^n 除兩端,卽得乘積 uv 之 n 級紀數.

推之,設 m 個函數 $u, v\cdots\cdots s$ 之乘積 $U=uv\cdots\cdots ws$. 吾謂

$$d^nU=d^n(uv\cdots\cdots ws)=(du+dv+\cdots\cdots+dw+ds)^{(n)}.$$

卽言視右端爲一 n 次乘冪展開而易 $du^k, dv^k,\cdots\cdots$ 等爲 d^ku, $d^kv,\cdots\cdots$並以 $u, v.\cdots\cdots$等代 $du^0, dv^0,\cdots\cdots$卽得 d^nU 也.

公式於兩個因數之積已眞確.假定其於 $m-1$ 個因數之積眞確而求證其於 m 個因數之積亦眞確.命 $V=uv\cdots\cdots w$ 有

$$d^nU=d^n(uv\cdots\cdots ws)=d^n(Vs)=(dV+ds)^{(n)}$$

其展式之任一項爲 $C_k dV^k ds^{n-k}$ 而得 d^nU之一項爲 $C_k d^k V d^{n-k}s$

按假設

$$d^kV=(du+dv+\cdots\cdots+dw)^{(k)}$$

此項可書作

$$C_k(du+dv+\cdots\cdots+dw)^{(k)}ds^{n-k},$$

舉各項加之卽得

(22) $$d^nU=(du+dv+\cdots\cdots+dw+ds)^{(n)}$$

例求 $y=(x-a)^n(x-b)^n$ 之 n 級紀數,準萊氏公式立得

$$y^{(n)}=n!\,[(x-a)^n+(C'_n)^2(x-a)^{n-1}(x-b)+(C_n{}^2)^2(x-a)^{n-2}(x-b)^2$$
$$+\cdots\cdots+(C_n{}^p)^2(x-a)^{n-p}(x-b)^p+\cdots\cdots+(C_n{}^p)^2(x-b)^n]$$

若設 $a=b$, 則 因 $C^n_K\cdot P^n_n\cdot P^n_{n-K}=P^n_K\cdot(n-K)!$ $C^n_K\cdot C^n_{n-K}=n!\,(C^n_K)^2$

$$y^{(n)}=n!\,(x-a)^n[1+(C_n{}')^2+(C_n{}^2)^2+\cdots\cdots+(C_n{}^n)^2]$$

但在此 $y=(x-a)^{2n}$ 其 n 級紀數可直接求出如: 注 C^K_n 即 C^n_K.

$$y^{(n)}=2n(2n-1)\cdots\cdots(n+1)(x-a)^n.$$

比較兩結果,則得有趣之關係:

$$1+(C'_n)^2+(C_n{}^2)^2+\cdots\cdots+(C_n{}^n)^2=\frac{2n(2n-1)\cdots\cdots(n+1)}{n!}.$$

若於 $U=F(u,v,w)$ 內 u,v,w 爲自變數 x,y,z 之一次整函數,則 d^nU 之公式亦變簡,設

$$u=ax+by+cz+h$$
$$v=a'x+b'y+c'z+h'$$
$$w=a''x+b''y+c''z+h''$$

$a, a', a'', b, b', \cdots\cdots$ 爲常數有

$$du = a dx + b dy + c dz$$

$$dv = a' dx + b' dy + c' dz$$

$$dw = a'' dx + b'' dy + c'' dz$$

而 $n>1$ 之各微分 $d^n u, d^n v, d^n w$ 皆爲零.是則 $d^n U$ 之公式與 u, v, w 爲自變數時之公式同,即

$$d^n U = \left(\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw\right)^{(n)}.$$

43. 齊函數(Homogeneous functions).

凡合於關係:

$$\phi(tx, ty, tz) = t^m \phi(x, y, z)$$

之函數 $\phi(x, y, z)$ 曰 x, y, z 之 m 次齊函數.

暫設 x, y, z 有定值而 t 爲變數,則命 $u=tx$, $v=ty$, $w=tz$, 可書上式如

$$\phi(u, v, w) = t^m \phi(x, y, z)$$

試取兩端之 n 級微分,察 u, v, w 爲 t 之一次整函數,並

$$du = x\, dt, \quad dv = y\, dt, \quad dw = z\, dt,$$

是據上節所論有

$$\left(x\frac{\partial \phi}{\partial u} + y\frac{\partial \phi}{\partial v} + z\frac{\partial \phi}{\partial w}\right)^{(n)} = m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)t^{m-n}\phi(x, y, z)$$

今若命 $t=1$, 則 u, v, w 變爲 x, y, z,而此式左端展式之任一項

$$A_{p,q,r}\frac{\partial^n f}{\partial u^p \partial v^q \partial w^r} x^p y^q z^r$$

變爲
$$A_{p,q,r}\frac{\partial^n f}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}x^py^qz^r.$$

然則有

(23) $$\left(x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}+z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^{(n)}=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)\phi(x,y,z)$$

設若$n=1$,則得尤拉氏公式:

(24) $$m\phi(x,y,z)=x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}+z\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

偏微分之簡單符號. 表示偏微分之符號於上凡見三種.拉氏(Lagrange)符號,萊氏(Leibiniz)符號及歌氏(Cauchy)符號.但有時三者均嫌過繁,而代以較簡者.孟氏(Monge)對於二元函數之偏紀數符號最爲通用,因舉於下:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

III. 由級數確定之函數

44. 確定新函數之一法.

設$f(x,n)$爲變數x之函數,確定於(a,b)間,而繫有正整數n.今設x爲(a,b)間任一值;若$f(x,n)$之值當$n\to\infty$時趨於一限,則此限亦爲x之一函數$F(x)$,而

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f(x,n),$$

或簡寫爲$F(x)=\lim f(x,n)$.

此函數$F(x)$亦可由次級數

$f(x,1)+[f(x,2)-f(x,1)]+\cdots\cdots+[f(x,n)-f(x,n-1)]+\cdots\cdots$ 之和定之,因其前 n 項之和顯然等於 $f(x,n)$ 也.反之,設有級數

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+\cdots\cdots$$

其各項爲 x 之函數,而對於 (a,b) 間之 x 各值收斂,則其和 $S(x)$ 乃其前 n 項之和於 $n\to\infty$ 時之限,然則由一函數之限定一函數,與由一收歛級數之和定一函數,其理一也.

有極宜注意者:$f(x,n)$ 可無論 x 爲何,恆爲 n 之連續函數,但其限未必因之爲連續函數,亦卽言一收歛級數各項皆爲 x 之連續函數,其和未必爲一連續函數.例如

$$f(x,n)=x^n,\qquad 0\leqq x\leqq 1. \tag{26}$$

此函數於 $(0,1)$ 內無論 n 若何恆連續,若 $x<1$ 則 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ 而於 $x=1$ 則有 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=1$.可知於 $(0,1)$ 內收歛之級數

$$x+x(x-1)+\cdots\cdots x^n(x-1)+\cdots\cdots \tag{27}$$

其和於 $x=1$ 爲間斷的.又如

$$f(x,n)=\frac{1-x^n}{1+x^n},\qquad x\geqq 0 \tag{28}$$

若 $x<1$,其限等於 $+1$,而於 $x>1$,則等於 -1,又於 $x=1$ 則爲零.然則歛級數

$$F(x)=\frac{1-x}{1+x}+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}-\frac{1-x^{n-1}}{1+x^{n-1}}\right)+\cdots\cdots \tag{29}$$

之和於 $x=1$ 不爲連續,而有

$$F(1+0)=-1,\quad F(1-0)=1,\quad F(1)=0$$

45. 一致收斂性(Uniform convergence).

設 $f(x, n)$ 確定於 $(a\ b)$ 內,當 $n\to\infty$ 時趨於一限 $F(x)$. 若於每正數 ε, 能應以一整數 N, 使 $n\geqq N$ 不等式牽涉

$$|F(x)-f(x, n)|<\varepsilon$$

不等式,而此不等式對於 x 在 (a, b) 間之各值皆合,則吾等謂 $f(x, n)$ 一致趨於 $F(x)$, 或一致斂於 $F(x)$.

就級數論,則此定義之意義如次: 設

$$F(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+\cdots\cdots \tag{30}$$

對於 (a, b) 內之各 x 數值為收斂;命 s_n 為其前 $n+1$ 項之和,並 $R_n(x)$ 為其餘項之和

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots\cdots,$$

謂級數(~~25~~30)在 (a, b) 隔間內為一致收斂者. 乃於每正數 ε, 能應以一整數 N, 使不等式 $n>N$ 涉及不等式 $|R_n(x)|<\varepsilon$, 而無論 x 在 (a, b) 內之數值為何皆然也.

凡收斂級數未必俱有一致收斂性

於此定義有當注意者:凡與 ε 相應之數 N, 對於 x 在 (a, b) 內之諸 x 值當相同,為至要之條件.蓋對於隔間中之每值,自可得一整數 N, 使 $n\geqq N$ 牽涉 $|R_n(x)|<\varepsilon$. 若就 (a, b) 內一切之 x 值言,則條件恆能滿足否? 不可預知矣.欲明此情形之不必然,試舉級數(27)為例.設為 $0\leqq x<1$ 察 $|R_n(x)|=x^n$ 欲此級數一致收斂,須有一整數 N, 使對於不等式

$$0\leqq x<1,\qquad n\geqq N,$$

規定之各 x 及 n 數值有不等式 $x^n<\varepsilon$, 特別言之,應有 $x^N<\varepsilon$,

因之應有 $x<\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.若設 $\varepsilon<1$,則無論 N 若何大,恆有數介於 $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ 與 1 之間可爲 x 之值.如是,上之條件終不滿足.再以

$$f(x, n)=n\,xe^{-nx^2}$$

論之.此式於 $n\to\infty$ 時之限爲 $F(x)$.爲0 吾謂 $f(x, n)$ 式在凡含有 $x=0$ 數值之隔間 (a, b) 內,不能一致斂於其限.誠然,例取 $(0, 1)$ 爲隔間,對於 $x=\frac{1}{n}$,則 $f(x, n)$ 變於 $e^{-\frac{1}{n}}$.若設 $\varepsilon<e^{-1}$,則此式不能小於 ε.

<u>定理.</u> <u>凡各項爲 x 在 (a, b) 內之連續函數之級數,若在是間一致收斂,則其限亦爲 x 之連續函數.</u>

證:命 x_0 爲 a 與 b 間之一數,並 x_0+h 爲其相鄰之數,亦在 (a, b) 內;取一大數 n,使對於隔間中諸 x 數值有

$$|R_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

其中

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots\cdots,$$

而 ε 爲任與之一正數,可小至所欲,今以 $f(x)$ 表級數之和,並 $\phi(x)$ 表其前 $n+1$ 項之和,則

$$f(x)=\phi(x)+R_n(x).$$

由等式:

$$f(x_0)=\phi(x_0)+R_n(x_0),$$

$$f(x_0+h)=\phi(x_0+h)+R_n(x_0+h)$$

相減得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=[\phi(x_0+h)-\phi(x_0)]+R_n(x_0+h)-R_n(x_0).$$

夫 n 之值如上規定,有

$$|R_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |R_n(x_0+h)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

又級數諸項既爲 x 之連續函數,則 $\phi(x)$ 亦然,而吾等可求一數 η 使 $|h|<\eta$ 牽涉

$$|\phi(x_0+h)-\phi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

然則
$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<3\,\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即明 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 爲連續也.

注意. I. 欲知一級數是否在其隔間內爲一致收斂,似爲困難問題,但據下述定理,往往可以解決之.設有級數

(31)
$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+\cdots\cdots,$$

其各項爲 x 在 (a, b) 隔間內之連續函數,再設有收斂級數

(32)
$$v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots,$$

其各項爲常數,且悉爲正.今若無論 n 如何對於 (a, b) 內各 x 數值有 $|u_n|<v_n$, 則第一級數(31)於此隔間內一致收斂.蓋對於 x 於 a 與 b 間各數值,顯然有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots\cdots|<v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots\cdots$$

於是但須取 N 數值之大足使 $n\geqq N$ 牽涉 $v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots\cdots<\varepsilon$, 即見對於 x 在 (a, b) 內之各數值, $n\geqq N$ 牽涉 $|R(x)|<\varepsilon$ 矣.

例如級數

$$v_0+v_1\sin x+\cdots\cdots+v_n\sin nx+\cdots\cdots,$$

於任何隔間內爲一致收斂.

注意 II. 一致收斂級數之定義,亦可言之如次:一級數於(a, b)間內一致收斂者,乃任與正數ε,能得一大數N,使對x在(a, b)內之任何數值,有

$$(33)\qquad |\Sigma_N{}^p| = |u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots\cdots+u_{N+p}|<\varepsilon$$

而無論p為任何正整數也.

蓋一級數如按前之定義為一致收斂,則吾等可求一數N,使無論p為何

$$|R_N|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |R_{N+p}|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因之尤有
$$|R_{N+p}-R_N|<\varepsilon.$$
故合於(33)條件

反之,一級數於新定義之條件充足,則吾等可求一數N,使無論整數p, q若何,有

$$|\Sigma_N{}^p|<\frac{\varepsilon}{2},\quad 及\quad |\Sigma_N{}^{p+q}|<\frac{\varepsilon}{2};$$

因之有

$$|\Sigma_N{}^{p+q}-\Sigma_N{}^p| = |u_{N+p+1}+\cdots\cdots+u_{N+p+q}|<\varepsilon.$$

即無論p為何,$|R_{N+p}|<\varepsilon$,而合於舊定義條件.

注意 III. 45節定理亦可言之如下:

連續函數$f(x, n)$在(a, b)間一致趨於一限$F(x)$,則此$F(x)$限為在此隔間內之一連續函數.

蓋$F(x)$可以各項為連續函數之一致收斂級數表之也.

46. 級數函數之紀數.

各項爲連續而有紀數之收斂級數,其諸項紀數所成之級數,不必爲收斂者.例如級數$\Sigma \frac{1}{n^2}\sin(n^2x)$在任何隔間爲一致收斂,但其諸項紀數所成之級數爲發散者,因其普通項不趨於零也.級數有紀數之情形,由下定理明之.

定理. 若各項爲連續函數之級數斂於(a, b)隔間內,且若其諸項紀數所成級數,在是間一致收斂,則後一級數爲前一級數之和之紀數.

證:設

(34) $$F(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+\cdots\cdots$$

爲在(a, b)內之斂級數,其每項在是間爲連續函數,且有一紀數,更設其諸項紀數所成之級數:

(35) $$\Phi(u)=u'_0(x)+u'_1(x)+\cdots\cdots+u'_n(x)+\cdots\cdots$$

爲一致斂於(a, b)內,定理之意卽$F'(x)=\Phi(x)$,或差數

$$\delta=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\Phi(x)$$

隨 h 趨於零也.

命 $$S_n(x)=u_0(x)+\cdots\cdots+u_n(x),\quad s_n(x)=u_0'(x)+\cdots\cdots+u'_n(x)$$

$$\Psi_{n,p}(x)=u_{n+1}(x)+\cdots\cdots+u_{n+p}(x),$$

$$\psi_{n,p}(x)=u'_{n+1}(x)+\cdots\cdots+u_{n+p}(x);$$

無論 n, p 爲何,有

$$S_{n+p}(x)=S_n(x)+\Psi_{n,p}(x),\qquad s_{n+p}(x)=s_n(x)+\psi_{n,p}(x),$$

$$S_n'(x)=s_n(x),\quad \Psi'_{n,p}(x)=\psi_{n,p}(x)$$

級數(35)既一致收斂,吾等可取大數 n 使無論整數 p 爲何而對於 x 在 (a, b) 內一切數值有 $|\psi_{n,p}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

由 $$S_{n+p}(x+h)=S_n(x+h)+\Psi_{n,p}(x+h).$$

$$S_{n+p}(x)=S_n(x)+\Psi_{n,p}(x),$$

二式相減,並準中值公式變 $\Psi_{n,p}(x+h)-\Psi_{n,p}(x)$, 則得

$$S_{n+p}(x+h)-S_{n+p}(x)=S_n(x+h)-S_n(x)+h\,\psi_{n,p}(x+\theta h).$$

設 n 有一定之值而令 p 無限加大,則上式左端趨於 $F(x+h)-F(x)$; 又 $\psi_{n,p}(x+\theta h)$ 常絕對小於 $\frac{\varepsilon}{3}$, 其限當亦然,以是可寫

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h}+\frac{\varepsilon}{3}\rho(x, h),$$

$\rho(x, h)$ 爲絕對值小於 1 之一函數,而 δ 之值可寫作:

$$\delta=\left[\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h}-s_n(x)\right]+[s_n(x)-\Phi(x)]+\frac{\varepsilon}{3}\rho(x, b)$$

n 之值如上選定,則 $|s_n(x)-\Phi(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 再者,因 $s_n(x)$ 爲 $S_n(x)$ 之紀數,可得一正數 η, 使 $|h|<\eta$ 牽涉

$$\left|\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h}-s_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

然則於 $|h|<\eta$ 有 $|\delta|<\varepsilon$, 卽明所欲證.

吾人可注意題中並不設級數(34)一致收斂,亦不設紀數 $u_0'(x)$, $u_1'(x)$,……爲連續函數. 又此定理尙可言之如下:

若函數 $f(x,n)$ 在 (a,b) 內連續而有紀數 $f'(x,n)$, 且於 $n=+\infty$

時趨於一限 $F(x)$, 又若紀數 $f'(x, n)$ 在隔間內一致趨於一限 $\Phi(x)$. 則有 $F'(x)=\Phi(x)$.

蓋 $F(x)$ 與 $\Phi(x)$ 可由二斂級數表之,其第二級數爲一致收斂,並係由第一級數各項紀數合成者也.

上所論者不難推及於多元函數.

習　題

1. 試論次列各函數於 $x=0$ 點是否連續併有無紀數:

(a) $f(0)=0$ 而於 $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\log x^2}$,

(b) $f(0)=0$ 而於 $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\log x^2}$,

(c) $f(0)=0$ 而於 $x\neq 0$, $f(x)=x\arctan\dfrac{1}{x}$,

2. 求定 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_{m-1}$ 使

$$y=\left(\frac{1}{x^m}+\frac{\lambda_1}{x^{m-1}}+\frac{\lambda_2}{x^{m-2}}+\cdots\cdots+\frac{\lambda_{m-1}}{x}\right)e^x$$

之紀數呈 $\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^{m+1}}\right)e^x$ 形狀.

3. 以符號 $\log_2 x, \log_3 x, \cdots\cdots\cdots, \log_n x$ 依次表 $\log(\log x)$, $\log(\log_2 x), \cdots\cdots\cdots$, $\log(\log_{n-1} x)$; 試求 $\log_n x$ 之紀數.

4. 求下函數之紀數:

$$y=e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}}}$$

5. 貫數 $u_1=\sqrt[p]{x^q\sqrt{x}}$ $u_2=\sqrt[p]{x^q\sqrt{xu_1}}, \cdots\cdots$, $u_n=\sqrt[p]{x^q\sqrt{xu_{n-1}}}$ 於 $n\to\infty$ 時有一限 $u(x)$; 試求其紀數 $u'(x)$

6. 若命 P 與 Q 表 x 之兩個多項式使有關係:

$$\sqrt{1-P^2}=Q\sqrt{1-x^2},$$

則以 n 表整數有

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}}=\frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

7. 證明函數 $y=e^{-x}\cos x$ 與 $z=(x+\sqrt{x^2-1})^n$ 依次適合於關係:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4y=0,$$

$$(x^2-1)\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}-n^2z=0.$$

8. 有函數及其紀數 $f'(x)$; 若命

$$u=[f'(x)]^{-\frac{1}{2}},\qquad v=f(x)[f'(x)]^{-\frac{1}{2}},$$

則

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}$$

試證之.

9. 求適合於關係 这意念很不清楚,

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+n^2f(x)=0$$

之各多項式.於其中取 x^n 之係數爲 2^{n-1} 者以 X_n 表之.試證:

$$X_n-2xX_{n-1}+X_{n-2}=0$$

10. 於中值公式

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h),\quad (0<\theta<1)$$

中設 x 爲常數而令 $h\to 0$; 試證 $\theta\to\frac{1}{2}$.

11. 欲中值公式中之 θ 與 x 無涉,則 $f(x)$ 當如何?

12. 設函數 $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 在 $(x, x+h)$ 內爲連續而有紀數,求證:

支全部例之后相同.

$$\begin{vmatrix} f(x+h) & \phi(x+h) & \psi(x+h) \\ f(x) & f(x) & \psi(x) \\ f'(x+\theta h) & \phi(x+\theta h) & \psi(x+\theta h) \end{vmatrix}=0,\quad (0<\theta<1)$$

並由是推出中值公式及廣義中值公式.

13. 求下列各函數之 n 級紀數.

$y=\cos^2 x,$

$y=\cos^p x,$ p 為一正整數,

$y=e^{ax}\cos(bx+c),$

$y=e^{x\cos a}\cos(x\sin a),$

$y=\log x,$

$y=x^p\log x,$

$y=\dfrac{1}{a^2-b^2x^2},$

$y=\dfrac{1}{a^2+b^2x^2},$

$y=\arctan\dfrac{x\sin a}{1-x\cos a}.$

14. 證 $y=\phi(x^2)$ 之 n 級紀數可書如

$$y^{(n)}=(2x)^n\phi^{(n)}(x^2)+n(n-1)(2x)^{n-2}\phi^{(n-1)}(x^2)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-2p+1)}{p!}(2x)^{n-2p}\phi^{(n-p)}(x^2)+\cdots\cdots,$$

式中 p 自 0 變至 $<\frac{n}{2}$ 之最大整數.繼將此結果致用於函數: $e-x^2$, $\arcsin x$ 及 $\arctan x$.

15. 證勒氏多項式 (Legendre's polynomial) 今未參互一簡便之法 [illegible]

$$X_n=\frac{1}{2.4\cdots\cdots 2n}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-2)^n$$

適合於微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2}-2x\frac{dX_n}{dx}+n(n+1)X_n=0;$$

於是求定多項式之係數.

16. 證公式: $$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$ (Halphen).

17. 求下列各函數之全微分及偏紀數

(a) $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}},$

(b) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

(c) $u=z^{y^{x}}$

18. 求 $u=f(ax+by+c)$ 之偏紀數 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$,並致用於 $e^{ax+by+c}$, $\log(ax+by+c)$, $\cos(ax+by+c)$, 與 $\sin(ax+by+c)$.

19. 求 $u=\arctan\dfrac{y}{x}$ 之 n 級全微分.

20. 求 $u=e^{ax}f(y)$ 之 n 級全微分,並引用結果於 $u=e^{ax}\cos by$.

21. 證 x, y, z 之函數

$$V=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(x-c)^2}}$$

適合於方程式
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

22. 設 $V=f(r)$ 而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 試求,

$$\Delta=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

並定 $f(r)$ 使 $\Delta=0$.

23. 證明函數 $z=x\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)+\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 無論 ϕ 與 ψ 爲何,恆適合於 $rx^2+2sxy+ty^2=0$.

24. 證明 $z=x\phi(x+y)+y\psi(x+y)$ 無論 ϕ 與 ψ 若何,恆適合於 $r-2s+t=0$.

25. 證明 $z=f[x+\phi(y)]$ 合於 $ps=qr$ 而無論 f 與 ϕ 若何.

第 二 章

隱函數 函數行列式
自變數之更換

I. 隱函數

46. 存在定理(Existence theorem).

由未解決之方程式或方程組確定之函數曰隱函數(implicit functions).吾等欲論者,首爲其存在問題.今舉辜爾薩氏(Goursat)法述之.

先證關於一特例之定理:

定理. 設函數 $f(x, y, z)$ 合於條件:

1° 於 (x_0, y_0, z_0) 點附近爲連續,且有連續偏紀數 $f_z'(x, y, z)$,

2° $f(x_0, y_0, z_0)=0$ 及 $f_z'(x_0, y_0, z_0)=0$,

則方程式:

$$z=z_0+f(x, y, z) \tag{1}$$

有一根,而僅有一根 $z=\phi(x, y)$,其値當 x, y 依次趨於 x_0, y_0 時,趨於 z_0,是乃於 (x_0, y_0) 點附近之一連續函數.

證:函數 $f(x, y, z)$ 與 $f_z'(x, y, z)$ 旣對於 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 爲零,並於其附近爲連續,則吾等可取三正數 a, b, c 使在確定如:

$$x_0-a\leqq x\leqq x_0+a,\quad y_0-b\leqq y\leqq y_0+b,\quad z_0-c\leqq z\leqq z_0+c$$

之域 D 內, $f(x, y, z)$ 與 $f'(x, y, z)$ 均爲連續, 且有

(2) $$|f_z'(x, y, z)|<k<1.$$

斯意明, 以次命

$$z_1=z_0+f(x, y, z_0),\quad z_2=z_0+f(x, y, z_1)\cdots\cdots,$$

普通

(3) $$z_n=z_0+f(x, y, z_{n-1}),\quad (n=1, 2, \cdots\cdots, \infty)$$

請證若 $|x-x_0|$ 與 $|y-y_0|$ 小之至, 則各差數 z_n-z_0 可絕對小於 c, 而 n 可無限增加, 試命 z 爲 z_0-c 與 z_0+c 間之數, 則可寫 $$f(x, y, z)=f(x, y, z_0)+f(x, y, z)-f(x, y, z_0);$$
據中值公式及(2)式於是有

(4) $$|f(x, y, z)|<|f(x, y, z_0)|+k|z-z_0|.$$

今取一正數 h 至大等於 a, b 二數中之小者, 而使 x 與 y 在由

$$x_0-h\leqq x\leqq x_0+h,\quad y_0-h\leqq y\leqq y_0+h$$

條件規定之域 D' 內, 有 $|f(x, y, z_0)|<(1-k)c$, 則~~有~~由(4)式有

$$|f(x, y, z)|<(1-k)c+kc=c.$$

準此可見 $z_1-z_0, z_2-z_0, \cdots\cdots, z_n-z_0, \cdots\cdots$ 諸差數誠絕對小於 c. 然則得一貫之函數 $z_1, z_2, z_n, \cdots\cdots$ 由(3)式規定, 概含於 z_0-c 與 z_0+c 之間, 並於 D' 內爲連續.

吾謂函數 $z_n(x, y)$ 於 $n\to\infty$ 時趨於一限, 蓋由

$$z_n=z_0+f(x, y, z_{n-1}),\quad z_{n-1}=z_0+f(x, y, z_{n-2}),$$

及(2)式有 $$|z_n - z_{n-1}| < k\,|z_{n-1} - z_{n-2}|,$$

因之 $$|z_n - z_{n-1}| < k^{n-1}|z_1 - z_0| < k^{n-1}(1-k)c.$$

然則級數:

$$(5)\qquad z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots\cdots + (z_n - z_{n-1}) + \cdots\cdots$$

在D'內一致收斂,其和爲在D'內連續之一函數$Z(x, y)$.

此函數Z合於方程式(1),因$n\to\infty$時,(3)式變爲

$$(6)\qquad Z = z_0 + f(x, y, Z)$$

也.再者,對於$x=x_0$, $y=y_0$,函數$z_1, z_2, \cdots\cdots z_n\cdots\cdots$皆變爲$z_0$. 然則$Z(x_0, y_0)=z_0$,而$Z(x, y)$合於所言之各條件.

今吾謂此爲合於所云諸條件唯一之根,精切言之,卽謂當(x, y)點在D'內時,方程式(1)於Z之外無其他合於z_0-c與z_0+c間之根.

證:假若不然,而別有一根Z_1,則由

$$Z_1 = z_0 + f(x, y, Z_1), \quad z_n = z_0 + f(x, y, z_{n-1})$$

二式得 $$Z_1 - z_n = f(x, y, Z_1) - f(x, y, z_{n-1})$$

$$|Z_1 - z_n| < k\,|Z_1 - z_{n-1}|.$$

於是亦有$|Z_1 - z_n| < k^{n-1}|Z_1 - z_1|$. 此見於$n\to 0$時$|Z_1 - z_n|$趨於零,而$Z_1$與$Z$無異.

注意上之理論,非獨證明$Z(x, y)$根之存在,且示吾人以一求之之法,又按$|z_1 - z_0| < (1-k)c$則$|z_n - z_{n-1}| < (1-k)ck^{n-1}$是可判斷若於級數(5)取自$z_0$項至$(z_n - z_{n-1})$項之和以代其和,則其差誤絕對小於$ck^n$.

47. 普通定理.

設 $F(x, y, z)$ 爲 x, y, z 之一函數而合於次之條件:

1°) 在 x_0, y_0, z_0 值鄰近爲連續而具有一連續偏紀數 $F_z'(x, y, z)$,

2°) $F(x_0, y_0, z_0)=0$ 而 $F_z'(x_0, y_0, z_0)\neq 0$:

若是,則方程式

$$F(x, y, z)=0 \tag{7}$$

有一根 $Z(x, y)$ 但僅有一根,其值於 x, y 依次趨於 x_0, y_0 時趨於 z_0; 此爲於 (x_0, y_0) 點附近之一連續函數

證: 命 $m=F_z'(x_0, y_0, z_0)$; 按所設 $m\neq 0$, (7) 可書如

$$z=z_0+\left[z-z_0-\frac{1}{m}F(x, y, z)\right], \tag{8}$$

即

$$z=z_0+f(x, y, z),$$

其中

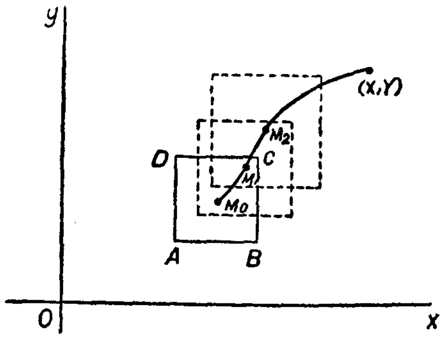
$$f(x, y, z)=z-z_0-\frac{1}{m}F(x, y, z),$$

於是準前定理即明所欲證矣.此定理顯與自變數之多寡無關.

48. 拓展(Analytic continuation).

以 $M_0(x_0, y_0)$ 爲心, $2h$ 爲邊長,作正方形 R, 使其邊平行於位標軸,則適所證明存在之根 $Z(x, y)$ 於 R 內爲連續,且由題理在 R 內 $|f_z'(x, y, z)|$ 常小於一數 $k<1$, 但此根僅確定於 R 內,而吾人只得隱函數之一部分.欲求定此函數於 R 之外,可

以分析拓展法逐漸推定之如次：命 L 爲由 (x_0, y_0) 點至 R 外一點 (x, y) 之路線,而設想 x 與 y 之值同時變易,使 (x, y) 點行於 L 上.若自 (x_0, y_0) 點以 z 之值 z_0 起算,則在未出 R 域時,是根有一確定之值,設 $M_1(x_1, y_1)$ 爲 L 線上在 R 境內之一點,並 z_1 爲 z 於是點之值,則定理之條件對於 $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ 亦合,則是別有一域 R_1 以 M_1 爲心,於其內,方程式之根爲確定,而對於 $x=x_1$, $y=y_1$ 等於 z_1,此新域



R_1 通常含有 R 外之點,更於 R 外 R_1 內取 L 之一點 M_2,可本上理而得一新域 R_2,可如此類推,以至遇 x, y, z 數值之使 $F'_2(x, y, z)=0$ 者爲止

49. 隱函數之紀數.

上述定理之證明,未嘗設偏紀數 F_z' 與 F_y' 之存在.吾人易知是等紀數之有,誠非必要,譬如命 $\phi(x)$ 爲一無紀數之連續函數,對於 $x=a$ 以正數 b 爲值,則方程式 $y^2=\phi(x)$ 有二根,於 $x\to a$ 時各趨於 $\pm\sqrt{b}$.二根,皆爲連續函數,但若函數 $F(x, y, z)$ 有連續偏紀數 F_z' 與 F_y',則所定隱函數具有初級偏紀數,請證之:設 y 不變而與 x 以增量 Δx.命 Δz 爲 z 之相當增量,則有

$$F(x+\Delta x, y, z+\Delta z)-F(x, y, z)$$

$$=\Delta x F_x'(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)+\Delta z F'_z(x, y, z+\theta\Delta z)=0,$$

由是得
$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{F_x'(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)}{F_z'(x, y, z+\theta'\Delta z)}.$$

當 Δx 趨於零, Δz 亦然,因 z 爲 x 之連續函數也.則是上式右端趨於一限,而 z 有對於 x 之一偏紀數:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$$

同理有
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

50. 於曲面之應用.

若視 x, y, z 爲空間一點之~~經緯~~位標,則方程式:

(9)
$$F(x, y, z)=0$$

表一曲面 S. 設 $A(x_0, y_0, z_0)$ 爲 S 上一點;若 F 及其初級偏紀數在 x_0, y_0, z_0 值附近爲連續,並此三偏紀數於 A 點不同時爲零,則 S 於 A 有一切面.例如 $F_z'(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, 則據存在定理,曲面之方程式於 A 附近可書作

$$z=\phi(x, y)$$

$\phi(x, y)$ 爲一連續函數,而於 A 點之切面之方程式爲:

$$Z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)$$

式中 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$ 與 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$ 表 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 於 A 點之值.若代 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 以其由上公式確定之值,則切面方程式變爲

$$(10)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0.$$

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$……爲$\frac{\partial F}{\partial x}$,……於 A 點之值,今若 $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0$ 而 $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\neq 0$, 則視 y 與 z 爲自變數,而 x 爲其函數,仍得方程式(10)以表 A 點之切面.

若 $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0$. 則 A 爲一異點 (singular point). 若然則曲面上過 A 點之曲線其切線通常成一錐面而非一平面.

仿上平面曲線 $F(x,y)=0$ 於一點 (x_0, y_0) 之切線由方程式

$$(X-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+(Y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=0$$

表之.

級

51. 高等紀數.

於初級紀數公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

中,吾人可視右端爲複函數, z 爲其中間函數,於是可按複函數求紀數法,以求隱函數之高級紀數.此等紀數之存在,繫乎 $F(x,y,z)$ 之高級偏紀數之存在.

實際求紀以據次述定理演算較易: 當一變數之數個函數合於 $F=0$ 關係,則其紀數合乎令 F 之紀數等於零所得之關係; F 之紀數由求湊合函數之紀數法得之.蓋若於 F 內代

諸變數以其對於自變數之値而恆等於零,則其紀數亦然也.此定理於 $F'=0$ 所連絡之諸函數係乎多元變數時亦合.

例如於方程式:

$$F(x,y)=0$$

確定之隱函數 y, 有

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}y'^2+3\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y''$$
$$+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'y''+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=0.$$

由是漸次得 $y', y'', y''',\ldots\ldots$

再設由方程式:

$$F(x,y,z)=0 \tag{11}$$

規定之隱函數 z, 其初級偏紀數由

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{12}$$

關係而得.欲求二級偏紀數,只須將方程式(12)對於 x 與 y 求紀數.如是得相異之式三:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\end{cases} \tag{13}$$

同法可求三級及更高級紀數.

52. 由全微分求偏紀數法.

據次之定理,可由全微分同時求出等級之各偏紀數:若多數自變數 x, y, z, t……之數個函數 u, v, w……合於關係式 $F=0$, 則有 $dF=0$. 欲證之,設有 $F(u, v, w)$, 其 u, v, w 爲自變數 x, y, 之函數. 此三函數之偏紀數合於

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{dy}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=0,$$

以 dx, dy, 順次乘此二式而加之,則得

$$\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=dF=0.$$

此式與自變數之多寡無關,欲得二級微分之關係,則更用上理於 $dF=0$ 式,但須視 dF 爲 u, v, w, du, dv, dw 等之函數. 如是類推.

試再取 $F(x, y, z)=0$ 論之. 設 x, y 爲自變數,有

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0,$$

第一式可代(12)兩式而定 z 之初級偏紀數;第二式可代(13)三式而定 z 之二級偏紀數.

例如

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

確定 z 爲 x 與 y 之函數.吾等有

$$xdx+ydy+zdz=0,$$

$$dx^2+dy^2+dz^2+zd^2z=0,$$

而得全微分

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy,$$

$$d^2z=-\frac{x^2+z^2}{z^3}dx^2-2\frac{xy}{z^3}dxdy-\frac{y^2+z^2}{z^3}dy^2.$$

由是立得第一二級偏紀數:

$$p=-\frac{x}{z},\qquad q=-\frac{y}{z}$$

$$r=-\frac{x^2+z^2}{z^3},\ s=-\frac{xy}{z^3},\ t=-\frac{y^2+z^2}{z^3}.$$

53. 方程組(Simultaneous equations).

欲討論聯立方程式所確定之一組隱函數,吾人仍可用64節所用之遞近法演之.

定理. 設 $n+p$ 個變數 x_jy_k 之 p 個函數:

$$f_1(x_1,\cdots\cdots,x_n;\ y_1,\cdots\cdots y_p),\cdots\cdots,\ f_p(x_1,\cdots\cdots,\ x_n;\ y_1,\cdots\cdots y_p)$$

於 x_j^0, y_k^0 值附近爲連續,並有連續偏紀數 $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$,若此 p 個函數 f_j 以及 p^2 個偏紀數 $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$ 對於此組數值爲零,則

(14)　$$y_1=y^0{}_1+f_1,\ y_2=y^0{}_2+f_2,\cdots\cdots,\ y_p=y^0{}_p+f_p,$$

p 個方程式有一組根：

$$y_1=\phi(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n),\cdots\cdots,\ y_p=\phi(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n),$$

於 $x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n$ 順次趨於 $x^0{}_1,\ x^0{}_2,\cdots\cdots,\ x^0{}_n$ 時以次趨於 $y^0{}_1,\ y^0{}_2$ $\cdots\cdots,\ y^0{}_n$，而在此組值附近爲連續函數.

證： 爲便講解計，取簡單之方程組：

(15) $$u=f(x,y;\ u,\ v),\qquad v=\phi(x,\ y;\ u,\ v)$$

論之；且設 $x_0=y_0=u_0=v_0=0$，蓋吾等恆可更換變數，使此適合也．於是題設變爲 $f,\ \phi,\ \dfrac{\partial f}{\partial u},\ \dfrac{\partial f}{\partial v},\ \dfrac{\partial \phi}{\partial u},\ \dfrac{\partial \phi}{\partial v}$，對於 $x=y=0$ 爲零，且於其附近爲連續．試取 $a,\ b,\ c$ 三正數，使此上六數在

$$|x|\leqq a,\quad |y|\leqq b,\quad |u|\leqq c,\quad |v|\leqq c.$$

域內爲連續，並於其內有

(16) $$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|<k,\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|<k,\left|\frac{\partial \phi}{\partial u}\right|<k,\left|\frac{\partial \phi}{\partial v}\right|<k$$

k 爲小於 $\frac{1}{2}$ 之正數，仿前設

$$u_1=f(x,\ y;\ 0,\ 0),\qquad v_1=\phi(x,\ y;\ 0,\ 0),$$

$$u_2=f(x,\ y;\ u_1,\ v_1),\qquad v_2=\phi(x,\ y;\ u_1,\ v_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

普通設

(17) $$u_n=f(x,\ y;\ u_{n-1},\ v_{n-1}),\qquad v_n=\phi(x,\ y;\ u_{n-1},\ v_{n-1}),$$

其 u_{n-1} 之值絕對小於 c，則用中值公式於 u_n-u_1 及 v_n-v_1，並準
v_{n-1}
(16) 式，得

$$|u_n|<|f(x,\ y;\ 0,\ 0)|+2kc,$$

$$|v_n| < |\phi(x, y; 0, 0)| + 2kc,$$

今取正數 h 至大等於 a, b 中之最小者,且使於 $|x| < h, |y| < h$ 時 $|f(x, y; 0. 0)|$ 與 $|\phi(x, y; 0, 0)|$ 小於 $(1\text{-}2k)\,c$. 當 (x, y) 點在此新域 D' 內,可漸見 u_i, v_i, 連續而絕對小於 c.

吾謂當 n 無限增大時函數 u_n 與 v_n 趨於 $U(x, y)$ 與 $V(x, y)$. 誠然,試取級數

$$(18)\qquad \begin{cases} u_1 + (u_2 - u_1) + \cdots\cdots + (u_n - u_{n-1}) + \cdots\cdots, \\ v_1 + (v_2 - v_1) + \cdots\cdots + (v_n - v_{n-1}) + \cdots\cdots \end{cases}$$

論之. 由 (17) 有

$$u_n - u_{n-1} = f(x, y; u_{n-1}, v_{n-1}) - f(x, y; u_{n-2}, v_{n-2}),$$

而按 (16) 有

$$|u_n - u_{n-1}| < \overset{k}{\cancel{K}}|u_{n-1} - u_{n-2}| + \overset{k}{\cancel{K}}|v_{n-1} - v_{n-2}|.$$

同理

$$|v_n - v_{n-1}| < \overset{k}{\cancel{K}}|u_{n-1} - u_{n-2}| + \overset{k}{\cancel{K}}|v_{n-1} - v_{n-2}|.$$

以 H_n 表 $|u_n - u_{n-1}|$ 與 $|v_n - v_{n-1}|$ 中之大者, 則有

$$H_n < 2kH_{n-1};$$

因之 $H_n < (2k)^{n-1}H_1 < (2k)^{n-1}(1-2k)C$.

然則級數 (18) 於 D' 內一致收斂,而表二連續函數 $U(x, y)$ 與 $V(x, y)$. 此函數 U 與 V 合於 (15) 式. 因 $n \to \infty$ 時,方程式 (17) 變爲

$$U = f(x, y; U, V), \qquad V = \phi(x, y; U, V).$$

也. 吾人可如前證明此爲方程組 (15) 唯一之一組根.

54. 普通定理.

今設方程組

$$F_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n; y_1, \cdots\cdots, y_p)=0,\ F_2=0, \cdots\cdots, F_p=0,$$

其左端皆於 $x^0_1, x^0_2, \cdots\cdots, x^0_n; y^0_1, \cdots\cdots y^0_p$ 數值附近爲連續,並有連續偏紀數 $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_k}$ 而對此組值有

$$F_1=0, \quad F_2=0, \cdots\cdots, \quad F_p=0;$$

若行列式

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdots\cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdots\cdots \dfrac{\partial F_2}{\partial y_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_p}{\partial y_2} \cdots\cdots \dfrac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}$$

對於 $x^0_1, x^0_2 \cdots\cdots x^0_n; y^0_1, y^0_2, \cdots\cdots, y^0_p$ 不爲零,則此組方程有唯一之一組根具下形

$$y_1=\phi_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p), \cdots\cdots, y_p=\phi_p(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n),$$

ϕ_1 $_2, \cdots\cdots, \phi_n$ 爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之連續函數,而於自變數趨近 $x^0_1, x^0_2, \cdots\cdots, x^0_n$ 時趨於 $y^0_1, \cdots\cdots$ y^0_n.

證: 爲簡便計,設已曾換變數使原始數值 x^0_i, y^0_i 概易爲零. 命 a_{ik} 表 $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_k}$ 對於此等原數值之值,則按所設

$$J_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1} & a_{p2}\cdots\cdots a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

方程組(19)顯然與下方程組相當:

$$(20)\quad \begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots\cdots+a_{1p}y_p=\underbrace{a_{11}y_1+\cdots\cdots+a_{1p}y_p-F_1}=\phi_1, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots\cdots+a_{2p}y_p=a_{21}y_1+\cdots\cdots+a_{2p}y_p-F_2=\phi_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}y_1+a_{p2}y_2+\cdots\cdots+a_{pp}y_p=a_{p1}y_1+\cdots\cdots+a_{pp}y_p-F_p=\phi_p; \end{cases}$$

右端函數 $\phi_1, \phi_2\cdots\cdots\phi_p$ 及其偏紀數 $\dfrac{\partial\phi_i}{\partial y_k}$ 對於 $x=0$ 等於零. 因 $J_0\neq 0$ 吾人可將方程組(20)就 $y_1, y_2,\cdots\cdots, y_p$ 解出,而於是有形爲(14)式之一組函數定理以明.

定義. 此行列式 J 稱爲 $F_1, F_2,\cdots\cdots, F_p$ 等 p 個函數對於 $y_1, y_2,\cdots\cdots, y_p$ 等 p 個變數之扎氏式(Jacobian), 或函數行列式, 而以 $\dfrac{\partial(F_1, F_2,\cdots\cdots, F_p)}{\partial(y_1, y_2,\cdots\cdots, y_p)}$ 表之.

55. 隱函數之紀數.

若函數 F_j 具有連續偏紀數 $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$, 則方程式(19)所規定之隱函數,尙有對於 x_i 之初級偏紀數,例取二聯立方程式:

$$(21)\qquad F_1(x, y, z; u, v)=0, \qquad F_2(x, y, z; u, v)=0.$$

令 y, z 不變,而與 x 以增量 Δx, 並設 $\Delta u, \Delta v$ 爲 u, v 之相應增量,

則方程式(21)可寫作

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)=0,$$

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)=0.$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$, 隨 $\Delta x, \Delta u, \Delta v$ 趨於零. 由是得

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=-\frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta''\right)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)}.$$

當 Δx 趨於零時, Δu 與 Δv 亦然; 因之, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$ 皆趨於零. 然則 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ 有一限,即明 u 有對於 x 之一偏紀數

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial x}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}}.$$

同理可明 $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ 趨於一限 $\frac{\partial v}{\partial x}$, 而由相似之公式定之. 實際運算,此二偏紀數可由

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

二式求出. 同法得對於 y, z 之偏紀數.

致高級紀數求法,則與唯一方程之例同. 尚有可注意者: 若有數個自變數,則可求全微分以推出偏紀數. 例如(21)式所定之二元函數 u, v, 其初級全微分 du 及 dv 可由方程式

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz+\frac{\partial F_1}{\partial u}du+\frac{\partial F_1}{\partial v}dv=0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz+\frac{\partial F_2}{\partial u}du+\frac{\partial F_2}{\partial v}dv=0$$

而得,繼由

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\cdots\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial F_1}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_1}{\partial v}d^2v=0,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\cdots\cdots+\frac{\partial F_2}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial F_2}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_2}{\partial v}d^2v=0,$$

得 d^2v; 如是類推. 在含 d^nu 與 d^nv 之二方程內,此二微分之係數所成之行列式等於札氏式 $\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}$. 而此式按題設原異於零.

56. 反演 (Inversion).

設自變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之 n 個函數 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ 使札氏式 $\frac{\partial(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)}\neq 0$, 則方程組

(23)　$u_1=\phi_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n), \cdots\cdots,\quad u_n=\phi_n(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$

亦確定 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 爲 $u_1, u_2, \cdots\cdots u_n$ 之 n 個函數. 蓋如 $x^0{}_1, x^0{}_2, \cdots\cdots, x^0{}_n$ 爲不使札氏式爲零之一組值,則命 $u^0{}_1, u^0{}_2, \cdots\cdots, u^0{}_n$ 爲 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ 之相當值,準普通定理便有一組函數

$$x_1=\psi_1(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n), \cdots\cdots,\qquad x_n=\psi_n(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)$$

合於 (23) 而於 $u_1,=u^0{}_1, \cdots\cdots, u_n=u^0{}_n$ 時,依次以 $x^0{}_1, \cdots\cdots, x^0{}_n$ 爲值,是爲 $\phi_1, \cdots\cdots, \phi_n$ 之反函數 (inverses), 而演算手續稱曰反演.

欲得反函之紀數,只須引用普通求微分法.例如

函數

$$u=f(x, y), \qquad v=\phi(x, y).$$

吾等有

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy, \qquad dv=\frac{\partial \phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \phi}{\partial y}dy;$$

就此二式解出 dx 與 dy 即反函數之微分

$$dx=\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}du-\frac{\partial f}{\partial y}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}}, \qquad dy=\frac{-\frac{\partial \phi}{\partial x}du+\frac{\partial f}{\partial x}\partial v}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}}.$$

於是得公式

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}}.$$

57. 空間線之切線.

設一曲線 C 由聯立二方程式:

$$\left\{\begin{aligned}&F_1(x, y, z)=0\\&F_2(x, y, z)=0\end{aligned}\right. \tag{24}$$

表之.取線上一點 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 使

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}, \qquad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}, \qquad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}$$

三扎氏式至少有其一不於此點為零;如係 $\left[\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}\right]_0 \neq 0$, 則自(24)式得

$$y=\phi(x), \qquad z=\psi(x)$$

ϕ 與 ψ 為 x 之連續函數,於 $x=x_0$ 順次變為 y_0 與 z_0. 若是曲線 C 於 M_0 點之切線由

$$\frac{X-x_0}{1}=\frac{Y-y_0}{\phi'(x_0)}=\frac{Z-z_0}{\phi'(x_0')}$$

表之. 紀數 $\phi'(x)$ 與 $\psi'(x)$ 則由次列二方程式定之

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\phi'(x)+\frac{\partial F_1}{\partial z}\psi'(x)=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\phi'(x)+\frac{\partial F_2}{\partial z}\psi'(x)=0.$$

若於此二式中令 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 並以 $\frac{Y-y_0}{X-x_0}, \frac{Z-z_0}{X-x_0}$ 依次代 $\phi'(x_0), \phi'(x_0)$, 則切線方程式倘可書作

$$(25)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0, \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0. \end{cases}$$

或

$$(26)\qquad \frac{X-x_0}{\left[\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}\right]_0}=\frac{Y-y_0}{\left[\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}\right]_0}=\frac{Z-z_0}{\left[\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}\right]_0}.$$

所得結果於幾何上之情形甚易說明: 方程式(24)表示二曲面 S_1, S_2, 其交線即 C. 方程式(25)則表示此二曲面於 M_0 點之二切面,以使 C 於 M_0 之切線為此二切面之交線.

若三個扎氏式皆於 M_0 點等於零,則所得公式不復合理,於此情形,(25)兩方程式變爲一式而 S_1, S_2 相切於 M_0 點,通常此二曲面之交線由過 M_0 之數分支合成.

II. 函數行列式

58. 特性.

函數行列式,或扎氏式之名已見於前,且已顯其重要;今更進而論之.扎氏式於多元函數上之作用,頗類紀數之於單元函數者,吾等於隱函數理所窺見者,其一端也.玆更舉述其他特性於次.

I. 欲單元函數 $f(x)$ 爲常數,必須而即須紀數 $f'(x)\equiv 0$. 今於多元函數,則有類似之定理如:

<u>定理　命 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ 爲 n 個自變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之 n 個函數;欲於此 n 個函數間,有一與 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 諸變數無涉之關係,必須而即須扎氏式 $\dfrac{\partial(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)}$ 恆等於零.</u>

證: 1° 條件爲必須者.爲簡便計,試取三個自變數之三個函數:

(27)　$X=f_1(x, y, z),\quad Y=f_2(x, y, z),\quad Z=f_3(x, y, z).$

而設其爲連續並有連續偏紀數論之.假設扎氏式

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}$$

非恆等於零;如特別對於 $x=a_0, y=y_0, z=z_0$, 異於零而命 X_0,

Y_0, Z_0 爲 X, Y, Z 相應之值,則吾等據54節定理,可求得一正數 h 使對於合

$$(28)\qquad \begin{aligned} X_0-h\le X\le X_0+h,\\ Y_0-h\le y\le Y_0+h,\\ Z_0-h\le Z\le Z_0+h \end{aligned}$$

條件之一組數值 X, Y, Z, 有合於(27)之一組數值 x, y, z 以應之.若是,函數 f_1, f_2, f_3 之值在區域(28)內爲任意者,而於其間不能有所言關係.

注意. 同理可證明欲於 X, Y 間有一關係,必須 $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}$, $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, z)}$, $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(z, x)}$ 三札氏式恆等於零;推廣言之,欲含 $n+p$ 個自變數 $x_1, x_2,\cdots\cdots, x_{n+p}$ 之 n 個函數 $u_1, u_2,\cdots\cdots, u_n$ 間有一關係,必須下列各札氏式恆等於零:

$$\frac{\partial(u_1, u_2,\cdots\cdots, u_n)}{\partial x_{a_1}, x_{a_2},\cdots\cdots, x_{a_n})}$$

式中 $a_1, a_2,\cdots\cdots, a_n$ 爲前 $n+p$ 個正整數中之任 n 個數.

2°. 條件爲即須者,試就一組含四個自變數之四個函數

$$(29)\qquad \begin{cases} X=f_1(x, y, z, t),\\ Y=f_2(x, y, z, t),\\ Z=f_3(x, y, z, t)\\ T=f_4(x, y, z, t) \end{cases}$$

論之. 設

$$J\equiv\frac{\partial(f_1,f_2,f_3,f_4)}{\partial(x,y,z,t)}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial t}\\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial t}\end{vmatrix}\equiv 0.$$

先設此行列式之初級子式(minors)至少有其一不恆等於零. 如為 $\delta=\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}$, 則由(29)前三式得

(30) $x=\phi_1(X,Y,Z,t),\ y=\phi_2(X,Y,Z,t),\ z=\phi_3(X,Y,Z,t).$

以之代於第四式則有

(31) $T=f_4(\phi_1,\phi_2,\phi_3,t)=F(X,Y,Z,t).$ 视X.Y.Z.t为自变数.

吾謂此函數 F 不含變數 t, 即云 $\frac{\partial F}{\partial t}\equiv 0$. 蓋

(32) $$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial z}\frac{\partial\phi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial t};$$

又紀數 $\frac{\partial\phi_1}{\partial t}$ $\frac{\partial\phi_2}{\partial t}$ $\frac{\partial\phi_3}{\partial t}$ 由

(33) $$\begin{cases}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\phi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t}=0\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial\phi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t}=0\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial\phi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial t}=0\end{cases}$$

三式而定. 察 (32) 與 (33) 四式合成一組對於 $\frac{\partial\phi_1}{\partial t}, \frac{\partial\phi_2}{\partial t}, \frac{\partial\phi_3}{\partial t}, \frac{\partial\phi_4}{\partial t}$ 之一次方程式; 由此易得 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 之值如次: 於行列式 J 內以 $\frac{\partial\phi_1}{\partial t}$ 乘第一行 $\frac{\partial\phi_2}{\partial t}$ 乘第二行, $\frac{\partial\phi_3}{\partial t}$ 乘第三行而加於第四行, 則準 (32) 得 $J=\delta\frac{\partial F}{\partial t}$. 夫 J 等於零, 而 δ 異於零, 是則 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 當等於零, 明所欲證; 而於 X, Y, Z, T 四函數間, 有一形爲

$$T=F(X, Y, Z)$$

之關係.

吾等可注意於此四函數間, 不能另有一與 x, y, z, t 無涉之關係. 否則, 將得一 X, Y, Z 三函數間之一關係, 而 δ 爲零矣.

今設 J 之第一級子式盡恆等於零, 而二級子式中至少有其一非恆等於零, 譬爲 $\delta'=\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}$, 則由 (28) 前二式得

$$x=\phi_1(X, Y, z, t) \qquad y=\phi_2(X, Y, z, t);$$

因之

$$Z=f_3(x, y, z, t)=F_1(X, Y, z, t), \qquad T=F_2(X, Y, z, t).$$

吾謂此二式不含 z 與 t, 譬如可證 $\frac{\partial F_1}{\partial t}=0$. 自

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}=\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial t},$$

$$0=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t},$$

$$0=\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t}$$

三式可如前得

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, t)}=\delta\frac{\partial F_1}{\partial t},$$

即見 $\frac{\partial F_1}{\partial t}=0$ 也. 同理可明 $\frac{\partial F_1}{\partial z}=0$, $\frac{\partial F_2}{\partial z}=0$, $\frac{\partial F_2}{\partial t}=0$, 是則於 X, Y, Z, T 四函數間,有相異之關係二:

$$Z=F_1(X, Y), \qquad T=F_2(X, Y);$$

此外則無,否則將得 X, Y 間之一關係而 $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}=0$ 矣.

又若 J 之第二級子式盡爲零,但 X, Y, Z, T 四函數不盡爲常數,則同理可明其中三數各爲第四數之函數.

上之理論顯然合於通例,而吾人可言:凡含 n 個自變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之 n 個函數 $F_1, F_2, \cdots\cdots, F_n$, 若其札氏式爲零,並含有 $n-r+1$ 行之各子式亦然,但含有 $n-r$ 行者至少有其一異於零,則於此 n 數函間,適有 r 個相異之關係,其中 r 可寫爲其餘 $n-r$ 個之函數,但於此 $n-r$ 個間則絕無關係.

仿上可證明次理:

定理. 欲於含 $n+p$ 個自變數之 n 個函數間有一與自變無涉之關係,必須並即須此 n 個函數對於任意 n 個自變數之札氏式概等於零.

應用. 此定理頗重要,引及之處甚多. 茲舉一例以示其用. 命 $f(x)$ 表以 $\frac{1}{x}$ 爲紀數並 $f(1)=0$ 之一函數,而設

$$u=f(x)+f(y), \qquad v=xy.$$

於此

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{x}, & \frac{1}{y}\\ y & x\end{vmatrix}=0.$$

準上述定理,當有 $u=\phi(v)$, 即

$$f(x)+f(y)=\phi(xy).$$

欲定 ϕ, 只須令 $y=1$. 於是有 $f(x)=\phi(x)$. 而

$$f(x)+f(y)=f(xy).$$

是乃對數函數之基本特性.可知此特性若未前知.則將由札氏式理闡明焉.

II. 對於函數的函數之紀數公式,札氏式亦有類似之公式.命 $F_1, F_2,\cdots\cdots, F_n$ 爲一組含 n 個變數 $u_1, u_2,\cdots\cdots, u_n$, 之 n 個函數,而 $u_1, u_2,\cdots\cdots, u_n$ 又爲含 $x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n$ n 個自變數函數之函數則有公式:

$$(34)\quad \frac{\partial(F_1, F_2,\cdots\cdots, F_n)}{\partial(x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n)}=\frac{\partial(F_1, F_2,\cdots\cdots, F_n)}{\partial(u_1, u_2,\cdots\cdots, u_n)}\cdot\frac{\partial(u_1, u_2,\cdots\cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n)}$$

證:公式右端可書作:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\cdots\cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2}\cdots\cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdots\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\cdots\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

其積式之第一元等於

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

即 $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}$; 而於他元,其理亦同.明所欲證.

III. 湊合函數之紀數公式亦可推及於札氏式.例有 x, y, z 三變數之函數 u, v 而 x, y, z 又爲 ξ, η 二自變數之函數,則有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}+\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(\xi,\eta)}.$$

此式不難證明,並易推廣.

III. 變數之更換

於分析上問題,每須更換變數;倘式中含有紀數,則吾等應能以函數對新變數之紀數,表顯其對舊變數之紀數.欲解此問題,按理只須根據湊合函數與隱函數之求紀規則演之.但實際運算,亦有準繩.茲舉問題之重要者分述之.

59. 題問 I.

設函數 $y=f(x)$ 而取新變數 t, 由 $x=\phi(t)$ 關係連於舊變數 x; 求 y 對於 t 之諸級紀數表顯 y 對於 x 之諸級紀數.

以 $\phi(t)$ 代 x 有 $y=f[\phi(t)]$, 而

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\phi'(t).$$

由此得

$$y'_x=\frac{y'_t}{\phi'(t)}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}. \tag{34}$$

是則欲得 y 對於 x 之紀數,可取 y 對於 t 之紀數,而以 x 對於

t 之紀數除之.

二級紀數則可就(34)式依此規則求之.如是得

$$y''_{x^2}=\frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{\phi'(t)}=\frac{y''_{t^2}\phi'(t)-y'_t\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3}.$$

同法可求三級紀數; 推之可求 n 級紀數. 吾等可注意 $y^{(n)}_{x^n}$ 顯然由 $\phi'(t), \phi''(t), \cdots\cdots \phi^{(n)}(t)$ 及 $y'_{t^1}, y''_{t^2}, \cdots\cdots y^{(n)}_{t^n}$ 表之.

上列結果尤可書爲形較對稱之式如次: 命 dx, dy, d^2y, ……表 x, y 對於 t 之微分, 則有

$$(35)\qquad \begin{cases} y'_x=\dfrac{dy}{dx}, \\ y''_{x^2}=\dfrac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3} \end{cases}$$

例如曲線 $y=F(x)$ 於一點 (x, y) 之弧半徑爲 $R=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}/|y''|$; 今若曲線之方程式爲

$$x=f(t), \qquad y=\phi(t),$$

則準公式(35), 得

$$R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{|dx\, d^2y-dy\, d^2x|}.$$

60. 問題 II.

設函數 $y=F(x)$. 命

$$(37)\qquad x=f(t, u), \qquad y=\phi(t, u),$$

則原式變爲 $u=\phi(t)$; 試求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\cdots$ 對於 t, u, 及 $\frac{du}{dt}, \cdots\cdots$ 之值.

此題可化歸前題解決,蓋設想以 $\phi(t)$ 代 u 於 (37), 而後視 x 與 y 爲 t 之湊合函數,則情形卽與上同. 於是有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{dt}+\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}};$$

繼有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right):\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\partial f}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\left[\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\dfrac{\partial^2\phi}{\partial u\partial t}\dfrac{du}{dt}+\cdots\cdots\right]-\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\cdots\cdots\right)\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\cdots\cdots\right]}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\right)^3}.$$

普通 $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ 由 t, u 及 $\dfrac{du}{dt}$, $\dfrac{d^2u}{dt^2}$,……, $\dfrac{d^nu}{dt^n}$ 表之.

例有一曲線於極位標以 $\rho=f(\theta)$ 爲方程式; 命 x, y 表一點之正交位標,則有

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta,$$

若取 θ 爲自變數,則由此二式得

$$dx=\cos\theta\,d\rho-\rho\sin\theta\,d\theta,$$

$$dy=\sin\theta\,d\rho+\rho\cos\theta\,d\theta,$$

$$d^2x=\cos\theta\,d^2\rho-2\sin\theta\,d\theta\,d\rho-\rho\cos\theta\,d\theta^2,$$

$$d^2y=\sin\theta\,\cancel{d\theta}\,d^2\rho+2\cos\theta\,d\theta\,d\rho-\rho\sin\theta\,d\theta^2;$$

因之

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2.$$

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=2d\theta\,d\rho^2-\rho\,d\theta\,d^2\rho+\rho^2\,d\theta^3$$

而弧半徑之公式變爲:

(38) $$R=\pm\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.$$

61. 平曲線之變易 (Transformation of place curves).

設於平面上每點 m, 吾等準一作圖法規定他一點 M 與之相應. 若命 x, y 爲 m 之經緯標並 X, Y 爲 M 者, 則有二關係如

(39) $$X=f(x, y), \qquad Y=\phi(x, y),$$

此二式確定一種所謂之點性變易 (point transformation); 幾何上之投射變易 (projective transformation), 反演 (inversion) 等即其例也. 當 m 作一曲線 c 時, M 別作一曲線 C, 其性狀由 c 之性狀及變易之類別而定. 命 $y', y'',\cdots\cdots$ 表 y 對於 x 之諸級紀數, 而 $Y', Y'',\cdots\cdots$ 表 Y 對於 X 者, 則欲討論曲線 C, 須能以 x, y, y', y'', 表示 $\cdots\cdots Y', Y'',\cdots\cdots$. 此適上所討論者也. 吾人有

$$Y'=\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'}$$

$$Y''=\frac{\frac{dY'}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\cdots\cdots\right)-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cdots\cdots\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)^3}$$

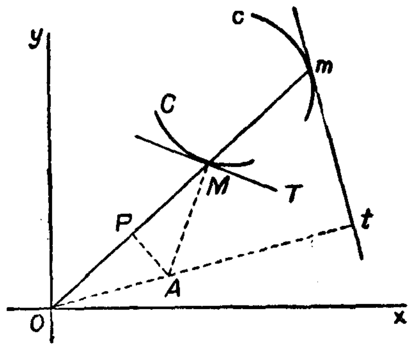
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

吾等可注意 Y' 僅含有 x, y, y'; 然則若取相切於 (x, y) 點之二曲線 c 與 c', 而同施以 (39) 之變易, 則化成之二曲線 C 與 C', 亦將互切於相當點 (X, Y). 據此則欲定 C 於某點之切線, 吾

人得代 C 以他一線 C'；僅須 C' 切 C 於是點即可. 請舉一例：公式

$$X=\frac{h^2x}{x^2+y^2},\qquad Y=\frac{h^2y}{x^2+y^2}. \tag{40}$$

確定之變易爲一反演，或一互徑變易 (transformation of reciprocal radii) 以原點爲其極. 設 m 爲出線 c 之一點，並 M 爲 C 之相當點. 欲定 C 於 M 之切線吾人可以 c 於 M 點之切線 mt 代 c 以定之. 按幾何理，知 mt 直線由反演而成之形爲過 Q 與 M 二點之圜，其心 A 位於 mt 之 ot 垂線上. 於是引 AM 於 M 之垂線，即得所求切線 MT，而 MT 與 mt 成逆平行 (antiparallel).



第 7 圖

62. 切性變易 (Contact transformations).

上節所論變易，可以化相切之二線爲相切之二線，然有此特性之變易，不限於此也. 茲往論其他更普通者，設對於 c 之一點 m，吾人以一作圖法定一點 M. 假令 M 點之位置不僅因 m 之位置而定，且與 m 點之切線有關，則變易公式將呈下形

$$X=f(x,y,y')\qquad Y=\phi(x,y,y'), \tag{41}$$

而變成之曲線,其切線斜率爲:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'+\frac{\partial\phi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y}y''},$$

普通 Y' 含有 x, y, y', y'', 四變數,若對於相切於 (x, y) 之二曲線 c 與 c' 作 (41) 之變易,則得二曲線 C 與 C'. 斯二線有一公點 (X, Y),但通常不於是點相切;因 Y' 對於 C 與 C' 二線不必有相等之值也. 欲 C 與 C' 常相切,必須而即須 Y' 不含 y'', 即有

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'\right)=\frac{\partial\phi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right).$$

凡合於此條件之變易,是爲切性變易.

例如勒氏變易 (Legendre's transformation):

$$X=y' \qquad Y=xy'-y,$$

即係一切性變易.蓋由上式得 Y' 之值爲

$$Y'=\frac{dy}{dx}=\frac{xy''}{y''}=x$$

確與 y'' 無關. 又由前二式有

$$x=Y', \qquad y=XY'-Y, \quad y'=X.$$

可見此變易爲有逆性者.

63. 問題 III.

設二元函數 $U=f(x, y)$; 取新自變數 u, v 而由

$$x=\phi(u, v) \qquad y=\psi(u, v)$$

關係連於舊者,試求以 u, v 及 $\frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}$ 表 $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$.

設想在 U 內, x, y 由其對於 u, v 之值代入,則按湊合函數求紀數法,得

$$\frac{\partial U}{\partial u}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial u}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial U}{\partial v}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial v}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

吾等可由此二式解出 $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$. 蓋 $\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)}$ 當異於零,否則變易無意義矣.然則

$$(42)\qquad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}=A\frac{\partial U}{\partial u}+B\frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial U}{\partial y}=C\frac{\partial U}{\partial u}+D\frac{\partial U}{\partial v} \end{cases}$$

(A, B, C, D 爲 u, v 之函數)而對於初級紀數之問題以決.

欲求二級紀數,只須將(42)二式所示之法轉用於初級紀數即得.如是有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial U}{\partial u}+B\frac{\partial U}{\partial v}\right)$$

$$=A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial U}{\partial u}+B\frac{\partial U}{\partial v}\right)+B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial U}{\partial u}+B\frac{\partial U}{\partial v}\right)$$

$$=A\left(A\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}\right)$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}+B\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial v}\right).$$

同法得 $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$ 與 $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ 以及更高級之紀數.於運算中,凡 $\frac{\partial}{\partial x}$ 及

$\frac{\partial}{\partial y}$ 手續順次由

$$A\frac{\partial}{\partial u}+B\frac{\partial}{\partial v}, \qquad C\frac{\partial}{\partial u}+D\frac{\partial}{\partial y},$$

手續代之,而問題終爲求係數 A, B, C, D.

例 1. 設有方程式

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{43}$$

式中 a, b, c 爲常數;試易變數以使其形至簡. 若有 $a=c=0$, 則方程式已簡甚,無須再變. 然則當設 a 或 c 異於零;譬有 $c\neq 0$ 試取新變數:

$$u=x+\alpha y, \qquad v=x+\beta y,$$

α, β 爲未定常數, 吾人有

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{\partial U}{\partial v},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\alpha\frac{\partial U}{\partial u}+\beta\frac{\partial U}{\partial v}$$

則是 $A=B=1$, $C=\alpha$, $D=\beta$. 更依普通算法有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 U}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}.$$

以此諸值代入方程式則得

$$(a+2ba+c\,a^2)\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+2\left[a+b(\alpha+\beta)+c\,\alpha\beta\right]\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}$$

$$+(a+2b\,\beta+c\,\beta^2)\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}=0.$$

玆分三種情形論之:

1°). $b^2-ac>0$. 取方程式

$$a+2br+cr^2=0$$

之二根爲 α, β, 則方程式 (43) 變爲

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}=0.$$

此式可寫作 $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)=0$, 是知 $\frac{\partial U}{\partial u}$ 僅爲 u 之函數如 $f(u)$ 今以 $F(u)$ 表 u 之一函數而設其紀數 $F'(u)$, 則差數 $U-F(u)$ 對於 u 之紀數爲零, 是此差數當不含 u 而有 $U=F(u)+\Phi(v)$. 反之此式合於上式明甚. 於是可斷凡合於 (43) 方程式之函數 U 呈下形

$$U=F(x+\alpha\,y)+\Phi(x+\beta\,y).$$

2°). $b^2-ac=0$. 取 α 等於 $a+2br+cr^2=0$ 之重根並 β 異於 α, 則 $\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}$ 之係數爲零, 因其等於 $a+b\,\alpha+\beta(b+c\,\alpha)$ 也. 然則方程式變爲

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}=0.$$

由此可知 U 應爲 v 之線性 (linear) 函數 $U=vf(u)+\phi(u)$, 其 $f(u)$ 與 $\phi(u)$ 爲任意函數. 恢復舊變數, 則

$$U=(x+\beta\,y)f(x+\alpha\,y)+\phi(x+\alpha\,y).$$

此可書作

$$U=[x+\alpha y+(\beta-\alpha)y]f(x+\alpha y)+\phi(x+\alpha y),$$

$$U=yF(x+\alpha y)+\Phi(x+\alpha y).$$

3°). $b^2-ac<0$. 吾等可定 α,β 以使

$$a+2b\alpha+c\alpha^2=a+2b\beta+c\beta^2.$$

$$a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta=0,$$

即 $$\alpha+\beta=-\frac{2b}{c},\qquad \alpha\beta=\frac{2b^2-ac}{c^2}.$$

以 α,β 爲根之方程式

$$r^2+\frac{2b}{c}r+\frac{2b^2-ac}{c^2}=0$$

果有二實根.所設方程式(43)於是變爲

$$\Delta_2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}=0.$$

此方程式 $\Delta_2 U=0$ 名曰拉卜來氏方程式(Laplace's equation).

例 2. 命 x, y, z 爲三自變數而設

$$(44)\qquad \begin{cases} x=au+bv+cw \\ y=a'u+b'v+c'w, \\ z=a''u+b''v+c''w, \end{cases}$$

$a, b,\cdots\cdots$ 爲常數. 若有

$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2,$$

則(44)確定一所謂之正交代換(orthogonal substitution). 吾等知欲滿足此條件,必須而即須有關係

$$a^2+a'^2+a''^2=\Sigma a^2=1,\quad \Sigma b^2=1,\quad \Sigma c^2=1,$$

$$ab+a'b'+a''b''=\Sigma ab=0,\quad \Sigma bc=0,\quad \Sigma ca=0,$$

于(44)中可知

$$(A).\begin{cases} ax+a'y+a''z=\Sigma a^2u+\Sigma ab\,v+\Sigma ca\,w=u \\ bx+b'y+b''z= \quad 同上 \quad =v \\ cx+c'y+c''z= \quad\quad =w \end{cases}$$

或與之相當之關係 (A中作正交代換).

$$
(45)\qquad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=\Sigma a^2=1, & \Sigma a'^2=1, \quad \Sigma a''^2=1, \\ aa'+bb'+cc'=\Sigma aa'=0, & \Sigma a'a''=0, \quad \Sigma a''a=0. \end{cases}
$$

吾往施正交代換(44)於次列二量:

$$
\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
$$

拉梅氏(Lamé)稱此二量為函數 V 之初級與二級微分參量(differential parameters)而依次以 $\Delta_1(V)$, $\Delta_2(V)$ 表之. 吾等有

$$
\frac{\partial V}{\partial u}=a\frac{\partial V}{\partial x}+a'\frac{\partial V}{\partial y}+a''\frac{\partial V}{\partial z},
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial v}=b\frac{\partial V}{\partial x}+b'\frac{\partial V}{\partial y}+b''\frac{\partial V}{\partial z},
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial w}=c\frac{\partial V}{\partial x}+c'\frac{\partial V}{\partial y}+c''\frac{\partial V}{\partial z};
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}=&\,a\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a'\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+a''\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right)\\
&+a'\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+a'\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a''\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right)\\
&+a''\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}+a'\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a''\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\\
=&\,a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a'^2\frac{\partial V}{\partial y^2}+a''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\
&+2aa'\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+2a'a''\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}+2a''a\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+b'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+b''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
$$

$$+2bb'\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+2b'b''\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}+2b''b\frac{\partial^2 V}{\partial\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}=c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+c'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+c''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$+2cc'\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+2c'c''\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}+2c''c\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}.$$

於是將前三式平方加之且注意關係(45). 則得

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial w}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

又後三式相加得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

可見微分參量不因正交代換而改其形. 因是此二量於分析上有重要關係焉. [redacted].

例 3. 時或演算手續可以機巧之法稍變簡單, 如欲以

(46) $x=\rho\sin\theta\cos\psi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\psi,\quad z=\rho\cos\theta.$

化 $\Delta_1(V)$ 與 $\Delta_2(V)$, 吾等可注意作變易(46)與賡續作:

$$x=r\cos\psi,\qquad y=r\sin\psi,\qquad z=z$$

及 $$r=\rho\sin\theta,\qquad \psi=\psi,\qquad z=\rho\cos\theta$$

二變易同

由第一變易有

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\psi+\frac{\partial V}{\partial y}\sin\psi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi}=-\frac{\partial V}{\partial x}r\sin\psi+\frac{\partial V}{\partial y}r\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos^2\psi+2\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\cos\psi\sin\psi+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cos^2\psi,$$

$$\frac{\partial_2 V}{\partial\psi^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}r^2\sin^2\psi-2\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}r^2\sin\psi\cos\psi+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}r^2\cos^2\psi$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x}r\cos\psi-\frac{\partial V}{\partial y}r\sin\psi.$$

由是得

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

而 $\frac{\partial V}{\partial z}$ 與 $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ 自未更改,可知微分參量變爲

(47) $$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

及

(48) $$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

繼施以第二變易

$$z=\rho\cos\theta,\qquad r=\rho\sin\theta,\qquad \psi=\psi,$$

則化

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

爲

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}$$

z為x. r為y. ψ為z.
ρ為r. θ為ψ.

而 $\frac{\partial V}{\partial\psi}$ 與 $\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}$ 不改.

再者,吾等有

$$\frac{\partial V}{\partial\rho}=\frac{\partial V}{\partial z}\cos\theta+\frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=-\frac{\partial V}{\partial z}\rho\sin\theta+\frac{\partial V}{\partial r}\rho\cos\theta,$$

而消去 $\frac{\partial V}{\partial z}$ 得

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

於是將此等值代於(47)(48),即有最後結果爲

$$(49)\quad \begin{cases}\Delta_1(V)=\left(\dfrac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2+\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2+\dfrac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2,\\ \Delta_2(V)=\dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\dfrac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}+\dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \rho}+\dfrac{\cot\theta}{\rho^2}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}.\end{cases}$$

64. 別法.

當函數爲未知時,上法最爲適用.但於少數問題,則以如次御算較佳.

設二元函數 $z=f(x, y)$, 並設 x, y, z 由二助變數 u, v 表之,則吾等於 dx, dy, dz 間有

$$(50)\qquad dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{dy}dy.$$

此式與

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

二式相當.由此可提出 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 對於 u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ 之值亦如上法.但欲求高級紀數,吾等仍先求出微分關係如(50);例如欲求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, 則書

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial y}dy.$$

此與下二式當

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

式中設 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 由適所得之值代入. 仿此由

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$$

式可求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 與 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. 如是而得 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 之兩值自應相等.

<u>應用於曲面</u>. 設曲面 S, 其各點之位標由參變數 u, v 之函數

$$x=f(u,v),\qquad y=\phi(u,v),\qquad z=\psi(u,v) \tag{51}$$

表之. 於此三式中消去 u, v, 即得 S 之尋常方程式. 但吾等欲不假此手續而直就(51)三式論之; 且消去手續, 於實際上時或不可能也, 察 $\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}$ 三式不能盡等於零; 否則, 消去 u, v 將於 x, y, z 間得判然之二關係; 於是 (x, y, z) 點之軌跡將為一曲線, 而非一曲面矣. 今設

$$\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(u,v)}\neq 0.$$

若是吾人可設想由(51)前二式提出 u, v 以代於第三式, 而得曲面方程式 $z=F(x,y)$. 欲討論曲面上某點鄰近之情形, 吾等於是應求偏紀數 $p, q, r, s, t,$……. 由關係

$$dz = pdx + qdy$$

得 p 與 q, 此式析爲次之二式

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = p\dfrac{\partial f}{\partial u} + q\dfrac{\partial\phi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = p\dfrac{\partial f}{\partial v} + q\dfrac{\partial\phi}{\partial v}. \end{cases}$$

解之卽得 p, q. 以其值代入

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

則得切面方程式

$$(53)\qquad (X-x)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (Y-y)\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + (Z-z)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 0.$$

旣得 $p = f_1(u, v)$, $q = f_2(u, v)$, 則由

$$dp = rdx + sdy,$$

$$dq = sdx + tdy$$

可得 r, s, t; 如是類推.

65. 問題 IV

設有

$$(54)\qquad x = f(u, v, w), \quad y = \phi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w);$$

於 x, y, z 間之每關係,此三式規定 u, v, w 間一關係以應之. 試求以 u, v, w 及 w 對 u, v, 之偏紀數表顯 z 對 x, y 之偏紀數.

此問題可歸入前題解決. 蓋設 w 由其對於 u, v 之值代之, 則(54)式卽表 x, y, z 爲二輔變數 u, v 之函數. 於是視 f, ϕ, ψ

爲 u, v 之湊合函數而 w 爲其中間函數，即可引用前法. 例如 p, q 乃由次二式而定

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}=p\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+q\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=p\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+q\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}+\frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

同法可求高級紀數.

以何幾理言之題意如次：於空間一點 $m(x, y, z)$，吾等可以一作圖法使他點 $M(x, y, z)$ 與之相應. 當 m 點作一曲面 S 時，M 點作一曲面 Σ. 吾等乃欲自 S 之特性推求 Σ 者.

規定變易之公式呈下形

$$X=f(x, y, z), \qquad Y=\phi(x, y, z), \qquad Z=\psi(x, y, z);$$

命

$$z=F(x, y), \qquad Z=\Phi(X, Y)$$

依次爲 S, Σ 之方程式，問題即用 x, y, z 及 $F(x, y)$ 之偏紀數 $p, q, r, s, t, \cdots\cdots$ 表 $\Phi(X, Y)$ 之偏紀數 $P, Q, R, S, T, \cdots\cdots$. 此正上節所論者.

紀數 P, Q 只含 x, y, z, p, q；是則此種變易換相切之二曲面爲相切之二曲面. 然此究非具有如是特性之普通變易也. 於下更見他例.

66. 勒氏變易 (Legendre's transformation).

命 $z=f(x, y,)$ 爲一曲面 S 之方程式；於 S 上一點 $m(x, y, z)$，介一點 $M(X, Y, Z)$ 與之相應，而相應情形由次式規定之：

$$X=p,\qquad Y=q,\qquad Z=px+qy-z.$$

命 $Z=\Phi(X,Y)$ 爲 M 點所作曲面之方程式;若設想代 z,p,q, 以 $f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$, 則 M 之位標 X,Y,Z 由 x,y 二變數之函數表之.

以 P,Q,R,S,T 表 $\Phi(XY)$ 之偏紀數, 則由關係得

$$dZ=PdX+QdY$$

得 $$pdx+qdy+xdp+ydq-dz=Pdp+Qdq$$

或 $$xdp+ydq=Pdp+Qdq,$$

設對於所取之曲面 S, p 與 q 與不互爲函數, 則有

$$P=x,\qquad Q=y.$$

欲得 R,S,T, 則可仿上由關係式

$$dP=RdX+SdY,$$

$$dQ=SdX+TdY$$

求之. 以 X,Y,P,Q 之值代入,則斯二式變爲

$$dx=R(rdx+sdy)+S(sdx+tdy),$$

$$dy=S(rdx+sdy)+T(sdx+tdy).$$

由此得

$$Rr+Ss=1,\qquad Rs+St=0,$$

$$Sr+Ts=0,\qquad Ss+Tt=1.$$

因之

$$R=\frac{t}{rt-s^2},\qquad C=\frac{s}{rt-s^2},\qquad T=\frac{r}{rt-s^2}.$$

由上列四式, 又可得

$$x=P,\qquad y=Q,\qquad z=PX+QY-Z,$$

$$p=X, \quad q=Y,$$

$$r=\frac{T}{RT-S^2}, \quad s=\frac{S}{RT-S^2}, \quad t=\frac{R}{RT-S^2},$$

足見此變易爲有<u>逆性者</u>(involutory). 又因 X, Y, Z, P, Q 只含 x, y, z, p, q, 可知此變易爲一切性變易.

67. 安培氏變易 (Ampere's transformation).

仍用孟氏偏紀數符號而命

$$X=x, \quad Y=q, \quad Z=qy-z;$$

關係 $dZ=PdX+QdY$ 於此變爲

$$qdy+ydq-dz=Pdx+Qdq,$$

或
$$ydq-pdx=Pdx+Qdq;$$

於是有

$$P=-p, \quad Q=y,$$

而
$$x=X, \quad y=Q, \quad z=QY-Z$$

$$p=-P, \quad q=Y,$$

可見安氏變易仍爲切性的有逆性的. 繼由

$$dP=RdX+SdY$$

得
$$-rdx-sdy=Rdx+S(sdx+tdy)$$

即
$$R+Ss=-r, \quad St=-s,$$

$$R=\frac{s^2-rt}{t}, \quad S=-\frac{s}{t};$$

又由
$$dQ=SdX+TdY$$

可求得
$$T=\frac{1}{t}.$$

而反之
$$r=\frac{S^2-RT}{T},\qquad s=-\frac{S}{T},\qquad t=\frac{1}{T}.$$

習　題

1. 求次列各隱函數之紀數:

(a) $y^m=(a^2-x^2)^2$

(b) $\log\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{Arc}\tan\frac{y}{x}$,

(c) $e^{x^y}+[\sec(x-y)]^{\frac{1}{2}}=0$.

2. 求次列各方程組所確定之隱函數 y, z 之紀數:

(a) $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=b^2; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \sin^2 x-\cos y\sin z=0, \\ 2y-x\tan z=0. \end{cases}$

3. 設
$$\begin{cases} ue^v+vx=y\sin u, \\ u\cos u=x^2+y^2; \end{cases}$$
求 $\frac{\partial v}{\partial y}$,

4. 設
$$\begin{cases} x=u+v+w, \\ y=u^2+v^2+w^2, \\ z=u^3+v^3+w^3 \end{cases}$$
確定三自變數 x, y, z 之函數 u, v, w; 試求其偏紀數.

5. 設 y 爲二自變數 x 與 a 之隱函數確定如

$$y=a+x\phi(y)$$

試證

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi(y)\frac{\partial y}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\psi(y)\phi(y)\frac{\partial y}{\partial a}\right]$$

$\psi(y)$ 爲 y 之任意函數.

6. 拉氏公式 (Lagrange's formula). 如上設 $y=a+x\phi(y)$ 並命 u 爲 y 之任一函數, 則有公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\phi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right]. \qquad \text{(Laplace).}$$

7. 設

$$u_1=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots\cdots-x_n^2}},\cdots\cdots,\ u_n=\frac{x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots\cdots-x_n^2}},$$

則有

$$\frac{\partial(u_1,\ u_2,\cdots\cdots,\ u_n)}{\partial(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n)}=\frac{1}{(1-x_1^2-x_2^2-\cdots\cdots x_n^2)^{1+\frac{n}{2}}}.$$

8. 設

$$x_1=\cos\theta_1,$$

$$x_2=\sin\theta_1\cos\theta_2,$$

$$x_3=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_n=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n,$$

則有

$$\frac{\partial(x_1,\ x_1,\cdots\cdots,\ x_n)}{\partial(\theta_1,\ \theta_2,\cdots\cdots\theta_n)}=(-1)^n\sin^n\theta_1\sin\theta^{n-1}\theta_2\cdots\cdots\sin^2\theta_{n-1}\sin\theta_n.$$

9. 設

$$x=a\rho\sin\theta\cos\psi,\qquad y=b\rho\sin\theta\sin\psi,\qquad z=c\rho\cos\theta,$$

則有

$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\rho,\ \theta,\ \psi)}=abc\rho^2\sin\theta,$$

10. 設函數由下式確定

$$z=az+yf(a)+\phi(\alpha),$$

本題與下題作法相仿, 都未作. 這些題目的有關係. 作起題來實在太麻煩. 有沒有一自然規律可尋.

$$0=x+yf'(a)+\phi'(a),$$

(a 爲參變數); 試直接驗其合於

$$rt-s^2=0$$

而無論 $f(a)$ 與 $\phi(a)$ 爲何.

11. 設隱函數 $z=f(x,y)$ 確定如

$$y=x\phi(z)+\psi(z);$$

試證其合於

$$rq^2-2pqs+tp^2=0$$

而無論 ϕ 與 ψ 若何.

12. 若 $x=f(u,v)$, $y=\phi(u,v)$ 合於條件

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial \phi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial \phi}{\partial u},$$

則有恆等式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

13. 若 $V(x,y,z)$ 合於方程式

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

試證函數

$$\frac{1}{r}V\left(k^2\frac{x}{r^2},\ k^2\frac{y}{r^2},\ k^2\frac{z}{r^2}\right)$$

亦合於此方程式, 其中 k 爲常數, 並 $r^2=x^2+y^2+z^2$. (Lord Kelvin)

14. 命 $x=\sqrt{1-t^2}$ 以變方程式

$$(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

15. 命 $x=uv$, $y=\frac{1}{v}$ 以變

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0.$$

16. 於曲面 S 上每點 M, 引其法線 MN, N 爲法線與一定平面 P 相遇之點; 繼於 P 於 N 點之垂線上取 $Nm=NM$. 試求 m 所作曲面之切面.

試明變易爲切性的,並論其反變易.

17. 於曲面S各點M之法線上,取Mm等於定量1;試求m所作曲面之切面,並討論如前題.

18. 哈爾芬氏不變量(Halphen's dfferential invariants). 若於方程式

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}-45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4}+40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3=0$$

作一投射性變易(Projective transformation).

$$x=\frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\qquad y=\frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}$$

則其形不改.試證之.

19. 設有微分式

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz,$$

若作變易

$$x=f(u,v,w),\qquad y=\phi(u,v,w),\qquad z=\psi(u,v,w),$$

則斯式化爲

$$P_1(u,v,w)du+Q_1(u,v,w)dv+R_1(u,v,w)dw.$$

試證有恆等式

$$H_1=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}H,$$

其中

$$H=P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

$$H_1=P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w}-\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)+Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial u}-\frac{\partial P_1}{\partial w}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}-\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right).$$

20. 雙線性協變量(Bilinear covariants). 設線性微分式

$$\theta d=X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots\cdots+X_ndx_n,$$

其中$X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n$爲$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$之函數,並設

$$H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k,$$

其中 $a_{ik}=\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}$ 而 d 與 δ 表示兩組微分. 今若作變數代換

$$x_i=\phi_i(y_1, y_2,\cdots\cdots, y_n), \qquad (i=1, 2,\cdots\cdots, n),$$

則 θd 變爲同形之式

$$\theta' d=Y_1 dy_1+Y_1 dy_2+\cdots\cdots+Y_n dy_n,$$

$Y_1, Y_2,\cdots\cdots, Y_n$ 爲 $y_1, y_2,\cdots\cdots, y_n$ 之函數, 今若命

$$a'_{ik}=\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}-\frac{\partial Y_k}{\partial y_i},$$

$$H'=\sum_i \sum_k a'_{ik}\, dy_i\, \delta y_k,$$

則有恆等式 $H=H'$, 只須 dx_i 與 δx_k 依次代以

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y_1} dy_1+\frac{\partial \phi_i}{\partial y_2} dy_2+\cdots\cdots+\frac{\partial \phi_i}{\partial y_n} dy_n.$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial \phi_k}{\partial y_2}\delta y_2+\cdots\cdots+\frac{\partial \phi_k}{\partial y_n}\delta y_n.$$

H 稱爲 θd 之雙線性協變量.

第 三 章

泰樂氏級數及其應用

極大與極小

I. 泰氏公式及泰氏級數

68. 泰氏公式 (Taylor's series with a remainder).

設 $f(x)$ 爲一 n 次多項式,則易知

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

今設 $f(x)$ 爲任一函數,但於 (a, b) 隔間內爲連續,並於其內有由1級至 n 級之各連續紀數,且復有 $n+1$ 級紀數(可不連續).試求形如

$$(1)\qquad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n$$

之一公式.問題卽爲定 R_n;吾令 $R_n=\dfrac{h^p}{n!\,p}A$ 以定 A,而 p 爲一正整數;上式於是變爲

$$(2)\quad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^p}{n!\,p}A.$$

設補助函數

$$\phi(x)=f(a+h)-f(x)-\frac{a+h-x}{1}f'(x)-\cdots\cdots-\frac{(a+h-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$$
$$-\frac{(a+h-x)^p}{n!\,p}A.$$

此函數於 $x=a+h$ 顯爲零,準(2)知其於 $x=a$ 亦爲零,又於

$(a, a+h)$隔間內為連續而有紀數

$$\phi'(x)=\frac{(a+h-x)^{p-1}}{n!}\left[A-(a+h-x)^{n-p+1}f^{(n+1)}(x)\right];$$

然則按洛氏定理,當有$\phi'(a+\theta h)=0$,即

$$\frac{(1-\theta)^{p-1}h^{p-1}}{n!}\left[A-(1-\theta)^{n-p+1}h^{n-p+1}f^{n+1}(a+\theta h)\right]=0, (0<\theta<1)$$

由是得$A=(1-\theta)^{n-p+1}h^{n-p+1}f^{(n+1)}(a+\theta h)$,而

(3) $$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-p+1}h^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$ 石

(p為任意正整數)公式(1)以定.是為泰樂氏式,或名泰氏有尾級數;R_n為其尾量(Remainder).尾量書如(3)名為石勒米翕氏尾量(Schloemilch's remainder).命$p=n+1$,則得拉氏尾量(Lagrange's remainder);

(4) $$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h);$$ 拉

又命$p=1$,則得歌氏尾氏量(Couchy's remainder)

(5) $$R_n=\frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$ 歌

猶可注意者,若$f^{(n+1)}(x)$於$x=a$為連續,則尾量尙可書如

(6) $$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(a)+\varepsilon\right],$$

ε隨h趨於零.

視h為無窮小,則(2)式右端第二項以後均為無窮小,其級以次增高.若吾等取前$n+1$項之和為$f(a+h)$之值,則所犯舛差適為R_n.如$|f^{(n+1)}(x)|$於a附近$(a-\eta, a+\eta)$內以M為一大限,則於$|h|<\eta$,

$$|R_n|\leq\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

69. 展式之純一性.

據上所論,若 $f^{(n)}(a)$ 爲有窮,則可依 h 冪增進之次序展 $f(a+h)$ 爲形如

$$A_0+A_1\,h+A_2\,h^2+\cdots\cdots+A_n\,h^n+P\,h^{n+1}$$

之式.其中 A_i 與 h 無涉 P 與 h 有關,但於 $h\to 0$ 不爲無窮,吾謂如此之展式無論由何法得之,其相當係數彼此相等.換言之,展式爲純一的.蓋假定另有

$$B_0+B_1\,h+B_2\,h^2+\cdots\cdots+B_n\,h^n+Q\,h^{n+1},$$

則

$$A_0+A_1\,h+A_2\,h^2+\cdots\cdots+P\,h^{n+1}\equiv B_0+B_1h+B_2h^2+\cdots\cdots Q\,h^{n+1}.$$

令 $h\to 0$ 並注意 P 與 Q 不爲無窮,則見 $A_0=B_0$; 於是將上式兩端首項删去而除以 h, 然後令 $h\to 0$, 則得 $A_1=B_1$; 推之可見 $A_2=B_2,\cdots\cdots A_n=B_n,P=Q$.

70. 泰氏公式之他種形狀及馬氏公式(Maclaurin's series).

於(2)式易 h 爲 $x-a$, 則得

$$(7)\qquad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

R_n 之值於(3),(4),(5)或(6)內易 h 爲 $x-a$ 而得.

再於(7)設 $a=0$, 則得

$$(8)\qquad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n;$$

是爲馬氏公式.其尾量之石氏形爲

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n+1-p}x^{n+1}}{n!\,p}\,f^{(n+1)}(\theta x);$$

拉氏形與歌氏形爲

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\quad R_n=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

究之,馬氏公式不過泰氏公式之一特例耳.

71 未定係數法,函數的函數之展式.

往往吾等所欲,但爲泰氏公式中相連屬項構成之規律,而於末項之形狀無足輕重.若是,則注意泰氏公式之純一性而用未定係數法演算,易得所求.例有函數的函數$y=f(u)$,而$u=\phi(x)$;設如已知展式

$$(9)\qquad f(u+k)-f(u)=a_1k+a_2k^2+\cdots\cdots+a_nk^n+A\,k^{n+1},$$

$$(10)\qquad k=\phi(x+h)-\phi(x)=b_1h+b_2h^2+\cdots\cdots+b_nh^n+Bh^{n+1}.$$

則以由(10)確定之k值代入(9),即有

$$(11)\qquad \begin{aligned}\Delta y=f[\phi(x+h)]-f[\phi(x)]=&a_1(b_1h+b_2h^2+\cdots\cdots)\\&+a_2(b_1h+b_2h^2+\cdots\cdots)^2\\&+a_3(b_1h+b_2h^2+\cdots\cdots)^3\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\end{aligned}$$

於是只須依h之冪按增勢列之,以至含h^n之項,即得Δy之展式不過尾項A_1h^{n+1}中之A_1爲h,A與B之一多項式耳.

72. 不定式(Indeterminate forms).

設函數$f(x)$與$\phi(x)$於$x=a$均爲零,吾等欲定

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{\phi(a+h)}.$$

若泰氏公式(1)可用於 $f(x)$ 及 $\phi(x)$，則問題立決.蓋就普通情形設

$$f'(a)=0,\quad f''(a)=0,\cdots\cdots,\quad f^{(p-1)}(a)=0,\quad f^{(p)}(a)\neq 0,$$

$$\phi'(a)=0,\quad \phi''a=0,\cdots\cdots,\quad \phi^{(q-1)}(a)=0,\quad \phi^{(q)}(a)\neq 0,$$

則有

$$\frac{f(a+h)}{\phi(a+h)}=h^{p-q}\quad\frac{q!}{p!}\,\frac{f^{(p)}(a)+\varepsilon}{\phi^{(q)}(a)+\varepsilon'},$$

ε,ε' 爲二無窮小,若 $p>q$，則此分數以零爲限;若 $p<q$，則趨於無窮;若 $p=q$，則其限爲 $\frac{f^{(p)}(a)}{\phi^{(q)}(a)}$.

此種不定式時或於定曲線之切線問題遇之.設曲線(C)

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t),\qquad z=\psi(t),$$

及其上一點 M_0.命 t_0 爲確定 M_0 之 t 值,則(C)於 M_0 之切線方程式爲

$$\frac{X-f(t_0)}{f'(t_0)}=\frac{Y-\phi(t_0)}{\phi'(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

若 $f'(t_0),\phi'(t_0),\psi'(t_0)$ 均等於零,則此等方程式變爲恆等式矣.於是欲決定切線之有無,吾等宜追溯其定義論之.命 M 爲 M_0 鄰近之一點,由 t 之值 t_0+h 而定; M_0M 割線之方程式爲

$$\frac{X-f(t_0)}{f(t_0+h)-f(t)}=\frac{Y-\phi(t_0)}{\phi(t_0+h)-\phi(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}.$$

就普通情形設 $f(t),\phi(t),\psi(t)$ 之紀數由初級以至 $p-1$ 級者均於 $t=t_0$ 爲零,但 n 級者至少有一不爲零,例如 $f^{(p)}(t_0)\neq 0$，則以 $\frac{h^p}{n!}$ 除上式各端並準泰氏公式得

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)+\varepsilon}=\frac{Y-\phi(t_0)}{\phi^{(p)}(t_0)+\varepsilon'}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)+\varepsilon''},$$

ε, ε′, ε″ 均隨 h 趨於零.然則令 $h\to 0$, 則 M_0M 趨於一位置 M_0T, 由確定之方程式

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)}=\frac{Y-\phi(t_0)}{\phi^{(p)}(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)} \tag{12}$$

表之.

如是之點通常爲一異點,曲線於其處有特殊之形狀.例如曲線

$$x=t^2, \qquad y=t^3;$$

於原點有 $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$, 切線爲 x 軸,而曲線於此有一第一種回折點 (cusp of the first kind).

73. n 級紀數之一求法.

依 h 冪展 $f(x+h)$ 與求 $f^{(n)}(x)$ 爲相當問題.若知展式,則立得 $f^{(n)}(x)$.蓋即式中 $h^n/n!$ 之係數也.例如求 $f(x)=e^{ax^2}$ 之 n 級紀數.吾等有

$$f(x+h)-f(x)=e^{a(x+h)^2}-e^{ax^2}=e^{ax^2}\left(e^{ah(2x+h)}-1\right)$$

$$=e^{ax^2}\left[1+\frac{ah(2x+h)}{1}+\frac{a^2h^2(2x+h)^2}{2!}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{a^{n-1}h^{n-1}(2x+h)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a^nh^n(2x+h)^n}{n!}+\cdots\cdots-1\right].$$

定 $h^n/n!$ 之係數即得

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}e^{ax^2}=e^{ax^2}\left[(2x)^na^n+\frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}a^{n-1}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)x^{n-4}a^{n-2}+\cdots\cdots\right]$$

茲再就函數的函數 $y=f(u)$, 而 $u=\phi(x)$ 論之.吾等已於 71 節得 $f[\phi(x+h)]$ 之展式;今取其 h^n 之係數而乘以 $n!$, 即得 $D_x{}^ny$.

此係數可書如

$$\sum_{p=1}^{n} a H_{p\cdot\lambda}$$

H_p 表 $(b_1h+b_2h^2+\cdots\cdots)^{\lambda}$ 內 h^n 之係數.卽有

$$H_p=\sum\frac{p!}{\alpha!\beta!\lambda!\cdots\cdots\gamma!}(b_1)^{\alpha}(b_2)^{\beta}(b_3)^{\gamma}\cdots\cdots(b_r)^{\lambda},$$

Σ 所示和數包括凡合於條件

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\lambda=p$$

及 $$\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots\cdots+r\lambda=n$$

之一切正整數組 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots\lambda$.

於是代 a 與 b 等以紀數符號,則得法阿狄不呂諾氏公式 (Faa di Bruno's Formula):

$$Dx^n y=\sum_{p=1}^{n} f^{(p)}(u),\ P_p,$$

$$P_p=\frac{n!}{p!}H_p=\sum\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\cdots\lambda!}\left(\frac{D^1u}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{D^2u}{2!}\right)^{\beta}\cdots\cdots\left(\frac{D^ru}{r!}\right)^{\gamma}.$$

P_p 爲 $Du, D^2u,\cdots\cdots$ 之多項式,其次爲 p, 其衡爲 n (卽言每項中紀數乘冠數之和恆爲 n 也).

74. 泰氏級數(Taylor's series).

若於泰氏公式 (1), $f(x)$ 之紀數可逐級推求無止境,則可令 $n\rightarrow 8$; 如是茍 R_n 於 $n\rightarrow\infty$ 之限爲零,則有公式

(13) $$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots\cdots,$$

表明 $f(a+h)$ 爲右端斂級數之和.此公式是爲泰氏級數(Taylor's series).若設 $a=0$ 且易 h 爲 x,則可得馬氏級數(Maclaurin's series).

$$(14)\qquad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots\cdots.$$

但吾等僅能於特種情況可證明R_n趨於零.例如若x自a變至$a+h$時各紀數之絕對值恆小於定數M,則由拉氏尾量知

$$|R_n|<M\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

右端為一斂級之普通項;因之可知 $R_n\to0$, 而泰氏級數可引用.如函數 e^x, $\sin x$, $\cos x$ 等均顯然合於此種情形,而 x 可在任何隔間內.是則引用馬氏級數得

$$(15)\qquad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots,$$

x可為任何正負數.同法得

$$(16)\qquad \sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\cdots;$$

$$(17)\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\cdots\cdots+(+1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots\cdots,$$

x為任何正負數.

$e^{x\log a}$

又命a為一正數,而注意$a^x=e^x\log x$, 則有

$$(18)\qquad a^x=1+\frac{x\log a}{1}+\frac{(x\log a)^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(x\log a)^n}{n!}+\cdots\cdots.$$

注意. 就馬氏公式言之(於泰氏公式情形亦同),若$R_n\to0$, 則級數

$$(19)\qquad f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots\cdots$$

必收斂.通常因討論 R_n 不易,每先判決(19)之斂散性,倘為發散,便可中止討論.因在此情形R_n必不趨近於零也.

逆理則不眞.級數(10)雖為收斂,但可不表所自出之函數$f(x)$.請就歌氏所舉之一例言之.設$\phi(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$;吾等有

$$\phi(x)=\frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}},\quad \phi''(x)=\frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},\cdots\cdots,\quad \phi^{(n)}(x)=\frac{P(x)}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$P(x)$ 爲一多項式.此等紀數於 $x\to 0$, 均 $\to 0$. 蓋命 $x=\frac{1}{y}$, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^m}{e^{y^2}}.$$

今取可展爲馬氏公式之一函數 $f(x)$, 而設函數 $F(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$, 則

$$F(0)=f(0),\quad F'(0)=f'(0),\cdots\cdots,\quad F^{(n)}(0)=f^{(n)}(0),\cdots\cdots,$$

所得級數與由 $f(x)$ 展出者全同.故所表非 $F(x)$ 本身,乃他一函數 $f(x)$.

75. log $(1+x)$ 之展式.

函數 $\log(1+x)$ 於 $x>-1$ 爲連續,其諸級紀數

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

亦均於 $x>-1$ 爲連續;試求展爲馬氏級數.吾等有

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+R_n.$$

欲 $R_n\to 0$, 必須級數

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$$

收斂.此僅於 $-1<x\leqq+1$ 爲然;試在隔間內論 R_n 趨於 0 否.於 $|x|>1$, 可用歌氏尾量形書

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta)x^{n+1}}=(-1)^n\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$=(-1)^n x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n \frac{1}{1+\theta x}.$$

既設 $|x|<1$, 則 $x^{n+1}\to 0$; 分數 $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ 無論 x 爲正或負均 <1; 又末一因數 $\frac{1}{1+\theta x}<\frac{1}{1-|x|}$ 爲有窮數. 可見於 $n\to\infty$ 時 $R_n\to 0$. 但就形如是之尾量, R_n 於 $x=1$ 時之限何如不能判斷. 若書爲拉氏形

$$R_n=(-1)^n\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\theta)^{n+1}},$$

則顯然見其趨於零. 然則於 x 介乎 -1 與 $+1$ 之間, 有

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots, \tag{20}$$

此公式於 $x=1$ 仍成立而變爲

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots\cdots. \tag{21}$$

76. 數字對數之求法.

設 n, h 爲二正數有

$$\log(n+h)-\log n=\log\left(1+\frac{h}{n}\right).$$

然則只須 $h<n$, 命 $x=\frac{h}{n}$ 即可據公式 (20) 展 $\log\left(1+\frac{h}{n}\right)$ 爲 $\frac{h}{n}$ 冪之級數. 但此級數收斂太緩, 不便於用. 實際運算乃另求一級數如次: 於 (20) 換 x 爲 $-x$ 得

$$\log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots\cdots, \tag{22}$$

以此與 (20) 相減, 則有

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left[\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right]. \tag{23}$$

命

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{h}{n},\quad \text{即}\ x=\frac{h}{2n+h}$$

而特別取 $h=1$, 則得

(24) $$\log(n+1)-\log n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right].$$

此級數收斂甚速,於 n 大時尤甚;即用以入算者也.

僅取級數前 p 項爲其值,所犯舛差小於

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+1)^{2p+1}}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\cdots\right].$$

因之小於

$$\frac{1}{2n(n+1)(2p+1)(2n+1)^{2p-1}}.$$

欲得通俗對數,只須再求對數模 $M=\frac{1}{\operatorname{Log} 10}$. 吾等有

$$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\cdots\cdots\right]$$

及 $$\log 5=2\log 2+2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots\cdots\right];$$

於是得 $\log 10$, 其倒數即爲 M. 而

(25) $$\log(n+1)=-\log n+2M\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\cdots\right].$$

77. 尤拉氏常數 (Euler's constant).

吾等知調和級數爲發散者,其前 n 項之和

$$\sigma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

隨 n 趨於無窮.但 $\sigma_n-\log n$ 則有定限;茲往明之.吾等有

$$\log(n+1)-\log n=\log\frac{n+1}{n}=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$$

命 α_n 表小於 $\frac{1}{2}$ 之一正數,則可書

$$\log(n+1)-\log n=\frac{1}{n}-\frac{\alpha_n}{n^2}.$$

於是以次與 n 以 $1, 2, \cdots\cdots, n-1$ 等數值而加其結果,則有

$$\log n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\left(\alpha_1+\frac{\alpha^2}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)^2}\right),$$

或

$$\sigma_n-\log n=\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)^2}\right)+\frac{1}{n}.$$

當 $n\to\infty$.括弧中數顯然成一斂級數,而差數 $\alpha_n-\log n$ 以此級數之和爲限,名曰尤氏常數,而恆以 C 表之.取二十位小數,其值爲 $C=0.57721566490153286060.$

78. 二項式展式(Binomial theorem).

函數 $(1+x)^m$ 於 $1+x>0$ 時無論 m 若何恆確定而連續,且有各級連續紀數:

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

準馬氏公式有

$$(1+x)^m=1+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}x^n+R_n.$$

欲 R_n 於 $n\to\infty$ 時爲零,必須普通項爲

$$u_n=\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}x^n$$

之級數收斂,察 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=-x$, 可斷級數 Σu_n 於 $|x|>1$ 爲發散,而於 $|x|<1$ 爲收斂.於是當就隔間 $(-1,\ +1)$ 內以論尾量,其歌氏形爲:

$$R_n=\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}$$

按因數
$$\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}x^{n+1}$$

當趨於零,而 $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}<1$ 又 $(1+\theta x)^{m-1}$ 顯然小於一定數;可見 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$. 然則於 $-1<x<+1$, 有

(26)
$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n-1)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}x^n+\cdots\cdots.$$

若 m 爲正整數,則展式至某項即止,而得初等代數上之公式

對於 $x=\pm 1$ 一層,討論較難,後再論及.

同法設 x 介乎 -1 與 $+1$ 間,可求得

$$\operatorname{arc}\sin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots,$$

$$\operatorname{arc}\tan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots.$$

但除以上數例及其他少數之例外,尾量之討論,甚屬困難,因紀數通常逐漸變繁也.

79. 多元函數之泰氏公式.

爲簡便計,設三元函數 $U=f(x,\ y,\ z)$論之.設與 $x,\ y,\ z$ 以增

量 h, k, l, 而求函數相當增量 ΔU 對於此等增量之冪之一展式;暫視 x, y, z, h, k, l 爲常數,而命

$$\phi(t)=f(x+ht,\ y+kt,\ z+lt),$$

t 爲一補助變數,引用馬氏公式於 $\phi(t)$, 則有

$$\phi(t)=\phi(0)+\frac{t}{1}\phi'(0)+\frac{t^2}{2!}\phi''(0)+\cdots\cdots+\frac{t^n}{n!}\phi^{(n)}(0)$$
$$+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta\, t); \tag{27}$$

式中 $0<\theta<1$. 欲求 $\phi(t)$ 之紀數,試命

$$u=x+ht,\quad v=y+kt,\quad w=x+lt;$$

如是則 $\phi(t)=f(u, v, w)$ 爲一湊合函數,其中間函數 u, v, w 爲 t 之一次式.吾等有

$$d^m f=\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw\right)^{(m)}$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)}dt^m,$$

而
$$\phi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial f}{\partial u}+k\frac{\partial f}{\partial v}+l\frac{\partial f}{\partial w}\right)^{(m)}.$$

命 $t=0$, 則有

$$\phi^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(m)},$$

又換 t 爲 $\theta\, t$, 則得

$$\phi^{(n+1)}(\theta\, t)=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n+1)}x+\theta\, ht,\ y+\theta\, kt,\ z+\theta\, lt,$$

右端展開後當易 x, y, z, 爲 $x+\theta\, ht,\ y+\theta\, ht,\ z+ht$.

於是於(27)令 $t=1$ 即得泰氏公式

(28) $$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)}+R_n,$$

尾量為

$$R_n=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n+1)}x+\theta h,\ y+\theta h,\ z+\theta l,\qquad (0<\theta<1)$$

此公式之成立,係設 $f(x,y,z)$ 可求紀數至 $n+1$ 級,且 n 級以前之偏紀數當連續,但 $n+1$ 級者則不論.

在此 x,y,z 既為自變數,則易 $h,k,l,$ 為 dx,dy,dz, 尙可書

(29) $$\Delta U=d\,U+\frac{d^2U}{2}+\cdots\cdots+\frac{d^nU}{n}$$

$$+\left[\frac{d^{n+1}U}{(n+1)!}\right]x+\theta\,dx,\ y+\theta\,dy,\ z+\theta\,dz.$$

又於 (28) 令 $x=y=z=0$, 則得馬氏公式

(30) $$f(h,k,l)=f(0,0,0)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)0,0,0+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)}0,0,0$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n+1)}\theta x,\theta y,\theta z,$$

此公展 $f(h,k,l)$ 為 h,k,l 齊次式之一和數.

在 (28), (29), (30), 若於 $t\to\infty$ 時尾量 R_n 為零,則 $f(x+h,y+k,z+l)$ 或 ΔU 或 $f(h,k,l)$ 可展為一級數,特通常討論 R_n 殊不易耳.

80. 無定形 (Indeterminate forms).

公式(28)或(30)可用以求無定形之限.例設函數$f(x,y)$與$\phi(x,y)$均於$x=a$, $y=b$爲零,而其由初級以至某級之各偏紀數於(a,b)附近爲連續者.試求$f(x,y)/\phi(x,y)$於$x\to a$及$y\to b$時之限.

先設$\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial\phi}{\partial a}$, $\frac{\partial\phi}{\partial b}$不盡爲零,若是可書

$$\frac{f(a+h,b+k)}{\phi(a+h,b+k)}=\frac{h\left(\frac{\partial f}{\partial a}+\varepsilon\right)+k\left(\frac{\partial f}{\partial b}+\varepsilon'\right)}{h\left(\frac{\partial\phi}{\partial a}+\varepsilon_1\right)+k\left(\frac{\partial\phi}{\partial b}+\varepsilon'_1\right)}$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon'_1$,隨$h, k$趨於零,但$x, y$之趨於$a, b$,其路徑有種種,試設$(x,y)$點沿一曲線$C$趨近$(a,b)$點,則$\frac{k}{h}$可有一定限$m$,即$C$於$(a,b)$之切線斜率(slope).是以$h$除上式末端分子分母,則見

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\frac{f(x,y)}{\phi(x,y)}=\frac{\frac{\partial f}{\partial a}+m\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial\phi}{\partial a}+m\frac{\partial\phi}{\partial b}}.$$

此限視m爲轉移,卽隨路徑而不同,欲其與路徑無涉,須有

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial\phi}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial\phi}{\partial a}=0.$$

今若$\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial\phi}{\partial a}$, $\frac{\partial\phi}{\partial b}$盡爲零,則取展式至第二項論之,並如是類推.

II. 極大與極小

81. 單元函數之極大極小(Maxima and Minima).

設於(a,b)內連續之函數$y=f(x)$,並x_0爲a與b間之一點.若

吾等能得一至小正數 η 使 $|h|<\eta$ 時,差數 $\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$ 有定號,則吾等謂 $f(x)$ 於 x 之值爲一極值(extremum). 於 $\Delta y>0$,則 $f(x_0)$ 較其鄰近之值小,因稱爲極小;反之,於 $\Delta y<0$ 時則爲極大.

若 $f(x)$ 於 x_0 有一紀數(唯一的),則此紀數當然爲零蓋號相反之兩分數

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

當於 $h\to 0$ 時以 $f'(x_0)$ 爲限也.反之,設 x_0 爲 $f'(x)=0$ 之一根位於 a 與 b 間;試論 $f(x_0)$ 爲極值否,紀數 $f''(x)$, $f'''(x)$……亦可於 $x=x_0$ 爲零.設首異於零者爲 $f^{(n)}(x)$,並設此紀數在 $x=x_0$ 附近爲連續,則由泰氏公式有

$$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

或
$$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_0)+\varepsilon].$$

ε 與 h 同爲無窮小,命 η 爲一正數使 x 在 $x_0-\eta$ 與 $x_0+\eta$ 間時 $|\varepsilon|<f^{(n)}(x_0)$; 對於此等 x 數值, $f^{(n)}(x_0)+\varepsilon$ 與 $f^{(n)}(x_0)$ 同號; 因之 Δy 與 $h^nf^{(n)}(x_0)$ 同號.然則若 n 爲偶數,則 Δy 無論 h 爲正或負恆與 $f^{(n)}(x_0)$ 同號.若此號爲正,則函數爲極小,反之則爲極大.若 n 爲奇數,則 Δy 隨 h 改號,函數無極大亦無極小.結論之,欲函數於 $x=x_0$ 爲極大或極小,必須首異於零之紀數爲偶數;於是得定則如次:

定則. 欲求函數 $f(x)$ 之極值,先求出 $f'(x)$ 之根.設 x_0 爲其一根,則以之陸續代於 $f''(x)$, $f'''(x)$……內,至結果不爲零者而

止.如 $f''(x_0)=0,\cdots\cdots f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 則可斷定:

1° 若 n 爲偶數,則 $f(x)$ 於 $f^{(n)}(x_0)<0$ 爲極大,而於 $f^{(n)}(x_0)>0$ 爲極小.

2° 若 n 爲奇數,則無極大亦無極小.

注意. 往往不待求出 $f''(x), f'''(x),\cdots\cdots$ 已可決定問題有一極大,或一極小.又有時欲知 $f(x)$ 於 x_0 爲極大或極小,直接就其於 x_0 附近之消長情形論之亦甚易.

例 1. 求 $y=x^m(a-x)^n$ 之極大極小,式中 a 爲正數, m 及 n 爲正整數.

吾等有

$$\frac{dy}{dx}=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m-n)x]$$

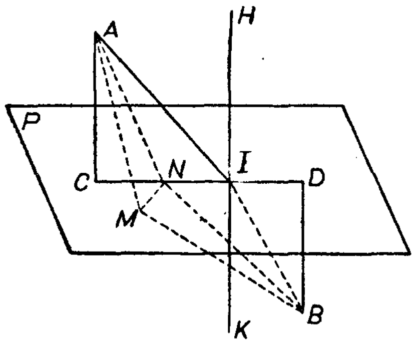
此紀數於 $x=\frac{ma}{m+n}$ 爲零,且當 x 增進時,由正變爲負以經過此值,是 y 於此爲極大.

若設 $m>1$ 及 $n>1$, 則 $\frac{dy}{dx}$ 亦於 $x=0$ 及 $x=a$ 爲零, 但須 m 或 n 爲偶數,紀數方改號.果爾,則 $\frac{dy}{dx}$ 由負變爲正,而 y 爲極小.

例 2. (Fermat's problem). 設兩境域以一平面 P 爲界.求一動點在最短時間,由此域一點 A 至彼域一點 B 所循路線動點在先後兩境域之速率,依次爲 u, v, 均係定量.

因動點行經路程與時間成正比,可知所求路線由兩段直線合成.又此折線同在過 A, B 而與 P 正交之平面 $ACDB$ 內 (C, D 爲此平面與 P 之交線),蓋設 M 爲在 P 上而在 $ACDB$ 外之

一點,則自 M 引 MN 垂於 CD, 顯見 AN 與 NB 依次小於 AM 與 MB. 因之由 ANB 所用之時,較由 AMB 爲短也.



第 8 圖

今由 A, B 引 P 之垂線 AC, BD, 而命 $AC=a$, $BD=b$, $CD=d$,又命 x 爲自 C 至 CD 上任一點 I 之距.若是有

$$AI=\sqrt{x^2+a^2},\qquad BI=\sqrt{(c-x)^2+b^2},$$

而動點由 AIB 路線所需時間爲

$$t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v}.$$

此即待求極小之函數.

問題顯無極大.令 t 之紀數等於零,得

$$\frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1}{v}\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=0,$$

或
$$(v^2-u^2)x^2(c-x)^2+b^2v^2x^2-a^2u^2(c-x)^2=0.$$

此爲一四次方程式,但吾等可不解此式,而由幾何理得所求之折線.試引 HIK 直線垂於 P, 而命 $A\hat{I}H=i$, $B\hat{I}K=r$, 則有

$$\sin i=\frac{CI}{AI}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

$$\sin r=\frac{DI}{BI}=\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

於是表示極小之條件變爲

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u}{v},$$

而AIB折線以定.

例 3. 求一定點$P(x_0,y_0)$與一曲線(C)之距離之極大極小

命$M(x,y)$爲(C)上之一點,即須求函數

$$u=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$

之極大極小.求紀有

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=(x-x_0)+(y-y_0)\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}=(1+\frac{dy^2}{dx^2})+(y-y_0)\frac{d^2y}{dx^2},$$

而得條件

$$(x-x_0)+(y-y_0)\frac{dy}{dx}=0.$$

或

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}\frac{dy}{dx}=-1.$$

此式表示PM爲C之法線,PM爲極大或極小視$\frac{d^2u}{dx^2}$之爲負或正而定.若$\frac{d^2u}{dx^2}=0$,則須就高級紀數論之.

設既作PM線後令P點於C上移動,則可得一位置$\omega(\xi,\eta)$

使

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

而有
$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(\frac{y_0-\eta}{y-\eta}\right).$$

可見 PM 爲極大或極小,視 $y_0-\eta$ 與 $y-\eta$ 號相異與否而定;卽於 P 位於 ω 與 M 間時爲極小,而反之爲極大也. ω 點乃 (C) 於 M 之弧心 (center of curvature).

82. 二元函數之極大極小. 取 $z=f(x,y)$ 而設其在週線 (C) 所範圍之區域 A 內爲連續.命 (x_0, y_0) 爲 A 內一點,若吾等能得一正數 η 使 $|h|<\eta$ 與 $|k|<\eta$ 兩不等式牽涉
$$\Delta z=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\geqq 0$$
不等式,則 $f(x,y)$ 於 (x_0, y_0) 爲極小.仿之由 $\Delta z\leqq 0$ 定極大之義.

欲 $f(x,y)$ 於 $x=x_0$, $y=y_0$ 爲極大或極小,必須 Δz 對於 $|h|<\eta$, $|k|<\eta$ 保存一定之號.特別言之,設 $k=0$,則
$$f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)$$
應有定號.即言 $f(x, y_0)$ 視作唯一變數 x 之函數,當於 $x=x_0$ 爲極大或極小.然則紀數 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 應對於 $x=x_0$, $y=y_0$ 爲零.同理可明 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 亦對於此組值爲零.若是苟 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 爲連續,則 x, y 數值之令 $f(x,y)$ 爲極大或極小者,必爲聯立方程式:
$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{31}$$
之解.今命 $x=x_0$, $y=y_0$ 爲其一解.設 $f(x,y)$ 之二級偏紀數於 x_0, y_0 附近爲連續,而對於 $x=x_0$, $y=y_0$ 不爲零;並設有三級偏紀數;若是由泰氏公式有

(32) $$\Delta z=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$$

$$=\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial f}{\partial x_0\partial y_0}+k^2\frac{\partial f}{\partial y_0^2}\right]$$

$$+\frac{1}{6}\left[h\frac{\partial f}{\partial y}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(3)} x_0+\theta h, y_0+\theta k$$

當 h, k 之值近乎零時此式末端顯然與第一括弧所包之三項式同號.

就幾何言之,欲函數於 (x_0, y_0) 點有一極大或極小,必須而只須能以 (x_0, y_0) 點爲作一至小正方 R,使 (x_0+h, y_0+k) 爲 R 內之點,Δz 有一定之號.苟能如此,則吾人亦能以 (x_0, y_0) 爲心作一至小圓,使 (x_0+h, y_0+k) 在 R 內 Δ,保留一定之號.反之亦然.命 (C) 表以 (x_0, y_0) 點爲心之一圓,r 爲其半徑,則設

$$h=\rho\cos\phi,\qquad k=\rho\sin\phi$$

而令 ϕ 自 0 變至 2π,並 ρ 自 0 變至 r,卽得 (C) 內各點.代此二數值於 Δz 內,得

(33) $$\Delta z=\frac{\rho^2}{2}\left(\cos^2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+\sin^2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right)+\frac{\rho^3}{6}H.$$

H 爲一函數.在 (x_0, y_0) 附近有確定之值.吾人可取 ρ 至小使 Δz 與三項式:

$$T=\cos^2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+\sin^2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$$

或 $$T=\cos^2\phi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\tan\phi+\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\tan^2\phi\right)$$

同號,於是當分三種情況論之:

1° $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>0$，三項式 T 之號視 $\tan\phi$ 之值爲轉移，而 Δz 爲定號．吾等可斷 $f(x,y)$ 於 (x_0,y_0) 非極值．

2° $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}<0$．$T$ 與 $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$ 同號，而對於 ϕ 之任何值不爲零，然則若 $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}<0$，函數爲極大；反之，若 $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>0$，則爲極小．

3° $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=0$，此時 T 對於 $\tan\phi$ 之一值爲零．於相應之 ϕ 值 ϕ_1，Δz 乃與含 h^3 之項同號．於是更應討論此號爲何，若其與三項式對於其他 ϕ 數值之號同，則是一極大或極小；反之則非極值．

例 1．求次函數之極大極小

$$z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$$

解方程組

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4(x^3-x+y)=0,\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=4(y^3+x-y)=0,\end{cases}$$

得三組實根

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y=-\sqrt{2};\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=\sqrt{2},\end{cases}$$

在此

$$\delta=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=16[1-(3x^2-1)(3y^2-1)].$$

於 $x=\pm\sqrt{2}$，$y=\pm\sqrt{2}$，均有 $\delta=16(1-5^2)<0$，而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(3y^2-1)=20>0.$$

可知函數於$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$及$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$二點均爲極小.

至於$x=y=0$,吾等有$\delta=0$,問題不能即決.試直接就函數之增量

$$\Delta z=h^4+k^4-2h^2+4hk-2k^2=-2(h-k)^2+h^4+k^4$$

論之.於h,k甚小時,普通Δz顯爲負;但若h與k向零趨近時恆彼此相等,則Δz爲正.可知Δz無定號而z於此點非極值.或命$h=\rho\cos\phi,\ k=\rho\sin\phi$有

$$\Delta z=-2\rho^2(\cos\phi-\sin\phi)^2+\rho^4(\cos^4\phi+\sin^4\phi);$$

當$\cos\phi-\sin\phi$異於零時,但須ρ甚小,Δ恆爲負;然於$\cos\phi-\sin\phi=0$時,則變爲正.亦可知函數於$x=0,y=0$不爲極值.

例 2. 求兩曲線(C)與(C')間之最短距.

命$M(x,y,z)$爲(C)上一點,$M'(x'y'z')$爲(C')上一點,則問題爲求函數

$$u=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \tag{36}$$

之極小,於此有兩自變數,設爲x與x'.若是y與z爲x之函數而y'與z'爲x'之函數,求紀有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}=(x-x')+(y-y')\dfrac{dy}{dx}+(z-z')\dfrac{dz}{dx},\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x'}=-(x-x')-(y-y')\dfrac{dy'}{dx'}-(z-z')\dfrac{dz'}{dx'},\end{cases}$$

及

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}+(z-z')\frac{d^2z}{dx^2},\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}=\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2\right]-(y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}-(z-z')\frac{d^2z'}{dx'^2},\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x'}=-\left(1+\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}+\frac{dz}{dx}\frac{dz'}{dx'}\right).
\end{aligned}\right.$$

極大極小之條件爲

$$\text{(37)}\qquad \left\{\begin{aligned}
&(x-x')+(y-y')\frac{dy}{dx}+(z-z')\frac{dz}{dx}=0,\\
&(x-x')+(y-y')\frac{dy'}{dx'}+(z-z')\frac{dz'}{dx'}=0.
\end{aligned}\right.$$

$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dy'}{dx'}, \frac{dz'}{dx'}$ 等由曲線(C)與(C')之方程式而得.於是有六方程式以定 x, y, z, x', y', z' 六數,但欲確定有極大或極小.須

$$\text{(38)}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x'}\right)^2>0.$$

若此條件滿足,而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 與 $\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$ 同爲負,則爲極小.反之爲極大.

關係 (37) 乃表明直線 MM' 爲 (C) 與 (C') 兩曲線之公共法線.

特別論之,設所論爲二直線:

$$x=az+p,\qquad y=bz+q,$$

及

$$x'=a'z'+p',\qquad y'=b'z'+q',$$

則有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{a},\quad \frac{dy'}{dx'}=\frac{b'}{a'},\quad \frac{dz'}{dx'}=\frac{1}{a'},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{d^2z'}{dx'^2}=0.$$

吾等可驗明(38)條件已合,並知有一極小.在此,(37)二式變爲

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0,$$

$$a'(x-x')+b'(y-y')+(z-z')=0.$$

吾等可代以次三式中任二式

$$(a'-a)(x-x')+(b'-b)(y-y')=0,$$

$$(ba'-ab')(x-x')-(b'-b)(z-z')=0,$$

$$(ba'-ab')(y-y')+(a'-a)(z-z')=0.$$

但由直線方程式有

$$(b'-b)(x-x')-(a'-a)(y-y')+(ba'-ab')(z-z')$$

$$=(a'-a)(q'-q)-(b'-b)(p'-p).$$

若將上四式平方相加,則得

$$[(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2]u$$

$$=[(a'-a)(q'-q)-(b'-b)(p'-p)]^2.$$

而有二直線最短距之公式:

$$d=\sqrt{u}=\frac{(a'-a)(q'-q)-(b'-b)(p'-p)}{\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2}}.$$

83. 多元函數之極大極小.

設 $u=f(x,y,\cdots\cdots,t)$. 仿二元函數論之,知令函數爲極大極小之 $x,y,\cdots\cdots,t$ 値當爲方程組

(34) $$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0,\cdots\cdots,\qquad \frac{\partial f}{\partial t}=0$$

之解(設$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\cdots\cdots,\frac{\partial f}{\partial z}$爲連續).命$x_0, y_0,\cdots\cdots, t_0$爲其一解,則由(準泰氏公式).

(35) $$\Delta u=f(x_0+h, y_0+k,\cdots\cdots t_0+l)-f(x_0, y_0,\cdots\cdots, t_0)$$

$$=\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial f}{\partial x_0}+k\frac{\partial f}{\partial y_0}+\cdots\cdots+l\frac{\partial f}{\partial t_0}\right)^{(2)}$$

$$+\frac{1}{6}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots\cdots+l\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{(3)}x_0+\theta h,\cdots\cdots, t_0+\theta l$$

討論Δu之號,可決定函數於是點爲極大極小與否.

吾等倘可注意關係(34)與$df\equiv 0$同;而討論Δu之號,於是可準公式(29)書

$$\Delta u=\frac{d^2u}{2!}+\left[\frac{d^3u}{3!}\right]x_0+\theta h, y_0+\theta k,\cdots\cdots, t_0+\theta l$$

論之.

例. 求函數

$$u=x^\alpha y^\beta z^\gamma \cdots\cdots t^\lambda (a-x-y-z-\cdots\cdots-t)^\mu$$

之極大.式中a爲已知正數,$\alpha, \beta, \gamma,\cdots\cdots\lambda, \mu$爲正整數.

取對數微分有

$$\frac{du}{u}=\alpha\frac{dx}{x}+\beta\frac{dy}{y}+\cdots\cdots+\lambda\frac{dt}{t}-\mu\frac{dx+dy+\cdots\cdots dt}{a-x-y-\cdots\cdots-t}$$

$$\frac{d^2u}{u}-\left(\frac{du}{u}\right)^2=-\alpha\left(\frac{dx}{x}\right)^2-\cdots\cdots-\mu\frac{(dx+dy+\cdots\cdots+dt)^2}{(a-x-y-\cdots\cdots-t)^2}$$

方程式$du=0$對於$x=y=\cdots\cdots=t=0$顯然滿足.相應之u值或爲極大,或爲極小,易於辨明.茲置而不論.此外由$du=0$有

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\cdots\cdots=\frac{\lambda}{t}=\frac{\mu}{a-x-y-\cdots\cdots-t},$$

而得

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\cdots\cdots=\frac{t}{\lambda}=\frac{a}{\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\lambda+\mu},$$

$$u=\left(\frac{a}{\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\mu}\right)^{\alpha+\beta+\cdots\cdots+\lambda+\mu}\alpha^{\alpha}\,\beta^{\beta}\cdots\cdots\lambda^{\lambda}\,\mu^{\mu}.$$

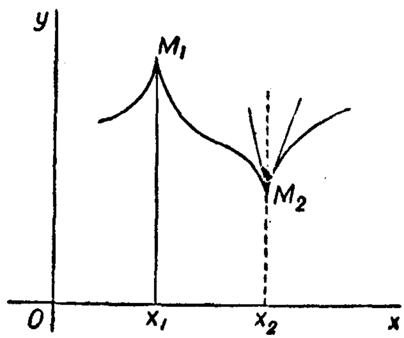
又準上公式

$$d^2u<0$$

可見u於此爲一極大.

84. 初級紀數不連續時情形.

單元或多元函數之極大極小,如上所論.乃設初級紀數或偏紀數爲連續者.倘此等紀數於某點爲間斷的,則在含是點之一確定區域內函數於是點之值可爲極大或極小者;而其紀數不必爲零.試就單元函數$f(x)$論之,若$f'(x)$經是點改號,$f(x)$即於是點爲極大或極小,如圖所示之M_1與M_2點是也.例有$y=x^{\frac{2}{3}}$;其紀數$y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$於$x=0$爲無窮,而經是點由負變爲正.可知$y$於原點爲極小.於二元函數情形亦正彷彿,一有趣之例爲求平面上一點M與三定點A,B,C之距離之和$MA+MB+MC$之



第 9 圖

極小.(1)

85. 幾何法.

有時極大極小之條件,可由幾何法得之. 如於函數 $u=f(x,y,z)$,吾等應書

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

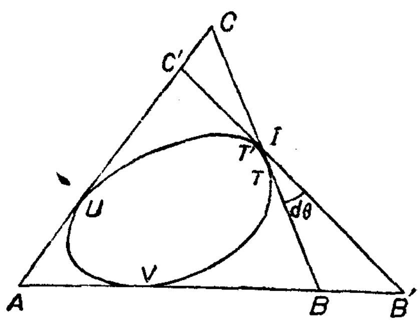
察 $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ 係令 y,z 固定,而 x 變所得 Δu 之主量. 仿之 $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, 與 $\frac{\partial f}{\partial z}dz$ 乃依次令 y,z 獨變所得 Δu 之主量.然則若能直接由幾何求出此三量;則令其等於零,即得所求條件;抑能求出全微分 du, 則 $du\equiv 0$ 亦為所求條件矣.茲舉例明之.

例 1. 求外切於一迴線而有極大或極小面積之三角形.

外切於一迴線之三角形與三自變數有關.例如此三切線與一定軸所成之三角是也.任令二邊固定,而其餘一邊變移則三角形之面積增量之主值不難求出.令此等增量主值等於零,即得三角形面積增量為極大極小之條件.如圖,三角式面積增量為

$BIB'-CIC'$ 卽

$\frac{1}{2}(IB\cdot IB'-IC\cdot IC')\sin d\theta,$



第 10 圖

(1) 見 Goursat-Hedrick.—Mathematical Analysis, Vol. 1, p. 130.

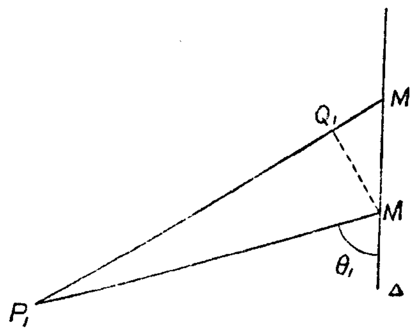
當 $B'C'$ 趨近 BC 時, I 點趨近切點 T, 而 IB' 與 IC' 依次趨近 TB 與 TC. 可知增量 $BIB'-CIC'$ 之主值為

$$\frac{1}{2}(\overline{TB}^2-\overline{TC}^2)\,d\theta.$$

令其為零,得 $TB=TC$; 即明切點 T 為 BC 之中點. 同理切點 U, V 亦應為 AC, AB 之中點. 是知當外切於一迴線之三角形有極大或極小面積時,其切點均為相當邊之中點.

例 2. 於一曲面 S 上求一點 M, 使其與空間 n 定點 P_1, P_2,……, P_n 之距離之平方之和為極大或極小.

命 M' 為 S 上鄰近 M 之任一點,吾等應表示由 M 變至之 M', $\Sigma\overline{P_iM}^2$ 之微分為零.吾等取 MM' 為標準無窮小, 易知 $M\hat{P_i}M'$ 為一初級無窮小,又引 $MQ\perp P_iM'$ 則 P_iM 與 P_iQ 為相當量即略去高級無窮小 P_iM 與 P_iQ 相等也; 因之 $d(P_iM)$ 與 QM' 或與 $MM'\cos\theta$ 相當. 據此 $\Sigma\overline{P_iM}^2$ 之微分為



第 11 圖

$$2\Sigma P_iM\,d(P_iM),\ \text{或}\ 2MM'\Sigma P_iM\cos\theta_1.$$

欲 $\Sigma\overline{P_iM}^2$ 為極值,須此微分為零;即

$$MP_1\cos\theta_1+MP_2\cos\theta_2+\cdots\cdots+MP_n\cos\theta_n=0.$$

此式表明 $\overrightarrow{MP_1}, \overrightarrow{MP_2},\cdots\cdots, \overrightarrow{MP_n}$ n 個矢節於 S 在 M 點之切面內任一軸 $M\Delta$ 上之射影,其和為零. 由是可斷定 S 於 M 點之法線

MN 必過 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 諸點之重心 G. 蓋取 M 爲原點,切面爲 xy 面,並此面之垂線爲 z 軸,而命 x_i, y_i, z_i, 爲 Pi 之位標,則投射諸節於 ox 及 oy 上,有 $\Sigma x_i=0$ 及 $\Sigma y_i=0$ 而 G 點祗位 z 軸上也.然則欲求之點 M, 乃是自 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 諸點之重心引於 (S) 之法線足點.

86. 連繫的極大極小;拉氏乘數法 (Lagrange's multipliers).

往往數個變數由數個關係連絡之,而吾人取此數變數之一函數而求其極大或極小.例有四元函數 $U=f(x, y, u, v)$ 而於四變數間有關係式.

(39) $$f_1(x, y, u, v)=0, \qquad f_2(x, y, u, v)=0.$$

今取 x, y 爲自變數, u 與 v 爲 x, y 之二函數.則其值可由(39)確定.欲 U 爲極大或極小之條件爲:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

其偏紀數 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 由次之關係而定:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

消去 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$,則得

$$\frac{\partial(f,f_1,f_2)}{\partial(x,\,u,\,v)}=0,\qquad \frac{\partial(f,f_1,f_2)}{\partial(y,\,u,\,v)}=0 \tag{40}$$

二式,與(39)式聯合則確定與一極大或極小相應之 x, y, u, v 數值.察(40)二方程式係表示吾人可得二數 λ 與 μ,使有

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial f_2}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial y}+\eta\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial f_2}{\partial u}+\eta\frac{\partial f_2}{\partial u}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial v}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial v}+\eta\frac{\partial f_2}{\partial v}=0.\end{cases} \tag{41}$$

然則可以(41)四式代(40)二式,λ 與 μ 視爲補助未知數.

此理論顯然合於通例,而吾人得次述定則:

已與 n 元函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 其變數由判別之 p 個關係

$$f_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=0,\ f_2(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=0, \cdots\cdots, f_p(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=0$$

聯絡之.欲爲令 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 爲極值之 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 數值,須取

$$f+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots\cdots+\lambda_p f_p$$

(視 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_p$ 爲常數)之各偏紀數而等之於零,以解所得方程組.

例. 求有心二次曲面.

(42) $$Ax^2+A'y^2+A''Z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+1=0$$

之軸長.

此曲面以O爲心,問題成爲求函數

(43) $$u=r^2=x^2+y^2+z^2$$

之極大極小,而於x, y, z間有關係(42).按適所言之法則,當寫

(44) $$\begin{cases} x+\lambda(Ax+B''y+B'z)=0, \\ y+\lambda(B''x+A'y+Bz)=0, \\ z+\lambda(B'x+By+A''z)=0, \end{cases}$$

此三式及(42)式確定合於極大極小之λ, x, y, z數值.若於(42),(43),(44)五式間消去λ, x, y, z即得含半軸平方r^2之方程式.欲實行消去手續,可以x, y, z依次乘(44)三式而加之.則準(42),得

$$r^2-\lambda=0.$$

於是(44)變爲

$$(1+Ar^2)x+B''r^2y+B'r^2z=0,$$

$$B''r^2x+(1+A'r^2)y+Br^2z=0,$$

$$B'r^2x+Br^2y+(1+A''r^2)z=0.$$

而吾等立有

$$\begin{vmatrix} 1+Ar^2 & B''r^2 & B'r^2 \\ B''r^2 & (1+A'r^2) & Br^2 \\ B'r^2 & Br^2 & (1+A''r^2) \end{vmatrix}=0,$$

此爲r^2之方程式,結果適合乎吾等所期待者.

習題

1. 取泰氏公式

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h).$$

設 x 不變而 $h\to 0$, 試證 $\theta\to\frac{1}{n+1}$ 並求 θ 對 h 之升冪展式之起始數項.

2. 若上題公式中 θ 與 x 無涉, 則或者 $f(x)$ 爲 n 次之一多項式而 $\theta=\frac{1}{n+1}$ 或者 $f(x)$ 呈次形

$$f(x)=A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_nx^n+A_{n+1}e^{ax},$$

而
$$\theta=\frac{1}{ah}\log\left[\frac{n!}{a^nh^n}\left(e^{ah}-1-\frac{ah}{1}-\frac{a^2h^2}{2!}-\cdots\cdots-\frac{a^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right].$$

試證之.

3. 設函數 $f_1(x)$, $f_2(x)$,……, $f_{n+2}(x)$ 於隔間 $(x, x+h)$ 內連續而有首 n 級各紀數.試證

$$\begin{vmatrix} f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots\cdots & f_{n+2}(x+h) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots\cdots & f_{n+2}(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots\cdots & f'_{n+2}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots\cdots & f^{(n-1)}_{n+2}(x) \\ f_1^{(p)}(x+\theta h) & f_2^{(p)}(x+\theta h) & \cdots\cdots & f_{n+2}^{(p)}(x+\theta h) \end{vmatrix}=0,$$

θ 爲介於 0 與 1 間之一數, p 爲 $\leqq n$ 之任一正整數.

在此公式內,命 $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=x^n$, $f_3(x)=x^{n-1}$,……, $f_{n+2}(x)=1$, 則得泰氏公式.

又命 $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=\phi(x)$, $f_3(x)=x^{n-1}$, $f_4(x)=x^{n-2}$,……, $f_{n+2}(x)=1$, 則得

$$\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\cdots\cdots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)}{\phi(x+h)-\phi(x)-h\phi'(x)-\cdots\cdots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\phi^{(n-1)}(x)}=\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{\phi^{(n)}(x+\theta h)}.$$

4. 據馬氏級數展

$$y=\frac{\sin m(\operatorname{arc}\cos z)}{\sqrt{1-z^2}}$$

(m 爲一正整數)並自是推出次公式:

若 m 爲偶數,有

$$\frac{\sin mx}{\sin x}=(-1)^{\frac{m}{2}-1}m\left[\cos x+\frac{2^2-m^2}{3!}\cos^3 x+\frac{(2^2-m^2)(4^2-m^2)}{5!}\cos^5 x+\cdots\cdots\right]$$

若 m 爲奇數有

$$\frac{\sin mx}{\sin x}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[1+\frac{1^2-m^2}{2!}\cos^2 x+\frac{(1^2-m^2)(3^2-m^2)}{4!}\cos^4 x+\cdots\cdots\right]$$

5. 求定 α, β 使無窮小 $\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{x(1+\alpha x^2)}{1+\beta x^2}$ 爲所可能之最高級.

6. 求 $X=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}{\log n}$ 於 $n\to\infty$ 時之限.

7. 命 $\sigma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$, 試證 $\log(n+1)<\sigma_n<1+\log n$

8. 設 $u_n=\sum\limits_{1}^{n}\log n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n+n,\ v_n=u_{n+1}-u_n,$

求示級數 Σv_n 爲收斂者,並因之判斷 u_n 於 $n\to\infty$ 有一限.

9. 借泰氏公式求次列各函數之 n 級紀數:

(a) $y=e^{\frac{2}{x}}$,

(b) $y=f(e^x)$,

(c) $y=f(\log x)$.

10. 據關係 $x^{n+a}=x^n x^a=x^n e^{a\log x}$ 求公式

$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x\log x)^n=1+S_1\log x+\frac{S_2}{2}(\log x)^2+\cdots\cdots+\frac{S_n}{n!}(\log x)^n$, S_p 表 $1, 2, 3,\cdots\cdots, n$ 等數中每 p 個乘積之和. (Murphy).

11. 求次列各函數之極大極小:

(a) $z=x^3+y^3-9xy+27$,

(b) $z=xy(x+y-1)$,

(c) $z=2x^2y^2-3x^2y^2-4xy^2+5$,

(d) $z=xe^y+x\sin y$.

12. 求次函數之極大極小 $u=\dfrac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}$.

13. 求次列二隱函數 y 之極大極小:

(a) $y^2-2mxy+x^2-a^2=0$,

(b) $\cos(y-x)=2\sin y+\cos x$.

14. 求次函數 z 之極大極小 $a(x^3+y^3+z^3)=xyz(x+y+z)$.

15. 求次列各函數之極大極小

(a) $z=xy$, 而於自變數間有 $x^3+y^3-3axy=0$:

(b) $u=(x+1)(y+1)(z+1)$, $a^xb^yc^z=k$;

(c) $\begin{cases} u=x_1x_2x_3x_4\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}\right), \\ \Sigma x_i=313, \dfrac{x_1}{2}=\dfrac{x_2}{3}=\dfrac{x_3}{4}. \end{cases}$

16. 設一三角形,於其平面上求一點使其與三頂點距離之和爲極小.

17. 取內接於一橢面之正平行六面體,而求其極大體積.

18. 取有心二次曲面,而以一平面過心剖之;試求截痕 (section) 之軸.

19. 試分一量 a 爲 n 分 $x, y, \cdots\cdots, t$ 使函數 $u=x^{\alpha}y^{\beta}\cdots\cdots t^{\lambda}$

爲極值 ($\alpha, \beta, \cdots\cdots\lambda$ 均係正數).

20. 設曲面 $$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

(稱爲彈性曲面 surface of elasticity) 而以過其心之一平面剖之;求自心至截痕周之距離之極大極小.

21. 求空間一圓與一直線之最短距離.

第四章

無定積分

I. 普通求積分法

87. 原函數,無定積分(Primitive function, indefinite integrals).

已與一函數,試求以之爲紀數之函數,斯積分問題之所由起.故積分法,初卽微分法之反演也.任設函數$f(x)$,是否恆有一函數以$f(x)$爲紀數,或以$f(x)\,dx$爲微分,曰凡在$f(x)$之連續隔間內皆然.吾人可由一幾何法證明之,如普通積分學上所論者是.但此法雖能促積分學之進步,而論理未可認爲精確.故近代學者,別求一純粹之分析法焉.吾等將於定積分篇中述及之.玆暫承認是理.

凡以$f(x)$爲紀數,或$f(x)\,dx$爲微分之函數,均稱爲$f(x)$之原函數,或稱爲$f(x)\,dx$之積分.(尋常亦稱之爲$f(x)$之積分,然非原義也.)

若$F(x)$爲$f(x)$之一原函數,則吾等易知凡以$f(x)$爲紀數之函數,由$F(x)+C$表之,C爲一泛定之常數.吾等稱之爲積分常數.函數$F(x)+C$統稱爲$f(x)\,dx$之無定積分,而由符號

$$\int f(x)\,dx$$

表之.

88. 無定積分求法.

由微分結果,吾等立得次列諸簡單公式(爲免繁累計,積分常數均略去,引用時自應加入).

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x}=\log|x|$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc}\tan\frac{x}{a}, \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc}\sin\frac{x}{a}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\log\ (x+\sqrt{a+x^2})$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arc}\sec\frac{x}{a} \qquad \int e^x\,dx=e^x,$$

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}, \qquad \int \cos x\,dx=\sin x,$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x \qquad \int \tan x\,dx=-\log|\cos x|,$$

$$\int \cot x\,dx=\log|\sin x|, \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x,$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\frac{1}{\operatorname{th} x} \qquad \int \operatorname{th} x\,dx=\log \operatorname{ch} x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{th} x} = \log|\operatorname{sh} x|, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$$

對於較繁之積分,吾等則求化之使由此等簡單積分表出.玆略述化法主要者於次:

1° 分解求積分(Integration by decomposition). 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots\cdots f_p(x)$$

則有

$$(1) \qquad \int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \cdots\cdots \int f_p(x)\,dx,$$

理甚顯然.

例如

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C.$$

2° 部分求積法(Integration by parts). 設 u, v 爲 x 之函數

則 $$(uv)' = uv' + vu',$$

而有 $$uv = \int uv'dx + \int vu'dx,$$

卽 $$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$$

亦可書如

$$(2) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

是求 $u\,dv$ 之積分變爲求 $v\,du$ 者. 例如求 $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$; 命

$u=\sqrt{1-x^2}$ 及 $v=x$,

則 $$I=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

於是只須書 $x^2=1-(1-x^2)$ 卽得

$$I=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-I$$

而 $$2I=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C.$$

推廣 公式(2)尙可推廣.命 $v^{(n)}$ 表函數 v 之 n 級紀數有

$$\int uv^{(n)}dx=uv^{(n-1)}-\int u'v^{(n-1)}dx,$$

$$\int u'v^{(n-1)}dx=u'v^{(n-2)}-\int u''v^{(n-2)}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int u^{(n-1)}v'dx=u^{(n-1)}v-\int u^{(n)}v\,dx,$$

相加卽得公式

(3) $$\int uv^{(n)}dx=uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+u''v^{(n-3)}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v+(-1)^n\int u^{(n)}v\,dx.$$

例設 $u=x^m, v^{(m)}=e^x$, 吾等有

$$\int x^m e^x dx=e^x[x^m-mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}m(m-1)\cdots\cdots3\cdot2x+(-1)^m m!]+C.$$

3° 換變數求積法(Integration by substitution)設積分

$$\int f(x)\,dx$$

命 $x=\phi(t)$，並設 $\phi(t)$ 連續而有紀數 $\phi'(t)$，吾等知 $dx=\phi'(t)\,dt$ 而

$$f(x)\,dx=f[\phi(t)]\phi'(t)\,dx.$$

按積分定義立有

$$\int f(x)\,dx=\int f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt.$$

蓋兩端之微分既相等，則所差不過一常數而積分號中實包含此泛定常數也．如是新得之積分可較原設者易求．例有

$$I=\int \operatorname{arc}\sin x\,dx.$$

命 $\operatorname{arc}\sin x=t$ 卽 $x=\sin t$，$dx=\cos t\,dt$，則

$$I=\int t\cos t\,dt,$$

再用部分法，卽有

$$I=t\sin t-\int \sin t\,dt=t\sin t+\cos t+C;$$

復以舊變數代入便得

$$I=x\operatorname{arc}\sin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

II 代數的函數之積分

89 有理函數 (Rational Functions).

凡 x 之有理函數 $f(x)$ 恆可書爲

$$f(x)=E(x)+\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$E(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, 均爲多項式,而 $P(x)$ 之次數低於 $Q(x)$ 者.且二者之間無公因數.若是

$$\int f(x)\,dx=\int E(x)\,dx+\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

右端第一積分立可求得.故只須就第二積分論之.吾等知

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$可化爲如

$$\frac{A}{(x-a)^m},\qquad \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

形之簡單分數之和.a 爲 $Q(x)$ 之一實根,而 $\alpha+\beta i$ 爲其一虛根.問題變爲求積分

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^m}\quad 與\quad \int\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}dx,\quad (m\geqq 1,\ n\geqq 1).$$

於第一種積分立有

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\log|\,x-a\,|,\quad 及\ \int\frac{A\,dx}{(x-a)^m}=\frac{-A}{(m-1)(x-a)^{m-1}},\quad (m>1).$$

待討論者,僅爲第二種.爲簡便計,命

$$x=\alpha+\beta t,\qquad dx=\beta\,dt$$

以化之,得

$$\frac{1}{\beta^{2n-1}}\int\frac{M\alpha+N+M\beta t}{(1+t^2)^n}\,dt.$$

於是復判爲二種如

$$\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^n},\qquad \int\frac{dt}{(1+t^2)^n};$$

其前者於 $n>1$ 爲

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} = -\frac{\beta^{2n-2}}{2(n-1)[(x-a)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

而於 $n=1$ 爲

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\log(1+t^2) = \frac{1}{2}\log\frac{(x-a)^2+\beta^2}{\beta^2}.$$

今以 I_n 表後者論之，吾等立有

$$I_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tan} t = \operatorname{arc\,tan}\frac{x-a}{\beta}.$$

於 $n>1$, 則可書

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\,dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^n}$$

於末一積分命 $u=t,\ dv=\dfrac{t\,dt}{(1+t^2)^n}$ 而準部分求積公式有

$$\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}},$$

代入上式, 且注意 $I_{n-1} = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$, 則得

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}.$$

賡續用此公式, 則 I 之足碼將遞減以達於1, 而問題以決。

例求
$$I = \int \frac{x^4(x^2-3)}{(x^2-1)^3}\,dx.$$

積分號下之函數可書如

$$f(x) = \frac{(x^2-1)^3-3x^2+1}{(x^2-1)^3} = 1 - \frac{3x^2-1}{(x^2-1)^3},$$

而

$$(4)\quad \frac{3x^2-1}{(x^2-1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{A'}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C'}{x-1}.$$

欲定 A, B, C, 命 $x-1=t$, 而將前端分數依 t 之增冪勢展之. 此分數於是變爲

$$(5)\quad \frac{3(1+t)^2-1}{t^3(2+t)^3}=\frac{2+6t+3t^2}{t^3(8+12t+6t^2+\cdots\cdots)}=\frac{1}{4t^3}+\frac{3}{8t^2}-\frac{3}{8t}+\cdots\cdots.$$

可見 (1)$A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{3}{8}$, $C=-\frac{3}{8}$ 而

$$\frac{3x^2-1}{(x^2-1)^3}=\frac{1}{4(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{A'}{(x+1)^3}+\frac{B'}{(x+1)^2}+\frac{C'}{x+1}.$$

同法可定 A', B', C', 但簡妙莫如次法: 注意於上式易 x 爲 $-x$, 其左端不變; 是右端當與原式右式恆等, 卽 $A'=B'=\frac{3}{8}$, $C'=\frac{3}{8}$.

於是 $$I=\int dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x+1}.$$

---

(1) 蓋若是由 (4), (5) 有恆等式

$$\frac{1}{4(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\phi(x)=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\psi(x),$$

$\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 於 $x=1$ 有定值, 以 $(x-1)^3$ 乘兩端而命 $x=1$, 則見 $A=\frac{1}{4}$; 繼將兩端首項消去而以 $(x-1)^2$ 乘, 即得 $B=\frac{3}{8}$; 更消去兩端第二項而以 $x-1$ 乘, 卽得 $C=-\frac{3}{8}$. 普通可仿此論斷. 凡將有理函數 $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ 展之, 如

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\psi(x),$$

(a 爲 $\Phi(x)$ 之 α 級根) 則右端前 α 項卽 $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ 之簡單分數式中關於 a 根之部分.

積之而稍化其結果得

$$I=x-\frac{3x}{4(x^2-1)}-\frac{x}{2(x^2-1)^2}+\frac{3}{8}\log\frac{x+1}{x-1}+C.$$

注意. 上所述爲普通法.應用每嫌冗長.於特別問題,往往可得其他較簡妙者以御算.例若待求積分之函數 $f(x)$ 呈

次形 $$f(x)=\frac{1}{x}\Phi(x^m),$$

則可命 $x^m=t$ 以化之.又若

$$f(x)=\frac{P(x)}{(x^2-1)^n}$$

而 $P(x)$ 爲一多項式,則可命 $x=\frac{z+1}{z-1}$ 以化之.若是有

$$\int\frac{P(x)\,dx}{(x^2-1)^n}=-\frac{1}{2^{2n-1}}\int P\left(\frac{z+1}{z-1}\right)(z-1)^{2n-2}\frac{dz}{z^n}.$$

設如 $P(x)$ 之次數小於 $2n-2$, 則 $P\left(\frac{z+1}{z-1}\right)(z-1)^{2n-2}$ 成 z 之多項式而積分極易求出.

90. 額米特氏法 (Hermite's method).

上述之普通法於化分數爲簡單分數時,必須知分母之根,額氏法,乃僅由加乘除等基本手續以化簡積分,而原函數之代數的部分卽因之求出.所餘者,僅超然函數部分而已.

設欲求積分之有理函數爲 $f(x)=\frac{F(x)}{\Phi(x)}$, 其 $F(x)$ 與 $\Phi(x)$ 無公因數.準方程式論等根理,吾等可書

$$\Phi(x)=X_1\,X_2^2\,X_3^3\cdots\cdots X_p^p,$$

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_p$ 爲無等根之多項式.且彼此無公因,由是可析爲偏分數式

(6) $$\frac{F(x)}{\Phi(x)}=\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\cdots\cdots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

其中 A_i 爲與 X_i 無公因之多項式.蓋據最大公約數理,若 X 與 Y 爲二無公因之多項式,並 Z 爲他一多項式,則吾等恆可得二多項式 A 與 B, 使

$$BX+AY=Z.$$

故於本題可有

$$BX_1+AX_2^2\cdots\cdots X_p^p=F(x),$$

而 $$\frac{F(x)}{\Phi(x)}=\frac{A}{X_1}+\frac{B}{X_2^2\cdots\cdots X_p^p}.$$

因 $F(x)$ 與 $\Phi(x)$ 無公因,是 A 與 X_1 及 B 與 $X_2^2\cdots\cdots X_p^p$ 當亦然,於是同法可施於 $\frac{B}{X_2^2\cdots\cdots X_p^p}$; 遞推卽得 (6).

由是問題變爲討論形如

$$\int\frac{A\,dx}{[\psi(x)]^n}$$

之積分, $\psi(x)$ 與其紀數 $\psi'(x)$ 無公因,吾等可據上所引及之理定二多項式 B 與 C, 使

(7) $$B\psi+C\psi'=A;$$

因之 $$\int\frac{A\,dx}{\psi^n}=\int\frac{B\psi+C\psi'}{\psi^n}dx=\int\frac{B\,dx}{\psi^{n-1}}+\int C\frac{\psi'\,dx}{\psi^n},$$

而由部分求積法有

$$\int C\frac{\psi' dx}{\psi^n} = -\frac{C}{(n-1)\psi^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{C'}{\psi^{n-1}} dx.$$

故
$$\int \frac{A\,dx}{\psi^n} = -\frac{C}{(n-1)\psi^{n-1}} + \int \frac{A_1\,dx}{\psi^{n-1}},$$

A_1 爲一多項式.若 $n>2$,吾等可以同法化末端積分,如此類推,終至 ψ 之指數爲1而止.然則

$$\int \frac{A\,dx}{\psi^n} = R(x) + \int \frac{G(x)}{\psi(x)} dx,$$

式中 $R(x)$ 爲有理函數,而 $G(x)$ 爲一多項式,其次數恆可設其小於 $\psi(x)$ 者,欲求最後積分,則須知 $\psi(x)$ 之根矣.析 $\dfrac{G(x)}{\psi(x)}$ 爲簡單分數,則得形如

$$\frac{\lambda}{x-a} \text{ 與 } \frac{\mu x+\nu}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

之項之和,其各項積分咸由對數函數及正切反函數表之.

可特別注意者:若積分自身爲一有理函數,則由額氏化簡法逕得結果.例有

$$I = \int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3} dx.$$

吾等易得恆等式

$$5x^3-3x-1 = 6x(x^2+1) - (x^3+3x+1).$$

據此則
$$I = \int \frac{6x(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^3} - \int \frac{dx}{(x^3+3x+1)^2};$$

而命 $u=x$, $v=-x/(x^3+3x+1)^2$,部分積之有

$$\int \frac{6x(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3} dx = \frac{-x}{(x^3+3x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^3+3x+1)^2},$$

代入上式卽得 $$I=\frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}+C.$$

91. x 與 $\sqrt[p]{\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$ 之有理函數之積分.

設

$$(7)\qquad \int f\left[x,\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{m}{\mu}}\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{n}{\nu}},\dots\dots,\left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{r}{\rho}}\right]dx$$

f 爲 $x,\left(\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{m}{\mu}},\dots\dots,\left(\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{n}{\nu}}$ 之一有理函數 $m,\mu,n,\nu,\cdots\cdots,r,\rho$ 爲整數或正或負.

吾等可換變數使欲積之函數變爲有理函數.如 λ 爲 $\mu,\cdots\cdots,\rho$ 等絕對值之最小公倍數,則命

$$\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}=t^{\lambda}$$

因之 $$x=\frac{\beta t^{\lambda}-b}{a-\alpha t^{\lambda}},\qquad dx=\lambda\frac{\beta-b\alpha}{(a-\alpha t^{\lambda})^2}t^{\lambda-1}\,dt$$

積分(7)卽變爲

$$\lambda(a\beta-b\alpha)\int f\left(\frac{\beta t^{\lambda}+b}{a-\alpha t^{\lambda}},\ t^{\frac{\lambda m}{\mu}},\dots\dots,\ t^{\frac{\lambda r}{\rho}}\right)\frac{t^{\lambda-1}}{(a-\alpha t^{\lambda})^2}\,dt$$

$\lambda,\ \dfrac{\lambda m}{\mu},\dots\dots\dfrac{\lambda r}{\rho}$ 咸爲整數.積分號下之函數變爲有理函數.

特別於次二種積分

$$\int f(x,\sqrt{ax+b})\,dx,\qquad \int f\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)dx.$$

只須命 $$ax+b=t^2 \text{ 或 } \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}=t^2$$

化之.

例有 $$I=\frac{1}{6}\int\frac{x-x^{\frac{1}{2}}}{x-x^{\frac{2}{3}}}\,dx.$$

命 $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$, 則

$$I=\int\frac{t^3-1}{t^2-1}t^4\,dt=\int\frac{t^2+t+1}{t+1}t^4\,dt$$

$$=\int t^5dt+\int\frac{dt}{t+1}+\int(t^3-t^2+t-1)\,dt$$

$$=\frac{1}{6}t^6+\log|t+1|+\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t-t+C.$$

92. x 與 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 之有理函數之積分.

設

(8) $$\int f(x,\,y)dx,$$

其中 f 為 x 與 y 之有理函數, 而

(9) $$y=\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

吾謂可換變數以化之為一有理函數之積分. 欲達此目的, 只須能表 x, y 為一參變數之有理函數如:

$$x=\phi(t),\qquad y=\psi(t).$$

蓋 $dx=\phi(t)dt$,

$$\int f(x,\,y)\,dx=\int f[\phi(t),\,\psi(t)]\phi'(t)\,dt.$$

末端積分號下之函數顯為有理者.故問題變為表 x, y 以 t 之有理式. 若注意曲線(9)為一錐線(C), 則知問題恆為可能. 因以過 C 上一定點 A 之直線 AP 割之, 則 AP 與(C)之第二交點 P, 其位標 x, y 顯為 AP 之斜率 t 之有理函數也.於特別問題,吾等可擇 A 點以使得式單簡.

如 $ax^2+bx+c=0$ 有二實根 α, β, 則吾可取 $(\alpha, 0)$ 點為 A 定點, 而命

$$y=t(x-\alpha)$$

此活動直線割曲線 $y^2=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 之點由方程式

$$t^2(x-\alpha)^2=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

定之. 刪去與定點相應之因數 $(x-\alpha)$, 則有

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha}=\frac{t^2}{a}.$$

由是得

$$x=\frac{\beta-\frac{\alpha}{a}t^2}{1-\frac{1}{a}t^2}, \qquad y=\frac{\beta-\alpha}{1-\frac{1}{a}t^2}t. \tag{10}$$

吾等於此尚可取 $\theta=\frac{t}{\sqrt{\pm a}}$ 為參變數, 而無損於有理性. 若是即係命

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha}=\pm\theta^2. \tag{11}$$

吾等復可取曲線與 y 軸之一交點為定點 A; 如取 $(0, \sqrt{c})$, 即設

(12)
$$y-\sqrt{c}=tx.$$

今若方程式 $ax+bx+c=0$ 無實根,必有 $a>0$. 不然,前端三項式將 <0 矣. 於此錐線為一雙弧線,以平行於其一<u>幾近線</u>(asymptote)之活動直線

(13)
$$y=x\sqrt{a}+t$$

割之,則僅有一交點,其位標為 t 之有理式

$$x=\frac{c-t^2}{2t\sqrt{a}-2b}, \qquad y=t+\sqrt{a}\frac{c-t^2}{2t\sqrt{a}-2b}.$$

<u>注意</u>. 通常於引用上法之先,命 $x=z+h$, 以使三項式不含 z 項,可較便利.

例. 求
$$I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

曲線 $y^2=x^2+x+1$ 為一雙弧線,直線

$$y=x+t$$

與其一幾近線平行,而僅遇之於一點,其位標為

$$x=\frac{t^2-1}{1-2t}, \qquad y=\frac{-t^2+t-1}{1-2t}.$$

於是
$$dx=2\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}dt.$$

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)y}=\int\frac{2dt}{t(t-2)}=\log\frac{t-2}{t}+C.$$

復以 t 對於 x 之值 $t=y-x=\sqrt{x^2+x+1}-x$ 代入,則得

$$I=\log\left|1-\frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right|+C=\log\frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+C.$$

上所述爲普通法.有時反以不化除根號爲便.例如求積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

若 $a>0$, 則可書

$$\sqrt{ax^2+2bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}},$$

而視 $ac-b>0$ 或 <0, 命

$$ax+b=t\sqrt{ac-b^2},\text{ 或 } ax+b=t\sqrt{b^2-ac}.$$

此普通微積分書所論及者.

93. x, $\sqrt{ax+b}$ 及 $\sqrt{a'x+b'}$ 之有理函數之積分.

設

$$\int f(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{a'x+b'})\,dx;$$

f 爲 x 及兩根數之有理函數.

先命 $ax+b=z^2$, 此積分變爲

$$\int f\left(\frac{z^2-b}{a},\ z,\ \sqrt{\frac{a'}{a}(z^2-b)+b'}\right)\frac{2z\,dz}{a}.$$

而被積函數成爲 z 及 $\sqrt{AZ^2+C}$ 形根數之有理函數.是可以上述之任一法賡續化之.

吾等亦可如次御算:試注意被積函數之形恆可書如

$$f=\frac{A+B\sqrt{ax+b}+C\sqrt{a'x+b'}+D\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}{A_1+B_1\sqrt{ax+b}+C_1\sqrt{a'x+b'}+D_1\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}},$$

$A, B, \cdots\cdots, D$ 均爲 x 之多項式.若將分母化爲有理數,則

$$f=\frac{M+N\sqrt{ax+b}+P\sqrt{a'x+b'}+Q\sqrt{(ax+b)(a'+b')}}{R}$$

M, N, P, Q, R 爲 x 之多項式. 問題於是變爲求下列四積分

$$\int\frac{M}{R}\,dx,\quad \int\frac{N}{R}\sqrt{ax+b}\,dx,\quad \int\frac{P}{R}\sqrt{a'x+b'}\,dx,$$

$$\int\frac{Q}{R}\sqrt{(ax+b)(a'x+b')}.$$

求法均爲吾等所已知者.

例. 求 $$I=\int\frac{\sqrt{x+3}}{1-\sqrt{x}}\,dx.$$

可書之如

$$I=\int\frac{\sqrt{x+3}\,(1+\sqrt{x})}{1-x}\,dx=\int\frac{\sqrt{x+3}}{1-x}\,dx+\int\frac{\sqrt{x(x+3)}}{1-x}\,dx.$$

命 $x+3=z^2$, 則

$$\int\frac{\sqrt{x+3}}{1-x}\,dx=-2\int\frac{z^2dz}{z^2-4}=-2z+\log\frac{z+2}{z-2}$$

$$=-2\sqrt{x+3}+\log\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}-2}.$$

又如命 $\dfrac{x+3}{x}=t^2$, 即 $x=\dfrac{3}{t^2-1}$, $\quad dx=\dfrac{-6t}{(t^2-1)^2}\,dt,$

則 $$\int\frac{\sqrt{x(x+3)}}{1-x}\,dx=-18\int\frac{t^2dt}{(t^2-4)(t^2-1)^2}.$$

於是只須將被積函數化爲簡單分數積之.

94. 亞貝爾氏積分, 有理曲綫 (Abelian integral; unicursal curves).

設一代數的曲線

$$F(x,\ y)=0, \tag{14}$$

並命 $R(x, y)$ 爲 x, y 之一有理函數.若於 $R(x, y)$ 內代 y 以其由(14)確定之值,則結果僅含變數 x, 而積分

$$\int R(x,\ y)\,dx \tag{15}$$

稱爲繫於曲線(14)之亞氏積分.

若 $R(x, y)$ 爲任一函數,則積分成一超然函數;但在 $F(x, y)=0$ 爲一有理曲綫時,則積分甚易化爲有理函數之積分.蓋按定義曲線之位標可顯爲一叄變數 t 之有理函數

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t).$$

而原設積分可化爲有理函數之積分

$$\int R[f(t),\ \phi(t)]\,f'(t)\,dt \tag{16}$$

也.例有積分
$$I=\int\frac{dx}{(x^3-x^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

若設
$$y=(x^3-x^2)^{\frac{1}{3}}\ \text{或}\ y^3=x^3-x^2,$$

則
$$I=\int\frac{dx}{y^2},$$

而 $y^3=x^3-x^2$ 爲有理曲線,只須命 $y=tx$, 即得

$$x=\frac{1}{1-t^3},\qquad y=\frac{t}{1-t^3},$$

x, y 均顯爲 t 之有理式.於是有

$$I=\int\frac{3t^3dt}{(1-t^3)^2}\cdot\frac{(1-t^3)^3}{t^2}=3\int dt=3t$$

卽
$$I=3\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}+C.$$

於解析幾何上[1]證明凡不可分解之 n 次有理曲線有 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個重點.反之亦然.欲得 x, y 對於一參變數之値,法如次:命 C_n 表所云之 n 次曲線.試取一族 $n-2$ 次之曲線,而令其經過此 C_n 之 $\delta=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 重點,並 C_n 上其他 $n-3$ 個單點.因
$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-3=\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1,$$
而確定 $n-2$ 次之一曲線,須 $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ 點,可見上所得賊爲一族曲線 C_{n-2},其方程式形如
$$P(x, y)+tQ(x, y)=0,$$
t 爲一活數.每曲線 C_{n-2} 與 C_n 相交於 $n(n-2)$ 點,其中有 δ 重點及 $n-3$ 單點與 t 無涉.按
$$2\delta+n-3=(n-1)(n-2)+n-3=n(n-2)-1,$$
是知僅餘一交點隨 t 變移.此點之位標由係數爲 t 之多項式之一次方程式而得.卽明是點經緯位標爲 t 之有理函數也.

若 $n=2$, 則 $\delta=0$; 可見凡二次曲線皆爲有理曲線.若 $n=3$, 則 $\delta=1$; 可見三次曲線之爲有理曲線者有一重點.將原點移至重點,則曲線方程式呈次形

(17) $$\phi_3(x, y)+\phi_2(x, y)=0,$$

(1) 可參攷 G. Salmon.—Traité de geometrie analytique (courbes planes) Section II, p. 32.

ϕ_2 表一二次齊式, ϕ_3 表一三次齊式過重點之一直線 $y=tx$ 僅遇曲線於一點, 其位標爲

$$(18)\qquad x=\frac{\phi_2(1,\ t)}{\phi_3(1,\ t)},\qquad y=-\frac{t\phi_2(1,\ t)}{\phi_3(1,\ t)}.$$

若 $n=4$, 則 $\delta=3$ 是四次有理曲線有 3 個重點. 欲求曲線上一點位標之值,當取一族二次曲線經過其三重點,及他一單點.

例. 例設四次曲線(Lemniscate)

$$(19)\qquad (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

論之. 此曲線顯以原點爲重點, 又改用齊位標, X, Y, Z 更見 $X^2+Y^2=0$ 與 $Z=0$ 二方程所定之兩點卽無窮處圓點(Circular points at infinity) 亦爲二重點. 然則是一有理曲線. 欲得其參變方程式,按上理應作過此三重點及一單點之二次曲線. 但過某單點之條件,亦可以其他條件代之,如令此二次曲線與原設曲線相切於某點是. 今取過原點而於是點與原設曲線相切之圓族

$$(20)\qquad x^2+y^2=t(x-y).$$

由 (19),(20) 有
$$t^2(x-y)^2=a^2(x^2-y^2),$$
或
$$t^2(x-y)=a^2(x+y).$$
於是得
$$x=\frac{a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\qquad y=\frac{a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

此結果尙可由一較簡之法得之. 以 $y=\lambda x$ 直線割曲線,則

得二交點 $$x=\frac{\pm a\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2},\qquad y=\lambda x$$

於是只須命 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=\left(\frac{a}{t}\right)^2$, 即可消去根號.

注意. 高級異點 (singular points) 可與若干重點相當, 例如一 n 次曲線, 若有一 $n-1$ 級複點 (multiple point) 則爲有理曲線.

95. 二項式微分之積分 (Integrals of binomial differentials).

此即積分 $$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$$

m, n, p 均爲有理數.

命 $ax^n=bt$ 即

$$x=\left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}},\qquad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}-1}dt$$

化之, 則變爲求形如

$$\int t^q(1+t)^p\,dt$$

之積分, 其中 q 爲一有理數. 於是若 p 爲整數, 而 $q=\frac{\lambda}{\mu}$, 則命 $t=z^\mu$ 即可化爲有理函數之積分; 若 q 爲整數, 則情形亦同, 又 $p+q$ 爲整數, 而 $p=\frac{\lambda}{\mu}$, 則書

$$t^q(1+t)^p=t^{p+q}\left(\frac{1+t}{t}\right)^p,$$

而命 $$\frac{1+t}{t}=z^\mu$$

化之,亦即變為有理函數積分.歸納之,可見積分於次三種情況為可積.

1°) p 為整數;

2°) q 為整數,即 $\frac{m+1}{n}-1$ 為整數,亦即 $\frac{m+1}{n}$ 為整數;

3°) $p+n$ 為整數,即 $p+\frac{m+1}{n}$ 為整數.

據柴比軏伏氏(Tchebicheff)所論,二項式微分可化為有理者盡於此矣.

例. 求
$$I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^4}}.$$

於此 $\frac{m+1}{n}+p=-1$, 是合於第 3° 種情況, 先命 $x^4=t$ 得
$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2\left(\frac{1+t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

繼設 $1+t=tz^2$, 即
$$t=\frac{1}{z^2-1},\qquad dt=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}dz,$$

便得
$$I=-\frac{1}{2}\int dz=-\frac{z}{2}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}+C.$$

III. 超然函數之積分

含指函數對數函數反圓函數等之微分,其可求出積分者,亦有多種.如在簡單之例
$$\int R(e^x)e^x\,dx,\qquad \int R(\log x)\frac{dx}{x},\qquad \int R(\arctan\ x)\frac{dx}{1+x^2},$$

R 表一有理函數,則依序命 $e^x=t$, $\log x=t$, $\operatorname{arc}\tan x=t$, 均卽化爲有理函數之積分矣.茲更舉其他較繁之例論之.

96. $\sin x$ 與 $\cos x$ 之有理函數之積分.

設有
$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

f 表 $\sin x$ 及 $\cos x$ 之一有理函數.命 $\tan\frac{x}{2}=t$, 因之命

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

則恆可化 $f\,dx$ 爲含 t 之有理微分.但此法雖恆可適用,而手續往往繁長.次述諸法若適用,則每較簡便.

1°) f 爲 $\cos x$ 之奇函數;卽云易 $\cos x$ 爲 $-\cos x$ 而 $\sin x$ 不變,(亦卽易 x 爲 $\pi-x$), f 僅變號而不改其值,若是則命

$$\sin x=t.$$

卽可化 $f\,dx$ 爲含 t 之有理微分.蓋 $\frac{f}{\cos x}$ 不改號,是必僅與 $\cos^2 x$ 有關,而爲 $\sin x$ 之一有理函數 $R(\sin x)$

$$f=R(\sin x)\cos x.$$

是則
$$f\,dx=R(t)\,dt.$$

2°). 若 f 爲 $\sin x$ 之奇函數,(卽 f 於 x 改號時值不變而改號)則可命 $\cos x=t$ 化之,情形與上彷彿.

3°). 若同時易 $\sin x$ 爲 $-\sin x$, 並易 $\cos x$ 爲 $-\cos x$ 而 f 不變,卽若 f 以 π 爲週期,則可命

$$\tan x = t$$

化之.蓋以 $\cos x \tan x$ 代 $\sin x$, 則 f 變爲 $\cos x$ 及 $\tan x$ 之一函數,其號不因 $\cos x$ 而改.是必僅與 $\cos^2 x$ 有關,而爲 $\tan x$ 之一有理函數

$$f\,dx = R(\tan x)\,dx = R(t)\frac{dt}{1+t^2}$$

例 1. 求

$$\int \frac{dx}{\sin x} \text{ 與 } \int \frac{dx}{\cos x}.$$

由普通法命 $\tan\frac{x}{2} = t$, 有

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

又易 x 爲 $x+\frac{\pi}{2}$ 爲

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

例 2. 求

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x + a\sin^2 x}.$$

被積函數顯以 π 爲週期; 命 $\tan x = t$, 得

$$I = \frac{dt}{1+at^2}.$$

若 $a>0$, 則 $I = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc}\tan(\sqrt{a}\,t) + C = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc}\tan(\sqrt{a}\tan x) + C$;

若 $a<0$, 則 $I = \frac{1}{2\sqrt{-a}}\log\left(C\,\frac{1+\sqrt{-a}\,t}{1-\sqrt{-a}\,t}\right.$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-a}}\log\left(C\,\frac{1+\sqrt{-a}\tan x}{1-\sqrt{-a}\tan x}\right.;$$

若 $a=0$, 則 $I = \tan x + C$.

97. $\sin^m x\cos^n x$ 之積分.

此種積分於次述情況中極易求出:

1°) 若 $m=2p+1$ 而 p 爲正整數,則設 $\cos x=t$,得

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\int(1-t^2)^p t^n dt.$$

2°) 若 $n=2p+1$,而 p 爲正整數,則命 $\sin x=t$,得

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int t^m(1-t^2)^p dt.$$

3°) 若 $m+n=-2p$ 而 p 爲正整數,則命 $\tan x=t$,或 $\cot x=u$,

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int t^m(1+t^2)^{p-1}dt=-\int u^p(1+u^2)^{p-1}du.$$

4°) 若 $n=0$, $m=-(2p+1)$,則命 $\tan\frac{x}{2}=t$,

$$\int\frac{dx}{\sin^{2p+1}x}=\frac{1}{2^2p}\int\frac{(1+t^2)^2p}{t^{2p+1}}=\frac{1}{2^{2p}}\int\left(t+\frac{1}{t}\right)^{2p}\frac{dt}{t}.$$

可見均化爲可積出之二項微分之積分.

5°) $m+n=0$ (m 若爲整數),則由3°之變換有

$$\int\tan^m x\,dx=\int\frac{t^m\,dt}{1+t^2}=-\int\frac{u^2\,du}{1+u^2}.$$

吾等可注意當 m 與 n 均爲整數時,此乃96節所論積分之一特例.

<u>化簡公式.</u> 吾等可書

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int\sin^{m-1}x(\cos^n x\sin x\,dx).$$

準部分積分法,則有

$$(21)\qquad I_{m,n}=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\sin^{m-2}x\cos^{n+2}x\,dx,$$

以 $1-\sin^2 x$ 代 $\cos^2 x$, 則得公式

$$(22)\qquad I_{m,n}=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}.$$

仿之,可得

$$(23)\qquad I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{m-1}{m+1}\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx;$$

$$(24)\qquad I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}.$$

又於 (22) 換 m 爲 $m+2$, 於 (24) 換 n 爲 $n+2$ 而就右端積分解之,則得公式

$$(25)\qquad I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+1}+\frac{m+n+2}{m+1}I_{m+2,n},$$

$$(26)\qquad I_{m,n}=\frac{\sin^{n+1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}I_{m,n+2}.$$

當 m, n 爲整數時,公式 (22),(24),(25),(26) 可湊合應用以使二指數減爲 -1 或 0 或 1. 至是或已得結果,或貽一最易求之積分.

又於 m 與 n 號相反時,公式 (21),(23) 亦甚便應用.

98. 一多項式 $P(x)$ 與 e^{ax}, $\cos ax$ 或 $\sin ax$ 之乘積之積分.

設 $P(x)$ 爲 n 次,則準 88 節部分求積之普通公式立得

$$(27)\quad \int P(x)e^{ax}\,dx = \left[P(x) - \frac{1}{a}P'(x) + \frac{1}{a^2}P''(x) - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{1}{a^n}P^{(n)}\right]\frac{e^{ax}}{a} + C.$$

同法得

$$(28)\quad \int P(x)\cos ax\,dx = \left[P(x) - \frac{1}{a^2}P''(x) + \frac{1}{a^4}P^{(4)}(x) - \cdots\cdots\right]\frac{\sin ax}{a} + \left[\frac{1}{a}P'(x) - \frac{1}{a^3}P'''(x) + \frac{1}{a^5}P^{(5)}(x) - \cdots\cdots\right]\frac{\cos ax}{a} + C.$$

$$(29)\quad \int P(x)\sin ax\,dx = \left[\frac{1}{a}P'(x) + \frac{1}{a^3}P'''(x) + \frac{1}{a^5}P^{(5)}(x) + \cdots\cdots\right]\frac{\sin ax}{a} - \left[P(x) - \frac{1}{a^2}P''(x) + \frac{1}{a^4}P^{(4)}(x) - \cdots\cdots\right]\frac{\cos ax}{a} + C$$

括鈎內未寫出之項至多至含 $P^{(n)}$ 之項爲止.

例如 $\int x^2\cos x\,dx = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C.$

99. $x, e^{ax}, \cdots\cdots \cos ax, \sin ax$ 之多項式之積分.

卽設

$$(30)\quad \int P(x, e^{ax}, \cdots\cdots, \cos ax, \sin ax)\,dx.$$

據尤拉氏公式

$$\cos ax = \frac{e^{aix} + e^{-aix}}{2}, \qquad \sin ax = \frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2i},$$

化 $\cos ax, \sin ax$ 則變爲求形如

$$I_p = \int x^p e^{kx}\,dx$$

之積分.由部分法易得結果.

特例. 若 P 僅含指函數及圓函數,則分離諸項變爲形如次之兩種積分

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\qquad \int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

甚易直接求之.蓋注意

$$d(e^{ax}\cos bx)=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)\,dx,$$

$$d(e^{ax}\sin bx)=e^{ax}(b\cos bx+a\sin bx)\,dx;$$

則有 $$bd(e^{ax}\sin bx)+ad(e^{ax}\cos bx)=(a^2+b^2)e^{ax}\cos bx\,dx,$$

$$ad(e^{ax}\sin bx)-bd(e^{ax}\cos bx)=(a^2+b^2)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

積之便得

(31) $$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C,$$

(32) $$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

注意. 積分

$$\int E(x,\log x)\,dx;\qquad \int E(x,\text{arc}\sin x)\,dx,\qquad \int (x,\text{arc}\cos x)\,dx$$

可化歸上例,只須依次命

$$\log x=z,\qquad \text{arc}\sin x=z,\qquad \text{arc}\cos x=z$$

化之.例如 $$I=\int(\text{arc}\sin x)^2\,dx=\int z^2\cos z\,dz$$

$$=(z^2-2)\sin z+2z\cos z+C$$

$$=x(\text{arc}\sin x)^2-2x+2(\text{arc}\sin x)\sqrt{1-x^2}+C.$$

IV. 超然積分之簡化

無定積分 $\int f(x)\,dx$ 除上所論列者外,通常不能以一定個數之基本函數 (elementary functions) 表之,而成一新超然函數.於是有甚要者:爲討論對於特別一類函數 $f(x)$ 之積分,須新增若干超然函數於基本函數,方足表顯類中一切函數的積分.換言之,爲討論所設積分可化歸於其中若干個.此項討論,是爲無定積分之簡化(reduction).茲就重要者論之.

100. 橢圓積分及廣義橢圓積分(Elliptic integrals and hyperelliptic integrals).

命 X 爲次數大於 2 之 x 之一多項式,並 $f(x, \sqrt{X})$ 爲 x 及 $\sqrt{X}$ 之一有理函數,而設積分

$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx. \tag{83}$$

若 X 爲三次或四次多項式,則此積分稱爲橢圓積分而於 X 之次數大於 4 時,則此積分稱爲廣義橢圓積分.

吾人可常設 X 只有單根,蓋 X 若有一重根 a,則可置因數 $(x-a)$ 於根號外;若有一三級複根則可置 $(x-a)^2$ 於根號外,而於其下只餘 $(x-a)$ 因數;如是類推.

若多項式 X 爲 $2p$ 次,吾人可以有理的變數代換使之變爲 $2p-1$ 次.

證：命 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{2p}$ 爲 X 之根，有

$$\sqrt{X}=\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_{2p})}.$$

作變數代換 $$t=\frac{1}{x-a_1} \text{ 或 } x=a_1+\frac{1}{t},$$

得 $$\sqrt{X}=\sqrt{\frac{A}{t}\left(a_1-a_2+\frac{1}{t}\right)\cdots\cdots\left(a_1-a_{2p}+\frac{1}{t}\right)}$$

$$=\frac{1}{t^p}\sqrt{A[(a_1-a_2)t+1]\cdots\cdots[(a_1-a_{2p})t+1]}$$

根號下含 t 之多項式爲 $2p-1$ 次，以 T 表之，則得

$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx=\int f\left(a_1+\frac{1}{t},\ \frac{1}{t^p}\sqrt{T}\right)\frac{dt}{t^2}=\int \phi(t, \sqrt{T})\,dt$$

ϕ 爲 t 與 $\sqrt{T}$ 之有理函數；明所欲證.

101. 廣義橢圓積分之簡化.

吾等分二步化之.

第一步. x 與 $\sqrt{X}$ 之一多項式，顯然可書作 $M+N\sqrt{X}$，其中 M 與 N 爲 x 之多項式，而 x 與 $\sqrt{X}$ 之一有理函數，因之可書作 $$f(x, \sqrt{X})=\frac{M+N\sqrt{X}}{P+Q\sqrt{X}},$$

或 $$f(x, \sqrt{X})=\frac{(M+N\sqrt{X})(P-Q\sqrt{X})}{P^2-Q^2X}=\frac{A+B\sqrt{X}}{C},$$

A, B, C 爲 x 之多項式. 於是積分變爲

$$\int f(x, \sqrt{X})dx=\int \frac{A}{C}dx+\int \frac{B}{C}\sqrt{X}\,dx.$$

右端首項爲x之一有理函數積分,只須討論$\int\frac{B}{C}\sqrt{X}\,dx$或

(34)
$$\int\frac{D}{C\sqrt{X}}\,dx.$$

D亦爲x之多項式.

現若析有理函數$\frac{D}{C}$爲簡單分數,則積分將變爲具下二形狀之積分之一和數

(35)
$$\int x^m\frac{dx}{\sqrt{X}},\qquad \int\frac{dx}{(x-a)^{\lambda}\sqrt{X}}.$$ 注λ可為任數

m爲任一整數.

第二步. 先就積分

$$I_m=\int x^m\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

論之.試取恆等式

(36)
$$\frac{d}{dx}(x^h\sqrt{X})=hx^{h-1}\sqrt{X}+\frac{1}{2}x^h\frac{X'}{\sqrt{X}}=\frac{hx^{h-1}X+\frac{1}{2}x^hX'}{\sqrt{X}},$$

式中h爲任意正整數或零.命n爲多項式X之次數,則(36)式末項之分子爲一$n+h-1$次多項式,其x^{n+h-1}項之係數總不爲零.因設
$$X=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots\cdots.$$

有
$$\frac{1}{2}x^hX'+hx^{h-1}X=A_0\left(\frac{1}{2}n+h\right)x^{n+h-1}+\cdots\cdots$$

而$\frac{1}{2}n+h$常爲正也.於是(36)式可書作

$$\frac{d}{dx}(x^h\sqrt{X})=\alpha\frac{x^{n+h-1}}{\sqrt{X}}+\beta\frac{x^{n+h-2}}{\sqrt{X}}+\cdots\cdots+\frac{\lambda}{\sqrt{X}},$$

$\alpha, \beta, \cdots\cdots, \lambda$ 爲定數而 $\alpha \neq 0$. 求兩端之積分，則有

$$x^p\sqrt{X} = \alpha I_{n+h-1} + \beta I_{n+h-2} + \cdots\cdots + \lambda I_0.$$

此式表 I_{n+h-1}，爲 $I_{n+h-2}, I_{n+h-3}, \cdots\cdots I_0$ 之函數 $(h \geqq 0)$.

令 $h=0, 1, 2, \cdots\cdots$ 則由此知 $I_{n-1}, I_n, I_{n+1}, \cdots\cdots$ 可以 I_{n-2}, I_{n-3} $\cdots\cdots, I_0$ 表之；換言之，積分 I 可化歸於其中 $n-1$ 個：$I_0, \cdots\cdots I_{n-2}$.

現取(35)第二積分

$$J_\lambda = \int \frac{dx}{(x-a)^\lambda \sqrt{X}}$$

論之. 設恆等式

$$(37)\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^h}\right] = \frac{X'}{2(x-a)^h\sqrt{X}} - h\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^{h+1}} = \frac{\frac{1}{2}(x-a)X' - hX}{(x-a)^{h+1}\sqrt{X}},$$

式中設 $h \geqq 1$，末端分子爲一 n 次多項式 $\phi(x)$，可書作

注h不准為0

$$\phi(x) = \phi(a) + (x-a)\phi'(a) + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\phi^{(n)}(a)$$

若 a 非 X 之根，則 $\phi(a) \neq 0$. 蓋

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x-a)X' - hX, \qquad \phi(a) = -hX(a).$$

然則若 a 非 X 之根，則(37)式可書爲

$$(38)\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^h}\right] = \frac{\phi(a)}{(x-a)^{h+1}\sqrt{X}} + \frac{\phi'(a)}{(x-a)^h\sqrt{X}} + \cdots\cdots + \frac{\psi(x)}{\sqrt{X}}$$

$\psi(x)$ 爲 x 之整式，只於 $n > h+1$ 時存在. 求兩端積分得

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^h} = \phi(a)J_{h+1} + \phi'(a)J_h + \cdots\cdots$$

右端未寫出之諸項含有積分 $J_{h-1},\cdots\cdots J_1$ 並可含有積分 I(若 $h+1\leqq n$). 此關係可借以表 J_2 爲 J_1 及 I 之函數, J_3 爲 J_1 及 I 之函數等, 換言之, 若 a 非 X 之根. 則諸積分 J_n 可化歸於積分 J_1 及諸積分 I.

今設 a 爲 X 之根, 於此 $\phi(a)=0$, 但 $\phi'(a)\neq 0$. 因

$$\phi'(x)=\frac{1}{2}X'+\frac{1}{2}(x-a)X''-hX',$$

$$\phi'(a)=\left(\frac{1}{2}-h\right)X'(a)$$

而 $\frac{1}{2}-h\neq 0$ 並 (X 旣只具有單根) $X'(a)\neq 0$ 也.

於是 (37) 式可書作

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^h}\right]=\frac{\phi'(a)}{(x-a)^h\sqrt{X}}+\frac{\frac{1}{2}\phi''(a)}{(x-a)^{h-1}\sqrt{X}}+\cdots\cdots+\frac{\psi(x)}{\sqrt{X}}.$$

求積分得
$$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^n}=\phi'(a)J_h+\cdots\cdots$$

未寫出諸項含有積分 J 之足碼低於 h 者, 亦可含有積分 I (若 $h+1\leqq n$).

於此關係中逐次令 $h=1, 2,\cdots\cdots$ 可表 $J_1, J_2,\cdots\cdots$ 爲積分 I 之函數, 然則若 a 爲 X 之根, 積分 J 可化歸於積分 I.

結論之, 若設 $n=2p+1$, 則積分 $\int f(x,\sqrt{X})dx$ 可化歸於 $2p+1$ 個超然積分:

(39) $$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{X}},\quad I_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}},\cdots\cdots,\quad I_{2p-1}=\int\frac{x^{2p-1}dx}{\sqrt{X}},$$

$$J_1(x, a) = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

其中 a 不爲 X 之根,若爲其根,則 $J_1(x, a)$ 可由 $I_0, I_1, \cdots\cdots, I_{2p-1}$ 表之.

注意. 時或簡化以後,積分 I 及 J 可完全消去;而原設積分乃由基本函數表出,若是則所設積分爲一僞廣義橢圓積分 (pseudo-hyperelliptic integral) 或僞橢圓積分 (pseudo-elliptic integral).

102. 橢圓積分之簡化.

於橢圓積分,上述化簡之法自完全適用.若 X 爲三次,則準上述之理,橢圓積分由次列三個超然函數表之:

$$(40) \qquad I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \quad J_1 = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

此三函數依次名爲第一種第二種及第三種橢圓積分. (elliptic integrales of first kind, second kind and third kind).

若 X 爲四次,則準 93 節所論只須知其一根 α 卽可命 $y = 1/(x-\alpha)$ 變化積分使新積分所含根號下之多項式 Y 爲三次式.但於 X 僅有虛根時,此法將帶入虛數的計算而不適用.吾等可以他法演之如次: 蓋因求X之虛根極不方便

先設 X 爲重方式,卽不含奇次項如

$$X = Ax^4 + Bx^2 + C$$

並設欲化之積分為

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}\,dx,$$

P 與 Q 為 x 之多項式,以 $Q(-x)$ 乘積分號下分數之上下,則此積分可書如

$$\int \frac{E(x^2)+xF(x^2)}{G(x^2)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{Ax^4+Bx^2+C}},$$

E, F, G 皆為 x^2 之多項式.命 $x^2=y$,則

$$\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt{X}}=\frac{1}{2}\int \frac{E(y)\,dy}{G(y)\sqrt{y(Ay^2+By+C)}}+\frac{1}{2}\int \frac{F(y)\,dy}{Q(y)\sqrt{Ay^2+By+C}}.$$

右端第二積分可由基本函數表之;第一積分則為橢圓積分,其根號下係一三次多項式,化簡手續以畢.

今若 X 為任意四次式,則可析之為兩個實係數之二次式之積如:

$$X=(ax^2+2bx+c)(a'x^2+2b'x+c'),$$

(於 X 之係數為實數時此恆為可能).當 X 之四根 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 皆為實數時吾等令最大二數 α, β 為第一因式;若有二根為配複數,則以是二數同為一因式之根.於是吾等可作一有理的實的變數替換以使結果中之根號下為一重方形.試分兩種情況論之:

1°) 設 $ab'-ba'=0$.書

$$X=\frac{a'}{a}(ax^2+2bx+c)\left(ax^2+2bx+\frac{ac'}{a'}\right)$$

而命 $y=x+b/a$,即有

$$(41)\qquad X = aa'\left(y^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right)\left(y^2+\frac{c'}{a'}-\frac{b^2}{a^2}\right).$$

爲一重方形.

2°) 設 $ab'-ba'\neq 0$. 命

$$(42)\qquad x=\frac{\lambda y+\mu}{y+1},\qquad dx=\frac{\lambda-\mu}{(y+1)^2}dy,$$

(λ, μ 爲常數), 則得

$$\sqrt{X}=\frac{1}{(y+1)^2}\sqrt{[a(\lambda y+\mu)^2+2b(y+1)(\lambda y+\mu)+c(y+1)^2][a'(\lambda y+\mu)^2+\cdots]}.$$

若選 λ, μ 使各雙鈎內 y 之係數爲零,則根號下多項式便成 y 之重方形,如是當有

$$a\lambda\mu+b(\lambda+\mu)+c=0,$$
$$a'\lambda\mu+b'(\lambda+\mu)+c'=0$$

$ab'-ba'$ 既異於零,則由此兩方程式得 $\lambda\mu$ 及 $\lambda+\mu$ 之值,而由一二次方程式得 λ 與 μ 者.吾謂此二數值爲判別的實的.蓋

$$\lambda+\mu=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'},\qquad \lambda\mu=\frac{bc'-ab'}{ab'-ba'};$$

欲 λ 與 μ 爲實的判別的,必須而即須

$$\Delta=(ca'-ac')^2-4(bc'-cb')(ab'-ba')>0.$$

夫 $\Delta=0$, 乃

$$ax^2+2bx+c=0,\qquad a'x^2+2b'x+c'=0$$

二方程式有公根之條件,準消去法若 α, β 爲第一式之根 a'.

則原積分爲偽橢圓積分 此爲非欲論者 故 $\Delta=0$ 不必存在

β' 爲第二式之根,則有

$$\Delta=a^2a'^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\beta')(\beta-\alpha')(\beta-\beta').$$

按前所設,吾等由此易知無論 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 爲實或虛,Δ 恆爲正.故恆可作有理的實的變數替換(42),使

$$(43)\qquad \sqrt{X}=\frac{1}{(y+1)^2}\sqrt{(qy^2+r)(q'y^2+r')},$$

末端根號下爲一重方式並 q,r,q',r' 均爲實數.

然則 X 爲任何四次式,吾等恆可有

$$(44)\qquad \int\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{X}}dx=\int\frac{P_1(y)}{Q_1(y)}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(qy^2+r)(q'y^2+r')}},$$

P_1,Q_1 爲 y 之多項式,於是只須命 $y^2=z$ 或 $y^2=\dfrac{1}{z}$ 化之,即可使根號下變爲一三次式.

注意. 由(41)及(43)知由適所述之化法所得最後結果中根號下之三次式,其三根均爲實數.在橢圓函數上,以求得有此特性之結果爲宜.今若所有積分之根號下爲有兩個配虛根之三次式,則吾等可先命 $x=\dfrac{1}{y}$ 使化歸四次式之例,再以上法演之.

例. 試將積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$$

以實的有理的變數替換化之,使新橢圓積分中根號下之多項式爲有實根之三次式.

命 $x^2=y$ 之替換法於此不宜,因將於根號下得 $y(y^2+1)$ 式,

其根有二個爲虛數也.然則宜書

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

命
$$x=\frac{\alpha y+\beta}{y+1}$$

並求定α與β,使

$$(\alpha y+\beta)^2+\sqrt{2}(\alpha y+\beta)(y+1)+(y+1)^2,$$
$$(\alpha y+\beta)^2-\sqrt{2}(\alpha y+\beta)(y+1)+(y+1)^2$$

二式中含y之項消滅.如是應有

$$2\alpha\beta+\sqrt{2}(\alpha+\beta)+2=0,$$
$$2\alpha\beta-\sqrt{2}(\alpha+\beta)+2=0;$$

因得
$$\alpha+\beta=0,\qquad \alpha\beta=-1.$$

吾取$\alpha=1, \beta=-1$,因之

$$x=\frac{y-1}{y+1},\qquad dx=\frac{2dy}{(y+1)^2}.$$

原有積分於是變爲

$$2\int\frac{dy}{\sqrt{[y^2(2+\sqrt{2})+2-\sqrt{2}][y^2(2-\sqrt{2})+2+\sqrt{2}]}}$$

現設$y^2=z$即

$$y=\sqrt{z},\qquad dy=\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}},$$

則得
$$\int\frac{dz}{\sqrt{z[z(2+\sqrt{2})+2-\sqrt{2}][z(2-\sqrt{2})+2+\sqrt{2}]}}.$$

合於所求之形.

103. 勒氏橢圓積分本形(Legendre's normal forms).

勒氏首先對於橢圓積分爲具體之討論.然未化多項式 X 爲三次式,而化之如

$$X=(1-x^2)(1-k^2x^2). \tag{45}$$

此形可由重方形 $(qy^2+r)(q'y^2+r')$ 化出.如於 $q<0,\ r>0,\ q'<0,\ r'>0$ 時[1]若 $\frac{q}{r}>\frac{q'}{r'}$ 則命 $y=x\sqrt{-\frac{r}{q}}$ 化之卽得.於此 $k^2=\frac{q'}{r'}:\frac{q}{r}$ 而 k 介於0與1之間.助變數 k 名爲橢圓積分之模(modulus)

如是吾人可將橢圓積分化歸於下列四個超然積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}},\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}},\quad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}},\quad \int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \tag{46}$$

此四個應可約爲三個,誠然:如設 $x^2=t$,則第二個變爲

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t)\,(1-k^2t)}}$$

而可由基本函數表之.

再者

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int\frac{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}(1-k^2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx$$

$$=\frac{1}{k^2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}-\frac{1}{k^2}\int\frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

[1] 他種情形可化歸於此,見後習題16.

又 $$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int\frac{x\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$+\int\frac{a\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

末端第一積分可由基本函數表之,而第二積分尙可命 $m=-1/a^2$,而書如

$$-\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

如是橢圓積分化歸於次列三超然積分

$$(47)\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\\[2ex] \displaystyle\int\frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\end{cases}$$

依次爲勒氏形之第一二三種橢圓積分.

又命 $x=\sin\phi$ 則變爲

$$(48)\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}, \quad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi,\\[2ex] \displaystyle\int\frac{d\phi}{(1+m\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.\end{cases}$$

104. X爲二次時之情形.

若 X 爲二次多項式並 $f(x,\sqrt{X})$ 爲 x 與 $\sqrt{X}$ 之有理函數,則吾等知積分

$$\int f(x,\sqrt{X})\,dx$$

可如何由基本函數表之.但引用上述之簡化法,手續每較簡便.蓋由是法所設積分將化歸於如次之兩積分:

$$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} \text{ 及 } J_1=\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

命 $x+\frac{b}{a}=y$, 則 I_0 變為

$$I_0=\int\frac{dy}{\sqrt{ay^2+c-\frac{b^2}{a}}}.$$

於是視 a 為正或負,吾等立得其值為:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(y+\sqrt{y^2+\frac{ac-b^2}{a^2}}\right) \text{ 或 } \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc}\sin\frac{y}{\sqrt{\frac{ac-b^2}{-a^2}}}$$

欲求 J_1 可命 $x-\alpha=\frac{1}{t}$, 如是得

$$J_1=\int\frac{dt}{\sqrt{a(\alpha t+1)^2+2bt(\alpha t+1)+ct^2}},$$

形狀與 I_0 同.

105. 對數積分.

設欲化簡超然積分

$$\int e^{mx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx, \tag{49}$$

P 與 Q 為 x 之多項式, m 為一常數. 若析 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 為偏分數, 則此積分成下二種積分之和數

$$I_n=\int x^n e^{mx}\,dx,\ 與\ J_p=\int\frac{e^{mx}}{(x-a)^p}\,dx.$$

積分I_n可以基本函數表之.致 J_p 則可化之如次:準部分求積法有

$$\int\frac{e^{mx}}{(x-a)^p}\,dx=-\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{(x-a)^{p-1}}+\frac{m}{p-1}\int\frac{e^{mx}}{(x-a)^{p-1}}\,dx.$$

於是將 J_p 化歸 J_{p-1}, 連用斯法若干次, 可將 $J_p, J_{p-1}, \cdots\cdots J_2$ 化歸 J_1

$$J_1=\int\frac{e^{mx}}{x-a}\,dx.$$

吾等可再設 $m(x-a)=t$ 化 J_1

$$J_1=\int\frac{e^{ma+t}}{t}\,dt=e^{ma}\int\frac{e^t}{t}\,dt.$$

然則凡形為(49)之積分皆可以基本函數及新超然函數 $\int\frac{e^t}{t}\,dt$ 表之.

若命 $e^t=z$, 則

(50) $$\int\frac{e^t}{t}\,dt=\int\frac{dz}{\log z}.$$

此積分曰對數積分(logarithmic integral)

習題

1. 求下列各積分:

(a) $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$　　(b) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$

(c) $\int\arc\sin x\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$,　　(d) $\int x\tan^2 x\,dx$

(e) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\,dx$　　　(f) $\int \frac{x^2 \arc\tan x\,dx}{1+x^2}$

2. 求有理函數之積分

a. $\int \frac{x^6\,dx}{(x^2-1)^3}$,　　b. $\int \frac{(2x^4+1)\,dx}{x^3(x^2+x+1)}$,　　c. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$,

3. 欲積分
$$\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x-a')^2(x-b')^2}dx, \qquad (a' \neq b')$$
為x之代數函數，於a, b, a', b'間應有若何關係？試求之。

4. 有函數
$$f(x)=\frac{x^2+6(a+1)x+9a+8}{ax^4+6ax^3+(1+9a)x^2+6x+9},$$
試求四多項式M, N, P, Q使
$$f(x)=\frac{M}{P}+\frac{d}{dx}\left(\frac{N}{Q}\right),$$
而P式僅有單根；於是求積分$\int f(x)dx$，並定a使結果為代數式。[Licence, Lille, 1900]

5. 求

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x}}$,　　(b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)^3}}dx$,

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)}}$　　(d) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$,

6. 求積分$\int y\,dx$，x與y間有次列關係之一

a. $x^3-y^3+2y^2-y=0$,

b. $(x^2-a^2)^2-ay^2(2y+3a)=0$,

c. $x^2y^2-xy(x+y)+x^2-y^2=0$.

7. 求積分　$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$,　　$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

8. 命$I_{p,q}=\int t^q(t+1)^p dt$而求立公式
$$(p+q+1)I_{p,q}=t^{q+1}(t+1)^p+pI_{p-1,q},$$
$$(p-1)I_{-p,q}=t^{q+1}-(2+q-p)I_{-p+1,q}.$$
及關於化小指數q之類似公式。

9. 化簡 $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $J_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$.

10. 求公式

$$\int\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}+C,$$

$$\int\sin^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\sin nx}{n}+C,$$

$$\int\cos^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\cos^n x\sin nx}{n}+C,$$

$$\int\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=-\frac{\cos^n x\cos nx}{n}+C.$$

11. 化簡 $I_n=\int\tan^n x\,dx.$

12. 試引用見於廣義橢圓積分之簡化法以求積分

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2}\,dx$$

13. 求爲橢圓積分 $\int\frac{1-x^2}{(1+x)^2\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

14. 證明若 $b^2=ac$ 則積分

$$I=\int\frac{b-x}{b+x}\,\frac{dx}{\sqrt{x(x+a)(x+c)}}$$

可由基本函數表之.

15. 化次列積分爲橢圓積分

$$\int\frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^6)+bx(1+x^4)+cx^2(1+x^2)+dx^3}}$$

$R(x)$ 表一有理函數.

16. 試於 y^2 及 x^2 間作一線性關係以求化

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\pm(y^2+a^2)(y^2-b^2)}} \text{ 及 } \int\frac{dy}{\sqrt{-(a^2-y^2)(b^2-y)^2}}$$

(a, b 爲實數)爲勒氏形:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

第 五 章

定 積 分

I. 定積分之定義 特性及原函數

定積分之定義在初等微積分上,普通由幾何理明之.吾等知欲積分學有確實之基礎,必須自分析方面立論乃可.以下所述爲黎曼氏(Riemann)定義.此定義雖純爲分析的,但昔之幾何的定義實爲其導線也.

105. 和數 S 與 s.

取 $f(x)$ 爲囿於 $(a.\ b)$ 隔間內之一函數,連續或否.設 $a<b$,而以順小大次序列寫之一行數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ 區分 (a, b) 爲小隔間;命 δ_i 爲 (x_{i-1}, x_i) 隔間之幅,M_i 與 m_i 依次爲 $f(x)$ 在此隔間之高界與低界而作和數

$$S=\Sigma M_i(x_i-x_{i-1})=\Sigma M_i\,\delta_i,$$

$$s=\Sigma m_i(x_i-x_{i-1})=\Sigma m_i\,\delta_i.$$

(內設 $x_0=a,\ x_n=b$).

每分 (a, b) 一次,即得如是之兩和數 S 與 s,而 $S>s$.若 m 爲 $f(x)$ 於 (a, b) 間之低界,則因 $M_i\geqq m$ 可知凡 S 大於 $m(b-a)$,而數集 S 有一低界 I.同理數集 s 有一高界 I',吾往證 $I\geqq I'$.欲明此

理,只須證:

由任意二種分隔間法而得之大小和數 S, s 及 $S' s'$ 合於不等式 $s<S'$ 與 $s'<S$.

為便解說計,請先明次義: 若區分隔間 (a, b) 如

$$a, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, b,$$

繼更區分之,如

$$a, x'_1, x'_2, \cdots\cdots, x'_{h-1} x_1, x'_{h+1} \cdots\cdots, x'_{k-1} x_2, x'_{k-1} \cdots\cdots, x'_{l-1}, b,$$

則吾等稱後之區分,繼承前者. 命 S, s 與 Σ, σ 依次為關於此兩區分之大小和數;吾等易知 $\Sigma \leqq S$ 與 $\sigma \geqq s$. 蓋命 M'_1, m'_1, 依次為 $f(x)$ 在 (a, x'_1) 間之高低界, M'_2, m'_2 為其在 (x'_1, x'_2) 間者, $\cdots\cdots$, M'_h 為其在 (x'_{h-1}, x_1) 間者,則 Σ 和數中來自 (a, x_1) 之部分為

$$M'_1(x'_1-a)+M'_2(x'_2-x'_1)+\cdots\cdots+M'_h(x_1-x'_{h-1}),$$

而顯然 $\leqq M_1(x_1-a)$. 仿之 Σ 來自 (x_1, x_2) 之部分 $\leqq M_2(x_2-x_1)$, 推之可見 $\Sigma \leqq S$. 同法可證 $\sigma \geqq s$.

現取任意二種區分論之. 命 S, s 及 S', s' 為所得和數. 若取此兩區分之諸分點為一種分點,則得繼承前二者之一區分. 於是命 Σ, σ 為其相關和數,則

$$\Sigma \leqq S, \qquad \sigma \geqq s$$

$$\Sigma \leqq S', \qquad \sigma \geqq s',$$

因 $\Sigma > \sigma$ 可見 $s' < S$, $s < S'$, 明所欲證.

106. 達爾補氏 (Darboux) 定理.

當 n 無限增大以使 $\delta_i=x_i-x_{i-1}$ 趨於零，則 S 與 s 依次趨於 I 與 I' (1)

取 S 證之：I 既爲諸和數 S 之低界，則可得一種分點

$$a<a_1<a_2<\cdots<a_{p-1}<b$$

使其相應大和數 $\Sigma<I+\frac{\varepsilon}{2}$. 今取小於

$$a_1-a,\quad a_2-a_1,\cdots\cdots,\quad b-a_{p-1}$$

各差數之一正數 η，並一行分點

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

使 $x_i-x_{i-1}<\eta$；命 S 爲其相應大和數. 吾往證若 η 小之至，則 $S<I+\varepsilon$.

試按大小順序列 x_i 與 a_k 而以爲 (a,b) 間分點；此區分繼承於前二者，若 S' 爲其相應大和數，則有 $S'\leqq S$, $S'\leqq\Sigma$；因之 $S'<I+\frac{\varepsilon}{2}$. 試求 $S-S'$ 之一大限.

察 (x_{i-1},x_i) 等小隔間或含 $a_1, a_2,\cdots\cdots a_{p-1}$ 之一點，或無.其含之者爲數至多,不過 $p-1$ 個. 故可書

至多不過.

$$S-S'=\Sigma[M(x_{i-1},x_i)(x_i-x_{i-1})$$
$$-M(x_{i-1},a_k)(a_k-x_{i-1})-M(a_k,x_i)(x_i-a_k)],$$

式中 $M(x',x'')$ 表 $f(x)$ 於 (x',x'') 隔間內之高界，Σ 包括含 a 之各 (x_{i-1},x_i) 隔間. 今命 H 爲 $|f(x)|$ 在 (a,b) 隔間內之高界，則吾等顯有 $S-S'<2(p-1)H\eta$；因可寫

(1) 達氏於論文 M moire sur les fonctions discontinues (Annales de l'Ecole normale, 1875) 中，曾將黎氏之定積分學說重加討論，使所立定義更臻確切.

$$S-S'=\Sigma[M(x_{i-1},x_i)-M(x_{i-1},a_k)](a_k-x_{i-1})$$
$$+\Sigma[M(x_{i-1},x_i)-M(a_k,x_i)](x_i-a_k)$$

此二式係有一為0. 其餘 [illegible] 式 $\leqq \Sigma(p-1)\cdot 2H\cdot\eta$

也. 於是尤有

$$S<I+\frac{\varepsilon}{2}+2(p-I)H\eta$$

若 $\eta<\dfrac{\varepsilon}{4(p-1)H}$, 則 $S<I+\varepsilon$, 即明欲證.

定義. 達氏稱 I 為 $f(x)$ 在 (a,b) 隔間之高積分 (upper integral) 而 I' 為其低積分 (lower integral), 依次由符號

$$\int_a^{-b} f(x)\,dx \quad 與 \quad \int_{-a}^{b} f(x)\,dx$$

表之.

107. 可積函數 (Integrable functions).

圍於 (a,b) 間之函數 $f(x)$, 若其 $I=I'$ 則按黎氏意稱為可積於是間.

吾等可注意若 $f(x)$ 於 (a,b) 間為可積者,則其 $S-s$ 必以零為限;反之亦然. 因 $S-s\to I-I'$ 也. 據此定義可證下列諸定理:

I. 凡連續函數為可積者. 證:命 ω 為 $f(x)$ 在各小隔間內界距之一大限,則有 $S-s\leqq(b-a)\omega$.

按20節定理 A, 吾人可分 (a,b) 為甚小隔間,使函數在每間內之界距均小於 $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 是則取 $\omega=\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, 即見 $S-s$ 將小於 ε.

II. 凡單調函數為可積者. 譬以增函數 $f(x)$ 論之. 對於 $(a,x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n-1},b)$ 區分,吾等有

$$f(a)\leqq f(x_1)\leqq f(x_2)\leqq\cdots\cdots\leqq f(x_{n-1})\leqq f(b),$$

$$S=\Sigma f(x_i)\delta_i,$$

$$s=\Sigma f(x_{i-1})\delta_i.$$

若諸差數 δ_i 盡小於 η, 則

$$S-s<\eta[f(b)-f(a)];$$

由是只須 $\eta<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, 卽有 $S-s<\varepsilon$ 矣.

III. 命 $a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$ 爲 a 與 b 間之一行增進數;若囿函數 $f(x)$ 在 $(a, a_1), (a_1, a_2), \cdots\cdots, (a_p b)$ 之每隔間爲可積者,則在 (a, b) 亦爲可積者. 蓋區分每小隔間 (a_{i-1}, a_i) 以使其相當大小和數之差 $S-s$ 各小於 ε, 則對於 (a, b) 之相當差數小於 $p\varepsilon$.

IV. 在一隔間內具有若干間斷點之囿函數,苟諸間斷點可以一定個數之隔間範圍之,且諸隔間之和又小於任與正數,則函數爲可積者. 證. 命 ε 爲任一正數, H 爲 $|f(x)|$ 之一大限,若令範圍間斷點之隔間之和小於 $\frac{\varepsilon}{4H}$, 則 $S-s$ 中來自此諸隔間之部分顯然小於 $\frac{\varepsilon}{2}$, 又在其餘隔間 $f(x)$ 爲連續,吾人可區分之,使 $S-s$ 相關之部分小於 $\frac{\varepsilon}{2}$, 然則 $S-s<\varepsilon$. 特別言之,囿函數於 (a, b) 內只具一定數之間斷點,則在此隔爲可積者.

V. 若 $f(x)$ 爲可積函數, 則 $Cf(x)$ 亦然, C 爲任何常數. 由定義卽明.

VI. 若 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 二函數爲可積者,則其和 $f_1(x)+f_2(x)$ 亦然. 命 $S, s, S', s', \Sigma, \sigma$ 依次爲此三函數關於同隔間之某種區分之數,易明 $\Sigma-\sigma=S-s+S'-s'$.

特別言之,囿變函數爲可積者.因可以二單調函數表之也.

VII. 二可積函數之乘積爲可積者. 證:先設 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 爲正;命 $M_i, m_i, M'_i, m'_i, M''_i, m''_i$, 爲 $f_1(x), f_2(x)$, 及 $f_1(x)\times f_2(x)$ 三函數在 (x_{i-1}, x_i) 之高低界,又 S, s, S', s', S'', s'' 爲其對於 (a, b) 之一種區分之和數,則吾人顯有 $M''_i\leqq M_iM'_i$ 與 $m''_i\geqq m_im'_i$; 因之

$$M''_i-m''_i\leqq M_iM'_i-m_im'_i=M_i(M'_i-m'_i)+m'_i(M_i-m_i).$$

於是尤有

$$M''_i-m''_i\leqq M(M'_i-m'_i)+M'(M_i-m_i),$$

M 與 M' 爲 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 在 (a, b) 內之高界,以 x_i-x_{i-1} 乘此不等式而舉諸同類式加之,得

$$S''-s''<M(S'-s')+M'(S-s).$$

然則 $S''-s''$ 趨於零.

今若 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 之號爲任意者,則恆可各加以常數 C_1, C_2 使 $f_1(x)+C_1$, $f_2(x)+C_2$ 均爲正,而有

$$[f_1(x)+C_1][f_2(x)+C_2]=f_1(x)f_2(x)+C_1f_2(x)+C_2f_1(x). \quad C_1C_2$$

顯見 $f_1(x)f_2(x)$ 爲可積者.

綜合此上諸定理,可見若 $f_1, f_2,\cdots\cdots f_p$ 爲可積函數,則凡 $f_1, f_2,\cdots\cdots, f_p$ 之多項式皆爲可積函數.

108. 定積分 (Definite integrals)

設 $f(x)$ 爲在 (a, b) 內之可積函數;和數 S 與 s 之公限 I, 即高積分與低積分之公值稱爲 $f(x)$ 在 (a, b) 隔間之定積分而

表之如

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

於積分定義中,吾人尙可代 S, s 以更普通之式:設如前分 (a, b) 爲 $a, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{i-1}, x_i \cdots\cdots, x_{n-1} b$

而於每小隔間 (x_{i-1}, x_i) 內任取一數 ξ_i, 則和數:

(2) $$\Sigma f(\xi_i)\delta_i$$

顯然介於 S 與 s 間,若函數爲可積者,則此和數亦必以 I 爲限.乘積 $f(\xi_i)\delta_i$ 稱爲積分之一元素 (element).

更進一層,若於每小隔間繫一數 ζ_i, 而設諸 ζ_i 隨諸 δ_i 一致趨於零,則和數

$$T = \Sigma[f(x_{i-1}) + \zeta_i]\delta_i$$

亦以 $\int_a^b f(x)\,dx$ 爲極限.蓋按所設可取正數 η 使 $|\delta_i| < \eta$ 牽涉 $|\zeta_i| < \varepsilon$, 而 ε 與 i 無關;若吾等取 η 甚小,使同時有

$$\left|\Sigma f(x_i)\delta_i - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

則書 $$T - \int_a^b f(x)\,dx = \left[\Sigma f(x_{i-1})\delta_i - \int_a^b f(x)\,dx\right] + \Sigma\zeta_i\delta_i,$$

卽見 $$\left|T - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon + \varepsilon(b-a)$$

矣.

例. 求和數 $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n-1}$ 於 $n \to \infty$ 時之限.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}};$$

設函數 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 並取隔間 $(0,1)$ 而分之爲 n 個相等小隔間 (x_{i-1},x_i), 則 S_n 適爲和數

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\delta_i;$$

可知 S_n 於 $n\to\infty$ 時以次之積分爲限

$$S=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

109. 定積分之特性.

前設 $a<b$, 今若易 b 爲 a, 則 x_i-x_{i-1} 諸差數號皆與前相反; 因之 S 與 s 亦改號, 是則

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

又
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

蓋若 c 位於 a 與 b 間, 此公式顯然真確. 反之, 如 b 介於 a 與 c 間, 則只須函數於 (a,c) 內爲可積者, 斯式亦合. 蓋

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx$$

也. 推之有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx+\cdots\cdots+\int_e^b f(x)\,dx.$$

再若 $f(x)=A\phi(x)+B\psi(x)$, 而 A 與 B 爲常數, 則

$$\int_a^b f(x)\,dx = A\int_a^b \phi(x)\,dx + B\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

推之,於任若干項之和亦然.

110. 第一中值公式 (First law of the mean).

請先注意次理:設有 $f(x), \phi(x)$ 二函數皆於 (a, b) 內為可積者,並 $f(x) \leqq \phi(x)$; 若 $a < b$, 則 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之任一元素至大等於 $\int_a^b \phi(x)\,dx$ 之相當元素,因之

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b \phi(x)\,dx.$$

若二函數為連續者,則欲此積分相等,必須常有 $f(x) = \phi(x)$; 若設 $b < a$, 則上之不等式當反向.

今設欲求積分之函數為 $f(x)\phi(x)$, 而 $\phi(x)$ 保存一定之號. 嘗就 $a < b$, $\phi(x) > 0$ 論之. 命 M, m 為 $f(x)$ 在 (a, b) 之高低界,則由不等式

$$m \leqq f(x) \leqq M$$

得

$$m\phi(x) \leqq f(x)\phi(x) \leqq M\phi(x),$$

而因之有

$$m\int_a^b \phi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\phi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \phi(x)\,dx.$$

於是得

$$\int_a^b \overset{f}{\psi}(x)\phi(x)\,dx = \mu\int_a^b \phi(x)\,dx. \tag{4}$$

μ 為介於 M 與 m 間之一數是為第一中值公式

此式無論 a, b 若何皆可,只須 $\phi(x)$ 有定號. 若 $f(x)$ 爲連續則有 (a, b) 內之一值 ξ 使 $f(\xi)=\mu$ 而公式可書作

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \phi(x)\,dx. \tag{5}$$

特別言之,若設 $\phi(x)=1$, 則按定義有 $\int_b^a dx = b-a$. 而中值公式簡化爲

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi). \tag{6}$$

111. 第二中值公式 (Second law of the mean).

波氏 (Bonnet) 根據下引得之.

亞貝爾氏引 (Abel's Lemma). 命 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_p$ 爲一行漸減之正數, 並 $u_0, u_1, \cdots\cdots, u_p$ 爲一行任意正負數, 均爲 $p+1$ 個; 若和數:

$$s_0 = u_0,\quad s_1 = u_0 + u_1, \cdots\cdots,\quad s_p = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_p$$

均介於二常數 A 與 B 間, 則和數

$$S = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \cdots\cdots + \varepsilon_p u_p$$

介於 $A\varepsilon_0$ 與 $B\varepsilon_0$ 間.

證: 吾人可寫

$$u_0 = s_0,\ u_1 = s_1 - s_0, \cdots\cdots u_p = s_p - s_{p-1},$$

因之

$$S = s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cdots\cdots + s_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p\varepsilon_p$$

按 $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p$ 諸差數皆爲正, 是代 $s_0, s_1, \cdots\cdots, s_p$ 以其大限 A 當得

$$S<A(\varepsilon_0-\varepsilon_1+\varepsilon_1-\varepsilon_2+\cdots\cdots+\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p+\varepsilon_p)=A\varepsilon_0.$$

同理有 $S<B\varepsilon_0$.

歸入本題設 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 爲二可積函數,其中 $\phi(x)$ 恆爲正,且當 x 自 a 變至 b 時其值逐漸減小,按積分 $I=\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$ 可視爲和數:

$$\Sigma f(x_{i-1})\phi(x_{i-1})\delta_i$$

之限,若命 M_i, m_i 爲 $f(x)$ 在 (x_{i-1},x_i) 之高低界,則此和數介於

$$T=\Sigma M_i\,\phi(x_{i-1})\delta_i$$

與
$$t=\Sigma m_i\,\phi(x_{i-1})\delta_i$$

間.又因 $f(x)$ 爲可積者,差數

$$T-t<\phi(a)\Sigma(M_i-m_i)\delta_i$$

趨於零.則是所設積分爲 T 與 t 之公限;亦卽爲和數 $T'=\Sigma\mu_i\,\phi(x_{i-1})\delta_i$ 之限,式中 μ_i 爲 M_i 與 m_i 間任一數.今準第一中值公式取 μ_i 合於

$$\mu_i\,\delta_i=\mu_i(x_i-x_{i-1})=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,dx.$$

按所設 $\phi(a),\phi(x_1),\cdots\cdots$ 爲一行逐漸減小之正數,又 c 爲 (a,b) 間之任一點時積分 $\int_a^c f(x)\,dx$ 顯爲 c 之連續函數.故若命 A 與 B 爲此積分於 c 自 a 變至 b 時之極小與極大,則準亞氏引知和數 T' 介於 $A\phi(a)$ 與 $B\phi(a)$ 之間而有公式

$$(7)\qquad \int_a^b f(x)\phi(x)\,dx=\phi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx \qquad (a<\xi<b),$$

是爲第二中值公式.

若函數 $\phi(x)$ 為減函數，但於 a 與 b 間不恆為正，則命 $\phi(x)=\phi(b)+\psi(x)$，函數 $\psi(x)$ 即為正的遞減的．而有

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx=[\phi(a)-\phi(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

於是得較普通之公式

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx=\int_a^b f(x)\phi(b)\,dx+[\phi(a)-\phi(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx,$$

或

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx=\phi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\phi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

於 $\phi(x)$ 為增函數時，亦有類似之公式．

112. 原函數 (Primitive functions).

於此吾等可解答第四章所言之問題矣．設積分限之一譬如 a 為常數，而他限為變數 x，則積分為此限之函數．而吾人可書

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

或直書作 $\int_a^x f(x)\,dx$．$F(x)$ 顯然為 x 之連續函數．吾謂若 $f(x)$ 為連續，則 $F(x)$ 以 $f(x)$ 為紀數，請證之：

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

準中值公式(6)有

$$F(x+h)-F(x)=hf(\xi),$$

ξ 介於 x 與 $x+h$ 間，當 h 趨於零時，$f(\xi)$ 以 $f(x)$ 為限．然則 $F(x)$

若f(x)為不連續，則F(x)不見得以f(x)為紀數

以 $f(x)$ 爲紀數,而定理以明.

其他同以 $f(x)$ 爲紀數之函數,則加一常數 C 於 $F(x)$ 得之.於是有定積分與無定積分間之關係,如

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(x)\,dx+C.$$

反之,若任由一法得 $F(x)$,則可書

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)+C.$$

欲定 C,只須注意等式左端於 $x=a$ 爲零.然則 $C=-F(a)$,於是得

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^x. \tag{9}$$

爲求定積分之基本公式.

注意 I. 公式(9)乃設 $f(x)$ 爲連續而得.若引用時,不注意及此,可得無理之結果.例如於 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 得

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

等式之左端只能於 a 與 b 同號時有意義,而其右端則恆有定值.

注意 II. 於(9)式猶須注意者.若原函數有數支派之值,則宜擇其適當之支派用之.如於 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,按(9)有

$$\int_a^b \frac{a\,dx}{1+x^2}=\operatorname{arc}\tan b-\operatorname{arc}\tan a.$$

左端有一確當之意;而右端則有無窮個之值.但此齟齬可以

免除,只須取

$$F(x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

論之.函數在任何隔間爲連續,而於 $x=0$ 爲零.若以 arc tan x 表 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $+\frac{\pi}{2}$ 間之弧,則此二函數有公同之紀數,且皆於 $x=0$ 爲零,而吾人可書

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}-\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc}\tan b-\operatorname{arc}\tan a,$$

其 arc tan 之值含於 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $+\frac{\pi}{2}$ 間.

同理可明

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc}\sin b-\operatorname{arc}\sin a.$$

式中 a, b 之值介於 -1 與 $+1$ 間,並 arc sin 爲 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $+\frac{\pi}{2}$ 之弧.

II. 定積分之幾何應用

113. 平面積定義 (Area of a curve).

欲致用積分於面積,當與面積以一分析的定義,而任意迴線之面積,可由多邊域面積定之,多邊域者,平面上由一迴折線或多數無公點之迴折線所範圍之部分也.其面積定義見於幾何學,今設無重點之平面迴線 C 論之.是線分平面爲內外兩部,其內部成一域 D, 謂 D 有一面積,乃卽認可次理:

1. 有唯一之數大於 D 內任何多邊形之面積,而小於包

含 D 之任何多邊形面積.

命 P 表含 D 之一多邊域，p 表含於 D 之一多邊域，並 A, a 依次表其面積. 無論 P, p 若何，顯有 $A>a$. 然則 A 數集有一低界 $\boldsymbol{A}$，而 a 數集有一高界 $\boldsymbol{A}'$. 吾人必有 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{A}'$. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$，則 D 域有一面積，或稱爲可求方者(法文 quarrable)而以公值 $\boldsymbol{A}$ 爲 D 之面積. 此顯然爲合於條件(1)之唯一數.

欲 D 域爲可求方者，必須而卽須任與正數 ε，能得含 D 之一多邊域 P，與一含於 D 之一多邊域 p，使二者面積之差 $A-a$ 小於 ε.

此條件爲必需者，由定義而知. 且爲充足者. 因 $A-a>\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$ 也. 由是又知若 D 爲可求方而以 $\boldsymbol{A}$ 爲面積者，則必可得二多邊域 P, p 使 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}-a$ 各小於 ε，前之條件尙可述之如下：

欲 D 爲可平方者，必須而卽須其周線 C 可含於面積小於任何數之一多邊域內.

蓋凡包含 C 之多邊域可視爲含 D 之一域與含於 D 之一域之差也

連 C 之二點以位於 D 內之一曲線 C'，則分 D 爲二域 D_1 與 D_2. 若 D_1 與 D_2 爲可求方者，則 D 亦然.

證：命 P_1, p_1 爲二多邊域，一含 D_1 而一含於 D_1；A_1, a_1 爲其面積；又命 P_2, p_2, A_2, a_2 表對於 D_2 之相當件. 由 p_1 與 p_2 合成之多邊域，顯然含於 D；是則 $a_1+a_2<\boldsymbol{A}'$. 仿之 $A_1+A_2>\boldsymbol{A}$. 由是 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'<(A_1-a_1)+(A_2-a_2)$. 而 A_1-a_1 與 A_2-a_2 可小至人之所欲，

故 $A=A'$. 而由不等式 $a_1+a_2<A<A_1+A_2$ 知 D 之面積等於 D_1 與 D_2 者之和,反之若 D 與 D_1 爲可平方者,則 D_2 亦然.蓋可範圍 D 與 D_1 之邊以面積小於任何數之多邊域,因之 D_2 亦然也.故 D_2 爲可平方者.既如此,則準本題前節知 D_2 面積爲 D 者與 D_1 者之差.

推論之,設 D 由多數折線範圍而成.若可分爲數個可求方之域之和或差.則 D 爲可求方者,而其面積等於諸分域之面積之和或差.

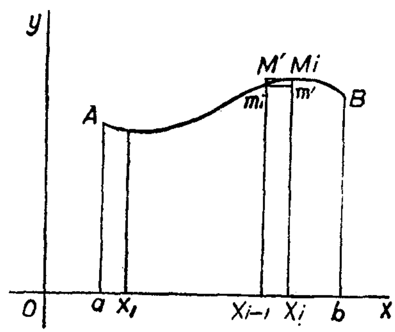
114. 平面積求法.

吾等但就尋常遇見之曲線所限之域論之.此種區域易明其爲可求方者.

1°) 正位標所定面積. 命 $f(x)$ 於 (a, b) 內爲連續,而由一段曲線 AB 表之(圖 12). 吾等暫設 $a<b$, 並在 (a, b) 內 $f(x)>0$, 試以 D 表 $aABb$ 區域而論其面積.取數行:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots$$
$$<x_{n-1}<x_n=b$$

分 (a, b) 隔間而命 m_i 與 M_i 爲 $f(x)$ 於 (x_{n-i}, x_i) 內之極小極大值.試以每 $x_{i-1}x_i$ 線段爲底作 $x_{i-1}m_im'x_i$ 及 $x_{i-1}M'M_ix_i$ 等矩形,則得兩類矩形,前者合成



第 12 圖

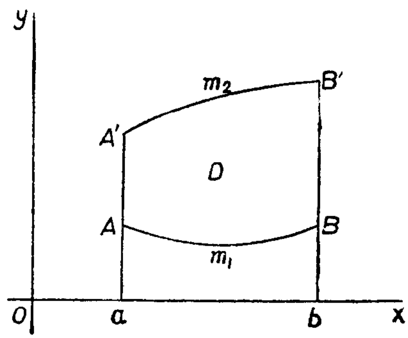
含於 D 之一多邊域，而後者則成含 D 之一多邊域，其面積依次爲：

$$s=\Sigma m_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$S=\Sigma M_i(x_i-x_{i-1})$$

s 之高界與 S 之低界相等，故 D 爲可求方者. 而其面積由定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表之. 於上乃設 $a<b, f(x)>0$. 今若與面積以一相當正負號，則 $aABb$ 面積恆可由 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表之，正負號規定如次：當 $a<b$, $f(x)>0$ 卽區域 D 位於 ox 之上 aA 線之右時，則取正號；若 $a<b, f(x)<0$ 卽區域乃位於 aA 之右，但在 ox 下，則取負號；又於 $a>b$，則取正號或負號，視 $f(x)$ 之爲負或正而定.

繼更取圖 13 所設之域 D 卽 $AA'm_2BB'm_1A$ 論之，Am_1B 與 $A'm_2B'$ 爲位於 aA 與 bB 二直線間不相交之曲線，且與 oy 軸平行之任一線僅割每曲線於一點. 設 $y_1=\theta_1(x)$ 與 $y_2=\theta_2(x)$ 依次爲 Am_1B 與 $A'm_2B'$ 二曲線之方程式；D 爲 Am_1BbaA 與 Am_2BbaA 二域之差. 此二域爲可求方者，可見 D 亦然. 而其面積爲



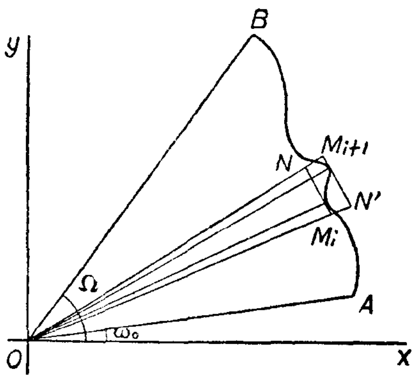
第 13 圖

$$\int_a^b \phi_2(x)\,dx \quad 與 \quad \int_a^b \phi_1(x)\,dx$$

二積分之差.

若經軸與緯軸非正交而成 θ 角,則須以 $\sin\theta$ 乘上式右端.

2°) 極位標所定面積. 取圖 14 所示之域 D 卽 OAB 論之. 命 $\rho=f(\omega)$ 爲 AB 弧之方程式, OA 與 OB 二射徑由 ω_0 與 Ω 二角定之.吾等設此二射徑間之任一射徑僅遇曲線弧 AB 於一點. 今以介於 ω_0 與 Ω 之角 $\omega_1,\ \omega_2,\cdots\cdots\omega_{n-1}$ 所定之射徑分 AOB 角爲小角; 命 OM_i 與 OM_{i+1} 爲二相鄰射徑,其位置由 ω_i 與 ω_{i+1} 角而定. 又命 ρ'_i 與 ρ''_i 爲 $f(\omega)$ 在 (ω_i,ω_{i+1}) 隔間之極小與極大. 於是可作兩類等腰三角形, 一如 OM_iN, 一如 $ON'M_{i+1}$. 前者合成含於 D 域之一多邊域,而後者合成含有 D 域之一多邊域, 其面積以次爲



第 14 圖

$$\frac{1}{2}\Sigma\rho_i'^2\sin(\omega_{i+1}-\omega_i),\quad 與 \quad \frac{1}{2}\Sigma\rho_i''^2\sin(\omega_{i+1}-\omega_i),$$

而同以 $\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega}\rho^2\,d\,\omega$ 爲限.蓋如前一量可書作

$$\frac{1}{2}\Sigma\rho_i'^2(1-\varepsilon)(\omega_{i+1}-\omega_i),$$

ε_i 隨 $(\omega_{i+1}-\omega_i)$ 一致趨於零,然則 D 之面積等於

$$A=\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega}\rho^2\,d\,\omega. \tag{11}$$

$\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$ 爲極位標之面積元素.

注意. 設 $y=f(x)$ 於 (a, b) 間由曲線 $ACC'B$ 表之(圖 15); C 爲一間斷點. 若命 A 表 $aACC'Bba$ 域之面積, 則顯有

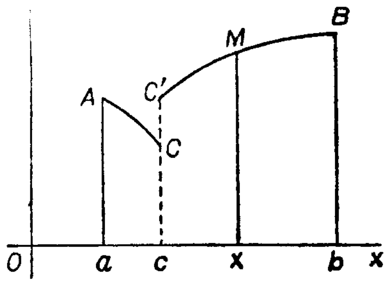
$$A=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx.$$

若令 xM 直線由 aA 變移至 bB 則

$$F(x)=\int_a^X f(x)\,dx$$

表 A 於 aA 與 xM 二線間之部分, 而爲 x 之連續函數, 且於 $f(x)$ 爲連續之點以 $f(x)$ 爲紀數, 但於其間斷點 C 則否. 蓋



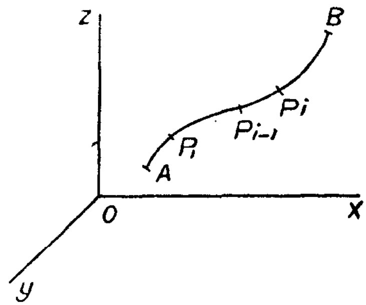
第 15 圖

$$F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(x)\,dx=hf(c+\theta h). \qquad (0<h<1)$$

而 $\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h}$ 因 h 爲正或負以 $f(c+0)$ 或 $f(c-0)$ 爲限也. 此見若 $f(x)$ 僅爲可積而非連續, 則 $F(x)=\int_a^X f(x)\,dx$ 未必以之爲紀數.

115. 曲線弧之長 (Length of a curvilinear arc).

設曲線之一弧 AB (圖 16). 由 A 至 B 依次於其間取 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_{n-1}$ 等點, 而作折線 $AP_1P_2\cdots\cdots P_{n-1}B$. 若此折線之長 l 於 $n\to\infty$ 並各邊均趨於零時有一限 s, 則吾等謂曲線弧爲可度



第 16 圖

長者(法文 recufiable)而以 s 為其長.

設曲線由方程式

(12)　$x=f(t),\ y=\phi(t),\ z=\psi(t)$ 定之, t 於 A 於 B 之值依次為 a, b 吾往證:

若 $f(t), \phi(t), \psi(t)$ 於 (a, t) 內為連續, 並有連績紀數, 則 AB 弧為可度長者.

命 x_i, y_i, z_i 為 P_i 點位標, t_i 為 t 於此點之值, 則折線 $P_{i-1}P_i$ 邊之長為

$$C_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2+(z_i-z_{i-1})^2},$$

準中量公式可書作

$f(t_i)-f(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})f'(\xi_i)$

$$C_i=(t_i-t_{i-1})\sqrt{f'^2(\tau_i)+\phi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i'')},$$

$\tau_i, \tau_i', \tau_i''$ 為 t_{i-1} 與 t_i 間之數. 若 $\overset{t}{x}_i-\overset{t}{x}_{i-1}$ 小之至, 則差數

$$\Delta=\sqrt{f'^2(\tau_i)+\phi'^2(\tau_i')+\psi^2(\tau_i'')}-\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\phi'^2(t_{i-1})+\psi'^2(t_{i-1})}$$

$$=\frac{[f'(\tau_i)+f(t_{i-1})][f'(\tau_i)-f'(t_{i-1})]+\cdots\cdots}{\sqrt{f'^2(\tau_i)+\phi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i'')}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\phi'^2(t_{i-1})+\psi'^2(t_{i-1})}};$$

之絕對值可至小而注意

$$|f'(\tau_i)|+|f'(t_{i-1})|\leqq\sqrt{f'^2(\tau_i)+\cdots\cdots}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\cdots\cdots}$$

因之

$$\left|\frac{f'(\tau_i)+f'(t_{i-1})}{\sqrt{f'^2(\tau_i)+\cdots\cdots}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\cdots\cdots}}\right|\leqq 1,$$

則有

$$|\Delta| \leqq |f'(\tau_i)-f'(t_{i-1})| + |\phi'(\tau_i')-\phi'(\tau_{i-1})| + |\psi'(\tau_i'')-\psi'(t_{i-1})|.$$

夫 $f'(t), \phi'(t), \psi'(t)$ 均設爲連續函數,是可得一正數 η, 使 $t_i-t_{i-1}<\eta$ 時,上式右端每項小於$\frac{\varepsilon}{3}$; 因之 $|\Delta|<\varepsilon$, 於是吾等可書

$$C_i=(t_i-t_{i-1})[\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\phi'^2(t_{i-1})+\psi'^2(t_{i-1})}+\varepsilon_i],$$

ε_i 絕對小於 ε, 而隨 t_i-t_{i-1} 一致趨於零. 因之折線長 $L=\Sigma C_i$ 以積分

(13) $$s=\int_a^b \sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)+\phi'^2(t)}\,dt$$

爲限.

視 B 爲可變移之點而代 b 以 t, 則有

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{f'(t)+\phi'(t)+\psi'^2(t)}.$$

而得公式

(14) $$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

欲換爲圓柱位標,只須設

$$x=r\cos\psi,\qquad y=r\sin\psi,\qquad z=z.$$

若是 dx^2+dy^2 變爲 $dr^2+r^2d\psi^2$, 而公式(14)變爲

(15) $$ds=dr^2+r^2d\psi+dz^2.$$

又由圓柱位標換爲極位標,只須命

$$r=\rho\sin\theta\qquad z=\rho\cos\theta$$

而公式(15)變爲

(16) $$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta\,d\psi^2.$$

定理. 無窮小弧與所含弦爲相當無窮小.

證:設 M_0M_1 弧其兩端與 t_0, t_1 參變數相應$(t_0<t_1)$,是弧等於

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

準中量公式

$$s=(t_1-t_0)\sqrt{f'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)}$$

θ 介於 t_0 與 t_1 間;又於 M_0M_1 弦 C 有

$$c=(t_1-t_0)\sqrt{f'^2(\tau)+\phi'^2(\tau')+\psi'^2(\tau'')}$$

τ, τ', τ'', 三數亦均介於 t_0 與 t_1 間. 如前所論, 可知此呈根號之二量, 其差可小於 ε, 只須 $f(t), \phi'(t)$ 與 $\psi'(t)$ 三函數之界距小於 $\frac{\varepsilon}{2}$ 卽可. 然則

$$s-C<\varepsilon(t_1-t_0),$$

或
$$1-\frac{C}{s}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{f'^2(\theta)+\phi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)}}.$$

若 M_0M_1 弧變爲無窮小, 則 t_1-t_0 趨於零, 而 ε 亦然. 因之 $1-\frac{C}{s}$ 趨於零, 卽明欲證.

例. 求輪轉線(cycloid)

$$x=R(u-\sin u) \qquad y=R(1-\cos u)$$

之弧長, 於此有

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=a\sqrt{(1-\cos u)^2+\sin^2 u}\,du.$$

化之, 得

$$ds=2a\sin\frac{u}{2}du.$$

如欲求線弧一鈎之全長, 只須令 u 由 0 變至 2π, 而得

$$s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{u}{2}du=4a\Big[-\cos\frac{u}{2}\Big]_0^{2\pi}=8a.$$

116. 若爾當(Jordan)氏定理.

上節所述曲線可度長之條件僅爲充足的而非必要的;在尋常應用問題中,此條件大都滿足.然理論上自以得一必要且充足之條件爲可貴.若氏定理即確定如是之條件也.其詞爲:

欲方程式(12)所表曲線之弧 AB 爲可度長者,必須而即須 $f(t)$, $\phi(t)$ 與 $\psi(t)$ 於 (a,b) 內爲連續而囿變函數.

證:內接於 AB 曲線弧之折線 $AP_1P_2\cdots\cdots P_{n-1}B$ 其長爲

$$l=\Sigma\sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2+[\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}.$$

若命 $t_i-t_{i-1}\to 0$ 而 $n\to\infty$ 時 l 有一定限 s, 則 l 爲囿的,且因 $\Sigma|f(t_i)-f(t_{i-1})|<l$, 可知 $f(t)$ 爲囿變函數;同理 $\phi(t)$ 與 $\psi(t)$ 亦然.故所云條件爲必要者.

現求證條件爲充足者.吾等顯有

$$l\leqq\Sigma|f(t_i)-f(t_{i-1})|+\Sigma|\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})|+\Sigma|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|.$$

既設 $f(t)$, $\phi(t)$ 及 $\psi(t)$ 爲囿變函數,則一切內接折線之長 l 成一囿集.命 s 爲其高界,吾等不難用106節證 $\underline{S}\to S$ 之法證明於各差數 $t_i-t_{i-1}\to 0$ 時 l 以 s 爲限.蓋任與正數 ε, 恆可得一數行

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots\cdots<a_p=b$$

使所定內接折線之長 λ 大於 $s-\frac{\varepsilon}{2}$. 繼設任意數行

(з不定义)

$$a=t^0<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n=b$$

使隔間 t_i-t_{i-1} 概小於正數 η,而 η 又小於 $a_1-a, a_2-a_1,\cdots\cdots$, $b-a_{p-1}$ 諸差數中之最小者.命 l 爲所定內接折線之長;於是取 a_k 及 t_i 諸數依增進次序列爲一行,而命 l' 表所定內接折線之長. l' 當 $\geqq l$ 與 $\geqq\lambda$, 因之 $l'>s-\frac{\varepsilon}{2}$. 今注意多邊線 l' 之異於 l 者,乃 l 之一邊可由與此邊成一三角形之二線段代之;如 (t_{i-1},t_i) 若含有 a_k, 則 $t_{i-1}t_i$ 邊由 $t_{i-1}a_k$ 及 a_kt_i 二邊代之. l 如是之邊至多有 $p-1$ 個. f,ϕ,ψ 既爲連續,吾等可取 η 小之至,使 $|t_i-t_{i-1}|<\eta$ 牽涉

$$\sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2+[\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})]^2+\cdots\cdots}<\frac{\varepsilon}{4(p-1)}.$$

於是 $l'-l<\frac{\varepsilon}{2}$, 而準 $l'>\lambda-\frac{\varepsilon}{2}$ 卽見 $\lambda-l<\varepsilon$, 明所欲證.

117. 定向餘弦.

於討論曲線,吾人往往取弧長 s 爲自變數;若是則於線上當定一向爲弧之正向,取一點 A 爲弧之原點.任一弧 AM 之長 s 爲正或負,視自 A 至 M 之向爲正或負而異.今於 M 點引曲線之半切線 MT, 使 MT 之向與弧之正向同,而命 α,β,γ 爲 MT 與 ox, oy, oz 所成之角,則有

$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\pm\frac{1}{ds}.$$

欲知正負號之棄取,設 MT 與 ox 成一銳角,若是則 x 與 s 同時增大,應取正號.今如 α 爲鈍角,則當 s 增時, x 減小; $\frac{dx}{ds}$ 爲負,仍

應取正號.然無論如何.恆有

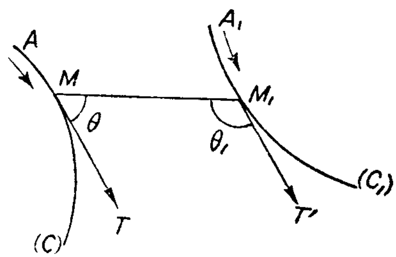
$$(17)\qquad \cos\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\qquad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

118. 線段之變移.

設直線段 MM_1 其端作二曲線 C 與 C_1,於此線上依次取原點 A 與 A_1,並一正向;命

$s=\widehat{AM},\ s_1=\widehat{A_1M_1},\ l=\overline{MM},\ \theta=(MM_1,\ MT),\ \theta_1=(M_1M,\ M_1T_1)$, 而往求 $\theta,\theta_1,ds,ds_1,dl$ 間之一關係.

命 x,y,z 與 x_1,y_1,z_1 依次爲 M 與 M_1 之位標;α,β,γ 爲 MT 與位標軸所成角,並 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 爲 M_1T_1 者,則有



第 17 圖

$$l^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2.$$

由是得

$$ldl=(x-x_1)(dx-dx_1)+(y-y_1)(dy-dy_1)+(z-z_1)(dz-dz_1).$$

準公式(17)可變作

$$dl=\left(\frac{x-x_1}{l}\cos\alpha+\frac{y-y_1}{l}\cos\beta+\frac{z-z_1}{l}\cos\gamma\right)ds$$

$$+\left(\frac{x_1-x}{l}\cos\alpha+\frac{y_1-y}{l}\cos\beta_1+\frac{z_1-z}{l}\cos\gamma\right)ds_1$$

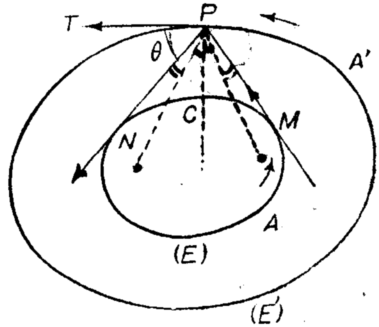
但 $\frac{x-x_1}{l},\frac{y-y_1}{l},\frac{z-z_1}{l}$ 爲 M_1M 之定向於弦,而 ds 之係數爲 $-\cos\theta$

同理 ds_1 之係數爲 $-\cos\theta_1$..於是有關係

$$(18)\qquad dl=-ds\cos\theta-ds_1\cos\theta_1.$$

格氏 (Graves) 定理. 設 E 與 E' 為同焦點之二橢圓. 若由外形 E' 上一點 P 引內形 E 之二切線 PM 與 PN, 則當 P 移動於 E' 上時, 差數 $PM+PN-\widehat{MN}$ 不變. 參閱 A. Cockshott F.B Walters 著 幾何圓錐曲線論、橢圓章 P.90. §.87.

證: 設



第 18 圖

$$s=AM,\ s'=AN,\ \sigma=A'P,$$

$$l=MP,\quad l'=NP.$$

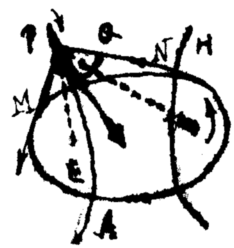
又若命 $\theta=(PN, PT)$ 角, 則由幾何理知 (PM, PT) 角等於 $\pi-\theta$; 於是據公式(18) 有

$$dl=-ds+d\sigma\cos\theta,$$

$$dl'=ds'-d\sigma\cos\theta;$$

相加得

$$d(l+l')=d(s'-s)=d\,\widehat{MON},$$



即明欲證.

同法可證:

沙氏 (Chasles) 定理. 設一橢圓 E 與同焦點之一雙弧線 H; 命 A 表其交點之一而 P 為過 A 點之弧上之一點. 若自 P 引二切線 PM 及 PN 於 E, 則 $\widehat{AM}-\widehat{AN}=\widehat{PM}-\widehat{PN}$

III. 定積分之求法

定積分通常由10節基本公式求之, 即係先求無定積分. 然有時以直接用次述之法為便.

119. 變數更換法.

設 $f(x)$ 爲 (x) 於 (a, b) 間之連續函數; 若命 $x=\phi(t)$, 而設 1°, $\phi(t)$ 於 t 自 α 變至 β 時順同一方向由 a 連續變至 b; 2°, $\phi(t)$ 於 (α, β) 間有連續紀數 $\phi'(t)$, 則 $f[\phi(t)]$ 於 (α, β) 間亦連續, 而吾等有公式

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt. \tag{19}$$

證: 設 t 之函數

$$F(t)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\phi(t)} f(x)\,dx \quad 及 \quad \Phi(t)=\int_\alpha^t f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt.$$

吾等立有

$$\frac{d\Phi}{dt}=f[\phi(t)]\phi'(t);$$

並準函數的函數求紀公式, 亦有

$$\frac{dF}{dt}=f[\phi(t)]\phi'(t).$$

然則 F 與 Φ 之差爲一常數. 但於 $t=\alpha$ 二者均爲零; 故相等. 命 $t=\beta$ 便得

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\Phi(t)]\Phi(t)\,dt, \tag{20}$$

卽 (19) 式.

上述條件非盡爲必要者, 若 $\phi(t)$ 爲連續, 而 $f[\phi(t)]$ 與 $\phi'(t)$ 囿於 (α, β) 間, 且有一定個數之間斷點, 則公式 (19) 仍成立. 欲證之, 可分 (α, β) 爲數個隔間, 使每小間有一端爲間斷點, 而其內及他端皆屬連續點. 譬 (τ, τ') 爲如是之一隔間; τ' 爲一間

斷點,則公式

$$\int_{\phi(\tau)}^{\phi(\tau'-\varepsilon)} f(x)\,dx = \int_{\tau}^{\tau'-\varepsilon} f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt$$

無論正數 ε 如何小,均合理.是令 $\varepsilon\to 0$ 亦成立.舉關於各小隔間之類似式加之,卽得公式(20),亦卽(19).

注意. 於 t 或 $\phi(t)$ 或 $\phi'(t)$ 有數個值與 x 或 t 之一值相應時,吾等宜有適當之選擇;否則由上公式可得無理之結果.例有 $\int_{-1}^{+1} dx$. 若設 $x=t^{\frac{3}{2}}$ 而逕用公式(19),則得

$$\int_{-1}^{+1} dx = \frac{3}{2}\int_{1}^{1}\sqrt{t}\,dt = 0.$$

結果顯然不合.其錯由於書 $dx=\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt$ 時,在根號前未擇適當之號也.夫 x 由 -1 增進以達於 $+1$, dx 當為正.是吾等應於 $\sqrt{t}$ 前取 $\pm$ 使 dx 恆為正.按 x 自 -1 變至 0 時, t 乃由 $+1$ 變至 0, 因之 dt 為負,是取

$$dx = -\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt.$$

方可.反之, x 自 0 變至 1 時, t 則由 0 變至 1, 而 dt 為正,應取

$$dx = +\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt.$$

於是正確之關係為

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx = -\int_{1}^{0}\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt + \int_{0}^{1}\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt$$

$$= 3\int_{0}^{1}\sqrt{t}\,dt = \left[2t^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} = 2.$$

120. 部分求積法

設 u, v 爲二函數於 (a, b) 内爲連續,且有連續紀數 u', v',則將關係

$$(uv)' = uv' + vu'$$

之兩端取定積分有

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b uv' dx + \int_a^b vu' \, dx$$

或

(21) $$\int_a^b u \, dv = \Big[uv \Big]_a^b - \int_a^b v \, du,$$

是爲定積分部分求積公式.

推廣之,命 $u', u'', \cdots\cdots, u^{(n+1)}$ 及 $v', v'' \cdots\cdots, v^{(n+1)}$ 依次爲 u 與 v 二函數之諸級紀數,易得公式:

(22) $$\int_a^b uv^{(n+1)} dx = \Big[uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} + \cdots\cdots + (+1)^n u^{(n)} v \Big]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)} v \, dx.$$

121. 泰氏公式.

泰氏公式可據公式(22)命 u 爲 $(b-x)^n$ 及 v 爲 $f(x)$ 求出.蓋

$$\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx = \Big[(b-x)^n f^{(n)}(x) + n(b-x)^{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots\cdots + n!(b-x) f'(x) + n! \, f(x) \Big]_a^b.$$

由是有

(23) $$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

設 $f^{(n+1)}(x)$ 於 (a,b) 間為連續,並注意 $(b-x)^n$ 於其間有定號,則據中值公式

$$\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^b (b-x)^n dx$$

$$=\frac{1}{n+1}(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),(a<\xi<b),$$

以之代於(23),卽得泰氏公式,尾量呈拉氏形.

122. 勒氏多項式(Legendre's polynomials).

變數 x 之 n 次多項式

$$X_n=\frac{1}{2\cdot4\cdots\cdots2n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{24}$$

稱為勒氏多項式,吾等可借公式(22)論其特性之數點:

I. 設 U 為任意之一多項式,其次數 $\leqq n$,則

$$\int_{-1}^{+1} UX_{n+1}\,dx=0.$$

蓋命 $v=(x^2-1)^{n+1}$ 則有

$$v'=2(n+1)(x^2-1)^n x,\ v''=2^2(n+1)n(x^2-1)^{n-1}[(x^2-1)+2nx],\cdots\cdots$$

顯然自 v' 以至 $v^{(n)}$ 均有因數 x^2-1,對於 $x=\pm1$ 為零.於是準公式(22)卽明欲證

II. 反之,若 F 為 $n+1$ 次多項式,且合於

$$\int_{-1}^{+1} UF\,dx=0,$$

而 U 係次數 $\leqq n$ 之一多項式,則 F 為勒氏多項式.蓋命 λ 表任

一常數,有

$$\int_{-1}^{+1} U(F-\lambda X_{n+1})\,dx=0.$$

今定λ使 $F-\lambda X_{n+1}$ 爲 n 次式. U 既可爲任意之一 n 次式,可設其等於 $F-\lambda X_{n+1}$, 而吾等有

$$\int_{-1}^{+1} U^2 dx=\int_{-1}^{+1}(F-\lambda X_{n+1})^2\,dx=0.$$

但正數之和不爲零,是必有

$$F=\lambda X_{n+1},$$

λ爲一常數;明所欲證.

III. 由上可判斷

(25) $$\int_{-1}^{+1} X_n X_p\,dx=0. \qquad (n \neq p).$$

勒氏多項式 X_n 因此關係稱爲正交的 (Orthagonal).

123. $\sin^m x$ 與 $\cos^m x$ 於 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 間的積分;瓦理斯氏公式 (Wallis formula).

命

(26) $$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx,$$

m 爲正整數. 由部分求積法有

$$I_m=\Big[-\sin^{m-1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx;$$

以 $1-\sin^2 x$ 代 $\cos^2 x$, 則得關係

$$I_m=(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m,$$

卽
$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}.$$

於是宜分兩種情況論之:

1°). $m=2n+1$.

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1},\qquad I_{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3},\cdots\cdots,\qquad I_3=\frac{2}{3}I_1.$$

因之得

$$I_{2n+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}I_1.$$

但
$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

是則有公式

(27)
$$I_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}.$$

2°). $m=2n$.

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2},\qquad I_{2n-2}=\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4},\cdots\cdots,\ I_2=\frac{1}{2}I_0.$$

於是注意 $I_0=\frac{\pi}{2}$, 則得公式

(28)
$$I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

關於 $\cos^m x$ 之公式與上同. 蓋命 $x=\frac{\pi}{2}-y$, 則有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^m y\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m y\,dy$$

也.

今取(28)(27)二式相除,則有

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots\cdots2n\cdot2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

吾謂此式前端於 $n\to\infty$ 時以1爲限.蓋吾等顯然有

$$I_{2n}>I_{2n+1}>I_{2n+2},$$

∵ x 在间隔 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内. $\sin^{2n}x>\sin^{2n+1}x>\sin^{2n+2}x$ 故也.

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1$$

也.於是得瓦氏公式

(29) $$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\cdots\cdots.$$

IV. 級數之積分及求積分之差近法

124. 級數之積分

吾等於46節曾論及各項爲 x 之函數之級數於確定之條件下可逐項求微分;今吾等更論其可逐項求積分之情形.

定理. 凡各項爲連續函數之一致斂級數可逐項求積分.

證:命

(30) $$f(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots\cdots$$

爲一致斂於 (a,b) 間之一級數.其各項於其內爲連續.任與正數 ε,吾等可取一正整數 N 使 $n\geqq N$ 牽涉

$$|R_n(x)|=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots\cdots|<\varepsilon.$$

書(30)式如

$$f(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+R_n(x).$$

並設 $v_i=\int_a^b u_i(x)\,dx$, 則有

$$(31)\qquad \int_a^b f(x)\,dx=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n+\int_a^b R_n(x)\,dx$$

此式顯示 $\int_a^b f(x)\,dx$ 與級數 $\sum_{i=0}^{+\infty} v_i$ 前 $n+1$ 項之和之差於 $n\geqq N$ 時絕對小 $\varepsilon(b-a)$; 換言之, 此級數爲收斂, 而以 $\int_a^b f(x)\,dx$ 爲其和, 卽得:

$$(32)\qquad \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b u_0(x)\,dx+\int_a^b u_1(x)\,dx+\cdots\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\cdots\cdots$$

而明所欲證.

此定理倘可述如次:若一連續函數 $f(x,n)$ 一致趨於一限 $f(x)$, 則有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n=\infty}\left[\int_a^b f(x,n)\,dx\right],$$

或

$$(33)\qquad \int_a^b\left[\lim_{n=\infty} f(x,n)\right]dx=\lim_{n=\infty}\left[\int_a^b f(x,n)\,dx\right].$$

卽表示積分號與極限號可互換也.

但 $f(x,n)$ 若非一致趨於 $f(x)$, 則公式(33)可不確, 例設

$$f(x,n)=nxe^{-nx^2},$$

而取 $a=0, b=1$ 論之. 於此 $f(x)=\lim_{n=\infty}[nxe^{-nx^2}]=0$. (33)式之左端爲零, 而其右端則等於

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx\right)=\lim_{n=\infty}\left(-\frac{e^{-nx^2}}{2}\right)_0^1=\lim_{n=\infty}\left(\frac{1-e^{-n}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 1. 吾人有

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots\cdots$$

右端級數在 $(-R,+R)$ 內爲一致收歛而無論 R 若何大,因其項絕對值小於級數

$$1+\frac{R}{2!}+\frac{R^2}{3!}+\cdots\cdots+\frac{R^{n-1}}{n!}+\cdots\cdots$$

之相當項也.然則無論 x 若何,皆可逐項自 0 至 x 求積分,而得

$$\int_0^x \frac{e^x-1}{x}\,dx=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\,\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots.$$

例 2. 橢圓

$$x=a\cos\theta \qquad y=b\sin\theta$$

之周長等於定積分

$$s=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\cdot d\theta,$$

或命 $\phi=\frac{\pi}{2}-\theta$,

$$s=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin\phi}\cdot d\phi,$$

其中 $2a$ 爲橢圓大軸之長,e 爲離心率.此係一橢圓積分,吾等不能以一定個基本函數表之,但吾等不難以一級數表其結果,而自是可求定一差近值.試注意 $e^2\sin^2\phi$ 之值恆介於 0 與 1 間;準二項式公式可書

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}=1-\frac{1}{2}e^2\sin^2\phi-\frac{1}{2\cdot 4}e^4\sin^4\phi-\cdots\cdots$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}e^{2n}\sin^{2n}\phi-\cdots\cdots$$

右端級數其項絕對值小於

$$1+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2\cdot4}e^4+\cdots\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}e^{2n}+\cdots\cdots$$

之相當項,是爲一致收斂.然則可逐項求積分.按

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\phi\,d\phi==\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}\frac{\pi}{2},$$

是有

$$(34)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin\phi}\,d\phi=\frac{\pi}{2}\Big\{1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-\cdots\cdots$$
$$-\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-3)^2}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}\right](2n-1)e^{2n}-\cdots\cdots\Big\}.$$

若 e 甚小,則取前數項卽得積分一甚近之值.

125. 定積分之差近值求法,梯形法.

吾等適見定積分可由級數積分法而得其差近值.但是法不能恆便於用.玆更述他法.於實際問題,吾等可用積分器如 integrators, planimeters 等以得積分之差近值;差近程度雖不高,而手續則甚便捷.此等儀器之構造及應用見於專書,玆不論及.吾欲述者,乃純粹之計算法.其最簡明者首爲梯形法:

設欲求差近值之積分爲 $\int_a^b f(x)\,dx$.試取

$$a=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

而於曲線 $y=f(x)$ 上取以此等數爲經標之點 $A, M_1, \cdots\cdots, M_{n-1}, B$. 若諸點彼此甚近,則折線 $AM_1M_2\cdots\cdots B$ 與曲線甚相近. 於是吾等可以折線下之面積爲所設積分之差近值,即

$$(35)\qquad (x_1-a)\frac{f(a)+f(x_1)}{2}+(x_2-x_1)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\cdots\cdots.$$

126 插置法 (Interpolation).

試代曲線

$$(C)\qquad y=f(x)$$

以 n 級拋性線

$$(P)\qquad y=\phi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$$

而令 (P) 經過 (C) 上之 $n+1$ 點 $A_0, A_1, \cdots\cdots, A_n$, 其中 A_0 即 A, A_n 即 B.

命 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots\cdots, (x_n, y_n)$ 爲此等點之位標,則多項式 $\phi(x)$ 由拉氏 (Lagrange) 插置公式確定如

$$\phi(x)=y_0X_0+y_1X_1+\cdots\cdots+y_iX_i+\cdots\cdots+y_nX_n,$$

其中

$$X_i=\frac{(x-x_0)\cdots\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots\cdots(x_i-x_n)}$$

爲一 n 次多項式,於 $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots\cdots, x_n$ 等值均等於零,獨於 x_i 等於1. 吾等於是以

$$\int_a^b \phi(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n} y_i\int_a^b X_i\,dx$$

爲所設積分之差近值,而問題變爲求積分

(36) $$I_i=\int_a^b X_i\,dx$$

$$=\int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots\cdots(x_i-x_n)}\,dx$$

其值與 $f(x)$ 無涉,只須已知隔間 (a,b) 並選定中間點 $x_1,\cdots\cdots x_{n-1}$ 便可求出.

127. 柯特氏法 (Cotes method).

於上法中吾等不必就每種特殊情況求 I_i,借一換變數法可將演算一次做就以爲普遍之應用.試設

$$x_0=a+(b-a)\theta_0,\ x_1=a+(b-a)\theta_1,\cdots\cdots,\ x_n=a+(b-a)\theta_n$$

$(\theta_0,\theta_1,\cdots\cdots,\theta_n$ 爲自0增至1之一行數),並命

$$x=a+(b-a)t$$

(37) $$\int_a^b \phi(x)\,dx=(b-a)(k_0y_0+k_1y_1+\cdots\cdots+k_ny_n),$$

其中

(38) $$K_i=\int_0^1 \frac{(t-\theta_0)\cdots\cdots(t-\theta_{i-1})(t-\theta_{i+1})\cdots\cdots(t-\theta_n)}{(\theta_i-\theta_0)\cdots\cdots(\theta_i-\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i+1})\cdots\cdots(\theta_{i-n})}\,dt$$

若無論 $f(x)$ 若何吾等恆按定比分 (a,b) 爲小隔間,則 $\theta_0,\theta_1,\cdots\cdots,\theta_n$ 等數,因之積分 K_i 即均與 $f(x)$ 無涉矣.

柯特氏乃分 (a,b) 爲相等之小隔間.若取 $n=2$,則應取 $\theta_0=0$, $\theta_1=\frac{1}{2}$, $\theta_2=1$ 而積分之差近值爲

(39) $$I=\frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2),$$

若取 $n=3$,則求得

(40) $$I=\frac{b-a}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3),$$

又於 $n=4$, 則

(41) $$I=\frac{b-a}{90}(7y_0+32y_1+12y_2+32y_3+7y_4).$$

128. 辛卜森氏法 (Simpson's method).

辛氏先分 (a,b) 爲 n 等分使問題成爲求 n 個弧梯形;繼引用柯氏法而命 $n=2$ 以求每小梯形之一差近值,然後取此等值之和以爲所設積分之值. 若命 $y'_1, y'_2, \cdots\cdots, y'_n$ 表曲線於 $\frac{x_1+x_2}{2}, \cdots\cdots, \frac{x_{n-1}+b}{2}$ 點之緯標,則

(42) $$I=\frac{(b-a)}{6n}[(y_0+4y'_1+y_1)+(y_1+4y'_2+y_2)+\cdots]$$

$$=\frac{(b-a)}{6n}[y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n+4y'_1+4y'_2+\cdots+4y'_n]$$

習 題

1. 試據積分定義求次列各和數於 $n\to\infty$ 時之限

(a) $\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots\frac{n}{n^2+(n-1)^2}$,

(b) $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$,

2. 將上題推廣而設 $\sum_{p=0}^{n}\phi(p,n)$, 函數 $\phi(p,n)$ 爲對於 p 與 n 之齊次式. 試求此和數於 $n\to\infty$ 時之限. -1級

3. 設一曲線弧 AB 以 $y=f(x)$ 爲方程式, A, B 二點之經標以次爲 a, b. 今分 (a,b) 爲 n 等分,而取曲線弧於諸分點之緯標之算術中數 (Arithmetic mean). 試求此中數於 $n\to\infty$ 時所趨近之限.

4. 將一圓之直徑分爲n等分,而求於積分點之緯標之算術中數所趨近之限.

5. 自橢圓之一焦點引n射徑使相鄰二線所成之角均爲$\frac{2\pi}{n}$,試求諸射徑之算術中量所趨近之限.

6. 證

$$\int_0^{\pi}\frac{x\Phi(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\Phi(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx.$$

7. 據$(1-x)^m$之展式求關係

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{m}=C^1{}_m-\frac{1}{2}C^2{}_m+\frac{1}{3}C^3{}_m-+\cdots\cdots(-1)^{m-1}\frac{1}{m}C^m_m$$

8. 設$f(x)$與$\phi(x)$爲在(a, b)內之二可積函數.求證什瓦慈氏(Schwarz)不等式

$$\left(\int_a^b f\,\phi\,dx\right)^2\leqq\int_a^b f^2\,dx.\int_a^b\phi^2\,dx,$$

此不等式僅可於$\frac{f}{\phi}$爲常數時變爲相等.

吾等可注意積分$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta\phi(x)]^2dx$爲$\alpha, \beta$之一正的二次式以證之.

9. 證積分

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}$$

於正數$a<1$時等於2,而於$a>1$時等於$\frac{2}{a}$.

10. 命$y=\frac{1-x^2}{2(a-x)}$以改變積分

$$I_n=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^n}{(a-x)^{n+1}}dx$$

而示知I_n, I_{n-1}, I_{n-2}間有一線性(Linear)關係並求I_3.

11. 設有二平曲線C, C';吾等使其切線相平行之點(x, y)與(x', y')相應.命p, q爲二常數,則經緯標爲$x_1=px+qx'$, $y_1=py+qy'$之點,則作一曲線C_1;試證於三曲線之弧間有

$$s_1=\pm ps\pm qs'.$$

应改寫为 $S_1=\pm(pS+qS')$.

12. 求拋物線 $y^2=2px$ 及其外展線 (evolute)

$$y^2=\frac{8(x-p)^3}{27p}$$

所範圍之面積.　　答: $\frac{88}{15}p^2\sqrt{2}$.

13. 求曲線 $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$ 與 x 軸及 $x=-1$ 直線所範圍之面積.

答: $\frac{3\pi}{2}$.

14. 直線 $y=x$ 割分橢圓面積爲二部 A 與 B; 試求 $\frac{A}{B}$ 之值.
方程式列於下之

$$x^2+3y^2=6y.$$

答: $\frac{A}{B}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$.

15. 求曲線 $x^4+y^4-a^2xy=0$ 之一圈內之面積.　　答: $\frac{\pi a^2}{8}$.

16. 試求曲線

$$x=a(1+\cos^2 t)\sin t.$$
$$y=a\sin^2 t\cos t$$

答案不甚一致.

之長.　　答: $4a\left[\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right]$.

17. 求次式所表曲線之弧長

$$4(x^2+y^2)-a^2=3a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}.$$

答: $6a$.

18. 試證橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之周長介於 $\pi(a+b)$ 及 $\pi\sqrt{2a^2+2b^2}$ 之間.

19. 求曲線使其弧自原點至 $M(x, y)$ 點之長爲 $s=\sqrt{y^2-a^2}$

答: Catenary.

20. 設過原點之一曲線 C; 於其上取一點 M_1 以 x_1 爲經標,並作其切線 M_1T. 試證限於 C 與 M_1T 及 ox 間之面積等於

$$\frac{1}{2}\int_0^{x_1}y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}dx.$$

第 六 章

定積分意義之推廣

由定積分確定之函數

I. 廣義積分

前章所論係設 $f(x)$ 爲囿函數,並積分限 a, b 爲定數.但此限制時或可以免除,而積分之意義因以推廣.

129. 無窮積分 (Infinite integrals)

設 $f(x)$ 可積於 (a, b) 內,而無論 b 爲何大,則積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 於 $b\to+\infty$ 時有一定限,則吾人稱此定限爲一無窮積分,而以 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 表之.時或吾人亦先設符號 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$,而於 $\int_a^b f(x)\,dx$ 有一限時稱之爲有意義或爲收斂 (convergent) 仿之若 $\int_a^b f(x)\,dx$ 於 $a\to-\infty$ 時有一定限,則由 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ 表之;若於 $a\to-\infty$ 及 $b\to+\infty$ 均有定限,則得無窮積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

若求得 $f(x)$ 之一原函數,則無窮積分有意義否,極易判斷.例有

(1) $$\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{b^{\lambda-1}}-\frac{1}{a^{\lambda-1}}\right),\quad \lambda>0 \text{ 且 } \lambda-1\neq 0.$$

如 $\lambda>1$, 則於 $b\to+\infty$ 時 $b^{1-\lambda}\to 0$, 因之上式右端趨於定限,而有

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}=\frac{1}{(\lambda-1)a^{\lambda-1}}.$$

今若 $\lambda<1$, 則 (1) 式右端趨於 ∞ 而無窮積分無意義. 於 $\lambda=1$ 時,情形亦同. 蓋有

$$\int_a^b\frac{dx}{x}=\log b-\log a$$

也.

130. 收歛條件.

欲 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 爲收歛者,必須且只須任與正數 ε, 能得一至大數 X, 使不等式 $x''>x'>X$ 牽涉不等式

(2) $$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

1° 條件爲必須者. 蓋

$$\int_{x'}^{x''}f(x)\,dx=\int_a^{x''}f(x)\,dx-\int_a^{x'}f(x)\,dx.$$

當 x', x'' 無限增大,右端兩積分有公同之限,是則若 X 大之至,則對於 $x''>x'>X$, 此二積分之差可絕對 $<\varepsilon$.

2° 條件爲充足者. 試命 n 爲一正整數,而設

$$S_n=\int_a^{a+n}f(x)\,dx=\int_a^{a+1}f(x)\,dx+\int_{a+1}^{a+2}f(x)\,dx+\cdots\cdots+\int_{a+n-1}^{a+n}f(x)\,dx,$$

$$S_{n+p}-S_n=\int_a^{a+n+p}f(x)\,dx-\int_a^{a+n}f(x)\,dx=\int_{a+n}^{a+n+p}f(x)\,dx.$$

按所設令 $a+n>X$，則

$$\left|\int_{a+n}^{a+n+p}f(x)\,dx\right|<\varepsilon,\ 即\ \left|S_{n+p}-S_n\right|<\varepsilon.$$

於是準歌氏級數定理，S_n 有一限 S.

今取大於 $a+n$ 之任一數 ξ，可書

$$\left|\int_a^{\xi}f(x)dx-S\right|\leqq\left|\int_a^{a+n}f(x)dx-S\right|+\left|\int_{a+n}^{\xi}f(x)dx\right|.$$

若 X 甚大，則於 $\xi>a+n>X$，上式右端每項均可 $<\frac{\varepsilon}{2}$，而左端因之 $<\varepsilon$；明所欲證.

<u>絕對收斂性</u> (Absolute convergence). 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 爲收斂，則 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$. 亦然. 蓋設 $x''>x'$ 有

$$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)dx\right|\leqq\int_{x'}^{x''}|f(x)|\,dx$$

也. 若是，則 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 稱爲<u>絕對收斂</u>. 當注意者，收斂之無窮積分未必絕對收斂；若然，則稱爲半收斂.

131. 判斷斂性之定則.

無窮積分之收斂性，亦與級數彷彿，不易由普通條件判決之，當有賴於特別法則. 茲舉述重要者於次:

I. <u>比較定則</u> (Comparison test). 設有 $|f(x)|\leqq\phi(x)$，而

$\phi(x)$ 為一正函數;若 $\int_a^{+\infty}\phi(x)\,dx$ 為收斂,則 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 為絕對收斂,理甚顯明.例如 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ 為絕對收斂,因

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^4+1}}\right| \leqq \frac{1}{x^2}$$

而吾等知 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 為收斂也.

II. 若 $f(x)$ 呈 $x^{-\lambda}\phi(x)$ 形,並 $\phi(x)$ 於 x 增進時終為囿函數,則

1°) 於 $\lambda>1$, 積分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 為收斂;

2°) 於 $\lambda\leqq1$. 並對於 $x>X$ 函數 $f(x)$ 有定號,積分亦為收斂.

證:設 $x''>x'>X$ 並與 M 為 $\phi(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 間之低界與高界則準第一中值公式有

$$\int_{x'}^{x''}x^{-\lambda}\phi(x)\,dx=\mu\int_{x'}^{x''}x^{-\lambda}\,dx, \qquad (m<\mu<M). \tag{3}$$

按所設 μ 不為無窮,亦不能為零;若 $\lambda>1$, 則 $\int_a^{+\infty}x^{-\lambda}\,dx$ 收斂,而 $\int_{x'}^{x''}x^{-\lambda}\,dx$ 趨於零.可見所設積分收斂.反之,若 $\lambda\leqq1$, 則取 $x''=x'^2$, 即見 $\int_{x'}^{x''}x^{-\lambda}\,dx$ 隨 x' 趨於無窮,故原設積分非收斂者.

今若 $\lambda\leqq1$, 而於 x 甚大時 $f(x)$ 無定號,則 m 與 M 號必相反.於 (3) 式右端雖知 $\int_{x'}^{x''}x^{-\lambda}\,dx$ 趨於無窮,但 μ 若何不可知,故不能決定.

例如 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{1+x^2}$ 爲收斂. 因取 $\phi(x)=\frac{x^2\cos x}{1+x^2}$, 其絕對值恆小於 1 而 $\lambda=2$ 也. 又如 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$, 則不能由此法則判斷, 因 $m=-1$, $M=1$, $\lambda=1$ 也.

由上所言立可推出次之定則: 若能得一正數 λ 使 $x^\lambda f(x)$ 於 $x\to+\infty$ 時趨於一限 $1\neq 0$, 則 1°), $\lambda>1$ 時, 積分爲收斂. 2°), $\lambda<1$ 時, 積分爲發散. 蓋在此 m, M 皆與 1 同號也.

例如 $f(x)$ 爲一有理分數 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 欲 $\int_a^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 收斂, 則必 $P(x)$ 較 $Q(x)$ 至少低二次.

III. 應用第一中值公式. 適所論者, 尙可推廣而直以中值公式爲判斷之工具. 設 $f(x)=\phi(x)\psi(x)$, 幷設吾等能得一相當大數 X, 使於 $x>X$ 時, $\phi(x)$ 爲囿函數, 而 $\psi(x)$ 恆爲正. 若是有

$$\int_{x'}^{x''}f(x)\,dx=\mu\int_{x'}^{x''}\psi(x)\,dx \qquad (x''>x'>X)$$

μ 爲有窮數. 若 $\int_{x'}^{x''}\psi(x)dx$ 趨於零, 則上式左端亦然, 而 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 爲收斂.

IV. 應用第二中值公式; 査提氏定則 (Chartier's test). 設 $f(x)=\phi(x)\psi(x)$, 並 x 自某大數值 X 增進以 $\to+\infty$ 時, $\psi(x)$ 之值逐漸減小. 引用第二中值公式於 $x''>x'>X$, 則有

$$(4)\qquad \int_{x'}^{x''}\phi(x)\psi(x)\,dx=\psi(x')\int_{x'}^{\xi}\phi(x)\,dx \qquad (x'<\xi<x'')$$

於是若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$, 無論 x', x'' 如何大 $\left|\int_{x'}^{x''}\Phi(x)\,dx\right|$ 恆小於一定數,則上式左端趨於零,而 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 爲收斂.又注意

$$\int_x^{\xi}\Phi(x)\,dx=\int_a^{\xi}\Phi(x)\,dx-\int_a^{x'}\psi(x)\,dx,$$

結果尙可述如次:

設 $\psi(x)$ 於 (x) 自某大數值 X 趨於無窮時漸減以趨於零,而 $\left|\int_a^{x}\Phi(x)\,dx\right|$ 無論 x 如何大恆小於一定數 A,則 $\int_a^{+\infty}\phi(x)\psi(x)\,dx$ 爲收斂.是爲查提氏定則.

例如 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. 取 $\phi(x)=\sin x$, $\psi(x)=\frac{1}{x}$,而注意

$$\left|\int_0^{x}\sin x\,dx\right|<2,$$

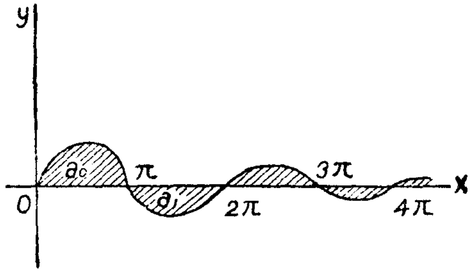
卽知其爲收斂.

V. 化爲級數法.無窮積分之收斂性與級數正同,故有時可借級數以判斷.玆舉

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^n}\,dx, \qquad (0<n\leqq1)$$

爲例以明之,曲綫 $y=\frac{\sin x}{x^n}$ 與正弦曲綫彷彿,纏繞 ox 軸而與之相遇於 $x=0,\ \pi,\ 2\pi,\cdots\cdots,\ p\pi\cdots\cdots$ 點.惟波弧漸往漸平.

命 $a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots\cdots,\ a_p$ 爲弧與 ox 軸所範圍之面積絕對值,則有 $$I=a_0-a_1+a_2-\cdots\cdots+(-1)^p a_p+\cdots\cdots.$$



第 19 圖

試辨此級數於更號級數之條件滿足否.按

$$a_p=\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^n}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(p\pi+x)^n}dx,$$

而 $\frac{|\sin x|}{[(p+1)^{\pi}+x]^n}<\frac{|\sin x|}{(p^{\pi}+x)^n}$. 可知 $a_{p+1}<a_p$, 又 $a_p<\frac{\pi}{(p\pi)^n}$ 於 $p\to\infty$ 時趨於零,條件果滿足,級數爲收斂.因之積分亦然.

於此例圖線 $y=f(x)$ 纏繞 x 軸之波弧漸往漸與是軸貼近,而積分之有意義,似甚顯明.但情形不必恆如此.例如伏氏(Fresnel)積分

$$\int_6^{\infty}\sin x^2\,dx$$

亦可用上法明其爲收斂者.然曲線 $y=\sin x^2$ 無論 x 如何增大恆消長於 -1 與 $+1$ 間,不過其波長則漸減以趨於零.蓋 $\sin x^2$ 於 $x=\sqrt{n\pi}$ 等於零,而其一弧之底長爲

$$\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}$$

於 $n\to\infty$ 時趨於零也.尤有甚焉者:圖線 $y=f(x)$ 之波弧可逐

漸擺開不已，而 $f(x)$ 之無窮積分仍可不失為收斂.

以上所論，均關於積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. 於 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$，情形自亦彷彿. 至於 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. 只須分為兩積分論之.

132. 積分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

此積分於分析上及幾率上甚重要. 茲往明其為收斂，且求其值. 注意 $e^{-x^2}<e^{-x}$ 並

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^{+\infty}=1,$$

立知此積分為收斂. 欲求其值，先證不等式

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n}. \tag{5}$$

函數 $(1+u)e^{-u}$ 於 u 由 $-\infty$ 變至 $+\infty$ 時，由 $-\infty$ 增至 1；繼自 1 漸減以趨於 0，而以 1 為極大. 故若代 u 以 $\pm x^2$，則得

$$(1+x^2)e^{-x^2}<1 \text{ 及 } (1-x^2)e^{x^2}<1.$$

由是有
$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2};$$

故有不等式 (5).

今若以 $x\sqrt{n}$ 代 x，則見

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx>\sqrt{n}\int_0^{1} e^{-nx^2}\,dx,$$

而有
$$I<\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n} \text{ 及 } I>\sqrt{n}\int_0^{1}(1-x^2)^n\,dx.$$

但命 $x=\tan\theta$, 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}\theta\,d\theta=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

又命 $x=\sin\theta$, 有

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\,d\theta=\frac{2\cdot4\cdot5\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}.$$

然則 $\sqrt{n}\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}<1<\sqrt{n}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n-2)}\dfrac{\pi}{2}.$

此不等式倘可書作

$$(6)\qquad \frac{n}{2n+1}\left[\frac{2\cdot4\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]<1<\frac{\pi}{2}$$
$$\times\frac{2n}{2n-1}\left[\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots2n}\sqrt{n}\right].$$

若令 $n\to\infty$, 則左右兩括鈎內之量,據瓦里氏公式依次趨於 $\sqrt{\pi}$, 及 $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, 可見(6)之兩端趨於公共之限 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, 而有

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

133. 瑕積分 (Improper integrals).

今就 $f(x)$ 於 (a, b) 間可變為無窮之情形論之. 先設 $f(x)$ 囿於并可積於 $(a+\delta, b)$ 間,但於 $x=a$ 為 ∞; 若無論正數 δ 如何小,積分 $\int_{a+\delta}^b f(x)dx$ 均有一確定之值,且於 $\delta\to+0$ 時趨於一限,則吾人稱此限為一瑕積分,仍由符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表之.時或

先設瑕積分之符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 而於適所言之情形適合時,稱之爲有意義或收斂.

仿之,以 δ 表一甚小之正數,若 $f(x)$ 於 $(a, b-\delta)$ 間爲圍的並爲可積的,但於 $x=b$ 爲 ∞,則按定義

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta'\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx.$$

又如 $f(x)$ 於 a 與 b 間之一值 c 變爲 ∞,而於他值無問題,則令 δ, δ' 爲二甚小正變數有

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\lim_{\delta'\to 0}\int_{c+\delta'}^b f(x)\,dx.$$

如是類推.以下吾但就 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲 ∞ 之瑕積分論之.對於他種情形,自亦彷彿.

若已知 $f(x)$ 之一原函數 $P(x)$,則由

$$\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx=F(b)-F(a+\xi).$$

立可判斷瑕積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 有意義與否.例如於 $\lambda \neq 1$ 有

$$\int_{a+\delta}^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}-\frac{1}{\delta^{\lambda-1}}\right],$$

並於 $\lambda=1$ 有

$$\int_{a+\delta}^b \frac{dx}{x-a}=\log(b-a)-\log\delta=\log\frac{b-a}{\delta}$$

可知 $\lambda<1$ 時,瑕積分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$ 爲收斂,而有

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}\,\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}.$$

於 $\lambda \geqq 1$ 時,則無意義.

134. 收斂之普通條件.

欲積分 $\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$ 於 $\delta \to +0$ 時有一限,必須而只須任與正數 ξ,能得一正數 η 使 $\delta' < \delta'' < \eta$ 牽涉.

$$\left| \int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\,dx \right| < \xi.$$

條件爲必須的,理甚易明.其爲充足的,只須令 $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots, \delta_n$ 爲一行漸減而趨於0之正數而借級數

$$\int_{a+\delta_1}^b f(x)\,dx + \int_{a+\delta_2}^{a+\delta_1} f(x)\,dx + \cdots\cdots + \int_{a+\delta_n}^{a+\delta_{n-1}} f(x)\,dx + \cdots\cdots$$

仿129節論之.

若積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 爲收斂,據此易知 $\int_a^b f(x)$ 亦然;且因之稱爲絕對收斂.

135. 收歛定則.

仿無窮積分論之,可得類似之定則.

如設 $f(x) = \dfrac{\psi(x)}{(x-a)^\lambda}$, $\lambda > 0$, 而 $\psi(x)$ 於 a 點附近含於二定數 m 與 M 間,則有

$$\int_{a+\delta}^{a+\delta'} f(x)\,dx = \mu \int_{a+\delta}^{a+\delta'} \frac{dx}{(x-a)^\lambda}, \qquad (m < \mu < M)$$

而可斷 1°), $\lambda<1$ 時, 瑕積分 $\int_a^b f(x)dx$ 爲收斂; 2°), $\lambda\geqq1$, 並 m 與 M 同號, 則非收斂; 3°), $\lambda\geqq1$ 但 m 與 M 不同號, 則不能決定.

倘吾等能得一數 λ 使 $(x-a)^\lambda f(x)$ 於 $x\to a+0$ 時有異於零之限, 則可斷定 $\lambda<1$ 時, 積分爲收斂, 反之則否.

例 1. 設有

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

積分號下之函數 $f(x)$ 於 $x=0$ 及 $x=-1$ 爲無窮, 但取 $\lambda=\frac{1}{2}$, 則 $x^\lambda f(x)$ 及 $(1-x)^\lambda f(x)$ 均有定限. 是知積分爲收斂. 推之, 命 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 表二多項式, 若 a 爲 $Q(x)$ 之一單根, 則 $\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ 之定積分於 a 附近有意義.

例 2. 設積分

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^n}dx, \qquad (0<n<1).$$

被積函數於 $x=0$ 爲無窮. 命 ξ 爲 0 與 $1-n$ 間之一數, 則

$$x^{n+\xi} f(x)=x^\xi \log x.$$

於 $x\to0$ 時, 此乘積趨於零. 然則吾等可求得一正數 α 使 x 自 0 變至 α 時, $x^{n+\xi} f(x)$ 小於任與正數 A. 因 $n+\xi$ 小於 1, 可知積分有意義.

136. 公式之推廣.

前章所述之公式

(7) $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

於相當條件下可致用於廣義積分.

I. 若 $f(x)$ 及 $F(x)$ 對於 $x>a$ 之一切數值爲連續,且 $F(x)$ 於 $x \to +\infty$ 有確定之限,則公式顯然合理,而有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a).$$

因
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\Big[F(x) - F(a)\Big]$$
$$= F(+\infty) - F(a)$$
也.

II. 若 $f(x)$ 於 a, b 或於其間一定數之點變爲無窮(於其餘之點均爲連續),則只須原函數 $F(x)$ 在 (a, b) 全隔間爲連續,公式 (7) 卽合理. 蓋如 c 爲 a 與 b 間之一間斷點(而無其他間斷點),則有

(8) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\delta'\to\infty}\int_{c+\delta'}^b f(x)dx$$
$$= \lim_{\delta\to 0} F(c-\delta) - F(a) + F(b) - \lim_{\delta'\to 0} F(c+\delta')$$

既設 $F(x)$ 於 c 爲連續,當有

$$\lim_{\delta\to 0} F(c-\delta) = \lim_{\delta\to 0} F(c+\delta')$$

故仍得公式 (7).

例設 $$\int_{-1}^{+1} x^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

$f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ 於 $x=0$ 爲間斷,但其原函數 $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$,於是點爲

連續;故公式(7)可引用而得

$$\int_{-1}^{+1} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{+1} = 0$$

反之,若取 $f(x)=x^{-2}$, 則原函數 $F(x)=\frac{1}{x}$ 於 $x=0$ 間斷,引用公式(7)則得無理之結果

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2} = -\left(\frac{1}{x}\right)_{-1}^{+1} = -2.$$

今設 $F(x)$ 於 (a, b) 間一定數之點爲間斷,但設僅有第一種間斷點,如 c 爲如是之一點,則命 Δ 表差數 $F(c+0)-F(c-0)$ 卽 $F(x)$ 於 c 之間斷度,由(8)得公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)-\Sigma\Delta, \tag{9}$$

$\Sigma\Delta$ 表 $F(x)$ 於 (a, b) 內諸間斷度之和.

例有積分 $$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx,$$

其內函數 $f(x)$ 於 (a, b) 間一定個數之點可變爲無窮,而於其他之點皆爲連續.吾等易知一原函數爲 $F(x)=\operatorname{arc}\tan f(x)$, 爲明切計,設弧之值介於 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間.若 $f(x)$ 於 (a, b) 間不變爲無窮,則 $F(x)$ 爲連續,而準公式(7)有

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arc}\tan f(b) - \operatorname{arc}\tan f(a).$$

今若 $f(x)$ 於 (a, b) 間之點變爲無窮而改號,則須引用公式(9);譬如 $f(x)$ 於 $x=c$ 自 $+\infty$ 躍至 $-\infty$, 則有 $F(c-0)=\frac{\pi}{2}$,

$F(c+0)=-\frac{\pi}{2}$,而$\Delta=-\pi$.反之,如$f(x)$於$x=c$自$-\infty$躍至$+\infty$,則$\Delta=\pi$,又若$f(x)$變爲無窮而不改號,則$\Delta=0$.如是若$f(x)$於(a,b)間自$+\infty$躍至$-\infty$凡k次,而自$-\infty$躍至$+\infty$凡k'次,則間斷度之和爲$\Sigma\Delta=-(k-k')\pi$.此數$k-k'$稱爲$f(x)$於(a,b)間之間斷碼(index),而由$I_a^b[f(x)]$表之.然則準公式(9)得

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\operatorname{arc}\tan f(b)-\operatorname{arc}\tan f(a)+\pi I_a^b[f(x)].$$

其他換變數及部分求積等公式,均可同法推論.

137. 互餘完全橢圓積分 (Complementary complete elliptic integrals).

取第一種橢圓積分

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (k^2<1)$$

論之.當x介於-1與$+1$間,微分$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$恆爲正.令$x$自0變至1,則得勒讓德氏所謂之完全積分(complete integral).

(10) $$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

被積函數於$x=1$爲無窮,但準134節法則,吾等立知此積分有意義.

今若x介於1與$\frac{1}{k}$之間,或-1與$-\frac{1}{k}$之間,則微分

$\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ 爲虛數,而等於

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

與 $\sqrt{-1}$ 之積.删去 $\sqrt{-1}$ 而自 1 至 $\dfrac{1}{k}$ 取積分得

$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

現欲論列者,吾等可更換變數使此積分之限化爲 0 與 1. 試取

$$k'^2=1-k^2,\quad \text{即}\quad k^2+k'^2=1$$

而命

$$x=\frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2t^2}\qquad dx=-\frac{k'^2t\,dt}{k\sqrt{1-k'^2t^2}}$$

則得

$$K'=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k'^2t^2)}} \tag{11}$$

勒氏稱積分 K 與 K' 爲二互餘完全橢圓積分

138. 積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx$.

此積分不時遇見;其被積函數於 $x=0$ 爲無窮,但吾等易知積分爲收斂者.且不難求其值,玆往論之.

吾等有

$$\int_0^{\pi}\log(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin x)\,dx.$$

命 $x=\pi-y$, 則見

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dy.$$

而
$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx;$$

又由 $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ 關係,有

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx = \pi\log 2 + \int_0^{\pi} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^{\pi} \log\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)dx$$

$$= \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\,dx.$$

命 $x = \frac{\pi}{2} - z$ 可見末端兩積分彼此相等.於是比較此上所得兩結果,便有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

II. 線積分

139. 線積分之定義 (Line integrals).

此亦定積分推廣之一種.在分析學上及物理學上甚為重要,設一曲線 C

(12)　　$x = f(t),\qquad y = \phi(t),$

並一函數 $P(x, y)$,沿 C 之一弧 AB 為連續,A 與 B 由 $t=a$ 及 $t=b$ 而定 $a<b$).試分 $(a, b$ 如

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots\cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

而於 (t_{i-1}, t_i) 內任取一數 θ_i; 命 x_i 與 y_i 爲 C 上與 t_i 相應之點之位標, ξ_i 與 η_i 爲其與 θ_i 相應者,而作和數

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

當 $n\to\infty$ 俾 $t_i - t_{i-1}$ 各差數均趨於零時,此和數趨於一限,是爲 $P(x, y)$ 沿 AB 弧的線積分,而書如 $\int_{AB} P(x, y)\,dx$.

欲證明此限之存在,先設 $x=f(t)$ 於 (a, b) 間爲單調函數.譬如當 t 自 a 變至 b 時, x 由 x_0 增至 X. 若是 AB 弧僅能與 oy 之一平行線相遇於一點,若其方程式書如 $y=g(x)$, 則 $g(x)$ 於 (x_0, X) 隔間爲連續; 以 $g(x)$ 代 y 於 $P(x, y)$ 內仍得一連續函數

$$P[x, g(x)] = \overline{P}(x),$$

於是和數(13)可書如

$$\Sigma \overline{P}(\xi)(x_i - x_{i-1}),$$

而知其果有一限,即尋常積分

$$\int_{x_0}^{X} \overline{P}(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} P[x, g(x)]\,dx.$$

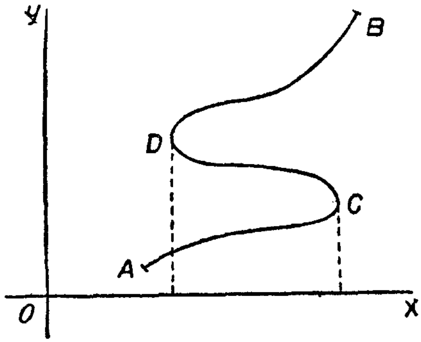
然則

$$(14)\qquad \int_{AB} P(x, y)dx = \int_{x_0}^{X} P[x, g(x)].$$

今若曲線如圖 20 所示,於 C, D 等點 $x=f(t)$ 爲極大或極小,則分 AB 弧爲 AC, CD, DB 等弧,每弧卽合於上所言條件.因之沿每弧之線積分意義以明.吾等於是可書

$$\int_{ACDB} P(x, y)\,dx = \int_{AC} P(x, y)\,dx + \int_{CD} P(x, y)\,dx + \int_{DB} P(x, y)\,dx.$$

但有須注意者,於求右端三積分時,當以確定所屬弧之 $y=g(x)$ 值代入.



第 20 圖

若函數 $f(t)$ 在某隔間內有定值,則 C 上相當弧成平行於 oy 之一直線段,而沿是段線之積分由定義知其爲零.

又,按定義可知

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx = -\int_{BA} P(x, y)\,dx.$$

仿上可定線積分 $\int_{AB} Q\,dy$ 以與 $\int_{AB} P\,dx$ 相加,則得線積分 $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$.

140. 線積分之變數替換公式.

取線積分　　$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$

而設有關係(12),且設 $f(t)$, $\phi(t)$ 在 (a, b) 內有連續紀數.若是

$$x_i - x_{i-1} = f'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}), \qquad (t_{i-1} < \theta_i < t_i);$$

並命 ξ_i, η_i 爲 x, y 與 θ_i 相當之值,則

$$\sum P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum P[f(\theta_i), \phi(\theta_i)]\,f'(\theta_i)\,(t_i - t_{i-1});$$

因之 $$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \int_a^b P[f(t),\phi(t)]f'(t)\,dt.$$

同法得 $$\int_{AB} Q(x,y)\,dy = \int_{AB} Q[f(t),\phi(t)]f'(t)\,dt.$$

相加得

$$(15)\qquad \int_{AB} P\,dx + Y\,dy = \int_a^b [Pf'(t)+Q\phi'(t)]dt$$

爲線積分之換變數公式.

141. 於迴線面積之應用.

先就114節圖14迴線 $Am_1BB'm_2A'A$ 所範圍之面積論之.

於彼得 $$A = \int_a^b \phi_2(x)\,dx - \int_a^b \phi_1(x)\,dx.$$

按線積分意義,即

$$A = \int_{A'm_2B'} y\,dx - \int_{Am_1B} y\,dx = -\int_{B'm_2A'} y\,dx - \int_{Am_1B} y\,dx.$$

若注意 $\int_{A'A} y\,dx$ 與 $\int_{B'B} y\,dx$ 均爲零,則

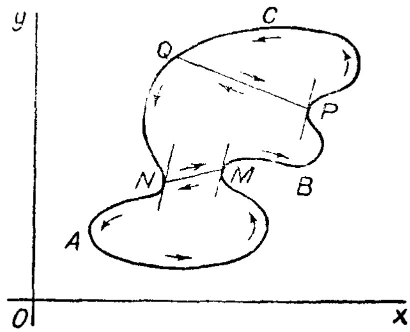
$$A = -\int_{Am_1BB'm_2A'A} y\,dx$$

吾人於迴線上定一正向如次:設一人立平面上沿迴線 C 行走,使所限面積常在其左,則其進行之向爲正向;反之爲負向.如是則有

$$(16)\qquad A = -\int_C y\,dx,$$

積分沿迴線正向而定.

適所論之迴線與 oy 之一平行線僅能遇於兩點.今取任意迴線 C, 苟能借一定數之補助線段,使成爲若干迴線,而諸迴線均合於此條件,則公式仍眞確.如左圖21所示之迴線 $ABCA$, 只須引 MN 及 PQ 補助線段,即得僅



第 21 圖

與 oy 平行線遇於兩點之三迴線, $AMNA$, $MEPQN$, $PCQP$. 於是可引用公式(16)於每小迴線.舉結果加之,即得原迴線 (C) 所範圍之面積公式,結果仍爲

$$A = -\int_C y\,dx.$$

蓋沿每補助線均須取線積分二次,向相反而結果相消也.

同法可證

$$(17)\qquad A = \int x\,dy.$$

將(16)與(17)二式加之,得較對稱之公式

$$(18)\qquad A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx,$$

積分依正向取定.

若換爲極位標

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

則因 $x\,dy-y\,dx=\rho^2\,d\theta$ 得公式

(19) $$A=\frac{1}{2}\int_C\rho^2\,d\theta.$$

苟迴線係如114節圖14所示者，則

$$A=\frac{1}{2}\int_{AB}\rho^2\,d\theta.$$

蓋沿 OA 與 OB 二線段之線積分等於零也.

例 1. 橢圓 $x=a\cos t,\qquad y=b\sin t$

之面積為 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\pi\,ab.$

例 2. 設雙紐線(lemniscate)

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta;$$

求其含於軸及由 θ 角 $\left(\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 確定之徑線間之面積,則有

$$A=\frac{a^2}{2}\int^\theta\cos 2\,d\theta=\frac{a^2}{2}\sin 2\theta.$$

若取 $\theta=\frac{\pi}{4}$, 則得雙紐線半瓣之面積 $\frac{a^2}{4}$, 而全線所範圍之面積等於 a^2.

注意. 吾等尚可表面面 A 以其他形狀之線積分. 試仍就113節圖13所示之迴線 $Am_1BB'm_2A'$ 論之, 於曲線上每點 M 向外引半法線 MN, 而命 α, β 為 MN 依次與 ox, oy 所成之角; 此二角均可自 o 變至 π. 沿 Am_1B 弧 β 為鈍角, 可知 $dx=-ds\cos\beta$, 而

$$\int_{Am_1B}y\,dx=-\int y\cos\beta\,ds;$$

致沿 $B'm_2A'$ 則 β 爲鋭角,並 dx 爲負,若吾等恆設 ds 爲正,則仍有 $dx=-ds\cos\beta$. 於是可見迴線所範圍之面積可由

$$\int y\cos\beta\,ds.$$

表之.仿之可知迴線面積亦等於

$$\int x\cos\alpha\,ds.$$

此等公式可推廣用於由任意迴線所範圍之面積.只須除一定個數之角點外,曲線每點皆具有一切線卽可.若圍線果具有角點,則宜截爲數弧使沿每弧 $\cos\alpha$ 與 $\cos\beta$ 爲 s 之連續函數.

III. 由積分確定之函數

142. 連續性.

設有積分

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx, \tag{20}$$

a 與 b 或爲常數,或爲 α 之函數.吾等往論如是確定之函數 $I(\alpha)$ 之特性.

1°) 先設 a 與 b 爲常數.與 α 以增量 $\Delta\alpha$, 則 I 之相當增量爲

$$\Delta I=\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx.$$

若 $f(x,\alpha)$ 在區域 $a\leqq x\leqq b$, $\alpha_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ 內爲 x 及 α 一並之連續函數,則 ΔI 隨 $\Delta\alpha$ 趨於零.蓋如是,則 $f(x,\alpha)$ 爲一致連續;任與正

數ξ,吾等可定一正數η,使$|\Delta\alpha|<\eta$牽涉

$$|f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|<\xi$$

而無論x爲在(a,b)間之何值.因之$|\Delta I|<\xi(b-a)$,而可小至人之所欲也.

2°) 繼設a與b爲α之連續函數,吾謂於上述條件之下,$I(\alpha)$仍爲連續,蓋於此

$$\Delta I=\int_b^{b+\Delta b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_a^{a+\Delta a}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

$$+\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx$$

$\Delta a,\Delta b$依次爲a,b與$\Delta\alpha$相當之增量,此式右端之末項可絕對小至人之所欲,已如上述.若命H表$|f(x,\alpha)|$在所定區域內之極大值,則其前二項絕對小於$H(|\Delta b|+|\Delta a|)$,亦可小至人之所欲;因之ΔI亦然.

143. 積分號下求紀法 (Differentiation under the sign of integration).

今更進而定$I(\alpha)$之紀數.吾等仍分二層論之.

1°) a,b爲常數.若$f(x,\alpha)$在$a\leqq x\leqq b$, $\alpha_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$域內爲$x$及$\alpha$一並之連續函數,並有偏紀數$f'_\alpha(x,\alpha)$,且此偏紀數亦於是域對於$x$與$\alpha$一並連續,則有公式

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx. \tag{21}$$

證:吾等有

$$(22)\qquad \frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx$$

$$=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)\,dx,$$

並由是有

$$(23)\qquad \left|\frac{\Delta I}{\Delta\alpha}-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\right|\leqq\int_a^b|f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)-f'_\alpha(x,\alpha)|\,dx$$

$f'_\alpha(x,\alpha)$ 既在所定區域內為一致連續,則任與一正數 ξ,吾等可得一正數 η,使 $|\Delta\alpha|<\eta$ 牽涉

$$|f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)-f'_\alpha(x,\alpha)|<\xi,$$

而無論 x 為在 (a,b) 內之何值.可見(23)式右端 $<\xi(b-a)$,而明 $\frac{\Delta I}{\Delta\alpha}$ 以 $\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ 為限,即得公式(21),稱為積分號下求微分公式,亦即得定則:

萊氏 (Leibniz) 定則. 於 a, b 為常數時,積分 $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ 對於 α 之紀數只須於積分號下代函數 $f(x,\alpha)$ 以其紀數即得.

2°) a, b 為 α 之連續函數,且有紀數;若 $f(x,\alpha)$ 仍滿足前層條件,則有公式

$$(24)\qquad \frac{dI}{d\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

蓋視 $I(\alpha)$ 為 α 之湊合函數,(中間函數為 a, b 及 $\int$ 號下之函數)立有

$$\frac{dI}{d\alpha}=\frac{\partial I}{\partial\alpha}+\frac{\partial I}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}+\frac{\partial I}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}$$

即公式(24).

注意. 積分號下求微分之公式,自可推用於線積分.蓋線積分可化爲尋常積分之和也.例有

$$I(\alpha)=\int_{AB}P(x,y,\alpha)\,dx+Q(x,y,\alpha)\,dy.$$

若AB弧不因α而變,則有

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int P'_{\alpha}(x,y,\alpha)\,dx+Q'_{\alpha}(x,y,\alpha)\,dy. \tag{25}$$

144. 積分號下求積分法.

設$f(x,y)$爲x與y一並之連續函數,連續區域設爲由條件$a\leqq x\leqq b$與$c\leqq y\leqq d$確定之矩形R.如是則積分$\int_c^d f(x,y)\,dy$爲x於(a,b)間之連續函數.吾等可求其積分而有

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

同理取函數$\int_a^b f(x,y)\,dx$自c至d之積分,則有

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

吾謂

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx; \tag{26}$$

證:代b以介於a與b間之變數t,則上式可書如

$$\int_a^t dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)\,dx; \tag{27}$$

兩端均爲t之函數,且於$t=a$時均爲零.是則能證明其紀數相等卽足.若命

$$F(x)=\int_c^d f(x, y)\, dy, \qquad \Phi(t, y)=\int_a^t f(x, y)\, dx,$$

則(27)可書為

$$\int_a^\lambda F(x)\, dx=\int_c^d \Phi(t, y)\, dy,$$

而見兩端之紀數 $F(t)$ 與 $\int_a^d \frac{\partial\Phi}{\partial t} dy$ 同等於 $\int_c^d f(t, y)\, dy$, 明所欲證.(27)式稱為積分號下求積分公式.

145. 廣義積分確定之函數;一致收斂性 (Uniform convergence).

於含有參變數之廣義積分.吾等首宜論述者,為一致收斂性.

設有收斂之無窮積分

(28) $$I(\alpha)=\int_{a}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx,$$

α 可為 (α_0, α_1) 隔間內任何數;謂此積分對於 $\alpha_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ 為一致收斂云者,乃任與正數 ε, 吾等可得一大數 X, 使不等式 $x''>x'>X$ 牽涉不等式

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x, \alpha)\, dx\right|<\varepsilon \text{ 或 } \left|\int_{x'}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx\right|<\varepsilon,$$

而無論 α 為在 (α_0, α_1) 間之值為何也.

仿之,設收斂之瑕積分

(29) $$I(\alpha)=\int_a^b f(x, \alpha)\, dx \qquad (a<b),$$

$f(x,\alpha)$ 設於 $x=a$ 變為無窮而於他處為有窮;謂積分對於 α 在隔間 (α_0,α_1) 內為一致收斂云者,乃任與正數 ε, 吾等能得他一正數 η 以使對於 $<\eta$ 之正數 δ' 與 δ'' $(\delta'<\delta'')$ 有不等式:

$$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon \text{ 或 } \left|\int_{a}^{a+\delta''} f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon$$

而無論 α 為在 (α_0,α_1) 內之任何值也.

於一致收斂之廣義積分,若其被積函數 $f(x,\alpha)$ 為 x 與 α 之一並連續函數,則所確定之函數為連續的.譬如無窮積分(28)若為一致收斂,且 $f(x,\alpha)$ 在

$$(D) \qquad x>a \text{ 及 } \alpha_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$$

區域內為一並連續,則是積分所確定之函數 $I(\alpha)$ 在 (α_0,α_1) 內為連續.蓋按所設可知

$$J(\alpha,n)=\int_a^{a+n} f(x,\alpha)\,dx \qquad (n \text{ 為一正整數})$$

為 α 之連續函數,且於 $n\to+\infty$ 時一致趨於 $I(\alpha)$ 也.

146. 積分號下求微分與求積分之公式.

試就無窮積分論之.取積分(28)而設其於 (α_0,α_1) 內為一致收斂,並設 $f(x,\alpha)$ 在 (D) 域內一並連續;更設積分

$$(30) \qquad I_1(\alpha)=\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

有意義,並亦在內 (α_0,α_1) 內為一致收斂;若是則函數

$$J_1(\alpha,n)=\int_a^{a+n} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

於 $n\to+\infty$ 時一致趨於其限 $I_1(\alpha)$. 夫 $f'_\alpha(x,\alpha)$ 若為 x_1 與 α 一並之連續函數,則無論 n 若何大,恆有 $\frac{dJ}{d\alpha}=J_1$. 是則達於限有 $\frac{dI}{d\alpha}=I_1$, 卽

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int_a^{+\infty}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx, \tag{31}$$

結論之,於 $\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)dx$, 若次述條件滿足,吾等可於積分號下求紀:

α_0

1°) $f(x,\alpha)$ 於 $x>a$ 及 $v_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ 為 x 與 α 一並之連續函數;

2°) $\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx$ 在 (α_0,α_1) 內一致收斂;

$(a,+\infty)$

3°) $\int_a^{+\infty}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ 亦在內一致收斂,並 $f'_\alpha(x,\alpha)$ 在 (a_1+8) 與 (α_0,α_1) 為 x 與 α 一並之連續函數.

但此等條件究非必要者.必要條件不易確定,通常卽就此情形論之.

仿此論之,若環積分 (28) 於 (α_0,α_1) 內一致收斂,並 $\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ 亦然,且 $f(x,\alpha)$ 與 $f'_\alpha(x,\alpha)$ 又於 $a\leqq x\leqq b$ 及 $\alpha_0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ 皆為一並連續,則萊氏積分號下求紀公式仍適用.

注意. 若引用萊氏定則,而不注意條件,可得無理之結果.例如由

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$$

求紀則得 $\int_0^{+\infty}\cos(\alpha x)\,dx$, 結果無意義.而原積分正確之紀數乃為 0. 由命 $\alpha x=y$ 換變數知之

積分號下取積分之公式,亦可推及於無窮積分;試命 $f(x,\alpha)$ 爲 x 與 α 二變數對於 $x \geqq a$, $\alpha_0 \leqq \alpha \geqq \alpha_1$ 之連續函數,吾謂:若積分 $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ 在 (α_0,α_1) 爲一致收斂,則有

$$(33) \qquad \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx.$$

證:命 x 爲大於 a 之一數,準公式(26)有

$$(34) \qquad \int_a^{x} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\,d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \int_a^{x} f(x,\alpha)\,dx.$$

當 x 趨於無窮,此式右端以

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

爲限.蓋斯二式之差等於

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \int_x^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx.$$

只須 x 大之至,此差數卽絕對小於 $\varepsilon\,|\alpha_1-\alpha_0|$. 然則(33)式左端亦趨於一限,而由符號

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\,d\alpha$$

表之;等寫此二限,卽得公式(32).

147. 應用.

含有參變數之定積分,其值有時可根據所確定之函數之特性求出;而積分號下求紀公式尤往往可作求定積分之工具;積分號下求積分公式時或亦可引用.玆舉例明之.

例 1. 求次列積分之值.

$$F(\alpha)=\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$$

此積分除 $|\alpha|=1$ 外,皆有定值;若視之爲 α 之函數,吾等易知其數特性如次:

1°) $F(-\alpha)=F(\alpha)$. 蓋命 $x=\pi-y$,

$$F(-\alpha)=\int_0^\pi \log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

$$=\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos y+\alpha^2)\,dy=F(\alpha).$$

2°). $F(\alpha^2)=2F(\alpha)$. 蓋可書

$$2F(\alpha)=F(\alpha)+F(-\alpha)$$

$$2F(\alpha)=\int_0^\pi[\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)+\log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)]\,dx$$

$$=\int_0^\pi \log(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)\,dx.$$

命 $2x=y$, 得

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^\pi \log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy;$$

再設 $y=2\pi-z$, 則末之積分

$$\int_\pi^{2\pi} \log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy=\int_0^\pi \log(1-2\alpha^2\cos z+\alpha^4)\,dz.$$

是故
$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)+\frac{1}{2}F(\alpha^2)=F(\alpha^2).$$

吾等於是有

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)=\frac{1}{4}F(\alpha^4)=\cdots\cdots=\frac{1}{2^n}F(\alpha^{2^n}).$$

若$|\alpha|<1$,則α^{2^n}於$n\to\infty$以零爲限,而$F(\alpha^{2^n})$亦然.於此

$$F(\alpha)=0. \qquad (|\alpha|<1).$$

今若$|\alpha|>1$,則命$\alpha=\frac{1}{\beta}$,有

$$F(\alpha)=\int_0^\pi \log\left(1-\frac{2\cos x}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\right)dx=\int_0^\pi \log(1-2\beta\cos x+\beta^2)dx.$$
$$-\pi\log\beta^2.$$

因$|\beta|<0$,由是得

$$F(\alpha)=-\pi\log\beta^2=\pi\log\alpha^2.$$

例 2. 設有積分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx \qquad (\alpha\geqq 0).$$

$f(x,\alpha)=\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}$顯爲$x$與$\alpha$一並之連續函數;吾謂此積分爲一致收斂.蓋準第二中值公式可寫

$$\int_{x'}^{x''} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{e^{-\alpha x'}}{x'}\int_x^\xi \sin x\,dx,$$

式中$x'<\xi<x''$.由是

$$\left|\int_{x'}^{x''} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|<\frac{2}{x'}.$$

若$x'>\frac{2}{\xi}$,則此不等式左端卽小於ξ,而無論α若何(但$\alpha\geqq 0$).然則$I(\alpha)$對$\alpha\geqq 0$爲連續.

又 $f'_\alpha=e^{-\alpha x}\sin x$ 亦顯爲 x,α 之連續函數,並 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx$ 於 $\alpha>k>0$ 爲一致收斂.蓋

$$\left|\int_{x'}^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right|<\int_{x'}^{+\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x'}$$

只須取 x' 甚大,使 $ke^{kx'}>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可使上式前端於 $\alpha>k$ 時小於 ε. 然則有

$$F'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx.$$

於此無定積分易於求得,而有

$$F'(\alpha)=\left[\frac{e^{-\alpha x}(\cos x+\alpha\sin x)}{1+\alpha^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{-1}{1+\alpha^2}.$$

由是
$$F(x)=C-\operatorname{arc\,tg}\alpha.$$

察 $\alpha\to+\infty$ 時積分 $F(\alpha)$ 趨於零,而得 $C=\frac{\pi}{2}$. 則是

(35)
$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx=\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{\alpha}.$$

此公式只對於 α 之一切正值成立. 但察 $F(\alpha)$ 函數於 $\alpha=0$ 亦連續. 令 α 趨於零,則於限得

(36)
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

例 3. 取公式

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

而設 $x=y\sqrt{\alpha}$ (α 爲正數),得

(37)
$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

吾人易知由此式對於 a 取紀數而得之一切積分皆對 $a>k>0$ 爲一致收斂,於是由上式可得一羣積分之值如下:

(38)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} y^2 e^{-ay^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2} a^{-\frac{3}{2}} \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} y^4 e^{-ay^2}\,dy = \frac{1\cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{5}{2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\int^{+\infty} y^{2n} e^{-ay^2}\,dy \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{2n+1}{2}} \end{cases}$$

例 4. 於積分號下取積分公式之應用,試取函數 x^y. 此函數當 x 自 0 變至 1 幷於 y 自正數 a 變至正數 b 時爲兩變數之連續函數;然則準公式(26)有

$$\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy = \int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx.$$

但 $\int_0^1 x^y\,dx = \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)_0^1 = \frac{1}{y+1}$. 因之上式右端等於

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

再者, $\int_a^b x^y\,dy = \left(\frac{x^y}{\log x}\right)_a^b = \frac{x^b - x^a}{\log x}$, 於是得

(39)
$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

習題

1. 求證貝特昂(Bertrand)氏定則:無定積分

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)^\lambda},\quad \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\log x(\log_2 x)^\lambda},\quad \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\log x\log_2 x(\cancel{\log})^\lambda},\cdots\cdots,(\lambda>0)$$

$\log_3 x$

於 $\lambda>1$ 時收斂而於 $\lambda\leqq 1$ 時發散, $\log_2 x$, $\log_3 x$,…… 依次表 $\log(\log x)$, $\log(\log_2 x)$, ……, a 爲一相當大之正數.

2. 試明下列各無窮積分爲收斂者:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^3-x)}{x}\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\log x\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{x^x}{e^{x^2}+e^x}\,dx.$$

3. 試論下列二積分之收斂性:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x},\quad \int_0^{+\infty} xe^{-x^6}\sin^2 x\,dx.$$

4. 論下列積分之斂散性:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^3 x},\quad \int_0^1\frac{dx}{\log x}$$

5. 試明積分
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}}$$
有意義. (清華選送留美專科生試題1929).

6. 求積分
$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx,$$
並推廣設
$$J_p=\int_0^{+\infty}\frac{F(\sin x,\cos x)}{x^p}\,dx,$$
(式中 F 爲一多項式而 p 爲一正整數)而求證當其有意義並被積函數爲偶函數時(即分子函數與 p 同爲偶的或奇的),吾等可求得其值.特 試引用所得表示其值之公式於

$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx,\quad J_4=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx.$$ (G. Julia).

答: 視 p 爲偶或奇 F 可書如 $\sum_{k=0}^{m}A_k\cos kx$ 或 $\sum_{k=0}^{m}B_k\sin kx$,

$$J_p=\frac{1}{(p-1)!}\,\frac{\pi}{2}(-1)^{\frac{p}{2}}\sum A_k k^{p-1} \text{ 或 } J_p=\frac{1}{(p-1)!}\,\frac{\pi}{2}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\sum B_k k^{p-1}$$

7. 求積分
$$\int_{-\infty}^{+\infty}U_mU_ne^{-x^2}\,dx$$
之值,式中 U_n 係見於 e^{-x^2} 之 n 級紀數式中之多項式:

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=e^{-x^2}U_n.$$　　　　答: 0 或 $2\cdot4\cdots\cdots2n\sqrt{\pi}$

8. 據公式

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

求 $\int_0^{\pi}\log(\sin x)dx$ 之值.

9. 求積分

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\text{arc}\tan x}{x}\right)^2dx.$$　　　　答: $\pi\log 2$.

10. 設曲線

(C)
$$\rho^2=a^2\log\frac{\tan\omega}{\tan\alpha},\qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

並由 $\omega=\alpha$ 及 $\omega=\frac{\pi}{2}$ 所定之射徑 OA 與 OB; 試證範圍於 OA, OB 及 (C) 內之面積有定值.　　　　(Licence, Paris, 1877)

11. 求曲線　$x=a(1+\cos^2 t)\sin t,\qquad y=a\sin^2 t\cos t$

所限之面積.　　　　答: $\frac{\pi a^2}{8}$.

12. 設曲線　$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y=\frac{t(1-t^2)}{1+t^2};$

於其上取 A, B 二點依次由 t 之值:

$$t_1=\tan\alpha,\qquad t_2=\tan\beta,\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

定之. 試求弧三角形 AOB 之面積.　　　　(Licence Besancon, 1907)

答: $\beta-\alpha+\sin(\beta-\alpha)\left\{\cos(\beta-\alpha)-\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right\}$.

13. 有週線 (C) 於其一點 M 之切線上取 M 兩旁之二點 P 與 P'. 使 $MP=MP'$, MP 之長依任一規律而變. 試證 P, P' 二點所刻畫之兩週線其面積相等, 並特別討論 MP 爲定量時之情況.

14. 設 (C) 爲一凸週線; 於其每點法線上向外取一點 P, 使 MP 之長爲定量 l, 試證含於 (C) 及 P 之軌跡間之面積等於 $sl+\pi l^2$, s 表 (C) 線之長.

15. 設 (C) 爲一週線, 取一點 A 使其對於 (C) 之切影跡 (Pedal) 之面積爲定量; 試明 A 點之軌跡爲一圓, 其心有一固定位置. (可表 C 以其切方程論之)

16. 設 (C) 爲一週線, (C_1) 爲其關於一點 A 之切影跡, 而 C_2 爲 A 於 (C)

法線上之正射影軌跡.試證於此三曲線之面積間有關係 $A=A_1-A_2$.

17. 求積分 $$\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$ (Hermite)

答: 於 $0<\alpha<\pi$ 爲 $\frac{\pi}{2}$, 於 $\pi<\alpha<2\pi$ 爲 $-\frac{\pi}{2}$,……

18. 討論次列各積分之一致收斂性

(a) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$,　(b) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$,

(c) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\sin\alpha x}{x}dx$,　(d) $\int_0^{+\infty}x\sin(x^3-\alpha x)\,dx$.

19. 求次列積分之值

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{1+\alpha\sin\theta}{1-\alpha\sin\theta}\cdot\frac{d\theta}{\sin\theta}\qquad(0<\alpha<1).$$

答: $\pi\arcsin\alpha$.

20. 用積分號下取微分法求次積分之值

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx.$$ 答: $\sqrt{\pi}$

21. 證 $$\int_0^{+\infty}e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

22. 試由前題推出

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha-\frac{k^2}{\alpha}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\pi}\,e^{-2k}.$$

23. 據 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2-t^2}\alpha\,dt$ 用積分號下取積分法以定 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 之值.

24. 證函數 $P(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$, $Q(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt$, $(x\geqq 0)$

均爲微分方程式 $$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{x}$$

之解,並由是明其相等. (Licence, Paris, 1888)

25. 求次積分之值 $$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\cos\frac{x^2}{2\alpha^2}\,d\alpha.$$ (Licence, Lille 1886)

答 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$.

26. 設x之二函數u與v由二積分確定如

$$u=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-z}\sin zx}{\sqrt{z}}\,dz,\qquad v=\int_0^{\infty}\frac{e^{-z}\cos zx}{\sqrt{z}}\,dz;$$

試明u與v適合於二個一級齊線性微分方程式,繼解此方程組而求出u與v之值。 (Licence, Lille, 1901)

答: $u=\sqrt{\pi\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2(1+x^2)}},\qquad v=\sqrt{\pi\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}}.$

第七章

重積分

I. 定義,求法及格林氏公式.

148. 關於二元函數之和數 S 與 s.

設 D 爲平面上之一有限通域,並 $f(x,y)$ 爲於 D 內之囿函數(包括周界).如是 D 爲可求方的而有一面積 A.設任由一法分 D 爲 n 個可求方的小域 $d_1, d_2, \cdots\cdots, d_n$ 依次以 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 爲其面積,則命 M_i, m_i 爲 $f(x,y)$ 在 d_i 內之高低界,可作和數

$$S=\sum_1^n M_i a_i, \qquad s=\sum_1^n m_i a_i$$

變換分域方法,則得兩數集 S 與 s.若注意 $A=\Sigma a_i$ 並命 M, m 爲 $f(x,y)$ 在 D 內之高低界,則顯然有 $S>mA$;然則 S 有一低界 I.同理 s 小於 MA 而有一高界 I'.吾人可如 105 節證明 $I\geqq I'$,且亦可由次理推出:

定理. 當 $n\to\infty$ 以使各小域 d_i 由各方趨於零時和數 S 與 s 依次趨於 I 與 I'.

一平面域 D 由各方趨於零者,乃能得半徑可小至所欲之一圓以範圍之也.

試證 S 以 I 爲限,吾人可設 $f(x, y)$ 於 D 內爲正.蓋恆可得一常數 C, 使

$$F(x, y)=C+f(x, y)>0,$$

而 f 與 F 之相當和數 S 與 S' 相差爲定數 CA; 定理若於 F 然,則於 f 亦然也.

命 ε 爲任意正數; I 既爲 S 之低界,則能得一法分 D 爲 d_1, $d_2, \cdots\cdots d_n$ 使相關和數 $S<1+\frac{\varepsilon}{2}$, 命 L 總表 D 之周線 L' 及分 D 爲 d_i 等所作線;又以 a_i 表 d_i 面積,並 γ_i 表其周線.今於 d_i 域內作一迴線 γ_i' 使與 γ_i 無公點,但令與之逼近以至 γ_i 與 γ_i' 間面積小於 $\frac{a_i}{n}$, 其 η 爲任一正數.將此手續施之於 d_i 各域.而命 L' 總表諸 γ_i' 線,則 L 分 D 域爲二域,其一 D' 由限於 γ_i' 諸線內之 d_i' 諸域合成,而其一 D'' 爲其餘部分.若 A' 與 A'' 表此二域之面積,則有 $A=A'+A''$ 且據作 γ_i 線方法可知 $A-A'=A''<\eta$.

今命 λ 爲 L 與 L' 之最短距離,而試以任一法分 D 爲小域,使其各方均小於 λ, 若令 S' 表相關大和數,則此和數可視作二部分,其一來自與 L 無公點之小域,其他則來自與 L 有公點之小域,前者顯然小於 S, 而後者則因區域含於 D'' 內小於 $M\eta$. 然則

$$S'<S+M\eta<I+\frac{\varepsilon}{2}+M\eta.$$

若取 $\eta<\frac{\varepsilon}{2M}$, 則 $S'<I+\varepsilon$. 明所欲證.

同法可證 s 以 I' 爲限.

149. 重積分.

若 $I=I'$, 則函數 $f(x, y)$ 稱爲可積於 D 域.而 S 與 s 之公限

I 名爲$f(x,y)$展布於D域的重積分(double integral extended over D),由符號

$$\iint_D f(x,y)\,dA \text{ 或 } \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

表之,D稱爲積分域(field of integration).

吾等易明:欲一函數$f(x,y)$可積於D域,必須而卽須當各小區域由各方趨於零時,差數$S-s$趨於零;亦可言必須而卽須任與正數ε,能得一法分D爲小域使有$S-s<\varepsilon$.

仿單元函數論之,甚易證明次列各定理:

凡連續函數$f(x,y)$爲可積的

多數可積函數,其和與其積亦皆爲可積的

若$f(x,y)$可積於D域,則必可積於D域所包含之各域D'

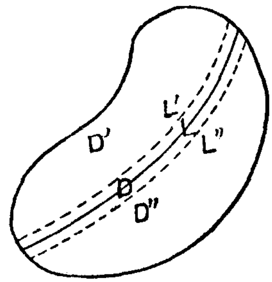
又若分D爲$D_1, D_2,\cdots\cdots D_p$等域,則在$D$域之重積分等於在$D_1, D_2,\cdots\cdots D_p$等域之重積分之和.

茲舉次之定理證之:

設一函數$f(x,y)$圍於D域,并在D內有無窮個間斷點;若此無窮點能含於一域δ內,而δ之面積又能小至人之所欲,則此函數於D內爲可積的.

例設$f(x,y)$在D內一曲線L上爲間斷,於其餘各點皆爲連續論之.若是L分D爲D_1與D_2二域;$f(x,y)$在D_1內與一連續函數$f_1(x,y)$等,而在D_2內又與他一連續函數$f_2(x,y)$等.至於沿L線$f(x,y)$則非連續,吾人僅設其爲圍函數.而不問其

他.試於 L 兩旁引 L' 與 L'' 二線,使含於其間之面積小於 $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$,其 ε 任意正數. L' 與 L'' 分 D 爲 D', D'', D''' 三域如圖. $S-s$ 中來自 D'' 之部分小於 $\frac{\varepsilon}{2}$;又因 $f(x,y)$ 連續於 D' 域與 D'' 域,則 $S-s$ 中來自 D' 與 D'' 之部分亦可小於 $\frac{\varepsilon}{2}$. 然則 $S-s<\varepsilon$, 而 $f(x,y)$ 誠可積於 D 域.



第 22 圖

再者,吾謂在 D 域的重積分,等於在 D', D'', D''' 各域的重積分之和.蓋於 L', L'' 趨近於 L 時,在 D''' 域的重積分趨於零,而在 D 域的重積分等於在 D' 與 D'' 二域的重積分之和之限也.

<u>注意.</u> 據適所論述者,$f(x,y)$ 在 D 域之重積分與 $f(x,y)$ 沿 L 之值無關,由是推廣論之,可知一函數 $f(x,y)$ 若可積於 D 域,吾人得任意更換其在若干點之值,只須函數不失爲囿的卽可.又 $f(x,y)$ 改換數值之點,可有無窮個,只須此無窮個點能含於一可小至所欲之域內卽可.換言之,於求 S 之限 I 時,吾人可刪去 S 中來自若干小域之部分,但須此等小域之和趨於零卽可.

<u>重積分之另一定義.</u> 命 (ξ_i, η_i) 爲 d_i 域內或其邊上之任一點,則和數 $\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\,\alpha_i$ 顯然介於 S 與 s 間,是亦以重積分爲限.

150. 第一中值公式.

命 $f(x, y)$ 與 $\phi(x, y)$ 爲二可積函數,其 $\phi(x, y)$ 在 D 域內有一定之號,譬如恆爲正.若 M 與 m 爲 $f(x, y)$ 在 D 內之高低界,則顯然有

$$\Sigma M\phi(\xi_i, \eta)\alpha_i > \Sigma f(\xi_i, \eta_i)\phi(\xi_i, \eta_i)\alpha_i > \Sigma m\phi(\xi_i, \eta_i)\alpha_i,$$

達於限,卽得中值公式:

$$(1) \qquad \iint_D f(x, y)\phi(x, y)\, dx\, dy = \mu \iint_D \phi(x, y)\, dx\, dy$$

μ 爲 M 與 m 間之一數,若 $f(x, y)$ 爲連續,則有位於 C 內之一點 (ξ, η) 使 $f(\xi, \eta) = \mu$, 而有公式

$$(2) \qquad \iint_D f(x, y)\phi(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta) \iint_D \phi(x, y)\, dx\, dy$$

特別設 $\phi(x, y) = 1$, 則有

$$(3) \qquad \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = Af(\xi, \eta).$$

因 $\iint_D dx\, dy$ 顯然等於 A 也.

151. 重積分之求法:特例.

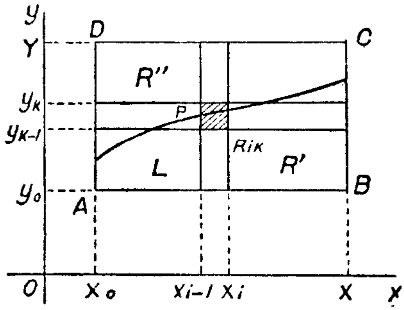
重積分可化爲二單積分以求其值.試先就一特例論之.設 $f(x, y)$ 爲 x 與 y 之連續函數,並積分域爲直線 $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$ 等所定矩形 R(圖 23).今以直線

$$x = x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n),$$

$$y = y_k \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

分 R 爲小矩形 R_{ik}, 則重積分爲

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_{ik},\ \eta_{ik})(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1})$$



第 23 圖

之限,$(\xi_{ik},\ \eta_{ik})$ 爲 R_{ik} 矩形內或其邊上之任一點.

試求此限,$(\xi_{ik}\ \ \eta_{ik})$ 既未確定,吾等可擇其便利於運算者.設函數 $f(x)$ 連續於 (a,b) 間,並以 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1}$ 分 (a,b) 爲小隔間,則吾等可於每小隔間 (x_{i-1}, x_i) 內選一數 ξ_i,使

(4) $$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1}).$$

蓋準中值公式可有 $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 也.

如是和數 S 中來自 $x=x_{i-1}, x=x_i$ 二直線間之諸矩形之部分爲

$$(x_i-x_{i-1})[f(\xi_{i1},\ \eta_{i1})(y_1-y_0)+f(\xi_{i2},\ \eta_{i2})(y_2-y_1)+\cdots\cdots$$
$$+f(\xi_{ik},\ \eta_{ik})(y_k-y_{k-1})+\cdots\cdots].$$

今取 $\xi_{i1}=\xi_{i2}=\cdots\cdots=\xi_{im}=x_{i-1}$, 則可視 x_{i-1} 爲常數而取 η_{ik}, $\eta_{i2},\cdots\cdots$, 使　$f(x_{i-1},\ \eta_{i2})(y-y_0)+f(x_{i-1},\ \eta_{i2})(y_0-y_1)+\cdots\cdots$

等於 $\int_{y_0}^{Y} f(x_{i-1}, y)\,dy$. 若將此手續施之於與 oy 平行之各排矩形,則可得

(5) $S=\Phi(x_0)(x_1-x_0)+\Phi(x_1)(x_2-x_1)+\cdots\cdots+\Phi(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})+\cdots\cdots$

式中命 $\Phi(x)=\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy$.

既設 $f(x, y)$ 為 x 與 y 之連續函數,則 $\Phi(x)$ 亦為 x 之連續函數. 於是當各差數 x_i-x_{i-1} 趨於零時,由 (5) 式可知 S 以

$$\int_{x_0}^{X} \Phi(x)\,dx$$

為限.然則得公式

(6) $$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy=\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy.$$

此式表明欲得重積分之值,可先視 x 為常數而 y 為變數,將 $f(x, y)$ 自 y_0 至 Y 求積分;繼將所得結果(此結果為唯一變數 x 之函數)自 x_0 至 X 積之.

若於求 S 先取矩形之含於 $y=y_{k-1}$, $y=y_k$ 二直線間者論之,則得

(7) $$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy=\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx$$

比較兩式復得積分號下取積分公式

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy=\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx.$$

在此證法中,亦如前設 x_0, X, y_0, Y 為定數,並 $f(x, y)$ 在此等限

間爲連續.

今若 $f(x, y)$ 於 R 內沿一曲線 L(或數曲線)失其連續性,但恆爲囿的,則仍爲可積.吾謂公式(6)仍正確,玆往論之.設 L 連 AD 之一點於 BC 之一點,而以 $y_1=\phi(x)$ 爲方程式.曲線 L 分 R 爲 R' 與 R'' 二部,在 R 內 $f(x, y)$ 爲一連續函數 $f_1(x, y)$,而在 R'' 內爲他一連續函數 $f_2(x, y)$. 今分 R 爲小域如前,而設直線 $x=x_{i-1}$ 遇 L 於一點 P. 假定此點之緯標 $\phi(x_{i-1})$ 介於 y_{k-1} 與 y_k 間(圖 23). 取 $y=\phi(x_{i-1})$ 直線分矩形 R_{ik} 爲二,則仿前論之.可知積分來自 $x=x_{i-1}$ 及 $x=x_i$ 二平行線間之部分,可書如

$$(x_i-x_{i-1}\left[\int_{y_0}^{\phi(x_{i-1})}f_1(x_{i-1}, y)dy+\int_{\phi(x_{i-1})}^{Y}f_2(x_{i-1}, y)\,dy\right].$$

繼是演論,情形仍與上同.若命

$$\int_{y_0}^{Y}f(x, y)\,dy=\int_{y_0}^{\phi(x)}f_1(x, y)dx+\int_{\phi(x)}^{Y}f_2(x, y)dy$$

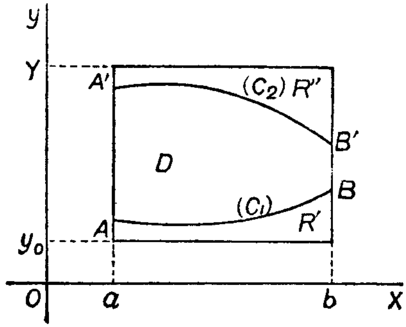
則仍得公式(6).倘有多數之間斷曲線,亦可仿此論之.

152. 重積分之求法:通例.

現取較普通之一域 D 由 $x=a$ 與 $x=b$, $(a<b)$ 二直線及 $y_1=\phi_1(x)$ 與 $y_2=\phi_2(x)$ 二曲線弧範圍而成,但設 oy 之一平行線僅能遇每曲線於一點(圖 24). 設 $f(x, y)$ 在 D 內及其周線 C 上爲連續;試求

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

任引 ox 之平行線 $y=y_0$ 與 $y=Y$ 與 $x=a$, $x=b$ 二線成一包含 D 域之矩形 R, 此矩形由 D, R', R'' 三域合成. 若設補助函數 $F(x,y)$ 合於條件:



第 24 圖

1°) 在 D 內及 C 上,

$$F(x, y)=f(x, y);$$

2°) 在 R' 及 R'' 內, $\qquad F(x, y)=0,$

則顯有

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy=\iint_D F(x, y)\, dx\, dy.$$

但 (6) 式合用於 $F(x, y)$, 故吾等有

$$\iint_R F(x, y)\, dx\, dy=\int_a^b dx\int_{y_0}^Y F(x, y)\, dy,$$

且由 $F(x, y)$ 之定義有

$$\int_y^Y F(x, y)\, dy=\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy;$$

是則

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy, \tag{7}$$

而求重積分變爲求二單積分,於 $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ 內應視 x 爲常數, 但 y_1 與 y_2 則爲 x 之函數.

若 x 軸之一平行線只遇區域周線於二點,則吾等自亦可

交換 x 與 y 之作用論之.

今若 D 之周線與 oy 或 ox 之平行線有多數交點,則吾等可分爲多數區域使各合於上述條件而求之,然後就各域分別求積分而加其結果,卽得所求.

例. 以 D 表橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 xoy 角內之部分而求重積分 $\iint_D xy\,dx\,dy$. 準公式(7)有

$$I=\iint_D xy\,dx\,dy=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dx.$$

而

$$\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy=\left(\frac{xy^2}{2}\right)_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{x}{2}\,\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

故 $$I=\frac{b^2}{2a^2}\int_0^a x(a^2-x^2)\,dx=\frac{a^2b^2}{8}.$$

153. 格林氏公式(Green's formula).

設一域 D 如圖24幷重積分 $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy$, P 爲 x 與 y 之已知函數.先就 y 求之,有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$=\int_a^b [P(x,y_2)-P(x,y_1)\,dx$$

$$=-\int_a^b P(x,y_1)\,dx-\int_b^a P(x,y_2)\,dx$$

末端兩積分之和顯然等於 $P(x, y)$ 依正向沿 D 之周線 C 之線積分;於是得公式

(8) $$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_C P\, dx,$$

若迴線 C 之形狀較繁複,則只須能引助線分之爲若干如上之迴線,公式顯仍可用.

仿上論之,有

(9) $$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_C Q\, dy.$$

舉(8)與(7)二式加之,卽得格氏公式

(10) $$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

線積分係沿正向而取.

命 $P = -y$ 及 $Q = x$, 則復得關於 D 域面積 A 之公式

$$\int_C x\, dy - y\, dx = \iint_D 2\, dx\, dy = 2A.$$

II. 變數之替換

154. 兩域之對應.

設有二平面 P 與 P_1, 疊合或否,依次於其上取同轉向之位標制 xy 與 uv, 均爲正交者,命 $M(x, y)$ 與 $M_1(u, v)$ 依次爲 P 與 P_1 之一點,則關係

(11) $$x = f(u, v), \qquad y = f(u, v)$$

規定 M 與 M_1 間之一種對應情形.吾等設:

1°) 於 P_1 之一域 A_1, 關係 (11) 規定 P 上之一域 A 與之相應,使對於 A_1 或其周線 C_1 之每一點,有 A 或其周線 C 之一點應之;反之亦然,即成一點點對應 (point-to-point correspondence) 也.

2°) $f(u, v)$ 與 $\phi(u, v)$ 在 A_1 內爲連續,並有連續偏紀數,且扎氏式 $J(u, v)=\dfrac{\partial(f_1\phi)}{\partial(u,v)}$ 在 A_1 內保存一定之號.

如所設,則當 M_1 點刻畫 C_1 時,M 點便刻畫 C. 若二點進行之向同,則吾等謂對應爲<u>順的</u> (direct); 反之,則爲<u>逆的</u> (inverse).

<u>定理</u>. <u>由 (11) 確定之對應爲順的或逆的, 視 J 爲正或負而定</u>.

證: 爲簡便計, A 域之面積即以 A 字表之.吾等有

$$A=\int_C x\,dy,$$

積分係依 C 之正向而取.準 (11)

$$A=\varepsilon\int_{C_1} f(u, v)\,d\,\phi(u, v)=\varepsilon\int_{C_1} f(u, v)\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv\right],(\varepsilon=\pm1) \tag{12}$$

積分亦設爲依 C_1 之正向而取.若對應爲順的,則吾等自應取 $\varepsilon=+1$; 反之, 則當取 $\varepsilon=-1$.

令命 $P(u, v)=f(u, v)\dfrac{\partial\phi}{\partial u}$ 與 $Q(u, v)=f(u, v)\dfrac{\partial\phi}{\partial v}$, 則 (12) 變爲

$$A=\varepsilon\int_{C_1} P\,du+Q\,dv.$$

準格林公式得

$$A=\varepsilon\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv.$$

若更設 ϕ 有二級偏紀數 $\frac{\partial^2\phi}{\partial u\,\partial v}$, 則

$$\frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}=J,$$

而

$$(13)\qquad A=\varepsilon\int\int_{A_1}J(u,v)du\,dv=\varepsilon\int\int_{A_1}\frac{\partial(f,\phi)}{\partial(u,v)}du\,dv,\ (\varepsilon=\pm1)$$

由此觀之,若札氏式為正,吾人當取 $\varepsilon=+1$, 而對應為順的;若其為負,則當取 $\varepsilon=-1$, 而對應為逆的,定理以明.

引用中值公式於(13),則得一重要公式

$$(14)\qquad A=A_1|J(\xi,\eta)|=A_1\left|\frac{D(f,\phi)}{D(\xi,\eta)}\right|,$$

(ξ,η) 為 A_1 域中之一點.

155. 重積分變數替換公式:

法一. 今取連續於 A 域內之函數 $F(x,y)$, 並任意分 A_1 為小域 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$; 按所設必有一相當之法分 A 為小域 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$, 使 a_i 與 α_i 相應.若吾等以同一字母表區域及面積,則據公式(14)有

$$a_i=\alpha_i|J(\xi_i,\eta_i)|,$$

(ξ_i,η_i) 為 α_i 域中之一點,對於此點 a_i 內有一點

$$x_i=f(\xi_i,\eta_i),\qquad y_i=\phi(\xi_i,\eta_i)$$

應之.命 $\Phi(u,v)=F[f(u,v),\phi(u,v)]$, 則可書

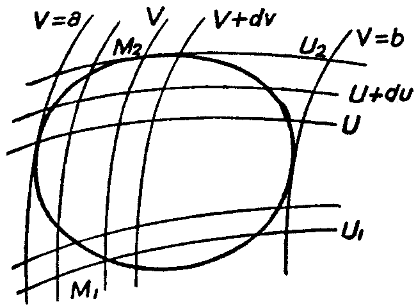
$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i, \eta_i) \, |J(\xi_i, \eta_i)| \, a_i;$$

逹於限,得公式

$$(15) \qquad \iint_A F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A_1} F[f(u, v), \phi(u, v)]\, |J(u, v)|\, du\, dv,$$

表明 x, y 由其對於新變數之值代入,而 $dx\, dy$ 則以 $|J|\, du\, dx$ 代之.

通常求新積分不必繪出 A_1 域之周線 C_1;蓋欲定積分限,吾等可視 u, v 爲一曲線位標制論之:設 u 與 v 之一爲活動常數,則關係 (11) 確定一族曲線.按吾等對於關係 (11) 之假設,可知於 A 之每點,$u=$ const. 與 $v=$ const. 二族曲線中各有一線過之,而只限於一線.今設每曲線 $v=$ const. 只遇 C 於二點 M_1, M_2, 與 u 之值 u_1, u_2,(假定 $u_1<u_2$) 依次相當,並所有曲線 $v=$ const. 概位於 $v=a$ 與 $v=b$ $(a<b)$ 之間有如圖所示者,則先令 v 爲定數,而就 u 求積分,當令 u 由 u_1 變至 u_2,所得結果再於 (a, b) 間就 v 積之,即



第 25 圖

$$\int_a^b dv \int_{u_1}^{u_2} F[f(u, v), \phi(u, v)]\, |J(u, v)|\, du.$$

如是,作變數替換 (11),乃即以 $u=$ const. $v=$ const. 兩族曲線

分 A 爲小域也. 於 $u, v+du$ 二線及 $v, v+dv$ 二線間之小域, 在 vu 面上有以 du 及 dv 爲邊之矩形應之; 命 ΔA 表此小域之面積,則準公式(14)有

$$\Delta A=|J(\xi, \eta)|\, du\, dv=\left\{|J(u, v)|+\varepsilon\right\} du\, dv,$$

其中 $u<\xi<u+du$, $v<\eta\leqq v+dv$, 又關於諸小域之 ε 隨 $du\,dv$ 一致趨於零,在求積分時可略去. $dA=|J(u, v)|\,du\,dv$ 名爲位標制 uv 中之面積元素 (element of area).

法二. 玆所欲述之法,甚易推用於多重積分,故贅及之.先注意若公式(15)於任意二種替換

(16) $$x=f(X, Y), \qquad y=\phi(X, Y)$$

與

(17) $$X=f_1(u, v), \qquad Y=\phi_1(u, v)$$

眞確,則據札氏式特性

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)}\cdot\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, x)},$$

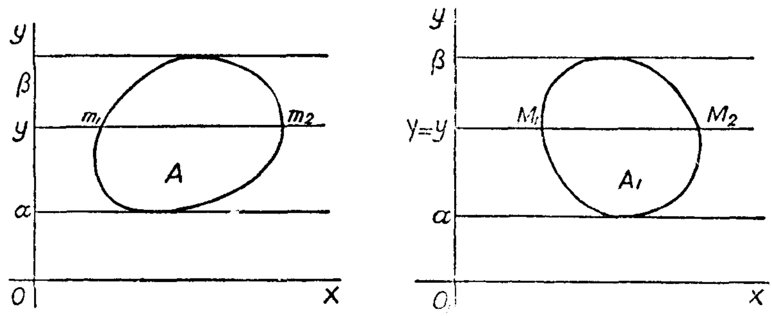
可知其於此二替換磨續而成之替換亦眞確. 又若公式對於與 $A_1, B_1, \cdots\cdots, L_1$ 諸域相應之域 $A, B, \cdots\cdots, L$ 眞,則於 $A+B+\cdots\cdots+L$ 域亦眞.

請先證公式(15)對於特別替換

(18) $$x=g(X, Y), \qquad y=Y$$

爲眞確:關係(18)於 xy 平面及 XY 平面上規定相應之二域 A 與 A_1, 依次以 C 及 C_1 爲周線.吾等設其爲點點相應,並可設 ox

之一平行線僅能遇C於兩點(蓋若不然,則可分數區域論之).



第 26 圖

若是,則ox之一平行線亦僅遇C_1於兩點,如圖26所示.但有應區別者:若$\frac{\partial g}{\partial X}>0$,則$x$隨$X$增大,圖中$M_1$, M_2二點依次與m_1, m_2二點相應.反之,若$\frac{\partial g}{\partial X}<0$,則$m_1$, m_2之相當點乃依次爲M_2, M_1.

玆就$\frac{\partial g}{\partial X}>0$論之.命$x_1, x_2$及$X_1, X_2$順序爲$m_1, m_2$及$M_1, M_2$之經標,則據單積分換變數公式有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y)dx = \int_{x_1}^{x_2} F[g(X, Y), Y]\frac{\partial g}{\partial X}\,dX,$$

其中y與Y視作常數.由是

$$\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} F(x, y)\,dx = \int_\alpha^\beta dY\int_{X_1}^{X_2} F[g(X, Y), Y]\frac{\partial g}{\partial X}\,dX.$$

因於此$J=\frac{\partial g}{\partial X}$,故可書

$$\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} F(x, y)\,dx = \int_\alpha^\beta dY\int_{X_1}^{X_2} F[g(X, Y), Y]\,|J|\,dX,$$

即　$$\iint_A F(x, y)\,dx\,dy=\iint_{A_1} F[g(X, Y), Y]\,|J|\,dY\,dX.$$

於 $\frac{\partial g}{\partial X}<0$, 公式亦可同法證明.

又若設替換關係

(19) $$x=X, \qquad y=\psi(X, Y),$$

則仿上論之,得公式

$$\iint_A F(x, y)\,dx\,dy=\iint_{A_1} F[X, \psi(X, Y)]\,|J|\,dY\,dX$$

即明公式(15)於替換(17)亦眞確.

今取普通替換

(20) $$x=f(u, v), \qquad y=\phi(u, v)$$

論之.命

(21) $$X=u, \qquad Y=\phi(u, v)$$

並自 $Y=\phi(X, v)$ 解出 $v=\pi(X, Y)$ 以代於(20)前式,則得

(22) $$x=f[X, \pi(X, Y)]=f_1(X, Y), \quad y=Y.$$

可見替換(20)與(22)及(21)相繼而成之替換相當,即與形如(18),(19)之兩種替換相當也.若關係(20)於 xy 平面上及 uv 平面上確定相當之二域 A 與 A', 則在 XY 平面上亦有一域 A_1 與之相應.設此三域均分別點點相應(不然可分爲小區域),則吾等知公式(15)於替換(20)及(21)均已眞確,是可判斷於替換(20)亦眞確矣:

III. 重積分之幾何應用

156. 體積定義

設有閉面 (closed surface) Σ 分空間爲內外二域 D 與 D', 使 D 域中任二點可以完全位於 D 內之一折線連之, 而連內外二點之折線必穿過曲面 Σ. 茲往言 D 域體積之意義.

凡區域以一定數之平面多邊域爲疆界者, 曰多面域 (法文 domaine polyedrale). 多面域可自一定數之凸曲面體合成, 其體積定義見於幾何學. 今設二多面域, 其一 P 包含 D, 其一 p 含於 D; 命 V_P, V_p 依次表其體積. 吾人恆有 $V_P<V_p$, 是則 V_P 有一低界 V. 仿之, V_p 有一高界 V', 而 $V'\leqq V$. 若有 $V=V'$, 則吾人謂 D 域有一體積等於 V. 吾可等如對於平面域證明:

欲 D 有一體積, 必要而即須任與正數 ε. 能得二域 P 與 p 其一含 D 而其一含於 D 使 $V_P-V_p<\varepsilon$.

若一域 D 能分爲 n 域 $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_n$ 其體積依次爲 V_1, $V_2, \cdots\cdots V_n$, 則 D 有體積

$$V=V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n.$$

若取三正交平面之平行面分空間爲小立方, 則位於 D 內諸立方域體積之和, 當其邊 ρ 趨於零時以 D 之體積爲限. 致侵佔疆界之諸立方域, 其體積之和趨於零.

今設與 oz 平行之一柱面及一曲面

$$(S)\qquad z=f(x, y),$$

而取限於 xy 平面及此二曲面間之域 D 論之.吾等設柱面與 xy 面之交線 C 爲一無重點之迴線,而在柱面內與 oz 平行之線僅遇 S 於一點,若是命 A 表 C 所範圍之平面域,則 $f(x, y)$ 在 A 內爲連續,吾等更設 $f(x, y)\geqq 0$.

試以 ox, oy 之平行線分 $\overset{A}{\cancel{D}}$ 爲小域,則此等小域一部分爲完整矩形 R_i, 他部分爲殘缺矩形 R'_i (被 C 線所割裂者). 命 M_i, m_i 爲 $f(x, y)$ 在 R_i 內之高低界,並 M 爲其在 D 內之高界,則以 R_i 爲底 m_i 爲高之棱柱顯然合成含於 D 之一多面域 p; 又以 R_i 爲底 M_i 爲高以及 R'_i 爲底 M 爲高之棱柱合成包含 D 之一多面域 P. 命 δ 表諸 R'_i 域面積之和; ω 表諸界距 M_i-m_i 之高界,則知 P 與 p 體積之差 $V_P - V_p < M\delta + A\omega$. 當矩形小之至,此差數可小至所欲,卽明 D 有一體積 V, 而

$$V=\iint_A f(x, y)\,dx\,dy.$$

蓋此重積分常介於 V_p 與 V_P 間也.

若閉面可被 oz 之一平行線穿於兩點,則限於其內之域可視作兩個如上所言之域之差,其體積乃兩個重積分之差.推之,凡任意閉面若只能被 oz 之任一平行線穿於一定數之點,則可分之爲一定數之閉面,使其每面只遇 oz 之一平行線於兩點.因之限於是閉面之體積,等於多數重積分之和.

157. 體積求法.

復就上所論之特別域論之.設迴線 C 之形如圖 24 之 AC_1

$BB'C_2A'A$. 若是 D 之體積為

$$V=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$$

察 $\int_{y_1}^{y_2} f(x\,y)\,dy$ 表 yz 面之一平行面割 D 之痕之面積 $\boldsymbol{A}$, 是則有

$$V=\int_a^b \boldsymbol{A}\,dx. \tag{23}$$

此公式易推及於體積之限於 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 二平行面及任意曲面者.

若知 $\boldsymbol{A}$ 對於 x 之值,則求一次積分卽得 V, 例如求一轉成面 S (Surface of revolution) 及與其轉軸 ox 正交之二平面所限之體積是.蓋以平行於 yz 之一平面剖之則得一圓. 若命 $z=f(x)$ 表 S 在 xz 面內之母線,則此圓之半徑為 $f(x)$, 而體積為

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

例. 試求橢體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{E}$$

限於 $x=x_0$, $x=X$ 二平面內之體積. 凡 xyz 平面之平行面剖 D 之痕為一橢圓,其半軸等於 $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ 與 $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. 然則吾等立有

$$V=\int_x^X \pi\,bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=\pi\,bc\left(X-x_0-\frac{X^3-x^3{}_0}{3a^2}\right).$$

欲得橢體之完全體積,只須取 $x_0=-a$, $X=a$; 若是得 $\frac{3}{4}\pi abc$.

158. 直紋面 (Ruled surface) 所限之體積.

若 A 爲 x 之一二次整式,則 V 可由兩端剖面及中央剖面之面積 B, B', b 並兩端之距 h 表之. 蓋取中央剖面爲 yz 面,則

有
$$V=\int_{-a}^{+a}(lx^2+2mx+n)\,dx=2l\frac{a^3}{3}+2na;$$

繼由
$$h=2a,\ b=n,\ B=la^2+2ma+n,\ B'=la^2-2ma+n$$

得
$$n=b,\ a=\frac{b}{2},\ 2la^2=B+B'-2b,$$

而吾等便有公式

$$V=\frac{b}{6}[B+B'+4b]. \tag{24}$$

也. 玆舉一重要之例於次:設一可變移之直線

$$y=ax+p,\qquad z=bx+q, \tag{D}$$

式中 a, b, p, q 爲一參變數 t 之函數;並設 t 自 t_0 增至 T 時,此等函數最後之值仍與起始者同. 若是則 D 織成一直紋面 S. 試求 S 及平行於 yz 之二平面所限之體積. yz 之任一平行面剖 δ 之截痕面積爲

$$A=\int_{t_0}^{T}(ax+p)(b'x+q')\,dt,$$

式中 b', q' 表 b, q 對於 t 之紀數,此公式尚可書如

$$A=x^2\int_{t_0}^{T}a\,b'dt+x\int_{t_0}^{T}(aq'+pb')\,dt+\int_{t_0}^{T}pq'\,dt.$$

右端積分顯然不含 x. 故可引用公式(24)以求 V.

159. 曲面積(Area of a curved surface).

於一曲面上設一無異點之區域 S, 由周線 Γ 範圍之. 設想任由一法分析 S 爲小域 s_i, 由迴線 γ_i 範圍之,繼取 s_i 中一點 m_i, 而作 S 於 m_i 之切面 T, 並設 γ_i 於 T 面上之射影爲一曲線 γ'_i, 範圍一平面域 σ_i(即 s_i 於 T 上之射影). 當小域 s_i 之數無限加多, 以使每小域由各方趨於零時, 則和數 $\Sigma\sigma_i$ 趨於一限. 此限按定義是爲曲面域 S 之面積.

設曲面之方程式爲

$$x=f(u, v) \quad y=\phi(u, v), \quad z=\psi(u, v); \tag{25}$$

於曲面域 S, 平面 u, v 上有限於一迴線 C 之域 A 與之相應. 設其爲點點相應, 並設 f, ϕ, ψ 及其偏紀數均於 A 內爲連續論之. 試分 A 爲小域 a_i 以 C_i 爲其周線; 吾等可有一相當之法分 S 爲小域 s_i, 使 a_i 與 s_i 相應, 因與 s_i 相應, 並因之與 σ_i 相應. 吾往求 σ_i 與 a_i 二者面積之比.

命 $m_i(x_i, y_i, z_i)$ 爲 s_i 域之一點與 a_i 域之一點 (u_i, v_i) 相應, 並 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 爲 S 於 m_i 之法線之定向餘弦, 則 S 於 m_i 之切面方程式爲

$$\alpha_i(X-x_i)+\beta_i(Y-y_i)+\gamma_i(Z-z_i)=0.$$

今於此切面上取二正交軸 m_iX 與 m_iY; 命 $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$ 與 $\alpha''_i, \beta''_i, \gamma''_i$ 依次爲其定向餘弦, 使與曲面之法線成三正交軸, 與 $oxyz$ 三軸同轉向.

命 $M(x, y, z)$ 爲 s_i 上任一點,則其投於切面上之射影於 $X m_i Y$ 面内,以

$$X=\alpha_i'(x-x_i)+\beta_i'(y-y_i)+\gamma_i'(z-z_i)$$

$$Y=\alpha_i''(x-x_i)+\beta_i''(y-y_i)+\gamma_i''(z-z_i)$$

爲位標,由是有

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}=\alpha_i \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}+\beta_i \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}+\gamma_i \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

準公式(14),得

$$\sigma_i=a_i\left|\alpha_i \frac{\partial(y, z)}{\partial(u_i', v_i')}+\beta_i \frac{\partial(z, x)}{\partial(u'_i, u'_i)}+\gamma_i \frac{\partial(x, y)}{\partial(u_i', v'_i)}\right|$$

(u'_i, v'_i) 爲 a_i 內之一點.若此域甚小,則 (u'_i, v'_i) 甚近於 (u_i, v_i) 而可寫

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u_i', v_i')}=\frac{\partial(y, x)}{\partial(u_i, v_i)}+\delta_i, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u_i', v_i')}=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u_i, v_i)}+\delta_i, \cdots\cdots,$$

$$\Sigma \sigma_i=\Sigma a_i\left|\alpha_i \frac{\partial(y, z)}{\partial(u_i, v_i)}+\beta_i \frac{\partial(z, x)}{\partial(u_i, v_i)}+\gamma_i \frac{\partial(x, y)}{\partial(u_i, v_i)}\right|$$
$$+\theta \Sigma a_i \left| \alpha_i\delta_i+\beta_i\delta_i'+\gamma_i\delta_i'' \right|.$$

式中 θ 之絕對值不能大於 1. 因 f, ϕ, ψ, 之偏紀數既連續於 A 內,可設 a_i 甚小,使 $\delta_i, \delta_i', \delta_i''$ 各小於任一正數 η, 則是命 A 爲 A 域之面積,上式末項絕對小於 $3\eta A$, 而

$$\lim \Sigma \sigma_i=\iint\left|\alpha \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}+\beta \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}+\gamma \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv,$$

α, β, γ 爲 (u, v) 點法線之定向餘弦.試求此等餘弦之值.按切面方程式爲

$$(X-x)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+(Y-y)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+(Z-z)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=0.$$

然則

$$\frac{\alpha}{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}=\frac{\beta}{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}=\frac{\gamma}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2+\cdots\cdots}}.$$

於末項取正號得

$$\alpha\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+\beta\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+\gamma\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2}$$

準恆等式 $(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2$

$$=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2.$$

可書根號下之量作 $EG-F^2$ 形,其中

$$E=\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad F=\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\quad G=\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

然則 S 之面積由重積分

(26) $$S=\iint_A\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

表之 $\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ 名為曲面 S 之面積元素.

函數 E, F, G 於曲面之研究甚重要. 若取 dx, dy, dz 等之平方加之,則得

(27) $$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+2\,F\,du\,du+F\,dv^2.$$

尋常卽據此公式以求 E, F, G 也.

特例. 1°). 設曲面之方程式爲 $z=f(x, y)$, 其上一域 S 投射於 xy 面上之射影爲 A, 且設 $f(x, y)$ 及 $P=\frac{\partial f}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}$ 連續於 A 內;若取 x, y 爲自變數,則有

$$E=1+p^2, \qquad F=pq, \qquad G=1+q^2,$$

而 S 之面積爲

$$S=\iint_A \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \tag{28}$$

亦即

$$S=\iint_A \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

γ 表曲面之法線與 oz 所成之銳角.

2°) 設一轉成面 S 並與其軸正交之二平行面. 試求 S 在此二平面間之面積. 取曲面之軸爲 z 軸,並命 $z=f(x)$ 爲曲面於 xz 面上之母線,則曲面上任一點之位標爲

$$x=r\cos\omega, \qquad y=r\sin\omega, \qquad z=f(r),$$

而於 xy 面上取位標量 r, ω 爲自變數,則有

$$ds^2=[1+f'^2(r)]dr^2+r^2\,d\omega^2$$

故

$$F=1+f'^2(r), \qquad F=0, \qquad G=r^2,$$

於是曲面限於半徑爲 r_1 與 r_2 $(r_1<r_2)$ 之二平行圓間之面積等於

$$S=\int_{r_1}^{r_2}dr\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+f'^2(r)}\,d\,\omega.$$

或

$$S=2\pi\int_{r_1}^{r_2} r\sqrt{1+f'^2(r)}\,dr. \tag{29}$$

若命 s 表曲面經線之弧,則有

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 = {}^2[1 + f'^2(r)]\,dr^2.$$

而上式可書作

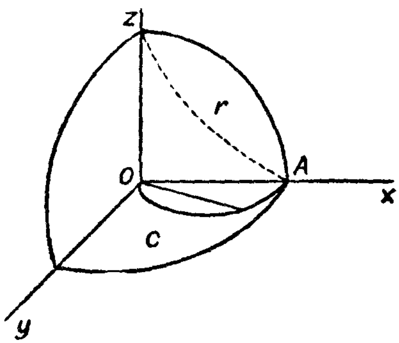
$$S = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r\,ds.$$

其幾何意義甚明,例有抛物線 $x^2 = 2pz$ 於 oz 周轉成之曲面,其限於尖點與半徑爲 R 之平行圓間之面積爲

$$S = 2\pi \int_0^R \frac{r}{p}\sqrt{r^2 + p^2}\,dr = \frac{2\pi}{3p}\left[(R^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right].$$

160. **維亞尼氏問題**(Viviani's problem).

設以原點爲心之一球,以其一半徑 $OA = R$ 爲直徑繪一圓 C 於 xy 面內,並作一柱面以 C 爲正截痕.試求是球限於柱面內之部分之體積 V 與面積 S. 吾等有



第 27 圖

$$V = 4\iint_{\mathbf{A}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$$

$\mathbf{A}$ 表 OCA 半圓.易爲極位標則有

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} r\sqrt{R^2 - r^2}\,dr$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\left[(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\omega} d\omega,$$

或 $$V=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^3-R^3\sin^3\omega)\,d\omega=\frac{4}{3}R^4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

若自球體積減去限於此柱面及與此對稱於 oz 之柱面內之部分,則得

$$\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{8}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}R^3.$$

又球面積限於柱面內之部分爲

$$S=4\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

代 p, q 以其值 $-\frac{x}{z}$, $-\frac{y}{z}$, 並改用極位標,則有

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int_0^{R\cos\omega}\frac{Rr\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\left[\sqrt{(R^2-r^2)}\right]_0^{R\cos\omega}d\omega,$$

或 $$S=4K^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\omega)\,d\omega=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

若自球面積減去限於上所云兩柱面內之部分,則得

$$4\pi R^2-8R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8R^2.$$

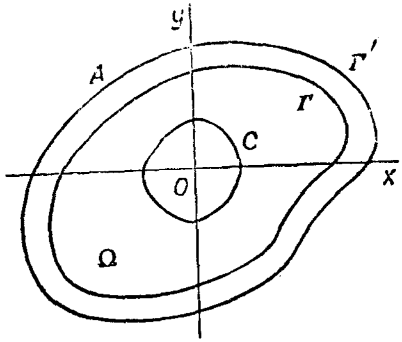
IV. 廣義重積分

161. 在無限域內之重積分.

設一函數 $f(x, y)$, 在一迴線 C 外之無限域 A 內爲囿的,試取包圍 C 之任意迴線 Γ. 若此函數在 C 與 Γ 間之域 D 爲可積而無論 Γ 如何擴大皆然,且若展布於 D 域內之重積分

$$I(C,\Gamma)=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

於Γ由各方無限擴張時趨於定限 I,則吾人稱 I 爲 $f(x, y)$ 展布於無限域 A 的重積分,而由 $\iint_A f(x,y)dx\,dy$ 表之.吾等亦可先設重積分符號 $\iint_A f(x, y)\ dx\ dy$ 而於其有定限 I 時謂其有意義或收斂.一迴線Γ由各方無限擴張云者,乃任於面上作一圓(無論如何大).Γ終能擴大以超於其外也.



第 28 圖

收斂條件. 設Γ, Γ'爲 C 外任二迴線, Γ'在Γ外,欲 $\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$ 收斂,必須而卽須當此二迴線由各方無限擴張時,差數 $I(C, \Gamma')-I(C, \Gamma)$ 趨於零.

此條件顯爲必須者;今欲證其爲充足,請設一貫迴線 C, $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots\cdots, \Gamma_n$ 使 Γ_1 在 C 外, Γ_2 在 Γ_1 外,以至 Γ_n 在 Γ_{n-1} 外,使於 $n\to\infty$ 時 Γ_n 由各方擴張至無限.按所設以 m, n 表任意二整數,則 $I(C, \Gamma_n)-I(C, \Gamma_m)$ 於 $m\to\infty$ 及 $n\to\infty$ 時趨於零.是故準級數理可斷 $I(C, \Gamma_n)$ 趨於一限 I.更任設一迴線Γ'由各方無限擴張.據所設 $I(C, \Gamma_n)-I(C, \Gamma')$ 趨於零,故 $I(C, \Gamma')$ 亦趨於定限 I,而無論Γ'擴張之情狀何如.

無限積分域亦可爲平面上之一部,例爲 xoy 角.上述之理

於此情形自仍適用;只須就 xoy 及一變移曲線 Γ 所限之域論之.

由收斂條件,立可推得定理:若 $|f(x,y)|$ 在 A 無限域的重積分有意義,則 $f(x,y)$ 者亦然.

例. 作一圓 C_0 以 o 爲心 a 爲半徑(a 可甚小)而取 C_0 外之無窮域 A 以論積分

$$\iint_A \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} \tag{30}$$

以 o 爲心任作二圓 C 與 C' 依次以 r 與 r' $(r'>r)$ 爲半徑,則展布於此二圓間之重積分爲(換爲極位標)

$$I(C,C')=\iint\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\iint\frac{r\,dr\,d\omega}{r^{2\alpha}}=2\pi\int_r^{r'}\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}.$$

於是可知 $\alpha>1$, $I(C,C')$ 於 C 無限擴張時趨於零.且也若作包圍 C_0 圓之任意二迴線 Γ,Γ' (Γ' 在 Γ 外),吾等可設其位於二圓之間,是則 $I(\Gamma,\Gamma')$ 亦於 Γ 無限擴大時趨於零.可斷(30)於 $\alpha>1$ 時有意義.反之,若 $\alpha=1$ 則無意義.

積分(30)每可取爲比較標準.例有

$$\iint_A \frac{\phi(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy, \tag{31}$$

A 同上,$\phi(x,y)$ 則設其囿於 A 內且在 A 內之高低界 M,m 同號.若是由

$$I(\Gamma,\Gamma')=\iint\frac{\phi(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy=\mu\iint\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha},\ (m<\mu<M)$$

可斷重積分(31)於 $\alpha>1$ 有意義,而於 $\alpha\leqq1$ 則否.

注意. 設 $f(x,y)$ 在 A 內有定號(設其為正). 則但須對於特別一族曲線 C_n, $I(C,C_n)$ 趨於定限,即可判斷 $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ 有意義. 蓋命 Γ_m 為他族曲線,吾等可設 Γ_m 位於 C_n 與 C_{n+p} 之間,而有

$$I(C,C_n)<I(C,\Gamma_m)<I(C,C_{n+p})$$

也.但 $f(x,y)$ 倘無定號,且 $|f(x,y)|$ 在 A 內之重積分有為無窮,則 $I(C,\Gamma)$ 之限將因 Γ 擴張之情狀不同而異.茲舉凱烈(Cayley)氏例以明之:

設 $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$. 先於 ox, oy 上作邊為 l 之正方形而於其內取積分,得

$$\int_0^{\ell}dx\int_0^{\ell}\sin(x^2+y^2)dy=\int_0^{\ell}\sin x^2\,dx\int_0^{\ell}\cos y^2\,dy+$$

$$\int_0^{\ell}\cos x^2\,dx\int_0^{\ell}\sin y^2\,dy.$$

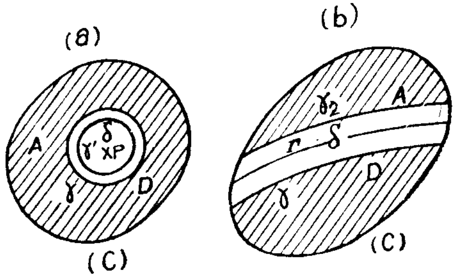
於 $\ell\to\infty$, 右端積分均變為伏氏積分而有定值; 吾等可證明其等於 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, 故上式右端以 $\frac{\pi}{4}$ 為限. 今若作半徑為 R 之圓而取 xoy 角所限於圓內之部分域,則得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int_0^{R}r\sin r^2\,dr=-\frac{\pi}{4}\Big[\cos r^2\Big]_0^R=-\frac{\pi}{2}(1-\cos R^2),$$

於 $R\to\infty$ 時無定限.

162. 非囿性函數的重積分.

設 $f(x, y)$ 於 A 域之一點 P 或沿其一線 Γ 變爲無窮；吾等於 P 點以一小迴線 γ 範圍之，或於 Γ 則於其兩旁作相鄰之



第 29 圖

二曲線 γ_1, γ_2 夾之，以分 A 爲二域 D 及 δ 如圖 29. 若 γ 由各方無限縮小，或 γ_1 與 γ_2 趨近 Γ 時，重積分 $\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy$ 恆有意義而趨於一定限 I，則此限名爲 $f(x, y)$ 展布於 A 域內的重積分，仍由符號 $\int\int_A f(x, y)\,dx\,dy$ 表之.

命 $I(\gamma, \gamma')$ 表 $f(x, y)$ 展布於 γ 與 γ' 間之重積分，可仿前節證明.

欲 $\int\int_A f(x, y)\,dx\,dy$ 有意義，在圖 29 (a)，必須而卽須 $I(\gamma, \gamma')$ 於 γ 無限縮減時趨於零；而在圖 29 (b)，必須而卽須 $I(\gamma_1, \gamma'_1)$ 與 $I(\gamma_2, \gamma'_2)$ 於 γ_1 與 γ_2 趨近 Γ 時趨於零.

吾等亦如在無窮域之重積分易明.若 $f(x, y)$ 於間斷點或間斷線附近有定號，則用以範圍此間斷點或線之曲線，其形狀無論如何，所得結論均同.反之，若 $f(x, y)$ 在彼處無定號，則重積分可無定值.

例 1. 設重積分

$$\iint_A \frac{dx\,dy}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}, \tag{32}$$

A 爲含 (a, b) 點之一域,被積函數於 (a, b) 變爲無窮,但在是點有定號;今以是點爲心作二小圓 C, C' 依次以 ρ, ρ' 爲半徑,並命 $x-a=r\cos\omega$, $y-b=r\sin\omega$, 則展布於 C, C' 間之重積分

$$\iint \frac{dx\,dy}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha} = 2\pi \int_\rho^{\rho'} \frac{dr}{r^{2\alpha-1}}.$$

由是可判斷重積分 (32) 於 $\alpha<1$ 有意義.而於 $\alpha\geqq 1$ 則否.

由此重積分吾等可推論重積分

$$\iint_A \frac{\phi(x, y)\,dx\,dy}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}.$$

$\phi(x, y)$ 設爲在 (a, b) 點附近爲圍函數且有定號.

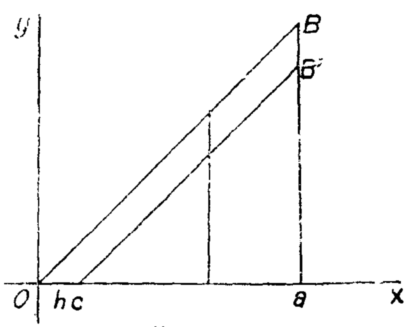
例 2. 設

$$\iint_A \frac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha} \tag{33}$$

A 爲 $y=0$, $y=x$, $x=a$ 三直線所成三角形.被積函數在 A 內亦有定號;試引與 OB 鄰近並平行之一線 CB', 則展布於 CaB' 三角形之重積分爲

$$I' = \int_h^a dx \int_0^{x-h} \frac{dy}{(x-y)^\alpha}.$$

吾等知若 $\alpha<1$, 則於 $h\to 0$ 時 $\int_0^{x-h} \frac{dy}{(x-y)^\alpha}$ 有定限;因之 I' 亦



第 30 圖

然,而重積分(33)有意義;反之,於$\alpha \geqq 1$時則否.據(33)可判斷次之重積分收斂或否:

$$\iint_A \frac{\phi(x, y)}{(x-y)^1}\, dx\, dy,$$

$\phi(x, y)$ 囿於 A, 且在 OB 附近有定號.

若已明非囿性之函數之積分有意義,則可照常法求其值.例如設 $\alpha<1$,

$$\iint_A \frac{\phi(x, y)}{(x-y)^\alpha}\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\phi(x, y)}{(x-y)^\alpha}\, dx\, dy.$$

V. 面積分

163. 面積分(Surface integrals).

首宜注意者,由一迴線或數迴線範圍之一部分曲面可判別爲表裏兩方面或否.果爾,則由此方面之一點沿一連續曲線至彼方面之一點,必經過邊線,於下所論,恆爲有兩方面之曲面.

命 S 爲曲面 $z=f(x, y)$ 之一部,限於迴線 Γ 內;並設其與 oz 之任意一平行線僅相遇於一點.若是,S 顯分爲兩方面:其一方面有其半法線與 oz 成銳角 γ,吾等名之爲 S 之表面,或上方面,他方面其半法線與 oz 成鈍角,則爲裏面或下方面.今設函數 $R(x, y, z)$ 在包有 S 之一域內爲連續,若 A 表 S 於 xy 面上之射影,則按所設 $f(x, y)$ 連續於 A 域;以之代 z 於 $R(x, y, z)$, 則

亦得一連續函數而重積分

(34) $$\iint_A R[x, y, f(x, y)]\, dx\, dy$$

有一確切之意義,現令積分號下顯出面積元素 $d\sigma$, 卽代 $dx\, dy$ 以 $\cos\gamma\, d\sigma$, 則可書爲

(35) $$\iint R(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma.$$

此形狀含意較廣:設 γ 爲銳角(卽取上方面之法線),則(35)與(34)等.但設 γ 爲鈍角(取下方面之法線),(35)亦有確當意義,而與

$$-\iint_A R[x, y, f(x, y)]\, dx\, dy$$

等.若是視 γ 爲銳角或鈍角,吾人分別稱(35)爲 $R(x, y, z)$ 展布於曲面 S 上方面或下方面的面積分:

(36) $$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

於曲面可被 oz 平行線穿過數點時,只須分爲數部論之,同理可定面積分

(37) $$\iint P(x, y, z)\, dy\, dz, \qquad \iint Q(x, y, z)\, dz\, dx.$$

此二積分依次等於

$$\iint P(x, y, z) \cos\alpha\, d\sigma, \qquad \iint Q(x, y, z) \cos\beta\, d\sigma.$$

α, β 以次爲所取方面之法線與 ox, oy 所成之角.

舉(36),(37)三積分加之,則得常見於應用之面積分

(38) $$\iint P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy,$$

或即書如:

(39) $$\iint[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]d\sigma.$$

若 S 由方程式

$$x=\phi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\pi(u,v)$$

表之,吾等知 $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, 並

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}=\frac{\cos\beta}{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=\frac{\pm1}{\sqrt{EG-F^2}}$$

末端取 + 或 − 號,視所論 S 之方面而定.若是,(39)等於

$$\pm\iint_A\left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]du\,dv,$$

± 號視 S 方面而定. A 為 uv 平面上與 S 相應之域.

例. 於球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取合於不等式

$$x^2+y^2-x\leqq 0,\qquad z\geqq 0$$

之部分 S, 而求展布於 S 外方面之面積分

$$I=\iint x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy.$$

球面向外之法線,其定向餘弦顯為 x, y, z, 而有

$$I=\iint_S(x^3+y^3+z^3)\,d\sigma.$$

若注意 S 域對稱於 xz 平面,則知 $\iint_\delta y^3d\sigma=0$ 而 $\iint_\delta(x^3+z^3)\,d\sigma$ 之元素兩兩相加,是故

$$I=2\int\int_{S_1}(x^3+z^3)\,d\sigma,$$

S_1 表 S 位於 $oxyz$ 三稜角內之部分.試以球位標

$$x=\sin\theta\cos\phi,\quad y=\sin\theta\sin\phi,\quad z=\cos\theta$$

入算,若是有

$$dx=\cos\theta\cos\phi\,d\theta-\sin\theta\sin\phi\,d\phi,$$

$$dy=\cos\theta\sin\phi\,d\theta+\sin\theta\cos\phi\,d\phi,$$

$$dz=-\sin\theta\,d\theta,$$

而 $$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2;$$

因之得 $$E=1,\qquad F=0,\qquad G=\sin^2\theta,$$

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\phi=\sin\theta\,d\theta\,d\phi.$$

然則 $$I=2\int\int_A(\sin^3\theta\cos^3\phi+\cos^3\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}(\sin^3\theta\sin^3\phi+\cos^3\theta)\,d\phi.$$

演之,得 $$I=\frac{38}{105}+\frac{5\pi}{32}.$$

注意. 於代 (38) 以 (39), 吾人係設曲面 S 於每點有一切面,其方位隨切點連續然移動,但曲面上亦可有一種角線,如乎曲線上之有角點然.蓋如曲面有二部 S_1 與 S_2 相交於一線 Σ, 而沿 Σ 有不同之切面,則展布於 S 上的面積分,按定義爲展布於 S_1 與 S_2 上的面積分之和也.

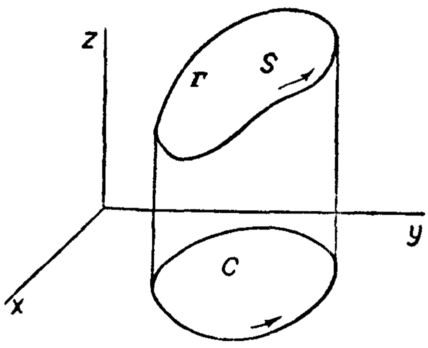
164. 士鐸克斯氏 (Stokes formula) 公式.

命 Γ 表一空間曲線並 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 爲沿 Γ 之連續函數.仿 139 節論之,可定線積分

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

今設曲面域 S 限於一迴線 Γ, 而判爲兩方面,吾等於每方面可定 Γ 之一正向.今規定之如次:於 Γ 上一點 M, 引所取方面之法線 MN 假設之人依 MN 立(足位於 M 首位於 N), 沿 Γ 進行見 S 曲面在其左,則其進行一向爲正向.如是 S 兩方面之正向顯然反對.

此義明,吾往論面積分與線積分間之一關係.取 S 域如上,並設其僅能被 oz 之任一平行線穿於一點.爲方便計,取位標軸之轉向如圖 31. 若是, Γ 與其在 xy 上之射影 C 之正向有如前號所示.於是取函數 $P(x, y, z)$, 而設其在包含 S 之一域內爲連續.若 $z=\phi(x, y)$ 爲 S 之方程式,則見線積分



第 31 圖

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\,dx$$

與線積分

$$\int_C P[x, y, \phi(x\ y)]\,dx \tag{40}$$

等.於積分(40),吾等可引用林氏公式化之,命

$$\overline{P}((x, y)=P(x, y, \phi(x y)),$$

有
$$\frac{\partial \overline{P}(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

α, β, γ 表 S 上面法線與位標軸所成角.於是

$$\int_C \overline{P}(x, y)dx=\int\int_A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma},$$

A 爲 C 所限之域.察右端重積分即在 S 上方面的面積分

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma,$$

是吾等可寫

$$\int\int_\Gamma P(x, y, z)dx=\int\int_S\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy.$$

若改換 S 之方面,則只須同時改換周線 Γ 上之方向公式仍合.此公式亦似格氏公式可推廣於任意曲面.

同理得

$$\int_\Gamma Q(x, y, z)dy=\int\int_S\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy-\frac{\partial Q}{\partial z}dy\,dz,$$

$$\int_\Gamma R(x, y, z)dz=\int\int_S\frac{\partial R}{\partial y}dy\,dz-\frac{\partial R}{\partial x}dz\,dx,$$

令此三式相加,卽得士鐸克斯氏之普通公式:

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{39}$$

$$=\int\int_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx,$$

線積分沿 Γ 在 S 相當方面之正向取.

165. 面積分於體積之應用.

面積分可用以表體積,亦若線積分之可以表平面積然.試取一閉面 S, 暫設 oz 之一平行線只遇之於兩點 M_1, M_2; 命 $z_1=f_1(x, y)$, $z_2=f_2(x, y)$ 依次爲 M_1, M_2, 畫成之二部曲面 S_1, S_2 $(f_1<f_2)$, 則命 A 爲 S 於 xy 上之射影,吾等知 S 閉面所限之體積等於

$$V=\iint_A f_2(x, y)\,dx\,dy-\iint_A f_1(x, y)\,dx\,dy.$$

第一積卽表展布於 S_2 上方面的面積分 $\iint z\,dx\,dy$, 而第二積分卽表展布於 S_1 上方面的面積分 $\iint z\,dx\,dy$, 其差適爲展布於 S 全面外方面的面積分 $\iint z\,dx\,dy$. 於是按對稱性吾人有

$$(40)\qquad V=\iint_S x\,dy\,dz=\iint_S y\,dx\,dz=\iint_S z\,dx\,dy.$$

公式可推廣於任一閉面.

習題

1. 設 $f(x, y)$ 爲 x 與 y 之連續函數,而命

$$F(X, Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x, y)\,dy,$$

則

$$(a)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=f(X, Y);$$

反之,若知一函數 F 合於 (a), 則有

$$\int_a^X dx \int_b^Y (x,\ y)\, dy = F(X,\ Y) - F(a,\ Y) - F(X,\ b) + F(a,\ b).$$

2. 橢圓位標(Elliptic coordinates). 設共焦點之圓錐線

(1) $$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

其中λ爲一參變數;凡於平面上每點有錐線二過之,一爲橢圓而一爲雙曲線,因於x, y之一組値,(1)式有二實根λ與μ也. λ, μ是爲$(x,\ y)$點之橢圓位標,求示

$$x = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}{c},$$

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\lambda,\ \mu)} = \frac{-1}{4}\ \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu\,(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}},$$

並論x, y與λ, μ相應之情形.

3. 求展布於不等式

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad x^3 + y^3 \leqq 1.$$

所定之域A內的重積分

$$\iint_A x^2 y \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\, dx\, dy.$$ 答: $\frac{\pi\sqrt{3}}{81}$.

4. 有三正交軸$oxyz$,設一直線D依據oz軸及

$$y = a, \qquad x^2 + z^2 = r^2$$

圓C並平行於xoy平面,以作一脊椎面(Conoid) S. 試求限於S內及oz與C圓間之體積. 答: $\frac{\pi a r^2}{2}$

5. 試求位於xy面上方,而含於

$$\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ 及 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$$

二曲面間之體積;吾等設$m^2 < 1$. 若$m^2 > 1$,則所得結果將何所表示?

(Licence, Lille, 1864), 答: $V = \pi\, abcm^2\left(1 - \frac{m^2}{2}\right)$

6. 求限於xoy平面及次二柱面

(S_1) $$x^2 + y^2 = 2y$$

(S_2) $$z = y^2$$

間之體積,並求S_1限於xoy及S_2間之曲面積.

7. 求限於球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 及橢面

$$x^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}+y^2\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}+z^2=R^2$$

內之體積,式中設 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ (Licence, Montpellier 1930).

答: $\frac{4}{3}R^3\left(\pi-2\beta+2\alpha\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}\right)$.

8 求

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}=2z,$$

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=2(2-z)$$

二拋物面體積之公共部分 (Licence Toulause 1905) 答: 24π.

9. 設直線 AB: $x+y=1$ 與位標軸所成之三角形;試求展布於此三角形內之重積分

$$\iint\frac{(x+y)\log\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,dx\,dy.$$

授意:可以過原點之直線及 AB 之平行線分三角形爲元素演之.

(清華選送留美專科生試題, 1929). 答: 16/15.

10. 有橢面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

及拋面

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x-\lambda}{\mu-\lambda}\cdot\frac{a^2-\mu^2}{a^2},$$

式中設 $-a<\lambda<\mu<a$;試明拋面剖分橢面體積爲二部而求其每部之值,並定 λ 使此二部體積相等. (Licence, Montpellier, 1902).

$$V_1=\frac{2}{3}\pi bc(a-\mu)+\frac{\pi bc}{6a^2}(a^2-\mu^2)(\mu-3\lambda),$$

$$V_2=\frac{4}{3}\pi abc-V_1,\qquad \lambda=-\mu\frac{3a^2+\mu^2}{3(a^2-\mu^2)}.$$

11. 取錐面 $x^2=y^2+z^2$ 之位於 xy 面上方,且射於 xoy 角與曲線 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 內之部分而求其面積. (東南大學試題).

答: $\frac{a^2}{4}[\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)]$

12. 設有拋面及柱面

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,$$

$(a>0,\ b>0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2.$$

試求拋面位於柱面內之部分之面積,並求柱體含於 xy 面與拋面間之體積.

答: $S=\frac{2\pi}{3}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}ab-\frac{2\pi}{3}ab,\quad V=\frac{\pi ab}{3}(a+b)c^4.$

13. 以二法求 $(x-y)^n\ f(y)$

展布於 $y=x_0$, $y=x_1$, $x=X$ 三線所限之三角形內的重積分,以證

$$\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}dx\cdots\cdots\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-y)^{n-1}f(y)\,dy.$$

14. 求重積分

$$\iint\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

分別展布於下列拋物線內外兩域之上. (Licence, Paris 1919)

$$y^2=2x.$$

答: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ 及 $\frac{4-\sqrt{2}}{4}\pi.$

15. 由二不同之法求重積分

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin ax\,dx\,dy$$

以證

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\pm\frac{\pi}{2}\qquad(a\neq 0).$$

16. 於球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取一弧三角形 S 以 $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 等點爲頂點;試求展布於 S 上方面之面積分

$$\iint(x^2+y^2)d\sigma,\quad \iint(x^2+z^2)d\sigma,\quad \iint(y^2+z^2)d\sigma,$$

(Licence, Paris, 1918). 答: $\frac{\pi-1}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi+1}{6}.$

17. 設有二正交軸 ox, oy, 及 oy 上之二定點 A 與 B; 試沿自 A 至 B 之任

意路線 AMB 取線積分

$$\int [\phi(y)e^x - my]\,dx + [\phi'(y)e^x - m]\,dy.$$

式中 m 爲常數, $\phi(y)$ 爲已知函數,吾等並設 $AMBA$ 面積爲已知而等於 S.

18. 求展布於曲面上

$$x = (a + b\cos\theta)\cos\phi \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

$$y = (a + b\cos\theta)\sin\phi \qquad (0 < \phi < 2\pi)$$

$$z = b\sin\theta$$

的面積分

$$\iint x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

(Licence, Lyon, 1911). 答: $6\pi^2ab^2$

第 八 章

多 次 重 積 分

I. 三次重積分

166. 三次重積分(Triple integrals).

三重積分之定義與重積分者類似,只須以空間域代平面域及以平面積代體積論之.設一空間有限域D,並命$F(x, y, z)$爲囿於其內之一函數;任由一法分D爲n個小域$d_1, d_2, \cdots\cdots d_n$,依次以$v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$爲體積,且若命$M_i, m_i$爲$F$於$d_i$內之高低界,則易知和數:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i v_i.$$

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i v_i$$

於$n\to\infty$以使每小域由各方趨於零時依序趨於二限I與I',而$I \geqq I'$.

若有$I=I'$,則$F(x, y, z)$稱爲可積於D域,而I與I'之公共值I按定義爲<u>$F(x, y, z)$展布於D域的三重積分</u>:

$$I=\iiint_D F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

I 亦爲和數

(1) $$S'=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)v_i$$

之限,式中 $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$ 爲 d_i 內任一點.

凡連續函數爲可積者;凡囿函數若其所具間斷點能含於一體積可小至所欲之一域內亦爲可積者,如囿函數之一個或數個間斷面者是.

167. 求法.

先設 $F(x,\ y,\ z)$ 於 D 域內爲連續,並係以 $z=z_0$ 與 $z=Z$ 二平面(平行於 $z=0$),及平行於 oz 之一柱面爲疆界.此柱面於 xy 面之截痕爲一迴線 C;吾等命 A 表 C 包圍之平面域.試分 A 爲 n 個小域以 $a_i(i=1,\ 2,\cdots\cdots n)$ 爲面積而取 a_i 等爲底作與 oz 平行之 n 個柱形,並於 $z=z_0$ 與 $z=Z$ 二平行面間作 $m-1$ 個平面以 $z<z_1\cdots\cdots<z_{m-1}$ 爲緯標,使 D 分爲小柱形域,而試就小柱形域之疊於 a_i 一域上者論之.命 (ξ_i,η_i) 爲 a_i 之任一點,和數 S' 中來自此堆小域之部分,可書作

(2) $$a_i\sum_{k=1}^{m}F(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_{i,\ k})(z_k-z_{k-1}).$$

$\zeta_{i,\ k}$ 表 z_{k-1} 與 z_k 間之任一數,吾等可擇其值使上式(2)適可書作 $a_i\ \Phi(\xi_i,\ \eta_i)$, 其 $\Phi(\xi_i,\ \eta_i)$ 爲

(3) $$\Phi(x,\ y)=\int_{z_0}^{Z}F(x,\ y,\ z)\,dz$$

之值.於是

$$S' = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i, \eta_i) a_i$$

而

$$(4) \qquad I = \iiint_D F(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iint_A \Phi(x, y) dx\, dy$$

$$= \iint_A dx\, dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z) dz.$$

如是欲求三重積分,可先視 x, y 為常數而就 z 積之,繼以已知之法求所得重積分.例如 D 為限於 $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, $z = z_0$, $z = Z$ 等六平面內之六面形,則

$$(5) \qquad I = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z) dz.$$

於此特例,顯然可任意更換求積分之次序.

今若 D 域含有一個或數個曲面,使 $F(x, y, z)$ 於其上失其連續性,但保存其囿性,則公式(4)仍合用.例設有如是之曲面二 S_1, S_2.

$$(S_1) \qquad z = \phi_1(x, y),$$

$$(S_2) \qquad z = \phi_2(x, y),$$

ϕ_1, ϕ_2 為二函數連續於 A 內 $(z_0 < \phi_1 < z)$ 此二曲面 S_1, S_2 劃 D 為三域,於每域內 F 皆為連續.設

1°) 於 $z = z_0$ 平面與 S_1 間, $F = f_1(x, y, z)$,

2°) 於 S_1 與 S_2 間 $F = f_2(x, y, z)$,

3°). 於 S_2 與 $z = z_1$ 平面間 $F = f_3(x, y, z)$.

於是仿 151 節討論,可見命

$$\int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dz$$

$$=\int_{z_0}^{\phi_1} f_1(x, y, z) dz+\int_{\phi_1}^{\phi_2} f_2(x, y, z)\, dz+\int_{\phi_2}^{Z} f_3(x, y, z) dz$$

仍得公式(4).

現若設 D 域限於如前之一柱面及二曲面 $z_1=\phi_1(x, y)$, $z_2=\phi_2(x, y)$ (ϕ_1, ϕ_2) 連續於 A 內並 $(\phi_1<\phi_2)$ 間,則連續函數 $F(x, y, z)$ 展布於是域之三重積分甚易.據上所言得一求之之法,蓋取二補助平面 $z=z_0$, $z=Z$ $(z_0<\phi_1, \phi_2<Z)$, 並一補助函數 $G(x, y, z)$ 在 D 內與 $F(x, y, z)$ 等,而在外爲零,則仿 152 節演論便得

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=\iint_A dx\, dy\int_{\phi_1}^{\phi_2} F(x, y, z) dz.$$

若 A 之周線 C 由 $x=a$ 與 $x=b$ $(a<b)$ 二平行線段及 $y_1=\psi_1(x)$ 與 $y_2=\psi_2(x)$ $(\psi_1<\psi_2)$ 二曲線弧合成,則有

$$(6)\qquad \iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=\int_a^b dx\int_{\psi_1}^{\psi_2} dy\int_{\phi_1}^{\phi_2} F(x, y, z)\, dz$$

積分限 ϕ_1, ϕ_2 爲 x, y 之函數而 a, b 則爲常數.

若 D 之疆界爲一閉面 Σ, 且每軸之平行線至多僅遇之於兩點,則求積分之次序可任意;但積分限通常隨積分次序而異.

例. 取球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 與三面角 $oxyz$ 所限之域 D, 而

求 $\iiint z\,dx\,dy\,dz$. 先就 z 繼就 y 末就 x 積之,有

$$I=\iiint_D z\,dx\,dy\,dz=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}z\,dz.$$

實行演之,以次得

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}z\,dz=\frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(R^2-x^2-y^2)\,dy=\left[\frac{1}{2}(R^2-x^2)y-\frac{1}{6}y^2\right]^{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$=\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}},$$

於是求積分 $\frac{1}{2}\int_0^R(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$, 卽得結果. 命 $x=R\cos\phi$, 此積分變爲

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^4\sin^4\phi\,d\phi,=\frac{R^4}{3}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

而吾等得 $I=\frac{\pi R^4}{16}$.

注意. 於上節所論,吾等尙可以次法求計 S' 之限:設 D 爲一圍域,含於 $z=z_0$ 與 $z=Z$ 二平行面間;先以緯標爲 $z_0<z_1<\cdots\cdots<z_{m-1}<Z$ 之平行面剖 D 爲 m 層,繼分每層爲柱形小塊,則可證明若在每小域選適當之點 ξ,η,ζ, 則和數 S' 來自 $z=z_i$ 與 $z=z_{i-1}$ 二平面間之小域之部分,可書作

$$(z_i-z_{i-1})\iint_{A_{i-1}}F(x,y,z_{i-1})\,dx\,dy,$$

A_{i-1} 表 $z=z_{i-1}$ 面與 D 域所公有之平面域.若命

$$\Psi(z)=\iint_{A(z)} F(x,\ y,\ z)\, dx\, dy,$$

則三重積分等於 $\int_{z_0}^{Z} \psi(z)\, dz$, 卽得公式

$$\iiint F(x,\ y,\ z)\, dx\, dy\, dz=\int_{z_0}^{Z} dx \iint_{A(z)} F(x,\ y,\ z) dx\, dy. \tag{7}$$

若 D 爲任意域,吾人可分之爲多數如上所言之域論之.

168. 阿士托戛斯基氏公式 (Ostrogradsky's theorem).

此由格林公式推廣而得,亦名黎曼氏公式.命 S 爲一閉面並設 oz 之一平行線只遇之於兩點;此閉面於 xy 平面上之射影爲一域 A, 由一迴線 C 限之.於 A 域一點,有 S 上二點應之;命 $z_1=\phi_1(x,\ y)$, $z_2=\phi_2(x,\ y)$ 爲其緯標.若是 S 分爲二部 S_1, S_2 依次與 z_1, z_2 相應,吾設 $z_1<z_2$. 於是若取函數 $R(x,\ y,\ z)$ 連續於 S 所限之域 D 內,並設其於 D 內有連續偏紀數 $\frac{\partial R}{\partial z}$, 則三重積分

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

等於

$$\iint_{A} [R(x,\ y,\ z_2)-R(x,\ y,\ z_1)] dx\, dy.$$

$\iint R(x,\ y,\ z_2)\, dx\, dy$ 卽在 S_2 上方面的面積分,

$$\iint_{S_2} R(x,\ y,\ z)\, dx\, dy.$$

而 $-\iint R(x, y, z)\,dx\,dy$ 即 $R(x, y, z)$ 在 S_1 下方面的面積分

$$\iint_{S_1} R(x, y, z)\,dx\,dy.$$

然則得三重積分與面積分之關係

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy, \tag{8}$$

面積分展布於 S 外方面.

若 S 面於 S_1, S_2, 二部外尚有一部分爲平行於 oz 之柱面, 則關係 (8) 仍合理, 蓋展布於此柱面上之面積分 $\iint \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy$ 等於零也.此結果且易推及於任意形狀之閉域.

同法得

$$\begin{cases} \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz, \\ \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_S Q(x, y, z)\,dz\,dx. \end{cases} \tag{9}$$

舉 (8) 與 (9) 三式加之, 則得

$$\begin{aligned} \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ = \iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy, \end{aligned} \tag{10}$$

是爲阿氏公式,面積分展布於 S 外方面.

設 $P=x$, $Q=R=0$, 或 $Q=y$, $P=R=0$ 或 $R=z$, $P=Q=0$. 復得見於前之體積公式.

169. 變數之替換.

設關係

$$
(11)\qquad \begin{cases} x=f(u,\ v,\ w), \\ y=\phi(u,\ v,\ w), \\ z=\psi(u,\ v,\ w) \end{cases}
$$

於正位標制 $oxyz$ 及 $ouvw$ 內確定點點相應之二域 V 與 V_1,並設 f, ϕ, ψ 在 V_1 內爲連續,且有連續偏紀數.若 $F(x, y, z)$ 爲 V 內之可積函數,則有變數替換公式

$$
(12)\qquad \iiint_V P(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz
$$

$$
=\iiint_{V_1} F(f,\ \phi,\ \psi)\left|\frac{\partial(f,\ \partial,\ \psi)}{\partial(u,\ v,\ w)}\right| du\ dv\ dw
$$

欲證之,可如 156 節注意若公式對於二種或數種特別替換眞,則對於此等替換相續而成之替換亦眞.又若於數域眞,則於其合成之總域亦眞.

繼證公式於替換

$$
(13)\qquad x=f(X,\ Y,\ Z),\quad y=Y,\quad z=Z,
$$

及

$$
(14)\qquad x=X,\quad y=\phi(X,\ Y,\ Z)\quad z=\psi(X,\ Y,\ Z)
$$

均眞.於是命 $X=u, Y=y, Z=z$, 則由 (11) 有

$$
(15)\qquad X=u,\quad Y=\phi(u,\ v,\ w),\quad Z=\psi(u,\ v,\ w),
$$

並由末二式可解出 v 與 w 對於 Y, Z 及 u 之值;以之代於 $f(u, v, w)$ 且以 X 代 u, 則得僅含 X, Y, Z 之一函數 $f_2(X, Y, Z)$,

而有

(16) $$x=f_1(X,Y,Z),\quad y=Y,\quad z=Z.$$

可見替換(11)與(16),(15)相當,卽與形如(13)與(14)之兩替換相當也.公式(12)既於替換(13),(14)眞,則於普通替換(11)亦眞.演證與156節者極類似,玆不詳述.

170. 體積元素(Element of volume).

取函數 $F(x,y,z)=1$, 則公式(10)變爲

$$\iiint_V dx\,dy\,dz=\iiint_{V_1}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw,$$

此式左端適爲 V 域之體積 V_1. 引用中值公式於左端,得

(17) $$V=V_1\left|\frac{\partial(f,\phi,\psi)}{\partial(u,v,w)}\right|\xi,\eta,\zeta,$$

V_1 爲 V 域體積, (ξ,η,ζ) 爲其內一點.

若於公式(11)中視 u,v,w 爲弧位標,則分別取 $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$, $w=\text{const.}$ 得三族曲面;吾人可以之分 V 域爲曲面六方體,限於相鄰六曲面 (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, (w), $(w+dw)$ 內之體積等於

$$\Delta V=\left[\left|\frac{\partial(f,\phi,\psi)}{\partial(u,v,w)}\right|+\varepsilon\right]du\,dv\,dw.$$

ε 與 du, dv, dw 同時爲無窮小,其主值

$$d\,V=\left|\frac{\partial(f,\phi,\psi)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$$

名爲關於弧位標 u,v,w 之體積元素.

命 ds 爲在此弧位標制內之線弧元素,則吾人由(11)式有

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\ \frac{\partial f}{\partial w}dw,$$

$$dy=\frac{\partial \phi}{\partial u}du+\frac{\partial \phi}{\partial v}dv\ \frac{\partial \phi}{\partial w}dw,$$

$$dz=\frac{\partial \psi}{\partial u}du+\frac{\partial \psi}{\partial v}dv+\frac{\partial \psi}{\partial w}dw;$$

因之得

(18) $$ds^2=H_1du^2+H_2dv^2+H_3dw^2$$
$$+2F_1dv\,dw+2F_2dw\,du+2F_3du\,dv,$$

式中命

(19) $$H_1=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad H_2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\quad H_3=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2$$

$$F_1=\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w},\quad F_2=\sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u},\quad F_3=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

dV 之值甚易由關於 ds^2 之公式推得.蓋

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}H_1 & F_3 & F_2\\ F_3 & H_2 & F_1\\ F_2 & F_1 & H_3\end{vmatrix}=M;$$

是有 $dV=\sqrt{M}\,du\,dv\,dw$ 也.

於此有一重要特例,即 (u), (v), (w) 三曲面族成互相正交者是;欲其如此,此等曲面之交線必兩兩正交,而吾等有 $F_1=F_2=F_3=0$; 此條件亦顯然充足.然則

(20) $$ds^2 = H_4 du^2 + H_2 dv^2 + H_3 dw^2,$$

而

(21) $$dV = \sqrt{H_1 H_2 H_3}\, du\, dv\, dw.$$

此二公式亦易由微分幾何理推得.設 du, dv, dw 甚小,而視上所言之小域爲一平行六面體.則其三邊爲 $\sqrt{H_1}\, du$, $\sqrt{H_2}\, dv$, $\sqrt{H_3}\, dw$ 略去高級無窮小). 於是取其對角線爲線長元素及其體積爲體積元素, 即得公式 (20), (21). 又六面體一面之面積如 $\sqrt{H_1 H_2}\, du\, dv$ 爲曲面 (w) 之面積元素.

例 1. 於極位標

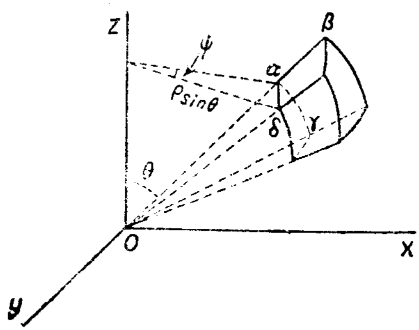
(22) $$x = \rho \sin\theta \cos\phi, \quad y = \rho \cos\theta \sin\phi, \quad z = \rho \cos\theta,$$

吾等有

(23) $$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\phi\, d\phi^2;$$

因之得

(24) $$dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$



第 32 圖

dV 之值亦甚易由幾何理求出. 蓋 $\rho = \text{const.}$ 表 O 爲心之一球面; $\theta = \text{const.}$ 表 oz 爲軸而 O 爲尖之一族圓錐面;又 $\psi = \text{const.}$ 表過 oz 之一族平面. 此三族曲面顯然彼此正交.每族中取相隣之二面,則得一六面體 $\alpha\beta\gamma\delta$, 如圖 32. 此可視爲一平行六面體,其邊 $\alpha\beta = d\rho$, $\alpha\gamma = \rho\, d\theta$, $\alpha\delta = \rho \sin\theta\, d\psi$, 於是仍得體積元素公式(24).

例. 於圓柱位標

(24) $$x=r\cos\omega,\quad y=r\sin\omega,\quad z=z,$$

有

(25) $$ds^2=dr^2+r^2d\omega^2+dz^2;$$

因之得

(26) $$dV=r\,dr\,d\omega\,dz.$$

此公式亦易由幾何得之.

II. n 次重積分

171. n 次重積分之定義(n-tuple integrals).

二次三次重積分之分析定義顯可推廣而得所謂 n 次重積分.於此雖幾何之圖表不可能,但吾人仍可假用幾何名詞以便解說.

命 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 為 n 個之一組自變數;吾人稱此等自變數之一組值 $x^0{}_1, x^0{}_2, \cdots\cdots, x^0{}_n$ 為 n 元或 n 緯空間內之一點.吾等仿在三元空間內,謂關係 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=0$(其左端為一連續函數)表一曲面,而於 f 為一次式時則表一平面.又凡合於一種不等式

(27) $$\phi_i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\leqq 0,\quad (i=1, 2, \cdots\cdots, k)$$

之點合成 n 元空間之一域 D. 若 D 內任何點之位標 x_i 均絕對小於一定數,則稱為圍域,更特別言之,若規定 D 之不等式呈下形

(28) $$x^0_1 \leqq x_1 \leqq X_1,\quad x^0_2 \leqq x_2 \leqq X_2, \cdots\cdots, x^0_n \leqq x_n \leqq X_n,$$

則此域名曰矩體(prismoid).而差數 $X_i - x^0_i$ 稱爲矩體之 n 元.若函數 ϕ_i 中至少有其一對於 D 之一點爲零,則此點稱爲位於 D 域之疆界上.

此等定義既明,試取囿域 D,並連續於其內之一函數 $F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$.設想由平行於平面 $x_i = 0 (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ 之平面劃分 D 爲小域;設 d_i 爲完全在 D 內之一小域.以 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots\cdots, \Delta x_n$ 爲其元;繼於 d_i 內任取一點 $(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n)$ 而作和數

(29) $$S = \Sigma F(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \cdots\cdots \Delta x_n,$$

Σ 包括 D 內所有 d_i 域言.於小矩體之數無限加多以使其諸元同趨於零時,此和數趨於一限 I,是爲 $F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 展布於 D 域的 n 次重積分,或簡稱 n 重積分,而由符號

$$I = \int\int \cdots\cdots \int_D F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n$$

表之.

n 重積分之求法可由二重三重積分者推廣而得;卽可化爲 n 個單積分而連求之.欲明此理,設其對於 $n-1$ 重積分然,推證對於 n 重積分亦然.夫 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1})$ 點在 $n-1$ 元空間作一域 D' 與 D 相應;設對於 D' 內每點,於 D 域界上只有兩點 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, x'_n)$ 與 $(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_{n-1}, x''_n)$ 應之.x'_n 與 x''_n 爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ 等 $n-1$ 個自變數於 D' 內之連續函數(若此條件未滿足,則吾等可分 D 爲數域使之對於各域滿足).今取 D

內與 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1})$ 點相應之一類矩體,易知 S 中來自此項矩體之部分可書作

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots\cdots \Delta x_{n-1} \left[\int_{x'_n}^{x''_n} F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\, dx_n + \varepsilon\right],$$

$|\varepsilon|$ 於 Δx_i 各量至小時,可小至所欲.若命

(30) $$\Phi(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}) = \int_{x'_n}^{x''_n} F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) dx_n,$$

則 I 等於和數

$$\Sigma\Phi(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}) \Delta x_1 \Delta x_2 \cdots\cdots \Delta x_{n-1}$$

之限,卽在 D' 內之 $n-1$ 重積分

(31) $$I = \int\int \cdots\cdots \int \Phi(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}) dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_{n-1}$$

明所欲證.

吾等亦可如次演算:先設 x_n 有定值而 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ 變,則此 $n-1$ 個變數於 $n-1$ 元空間作一域 D_1,命 $x^0{}_n$ 與 X_n 爲 x_n 在 D 內之低界與高界,則易知

(32) $$I = \int_{x^0{}_n}^{X_n} dx_n \int\int \cdots\cdots \int_{D_1} F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_{n-1}.$$

特別如 D 爲不等式

$$x^0{}_1 \leqq x_1 \leqq X_1, \cdots\cdots, x^0{}_i \leqq x_i \leqq X_i, \cdots\cdots, x^0{}_n \leqq x_n \leqq X_n$$

規定之矩體,則 n 重積分可書如

$$I = \int_{x^0{}_1}^{X_1} dx_1 \int_{x^0{}_2}^{X_2} dx_2 \cdots\cdots \int_{x^0{}_n}^{X_n} F(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)\, dx_n.$$

吾人於此可任意更換積分次序而積分限不變,但普通論之,積分之限自因求積分之次序不同而異.

變數替換公式亦易推及於 n 重積分.如

(33) $$x_i=\phi_i(x'_1, x'_2,\cdots\cdots, x'_n) \qquad (i=1, 2,\cdots\cdots, n)$$

爲替換關係,確定一域 D' 與 D 點點相應,則有

(34) $$\int\int\cdots\cdots\int_{D'} F(x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2\cdots\cdots dx_n$$

$$=\int\int\cdots\cdots\int_{D'} F(\phi_1, \phi_2,\cdots, \phi_n)\left|\frac{\partial(\phi_1, \phi_2,\cdots, \phi_n)}{\partial(x'_1, x'_2,\cdots, x'_n)}\right| dx'_1 dx'_2\cdots\cdots dx'_n.$$

演證二三重積分者彷彿,略分三層如次:

1°) 若公式(34)對於二種替換眞,則對於其相續而成之替換亦眞;

2°) 任意替換可由次之二替換相續而成:

(35) $$x_1=\phi_1(x'_1,\cdots\cdots, x'_n),\cdots\cdots, x_{n-1}=\phi_{n-1}(x'_1,\cdots\cdots, x'_n), x_n=x'_n,$$

(36) $$x_1=x'_1,\ x_2=x'_2,\cdots\cdots, x_{n-1}=x'_{n-1},\ x_n=\psi_n(x'_1, x'_2,\cdots\cdots x'_n),$$

3°) 若假設公式(34)於 $n-1$ 次重積分已正確,則其合於替換(35)可由公式(32)之化狀而知.又此公式合於(36)亦可由公式(31)而明.

III. 全微分之積分法

172. 尋常解法.

命 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 爲 x 與 y 之函數;吾等往論 $P\,dx+Q\,dy$ 式於若何條件之下爲 x 與 y 之一恰當微分 du,並求定 u,假如有函數 u 存在,使

(37) $$du=P\,dx+Q\,dy,$$

即使

(38) $$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y),$$

必須有

(39) $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

今吾謂此必須條件亦爲充足者,試證之:察方程組 (38) 與關係 (37) 相當,今先求一函數 $u(x, y)$ 合於 (38) 第一式,吾等立得

$$u=\int_{x_0}^{X} P(x, y)dx+Y$$

x_0 爲任意定數,而 Y 爲 y 之任一函數,繼定 Y 使 u 更合於第二式.欲其然,必須而即須

$$\int_{x_0}^{X}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx+\frac{dY}{dy}=Q(x, y).$$

準 (39) 有

$$\int_{x_0}^{X}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx=\int_{x_0}^{Y}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dy=Q(x, y)-Q(x_0, y)$$

上式於是變爲

$$\frac{dY}{dy}=Q(x_0, y),$$

而得

$$Y=\int_{y_0}^{Y} Q(x_0, y)\,dy+C.$$

y_0 爲 y 之任一特別值，C 爲一泛定常數，然則有無窮個函數合於(37)方程式，而由次列公式定之

(40) $$u=\int_{x_0}^{X} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{Y} Q(x_0, y)\,dy+C.$$

例設

$$(2x^2+2xy+y^2)\,dx+(x^2+2xy+3y^2)dy$$

於此 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 與 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 均等於 $2x+2y$；可知是一恰當微分 du 取 $x_0=0$，$y_0=0$，則由公式(40)得

$$u=\int_0^X (2x^2+2xy+y^2)\,dx+\int_0^Y 3y^2\,dy+C.$$

$$=\frac{2}{3}x^3+xy^2+xy^2+y^3+C.$$

上述之理可推及於任若干變數之問題，茲再就三變數之例論之.命 P, Q, R 爲 x, y, z 之函數；全微分方程式

(41) $$du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

與方程組

(42) $$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R.$$

相當.欲問題爲可能，必須

(43) $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}.$$

逆推之，此等條件若滿足，則準適所論者，並據(43)第一關係

可知函數

$$u=\int_{x_0}^{X} P(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{Y} Q(x_0,\,y,\,z)\,dy+Z$$

合於(42)前二方程式,而 Z 爲 z 之任一函數.於是只須求定 Z 以使 u 兼合於第三方程式.即須

$$\int_{x_0}^{X}\frac{\partial P}{\partial z}dx+\int_{y_0}^{Y}\frac{\partial Q(x_0,\,y,\,z)}{\partial z}dy+\frac{\partial Z}{\partial z}=R(x,\,y,\,z)$$

準(43)

$$R(x,\,y,\,z)-R(x_0,\,y,\,z)+R(x_0,\,y,\,z)-R(x_0,\,y_0,\,z)+\frac{dZ}{dz}=R,$$

或

$$\frac{dZ}{dz}=(x_0,\,y_0,\,z)\quad Z=\int_{z_0}^{Z} R(x_0,\,y_0,\,z)dz+C$$

然則得公式

$$(44)\quad u=\int_{x_0}^{X} P(x,\,y,\,z)dx+\int_{y_0}^{Y} Q(x_0,\,y,\,z)\,dy+\int_{z_0}^{Z} R(x_0,\,y_0,\,z)\,dz+C$$

$x_0,\,y_0,\,z_0$ 爲任意選取之三數,而 C 爲一泛定常數.

173. 積分 $\int_{M_0}^{M} P\,dx+Q\,dy$ 之討論.

前節問題尙可就他方面討論,且可由是求得新結果,設 $P(x,\,y)$ 與 $Q(x,\,y)$ 二函數在唯一周線 C 所範圍之域 A 內爲連續,且有初級偏紀數(C 亦可擴大至無限).命 L 爲完全位於 A 內之一曲線,而設線積分

$$\int_L P\,dx+Q\,dy.$$

通常此積分之值視路線 L 爲轉移.今試求一適當條件使其僅關係於 L 之兩端 $M_0(x_0, y_0)$ 與 $M(x, y)$,而與路徑無涉.別取任一路線 L' 連 M_0 於 M;暫設 L' 與 L 於 M_0 與 M 間不相交,而合成一迴線 Γ 以範圍一域 A.若是欲沿 L 的線積分與沿 L' 者等,顯然必須且亦只須此線積分沿迴線 Γ 爲零.然則所欲論之問題卽爲:欲積分 $\int P\,dx+Q\,dy$ 沿位於 A 內之任一迴線 Γ 爲零,條件當若何?其解立由格林氏公式

$$(45)\qquad \int_\Gamma P\,dx+Q\,dy=\int\int_A\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

而得:設 P, Q 於 A 內合於條件 (39),則左端線積分恆等於零,是 (39) 爲所欲求之充足條件.逆推之,此亦爲必須者,假若 $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$ 不於 A 內恆爲零,則按所設此爲 A 內之一連續函數,而吾人必能得一至小之域 A,使其在 A 內有定號.若是則沿 A 之周線 Γ 之線積分準 (45) 不能爲零明矣.

故條件 (39) 若滿足,則沿同始末 M_0 與 M 之二路線 L 與 L' 之線積分 $\int P\,dx+Q\,dy$ 必相等,卽使 L 與 L' 相交亦然.蓋別取與 L, L' 均不相交之一路線 L'' 爲輔助線,卽可證明.

此理明,設 $M_0(x_0, y_0)$ 爲定點,而令 $M(x, y)$ 於 A 內變移;沿 A 內任一路線的線積分

$$(46)\qquad F(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy$$

於是僅爲末點位標 x, y 之函數,吾謂此函數之偏紀數適爲

$P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$. 例取 $F'_x=P$ 證之.吾等可書

$$F(x+\Delta x, y)=F(x, y)+\int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x, y)\, dx.$$

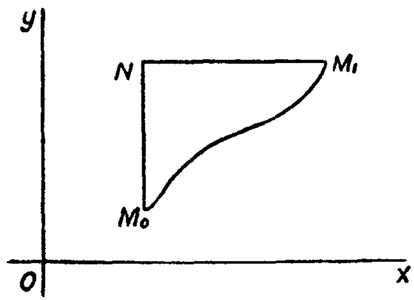
蓋由 (x_0, y_0) 點至 $(x+\Delta x, y)$ 點,可設先至 (x, y) 點繼循 ox 之平行線,再至 $(x+\Delta x, y)$ 點也.

於是準中值公式可書

$$\frac{F(x+\Delta x, y)-F(x, y)}{\Delta x}=P(x+\theta\,\Delta x, y), \qquad (0<\theta<1).$$

命 $\Delta x\to 0$ 卽得 $F'_x=P$. 同理 $F'_y=Q$. 然則線積分 $F(x, y)$ 合於微分方程式 (37), 但須加一泛定常數於下, 卽得此方程式之普通積分矣.

此法較前法爲普通, 蓋公式 (40) 可取一特別路線由 (46) 推得. 欲明之, 設 $M_0(x_0, y_0)$ 與 $M_1(x_1, y_1)$ 爲始點與末點. 吾等可取 $N(x_0, y_1)$ 點而以 M_0NM_1 爲積分路線. 若是則沿 M_0N, 有 $x=x_0$, $dx=0$, 沿 NM_1 有 $y=y_1$, $dy=0$. 故積分顯然等於



第 33 圖

$$\int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)dy+\int_{x_0}^{x_1} P(x,y_1)\, dx,$$

卽爲吾等所欲之結果

但欲定 F 之值,時或以取其他路線 Γ 爲佳. 命 $x=f(t)$, $y=$

$\phi(t)$ 爲 Γ 之方程式, t_0 與 t_1 爲 t 於 M_0 與 M_1 點之值,則

$$(47)\qquad \int_{M_0}^{M_1} P\,dx+Q\,dy=\int_{t_0}^{t_1}[Pf'(t)+Q\phi'(t)]\,dt.$$

例如取直線爲積分路線,則命 $x=x_0+t(x_1-x_0)$, $y=y_0+t(y_1-y_0)$ 而令 t 由 0 變至 1.

若已知方程式 (37) 之一解 $U(x, y)$, 則線積分之值可由公式

$$\int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} P\,dx+Q\,dy=U(x, y)-U(x_0, y_0)$$

而得.

以上結果甚易推及於空間之線積分.

於三緯空間內設由唯一閉面 S 範圍之一域 E, 並命 P, Q, R 表於 E 內爲連續,且有連續初級偏紀數之函數而設積分

$$(48)\qquad \int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

L 爲連 E 內任意二點 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 與 $M(x, y, z)$ 之一曲線,試求此線積分之值僅與 M_0, M 二點有關而與路線 L 無涉之條件. 問題仍變爲討論線積分沿 E 內任一迴線 Γ 之值於若何條件之下爲零. 按士氏公式

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx,$$

Σ 為以 Γ 為口之一曲面，欲此面積分無論周線 Γ 如何恆等於零，顯然必須而亦即須

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{49}$$

若是條件(49)果爾滿足，則線積分(48)僅與 M_0 與 M' 二點有關，而與路線無涉．設 M_0 固定，則此線積分為 x, y, z 之一函數：

$$F(x, y, z)=\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

且吾等易知在此條件之下 $dF=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ 若已知

$$du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

之一解 $U(x, y, z)$，則有

$$F(x, y, z)=U(x, y, z)-U(x_0, y_0, z_0).$$

174．面積分僅與曲面周界有關之條件．

吾等於面積分亦可討論與上彷彿之一問題．仍取上節所言之區域 E 而設 A, B, C 為於 E 內連續且有連續初級偏紀數之函數．吾等欲知面積分

$$\iint_{\Sigma} A\,dy\,dz+B\,dz\,dx+C\,dx\,dy$$

於若何條件之下(Σ 表位於 E 內之一曲面)僅與 Σ 面之周界有關，而與曲面無涉．欲其如此，吾等易知重積分展布於 E 內任一閉面上之值應為零．此條件立可由阿氏公式而得．蓋此

面積分等於展布於閉面所範圍之區域V內之三重積分

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

欲此三重積分等於零而無論V若何,顯然必須

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0,$$

而此條件自亦充足.

習　題

1. 討論函數

$$F(X, Y, Z)=\int_{x_0}^{X} dx\int_{y_0}^{Y} dy\int_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\, dz.$$

2. 設共焦點之二次曲面

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}=1, \qquad (a>b>c>0),$$

λ為一參變數.於空間每點$M(x, y, z)$,有三曲面過之,其一為橢面,其一為兩體雙曲面,又其一為單體雙曲面,與上方程式關於λ之三根$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$相應.此三數稱為$M$之<u>橢面位標</u>(elliptic coordinates).試明曲面族中過每點之三曲面彼此正交,並求體積元素.

3. 求展布於橢體$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$內的三次重積分

$$\iiint (2x+3y+6z)^2 dx\, dy\, dz. \qquad \text{答: } \frac{864\,\pi}{5}.$$

4. 求三重積分

$$\iiint [5(x-y)^2+3az-4a^2] dx\, dy\, dz$$

展布於不等式$x^2+y^2-az<0$, $x^2+y^2+z^2-2a^2<0$確定之域內.

(Licence, Montpellier, 1895). 答: $\frac{1}{12}\pi a^5$.

5. 求曲面　　$(x^2+y^2+z^2)^3=3a^3xyz$

限於三稜角 $oxyz$ 內之體積. 答 $\frac{a^3}{8}$

6. 命 $\rho=F(\theta,\phi)$ 爲一閉面 S 之極位標方程式,試證此曲面所包體積 V 等於展布於 S 外方面之面積分

$$\frac{1}{3}\iint\rho\cos(\rho,n)d\sigma.$$

$d\sigma$ 爲曲面積元素, (ρ,n) 爲徑矢 (radius vector) 與 S 引向外方面之法線所成之角.

7. 果士氏積分 (Gauss' integral): 命 S 爲一閉面, M 爲一定點, ρ 爲 M 之徑矢並 (ρ,n) 爲徑矢與 S 外方面法線所成之角.若是視 M 位於 S 內,或 S 上,抑 S 外,則面積分

$$\iint_S\frac{\cos(\rho,n)\,d\sigma}{\rho^2}$$

等於 4π, 或 0, 抑 2π.

8. 試定 k 使

$$\frac{(1+ky^2)\,dx+(1+kx^2)\,dy}{(1+xy)^2}$$

爲一恰當微分 du. 並求 u, 繼設 k 爲任意常數而於平面上取 $A(1,0)$, $B(1,1)$ 二點以求沿 AB 直線段, 及 AOB 折線之線積分

$$\int\frac{(1+ky^2)\,dx+(1+kx^2)\,dy}{(1+xy)^2},$$

並驗明於兩結果相等時 k 值爲前層所定之值.

9. 試求沿橢圓

$$x^2+4y^2-2x\sqrt{3}-1=0$$

之線積分

$$\int\frac{y\,dx}{x^2+y^2},$$

應取之向爲正向. 答: $-\frac{4}{3}\pi$.

10. 求定一函數 $f(x,y)$ 使其於 $x=0$ 時化簡爲 $\frac{1}{1+y^2}$, 並使線積分

$$I=\int f(x,y)[2x\,dx+(1-x^2)\,dy]$$

沿不含有$f(x, y)$之異點之任意迴線之值爲零.

繼設以$(1, 0)$爲心而半徑小於2之一圓;求上設線積分沿此圓之值I_1,應取之向仍爲正. (Licence, Pairs, 1916).

答: $f(x, y)=\frac{1}{(1-x^2)+y^2}$, $I_1=2\pi$.

11. 求定有連續偏紀數之連續函數$P(x, y)$與$Q(x, y)$使沿任一迴線的積分

$$\int P(x+\alpha, y+\beta)\,dx+Q(x+\alpha, y+\beta)\,dy$$

與常數α, β無涉,但僅與周線有關. (Licence, Paris, 1900)

12. 設展布於以迴線Γ爲邊界之曲面S上之面積分

$$\iint(1-x^2)\phi(x)dy\,dz+4zy\,\phi(x)dz\,dy-4xz\,dx\,dy,$$

試定函數$\phi(x)$使此積分之值僅與Γ有關而與S無涉.

(清華選送留美專科生試題, 1919).

答: $\phi(x)=2+C(1-x^2)$.

13. 設有三正交軸ox, oy, oz命$U(x, y)$表有連續偏紀數之一函數;試定x, y, z三變數之一函數$V(x, y, z)$,使展布於任一不與z軸相遇之閉面上之面積分

$$I=\iint\frac{U(x\cos\alpha+y\cos\beta)+V\cos\gamma}{x^2+y^2}\,d\sigma$$

等於零,α, β, γ表曲面向外之法線與三軸所成之角.

設函數V已適合上述條件,於是取與oz相遇於兩點A與B之一閉面S,而挖去其位於以oz爲軸及一小量r爲半徑之柱面內之兩小部分.如是得之曲面以S_1表之,試求展布於S_1上之積分I於$r\to0$時所趨近之限I_1.若在S上挖去含A點與B點之部分之形狀爲任意者,則所得積分之限是否相同? (Licence, Paris, 1921).

答: $V=-z\left[x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}\right]+\Phi(x, y)$, $I_1=2\pi\ \overline{AB}\ U(0, 0)$.

第 九 章

尤 拉 氏 積 分

I. 基本特性

勒讓德氏(Legendre)稱積分

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

爲尤拉氏第一種及第二種積分,前者確定a, b之一函數名爲 beta 函數,由 $B(a, b)$ 表之;後者確定 a 之一函數名爲 gamma 函數由$\Gamma(a)$表之.二者均常見於應用問題,在幾率學上尤爲重要.

175. 函數$\Gamma(a)$.

尤氏第二種積分

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

於 $a>0$ 恆有意義(但於 $a<0$ 時則否).欲明之,試設積分

$$\int_{\varepsilon}^1 x^{a-x}e^{-x}\,dx \quad 與 \quad \int_l^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

ε 爲甚小正數而 l 爲甚大正數.若注意 x 大之至可有 $x^{a-1}e^{-x}<\frac{1}{x^2}$ 卽明第二積分於$l\to+\infty$有一限;致第一積分,則因 $x^{1-a}f(x)$

於 $x\to 0$ 趨於 1, 可知欲其有一限, 必須亦只須 $1-a<1$, 即 $a>0$. 此見於 $a>0$ 尤氏第二種積分有意義而確定 a 之一函數, 卽

(1) $$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

吾等易知此函數於 $0<a<+\infty$ 隔間內爲連續.

176. Γ 函數之第一特性.

設 $a>1$; 據部分求積分法吾等有

$$\Gamma(a)=-\left[x^{a-1}e^{-x}\right]_0^{+\infty}+(a-1)\int_0^{+\infty} x^{a-2}e^{-x}\,dx,$$

旣設 $a>1$, 右端第一項爲零, 而得公式

(2) $$\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1).$$

若 $a>2$ 而等於 $p+a_1$, 其 p 爲一正整數並 a_1 爲介於 0 與 1 間之數, 則連用此公式可得關係

$$\Gamma(a)=(a-1)(a-2)\cdots\cdots(1+a_1)a_1\,\Gamma(a_1).$$

此見求 $\Gamma(a)$ 變爲求 $\Gamma(a_1)$. 後者之<u>元量</u>(argument)僅在 0 與 1 間.

若 a 爲一整數 n, 則注意

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1,$$

有公式

(3) $$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1=(n-1)!$$

<u>注意</u>. 由 $\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a)$ 可見於 $a\to 0$ 時, $a\,\Gamma(a)\to 1$, 是知 $\Gamma(a)$ 應趨於無窮.

177. 函數 $B(a,b)$.

吾等易知尤氏第一種積分

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

於 $a>0$ 及 $b>0$ 有意義(而於 $a<0, b<0$ 則否), 而確定 a 與 b 之一函數, 卽

(4) $$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

若易 x 爲 $1-x$, 積分形狀仍不改, 所異者僅 a 與 b 之位置互換而已. 可知

$$B(a,b)=B(b,a).$$

卽明 $B(a,b)$ 於 a,b 爲對稱.

$B(a,b)$ 函數尙可呈他形狀, 亦常見於應用, 玆更述之. 命

$$x=\cos^2\phi,\quad 1-x=\sin^2\phi,\quad dx=-2\cos\phi\sin\phi\,d\phi,$$

有

(5) $$B(a,b)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a-1}\phi\sin^{2b-1}\phi\,d\phi,$$

又命

$$t=\frac{x}{1-x},\quad x=\frac{t}{1+t},\quad dx=\frac{dt}{(1+t)^2},$$

得

(6) $$B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}\,dt}{(1+t)^{a+b}}$$

若書

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}dt}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^1\frac{t^{a-1}\,dt}{(1+t)^{a+b}}+\int_1^{+\infty}\frac{t^{a-1}\,dt}{(1+t)^{a+b}},$$

而於末項積分易t爲$\frac{1}{t}$,則有

$$B(a,b)=\int_0^1 \frac{t^{a-1}+t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt. \tag{7}$$

復顯出B於a與b之對稱性.

178. B函數與Γ函數之關係.

B函數可由Γ函數表之.試於尤氏第二種積分中易x爲x^2或y^2,則有

$$\Gamma(a)=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2a-1}\,dx,$$

$$\Gamma(b)=2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}y^{2b-1}\,dy.$$

舉此二式相乘,則得

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=4\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2a-1}\,dx\int_0^{+\infty} e^{-y^2}y^{2a-b}\,dy.$$

若引$x=l$及$y=l$($l>0$)二直線使與ox, oy成一正方形A,則上式右端可視作重積分

$$4\int\int e^{-x^2-y^2}x^{2a-1}y^{2a-b}\,dx\,dy$$

於$l\to+\infty$所趨近之限.按$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}x^{2a-1}y^{2b-1}$在$oxy$角內恆爲正,可知吾等若以$o$爲心作一圓,使與$xoy$角範圍一域$R$,則重積分

$$4\int\int_R e^{-x^2-y^2}x^{2a-1}y^{2b-1}\,dx\,dy$$

於圓半徑$r\to+\infty$時亦趨於是限.易爲極位標,此重積分變爲

$$4\int_0^r e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-1}\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta\,d\theta.$$

然則

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=4\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-1}\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta\,d\theta$$

即得公式

(8) $$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

179. Γ函數之第二特性:餘元關係.

設 $b=1-a$, $(0<a<1)$ 有

$$B(a,1-a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}=\Gamma(a)\Gamma(1-a).$$

準公式(7)

$$B(a,1-a)=\int_0^1\frac{x^{a-1}+x^{-a}}{1+x}dx,$$

此積分之值可以求出:據關係

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

化之有

$$B(a,1-a)=\int_0^1(x^{a-1}+x^{-a})[1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^n x^n]\,dx$$
$$+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+a}+x^{n-a+1}}{1+x}\,dx,$$

或 $$B(a,1-a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{2-a}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1}{n+a}-(-1)^n\frac{1}{n-a}+(-1)^n\frac{1}{n-a+1}$$
$$+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}+x^{n-a+1}}{1+x}dx.$$

準中值公式,末端積分可書如

$$\int_0^1 \frac{x^{n+a}+x^{n-a+1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{1}{n+a+1}+\frac{1}{n-a+2}\right), \qquad (0<\theta<1)$$

而於 $n\to\infty$ 趨於零,可知

$$B(a,1-1)=\frac{1}{a}-\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{2+a}-\frac{1}{2-a}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{n+a}-(-1)^n\frac{1}{n-a}+\cdots\cdots$$

於是按三角函數公式(1)

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+\pi}-\frac{1}{z-\pi}+\frac{1}{z+2\pi}+\frac{1}{z-2\pi}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{z+n\pi}+(-1)^n\frac{1}{z-n\pi}+\cdots\cdots$$

得 $B(a,1-a)=\dfrac{\pi}{\sin n\pi}$, 即得公式

(9) $$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

是爲餘元關係(法文 Relation des compléments).

特別於 $a=\dfrac{1}{2}$, 得

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi,\ \text{即}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

但此結果亦可直接由積分得之.蓋

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

命 $x=y^2$, 此積分即變爲

(1) 可參攷 Hobson, Trigonometry p. 335.

$$2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy=\sqrt{\pi}.$$

180. Γ函數之第三特性.

由公式(8)及(7)

$$B(a,a)=\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)}=2\int_0^1\frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{2a}}$$

命 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,　$dx=-\dfrac{2dy}{(1+y)^2}$, 則

$$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-2}}\int_0^1(1-y^2)^{a-1}\,dy$$

或易 y 爲 $\sqrt{y}$,

$$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1(1-y)^{a-1}\,y^{-\frac{1}{2}}\,dz=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(a,\frac{1}{2}\right)$$

於是準公式(8)並代 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 以 $\sqrt{\pi}$, 則此關係化爲

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

又易 a 爲 $\dfrac{a}{2}$, 則得

$$\Gamma(a)=\frac{2^{a-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right). \tag{10}$$

名爲勒讓德氏公式;而表明Γ函數之一重要特性,即利用此公式及餘元關係,可縮小求 $\Gamma(a)$ 之隔間爲 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

181. 尤拉氏乘積.

以 n 表一正整數而於公式(9)內連續令 $a=\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\cdots,\dfrac{n-1}{n}$ 並乘其結果,得

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi}.$$

取三角函數公式(1)

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=2^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cdots\sin\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

而令 $\theta\to0$, 則有

$$n=2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi,$$

據此則上之關係變為

(11)
$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

即尤氏乘積公式,呆氏更得一較普通之公式,於後再述及之.

II. $D\log\Gamma(a)$ 與 $D^2\log\Gamma(a)$ 及 $\Gamma(a)$ 之無窮乘積式

182. $D\log\Gamma(a)$ 之歌西氏公式.

此公式為

(12)
$$\frac{d}{da}\log\Gamma(a)=\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_0^{+\infty}\left[e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}.$$

吾等易知萊氏積分號下求紀法可施於確定 $\Gamma(a)$ 之積分,故 $\Gamma(a)$ 因之 $\log\Gamma(a)$ 確有紀數存在.欲求(12),吾從哈達馬氏(M. J. Hadamard)書

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(x)}=\lim_{h\to0}\frac{\Gamma(a-h)-\Gamma(a)}{-h\,\Gamma(a)}$$

(1) 見 Hobson.—Trigonometry, p. 117.

而令 h 由正數值趨於零，若注意 $h\Gamma(h)$ 於 $h\to 0$ 時以 1 爲限，則此式尚可書如

$$\frac{d}{da}\log\Gamma(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\Gamma(a)-\Gamma(a-h)}{\Gamma(a)}\Gamma(h)$$

$$=\lim_{h\to 0}[\Gamma(h)-B(a-b,h)].$$

於是準公式(1)與(6)立得

$$\frac{d}{da}\log\Gamma(a)=\lim_{h\to 0}\int_0^{+\infty}\left[e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right]x^{h-1}\,dx.$$

今若分末端積分爲二 $\int_0^1$ 與 $\int_1^{+\infty}$，並注意被積函數於 $x>0$ 與 $h>0$ 爲連續，且於 $x=0$, $h=0$ 亦有定值，則易明積分 $\int_0^1$ 於 $h\geqq 0$ 一致收斂，而 $\int_1^{+\infty}$ 於 $0\leqq h\leqq k<1$ 亦一致收斂. 於是欲定此積分之限，但須於積分號下逕令 $h\to 0$ 卽可. 如是立得公式(12).

183. 杲士氏公式.

於公式(12)內令 $a=1$，得

$$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}\left[e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right]\frac{dx}{x}\tag{13}$$

以與(12)相減並以 C 代表 $-\Gamma'(1)$，則有

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+C=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right)\frac{dx}{x};$$

再命 $1+x=\frac{1}{y}$，則得公式

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+C=\int_0^1\frac{1-y^{a-1}}{1-y}\,dy.\tag{14}$$

名為泉氏公式

若a為有理數,則積分可實行求出.今若a特別為一正整數n,則有

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}+C=\int_0^1(1+y+\cdots\cdots+y^{n-2})\,dy.$$

或

$$(15)\qquad C=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-D\log\Gamma(n).$$

吾等於後證明常數C,即77節所論之尤氏常數,其差近値即可據此公式利用$D\log\Gamma(n)$之差近値以求之.

134. 泉氏乘積.

此為尤氏乘積之推廣式.命n與k表二正整數而於公式(14)內換a為$a+\frac{k}{n}$,繼設$y=x^n$,有

$$\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}+C=\int_0^1\frac{1-y^{a+\frac{k}{n}-1}}{1-y}\,dy=n\int_0^1\frac{x^{n-1}-x^{na-1+k}}{1-x^n}\,dx.$$

令$k=0,1,\cdots\cdots,(n-1)$,而加其結果,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}+n\,C=n\int_0^1\frac{nx^{n-1}-x^{na-1}(1+x+\cdots\cdots+x^{n-1})}{1-x^n}\,dx,$$

$$=n\int_0^1\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right)dx.$$

又由公式(14)有

$$n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}+n\,C=n\int_0^1\frac{1-x^{na-1}}{1-x}\,dx$$

以與上式相減,則得

$$(16)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}-n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(n+a)}=n\int_0^1\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)dx.$$

命 $x=e^{-t}$ 末端積分變爲

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{ne^{-nt}}{1-e^{-nt}}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)dt.$$

吾可求其値如次:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{nte^{-nt}}{1-e^{-nt}}\cdot\frac{dt}{t}-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt\right]$$

於括鈎內前項易 nt 爲 t,

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{n\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{n\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt;$$

繼準中値公式,

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\xi e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}}\int_{n\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{dt}{t}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\xi e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}}\log\frac{1}{n},$$

ξ 爲介於 $n\xi$ 與 ε 間之一數而隨 ε 趨於零. 可知 $I=-\log n$ 而關係(16)變爲

$$(17)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}-n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}=-n\log n$$

將兩端求積分,則有

$$\log\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-an\log n+\log C,$$

或 $$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=C_n^{-na}\,\Gamma(na).$$

欲定常數 C, 命 $a=\frac{1}{n}$; 若是左端變爲尤氏乘積, 而

$$C=\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

於是得果氏公式

$$(18)\qquad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{a}}\frac{\Gamma(na)}{n^{na-\frac{1}{2}}}$$

命 $n=a$ 復得公式(9). 若陸續命 $n=3, 4, \cdots\cdots$, 則據此公式可逐漸收縮求 $\Gamma(a)$ 之值之必要隔間.

注意. 設 $a=1$, 公式(17)可書如

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}-\log n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

令 $n\to+\infty$, 則有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}-\log n\right]=\int_0^1\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}\,dx$$

$$=\Big[\log\Gamma(1+x)\Big]_0^1=0.$$

據此則見於184節之常數

$$C=-\Gamma'(1)=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n\right]-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}-\log n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n\right]$$

而確爲77節所謂之尤氏常數.

185. $D^2\log\Gamma(a)$, $D\log\Gamma(a)$ 及 $\log\Gamma(a)$ 之展式.

於呆氏公式中命 $y=e^{-x}$ 有

$$\frac{d}{da}\log\Gamma(a)+C=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}dx,$$

積分號下求紀法於右端積分顯然適用,而吾等有

$$\frac{d^2}{da^2}\log\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-x}}dx.$$

於被積函數,代 $1/(1-e^{-x})$ 以其展式

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\cdots\cdots+e^{-(n-1)x}+\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}},$$

得

$$\frac{d^2}{da^2}\log\Gamma(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty}xe^{-(a+k)x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-(a+n)x}}{1-e^{-x}}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(a+k)^2}+R_n(a).$$

注意命 b 表任一正數,

$$R_n(a)=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-(a+n)x}}{1-e^{-x}}dx>\int_0^b\frac{xe^{-nx}}{1-e^{-x}}dx$$

又準中值公式,

$$\int_0^b\frac{xe^{-nx}}{1-e^{-x}}dx=e^{-n\xi}\int_0^b\frac{x}{1-e^{-x}}dx,\qquad(0<\xi<b).$$

可知於 $n\to+\infty$ 時 $R_n(a)$ 趨於零而無論正數 a 爲何,然則得

$$(19)\quad \frac{d^2}{da}\log\Gamma(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(a+n)^2}+\cdots\cdots$$

右端級數於 $a>0$ 一致收斂.

若將(19)式之兩端自1至a求積分,則得

$$\frac{d}{da}\log\Gamma(a)=-C+\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{a+n}\right)+\cdots\cdots \tag{20}$$

右端級數仍對於a之任何正數值爲收斂.再將此式自1至a求積分得

$$\log\Gamma(a)=-C(a-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{1+n}-\log\frac{a+n}{1+n}\right) \tag{21}$$

或易a爲$a+1$.

$$\log\Gamma(a+1)=-Ca+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}-\log\frac{a+n}{n}\right). \tag{21'}$$

右端仍爲收斂級數.吾等尙可汰去常數C.只須於(21)內令$a=2$而取所得結果

$$0=-C+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}-\log\frac{2+n}{1+n}\right)$$

與$a-1$之積以與(21)相減,卽得

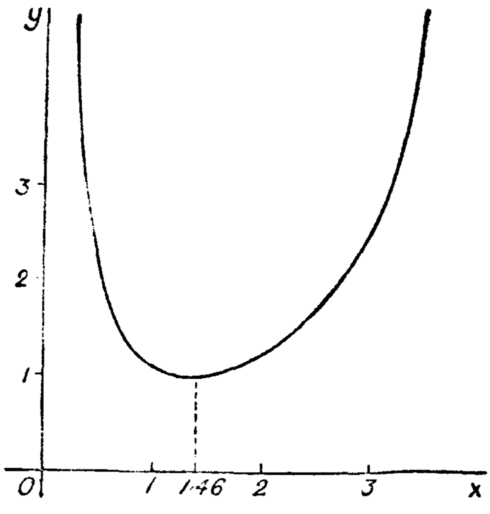
$$\log\Gamma(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(a-1)\log\left(1+\frac{1}{1+n}\right)-\log\left(1+\frac{a-1}{1+n}\right)\right] \tag{22}$$

186. Γ函數之變跡及圖線.

命 $$y=\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dt,\qquad (x>0).$$

吾等知$\Gamma(x)$於$x>0$爲連續,而於$x\to0$或$x\to+\infty$時趨於$+\infty$.

今由關係(19)知 $D^2\log\Gamma(x)$ 於 $x>0$ 恆爲正,因之函數 $D\log\Gamma(a)$ 卽 $\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ 爲一增函數,而據(20)知其於 $x=0$ 之值爲 $-\infty$,並於 $x=+\infty$ 時者爲 $+\infty$. 又因 $\Gamma(x)$ 恆爲正,可見 $\Gamma'(x)$ 於 x 自 0 變至 $+\infty$ 時由正變爲負一次,而限於一次.然則於 x 自 0 變至 $+\infty$, $\Gamma(x)$ 自 $+\infty$ 連續減小至某一正值 m,然後自 m 連續增大至無窮,而以 m 爲極小.按 $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ 可知極小 m 應介於 $x=1$ 與 $x=2$ 之間,而其值小於1.吾等於是知圖線之大體(1),如圖 34.



第 34 圖

187. 維氏公式:尤氏公式及呆氏函數 Π.

(1) 於極小之求法可參考 Serret. Cours de Calcul differentiel et integral, Tom. II, p. 181 及 Edwards.—A Treatise on the integral Calculus Vol. II. p. 108. 於較確切之圖線可參閱 Edwards 氏書.

將公式(21′)去 log 號,立得

$$(23)\qquad \frac{1}{\Gamma(a+1)}=e^{Ca}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}},$$

名爲維氏(Weierstrass)公式,此式表 $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ 以一無窮乘積,其各因子稱爲一初因子(primary factor).此乘積可用作根據以推廣 $\Gamma(a)$ 於 a 爲虛數時之定義.

又公式(22)可書如

$$\log\Gamma(a)=\lim_{m\to+\infty}\left[(a-1)\log m+\sum_{n=0}^{m-2}\log\frac{1+n}{a+n}\right];$$

去 log 號,

$$\Gamma(a)=\lim_{m\to+\infty}m^{a-1}\frac{1\cdot2\cdots\cdots(m-1)}{a(a+1)\cdots\cdots(a+m-2)}\cdot$$

吾等尚可乘以 $\frac{m}{a+m-1}$,因此分數於 $m\to+\infty$ 時趨於1也.若是得

$$(24)\qquad \Gamma(a)=\lim_{m\to+\infty}\frac{1\cdot2\cdots\cdots(m-1)m}{a(a+1)\cdots\cdots(a+m-1)}m^{a-1},$$

卽爲尤氏所得公式,杲氏復自求得之.此乘積亦可爲 $\Gamma(a)$ 函數定義推廣之根據.易 a 爲 $\cancel{m}\,a+1$ 卽得所謂之杲氏函數 Π(Causs' Π function),卽

$$(25)\qquad \Pi(a)=\lim_{m\to+\infty}\frac{1\cdot2\cdots\cdots m}{(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+m)}m^{a}$$

由定義可知 $(\Pi a)=\Gamma(a+1)$.

III. 幾近值公式

138. 拉阿伯氏積分(Raabe's integral).

積分

$$I(a)=\int_0^1 \log\Gamma(a+x)\,dx=\int_a^{a+1}\log\Gamma(x)\,dx$$

名曰<u>拉氏積分</u>,其值可由基本函數表之.求紀並代 $\Gamma(a+1)$ 以 $a\,\Gamma(a)$ 得

$$I'(a)=\log\Gamma(a+1)-\log\Gamma(a)=\log a;$$

由是

$$I(a)=\int\log a\,\overset{da}{} +C=a\log a-a+C.$$

欲定常數 C, 命 $a=0$; 若是有 $C=I(0)$, 而

$$I(\underset{0}{\cancel{a}})=\int_0^1\log\Gamma(x)\,dz=\int_0^{\frac{1}{2}}\log\Gamma(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\log\Gamma(x)\,dx,$$

即

$$I(0)=\int_0^{\frac{1}{2}}[\log\Gamma(x)+\log\Gamma(1-x)]\overset{dx}{}=\int_0^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{\pi}{\sin x\pi}\right)dx.$$

吾等知

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\log\sin(x\pi)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin y\,dy=-\frac{1}{2}\log 2,$$

可見

$$I(0)=\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{2}\log 2=\log\sqrt{2\pi}.$$

於是

$$I(a)=\int_0^1\log\Gamma(a+x)\,dx=a\log a-a+\log\sqrt{2\pi}. \tag{26}$$

此積分於 Γ 函數理極重要.

189　$\log\Gamma(a)$ 由定積分表出之式.

取歌氏公式

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_0^{+\infty}\left[e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^a}\right]\frac{dt}{t}. \tag{12}$$

吾謂右端積分於 $a \geqq k > 0$ (k 爲一定數,可甚小)爲一致收斂.蓋書之如

$$\int_0^1\left[e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^a}\right]\frac{dt}{t}+\int_1^{+\infty}e^{-t}\frac{dt}{t}-\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^a t}$$

則首項爲一尋常積分,第二項爲一收斂的無窮積分與 a 無涉,而末項無窮積分甚易知其於 $a>k$ 爲一致收斂也.於是積分號下求積分法可施之於 (12) 右端.今將 (12) 兩端自 1 至 a 求積分,則有

$$\log\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}\left[(a-1)e^{-t}-\frac{(1+t)^{-1}-(1+t)^{-a}}{\log(1+t)}\right]\frac{dt}{t},$$

積分仍爲一致收斂.命 $a=2$, 有

$$0=\int_0^{+\infty}\left[e^{-t}-\frac{(1+t)^{-2}t}{\log(1+t)}\right]\frac{dt}{t}$$

乘以 $-(a-1)$ 而以與上式相加,則得

$$\log\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}\left[\frac{a-1}{(1+t)^2}-\frac{(1+t)^{-1}-(1+t)^{-a}}{t}\right]\frac{dt}{\log(t+1)},$$

更命 $\log(t+1)=x$, 因之 $t=e^{x-1}$, 則此式變爲

$$\log\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}\left[(a-1)e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x} \tag{27}$$

即所欲求之式.右端積分仍於 $a>k$ 爲一致收斂.

<u>注意</u>. 將 (27) 兩端自 a 至 $a+1$ 求積分,則得拉阿伯氏積分之又一式

(28) $$I(a)=\int_a^{a+1}\log\Gamma(a)\,da=\int_0^{+\infty}\Big[\Big(a-\frac{1}{2}\Big)e^{-x}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+\frac{e^{-ax}}{x}\Big]\frac{dx}{x}.$$

160. 畢訥氏函數 (Binet's function) 及 $\log\Gamma(a)$ 之幾近值.

舉公式(27)與(28)相減,有

$$\log\Gamma(a)-I(a)=\int_0^{+\infty}\Big[-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-ax}}{x}\Big]\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\Big)e^{-ax}\frac{dx}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{2}\frac{dx}{x}.$$

末項積分由積分號下求微分法易得其值爲 $\frac{1}{2}\log a$. 然則有

$$\log\Gamma(a)-I(a)+\frac{1}{2}\log a=\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\Big)e^{-ax}\frac{dx}{x}.$$

右端積分爲 a 之一函數稱爲畢納氏函數由 $\Omega(a)$ 表之:

(29) $$\Omega(a)=\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\Big)e^{-ax}\frac{dx}{x}$$

於是代 $I(a)$ 以其由(26)確定之值,得

(30) $$\log\Gamma(a)=\log\sqrt{2\pi}+\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\log a-a+\Omega(a).$$

當 $a\to\infty$, 顯然 $\Omega(a)\to 0$. 故於(30)式中略去 $\Omega(a)$, 可得 $\log\Gamma(a)$ 之一逹近值,是即 $\log\Gamma(a)$ 之一幾近值 (asymptotic value).

191. 司特領氏級數及公式 (Stirling's series and formula).

吾人可以數法展 $\Omega(a)$ 爲級數. 吾等以後證明

(31) $$\Big(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{x}=\frac{B_1}{2!}-\frac{B_2}{4!}x^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}x^{2n-2}$$
$$+(-1)^n\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\theta x^{2n}$$

$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$ 等常數稱爲伯努義氏數 (Bernoullian numbers).

據此有

$$\Omega(a)=\frac{B_1}{2!}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx-\frac{B_2}{4!}\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-ax}\,dx+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\int_0^{+\infty} x^{2(n-1)}e^{-ax}\,dx+R,$$

$$R=(-1)^n\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^{+\infty}\theta\,x^{2n}\,e^{-ax}\,dx$$

而
$$\int_0^{+\infty} x^{2p}\,e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(2p+1)}{a^{2p+1}}=\frac{(2p)!}{a^{2p+1}}.$$

並準中值公式

$$R=(-1)^n\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\,\theta'\int_0^{+\infty} x^{2n}\,e^{-ax}\,dx,\qquad(0<\theta'<1)$$

然則得

$$\Omega(a)=\frac{B_1}{1\cdot 2}\,\frac{1}{a}-\frac{B_2}{3\cdot 4}\,\frac{1}{a^3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\,\frac{1}{a^{2n-1}}+R,\tag{32}$$

$$R=(-1)^n\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\,\frac{\theta'}{a^{2n+1}}\qquad(0<\theta'<1)$$

卽爲司氏級數,此級數若無限延展係一發散級數,但只須 a 甚大,其起始諸項卽減殺甚速,又由 R 可知取前若干項爲差近値所發生之舛差小於略去之第一項.故截止於已將減小之項,則可得一足用之切近値,而精切之程度不難知之.吾人因稱司氏級數爲僞收歛 (psendo-convergent).

特別設 $n=0$, 並按 $B_1=\frac{1}{6}$ (見後),得

$$\Omega(a)=\frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{\theta}{a}=\frac{\theta}{12a},\qquad 0<\theta<1$$

以此代於(30),則得司氏公式

$$(33)\qquad \log\Gamma(a)=\log\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\frac{\theta}{12a},$$

$$(34)\qquad \Gamma(a)=\sqrt{2\pi}.\ a^{a-\frac{1}{2}}e^{-a+\theta/12a}.$$

若 a 爲一正整數 m,則以 m 乘末式兩端可書如

$$(35)\qquad m!=\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m e^{\frac{\theta}{12m}}.$$

此結果於幾率上至是爲重要,因 $\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$ 可取爲 $m!$ 於甚大時之差近值也.相對舛差可甚小,但絕對舛差可甚大.

192. $D\log\Gamma(a)$ 之幾近值.

將公式(30)求紀有

$$(36)\qquad \frac{d}{da}\log\Gamma(a)=\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\log a-\frac{1}{2a}+\Omega'(a).$$

而
$$\Omega'(a)=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-ax}\,dx$$

準公式(31),

$$\Omega'(a)=-\frac{B_1}{2!}\int_0^{+\infty}xe^{-ax}\,dx+\frac{B_2}{4!}\int_0^{+\infty}x^3e^{-ax}\,dx-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{B_n}{(2n)!}\int_0^{+\infty}x^{2n-1}\,e^{-ax}\,dx$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^{+\infty}\theta\,x^{2n+1}\,e^{-ax}\,dx,$$

或

$$(37)\quad \Omega'(a)=-\frac{B_1}{2a^2}+\frac{B_2}{4a^4}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{B_n}{2na^{2n}}+(-1)^{n+1}\frac{\theta'\,B_{n+1}}{2n+2},$$

$$(0<\theta'<1)$$

此結果適與直接就公式(32)求紀而得者同. 若 $n\to+\infty$, 仍得一僞收斂級數與司氏級數彷彿.

據公式(36)及(37)吾人可求尤氏常數 C 之差近值. 蓋按 183 節公式(15)

$$C=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{m-1}-D\log\Gamma(m)$$

只須取 m 甚大而求 $D\Gamma(m)$ 之一差近值, 差近程度可大至人之所欲. (1)

IV. Γ函數於求定積分之應用

193. 單積分例.

往往定積分可由Γ函數表之, 例如

$$I=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^p))^{n-1}\,dx.$$

此積分於 $m>0, n>0, p>0$ 有意義, 命 $x^p=y$, 則變爲

$$I=\frac{1}{p}\int_0^1 y^{\frac{m}{p}-1}(1-y)^{n-1}\,dy=\frac{1}{p}B\left(\frac{m}{p},n\right)=\frac{1}{p}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(n\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}+n\right)}.$$

玆再舉一例; 設

$$J=\int_0^1\frac{dx}{(x-a)^5\sqrt{x^2(1-x)^3}}.$$

命
$$x=a\frac{1-y}{a-y},\qquad dx=\frac{a(1-a)}{(a-y)^2}dy.$$

(1) 可參閱 Serret—Cours de Calcul differentiel et integral, tome II,

得

$$J=\int_1^0 \frac{dy}{a^{\frac{5}{2}}(a-1)^{\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}(1-y)^{\frac{2}{5}}}$$

$$=a^{-\frac{5}{2}}(1-a)^{-\frac{3}{5}}\int^1 y^{-\frac{3}{5}}(1-y)^{-\frac{2}{5}}dy$$

$$=a^{-\frac{5}{2}}(1-a)^{-\frac{3}{5}}B\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)=a^{-\frac{5}{2}}(1-a)^{-\frac{3}{5}}\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right).$$

準餘元關係 $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$, 立得

$$J=a^{-\frac{5}{2}}(1-a)^{-\frac{3}{5}}\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}}.$$

194. 狄里克來氏積分 (Dirichlet's integral).

吾等就三重積分論之. 狄氏積分即

$$I=\iiint_D x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz,$$

D 域係位標面及平面 $x+y+z=1$ 所成之菱體, p, q, r, s 均爲正數. 試命

$$x+y+z=\xi,\qquad y+z=\xi\eta,\qquad z=\xi\eta\zeta;$$

而取 ξ, η, ζ 爲新變數. 將此等關係就 ξ, η, ζ 解出, 有

$$\xi=x+y+z,\quad \eta=\frac{y+z}{x+y+z},\quad \zeta=\frac{z}{y+z}.$$

反之, 就 x, y, z 解出, 有

$$x=\xi(1-\eta),\quad y=\xi\eta(1-\xi),\quad z=\xi\eta\zeta.$$

當 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$, $x+y+z\leqq 1$, 易知 ξ, η, ζ 皆含於 0 與 1 間. 反

之,當 ξ, η, ζ 含於0與1間,吾人有 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+y+z \leqq 1.$ 然則菱體 D 由邊爲1之立方體代之.

欲求札氏式,命 $X=\xi, Y=\xi\eta, Z=\xi\eta\zeta$. 由此 $x=X-Y,\ y=Y-Z,\ z=Z$, 而有

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} \cdot \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}=\xi^2 \eta.$$

三重積分於是變爲

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 \xi^{p+q+r-1}(1-\xi)^{s-1} \eta^{q+r-1}(1-\eta)^{p-1} \xi^{r-1}(1-\xi)^{q-1}\, d\xi.$$

或

$$\int_0^1 \xi^{p+q+r-1}(1-\xi)^{s-1}\, d\xi \int_0^1 \eta^{q+r-1}(1-\eta)^{p-1}\, d\eta \int_0^1 \xi^{r-1}(1-\xi)^{q-1}\, d\xi.$$

於是引用 Γ 函數,則有

$$I=\frac{\Gamma(p+q+r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)} \cdot \frac{\Gamma(q+r)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q+r)} \cdot \frac{\Gamma(r)\Gamma(q)}{\Gamma(q+r)};$$

約之,得

(38) $$\iiint_D x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}\, dx\, dy\, dz =\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}.$$

例求橢體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

限於 $Oxyz$ 棱角内之體積 V; 命

$$\frac{x^2}{a^2}=\xi, \qquad \frac{y^2}{b^2}=\eta, \qquad \frac{z^2}{c^2}=\zeta$$

即爲積分

$$V=\iiint_{V_1}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right| d\xi\, d\eta\, d\zeta=\frac{1}{8}\,abc\iiint\xi^{-\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}\,d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

V_1 爲 $0\xi\eta\zeta$ 位標面與 $\xi+\eta+\zeta=1$ 平面所限之體積,而積分爲一狄氏積分,準(38)立得

$$V=\frac{1}{8}\,abc\,\Gamma^3\left(\frac{1}{2}\right)\quad\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

因 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, 並

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

故
$$V=\frac{1}{8}\,\pi\,abc.$$

195. 狄氏 n 重積分.

茲更推廣而論積分

$$(39)\qquad \iint\cdots\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots\cdots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots\cdots-x_n)^{q-1}\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n,$$

積分域 D 由不等式:

$$0\leqq x_1,\ 0\leqq x_2,\cdots\cdots,\ 0\leqq x_n,\ x_1+\cdots\cdots+x_n\leqq 1$$

而定, $p_1,\cdots\cdots,p_n$ 及 q 均爲正數.

命
$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=\xi_1,\ x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=\xi_1\ \xi_2,\cdots\cdots,$$
$$x_n=\xi_1\,\xi_2\cdots\cdots\xi_n,$$

則 D 域由不等式:

$$0\leqq\xi_1\leqq 1,\qquad 0\leqq\xi_2\leqq 1,\cdots\cdots,\qquad 0\leqq\xi_n\leqq 1$$

確定之域 D' 代之. 仿前節易得

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n)} = \xi_1^{\,n-1}\,\xi_2^{\,n-1}\cdots\cdots\xi_{n-1}.$$

於是原設積分1變爲

$$\int_0^1 \xi_1^{\,p_1+\cdots\cdots+p_n-1}(1-\xi_1)^{p-1}\,d\,\xi_1\cdots\cdots\int_0^1 \xi_n^{\,p_n-1}(1-\xi_n)^{p_n-1}\,d\,\xi_n$$

卽得

(40) $$I = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\cdots\Gamma(p_n)\Gamma(q)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n+q)}.$$

例求積分

(41) $$J = \iint\cdots\cdots\int x_1^{\,p_1-1}\,x_2^{\,p_2-1}\cdots\cdots x_n^{\,p_n-1}\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n,$$

積分域由不等式

$$0 \leqq x_1,\ 0 \leqq x_2, \cdots\cdots,\ 0 \leqq x_n.\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\alpha_2} + \cdots\cdots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \leqq 1.$$

而定,並 $p_1, \cdots\cdots, p_n, a_1, \cdots\cdots, a_n$ 及 $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ 均爲正數.命

$$X_1 = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1},\ X_2 = \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\alpha_2}, \cdots\cdots,\ X_n = \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n},$$

則

$$\frac{\partial(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)} = \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n}{a_1 a_2\cdots\cdots a_n}\,X_1^{\,1-\frac{1}{\alpha_1}}\,X_2^{\,1-\frac{1}{\alpha_2}}\cdots\cdots X_n^{\,1-\frac{1}{\alpha_n}},$$

$$J = \frac{a_1^{\,p_1}a_2^{\,p_2}\cdots\cdots a_n^{\,p_n}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n}\iint\cdots\cdots\int X_1^{\frac{p_1}{\alpha_1}-1}\,X_1^{\frac{p_2}{\alpha_2}-1}\cdots\cdots$$

$$X_n^{\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\,dX_1\,dX_2\cdots\cdots dX_n$$

積分域由不等式

$$0 \leqq x_1,\ 0 \leqq x_2\cdots\cdots,\ 0 \leqq x_n,\ x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n \leqq 1$$

而定.於是按公式(40),得

$$(42)\qquad J=\frac{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots\cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}+1\right)}.$$

特別言之,若 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=a$, 並 $\alpha_1=\alpha_3=\cdots\cdots=\alpha_n=1$, 則

$$(43)\qquad \iint\cdots\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots\cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n$$

$$=a^{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n+1)}$$

積分域為

$$0\leqq x_2,\ 0\leqq x_2,\cdots\cdots,\ 0\leqq x_n,\ x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n\leqq a.$$

由是更立得公式

$$(44)\qquad \iint\cdots\cdots\int x_1^{p_1-1}x^{p_2-1}\cdots\cdots x^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n$$

$$=(b^{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}-a^{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n})\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\cdots(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n+1)}$$

(a 與 b 為二正數)積分域確定如:

$$0\leqq x_1,\ 0\leqq x_2,\cdots\cdots,\ 0\leqq x_n,\ a\leqq x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n\leqq b.$$

196. 柳微氏之推廣 (Liouville's extension)

設

$$(45)\qquad \int\cdots\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots\cdots x_n^{p_n-1}f(x_1+x_2+\cdots\cdots$$

$$+x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n,$$

積分域 D 由

$$0\leqq x_1,\cdots\cdots 0\leqq x_n,\ a\leqq x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n\leqq b$$

而定, a 與 b 為二正數,被積函數中之 $p_1,\cdots\cdots,p_n$ 仍與上同,而

f 爲 D 域內之一連續函數.

命 $u=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$, 並命 δu 表 u 之無窮小增量而先求展布於

$$0\leqq x_1,\cdots\cdots,\ 0\leqq x_n,\ u\leqq x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n\leqq u+\delta u$$

域內之積分. 按公式(44)吾等易知其主值爲

$$u^{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n-1}f(u)\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)}\delta u$$

於是令 u 自 a 變至 b, 則得公式

$$(46)\qquad I=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)}\int_a^b u^{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n-1}f(u)\,du.$$

習 題

1. 試明 $\Gamma(a)$ 函數亦等於積分

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$$

2. 試證

$$2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)\sqrt{\pi},$$

n 爲一正整數. (Public Exam, Oxford Univ., 1888).

3. 設展布於 xoy 角內之重積分

$$\iint x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,dx\,dy;$$

試作變數替換 $x+y=u,\ y=uv$ 以證

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\,B(a,b)$$

4. 命 $xy=u,\ y=u+v$ 以明

$$\int_0^1\int_0^1\frac{(1-x)^{m-1}y^m(1-y)^{n-1}}{(1-xy)^{m+n-1}}\,dx\,dy=B(m,n)$$

(Cambridge Colleges, 1901).

5. 據積分 $\int_0^1 x^{m-1}(1-x^a)^n\,dx$ 以證

$$\frac{1}{(m)n!}-\frac{1}{(m+a)(n-1)!\,1!}+\frac{1}{(m+2a)(n-2)!\,2!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{(m+na)\,n!}$$

$$=\frac{a^n}{m(m+a)(m+2a)\cdots\cdots(m+na)}.$$

並明積分之值可表如

$$n!\,\Gamma\left(\frac{m}{a}\right)/a\,\Gamma\left(\frac{m}{a}+n+1\right).$$

(St. John's College, Cambridge, 1884).

6. 設 $x>0$, 證

$$2^{2x-1}B(x,x)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n!}{2^{2n}n!\,n!}\,\frac{1}{x+n}.$$

(Math. Tripos Exam., Cambridge, 1897).

7. 求曲線

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

所限之面積.　答: $\frac{3}{8}\pi ab.$

8. 求沿 $x^2+y^2-2y=0$ 圓周之線積分

$$\int xy^2\,dy-yx^2\,dx.$$

答: $\frac{3\pi}{2}$.

9. 設三正交軸 $oxyz$ 及平面

$$(P)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

a, b, c 均 >0; 試求位標面與 (P) 面所成四面體之質量, 其密度 (density) 爲 $\rho=\mu\,xyz$.　答: $\frac{1}{720}\mu\,a^2b^2c^2.$

10. 設正交軸 $oxyz$ 及二平面

$$(P_1)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=d_1,$$

$$(P_2)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=d_2.$$

a, b, c, d_1, d_2, 均爲正數, 試求位標面及 (P_1) 與 (P_2) 二面所限之體之重心, 是

體密度設爲 $\rho=\mu(x^2+y^2+z^2)$.

答: $\overline{x}=\frac{a}{6}\cdot\frac{3a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\cdot\frac{d^6-d^6}{d_1^5-d_2^5}$,……

11. 求限於 $oxyz$ 三棱角內與曲面

$$z=\frac{1}{a^2}xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

及柱面 $x^2+y^2=a^2$ 間之體積,並此體之重心.

(Rennes, Epreuve pratique 1906).

答: $V=\frac{a^3}{15}$, $\overline{x}=\overline{y}=\frac{5}{32}\pi a$, $\overline{z}=\frac{5}{256}\pi a$.

12. 求積分

$$\iiint xyz\cos(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

積分域確定如

$$0\leqq x,\ 0\leqq y,\ 0\leqq z,\ x+y+z\leqq\frac{\pi}{2}.$$

(Cambridge Colleges, 1887).

答: $\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{\pi}{2!}-1$.

13. 設積分

$$I=\int\int\cdots\cdots\int x_1^{p_1-1}\cdots\cdots x_n^{p_n-1}f\left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right]dx_1\cdots\cdots dx_n.$$

積分域由

$$0\leqq x_1\cdots\cdots,\ 0\leqq x_n,\ h\leqq\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_1}\leqq k$$

確定, $p_1,\cdots\cdots,\ p_n,\ a_1,\cdots\cdots,\ a_n,\ \alpha_1,\cdots\cdots,\ \alpha_n$, 以及 h, k 均爲正數;試求以一單積分表之.

14. 設展布於由 $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2\leqq C^2$ 確定之區域內之積分

$$I=\int\int\cdots\cdots\int F(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n)dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n;$$

試求以一單積分表之.　　(Boole).

第 十 章

變分法大意

I. 線積分之極大極小

197. 變分 (Variations).

於下所論,函數概設爲連續者,此條件雖非必要的,然於通常問題殆皆滿足.

設有曲線

$$(C) \qquad y=f(x)$$

與

$$(C_1) \qquad y=f_1(x),$$

欲以(C)與(C_1)比較,吾等可使之同屬於一族曲線

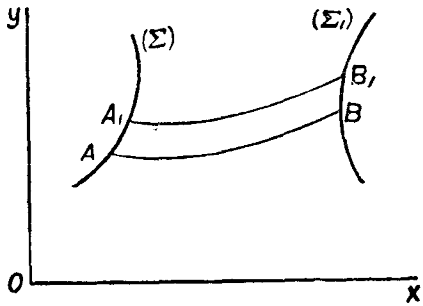
$$(\alpha) \qquad y=F(x,\alpha),$$

$F(x,\alpha)$對於α特別之二數值α_0與α_1以次變爲$f(x)$與$f_1(x)$,例如可取

$$F(x,\alpha)=\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha_0}f(x)+\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0}f_1(x).$$

若是,令α由α_0連續變易至α_1,則曲線(α)之形狀與位置連續變移,初與(C)疊合,終乃與(C_1)疊和

設欲比較 (C) 與 (C_1) 於 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 二直線間之二弧 AB 與 A_1B_1, 吾等恆可視 AB 弧各點沿 oy 之平行線移至 A_1B_1



第 35 圖

弧上.

今設 (C) 與 (C_1) 之任意二相當弧 AB 與 A_1B_1; 吾等可任意取二曲線 (Σ) 與 (Σ_1) 以為 A 與 B 移動至 A_1 與 B_1 之路線,並可仿前使 (Σ) 與 (Σ_1) 同屬於一族曲線

$$(t)\qquad\qquad y=G(x,t),$$

t 為一參變數, (Σ) 與 (Σ_1) 由 t 之二特別值 t_0, t_1 規定,曲線族 (α) 與 (t) 可確定平面上各點.蓋與 x, y 以定值,此二方程式確定 t 與 α 之值也.於是視 x, y 為 t, α 之函數有

$$(1)\qquad\qquad x=\phi(t,\alpha),\qquad y=\psi(t,\alpha).$$

視 t 為變數而 α 為常數,則得 (α) 族中之一線.反之,視 α 為變數而 t 為常數,則得 (t) 族中之一線.特別於 $t=t_0$ 與 $t=t_1$ 得 (Σ) 與 (Σ_1) 二線.若是 AB 上一點即視為沿 (t) 族中之一線移動至 A_1B_1 弧上.

現設 AB 弧由 $a=a_0$ 確定如上(t 自 t_0 變至 t_1),若與 a 值以一微小增量 δa,則 AB 弧變移至 $A'B'$ 與 AB 極鄰近.由 (a_0) 曲線變至 $(a_0+\delta a)$ 曲線之過程稱爲一變分(variation).

$x, y, y', y'',\cdots\cdots$ 等與 δa 相當之增量,其主值(即其關於自變數 a 之微分)依次稱爲 $x, y, y',\cdots\cdots$ 等之變分,而由 $\delta x, \delta y, \delta y',\cdots\cdots$ 表之,至其與 dt 相當之增量,其主值仍稱爲微分,而如常以 $dx, dy, dy',\cdots\cdots$ 表之.若是有

$$\delta x=\frac{\partial\phi}{\partial a}\delta a, \qquad \delta y=\frac{\partial\psi}{\partial a}\delta a,$$

$$dx=\frac{\partial\phi}{\partial t}dt, \qquad dy=\frac{\partial\psi}{dt}dt;$$

因之

$$d\,\delta x=\frac{\partial^2\phi}{\partial a\,\partial t}\delta a\,dt=\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial a}dt\,\delta a=\delta\,dx,\ d\,\delta y=\delta\,dy$$

此見 d 與 δ 可換置.

又 $\delta y', \delta y'',\cdots\cdots$ 亦易求出.如

$$\delta\frac{dy}{dx}=\frac{\delta\,dy}{dx}-\frac{dy}{dx^2}\delta dx=\frac{d\,\delta y}{dx}-y'\frac{d\,\delta x}{dx},$$

即

$$\delta y'=\frac{d}{dx}(\delta y-y'\delta x)+y''\delta x.$$

更推廣設函數 $F(x, y, y', y'',\cdots\cdots)$ 論之; F 沿 AB 弧爲 t 之一確定函數,其與 δa 相當之增量主值(即於自變數 a 之全微分)爲其變分,而由 δF 表之.吾等有

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\cdots\cdots,$$

致於在確定之(α_0)線上令t變,則有

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y'}dy'+\cdots\cdots.$$

於此吾等仍可書

$$d\,\delta F=\delta\, dF.$$

198. 積分之變分.

今設線積分

(2)
$$I=\int_{AB}F(x,\ y,\ y',\cdots\cdots)\,dx$$

或書之如

(2′)
$$I=\int_{t_0}^{t_1}F(x,\ y,\ y',\cdots\cdots)\frac{dx}{d\,t}\,dt.$$

若由AB弧移至$A'B'$,則此積分之值I受一增量δI,是爲積分I之變分.準萊氏求微分定則而注意t_0與t_1非α之函數有

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(F\frac{dx}{d\,t}\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\delta F\,dx+F\delta dx}{dt}\,dt,$$

或

$$\delta I=\int_{AB}\delta F\,dx+Fd\,\delta x.$$

據部分求積公式可書

$$\int_{AB}Fd\,\delta x=\Big[F\,\delta\,x\Big]_A^B-\int_{AB}\delta x\,dF.$$

由是

(3) $$\delta I=\Big[F\delta x\Big]_A^B+\int_{AB}\Big(\delta F-\frac{dF}{dx}\delta x\Big)dx.$$

如設 F 僅含 x, y, y', 而命

$$X=\frac{\partial F}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial F}{\partial y},\quad Y'=\frac{\partial F}{\partial y'}$$

則有

$$\delta F=X\delta x+Y\delta y+Y'\delta y',$$

$$\frac{dF}{dx}=X+Yy'+Y'y''.$$

因之

$$\delta F-\frac{dF}{dx}\delta x=Y(\delta y-y'\delta x)+Y'(\delta y'-y''\delta x),$$

爲簡便計,命

$$\omega=\delta y-y'\delta x,$$

求微分有

$$d\omega=\delta dy-y'\delta dx-dy'\delta x;$$

但

$$\delta dy=\delta(y'dx)=\delta y'dx+y'\delta dx,\ dy'=y''dx,$$

是則

$$\omega'=\delta y'-y''\delta x,$$

而

$$\delta F-\frac{dF}{dx}\delta x=Y\omega+Y'\omega'.$$

求積分,則變分(3)於是變爲

$$\delta I = \Big[F\delta x\Big]_A^B + \int_{AB} (Y\omega + Y'\omega')\,dx.$$

再準部分求積公式化之,則得終結公式:

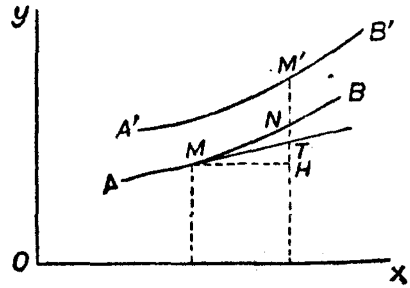
$$\delta I = \Big[F\,\delta x + Y'\omega\Big]_A^B + \int_{AB}\left(Y - \frac{dY'}{dx}\right)\omega\,dx. \tag{4}$$

ω 有一幾何意義.設 M' 為 $A'B'$ 線上與 AB 線上 M 相當之點,並 MT 為 AB 曲線於 M 點之切線,則於圖 36 內有

$$MH = \delta x,\ HM' = \delta y,$$

$$HT = y'\delta x.$$

因 TN 為一高級無窮小,足見 ω 可視為由 NM' 表之.



第 36 圖

現更設函數 F 繫有 y, z 二應數及其若干紀數,並設曲線族

$$x = f(t, a),\qquad y = \phi(t, a),\qquad z = \psi(t, a);$$

於族中一線上取一弧 AB,則積分

$$I = \int_{AB} F(x, y, z, y', z', \cdots\cdots)\,dx$$

之變分亦可仿上求之.如 F 僅含 x, y, z, y', z',則於上所用之符號外更命

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z},\ Z' = \frac{\partial F}{\partial z'}\ \text{及}\ \eta = \delta z - z'\delta x$$

得

(5)　$$\delta I=\left[F\,\delta x+Y'\omega+Z'\eta\right]_A^B+\int_{AB}\left(\left(Y-\frac{dY'}{dx}\right)\omega+\left(Z-\frac{dZ'}{dx}\right)\eta\right]dx.$$

上所論列自可推廣而設 F 含有多數之應數 $y, z, u,$……及其紀數;演算自亦彷彿.

199. 積分之極大極小.

變分法之主要目的在已知函數 $F(x, y, y',……, z, z',……)$ 而求定 x 之未知函數 $y, z,$……等以使積分

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F\,dx$$

為極大或極小.此問題之充足條件討論甚難,茲但略述必要之條件.於有極值存在時,此條件往往卽足定之.

吾等恆可設欲定之積分係於關係

$$y=f(x, \alpha)\qquad z=\phi(x, \alpha),……$$

中與 α 以一特別值如 $\alpha=0$ 而得,於是 I 為 α 之函數,而於 $\alpha=0$ 為極大或極小;因之應有

$$\frac{\delta I}{\delta\alpha}=0\ \text{或}\ \delta I=0,$$

就 F 僅含未知應數 y 之情況論之.問題乃為:於連 A, B 二點之曲線中求定其介線積分

$$I=\int_{AB}F(x, y, y')\,dx$$

為極值者.

由(4)確定之 δI 對於所求曲線當等於零而無論關於是線上各點之增量 $\delta x, \delta y$ 如何.

但於 A, B 二點 $\delta x, \delta y$ 通常非完全爲任意者,而有所謂界限條件 (conditions at the limits). 例如 A 爲定點而 B 位於曲線 $\Phi(x, y)=0$ 上,則 $\delta x, \delta y$ 於 A 爲零,而於 B 合於關係

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y=0.$$

然可注意者:於 A ~~於~~与 B 之 $\delta x, \delta y$ 變分中,恆特別有 $\delta x=0$ 與 $\delta y=0$ 一組值爲問題所容許.

今於 A 及 B 均設 $\delta x=0, \delta y=0$, 則公式(4)變爲

$$\delta I=\int_{AB}\left(Y-\frac{dY'}{dx}\right)\omega\, dx.$$

吾謂欲 δI 對於某曲線 C 之 δI 值爲零,必須於 C 上有

(6) $$Y-\frac{dY'}{dx}=0.$$

蓋 $Y-\frac{dY'}{dx}$ 若異於零,則吾等可於 C 上給與 $\delta x, \delta y$ 以適當之值使 ω 恆與 $Y-\frac{dY'}{dx}$ 同號,而因之積分不能爲零矣.方程式(6)稱爲主要方程式或尤拉氏方程式 (Euler's equation).

尤氏方程式之積分曲線,均稱爲極值曲線 (extremals). 欲確定何者適合於所求,則須就界限條件論之.

方程式(4)現變爲

(7) $$\left| F\delta x+Y'\omega \right|_A^B=0,$$

其中於 A 與 B 二點之 δx, δy 値當適合界限條件,方程式(7)因名爲界限方程式.適所言未定之情形,卽由此定之也.

今若積分號下之函數爲 $F(x, y, z, y', z')$,則仿上論之得二主要方程式

$$Y-\frac{dY'}{dx}=0, \qquad Z-\frac{dZ'}{dx}=0 \tag{8}$$

及一界限方程式

$$\Big| F\delta x+Y'\omega+Z'\eta \Big|_A^B=0. \tag{9}$$

200. 實際運算簡便法.

實際運算往往以次述之法直接求出積分之變分爲便.先就

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

論之.取 t 爲自變數而以 $\frac{dy}{dx}$ 代 y',可書

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F_1(x, y, dx, dy)$$

F_1 對於 dx, dy 爲一次齊次式;若命 X, Y, X', Y' 以次表 F_1 對於 x, y, dx, dy 之偏紀數,則有

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\delta F_1=\int_{t_0}^{t_1}(X\,\delta x+Y\,\delta y+X'\,\delta\,dx+Y'\,\delta\,dy).$$

於括弧中末二項交換 δ 與 d 之位次而用部分法積之,則上式之形變爲

(10) $$\delta I = L_1 - L_0 + \int_{t_0}^{t_1} (P\,\delta x + Q\,\delta y),$$

其中 L_1 與 L_0 表積出之部分對於 t_0 與 t_1 之值,而

$$P = X - dX', \qquad Q = Y - dY'.$$

於是主要方程式爲

(11) $$P\,\delta x + Q\,\delta y = 0,$$

而界限方程式爲 $L_1 - L_0 = 0$. 若注意 δx 與 δy 係判立之不定數,則知主要方程式當析爲 $P=0$ 及 $Q=0$ 二式. 但此二式並非判別而適相當,可明之如次:於(4)式中積分號下之量代 ω 以 $\delta y - y'\,\delta x$, 則所得應與 $P\,\delta x + Q\,\delta y$ 等,而無論 δx, δy 若何,即

$$P = -y'\left(Y - \frac{dY'}{dx}\right)dx = -\left(Y - \frac{dY'}{dx}\right)dy, \quad Q = \left(Y - \frac{dY'}{dx}\right)dx,$$

可見 $P=0$ 與 $Q=0$ 均與尤氏方程式 $Y - \frac{dY'}{dx} = 0$ 相當, 任取其一解之可也.

又可注意者,若設 y 及界限之量不變而令 x 獨變,則

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} P\,\delta x,$$

因得主要方程式 $P=0$, 仿之令 y 獨變,可得 $Q=0$,

現更就

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\,dx = \int_{t_0}^{t_1} F_1(x, y, z, dx, dy, dz)$$

論之.仿上有

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\delta F_1=\int_{t_0}^{t_1}(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z+X'\delta dx+Y'\delta dx+Z\delta dz)$$

$$=\Gamma_1-\Gamma_0+\int_{t_0}^{t_1}(P\delta x+Q\delta y+R\delta z).$$

由是得界限方程式 $\Gamma_1-\Gamma_0=0$ 及主要方程式

(12) $$P\delta x+Q\delta y+R\delta z=0$$

於後者可有兩種情況,當區別論之: 1°) 若於 x, y, z 間無關係,則(12)變爲三方程式 $P=0, Q=0, R=0$, 但易知其中僅兩式爲判別者; 2°) 若有一關係 $\Phi(x, y, z)=0$, 則有

(13) $$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z=0,$$

而吾等可用未定係數法演之. 由(12), (13)得

$$\left(F+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\delta x+\left(Q+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\delta y+\left(R+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\delta z=0.$$

若選擇 λ 以使 δy 及 δz 之係數爲零,則 δx 之係數亦爲零. 然則有

$$P+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\quad Q+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0,\quad R+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,$$

此三式及 $\Phi=0$ 確定 y, z 及 λ 對於 x 之值.

注意. 於上所論之積分,如

$$I=\int_{AB}F(x, y, y')dx=\int_{x}^{x}F[x, y(x), y'(x)]dx$$

其值因連 A, B 二點之曲線 C 而變,卽因 (x_0, x) 間之函數 $y(x)$ 而變,名爲 C 或 $y(x)$ 之一函數(法文 fonctionnelle). 函分法(法文

Calcul functionnel) 乃近代分析學之一新領域,變分法僅其一章也.

II. 重要問題舉例

201. 問題 1.

求空間兩點間之最短線

命 x_0, y_0, z_0 及 x_1, y_1, z_1, 爲兩端 A 及 B 之位標;連 A, B 二點之曲線之長爲

(14) $$s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx.$$

問題即欲定未知應數 y 與 z 使積分 s 爲極小. 於此

$$F=\sqrt{1+y'^2+z'^2},\qquad dF=\frac{y'dy'+z'dz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

$$X=0,\qquad Y=0,\qquad Z=0,$$

$$Y'=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\qquad Z'=\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

而主要方程式爲

$$\frac{dY'}{dx}=0,\qquad \frac{dZ'}{dx}=0.$$

由是立有

$$Y'=\text{const.},\qquad Z'=\text{const.},$$

因之

$$y'=\alpha,\qquad z'=\beta.$$

α, β 爲二泛定常數.再求積分得

(15) $$y=\alpha x+\lambda,\qquad z=\beta x+\mu,$$

λ,μ 亦為二泛定常數,此見所求為一直線.

若 A, B 為確定之二點,則在界限之變分為零,而常數 α,β,λ,μ 之值由表示直線過此二點之條件定之.在其他較普通之情況,則須取界限方程式

$$\Big[F\,\delta x+Y'\omega+Z'\eta\Big]_{t_0}^{t_1}=0,$$

卽

$$\Big[(F-Y'y'-Z'z')\,\delta x+Y'\,\delta y+Z'\,\delta z\Big]_{t_0}^{t_1}=0,$$

論之.命 s 為所求之線自某原點計算之弧長,可書

$$F-Y'y'-Z'z'=\frac{dx}{ds},\quad Y'=\frac{dy}{ds},\quad Z'=\frac{dz}{ds}.$$

而上式變為

(16) $$\left[\frac{dx}{ds}\,\delta x+\frac{dy}{ds}\,\delta y+\frac{dz}{ds}\,\delta z\right]_{t_0}^{t_1}=0.$$

若 (x_0, y_0, z_0) 點與 (x_1, y_1, z_1) 點彼此無涉,則 (16) 判為二式如:

(17) $$\begin{cases}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_1\delta x_1+\left(\dfrac{dy}{ds}\right)_1\delta y_1+\left(\dfrac{dz}{ds}\right)_1\delta z_1=0,\\[2ex]\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0\delta x_0+\left(\dfrac{dy}{ds}\right)_0\delta y_0+\left(\dfrac{dz}{ds}\right)_0\delta z_0=0.\end{cases}$$

設限制 A 位於曲面

(Σ_0) $$\phi(x_0, y_0, z_0)=0$$

上,則應復有

$$(18) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x_0}\delta x_0+\frac{\partial\phi}{\partial y_0}\ \partial y_0+\frac{\partial\phi}{\partial z_0}\ \delta z_0=0.$$

由此式及(17)第二式得關係

$$\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)_0}{\frac{\partial\phi}{\partial x_0}}=\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)_0}{\frac{\partial\phi}{\partial y_0}}=\frac{\left(\frac{dz}{ds}\right)_0}{\frac{\partial\phi}{\partial z_0}},$$

表明最短直線與曲面 Σ_0 正交.

若設 A 位於 Σ_0 及

$$(\Sigma'_0) \qquad \psi(x_0, y_0, z_0)=0$$

所確定之曲線 Γ_0 上,則於關係(18)外尚有

$$(19) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_0}\delta x_0+\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\delta y_0+\frac{\partial\psi}{\partial z_0}\delta z_0=0.$$

可知最短直線當爲 Γ_0 之法線.

凡此情形於 B 端自亦相同.

法二. 玆再以直接求

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{dz^2+dy^2+dz^2}=\int_{t_0}^{t_1}ds$$

之變分之法演之.

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\delta\,ds=\int_{t_0}^{t_1}\frac{dx\,d\,\delta x+dy\,d\,\delta y+dz\,d\,\delta z}{ds}$$

$$=\left[\frac{dx\ \delta x+dy\ \delta y+dz\ \delta z}{ds}\right]_{t_0}^{t_1}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta x d\frac{dx}{ds}+\delta\,yd\ \frac{dy}{ds}+\delta\,zd\frac{dz}{ds}\right)$$

若注意應數 x, y, z 間無關係,而其變分爲判別者,則見主要

方程式

$$\delta x d\frac{dx}{ds}+\delta y d\frac{dy}{ds}+\delta z d\frac{dz}{ds}=0$$

分解爲三式

$$d\frac{dx}{ds}=0,\quad d\frac{dy}{ds}=0,\quad d\frac{dz}{ds}=0.$$

求一次積分得

$$\frac{dx}{ds}=a,\qquad \frac{dy}{ds}=b,\qquad \frac{dz}{ds}=c. \tag{20}$$

此見所求極值曲線之切線有定向,即知其爲直線也.界限之討論與前題同.

202　問題 II. 設同在一平面上之二點 A 與 B 及一直線 Δ' 試定連 A 與 B 之一曲線使於 Δ 線之周旋轉而成之曲面有極小面積.

取 Δ 爲 x 軸及其一垂線爲 y 軸;命 x_0, y_0 及 x_1, y_1 依次爲 A 及 B 之位標,並視 x, y 爲 t 之函數如前,則欲求極小之積分爲

$$I=\int_{t_0}^{t_1} y\,ds,\ \text{其}\ ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

用直接求變分法有

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}(\delta y\,ds+y\delta\,ds)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta y\,ds+y\frac{dx}{ds}\delta\,dx+y\frac{dy}{ds}\delta\,dy\right).$$

於右端括弧中之末二項互換 δ 與 d 之位次,且用部分法積之有

(21) $$\delta I=\left[\frac{y(dx\,\delta x+dy\,\delta y}{ds}\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left[d\left(-\frac{y\,dy}{ds}\right)\delta y-d\left(y\frac{dx}{ds}\right)\delta x\right].$$

主要方程式爲

$$d\left(s-\frac{y\,dy}{ds}\right)=0,\ \text{或}\ d\left(y\frac{dx}{ds}\right)=0.$$

此兩式彼此相當;取末式有

$$y\frac{dx}{ds}=a\quad\text{或}\quad y\,dx=a\sqrt{dx^2+dy^2}$$

(a 爲一泛定常數),分離變數,可書如

$$\frac{d\frac{y}{a}}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2-1}}=d\frac{x}{a},$$

而得

$$\log\left(\frac{y}{a}+\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1}\right)=\frac{x-b}{a}$$

即

(22) $$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}}+e^{-\frac{x-b}{a}}\right).$$

然則極値曲線係以 x 軸爲基線之纜線(catenaries).

若 A, B 爲確定之二點,則無界限方程式. 但須表明纜線經此二點,其方程式(22)中 a, b 之値即可確定.

現設 A, B 可依次於曲線 Γ_0 及 Γ_1 上移動. 因 A 與 B 無相互關係,可知界限方程式判離爲二:

(23) $$dx_0\,\delta x_0+dy_0\,\delta y_0=0,\quad dx_1\,\delta x_1+dy_1\,\delta y_1=0.$$

足以規定未定數 a, b 第一式表明 A 於 Γ_0 上之微小移動 δx_0, δy_0 與其在極值線上之移動 dz_0, dy_0 方向彼此正交第二式表明 B 點亦有同樣情形;故所求曲線爲纜線之與 Γ_0, Γ_1 正交者.

302. 問題 III.

捷線 (Brachistochrone). 求一質點於最短時間自一點 A 達他點 B 所應遵循之路線.

吾等設原速率爲零,若取三正交軸 $oxyz$,其 ox 爲縱線且向下,則命 x, y, z 表動點 P 於 t 時之位標,則 P 點速率可書爲 $v=\sqrt{2g(x-x_0)}$,而其自 A 至 B 所需時間爲

$$T=\int_{x_0}^{x_0}\frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{\sqrt{x-x_0}}.$$

於是問題即爲求定積分

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{X}$$

之極小,式中 $X=\sqrt{x-x_0}$, 注意 x_0 亦可變易,有

$$(24)\qquad \delta I=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{X}\,\frac{dx\,\delta\,dx+dy\,\delta\,dy+dz\,\delta\,dz}{ds}-\frac{\delta x-\delta x_0}{2X^3}\,ds\right]$$

$$=\left[\frac{dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z}{X\,ds}\right]_{x_0}^{x_1}+\frac{\delta x_0}{2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{X^3}$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta x\left(d\,\frac{dx}{X\,ds}+\frac{ds}{2\,X^3}\right)+\delta\,yd\,\frac{dy}{X\,ds}+\delta\,zd\,\frac{dz}{X\,ds}\right]$$

主要方程式有三

$$d\frac{dx}{X\,ds}+\frac{ds}{2X^3}=0,\quad d\frac{dy}{X\,ds}=0,\quad d\frac{dz}{X\,ds}=0. \tag{25}$$

但判別者實僅二式.由末二式有

$$dy=\alpha X\,ds,\qquad dz=\beta X\,ds; \tag{26}$$

(α,β 爲二泛定數)而得

$$\beta\,dy=\alpha\,dz,\qquad \beta y=\alpha z+\gamma.$$

可見極值曲線位於一縱平面內.

於是取其面爲 xy 面,並取 A 爲原點,則由 (25) 第二式即 (26) 第一式,有

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{\alpha^2x}{1-\alpha^2x}}=\sqrt{\frac{x}{2a-x}},\quad \left(\frac{1}{\alpha^2}=2a\right)$$

命

$$x=a(1-\cos t), \tag{27}$$

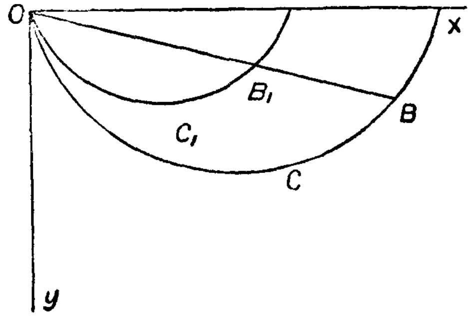
則注意 x,y,於 A 點均隨 t 爲零,得

$$dy=a\sin t\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\,dt=a(1-\cos t)\,dt,$$

$$y=a(t-\sin t). \tag{28}$$

觀 (27),(28) 式之形,可知所求爲一輪輾線 (cycloid),由半徑爲 a 之一圓自下方輾於經 A 點(即 O 點)之水平線而成.

若 A,B 爲已知之定點,則 C 已過 A 點,若再表示其過 B 點,則方程式中之量 a 即定,吾等亦可以幾何法定之如次:設 $a=1$ 之輪輾線已繪出爲 C_1,則連 OB 之直線割 C_1 於 B_1,因各輪輾線相像,立即有 $a=\dfrac{OB}{OB_1}$.



第 37 圖

若 A 與 B 非定點而僅被限制位於曲線 Γ_0 與 Γ_1 上,則吾等須取界限條件論之. 因在 A 之變分與在 B 者無關,界限條件判爲二式:

$$dx_1\,\delta x_1+dy'_1\,\delta y_1+dz_1\delta z_1=0,$$

$$\delta x_0\left[\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{2X^3}-\left(\frac{dx}{X\,ds}\right)\right]-\delta\,y_0\left(\frac{dy}{X\,ds}\right)-\delta\,z_0\left(\frac{ds}{X\,ds}\right)_0=0.$$

前式表明輪輾線與 Γ_1 正交於其末點 B; 欲解釋第二式,可將 (25) 各式自 x_0 至 x_1 求積分,而以所得之值

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{2X^3}=-\left[\frac{dx}{X\,ds}\right]_{x_0}^{x_1}=\left(\frac{dx}{X\,ds}\right)_0-\left(\frac{dx}{X\,ds}\right)_1$$

$$\left(\frac{dy}{X\,ds}\right)_0=\left(\frac{dy}{X\,ds}\right)_1,\qquad\left(\frac{dz}{X\,ds}\right)_0=\left(\frac{dz}{X\,ds}\right)_1$$

代入, 則斯式變爲

$$dx_1\,\delta x_0+dy_1\,\delta y_0+dz_1\,\delta z_0=0.$$

可見所求曲線於終點 B 之切線應與 Γ_0 於其起點 A 之切線

互相正交.

III. 相對的極大極小;等周問題

204. 相對的極值.

於求極值之積分

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F\,dx, \tag{29}$$

中 F 所含變數間,可有一已知關係,前已論及,此條件方程式尙可含有未知應數之紀數或定積分.茲就其中簡單之一問題述之,卽

求定 F 內之未知函數,使積分 I 爲極大或極小,且同時使他一積分

$$k=\int_{x_0}^{x_1} \Phi\,dx \tag{30}$$

有定值 l.

此類問題因起源於幾何學之等周問題,故統稱曰等周問題 (Isoperimetric problems) 於此所言極值稱爲相對或連繫極值,上所論者則爲絕對極值.吾等可將相對極值問題化歸絕對極值問題解之.

設諸未知應數屬於含參變數 α 之一組應數,並設諸變數均由與 α 無涉之變數 t 表之.若是積分

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F\frac{dx}{dt}dt.\qquad K=\int_{t_0}^{t_1} \Phi\frac{dx}{dt}dt$$

爲 α 之函數.後者應有定值不因 α 而變.可知 $\delta \cancel{k}$ K $=0$. 又欲 J 爲

極值必 $\delta J=0$.

就 F 與 Φ 僅含一未知應數 y 之情況論之, δJ 與 δk 之形在此爲

(31)　$$\delta J=L+\int_{x_0}^{x_1} E\,\omega\,dx,\quad \delta K=H+\int_{x_0}^{x_1} G\,\omega\,dx$$

L, H 爲求出積分之部分,僅與界限有關,命

(32)　$$\int_{x_0}^{x} G\,\omega\,dx=\psi(x),$$

因之

則　$$G\omega=\psi'(x),\qquad \omega=\frac{\psi(x)}{G}.$$

(33)　$$\delta K=H+\psi(x_1),$$

$$\delta J=L+\int_{x_0}^{x_1}\frac{E}{G}\psi(x)\,dx.$$

施以部分求積分法並注意 $\psi(x_0)=0$, 則

(34)　$$\delta J=L+\frac{E_1}{G_1}\psi(x_1)-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{E}{G}\right)\psi(x)dx,$$

E_1, G_1 表 E, G 於 x_1 之值.

函數 $\psi(x)$ 爲任意者, 但於 $x=x_0$ 爲零, 由 (33) 知 $\delta K=0$ 與 $\psi(x_1)=-H$ 相當,而 (34) 由是可化作

$$\delta J=L-\frac{E_1}{G_1}H-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{E}{G}\right)\psi(x)\,dx.$$

$\psi(x)$ 既爲泛定之函數,則欲 $\delta J=0$, 必須

$$L-\frac{E_1}{G_1}H=0\quad 及\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{E}{G}\right)=0.$$

末式積之爲 $\frac{E}{G}=\lambda$, 卽

(35) $$E-\lambda G=0$$

而前式因之變爲

(36) $$L-\lambda H=0.$$

(35)與(36)爲所求相對極值之必要條件,可視爲求積分

(37) $$J-\lambda k=\int_{x_0}^{x_1}(F-\lambda\Phi)\,dx$$

之絕對極值之必要條件,於是得:

定則. 求積分 J 之相對極值(使積分 K 有定值 l)可視作求積分 $J-\lambda k$ 之絕對極值,常數 λ 由條件 $K=l$ 定之.

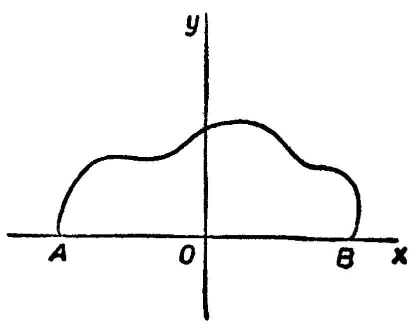
於 F,Φ 含有數個未知應數 $y, z,$……等時,理亦同,可仿上推論之.

205. 問題 I.

於平面內設二點 A 與 B: 連 A, B 以有定長 $2l$ 之曲線. 試求其使 AB 弧與 AB 弦間之面積爲最大者.

試取 AB 直線爲 x 軸及其於 AB 中點之垂線爲 y 軸. 命 $OA=a$, 則問題卽求

$$S=\int_{-a}^{+a}y\,dx$$



第 38 圖

之極大而使 $\int_{AB} ds=2l$.

準定則設積分

$$I=\int_{AB}(y\,dx-\lambda\,ds)$$

而求其極值,注意於界限之變分爲零,吾等有

$$\delta I=\int \delta y d\left(x+\lambda\frac{dy}{ds}\right)-\delta x d\left(y-\lambda\frac{dx}{ds}\right).$$

由是得相當之二主要方程式

$$d\left(x+\lambda\frac{dy}{ds}\right)=0,\quad d\left(y-\lambda\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

而立有

$$x-\alpha=-\lambda\frac{dy}{ds},\quad y-\beta=-\lambda\frac{dx}{ds}.$$

(α, β 爲二泛定常數)將此二式平方相加得

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda^2.$$

可見極值曲線爲一族圓,欲確定所求之線,設 $y=0$, $x=\pm a$. 如是得 $\alpha=0$, $\beta=\pm\sqrt{\lambda^2-a^2}$, $\pm$ 號表明有二解,對稱於 x 軸再者 AB 弧應等於 $2l$. 命 2θ 爲對 AB 之圓心角,有 $\theta\lambda=l$ 與 $\lambda\sin\theta=a$. 於是消去 λ 則得

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{a}{l}.$$

以定 θ.

若設 a 爲無窮小,則上所論足證等周之迴線中以圓所範

圍之面積爲最大.

206. 問題 II.

於連 xy 面內 A 與 B 二點之等長曲線中,求其轉於 x 軸周成極大或極小面積之曲面者.

按題意,卽依條件 $\int_{AB} ds=l$ 論 $\int_{AB} y\,ds$ 之極值.據定則設

$$I=\int_{AB}(y-\lambda)\,ds$$

此與 202 節之積分相同,不過易 x 爲 $y-\lambda$ 而已.是知極值曲線爲纜線

$$y-\lambda=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x-\beta}{\alpha}}+e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}}\right).$$

常數 α, β 及 λ 由表示曲線過 A, B 二點及以 $2l$ 爲長之條件定之.

207. 問題 III.

在 xy 面上連 A, B 二點以等長之曲線.試於其中求能繞於 x 軸點周成最大或最小體積者.

按題旨卽據條件 $\int_{AB} ds=l$ 以論

$$V=\pi\int_{AB} y^2\,dx \quad \text{或} \quad J=\int_{AB} y^2\,dx$$

之極值;是卽求次列積分之絕對極值

$$I=V-\lambda J=\int_{AB}(y^2\,dx-\lambda\,ds)$$

也. A 與 B 爲二定點,可知界限變分爲零. 欲得主要方程式,吾等可僅介 y 變;如是有

$$\delta I=\int\left(2y\,\delta y\,dx-\lambda\frac{dy\,\delta\,dy}{ds}\right)=0,$$

或

$$\int\left(2y\,dx+\lambda\,d\,\frac{dy}{ds}\right)\delta\,y=0,$$

而主要方程式爲

$$2y+\lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

展之變爲

(38) $$2y+\lambda\frac{y''}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

於 λ 取一適當之正負號,此關係即表明弧徑 ρ 與緯標 y 成反比. 曲線爲彈性線 (elastic curve). 若取 y 爲自變數,則(38)可書如

(39) $$2y-\lambda\frac{x''}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

注意

$$\frac{x''}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{x''}{x'^3}=\frac{d}{dy}\left(1+\frac{1}{x'^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

立可求一次積分而得

$$y^2-\lambda\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}=C,$$

(40) $$x-C'=\int\frac{(y^2-C)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(y^2-C)^2}}.$$

末端爲一橢圓積分.

IV. 重積分之極值

203. 重積分之極值.

吾等僅取簡單之例論之.命 z 表 x, y 一函數,並 p, q 爲其初級偏紀數而設重積分

$$I=\iint F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy,$$

積分域 D 由一確定迴線 C 範圍之.函數 F 爲已知,並函數 z 於 C 上之値亦爲已知.求定在 D 域之函數 z 使積分 I 爲極大或極小.

欲解此問題,吾等亦設 z 繫有一參變數.對此參變數之一增量, z 受變分 δz, 而 I 受變分 δI. 若 I 爲極值,則當有 $\delta I=0$. 今求 δI; 命 Z, P, Q 依次表 F 對於 z, p, q 之偏紀數,則有

$$\delta F=Z\,\delta z+P\,\delta q+Q\,\delta q=Z\,\delta z+P\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}+Q\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}$$

因之

$$\delta I=\iint Z\,\delta z\,dx\,dy+\int dy\int P\frac{\partial\delta z}{\partial x}\,dx+\int dx\int Q\frac{\partial\delta z}{\partial y}\,dy$$

準部分求積分法,並注意 δz 於 C 上爲零,則有

(41) $$\delta I=\iint\left[Z-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right]\delta z\,dx\,dy.$$

式中$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$表視$P$, Q為x, y之函數之偏紀數,即

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial z}p+\frac{\partial P}{\partial p}r+\frac{\partial P}{\partial q}s,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial z}q+\frac{\partial Q}{\partial p}s+\frac{\partial Q}{\partial q}t,$$

在右端之紀數乃視P, Q為x, y, z, p, q之函數而得.

於是由(41)得極值條件

(42) $$Z-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=0$$

以定z,是為尤氏方程式.

203. 極小面積之曲面 (Surfaces of minima area).

於同過固定周線Γ之曲面中,求其面積最小者.

命$z=f(x, y)$為曲面方程式,其面積由展布於一定域D之重積分

$$\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

表之.於此有

$$Z=0,\quad P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad Q=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)=\frac{r(1+q^2)-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=\frac{t(1+p^2)-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

而尤氏方程式為

$$(1+q^2)r-2\,p\,q\,s+(1+p^2)t=0.$$

即極小曲面之偏微分方程式[1]. 吾等可注意者:據微分幾何理,曲面 $z=(x,y)$ 於其一點之主要曲率徑 (principal radii of curvature) 由方程式

$$(rt-s^2)\rho^2-\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\rho+(1+p^2+q^2)^2=0$$

定之,於此變簡爲

$$\rho^2=(1+p^2+q^2)^2/(s^2-rt).$$

若命 ρ_1 與 ρ_2 表其二根,則有 $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=0$, 即表明折衷曲率爲零.

210. 相對極值.

對於重積分之相對極值,求法亦與單積分者類似. 吾等可證明欲積分 $J=\iint F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$ 爲極值,而同時積分 $K=\iint \Phi(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$ 等於一定量 a, 只須求積分 $J+\lambda k$ 之絕對極值.

例. 試求面積爲極值而體積爲定量 a 之曲面按上所述只須求

$$\iint(\sqrt{1+p^2+q^2}+\lambda z)\,dx\,xy$$

之絕對極值. 演之得

$$\lambda+\frac{(1+q^2)r-2\,p\,q\,s+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

---

(1) 關於極小曲面之詳細討論可參考 Darboux, Th'orie Generale de Surfaces, tome I.

曲面之二主要曲率之和 $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$ 於此等於定量 λ.

習　題

1. 於平面 xoy 內設有可移動之二點 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2); 設其彼此距離恆等於定量 a, 則於何種移動狀況之下,吾等可恆有

$$x_1\,\delta x_1+x_2\,\delta x_2+y_1\,\delta y_1+y_2\,\delta y_2=0?$$

(De Morgan)

答: 此兩點恆位於以 o 為心 a 為直徑之一圓之直徑兩端.

2. 求定連原點於 $(a, 1)$ 點之一曲線 C, 使積分

$$\int_C (n^2y^2+y'^2)\,dx$$

為極小.　　答: $y=\sin h\,nx/\sin h\,na$.

3. 於 xy 平面內設二定點 $A(x_0, y_0)$ 與 $B(x_1, y_1)$ 均位於 x 軸之上方或均位於其下方;求定一曲線連之,使沿是線之積分

$$I=\int_{AB}\frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

為極小或極大.　　答: 一圓.

4. 設一光線行經某境域,其於 $P(x, y)$ 點之速率為 x 與 y 之函數 $V(x, y)$ 而不因所循方向而變.試明此光線自一點 $A(x_0, y_0)$ 至他一點 $B(x_1, y_1)$ 所需之時為

$$t=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{V(x, y)}\,dx$$

並所經路線為次列微分方程式之一解:

$$\frac{V\,y''}{1+y'^2}-V'\,xy'+\sqrt{1+y'^2}\,V'y=0.$$

特別設 $V(x, y)=kx$ 論之, k 為一常數.

5. 於平面 xoy 內設一質點 M 受一力 F 其方向與 y 軸平行而其量與 M 與 x 軸之距離成正比.今欲 M 移動於一光滑之曲線上以最短時間自 O 點達於他點 B, 此線之形當若何?　　答: 曲線為一圓.

6. 求證於球面上最短之曲線爲大圓.

7. 求證於圓柱面上最短之曲線爲螺旋線.

8. 於平面內設一軸 Δ 並二點 A 與 B, 設連此二點之曲線轉於 Δ 之周; 今欲轉成之曲面有一定面積而包含最大體積, 其曲線之微分方程式爲何? 試求之; 又若轉成之曲面爲一閉面, 則是一球面, 並證之.

9. 於平面上二點 A 與 B 間求過一曲線使範圍於此曲線與其外展線 (evolute) 及 A, B 二點之曲率徑間之面積爲極小. (De Morgan)

答: 爲一輪展線.

10. 欲函數 $F(x, y\, y', y'', \cdots\cdots, y^{(n)})$ 爲 $x, y, y', \cdots\cdots, y^{(n-1)}$ 之恰當微分而無論應數 y 如何, 當有若何條件? 試定之.

11. 於 $oxyz$ 空間命 $r=OM$ 而設函數 $f(r)$; 試求一曲線使沿是線之積分 $\int f(r)\, ds$ 爲極值的.

特別設 $f(r)=\frac{1}{r^2\pm l^2}$ 論之, l 爲一常數.

12. 若 u 爲 x, y 之函數使在一域 A 內之重積分

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

爲極小, 則有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

13. 命 r, θ 表極位標, 則仿上設有函數 u, 使

$$\int_A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right] r\, dr\, d\theta$$

爲極小, 可證明

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0.$$

14. 設 u 爲 x, y, z 之未知函數, p, q, r 爲其初級偏紀數; 試證展布於體積 V 之積分

$$\iiint_V F(x, y, z, u, p, q, r)\, dV$$

之尤拉氏方程式爲

$$U-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)=0.$$

式中

$$U=\frac{\partial F}{\partial u},\quad P=\frac{\partial F}{\partial p},\quad Q=\frac{\partial F}{\partial q},\quad R=\frac{\partial F}{\partial r}.$$

15. 若 u 爲令

$$\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dv$$

爲極小之函數，則有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

16. 若 u 爲令

$$\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\psi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right]dv$$

爲極小之函數，則有

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\sin\psi\,\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sin\psi\,\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)+\frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0.$$

第十一章

無窮級數與無窮乘積

I. 正項級數斂性判斷法

級數之斂散性,有歌氏普通條件御之,已於第16節述及.然實際不易引用,而有賴於特殊法則,茲往舉重要者論之.

211. 比較法.

設各項均爲正數之級數

(1) $$u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots.$$

欲決其爲斂爲散,普通之法,乃以與他一已知之正項級數

(2) $$v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

比較論之.比較之法普通有二:

I. 若已知級數(2)爲收斂,且若自某項起恆有 $u_n<v_n$,則級數(1)收斂,反之,若已知(2)發散並設自某項起恆有 $u_n>v_n$,則(1)亦發散.

蓋如條件自第一項起卽滿足,(否則可將前端若干項删去論之),則命

$$S_n=\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu,\qquad S'=\sum_{\nu=0}^{\infty}v_\nu,$$

有 $$S_n<S'$$

而 S_n 乃 n 之恆增函數,可知其有一限 $S<S'$.

反之,命 $S'_n=\sum_{\nu=0}^{n}v_\nu$ 有 $S_n<S'_n$,而 S_n 隨 S'_n 趨於 $+\infty$.

II. 若自某項起恆有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$,且若級數(2)爲收斂,則級數(1)亦爲收斂.反之,若自某項以後恆有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{v_{n+1}}{v_n}$ 且(2)爲發散,則(1)亦爲發散.

證:假定於 $n\geqq p$ 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$. 因以一常數乘級數之各項,此級數之性不變,是其二項之比亦不變.吾等可設 $u_p<v_p$;於是按題設有 $u_{p+1}<v_{p+1}$,因之有 $u_{p+2}<v_{p+2}$ 且可如是類推,卽明級數(1)隨(2)收斂.於發散一層,亦可同法證之.

212. 歌氏定則(Cauchy's test).

設以 u_n 爲普通項之正項級數;若自某項起 $\sqrt[n]{u_n}$ 恆小於一定數 $k<1$,則級數收斂.反之,若自某項起 $\sqrt[n]{u_n}$ 恆大於或等於1,則級數發散.

按題意前節,於 $n>p$ 有 $\sqrt[n]{u_n}<k<1$. 因之 $u_n<k^n$,而 $\sum_{n=p}^{\infty}k^n$ 爲一收斂等比級數,可斷 $\sum_{n=p}^{\infty}u_n$ 爲收斂,卽可斷 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 爲收斂.

反之,若自某項起 $\sqrt[n]{u_n}>1$,卽 $u_n>1$,則級數普通項不趨於零,而級數爲發散.於 $\sqrt[n]{u_n}$ 趨於一限時,此定則可改如下而

引用甚便:

若 $\sqrt[n]{u_n}$ 於 $n\to\infty$ 趨於一限 l. 則視 $l<1$ 或 $l>1$ 可判斷級數爲收斂或發散.

若 $l=1$. 則不能決.但 $\sqrt[n]{u_n}$ 若由大於1之值趨於1, 則可判斷級數爲發散.

213. 達氏定則 (D'alembert's test)

設以 u_n 爲普通項之一正項級數;若自某項起 $u_{n+1}/u_n<1$, 則級數收斂. 反之,若 $u_{n+1}/u_n>1$, 則級數發散.

設自某項起有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<k$. 此不等式可書作

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{k^{n+1}}{k^n},$$

而 Σk^n 爲一收斂級數;然則所論級數爲收斂.反之,若自某項起恆有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq 1$, 則普通項 u_n 顯然不趨於零, 而所論級數發散.

由此則立可推出次理:

若 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 於 $n\to\infty$ 趨於一限 l, 則級數因 $l<1$ 或 $l>1$ 爲收斂或發散. 若 $l=1$. 則不能決;但 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 若由大於1之值趨於1, 則級數發散.

214. 前二定則之比較.

I. 歌氏定則與達氏定則皆取一等比級數爲比較標

準而得;但前者較後者爲普通.試設一級數 Σu_n 使於 $n\geqq p$, 時 $u_n<Ar^n$(A 爲常數, $r<1$.)若是有 $\sqrt[n]{u_n}<rA^{\frac{1}{n}}$,而此不等式右端於 $n\to\infty$ 以 r 爲限.命 k 爲介於 r 與 1 間之一常數,則自某項起有 $\sqrt[n]{u_n}<k$, 可見歌氏定則恆可用.致達氏定則未必.蓋 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 可有大於 1 之值而無論 n 若何大也.例如級數

$$1+r|\sin x|+r^2|\sin 2\alpha|+\cdots\cdots+r^n|\sin n\alpha|+\cdots\cdots,$$

其中 $r<1$ 並 α 爲常數.於此級數吾等有 $\sqrt[n]{u_n}=r\sqrt[n]{\sin n\alpha}<r$,

致
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=r\left|\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}\right|,$$

則於 $n\to\infty$ 時可有無窮個大於 1 之值.

但達氏定則應用往往較便,故亦有其價值.例如對於級數

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{n+1}$ 於 $n\to\infty$ 以零爲限;致 $\sqrt[n]{u_n}=\frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$, 則於 n 增大時不易知其限若何?

II. <u>當 $\sqrt[n]{u_n}$ 與 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 各有一限時,此二限常相等</u>.欲明之,設旁助級數

$$(x)\qquad u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots\cdots+u_nx^n+\cdots\cdots,$$

式中 x 爲正數.若命 l 表 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 於 $n\to\infty$ 時之限,則此級數一項與前項之比以 lx 爲限.若有 $x<\frac{1}{l}$, 則級數 (x) 爲收斂的;反之,若 $x<\frac{1}{l}$, 則爲發散的.仿此命 l' 爲 $\sqrt[n]{u_n}$ 之限,則 $\sqrt[n]{u_nx^n}$ 以

$l'x$ 爲限,而級數 (x) 因 $x<\frac{1}{l'}$ 或 $x>\frac{1}{l'}$ 爲收斂的或發散的. 以此結果與前者相比, 顯然應有 $l=l'$.

III. 當 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 趨於一限 l, 則 $\sqrt[n]{u_n}$ 亦趨於此限 l. 欲明之,設自某項起

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},\cdots\cdots,\quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}$$

等分數均介於 $1-\varepsilon$ 與 $1+\varepsilon$ 間 (ε 爲一正數,可小至所欲).若是亦有

$$(1-\varepsilon)^p<\frac{u_{n+p}}{u_n}<(l+\varepsilon)^p,$$

或

$$u_n^{\frac{1}{n+p}}(1-\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}<\sqrt[n+p]{u_{n+p}}<u_n^{\frac{1}{n+p}}(1+\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}$$

命 n 固定而 $p\to\infty$, 則上式兩端趨於 $1-\varepsilon$ 與 $1+\varepsilon$. 然則對於 m 大於某值恆有

$$1-2\varepsilon<\sqrt[m]{u_m}<1+2\varepsilon,$$

卽見 $\sqrt[m]{u_n}$ 以 l 爲限.

但吾等須注意者:於 $\sqrt[n]{u_n}$ 有一限時 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 未必有一限. 例如級數

$$1+a+ab+a^2b+a^2b^2+\cdots\cdots+a^nb^{n-1}+a^nb^n+\cdots\cdots$$

其一項與其前項之比循環爲 a 爲 b, 而 $\sqrt[n]{u_n}$ 則於 $n\to\infty$ 以 $\sqrt{ab}$ 爲限.

本節所述可借以求一種無定式之限. 例如 $\sqrt[n]{1,2\cdots\cdots n}$ 以 $+\infty$ 爲限而 $\sqrt[n]{\log n}$ 以 1 爲限.

215. 最大限之應用.

歌氏就較廣之義立其定則如次:命 a_n 爲級數普通項;若貫數

$$(3)\qquad a_1,\ a_2^{\frac{1}{2}},\ a_3^{\frac{1}{3}},\cdots\cdots,\ a_n^{\frac{1}{n}},\cdots\cdots$$

無高界,則a_n不趨於零而級數Σa_n發散.反之,若(3)成一閉集則命G爲其最大限而有歌氏廣意定則:

若 $G<1$ 則級數 Σa_n 收斂;反之,若 $G<1.$ 則 Σa_n 發散.

欲證第一層,命 $1-\alpha$ 爲介於 G 與 1 間之一數,按最大限定義,貫數 (3) 僅能有一定個數之項大於 $1-\alpha$. 是則自某項起恆有 $\sqrt[n]{a_n}<1-\alpha$, 而 Σa_n 爲收斂級數.反之,若 $G<1$, 則命 $1+\alpha$ 表介於 1 與 G 間之一數,貫數(3)有無窮項大於$1+\alpha$, 卽級數有無窮個之項大於 1, 故爲發散,於 $G=1$, 則不能決.

216. 歌氏定理 (Cauchy's theorm).

無窮級數與無窮積分性頗類似.歌氏比較二者得一重要定理如次:

命 $\phi(x)$ 爲一正函數,自一値 a 起恆減殺,而於 $x\to\infty$ 趨於 0; 如是則級數

$$(4)\qquad \phi(a)+\phi(a+1)+\cdots\cdots+\phi(a+n)+\cdots\cdots$$

爲收斂或發散視定積分 $\int_a^l \phi(x)dx$ 於 $l\to\infty$ 有一限與否而定

證:設 x 介於 $a+p-1$ 與 $a+p$ 間, p 爲一正整數則由

$$\phi(a+p-1)>\phi(x)\gtrless\phi(a+p)$$

得
$$\phi(a+p-1)\overset{>}{\cancel{<}}\int_{a+p-1}^{a+p}\phi(x)\,dx>\phi(a+p).$$

以次命 $p=1, 2, \cdots\cdots n$ 而加其所得結果，則有

$$\phi(a)+\phi(a+1)+\cdots\cdots+\phi(a+n-1)>\int_a^{a+n}\phi(x)\,dx$$

與
$$\phi(a+1)+\phi(a+2)+\cdots\cdots+\phi(a+n)<\int_a^{a+n}\phi(x)\,dx$$

於是若 $\int_a^l\phi(x)\,dx$ 於 $l\to\infty$ 時趨於一限 L，則 $\sum_{p=0}^{n}\phi(a+p)$ 恆小於 $\phi(a)+L$ 而趨於一限，卽明級數 (4) 爲收斂. 反之，若 $\int_a^{a+p}\phi(x)\,dx$ 能大於任何限，則 $\sum_{p=0}^{n}(a+p)$ 亦然，而級數 (2) 爲發散.

例取 $\phi(x)=\frac{1}{x^\lambda}(\lambda<0$ 及 $a=1)$. 因積分 $\int_1^l\frac{dx}{x^\lambda}$ 於 $\lambda>1$ 趨於一限，而於 $\lambda\leqq1$ 則否，可知級數

$$(S_9)\qquad 1+\frac{1}{2^\lambda}+\frac{1}{3^\lambda}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^\lambda}+\cdots\cdots$$

於 $\lambda\overset{>}{\cancel{<}}1$ 爲收斂，而於 $\lambda\leqq1$ 爲發散.

再令 $a=2$ 而設

$$\phi(x)=\frac{1}{x(\log x)^\lambda},\qquad(\lambda>0).$$

吾人於 $\lambda\neq1$ 有

$$\int_2^n\frac{dx}{x(\log x)^\lambda}=\frac{-1}{\lambda-1}\Big[(\log n)^{1-\lambda}-(\log 2)^{1-\lambda}\Big].$$

若 $\lambda>1$，則右端有一限. 若 $\lambda<1$，則右端趨於無窮. 再於 $\lambda=1$

亦易知積分趨於無窮.若是級數

$$(S_1)\qquad \frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3(\log 3)^{\lambda}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(\log n)^{\lambda}}+\cdots\cdots$$

對於$\lambda>1$爲收斂而於$\lambda\leqq 1$爲發散.

推之,命 $\log_2 n$, $\log_3 n$,…… 以次表 $\log(\log n)$, $\log(\log_2 n)$,……,則級數

$$(S_p)\qquad \sum\frac{1}{n\log n\log_2 n\cdots\cdots\log_{p-1} n\,(\log_p n)^{\lambda}}$$

於$\lambda>1$收斂而於$\lambda\leqq 1$發散.式中吾等自應設n自一相當大之值起始使 $\log n$, $\log_2 n$,……$\log_p n$ 不爲負數.

級數(S_0), (S_1),……, (S_p) 稱爲貝特昂氏(Bertrand)級數,其斂散以次較緩.吾等可取作標準級數.

217. 對數定則(Logarithmic criteria).

取白氏級數爲比較標準而引用普通項直接比較法可得一羣之定則曰對數定則:先取級數(S_0)論之有:

設級數Σu_n;若自某項起$\log\frac{1}{u_n}\Big/\log n$恆大於一定數$k>1$,則級數爲收斂;反之,若$\log\frac{1}{u_n}\Big/\log n$恆小於1,則級數爲發散.若$\log\frac{1}{u_n}\Big/\log n$於$n\to\infty$趨於一限$l$,則級數於$l>1$收斂而於$l<1$發散.當$l=1$則不能決.

證:若有

$$\log\frac{1}{u_n}>k\log n$$

故於$k>1$級數爲收斂.

今若設
$$\log\frac{1}{u_n}<\log n,$$
則 $u_n>\frac{1}{u}$ 而級數發散.

仿上以次取白氏級數 (S_1), (S_2),…… 爲比較標準論之,則得無窮個定則,其詞只須於上述定則內依次代 $\log\frac{1}{u_n}/\log n$

以
$$\frac{\log\frac{1}{nu_n}}{\log_2 n},\quad \frac{\log\frac{1}{nu_n\log n}}{\log_3 n},\ldots\ldots,$$
因白氏級數 (S_1), (S_2)…… 斂散依次漸緩,是類定則爲用亦以次漸廣.

218. 哈白氏與都阿梅氏定則 (Raabe's and Duhamel's test).

仍取白氏級數爲標準但不直以普通項相較而以相續二項之比較之,則復得一類定則,其普偏性雖遜於前者,然爲用則恆較便,設級數 Σu_n, 而其 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 由小於 1 之數趨於 1 則可書 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+a_n}$, a_n 爲一正數,於 $n\to\infty$ 時趨於零,如是有定則:

若自某項起 $n\,a_n$ 恆大於一定數 $k>1$, 則級數爲斂的;反之,若自某項起 $n\,a_n$ 恆小於 1, 則級數爲散的.

證: 定則第二層其理甚易證明.蓋有
$$\frac{1}{1+a_n}>\frac{n}{n+1},$$
卽見 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 大於調和級數之一項與其前項之比也.

欲證第一層,設自某項起 $u\alpha_n>k>1$. 命 λ 爲介於1與 k 之間之一數,若自某項起能有

$$u_n<n^{-k}$$

則
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{(n+1)^{-\lambda}}{n^{-\lambda}},$$

卽

(5)
$$\frac{1}{1+\alpha_n}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lambda}},$$

則 Σu_n 必爲斂的,試以泰氏公式展 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lambda}$ 而書(5)爲

$$1+\frac{\lambda}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}<1+\alpha_n,$$

θ_n 於 n 無限增大時常小於一定數,此條件變爲

$$\lambda+\frac{\theta_n}{n}<n\,\alpha_n,$$

式之左端於 $n\leftarrow\infty$ 趨於 λ, 故 n 大之至,此不等式爲合理,卽明所欲證.由上立可推出次理:

若 $n\,\alpha_n$ 於 $n\to\infty$ 趨於一限 l, 則級數於 $l>1$ 收斂而於 $l<1$ 發散;若 $l=1$, 則不能決;但 $n\alpha_n$ 由小於1之數趨於1時級數爲散者.

對於未決之例,卽可書 $\alpha_n=\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}$ 時 (β_n 於 $n\to\infty$ 趨於零),吾人可取白氏級數 (S_1) 爲比較標準而由次定則解決之:

若自某項起 $\beta_n\log n$ 恆大於一定數 $k>1$, 則級數收斂;反

之,若 $\beta_n \log n$ 恆小於 1, 則級數發散.

欲證定則第一層, 設 λ 爲介於 1 與 k 間之一數, 於是但須能證明

(6) $$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{n}{n+1}\left[\frac{\log n}{\log(n+1)}\right]^{\lambda}$$

卽可. 此式可書作

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^{\lambda}.$$

或準泰氏公式書作

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{\lambda\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}+\theta_n\left[\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^2\right\}$$

θ_n 於 $n\to\infty$ 時終小於一定數, 簡之得

(7) $$\beta_n\log n>\lambda(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\theta_n(n+1)\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\log n}.$$

按泰氏公式可書

(8) $$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2n}(1+\varepsilon),$$

ε 於 $n\to\infty$ 趨於零, 是則 $(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 1$. 而 (7) 式右端趨於 λ, 其左端 $\beta_n\log n$ 旣可大於 $k>\lambda$, 則自 n 甚大之値起 (7) 式果能合理, 卽明欲證.

欲明定則第二層, 只須取級數 $\sum\frac{1}{n\log n}$ 爲標準而證

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{n}{n+1}\,\frac{\log n}{\log(n+1)},$$

此式可書如

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right].$$

或

$$\beta_n \log n<(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

準(8)此式右端由大於1之值趨於1,而自某項起此式左端不能大於1.然則自某項起此不等式必可合理.

由上定則尙可推出次定則:

若 $\beta_n \log n$ 於 $n\to\infty$ 趨於一限 l,則級數對於 $l>1$ 爲斂的,而於 $l<1$ 爲散的.致對於 $l=1$ 則不能決.但若 $\beta_n \log n$ 由小於1之值趨於1,可知級數爲散的.

當 $\beta_n \log n$ 由大於1之值趨於1時,吾人書

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{u}+\frac{1+\delta_n}{n\log n}}$$

(δ_n 於 $n\to\infty$ 趨於零)而取 $\gamma_n \log_2 n$ 論之,得與上定則相似之定則,并可如是類推.

系. 若於級數 Σu_n 能書

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{r}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\lambda}},$$

λ 爲正數,r 爲常數,H_n 於 $n\to\infty$ 時絕對小於一定數,則於 $r>1$ 時,級數爲斂的,而於 $r\leqq1$ 時爲散的.

證：仍設 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n}$, 可書

$$n\,\alpha_n=\left(r-\frac{H_n}{n^\lambda}\right)\left(1-\frac{r}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\lambda}}\right)$$

於 $n\to\infty$ 時，$n\,\alpha_n\to r$. 然則若 $r>1$, 則級數爲斂的，而於 $r<1$ 爲散的，至於 $r=1$, 命

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{u}+\frac{\beta_n}{n}},$$

有
$$\beta_n\log n=\frac{\frac{\log n}{n}-\frac{n+1}{n}H_n\frac{\log n}{n^\lambda}}{1-\frac{1}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\lambda}}}.$$

此式右端於 $n\to\infty$ 趨於零而無論 λ 若何小，然則級數爲散的.

例設
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\cdots\cdots}{n^p+b_1n^{p-1}+b_2n^{p-2}+\cdots\cdots}.$$

由除法可書
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{a_1-b_1}{n}+\frac{R(n)}{n^2},$$

$R(n)$ 爲 n 之一有理函數，於 $n\to\infty$ 趨於一定限，準前系理，欲級數爲收斂者必須而即須

$$b_1>a_1+1.$$

此爲果士(Gauss)氏定則，惟果氏係由他法得之.

219. 枯墨爾氏定理(Kummer's theorem).

I. 凡正項級數 Σu_n, 若於 $n\geqq p$ 有

(9) $$a_nu_n-a_{n+1}u_{n+1}>\mu\,u_{n+1},$$

則收斂.式中 a_n 爲 n 之正函數,而 μ 爲正常數.

II. 若於 $u \geqq p$ 有

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} < 0, \tag{10}$$

且若 $\Sigma \frac{1}{a_n}$ 爲發散級數,則 Σu_n 發散.

證: 由(9)有

$$u_{n+1} < \frac{1}{\mu}\left(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}\right),$$

因之有

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots\cdots + u_{p+q} < \frac{1}{\mu}\left(a_p u_p - a_{p+q} u_{p+q}\right) < \frac{1}{\mu} a_p u_p$$

而無論 q 若何大;定理第一層以明.

繼自(10)式有 $\qquad a_n u_n > a_p u_p,$

即 $$u_n > a_p u_p \frac{1}{a_p}.$$

$\Sigma \frac{1}{a_n}$ 既爲發散,可知 Σu_n 亦然.

特例. 取 $a_n = 1$, 則得達氏定則;取

$$a_n = n \log n, \qquad n \log n \log_2 n, \cdots\cdots$$

則得白特昂氏定則;又設 $a_r = n$, 則得哈氏與都氏定則.

220. 絕對收斂級數(Absolutely convergent series).

今取任意級數論之.若其各項盡爲負,則其斂散性顯然與改號所得之正項級數同.又若級數自某項以後有定號,則將是項以前之各項删去即可歸入上例.故須討論者僅爲有無窮個正項與無窮個負項之級數.

設級數

$$(11)\qquad u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

命 $U_n=|u_n|$ 而設級數:

$$(12)\qquad U_0+U_1+\cdots\cdots+U_n+\cdots\cdots;$$

若此級數(11)收斂,則級數(10)亦收斂.蓋有

$$|u_n+u_{n+1}+\cdots\cdots+u_{n+p}|<U_n+U_{n+1}+\cdots\cdots+U_{n+p}$$

右端於 n 甚大時可小至所欲而無論 p 若何.因之左端亦然.級數(9)於此稱爲<u>絕對收斂</u>.

於絕對收斂之級數,吾人可任意更換其項之位次而不變其和數之值.欲明之,吾先論正項級數.設有正項斂級數 $S=\Sigma u_n$; 並設更換其項之位次得一級數 $S'=\Sigma v_n$.

命 S'_n 與 S'_m 依次表級數 S 前 n 項之和與級數 S' 前 m 項之和.已與 m,吾人可取 n 甚大,使

$$S'_m<S_n<S.$$

足見 S'_m 於 $m\to\infty$ 趨於一限 $S'\leqq S$.反之,可證 $S\leqq S'$.然則 $S'=S$.同理可明若 Σu_n 與 Σv_n 二級數之一爲發散者,則他級數亦然.

又於正項斂級數,吾人亦可任意歸併其項,而不變其和.假如於正項級數 Σu_n 中取

$$\sigma_0=u_0+u_1+\cdots\cdots+u_p,$$

$$\sigma_1=u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots\cdots+u_q,$$

$$\sigma_2=u_{q+1}+u_{q+2}+\cdots\cdots+u_r.$$

而作級數

$$(13)\qquad \sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_m+\cdots\cdots,$$

則此級數前 $m+1$ 項之和 S'_m 等於 Σu_n 前 $N+1$ 項之和 $S_N(N>m)$. 當 $m\to\infty$, 亦有 $N\to\infty$, 而 S'_m 與 S_N 同趨於 S.

參用上述二種手續,則知一正項級數,可以他一級數代之,新級數之每項爲舊級數任意數項之和,但須舊級數每項只用於此等和數中一次即可.

今若注意 $\qquad u_n=(u_n+|u_n|)-|u_n|,$

則知絕對歛級數,可視作二正項歛級數之差.於是上之手續於此等級數亦可施用.

221. 半收歛級數或附件收歛級數 (Conditionally convergent series).

任意級數可爲收歛而非絕對收歛,例如更號歛級數 (Alternating series) 之合於次述條件者是: 1° 任一項小於其前項; 2° 普通項 u_n 於 $n\to\infty$ 以零爲限.此爲吾等所熟知,茲不贅證.

凡收歛而非絕對收歛之級數曰半歛級數或附件歛級數,例如

$$(14)\qquad S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

對於此種級數,吾人不能遷移其項,亦不能歸併其項.蓋此等運算手續可令級數之和變易,甚且可使一歛級數化爲一散級數也.例如於上列級數內,逆換其項之位次,可得級數

(15) $$S'=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots.$$

吾往證 S' 異於 S. 命 S_n 與 S'_n 依次表(12)與(13)二級數前 n 項之和,并設

$$\sigma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n},$$

則 $$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n,$$

$$S'_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots\cdots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\sigma_{4n}-\frac{1}{2}\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n=(\sigma_{4n}-\sigma_{2n})+\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n).$$

由是得 $$S_{3n}=S_{4n}+\frac{1}{2}S_{2n}.$$

令 $n\to\infty$, 則 $$S'=S+\frac{1}{2}S=\frac{3}{2}S.$$

此見半斂級數之和可因其項位次之變更而改變,甚且吾等可證明:於一半斂級數,吾等恆能更換其項次使其和等於任與之一數[1].

222. 狄氏定則 (Dirichlet's test).

此定則足以判斷一特種級數之斂性,茲述於次:

設有級數 Σu_n 使無論 n 若何,恆有

$$|u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n|<A,$$

(1) 見 Goursat, Cours d'analyse mathematique, Tome I.

(A為定數)並有一漸減而趨於零之貫數,

$$\varepsilon_0>\varepsilon_1>\cdots\cdots>\varepsilon_n>\cdots\cdots$$

則級數

$$(16)\qquad \varepsilon_0u_0+\varepsilon_1u_1+\cdots\cdots+\varepsilon_nu_n+\cdots\cdots$$

為收斂的.

證: 按所設有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots+u_{n+p}|<2A.$$

而無論若何.於是準亞貝氏引有

$$|u_{n+2}\varepsilon_{n+1}+\cdots\cdots+u_{n+p}\varepsilon_{n+p}|<2A\varepsilon_{n+1}.$$

因於 $n\to\infty$ 時 $\varepsilon_{n+1}\to 0$, 故可取 n 甚大,使

$$|\varepsilon_{n+1}u_{n+1}+\cdots\cdots+\varepsilon_{n+p}u_{n+p}|<\varepsilon.$$

例如級數 $\dfrac{\sin\theta}{1}+\dfrac{\sin 2\theta}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{\sin n\theta}{n}+\cdots\cdots.$

命 $\qquad u_1=\sin\theta_1,\quad u_2=\sin 2\theta,\cdots\cdots,\quad u_n=\sin n\theta,$

$$\varepsilon_1=1,\quad \varepsilon_2=\frac{1}{2},\cdots\cdots,\quad \varepsilon_n=\frac{1}{n}.$$

準三角學公式有

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=\frac{\sin\dfrac{n\theta}{1}\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

此式絕對小於 $\dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}$. 按上定則可斷對於 θ 異於 $2k\pi$ 之一

切值所設級數爲收斂的,而對於$\theta=2k\pi$則級數各項皆爲零,是亦爲收斂的.

系. 設有收斂級數

$$u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots,$$

並貫數　$a_0,\ a_1,\cdots\cdots,\ a_n,\cdots\cdots,$

其項遞增以往或遞減以往,而於$n\to\infty$趨於一數$k\neq 0$.若是則級數

(17)　$$a_0u_0+a_1u_1+\cdots\cdots+a_nu_n+\cdots\cdots$$

爲收斂的.

證: 設如貫數a_i爲增進者;吾人可書

$$a_0=k-\varepsilon_0,\quad a_1=k-\varepsilon_1,\cdots\cdots,\quad a_n=k-\varepsilon_n,\cdots\cdots,$$

$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\cdots\cdots,\ \varepsilon_n,\cdots\cdots$ 成一貫正數,其值以次遞減而於$n\to\infty$時趨於零.吾等知

$$ku_0+ku_1+\cdots\cdots+ku_n+\cdots\cdots,$$

$$\varepsilon_0u_0+\varepsilon_1u_1+\cdots\cdots+\varepsilon_nu_n+\cdots\cdots.$$

兩級數皆收斂,故級數(15)亦收斂.

II. 複數項級數

223. 定義.

設有級數

(18)　$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

其諸項為複數

$$u_0=a_0+b_0i,\quad u_1=a_1+b_1i,\cdots\cdots,\quad u_n=a_n+b_ni,\cdots\cdots.$$

若級數

$$(19)\qquad a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots,$$

$$(20)\qquad b_0+b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n+\cdots\cdots$$

均為收歛,則吾人稱級數(18)為收歛.如 S' 與 S'' 依次為級數 (1~~6~~9),(17)之和,則級數(1~~6~~9)之和按定義為 $S'+iS''$. 此和數顯然亦為級數(16)前 n 項之和於 $n\to\infty$ 之限.

若級數

$$(21)\qquad \sqrt{a_0^2+b_0^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\cdots\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\cdots\cdots,$$

為收歛的,則顯然級數(1~~8~~9),(~~17~~20)亦皆為收歛的.蓋

$$|a_n|\leqq\sqrt{a_n^2+b_n^2},\qquad |b_n|\leqq\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

於級數(~~19~~21)為收歛時,則級數(16)稱為絕對收歛.對於絕對收歛之級數.吾人可遷移其項或合併其項而不變其和.

判斷正項級數收歛性之定則,即足以判斷任意項(或實或虛)級數之絕對收歛性.

224. 廣義幾何級數(Hypergeometric series).

此為形如次之級數.於微分方程上甚重要.茲試論其收歛性.

$$F(a,b,c,z)=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot2\cdot c(c+1)}z^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{a(a+1)\cdots\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots\cdots(b+n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots nc(c+1)\cdots\cdots(c+n-1)}z^n+\cdots\cdots,$$

式中設 a, b, c 不爲負整數.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-1)}z\right|$$

於 $n\to\infty$ 時以 $|z|$ 爲限. 然則準達氏定則可判斷級數 $|z|<1$ 時爲絕對收斂而於 $|z|>1$ 爲發散.

惟於 $|z|=1$ 一層, 則尙不能決. 吾等可書

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\left(1+\frac{a-1}{n}\right)\left(1+\frac{b-1}{n}\right)\left(1+\frac{c-1}{n}\right)^{-1}\right| = \left|1+\frac{a+b-c-1}{n}+\frac{A_n}{n^2}\right|$$

A_n 於 $n\to\infty$ 時趨於一定數. 命

$$a=a'+a''i,\quad \eta=b'+b''i,\quad c=c'+c''i,\quad A_n=A'_n+A''_n i,$$

則

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|1+\frac{(a'+b'-c'-1)+i(a''+b''-c'')}{n}+\frac{A'_n+A''_n i}{n^2}\right|$$

$$=\left[\left(1+\frac{a'+b'-c'-1}{n}+\frac{A'_n}{n^2}\right)^2+\left(\frac{a''+b''-c''}{n}+\frac{A''_n}{n^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{a'+b'-c'-1}{n}+\frac{B_n}{n^2},$$

式中 A'_n, A''_n, B_n 皆於 $n\to\infty$ 時小於一定數. 於是可斷定若

$$-(a'+b'-c'-1)>1$$

卽

$$a'+b'-c'<0,$$

則級數爲絕對收斂.

225. 級數乘法 (Multiplication of series).

設

$$(22)\qquad u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

$$(23)\qquad v_0+v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

二級數而以一切可能之法取前者之一項乘後者之一項,而將乘積 u_iv_j 之足碼之和 $i+j$ 相等者集合之,則得一新級數如:

$$(24)\qquad u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)$$
$$+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots\cdots+u_{n-1}v_0);$$

歌氏證明若(20),(21)二級數均絕對收歛,則級數(22)收歛而以前二者之和之乘積爲其積.

其後麥滕氏(Mertens)復稍推廣其理,而謂(20),(21)兩級數中有其一爲絕對收歛即可,他級數可僅爲收歛.

試設(20)爲絕對收歛述之.若命

$$w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots\cdots+u_nv_0,$$

則只須證明差數

$$\delta_n=w_0+\cdots\cdots+w_{2n}-(u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n)(v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n)$$

$$\delta'_n=w_0+w_1+\cdots\cdots+w_{2n+1}-(u_0+u_1+\cdots\cdots+u_{n+1})(v_0+v_1+\cdots\cdots+v_{n+1})$$

均於 $n\to\infty$ 趨於零即可.試書

$$\delta_n=u_0(v_{n+1}+v_{2n})+u_1(v_{n+1}+\cdots\cdots+v_{2n-1})+\cdots\cdots+u_{n-1}v_{n+1}$$
$$+u_{n+1}(v_0+\cdots\cdots+v_{n-1})+u_{n+2}(v_0+\cdots\cdots+v_{n-2})+\cdots\cdots+u_{2n}v_0,$$

因設級數(22)爲絕對收歛,可知無論 n 若何大,恆有

$$U_0+U_1+\cdots\cdots+U_n<A,$$

其中 $U_i=|u_i|$, 並 A 爲定數. 又因級數(23)爲收斂有

$$|u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n|<B,$$

B 爲定數. 任與正數 ε, 吾等可得一正整數 N 使 $n\geqq N$ 時有

$$U_{n+1}+\cdots\cdots+U_{n+p}<\frac{\varepsilon}{A+B},$$

$$\left|u_{n+1}+\cdots\cdots+u_{n+p}\right|<\frac{\varepsilon}{A+B}$$

而無論 p 若何; 由是易得 $|\delta_n|$ 之一大限如

$$|\delta_n|<U_0\frac{\varepsilon}{A+B}+U_1\frac{\varepsilon}{A+B}+\cdots\cdots+U_{n-1}\frac{\varepsilon}{A+B}$$

$$+U_{n+1}B+U_{n+2}B+\cdots\cdots+U_{2n}B,$$

或 $$|\delta_n|<\frac{\varepsilon}{A+B}(U_0+U_1+\cdots\cdots+U_nU_{n-1})$$

$$+B(U_{n-1}+\cdots\cdots+U_{2n})<\frac{\varepsilon A}{A+B}+\frac{\varepsilon B}{A+B}.$$

故 $$|\delta_n|<\varepsilon.$$

仿之可證 δ'_n 亦趨於零.

III. 多進級數

226. 重級數 (Double series).

設有限於上於左而於下於右,則無疆之表如

$$
(T)\qquad
\begin{array}{l|llllll}
 & 0 & & & & & x \\
\hline
 & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & \cdots \\
 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\
 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\
y & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

表中之數如 a_{ik} 係位於橫行 i 號縱行 k 號.

吾人謂此表確定一<u>重級數</u>或<u>二進級數</u>

(25) $$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}.$$

先設表中各項爲實的正的.

設於表中作一族曲線 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n\cdots\cdots$ 以次擴大而達於無限. 只 $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n$ 依次爲表中位於 $C_1, C_2, \cdots\cdots C_n$ 各線以內諸項之和; 若 S_n 於 $n\to\infty$ 時趨於一定限 S, 則吾等謂重級數(25)爲收斂而以 S 爲其和.

欲此定義正確, 必須 S 與曲線族之形無涉. 試證其如此. 如 $C'_1, C'_2, \cdots\cdots, S'_m, \cdots\cdots$ 爲他任一族曲線並 $S'_1, S'_2, \cdots\cdots, S'_m, \cdots\cdots$ 爲相關和數. 令 n 甚大使 C_n 位於 C'_m 外, 則見 $S'_m<S_n<S$, 而

S'_m 隨 m 增大. 可斷 S'_m 趨於一限 $S'\leqq S$. 仿之, 若取 m 甚大可證 $S\leqq S'$, 故 $S'=S$.

於是欲論重級數(28)之斂性. 吾等僅須取特別一族曲線論之. 例取與表之二邊成正方形之折線而論和數

$$a_{00}+(a_{10}+a_{11}+a_{01})+\cdots\cdots+(a_{n0}+a_{n1}+\cdots\cdots+a_{nn}+\cdots\cdots+a_{0n}),$$

或取與表二邊成等腰三角形之直線而論和數

$$a_{00}+(a_{10}+{}_{01})+(a_{20}+a_{12}+a_{02}+a_{11}+a_{02})+\cdots\cdots$$
$$+(a_{n0}+a_{n-1,1}+\cdots\cdots+a_{0n}).$$

若知此二和數之一於 $n\to\infty$ 有一限 S, 則 (25) 爲收斂而以 S 爲和數.

吾等倘可取 (T) 任一邊之平行線論之, 卽可按橫行或縱行加諸項. 試設 (25) 爲收斂而以 S 爲和, 則加 (T) 內一橫行而得之級數

(26) $$a_{i0}+a_{i1}+\cdots\cdots+a_{in}+\cdots\cdots,\qquad (i=1,2,\cdots\cdots)$$

亦收斂, 因其前 n 項之和 $<S$ 數又隨 n 增大也.

今命 σ_0, $\sigma_1,\cdots\cdots$, $\sigma_i\cdots\cdots$ 爲此等級數之和, 可證級數

(27) $$\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_n+\cdots\cdots$$

亦收斂. 試於 (T) 表中取和數 Σa_{ik} 而設 $i\leqq p$, $k\leqq r$. 此和數恆小於 S. 令 p 固定而使 r 無限增大, 則以

$$\sigma_0+\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_p$$

爲限, 後之和數小於 S, 又隨 p 增大; 是可斷級數 (27) 有一限 $\Sigma\leqq S$. 反之, 若 (26) 諸級數收斂並自是而得之級數 (27) 亦收

斂而以Σ爲和,則(T)內任若干項之和顯然小於Σ,於是亦見$S\leqq n$,故$n\leqq S$.

於正項重級數,有與正項單級數相類之定理.例如一正項重級數各項若小於一收斂正項重級數之相當項,則此級數亦收斂.

一正項重級數若非收斂則稱爲發散.其相當表(T)中限於一曲線內諸項之和,於是線由各方無限擴張時將無限增大.

現設(T)表中之數不盡爲負;但若僅有一定個數之數爲正,或僅有一定個數之數爲負,則皆顯然可歸於上例,不必討論,是應設(T)有無窮個正數與無窮個負數論之.試取(T)表一數之絕對值別作一表(T_1),其普通項爲$|a_{ik}|$.若(T_1)表收斂,則(T)表稱爲絕對收斂.若是之一表具有正項表所具有之一切特性.

欲明此理,設二補助表(T'),(T'')如次:

(T')表設爲於(T)表內保存正項而易負項爲零得之;(T'')表乃於(T)表易正項爲零並改負項號而得.若(T_1)收斂,則(T'),(T'')皆然,蓋如(T'')之一項至大僅等於(T_1)之相當項也.(T)表位於一曲線內諸項之和等於(T')與(T'')二表位於同曲線內諸項之和之差.後之二和數旣各趨於定限,則前者當亦趨於一限S,且此限與曲線拓展之狀態無關.S即稱爲T表之和數.吾等尙可如正項表證明可依橫行或縱行加之.然則

絕對收斂之表性質與正項表同.但半收斂者則不然.

吾等尚可設複數項之二進級數論之.若有複數項之表 (T),則吾等可取諸項之實的部分及 i 之係數依次作二表 (T') 及 (T''),並取複數之模作一表 (T_1).若 (T_1) 表收斂,則 (T') 與 (T'') 均收斂,而 (T) 稱為絕對收斂,而其範圍於迴線 C 內諸項之和有一限 S,與 C 拓展至無窮之狀態無關,S 為 (T) 之和數,亦可依橫行或縱行求之.

227. 多重級數 (Multiple series).

由二重級數之義,尚可推廣以得多重級數或多進級數.吾等可設級數 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{ik}$. 但此級數可由如上所論之四個表顯之,無更討論之必要.今由他方面推廣之.設一級數其普通項 $a_{m1,\,m2,\cdots\cdots,\,m_p}$ 繫有 p 個足碼各自 0 變至 $+\infty$(或自 $-\infty$ 至 $+\infty$,亦可合於某不等式).於此雖幾何之表示不可能,但上述之理亦不難由理想證明.

先設各項為正的實的.設想先取級數之若干項之和名之為 S_1,繼於 S_1 增益其餘項中之若干項,則得一和數 S_2,復於 S_2 增益之得 S_3,如是類推可至得一和數 S_n.只須 n 大之至,級數之任何項皆可屬於 S_n.今若於 $n\to\infty$ 時 S_n 趨於一限 S,則級數為收斂,而以 S 為其和.此和數 S 與 S_n 增大之情狀無關.

任意之多重級數(其項為正負實數或為複數)可仿前

論之.

228. 歌氏定理之推廣.

命 $f(x,y)$ 爲 x,y 之一函數,於一迴線 Γ 外恆爲正,且設於 (x,y) 點離遠原點時,其值逐漸減小.繼作任意迴線 C 包圍 Γ 而取展布於 Γ 與 C 間面積 A 內之重積分 $\iint f(xy)dx\,dy$,他方面則設重級數 $\Sigma f(m,n)$,其中 m,n 以一切正負整數爲值,但使 (m,n) 點位於 Γ 外,於是可證:若重積分於 C 由各方無限擴張時有一限,則重級數爲收斂;逆論之亦然.

證:以直線 $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$,…… 及 $y=0$, $y=\pm1$, $y=\pm2$,……分 A 爲正方形及殘缺正方形;若於每形取其尖之距 0 最遠者,則顯然 $\Sigma f(m,n)<\iint_A f(x,y)\,dx,dy$. 若此重積分有一限 S,則由是可知重級數任若干項之和恆小於一定限,故收斂.同法可證若重級數收斂,則重積分恆小於一定數,而因之有一定限.此定理尙可推及於多進級數.

例如普通項爲 $\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\lambda}$ 之重級數(其 m,n 以一切整數爲值,惟 $m=n=0$ 除外.)於 $\lambda>1$ 收斂,而於 $\lambda\leqq1$ 發散.因在心爲原點之一圓外的重積分

$$\iint\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\lambda} \tag{28}$$

於 $\lambda>1$ 有定值,而於 $\lambda\leqq1$ 趨於無窮也.

推之,可證普通項爲

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+\cdots\cdots+m_p^2)^\lambda}$$

之級數於 $2\lambda>p$ 時收斂,式中 $m_1, m_2,\cdots\cdots, m_p$ 爲任意整數.惟 $m_1=m_2=\cdots\cdots=m_p=0$ 除外.

229. 變數項的多進級數;一致收斂性.

設一 p 進級數,其項爲 n 個變數 $x, y, z\cdots\cdots$ 之函數,並設此級數在一域 D 內絕對收斂.吾人謂其在 D 內爲一致收斂者,乃任與一數 ε,能得級數中之 N 項,使級數之和 S 與其含有此 N 項之任 n 項之和 S_n 之差 $S-S_n$ 絕對小於 ε,而對於 D 中任何組數值 $x, y, z\cdots\cdots$ 皆然也.

吾等可仿單級數理證明各項爲在 D 域之連續函數之級數,若爲一致收斂,則其和爲在 D 內之連續函數.吾等並可就含於 D 域內之一 q 緯域 δ 內 $(q<p)$ 逐項求積分.吾等亦可將一絕對收斂級數逐項求紀若干次,但須所得級數均爲一致收斂即可.

一多進級數,若其任一項絕對值小於或等於各項爲正的常數之一收斂級數之相當項,則爲一致收斂.

IV 無窮乘積

230. 定義與通性.

設有一實的或虛的無窮貫數

$$u_0,\quad u_1,\cdots\cdots,\quad u_n,\cdots\cdots,$$

並設一貫乘積如

$P_0=(1+u_0),\ P_1=(1+u_0)(1+u_1),\cdots\cdots,\ P_n=(1+u_0)(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_n).$

若乘積 P_n 於 $n\to\infty$ 時趨於一限 P, 則吾人謂無窮乘積

$$(29)\qquad \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_0)=(1+u_0)(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_n)\cdots\cdots$$

爲收斂而以 P 爲其值.

若任一因數 $1+u_m$ 爲零, 則 P_n 於 $n\geqq m$ 皆爲零; 是則 $P=0$. 但無一因數 $1+u_m$ 爲零時, P_n 亦可趨於零. 例如 $1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\cdots\frac{1}{n}$ 是. 判斷無窮乘積收斂之法則於此種特例不能恆合. 吾等因以收斂之名專用於無窮積 P_n 之趣於一限 $P\neq0$ 者, 而於 P_n 以零爲限時, 則直言其值之爲零. 若 P_n 不趨於一限, 亦不趨於零, 則無窮乘積稱爲發散.

收斂之必要條件. 欲一無窮積收斂而不爲零, 必須 u_n 趨於零. 蓋 $P_n\to P$, 則差數 $P_n-P_{n-1}=P_{n-1}u_n$ 應趨於零, 夫 P_{n-1} 既異於零, 故 u_n 應趨於零. 若乘積爲零, 則此理論不適用. 即如於上舉之例, 易知 u_n 不趨於零也.

凡無窮乘積之斂散問題, 可變作一級數之斂散問題論之. 命 $v_0=1+u_0$, 並於 $n>0$ 時, 命

$$(30)\qquad v_n=P_n-P_{n-1}=(1+u_0)(1+u_1)(1+u_{n-1})u_n,$$

而取級數

$$(31)\qquad v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots,$$

則和數 $\Sigma_n=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n$ 顯然等於 P_n. 是故此級數與無窮

積 $\Pi(1+u_n)$ 同收斂或發散 當級數收斂時,則其和 Σ 等於無窮積之值 P.

231. 絕對收斂乘積.

先設 u_n 概爲正的實的. P_n 隨 n 增進;欲證其有一限,僅須證其無論 n 若何大恆小於一定數.吾等一方面有

(32) $$P_n>1+u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n,$$

而他方面則有

(33) $$P_n<e^{u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n}.$$

蓋命 u 表一正數有 $1+u<e^u$ 也.據(32),若 P_n 趨於一限 P,則見 $u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n<P$. 是則正項級數

(34) $$u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

爲收斂;反之,設此級數收斂而以 S 爲和,則準 (33)$P_n<e^S$, 可斷 P_n 趨於一限.結論之,無窮積 $\prod\limits_0^{+\infty}(1+u_n)$(其中 u_n 概爲實的正的)與級數 $\sum\limits_0^{+\infty}u_n$ 同收斂或發散.

現設 u_n 爲任意數(實的或虛的).命 $U_i=|u_i|$; 若級數

(35) $$U_0+U_1+\cdots\cdots+U_n+\cdots\cdots$$

爲收斂,則無窮積 $\prod\limits_0^{+\infty}(1+u_i)$ 亦然.蓋如上有

$$v_n=(1+u_0)(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_{n-1})u_n,$$

$$V_n=(1+U_0)(1+U_1)\cdots\cdots(1+U_{-1})U_n.$$

準上所論者,級數 ΣU_i 既收斂,則無窮積 $\Pi(1+U_i)$ 亦收斂;因之級數

$$(36)\qquad V_0+V+\cdots\cdots+V_n+\cdots\cdots$$

亦然.

察 $|\overset{v_n}{u_n}|<\overset{V_n}{V_n}$, 然則級數

$$(37)\qquad v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

絕對收斂,而其和為乘積

$$P_n=(1+u_0)(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_n)$$

於 $n\to\infty$ 時之限.於此情形無窮積 $\sum_{n=0}^{+8}(1+u_n)$ 稱為絕對收斂.

絕對收斂之無窮積.與絕對收斂之級數頗多類似之點.如於一絕對收斂之無窮積可更換其因數之位次而不變其值.吾先證對於如是之一無窮積任與正數 ε,吾人可應以一整數 n, 使其任若干因數之積

$$(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots\cdots(1+u_\lambda)$$

與 1 之差,於 $\alpha,\beta,\cdots\cdots\lambda$ 均大於 n 時絕對小於 ε. 此理甚易證明.吾人有

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots\cdots(1+u_\lambda)-1|<(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots\cdots(1+u_\lambda)-1.$$

(設兩端乘積展開即明).因之

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots\cdots(1+u_\lambda)-1|<e^{U_\alpha+U_\beta+\cdots\cdots+U_\lambda}-1.$$

級數之 U_i 既收斂,吾人可取 n 至大使 $\alpha,\beta,\cdots\cdots,\lambda$ 皆大於 n 時和數 $U_\alpha+U_\beta+\cdots\cdots+U_\lambda<\log(1+\varepsilon)$, 然則當 n 大之至準前不等

式
$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots\cdots(1+u_\lambda)-1|<\varepsilon.$$

吾等可順便注意一絕對收斂之無窮積,若非其一因子爲零,斷不爲零.蓋取大數 n, 使無論 p 若何有

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\cdots\cdots(1+u_{n+p})-1|<\delta,$$

(δ 爲小於 1 之一正數)則顯然無窮積 $\prod\limits_{\nu=1}^{+\infty}(1+u_{n+\nu})$ 絕對大於 $1-\delta$, 而 P 係等於此數與 P_n 之積,故不能爲零.

此理明,歸入本題而設絕對收斂無窮積

(38) $$(1+u_0)(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_n)\cdots\cdots,$$

(39) $$(1+u'_0)(1+u'_1)\cdots\cdots(1+u'_n)\cdots\cdots.$$

爲另一無窮積,其因數與(38)者同,惟因數之位次與前者異.後之無窮積亦爲絕對收斂.因級數 $\Sigma U'_i$ 與級數 ΣU_i 由相同之數組成也.命 P, P' 依次表(38)與(39)二積之值,並 P_n 與 P'_m 表其(38)前 $n+1$ 個或 $m+1$ 個因子之積,吾人可取一數 $m>n$ 使 P'_m 含有 P_n 中各因子.於是有

$$\frac{P'_m}{P_n}=(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots\cdots(1+u_\lambda),$$

$\alpha, \beta, \cdots\cdots, \lambda$ 大於 n. 準適所論及之理,吾等可選 n 大之至,使

$$\frac{P'_m}{P_n}-1<\varepsilon,$$

而無論 ε 若何小.但當 n 無限增大時 m 亦無限增大,可知 $\frac{P'_m}{P_n}$ 以 $\frac{P'}{P}$ 爲限.然則應有 $P'=P$.

例有無窮積

$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots\cdots.$$

級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2\pi}$ 於 z 之一切值顯爲絕對收斂.可知此積爲絕對收斂.吾等可證明此乘積表函數 $\frac{\sin z}{z}$.

若書此積如

$$\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)\cdots\cdots$$

則相關級數變爲

$$-\frac{z}{\pi}+\frac{z}{\pi}-\frac{z}{2\pi}+\frac{z}{2\pi}-\cdots\cdots$$

而非絕對收斂,因之無窮積於此形狀非絕對收斂.吾等不能貿然更動因子之位次.

232. 一致收斂性.

今於無窮積

$$(38)\qquad \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)=(1+u_0)(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_n)\cdots\cdots$$

內設 $u_0, u_1,\cdots\cdots u_n\cdots\cdots$ 爲變數 x 於隔間 (a, b) 內之連續函數;若通項爲 $v_n=(1+u_0)(1+u_1)\cdots\cdots(1+u_{n-1})u_n$

之級數在 (a, b) 內爲一致收斂,則乘積 (38) 稱爲在 (a, b) 域內一致收斂.若是則其值 P 爲一連續函數.

定理. 設有無窮乘積(38);苟級數

$$(40)\qquad U_0+U_1+\cdots\cdots+U_n+\cdots\cdots,\qquad U_n=|u_n|$$

在 (a, b) 內爲一致收斂. 則 (38) 在 (a, b) 內爲收斂.

證: 吾等有

$$v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots\cdots+v_{n+p}=P_{n+p}-P_n=P_n[(1+u_{n+1})\cdots\cdots(1+u_{n+p})],$$

又顯然有

$$|P_n|<(1+U_0)\cdots\cdots(1+U_n)<e^{U_0+U_1+\cdots\cdots+U_n},$$

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\cdots\cdots(1+u_{n+p})-1|<e^{U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots\cdots+U_{n+p}}.$$

夫級數(40)於 (a, b) 內爲一致收斂,因之表一連續函數,而小於一限 M. 吾可取一大數 N 使 a 爲一正數時,則在 (a, b) 不等式 $n\geqq N$ 牽涉不等式

$$U_{n+1}+U_{n+2}+U_{n+p}<a,$$

而無論 p 若何. n 之值如是確定,則

$$|v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots\cdots+v_{n+p}<e^M(e^a-1).$$

此見級數 Σv_n 一致收斂.蓋任與若何小之正數 ε, 吾等可取 a 使 $e^M(e^a-1)<\varepsilon$ 而無論 x 爲在 (a, b) 內之何值也.

吾等尙可設 $u_0, u_1,\cdots\cdots, u_n,\cdots\cdots$ 爲一複變數 z 之函數或爲數個變數 $x, y,\cdots\cdots$ 之函數論之.

推廣. 上理不難推及於二進無窮積 $\Pi(1+u_{m,n})$ 其中每因數具有二足碼 m, n 各可由 0 變至 $+\infty$. 若重級數 $\Sigma u_{m,n}$ 爲收斂,則此無窮積有一定值,而與其因數之個數增多之方法無關. 吾等知凡絕對收斂之二進級數可以無數之法變爲一單級數;於無窮乘積情形亦同.凡如上之二進無窮積,可以無數

之法變爲絕對收斂之單無窮積.若 $u_{m,n}$ 盡爲變數 $x, y, \cdots\cdots$ 之連續函數,並若級數 $\Sigma U_{m,n}$ 一致收斂於一域 D 內,則無窮積 $\Pi(1+u_{m,n})$ 亦一致收斂,而表 $x, y, \cdots\cdots$ 之一函數,連續於 D 內.

233. 無窮行列式 (Infinite determinants).

設絕對收斂重級數 $\sum\limits_{i,k} a_{ik}$ (其足碼 i, k 自 $-\infty$ 變至 $+\infty$),而作行列式

$$D_m = \begin{vmatrix} 1+a_{-m,-m} & \cdots\cdots & a_{-m,0} & \cdots\cdots & a_{-m,m} \\ a_{-m+1,-m} & \cdots\cdots & a_{-m+1,0} & \cdots\cdots & a_{-m+1,m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{0,-m} & \cdots\cdots & 1+a_{0,0} & \cdots\cdots & a_{0,m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m,-m} & \cdots\cdots & a_{m,0} & \cdots\cdots & 1+a_{m,m} \end{vmatrix}.$$

乘積 $\Pi_m = \prod\limits_{i,k}(1+|a_{ik}|)$ (i, k 自 $-m$ 變至 $+m$) 於 $m\to\infty$ 有一限.

察 $|D_m|$ 中之任一項於 Π_m 內恆有一項爲其模,而 Π_m 尚有其他之正項,可知 $|D| < \Pi_m$. 同樣可知

$$|D_{m+p} - D_m| < \Pi_{m+p} - \Pi_m.$$

於是可判斷 D_m 有一限.

習題

1. 證普通項列下之各級數爲收斂者:

$$\frac{1}{n(n+1)},\quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad \frac{1}{n(n+1)\cdots\cdots(n+p)}.$$

2. 證:

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tan}\,\frac{1}{3}+\text{arc tan}\,\frac{1}{7}+\cdots\cdots\text{arc tan}\,\frac{1}{n^2+n+1}+\cdots\cdots.$$

3. 討論普通項如下之級數

$$u_n=\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}.$$

4. 試論以

$$u_n=\left[\tan\left(a+\frac{a}{n}\right)\right]^n,$$

為普通項之級數,其中 a 介於 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 間.

5. 論級數 $\Sigma\,\frac{x^n}{n^{n+1}}$.

6. 設 $\phi(n)$ 為 n 之正函數,於 $n\to\infty$ 以零為限.試證普通項如

$$u_n=\log[1+\phi(n)],\qquad v_n=\phi(n)$$

之兩級數同性.

7. 試論普通項如

$$u_n=\frac{1}{n^p}\,e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

之級數於 $p>0$ 收斂,而於 $p\leqq0$ 發散.

8. 命 $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 為廣義幾何級數於收斂時之和數;試證明

$$(1+x)^m=F(-m,\,1,\,1,\,-x),$$

$$\log(1+x)=x\,F(1,\,1,\,2,\,-x),$$

$$\text{arc sin}\,x=x\,F\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{3}{2},\,x^2\right),$$

$$\text{arc tan}\,x=x\,F\left(\frac{1}{2},\,1,\,\frac{3}{2},\,-x^2\right),$$

$$e^x=F\left(1,\,k,\,1,\,\frac{x}{k}\right),$$

$$\cos x=F\left(k,\,k,\,\frac{1}{2},\,-\frac{x^2}{4k^2}\right),$$

$$\sin x=x\,F\left(k,\,k,\,\frac{3}{2},\,-\frac{x^2}{4k^2}\right).$$

於末三式中令$k\to\infty$.

9. 試論級數

$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)}$$

之斂散性,並於其收斂時求其和.

10. a, b, c 爲正數,試證級數

$$1+\frac{a+c}{b+c}+\frac{(a+c)(2a+c)}{(b+c)(2b+c)}+\cdots\cdots+\frac{(a+c)(2a+c)\cdots\cdots(na+c)}{(b+c)(2b+c)\cdots\cdots(nb+c)}+\cdots\cdots$$

於 $a<b$ 收斂而於 $a\geqq b$ 發散.

11. 論級數

$$\Sigma u_n=\Sigma\left[\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^p}\right]\log n.$$

12. 級數

$$\Sigma u_n=\Sigma\left[\frac{\log(n+1)}{\log n}-1\right]^p$$

於 $p>1$ 收斂,而於 $p\leqq 1$ 發散,試論之.

13. 歌西氏定理:設正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$;若其項成一單調實數,則其斂散性與級數

$$a_1+2a_2+4a_4+\cdots\cdots+2^k a_{2^k}+\cdots\cdots$$

同.試證明之,並引以討論白特昂氏級數.

14. 試證下列級數之和等於尤氏常數C:

$$\left(1-\log\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)+\cdots\cdots.$$

15. 設更號級數

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots\cdots;$$

試明遷移其項而得之級數

$$1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{4n-4}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots\cdots$$

爲發散者.

16. 將前題級數 $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 依歐西氏法平方之而證明所得級數爲發散者.

17. 證級數 $1-\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}-\frac{1}{4^r}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^r}+\cdots\cdots$

$(r>0)$ 之自乘積於 $r>\frac{1}{2}$ 爲收斂,而於 $r\leqq\frac{1}{2}$ 爲發散.

18. 以二法作一重級數之和而證下列各式:

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots\cdots=\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\cdots\cdots=\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^3}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\sqrt{q}}{1+q}-\frac{\sqrt{q^3}}{3(1+q^3)}+\frac{\sqrt{q^5}}{5(1+q^5)}+\cdots\cdots$$

$$=\operatorname{arc}\tan\sqrt{q}-\operatorname{arc}\tan\sqrt{q^3}+\operatorname{arc}\tan\sqrt{q^5}-\cdots\cdots,$$

式中設 $|q|<1$.

19. 證無窮乘積

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)\cdots\cdots(1+q^{2n})\cdots\cdots$$

爲收斂,而以 $\frac{1}{1-q}$ 爲值.

20. 求次列無窮乘積之值

$$\cos a\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{a}{2^n}\cdots\cdots.$$

21. 證無窮乘積

$$\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\cdots\cdots\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\cdots\cdots$$

爲絕對收斂.

22. 證 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ 於 C 不爲負整數時爲絕對收斂

23. 命 q 爲 o 與 1 間之一數,試證

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2}).$$

24. 設 q 如前題,並命

$$Q_1=\Pi(1+q^{2n}),\quad Q_2=\Pi(1+q^{2n-1}),\quad Q_3=\Pi(1+q^{2n-1});$$

求證 $Q_1Q_2Q_3=1$.

25. 證次列各無窮乘積於任一有限隔間內爲一致收斂

$$\Pi\left[1+(-1)^n\frac{x}{n}\right],\qquad \Pi\cos\frac{x}{n},\qquad \Pi\left(1+\sin^2\frac{x}{n}\right).$$

26. 無窮乘積 $\Pi(1+u_n)$ 於級數

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\log(1+u_n)$$

(m 爲一適當之正整數) 收斂時 (或絕對收斂) 爲收斂 (或絕對收斂), 反之亦然. 且若 S 爲級數之和數, 則有

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_u)=(1+u_1)(1+u_2)\cdots\cdots(1+u_m)e^S.$$

27. 設 $\Pi(1+u_n(x))$; 若各函數 $u_n(x)$ 於一隔間 (a, b) 內有一紀數 $u'_n(x)$, 且級數 $\Sigma u_n(x)$ 與 $\Sigma u'_n(x)$ 均於 (a, b) 內一致收斂,則無窮積所表之函數 $F(x)$ 於 (a, b) 內每點亦有一紀數 $F'(x)$ 由

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u'_n(x)}{1+u_n(x)}$$

定之.

第 十 二 章

冪 級 數

吾等於第三章見函數 $f(x)$ 或 $F(x, y, \cdots\cdots, z)$ 可據泰氏公式展爲形如 $\Sigma a_n(x-x_0)^n$ 或 $\Sigma a_n(x-x_0)^p(y-y_0)^q\cdots\cdots(z-z_0)^r$ 之級數,即一冪級數(power series),只須吾等能證明尾量 R_n 於 $n\to\infty$ 時趨於零卽可.此種展式在分析學上甚重要.仰尾量之討論普通甚難,故由是法所得之冪級數頗屬有限.今往直接討論此種級數之特性,由是可得求展函數爲冪級數之新方法焉.

I. 單元冪級數

234. 收斂隔間(Interval of convergence).

吾等先就僅含一變數 x 之冪級數論之.此種級數形如

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots.$$

或

(1′) $$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots\cdots.$$

吾等稱之爲單元冪級數, $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 稱爲冪級數之係數.今就形如(1)之級數論之.

首須研究者爲冪級數之收斂性.視係數之形狀,該級數

可對於x之任何值為收斂,例如$\Sigma\frac{1}{n^2}x^n$,亦可對於x之任何值(除$x=0$外)為發散.例如$\Sigma n!x^n$.此外則時為收斂時為發散,斂散之區域可由次述定理明之:

<u>定理</u> 1. <u>若級數(1)於$x=x_0$收斂,則對於絕對值小於$|x_0|$之各x值均絕對收斂</u>.

證:為簡便計吾等命$A_n=|a_n|$及$X=|x|$而設補助級數

$$(2)\qquad A_0+A_1X+A_2X^2+\cdots\cdots+A_nX^n+\cdots\cdots,$$

級數(1)既於x_0為收斂,則可設

$$A_n|x_0|^n<M,$$

M為一定數.於是有

$$A_nX_n=A_n|x_0|^n\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n<M\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n.$$

若$X<|x_0|$,則末端為一收斂幾何級數之普通項,而由此知級數(2)為收斂,即明所欲證.

<u>注意</u>. 於上證理中無須$\Sigma a_nx_0^n$收斂,但須$|a_0x^n|$有一大限M即可.

<u>系</u>. <u>若級數(1)於x_0發散,則於絕對值小於$|x_0|$之各x值均發散</u>.

蓋倘若級數(1)對於絕對值$>|x_0|$之一值x_1為收斂,則準上述定理級數(1)將對於絕對值$<|x_0|$,之各x值收斂,因之於x_0收斂而與所設矛盾矣.

<u>注意</u>. 於$|x|>|x_0|$,準上注意之點吾等尙可知$|a_nx^n|$趨

於無窮.

欲得確定級數(1)之收斂範圍,試將令(1)為收斂之各正數歸入一類A,而將令(1)為發散之正數歸為一類B,此二類數顯然成一正實數的分割,$(A|B)$,蓋凡正的實數不屬於A即屬於B,又凡A部之數準上定理及系均小於B部之數也.此分割確定一正實數R,而吾等得基本定理.

定理 II. 級數(1)於隔間$(-R,+R)$內之每點絕對收斂而於其外各點則發散.

蓋設x為$(-R,+R)$內之一數,吾等可於確定R之A部中求得一數x_1使$|x|<x_1$.級數(1)於x_1為收斂,故於x為絕對收斂.反之設x在$(-R,+R)$外;若(1)於x為收斂,則可於B部中得小於$|x|$之一數x_2使(1)為收斂,是與R之定義違背矣.

隔間$(-R,+R)$稱為級數(1)之收斂隔間而R為其收斂半徑(radius of convergence).按定義R為令(1)收斂之x值之高界.

注意. 當(1)對於x之任何值皆為收斂或皆為發散(除$x=0$時),則吾等視R為$+\infty$或0.又在定理II中吾等並未論及於$\pm R$二點之情形.在此二點(1)可為絕對收斂或半收斂抑為發散.例如

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n,\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n,$$

三級數均有$R=1$.第一級數於$x=\pm 1$均發散,第二級數於$x=1$

發散,而於 $x=-1$ 收斂,至第三級數則於 $x=\pm 1$ 均絕對收斂.

欲求 R, 通常只須引用前章所述之收斂定則於級數 (2), 如於達氏定則有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{A_{n+1}}{A_n}X.$$

若 A_{n+1}/A_n 趨於一限 l. 則 $u_{n+1}/u_n\to l\,X$; 於是知 $R=1/l$.

又如於 $\sqrt[n]{A_n}$ 趨於一限 l 時,則

$$\sqrt[n]{u_n}=X\sqrt[n]{A_n}\to l\,X.$$

而由歌氏定則知 $R=1/l$.

吾等於此可注意 A_{n+1}/A_n 與 $\sqrt[n]{A_n}$ 均有一限時彼此必相等,若此二限均無,則有較普通之定理如次:

定理 III [1]. 級數 (1) 之收斂半徑 R 等於貫數 $A_1, \sqrt{A_2}, \cdots\cdots, \sqrt[n]{A_n}, \cdots\cdots$ 之最大限 G 之倒數.

證: 先設 $X>1/G$; 任與正數 ε, 可得一大數 N 使於 $n>N$ 時 $\sqrt[n]{A_n}$ 恆 $<G+\varepsilon$. 因之 $\sqrt[n]{u_n}<X(G+\varepsilon)$. 但 $X(G+\varepsilon)$ 可 <1, 因 $\frac{1}{X}>G$ 可取 ε 使 $\varepsilon<\frac{1}{X}-G$ 也.故按歌氏定則可知 $\Sigma A_n X^n$ 收斂.

繼設 $X>\frac{1}{G}$; 任與 $\varepsilon>0$, 可得大數 N 使 $n<N$ 牽涉 $\sqrt[n]{A_n}>G-\varepsilon$, 因之 $\sqrt[n]{u_n}>X(G-\varepsilon)$. 而吾等可取 ε 甚小使 $X(G-\varepsilon)>1$, 是知 $u_n>1$ 而級數發散.

235. 冪級數之連續性.

(1) 此重要定理首由歌西氏 (Cauchy) 闡明,見於所著 Analyse algebrique, 但未爲學者所注意,近時哈達馬氏 (Hadamard) 乃復發明之.

設冪級數

(3) $$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

以 $(-R, +R)$ 爲收斂隔間，則 $f(x)$ 於其內爲連續，由次定理明之：

定理. 冪收數(3)於含於 $(-R, +R)$ 內之任一隔間 $(-r, +r)$ 內爲一致收斂，而其和 $f(x)$ 於 $(-R, +R)$ 內爲連續函數.

證：於 $(-r, +r)$ 內之任一數值 x 有 $|a_nx^n|\leqq A_nr^n$; r 既位於 $(-R, +R)$ 內，可知 ΣA_nr^n 爲收斂，故(3)於 $(-r, +r)$ 內爲一致收斂.

今吾謂 $f(x)$ 於 $(-R, +R)$ 內任一值 x_0 爲連續.

蓋 $|x_0|<R$，可於 $|x_0|$ 與 R 間取一數 r 使 $(-r, +r)$ 位於 $(-R, +R)$ 內而含有 x_0，按適所證明之理，(3)於 $(-r, +r)$ 內一致收斂，故 $f(x)$ 於 x_0 爲連續.

上之證理於 $-R$ 與 $+R$ 二數則不適用，但若級數於此爲收斂，則 $f(x)$ 仍連續．例如級數 Σa_nR^n 爲收斂，則其和適爲 $f(x)$ 於 x 由 $<R$ 之值趨於 R 時之限．欲明此理，只須求證級數(3)於 $(0\leqq x\leqq R)$ 爲一致收斂卽可．任與正數 ε，吾等可取 n 甚大使無論 p 如何，有

$$|a_{n+1}R^{n+1}+a_{n+2}R^{n+2}+\cdots\cdots+a_{n+p}R^{n+p}|<\varepsilon.$$

命 x 爲 $<R$ 之一正數可寫 $v_nx^n=a^nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 準亞貝爾氏引有

$$|a_{n+1}x^{n+1}+\cdots\cdots a_{n+p}x^{n+p}|<\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}<\varepsilon$$

而無論 p 若何.

以此不等式與上不等式合論之,即明 (3) 在 $(0, R)$ 全隔間內爲一致收斂,而 $f(x)$ 於 R 亦連續.

同理若級數於 $-R$ 爲收斂,則 $f(x)$ 於 $-R$ 亦連續.

236. 冪級數之紀數及積分.

設冪級數(3)如前,並逐項求紀而設級數

$$(4)\qquad a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots,$$

則有次述定理

定理. 由冪級數(3)逐項求紀而得之冪級數(4)與(3)同以 $(-R, +R)$ 爲收斂隔間,且其和於此隔間內即爲 $f(x)$ 之紀數.

如前命 $A_n=|a_n|$ 與 $X=|x|$,吾等僅須證明級數

$$(5)\qquad A_1+2A_2X+\cdots\cdots+nA_nX^{n-1}+\cdots\cdots$$

於 $X<R$ 收斂,而於 $X>R$ 發散即可.

先設 $X<R$;若於 X 與 R 間取一數 r,則於補助級數

$$\frac{1}{r}+\frac{2}{r}\frac{X}{r}+\left(\frac{X}{r}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{n}{r}\left(\frac{X}{r}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$$

有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{X}{r}<1$,而知其爲收斂者,今以小於一定數之數 A_1r, $A_2r^2,\cdots\cdots, A_nr^n,\cdots\cdots$依次乘其諸項,則所得亦顯爲一收斂級數,如是得

$$A_1+2A_2X+\cdots\cdots+nA_nX^{n+1}+\cdots\cdots,$$

即級數(5).

今設 $X_1>R$；若

$$A_1+2A_2X+\cdots\cdots+nA_nX_1^{n+1}+\cdots\cdots$$

收斂,則

$$A_1X_1+2A_2X+\cdots\cdots+nA_nX_1^{n-1}+\cdots\cdots.$$

亦然；因之 $\sum_{n=0}^{\alpha}A_nX_1^n$ 亦然,而 R 不能爲令級數(2)收斂之 X 值之高界矣.

夫級數(4)之和 $f_1(x)$ 亦於 $-R$ 與 $+R$ 間爲連續,因(4)於 $(-r,+r)$ 爲一致收斂 $(r<R)$. 可斷 $f_1(x)$ 爲 $f(x)$ 在此隔間內之紀數,且因 r 可逼近 R 如吾人之所欲,卽明 $f(x)$ 於 $-R$ 與 R 間各 x 值均有紀數:

(6) $$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots.$$

賡續引用此定理,可明 $f(x)$ 在 $(-R,+R)$ 有二級紀數以及高級紀數

$$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(7) $$f^{(n)}(x)=1\cdot2\cdots\cdots na_n+2\cdot3\cdots\cdots n(n+1)a_{n+}x+\cdots\cdots.$$

若令 $x=0$, 則有

$$u_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{2},\ \cdots\cdots a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot2\cdots\cdots x},$$

而復得馬氏公式

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot2}f''(0)+\cdots\cdots\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots\cdots.$$

同理若將一冪級數逐項求積分,則得一新級數(含一泛

定量)與原有級數同收斂於一隔間內,而以之爲紀數,再將此級數逐項求積分,則得一新級數,其前二項係數爲泛定量,如是類推.

例 1. 於 -1 與 $+1$ 間級數

$$1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\cdots$$

爲收斂而以 $\frac{1}{1+x}$ 爲和.若自 0 至 $x(|x|<1)$ 逐項積之,則得公式

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\cdots. \tag{8}$$

此公式於 $x=1$ 亦合理,因右端級數於 $x=1$ 爲收斂也.

例 2. 對於 $-1<x<+1$ 有

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots\cdots.$$

自 0 至 x $(|x|<1)$ 求積分有

$$\operatorname{arc}\tan x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots. \tag{9}$$

級數於 $x=1$ 仍收斂,可斷定

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots\cdots \tag{10}$$

例 3. 級數

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots\cdots n}x^n+\cdots\cdots$$

(其 m 爲任意數)於 -1 與 $+1$ 間爲收斂.命 $F(x)$ 表其和而求紀,有

$$F(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots\cdots+\frac{(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots\cdots(n-1)}x^{n-1}+\cdots\cdots\right];$$

以 $(1+x)$ 乘兩端而準關係

$$\frac{(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots(n-1)}+\frac{(m-1)\cdots\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}=\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}$$

集合同冪項,得

$$(1+x)F(x)=m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}x^n+\cdots\cdots\right],$$

即 $$(1+x)F'(x)=m\,F(x);$$

或書如 $$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{m}{1+x}.$$

由是可明 $F(x)$ 呈下形

$$F(x)=C(1+x)^m$$

欲定 C 可注意 $F(0)=1$; 因之 $C=1$, 而得 $(1+x)^m$ 之展式

(11) $$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots.$$

例 4. 於上公式易 x 爲 $-x^2$, m 爲 $-\frac{1}{2}$, 則有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}x^{2n}+\cdots\cdots.$$

此式對於 -1 與 $+1$ 間一切數均合理,於 0 與 x 間 $(|x|<1)$ 求積分,則得 $\arcsin x$ 之展式:

(12) $$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots.$$

注意. 上所論關於 x 正冪級數之理,不難推及於 $x-a$ 之正冪級數,或任一連續函數 $\phi(x)$ 之正冪級數,只須視爲一函數的函數論之[$\phi(x)$ 爲其中間函數]卽可.例如函數 $\sqrt{x^2-a}=\pm x\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 於絕對大於 $\sqrt{a}$ 之 x 值 $\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 可依 $\frac{1}{x^2}$ 之冪展之而得

$$\sqrt{x^2-a}=x-\frac{1}{2}\,\frac{a}{x}-\frac{1}{2\cdot4}\,\frac{a^2}{x^3}-\cdots\cdots-\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2p-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2p}\,\frac{a^p}{x^{2p-1}}\cdots\cdots.$$

當 $x<-\sqrt{a}$ 時,右端級數仍收斂,而以 $-\sqrt{x^2-a}$ 爲和.

II. 長函數及冪級數之運算

冪級數於其收斂隔間內頗與多項式彷彿.吾等於上已見其可逐項求微分與積分.再則因冪級數於其收斂隔間內爲絕對收斂,立知加法乘法亦可施行,所得冪級數於原設諸冪級數之最小收斂隔間內必爲收級.今吾等更往論冪級數之代入法及除法.首先當述長函數.

237. 長函數 (Dominant functions).

設由冪級數表示之函數

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

及

$$\phi(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots\cdots+\alpha_nx^n+\cdots\cdots$$

均於原點附近爲連續,第二級數之係數 α_i 設其概爲正數;若

$$|a_0|\leqq\alpha_0,\quad |a_1|\leqq\alpha_1,\cdots\cdots,\quad |a_n|\leqq\alpha_n,\cdots\cdots,$$

則吾人稱 $\phi(x)$ 爲對於 $f(x)$ 之長函數,而書如

$$f(x) \leqq \phi(x).$$

命 $P_n(a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n)$ 爲含 $f(x)$ 前 $n+1$ 個係數之一多項式,其係數爲實的與正的;據定義顯有

$$|P_n(a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n)| \leqq P_n(\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n).$$

準此可知若 $\phi(x)$ 爲對於 $f(x)$ 之一長函數,則 $[\phi(x)]^2$ 爲對於 $[f(x)]^2$ 之長函數,$\cdots\cdots[\phi(x)]^n$ 爲 $[f(x)]^n$ 之長函數.又若 ϕ 與 ϕ_1 爲 f 與 f_1 之長函數,則 $\phi\phi_1$ 爲 ff_1 之長函數,如是類推.

已與一冪級數 $f(x)$ 以 $(-R, +R)$ 爲收斂隔間,其長函數至無定形,不過擇甚簡者用之耳.例如命 r 爲一正數 $<R$ (但可逼近 R 如人之所欲),則級數旣於 $x=r$ 爲絕對收斂,則其諸項絕對值有一高界 M,而

$$|a_n| = A_n \leqq \frac{M}{r^n};$$

然則級數

$$(13)\qquad M + M\frac{x}{r} + \cdots\cdots + M\frac{x^n}{r^n} + \cdots\cdots = \frac{M}{1-\frac{x}{r}},$$

爲 $f(x)$ 之一長函數,此爲吾人所常用者,當 $a_0=0$ 時,吾人可取

$$(14)\qquad \frac{M}{1-\frac{x}{r}} - M$$

爲長函數,r 爲 $<R$ 之任一數.於 r 減小時通常 M 亦顯然減小,但不能 $<A_0$.若 $A_0 \neq 0$,吾人可得一正數 $\rho<R$ 使 $\dfrac{A_0}{1-\frac{x}{\rho}}$ 於 $f(x)$

為長函數.欲明之,試先取長函數

$$M+M\frac{x}{r}+M\frac{x^2}{r^2}+\cdots\cdots+M\frac{x^n}{r^n}+\cdots\cdots$$

$(M>A_0)$,繼取一數 $\rho<r\frac{A_0}{M}$;設 $n\geqq 1$,可寫

$$|a_n\rho^n|=|a_n r^n|\left(\frac{\rho}{r}\right)^n<M\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}.$$

此見 $|a_n\rho^n|<A_0$,然則

(15) $$A_0+A_0\frac{x}{\rho}+A_0\frac{x^2}{\rho^2}+\cdots\cdots+A_0\frac{x^n}{\rho^n}+\cdots\cdots$$

於 $f(x)$ 為長函數.推論之,吾人可任以 $\geqq A_0$ 之一數代 M.

同理可見於 $a_0=0$ 時,可取 $\frac{\mu x}{\mu-x}$ 為一長函數,μ 為任意正數.

238. 級數代入法(Substitution of one series in another).

設冪級數

(16) $$z=f(y)=a_0+a_1 y+a_2 y^2+\cdots\cdots+a_n y^n+\cdots\cdots$$

以 $(-R,+R)$ 為收斂隔間,並設

(17) $$y=\phi(x)=b_0+b_1 x+b_2 x^2+\cdots\cdots+b_n x^n+\cdots\cdots$$

以 $(-r,+r)$ 為收斂隔間:設於(16)內代 $y, y^2, y^3\cdots\cdots$ 以(17)之 x 增冪展式,則得二進級數

(18) $$\begin{aligned}&a_0+a_1 b_0+a_2 b_0^2+\cdots\cdots+a_n b_0^n+\cdots\cdots\\&+a_1 b_1 x+2a_2 b_0 b_1 x+\cdots\cdots+n a_n b_0^{n-1}b_1 x+\cdots\cdots\\&+a_1 b_2 x^2+a_2(b_1^2+2b_0 b_2)x^2+\cdots\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

試論此收數能絕對收斂否？欲其然，首須級數

$$a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\cdots\cdots+a_nb_0^n+\cdots\cdots$$

絕對收斂，或卽須 $|b_0|<R$，吾謂此條件亦爲充足者，蓋可取 $\dfrac{m}{1-\dfrac{x}{\rho}}$ 形之式爲 $\phi(x)$ 之長函數，m 爲 $>|b_0|$ 之任意正數.然則可取 $m<R$；繼命 R' 爲 m 與 R 間之一數，則函數 $f(y)$ 以

$$\frac{M}{1-\dfrac{y}{R'}}=M+M\frac{y}{R'}+M\frac{y}{R'^2}+\cdots\cdots$$

爲一長函數.試於其內代 y 以 $\dfrac{m}{1-\dfrac{x}{\rho}}$，而將結果展開依 x 冪之升勢列之，則得二進級數

$$(19)\qquad M+M\left(\frac{m}{R'}\right)+\cdots\cdots+M\left(\frac{m}{R'}\right)^n+\cdots\cdots$$
$$+M\left(\frac{m}{R'}\right)\frac{x}{\rho}+\cdots\cdots+nM\left(\frac{m}{R'}\right)^n\frac{x}{\rho}+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

其係數爲正且大於級數(18)相當係數之絕值.蓋級數(18)之任何係數皆由僅施加與乘之手續於 $a_0, a_1, a_2\cdots\cdots, b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots$ 而得也.然則若級數(19)絕對收斂，則級數(18)亦然.

今於重級數(19)內代 x 以其絕對值 $|x|$；欲所得級數爲收斂，必須其任意一行爲一收斂級數，是須 $|x|<\rho$，倘此條件滿足，則第 $(n+1)$ 行之和爲

$$M\left[\frac{m}{R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n.$$

纔須 $$m<R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right),$$

即

(20) $$|x|<\rho\left(\frac{m}{R'}\right).$$

但條件(20)牽涉條件 $|x|<\rho$. 是則(20)即爲重級數(19)絕對收斂之必要與充足條件,而重級數(18)對於適合不等式(20)之 x 值爲絕對收斂.吾等可注意級數 $\phi(x)$ 對於此等 x 值收斂.並 y 之相當值絕對小於 R', 因不等式

$$|x|<\frac{m}{1-\frac{|x|}{\rho}},\quad \frac{|x|}{\rho}<1-\frac{m}{R'}$$

牽涉不等式 $|y|<R'$ 也.

按縱行取重級數(18)之和,則有

$$a_0+a_1\phi(x)+a_2[\phi(x)]^2+\cdots\cdots+a_n[\phi(x)]^n+\cdots\cdots,$$

即 $f[\phi(x)]$. 若就橫行求之,則得 x 之冪級數

(21) $$f[\phi(x)]=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots,$$

c_0, c_1, $c_2,\cdots\cdots c_n$ 由次公式定之:

(22) $$\begin{cases} c_0=a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\cdots\cdots+a_nb_0^n+\cdots\cdots \\ c_1=a_0b_1+2a_2b_1b_0+\cdots\cdots+na_nb_1b_0^{n-1}+\cdots\cdots \\ c_2=a_1b_2+a_2(b_1^2+2b_0b_2)+\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

特例. 1°. R' 可逼近 R 如吾人之所欲,是則祇須有 $|x|<\rho\left(1-\frac{m}{R}\right)$, 公式(21)卽合用. 若 $R=+\infty$, 則祇須 $|x|<r$. 因可設 ρ 近於 r 如吾人所欲也. 更進一層, 若 $r=+\infty$, 則公式(21)無論 x 若何恆成立.

2° 若 $b_0=0$, 則可取

$$\frac{m}{1-\frac{x}{\rho}}-m$$

爲 $\phi(x)$ 之長函數,其中 $\rho<r$, m 爲任意正數. 仿普通例推論,可明祇須

$$|x|<\rho\frac{R'}{R'+m}, \tag{23}$$

公式(2)亦可用, R' 可逼近 R 如吾人之所欲,由此不等式規定之隔間較(20)式規定者爲大.

此特例常見於實際問題.於此不等式 $|b_0|<R$ 自然適合,而係數 c_n 僅與 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 有關

$$c_0=a_0,\ c_1=a_1b_1,\ c_2=a_1b_2+a_2b_1^2, \cdots\cdots,\ c_n=a_1b_n+\cdots\cdots+a_nb_1^n.$$

例. 歌西氏證明二項式之展式可求自 $\log(1+x)$ 者. 蓋可書 $(1+x)^\mu=e^{\mu\log(1+x)}$; 命

$$y=\mu\log(1+x)=\mu\left(\frac{x}{1}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\right)$$

則

$$(1+x)^\mu=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots$$

以 y 之展式代入,有

$$(1+x)^\mu=1+\mu\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\right)+\frac{\mu^2}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\right)^2+\cdots\cdot.$$

若依 x 冪升列之,則 x^n 之係數顯然為 μ 之一 n 次多項式 $P_n(\mu)$. 此多項式應於 $\mu=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$ 為零,並於 $\mu=n$ 為 1, 可知

$$R_n(\mu)=\frac{\mu(\mu-1)\cdots\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}.$$

239. 冪級數之除法.

設

$$f(x)=\frac{1}{1+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots}. \tag{24}$$

分母級數以 1 為首項,並以 $(-r, +r)$ 為收斂隔間.命

$$y=b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots \tag{25}$$

(24) 可書為

$$f(x)=\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\cdots\cdots$$

以 (25) 展式代於此式,則得 $f(x)$ 之冪展式:

$$f(x)=1-b_1x+(b_1^2-b_2)x^2+\cdots\cdots, \tag{26}$$

適用於某隔間內.

同法可展任意冪級數之倒數,其級數首項可為異於零之任一常數.

現設二收斂冪級數之分數

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots}. \tag{27}$$

若 $b_0 \neq 0$, 可書

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)\frac{1}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots};$$

於是準適所言者,右端爲二冪級數之積,而分數可展作一冪級數

(28) $$\frac{a_0+a_1x+\cdots\cdots}{b_0+b_1x+\cdots\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots,$$

於零之隣近爲收斂.

若去分母而令兩端同冪項係數相等,則可得

(29) $$a_n=b_0c_n+b_1c_{n-1}+\cdots\cdots+b_nc_0\quad(n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

以定係數 $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ 吾人可注意此等係數適與按多項式除法規則令所設之兩級數相除而得之係數相同.

當 $b_0=0$, 結果稍異. 試就普通情形設 $\psi(x)=x^k\psi_1(x)$, k 爲一正整數並 $\psi_1(x)$ 爲一冪級數,其常數項異於零.如是

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{x^k}\frac{\phi(x)}{\psi_1(x)}$$

而準上所言者有

$$\frac{\phi(x)}{\psi_1(x)}=c_0+c_1+\cdots\cdots c_{k-1}x^{k-1}+c_kx^k+c_{k+1}x^{k+1}+\cdots\cdots$$

於是

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{c_0}{x^k}+\frac{c_1}{x^{k-1}}+\cdots\cdots+\frac{c_{x-1}}{x}+c_k+c_{k+1}x.$$

然則展式由二部合成,其一部爲一有理分數式,於 $x=0$ 爲無窮;他部則爲一冪級數,於含原點之一隔間內爲收斂.

未定係數法. 有時用未定係數法以求所欲之級數較便. 例取全等式

$$(a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots)^m=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots$$

兩端之對數紀數並去分母,則另得一全等式

(30) $m(a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots)(c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots)$

$$=(a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots)(c_1+2c_2x+\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots\cdots).$$

若表示兩端全等,則得一貫之關係,足以根據 a_0 以陸續求 c_1, $c_2,\cdots\cdots$, $c_n,\cdots\cdots$, 而 $c_0=a_0{}^m$ 甚明.

240. $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ 之展式.

命 $y=2xz-z^2$ 而設 $|y|<1$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}}=(1-y)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}y+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2m-1)}{2\cdot 3\cdots\cdots 2m}y^m+\cdots\cdots$$

祇須代 y 以其值而展開二項式 $2xz-z^2$ 之冪並集合之,卽得所欲求之結果,形狀當如

(31) $$\frac{1}{\sqrt{1-2xz-z^2}}=1+X_1z+\cdots\cdots+X_nz^n+\cdots\cdots,$$

式中 X_n 爲 x 之一多項式,玆往定其值.對於

$$\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots 2m}(2xz-z^2)m$$

祇須於 $\frac{n}{2}\leqq m\leqq n$ 時展出含 z^n 之項

$$\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots 2m}\cdot\frac{1\cdot 2\cdots\cdots m}{1\cdot 2\cdots\cdots(n-m)\cdot 1\cdot 2\cdots\cdots(2m-n)}(2x)^{2m-n}(-1)^{n-m}z^n$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2m-1)^{2m-n}(-1)^{n-m}}{1\cdot 2\cdots\cdots(n-m)1\cdot 2\cdots\cdots 2m}\cdot\frac{d^n x^{2m}}{dx^n}z^n.$$

因 $\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2m-1)}{1\cdot2\cdots\cdots2m}=\frac{1}{2\cdot4\cdots\cdots2m}$, 此數尙可書如

$$\frac{1}{2\cdot4\cdots\cdots2n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(-1)^{n-m}\frac{1\cdot2\cdots\cdot n}{1\cdot2\cdots\cdots m\cdot1\cdot2\cdots\cdots(n-m)}x^{2m}\right]z^m.$$

今舉含 z^n 之各項加之,有

$$X_n=\frac{1}{2\cdot4\cdots\cdots2n}\frac{d^n}{dx^n}\sum_m\left[(-1)^{n-m}\frac{1\cdot2\cdots\cdots n}{1\cdot2\cdots\cdots m\cdot1\cdot2\cdots\cdots(n-m)}x^{2m}\right].$$

吾等可設此和數包括 $m<\frac{n}{2}$ 之各項,因其 n 級紀數等於零也.若是則得

$$X_n=\frac{1}{2\cdot4\cdots\cdots2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

諸 X_n 數爲勒讓德氏多項式.

於 X_{n-1}, X_n, X_{n+1} 間有一線性關係可如次求之.試取(31)而就 z 求紀有

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-\frac{3}{2}}=X_1+\cdots\cdots+nX_nz^{n-1}+\cdots\cdots$$

以 $1-2xz+z^2$ 乘兩端,並代 $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ 以其展式,則可書如

$$(x-z)(1+X_1z+\cdots\cdots+X_nz^n+\cdots\cdots)$$
$$=(1-2xz+z^2)(X_1+\cdots\cdots+nX_nz^{n-1}+\cdots\cdots).$$

等寫兩端 z^n 之係數,即得

$$xX_n-X_{n-1}=(n+1)X_{n+1}-2nxX_n+(n-1)X_{n-1},$$

或

(32) $$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0.$$

241. $x/(e^x-1)$ 之展式;伯努義氏數.

吾等若注意

(33) $$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

爲偶函數,則知其展式呈下形

(34) $$\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}=A+\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_2}{4!}x^4+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\cdots$$

以 e^x-1 乘兩端並代 e^x 以其展式,則有

$$\frac{x}{2}\left(2+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\right)\left(A+\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_2}{4!}x^4+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\cdots\right)$$

表示兩端全等,卽得

$$1=A,\quad \frac{1}{2\cdot 2!}=\frac{A}{3!}+\frac{B_1}{2!},\quad \cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{2(2n)!}=\frac{A}{(2n+1)!}+\frac{B_1}{2!\,(2n-1)!}-\frac{B_2}{4!\,(2n-3)!}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!},\cdots\cdots$$

以定 $A, B_1, B_2,\cdots\cdots$ 等之值.如是求得

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\quad B_6=\frac{691}{2736},\quad \cdots\cdots$$

是爲伯氏數吾等於 Γ 函數章已遇之.展式(33)於是可書爲

(35) $$\frac{x}{e^x-1}-1+\frac{x}{2}=\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_2}{4!}x^4+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\cdots$$

此展式尚可以次法求之:取著名之三角函數展式(1)

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{k^2\pi^2 - z^2}$$

(右端級數除於 $z=k\pi$ 外恆為絕對收斂)而命 $z=\frac{xi}{2}$, 並準尤拉氏公式(2)

$$\cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}$$

則有

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{x} + \sum_{1}^{\infty} \frac{4x}{4k^2\pi^2+x^2};$$

於是按(33)得

$$\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = 1 + 2x^2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2+x^2}. \tag{36}$$

今設 $x>0$, 而於公式

$$\frac{x}{1+x} = -\sum_{1}^{n-1}(-x)^p - \frac{(-x)^n}{1+x} = -\sum_{1}^{n-1}(-x)^p - \theta(-x)^n \quad (0<\theta<1),$$

內代 x 以 $\frac{x^2}{4k^2\pi^2}$, 則設 x 為實數, 有

$$\frac{x^2}{4k^2\pi^2+x^2} = -\sum_{p=1}^{n-1}\left(-\frac{x^2}{2k^2\pi^2}\right)^p - \theta\left(-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)^n.$$

繼代此展式於公式(36)內而命

(1) 見 Hobson, Trigonometry Art. 293.

(2) 此為關於複變數函數之尤氏公式,根據 $\cos z$, $\sin z$ 及 e^z 之定義立可求得,可參考 Goursat, Mathematical Aalysis, Vol. II-Part I, page 27.

$$S_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots\cdots + \frac{1}{4^p},$$

則得

$$(37)\qquad \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = -2\sum_{p=1}^{n-1} S_{2p}\left(-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^p - 2\theta S_{2n}\left(-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^n.$$

式中 $0<\theta<1$, 若 $n\to\infty$, 則 $S_{2n}\to 1$ 而右端末項祇須設 $|x|<2\pi$ 便趨於 0, 故若 $|x|<2\pi$, 有展式

$$(38)\qquad \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = 2\left[\frac{S_2 x^2}{(2\pi)^2} - \frac{S_4 x^4}{(2\pi)^4} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{S_{2n}}{(2\pi)^{2n}} x^{2n} + \cdots\cdots\right]$$

以(38)與(35)比較有

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} S_{2n}$$

此見於 n 增大時 B_n 值增長甚速.

利用伯氏數,公式(37)可書如

$$(39)\qquad \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{B_{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2}$$

$$+ (-1)^{n+1}\theta\frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

III. 多元羃級數

242. 收斂區域與特性.

$$(40)\qquad \Sigma a_{m,n} x^m y^n.$$

定理. 若於一組值 $x_0\, y_0$, 級數(40)任何項小於一定數 M, 則對於一切適合 $|x|<|x_0|$, $|y|<|y_0|$ 不等式之 xy 值級數皆

<u>絕對收斂.</u>

蓋設

$$|a_{mn}x_0^m y_0^n| < M,\ \text{~~爲~~即}\ |a_{mn}| < \frac{M}{|x_0|^m\,|y_0|^n},$$

則重級數(40)之各~~級~~項絕對小於重級數 $\Sigma M\left|\frac{x}{x_0}\right|^m\left|\frac{y}{y_0}\right|^n$ 之相當項而後之級數對於 $|x|<|x_0|$ $|y|<|y_0|$ 收斂,並以

$$\frac{M}{\left(1-\left|\frac{x}{x_0}\right|\right)\left(1-\left|\frac{y}{y_0}\right|\right)}$$

爲和數也.

命 r 與 ρ 爲二正數使級數 $\Sigma|a_{m,n}|r^m\rho^n$ 收斂,並命 R 表 $x=\pm r$, $y=\pm\rho$ 四直線所定之矩形;對於 R 內或其邊上任一點,級數(40)之各項絕對小於 $\Sigma|a_{mn}|r^m\rho^n$ 之相當項.然則(40)絕對的且一致的收斂於 R 內[1],而爲在 R 內之一連續函數 $F(x, y)$.

仿單元整級數討論之,可見重級數(40)於 R 內可逐項求其紀數若干次.例如 $\Sigma m\,a_{m,n}\,x^{m-1}y^n$ 等於 $\frac{\partial F}{\partial x}$,因將此級數與級數(40)依 x 冪升列之,則見此級數之每項等於(40)之相當項之紀數也.推之 $\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}$ 等於一重級數之和,其常數項爲 $m!\,n!\,a_{mn}$;由是 a_{mn}(置一數目係數不論)等於 $F(x, y)$ 之偏紀數於 $x=0$, $y=0$ 之值,而 F 之展式呈下形

(1) 關於級數(40)之確切收斂區域之討論,可參看 Goursat, Cours d'Analyse, Tome I, p. 465.

(41) $$F(x, y)=\Sigma\frac{\left(\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\right)_0}{m!\,n!}x^m y^n.$$

若依 x 與 y 之羃規列之,則得單級數

(42) $$F(x, y)=\phi_0+\phi_1+\cdots\cdots+\phi_n+\cdots\cdots,$$

ϕ_n 表 x, y 之一 n 次齊式,可以符號表之,如

$$\phi_n=\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n)}.$$

此展式與泰氏公式同.

今設 (x_0, y_0) 爲 R 內一點,並 (x_0+h, y_0+k) 爲其一隣點使 $|x_0|+|h|<r$, $|x_0|+|k|<\rho$. 若是,在直線

$$x=x_0\pm(r-|x|),\quad y=y_0\pm(\rho-|y_0|)$$

所限之矩形內任何點 (x, y), F 可展爲 $x-x_0$, $y-y_0$ 之羃級數

(43) $$F(x_0+h, y_0+k)=\Sigma\frac{\left(\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\partial y^n}\right)_0}{m!\,n!}h^m k^n.$$

蓋重級數

$$\Sigma a_{mn}(x_0+h)^m(y_0+k)^n$$

每因數由其於 h 與 k 之展式代入,則另得一重級數,在所定條件之下爲絕對收斂也.於是按 h, k 之羃規列之,即得(43).

上述之理不難推及於多迻羃級數.

243. 長函數.

設有 n 個變數之級數 $f(x, y, z,\cdots\cdots)$; 他一級數 $\phi(x, y, z, \cdots\cdots)$ 稱爲此級數之長函數者,乃 $\phi(x, y, z,\cdots\cdots)$ 之每項係數

爲正,且大於 $f(x, y, z, \cdots\cdots)$ 之相當項係數之對絕值也.例設級數

$$\Sigma|a_{mn}x^m y^n|$$

於 $x=r$, $y=\rho$ 收斂,則函數

$$\phi(x)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}=M\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{y}{\rho}\right)^n \tag{44}$$

爲 $\Sigma a_{mn}x^m y^n$ 之一長函數,式中 M 大於 $\Sigma|a_{mn}r^m\rho^n|$ 級數之各項.

又 $\psi(x, y)=\dfrac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)}$ 亦爲 $\Sigma a_{mn}x^m y^n$ 之一長函數,因其 $x^m y^n$ 之係數適爲 $M\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$ 中 $x^m y^n$ 之係數,因之至小等於 $\phi(x, y)$ 中之相當項之係數也.

仿之設三重級數

$$f(x, y, z)=\Sigma a_{mnp}x^m y^n z^p.$$

若於 $x=r$, $y=r'$, $z=r''$ 三正值收斂,則有長函數

$$\phi(x, y, z)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r''}\right)}.$$

及

$$\psi(x, y, z)=\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)},$$

$$\pi(x, y, z)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left[1-\left(\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)\right]}.$$

等.

若 $f(x, y, z)$ 無常數項,則可取上式之一與 M 之差爲長函數.

單元級數代入之理,亦可推及多元級數:

設有含 p 個變數 $y_1, y_2, \cdots\cdots y_p$ 之收斂冪級數;並此 p 個變數又展爲 q 變個數 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_q$ 之收斂冪級數而缺常數項,則代後述諸級數於前級數之結果,可書作 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_q$ 之一冪級數,僅須此等變數絕小於某某定限即可.

今就一特例證之,通例證法亦可類推.設

$$F(y, z)=\Sigma a_{mn}\, y^m z^n. \tag{45}$$

於 $|y| \leqq r$, $|z| \leqq r'$ 收斂,並設

$$\begin{cases} y=b_1 x+b_2 x^2+\cdots\cdots+b_n x^n+\cdots\cdots \\ z=c_1 x+c_2 x^2+\cdots\cdots+c_n x^n+\cdots\cdots \end{cases} \tag{46}$$

於 $|x|<\rho$ 收斂.若以 (46) 兩級數代入級數 (45), 則得 x 之一冪級數,爲一三重級數,其係數乃僅施加乘之手續於 a_{mn}, b_n, c_n 而得.吾往論此三重級數於某域內絕對收斂.

吾可取

$$\Phi(y, z)=\frac{M}{\left(1-\frac{y}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r'}\right)}=\Sigma M\left(\frac{y}{r}\right)^m\left(\frac{z}{r'}\right)^n \tag{47}$$

爲 $F(y, z)$ 之長函數,並

$$\frac{N}{1-\frac{x}{\rho}}-N=\sum_{n=1}^{+\infty} N\left(\frac{x}{\rho}\right)^n \tag{48}$$

爲(46)兩函數之長函數,其中 M, N 爲二正數.今若在(47)代 y, z 以展式(48),而將每 $y^m z^n$ 項依 x 冪展開,則所得三重級數其各係數皆爲實的與正的,且大於前三重級數之相當項.然則祇須證明後之三重級數對於 x 之相當小之正值爲收斂卽可.察將(47)各項之展式集合爲一項,則仍得一二重級數以

$$M\frac{N^{m+n}}{r^m r'^n}\frac{\left(\frac{x}{\rho}\right)^{m+n}}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{m+n}}$$

爲普通項.此級數適爲

$$\sum\left(\frac{N}{r}\right)^m\left(\frac{\frac{x}{\rho}}{1-\frac{x}{\rho}}\right)^m \text{ 與 } \sum\left(\frac{N}{r'}\right)^n\left(\frac{\frac{x}{\rho}}{1-\frac{x}{\rho}}\right)^n$$

二級數之積,所異者不過多一係數 M.此二級數依次於

(49) $$|x|<\rho\frac{r}{r+N}, \qquad |x|<\rho\frac{r'}{r'+N}$$

時爲收斂,故於條件(49)滿足時,代(46)於(45)所得之三重級數,可按 x 之升冪次序列之.

注意. 上理於(45)含有 b_0, c_0 項亦合理,但須 $|b_0|<r$ 及 $|c_0|<r'$.蓋代(45)以按 $y-c_0$ 及 $z-c_0$ 之冪列寫之式,仍歸入前例也.

習 題

1. 試定次列各級數之收斂隔間

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots.$$

$$1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots\cdots,$$

$$x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n+\cdots\cdots$$

2. 冪級數

$$\Sigma\frac{1}{\sqrt{n}}x^n,\quad \Sigma a^{\sqrt{n}}x^n,\quad \Sigma\frac{2^n.n!}{n^n}x^n$$

之收歛隔間爲何?其中 a 爲一正數.

3. 設 x 介於 -1 與 $+1$ 間;試求冪級數

$$\frac{x^2}{2\cdot 3}-\frac{2x^3}{3\cdot 4}+\frac{3x^4}{4\cdot 5}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots.$$

答: $\left(1+\frac{2}{x}\right)\log(1+x)-2.$

4. 命 m 爲一正整數並設 x 介於 -1 與 $+1$ 間;試求

$$\frac{x}{m+1}+\frac{x^2}{2(m+2)}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n(m+n)}+\cdots\cdots$$

之和.

答: $\frac{(1-x^m)\log(1-x)}{mx^m}+\frac{1}{mx^m}\left[x+\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{x^m}{m}\right].$

5. 求證公式

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{567}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n+1)(4n+2)\cdot(4n+3)}+\cdots\cdots=\frac{1}{4}\log 2.$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{n!x^n}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}+\cdots\cdots=\frac{2}{3}\log 2-\frac{5}{12}.$$

6. 試證明於 $|x|<4$ 級數

$$1+\frac{x}{2\cdot 3}+\frac{2!x^2}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{n!x^n}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(2n+1)}+\cdots\cdots$$

爲收斂,而其和等於定積分

$$\int_0^1\frac{dt}{1-(t-t^2)x}.$$

7. 求公式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots\cdots$$

8. 試證明於 $x>-\frac{1}{2}$，有

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots$$

9. 於 $|x|<1$ 有

$$x=\frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\cdots\cdots$$

若 $|x|>1$，則級數之和何如？

10. 推求公式

$$(a+x)^{-n}=\frac{1}{a^n}\left[1-\frac{nx}{a+x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$

11. 證公式 (Borda's series)

$$\log(x+2)=2\log(x+1)-2\log(x-1)+\log(x-2)$$
$$+2\left[\frac{2}{x^3-3x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5+\cdots\cdots\right]$$

12. 證公式 (Haro's series)

$$\log(x+5)=\log(x+4)+\log(x+3)-2\log x$$
$$+\log(x-3)+\log(x-4)-\log(x-5)$$
$$-2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\cdots\cdots\right].$$

第十三章

三角級數及多項式級數

三角級數在分析學及物理學上甚重要,其見於應用似自伯努義氏(Daniel Bernoulli)之振弦問題始,繼尤拉氏(Euler)首先明示一求定係數之法,伏利野氏(Fourier)更於其 Theorie Analytique de la Chaleur 書中表明此種級數在分析學上之重要,並確立狄里克來氏(Dirichlet)所闡發之學理之基礎焉.

244. 伏氏級數定義(Fourier's series).

設有確定於一隔間內之函數 $f(x)$; 吾等可設此隔間爲 $(-\pi, +\pi)$, 蓋若爲 (a, b), 則可取 $[2\pi x-(a+b)\pi]/(b-a)$ 爲新變數以化之也.今若對於 $-\pi$ 與 $+\pi$ 間之各 x 値有

$$(1)\, f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots\cdots$$

$$+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\cdots\cdots,$$

則其係數 $a_0, a_1, b_1, \cdots\cdots, a_m, b_m, \cdots\cdots$ 可準尤氏法定之如次:

設 m 與 n 爲 $\geqq 0$ 之整數,吾等易知

$$
(2)\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx \begin{cases} =0 & \text{於 } m \neq n, \\ =\pi & \qquad m=n>0, \\ =2\pi & \qquad m=n=0, \end{cases} \\
\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx = 0, \\
\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx \, dx \begin{cases} =0 & \text{於 } m \neq n, \\ =\pi & \qquad m=n>0, \end{cases}
\end{cases}
$$

故於 $-\pi$ 與 $+\pi$ 間將(1)求積分,則有

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} ax = \pi a_0,$$

又若以 $\cos mx$ 或 $\sin mx$ 先乘(1)之兩端然後積之,則準(2)得

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx \, dx = \pi a_m, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx \, dx = \pi b_m,$$

由是有

$$(3)\qquad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx \, dx,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx \, dx,$$

定義. 凡準公式(3)求自一函數 $f(x)$ 之級數

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots\cdots + (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \cdots\cdots$$

稱爲一伏氏級數;吾等用呼維慈氏 (M. Hurwitz) 之符號書

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots\cdots$$

$$+ (a_m \sin mx + b_m \sin mx) + \cdots\cdots$$

而讀曰: $f(x)$ 有伏氏級數 $\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots\cdots$.

於可積於 $(-\pi, +\pi)$ 內之一函數 $f(x)$,恆可得一伏氏級數,

然未必爲收斂,而以 $f(x)$ 爲和,卽未必可以 = 號代 ~ 號,惟有可注意者:若二函數 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 可由其伏氏級數表之.則函數 $Af(x)+B\phi(x)$ 亦然,而無論常數 A, B 若何.今往述 $f(x)$ 可展爲伏氏級數之條件.

245. 狄氏條件 (Dirichlet's conditions).

此爲函數 $f(x)$ 可由其伏氏級數表之之一充足條件,可分二層述之如次:

1°) 可分 $(-\pi, +\pi)$ 爲一定個數之開口隔間,使於每間內 $f(x)$ 爲單調的.

2°) $f(x)$ 於隔間內僅有有法間斷點,

吾等往證於此條件滿足時伏氏級數前 $2m+1$ 項之和於 $m\to+\infty$ 以 $f(x)$ 爲其限.按

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\left[\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\cos m(\alpha-x)\right]d\alpha,$$

準三角公式

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos m\theta=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

得
$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}\,dx;$$

或命 $\alpha=x+2y$,

$$(4) \qquad S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{+\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\,\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy.$$

由是引起次節之討論.

246. 積分 $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx$ 之討論.

吾等先就視爲根據之數點述之,吾等知定積分

$$\int_0^h \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (h>0)$$

之值爲正,至大等於 $A=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$, 並於 $h\to+\infty$ 趨於 $\frac{\pi}{2}$. 又積分

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx$$

(a 與 b 爲任意二正數)於 $n\to+\infty$ 時趨於零,蓋如 $a<b$, 則準第二值公式

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx=\frac{1}{a}\int_a^\xi \sin nx\,dx=\frac{1}{a}\,\frac{\cos na-\cos n\xi}{n},$$

其絕對值小於 $\frac{2}{na}$. 此見積分對大於 a 之一切 b 值爲一致趨於 0.

今設積分

$$(5) \qquad J=\int_0^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx \qquad (h>0)$$

$\phi(x)$ 爲 $(0, h)$ 間之增函數. 按積分 $\int_a^b \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx$ 於 $n\to\infty$ 以 0 爲限. 蓋設 $a<b$ 而準第二中值公式有

$$\left|\int_a^b \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx\right| = \phi(a)\left|\int_a^{\xi}\frac{\sin nx}{x}\,dx\right| < \frac{2\phi(a)}{na}.$$

今欲得 J 之限,試命 c 爲一甚小正數,而書

$$J = \int_0^c \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_c^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

末端第二積分準適所言之理爲零;致第一積分之限求之稍難.但若注意在 $(0, c)$ 內 $\phi(x)$ 與 $\phi(+0)$ 甚相近,可逆料此積分之限與 $\int_0^c \phi(+0)\frac{\sin nx}{x}\,dx$ 者同,即等於 $\frac{\pi}{2}\phi(+0)$ 也.試本此意切實證之.吾等有

$$J - \frac{\pi}{2}\phi(+0) = \phi(+0)\left(\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \int_0^c \left[\phi(x) - \phi(+0)\right]\frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_0^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

函數 $\phi(x)-\phi(+0)$ 在 $(0, c)$ 爲遞減的,但其號爲負.試書末端第二積分爲

$$\int_0^c \left[\phi(c) - \phi(+0)\right]\frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_0^c \left[\phi(x) - \phi(c)\right]\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

$\phi(x)-\phi(c)$ 爲正的遞減函數,準第二中值公式有

$$\left|\int_0^c [\phi(x) - \phi(c)]\frac{\sin nx}{x}\,dx\right| < 2A[\phi(+0) - \phi(c)].$$

於是任與正數 ε,吾等可求一相當甚小正數 c 使

$$2A[\phi(+0) - \phi(c)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

c 如是定,更求一甚大整數 N 使 $\frac{2\phi(c)}{Nc} < \frac{\varepsilon}{3}$,並於 $n \geqq N$ 時

$$\phi(+0)\left|\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因之
$$\left|J-\frac{\pi}{2}\phi(+0)\right|<\varepsilon.$$

誠有

$$\lim_{n=\infty} J=\frac{\pi}{2}\phi(+0). \tag{6}$$

於上限制函數 $\phi(x)$ 之條件未盡爲必要者.茲更伸論之,若 $\phi(x)$ 於 $(0,h)$ 內爲減函數,但不恆爲正,則命

$$\psi(x)=\phi(x)+c.$$

可知上述之理於 $\psi(x)$ 合用而關係

$$\int_0^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx=\int_0^h \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx-c\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx$$

右端以 $\frac{\pi}{2}\psi(+0)-\frac{\pi}{2}c$ 卽 $\frac{\pi}{2}\phi(+0)$ 爲限,故左端亦然.若 $\psi(x)$ 於 $(0,h)$ 內爲增函數,則 $-\phi(x)$ 爲減函數,而積分

$$\int_0^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx=-\int_0^h -\phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

亦以 $\frac{\pi}{2}\phi(+0)$ 爲限.

仿此可證積分

$$\int_a^b \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx \qquad (a>0,\ h>0)$$

在 $\phi(x)$ 爲 (a,b) 內之單調函數時,於 $n\to\infty$ 亦趨於零.

復次僅設 $\phi(x)$ 爲囿函數.惟設 $(0,h)$ 可分爲一定個數之隔間 $(0,a),(a,b),\cdots\cdots,(e,h)$ 使於每隔間內 $\phi(+0)$ 爲單調函數,

則 $\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx$ 亦以 $\frac{\pi}{2}\phi(+0)$ 爲限,而

$$\int_a^b \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx, \cdots\cdots, \int_e^h \phi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

均趨於零,然則公式(6)仍可用.

現論積分

(7) $$I=\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx \qquad (0<h<\pi).$$

可書之如

$$I=\int_0^h f(x)\frac{x}{\sin x}\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

若 $f(x)$ 於 $(0,h)$ 爲正的遞增的,則 $f(x)\frac{x}{\sin x}$ 亦然,而

(8) $$\lim_{n\to\infty} I=\frac{\pi}{2}\phi(+0)=\frac{\pi}{2}f(+0),$$

仿上論之可陸續證:

1° 公式(8)適用於在$(0,h)$內之任何單調函數.

2° 積分

$$\int_a^b f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx \qquad (a, b \text{ 爲小於 } \pi \text{ 之正數})$$

在設 $f(x)$ 爲 (a,b) 內之單調函數時趨於零.

3° 若可分 $(0,h)$ 爲一定個數之小隔間,使於每小間內爲單調函數,則

(9) $$\lim\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx=\frac{\pi}{3}f(+0), \qquad (0<h<\pi)$$

247. 可展爲伏氏級數之函數.

現仍取可積於 $(-\pi, +\pi)$ 內之囿函數 $f(x)$ 論之,於其相關

之伏氏級數其前 $2m+1$ 項之和 S_{2m+1} 可書如(分積分隔間為二)

$$(10)\qquad S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}}f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}}f(x-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}\,dz.$$

當 x 介於 $-\pi$ 與 $+\pi$ 間,此兩積分限亦介於0與 π 間;於是 $f(x)$ 若滿足狄氏條件第一層,則 y 之函數 $f(x+2y)$ 於 $\left(0,\frac{\pi-x}{2}\right)$ 內亦滿足是項條件,而據上節所述之理(10)之前一積分以

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}f(x+0)\right]=\frac{1}{2}f(x+0)$$

為限,而末一積分則以 $\frac{1}{2}f(x-0)$ 為限,因之於 $-\pi<x<+\pi$ 有

$$\lim S_{2m+1}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

繼須設 $x=\pm\pi$;試就 $x=-\pi$ 論之.吾等有

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy$$

前積分以 $\frac{1}{2}f(-\pi+0)$ 為限,而於末積分則命 $y=\pi-z$ 得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}\,dz$$

而見其以 $\frac{1}{2}(\pi-0)$ 為限.然則伏氏級數之和於 $x=-\pi$ 為

$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$. 對於 $x=\pi$, 結果亦顯然相同.

結論之. 若 $f(x)$ 合於狄氏條件第一層,則所生伏氏級數收斂而其和於 $-\pi<x<\pi$ 等於 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, 並於 $x=\pm\pi$ 為 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

若復設 $f(x)$ 僅具有有法間斷點,則於 $-\pi<x<+\pi$ 恆有

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{11}$$

又吾等可取

$$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, \tag{12}$$

蓋以半徑為1之圓代直軸以表 x, 則 (12) 與 (11) 之意義適相同也.

然則凡在 $(-\pi,\pi)$ 內合於狄氏條件之函數 $f(x)$ 在此隔間內可展為伏氏級數.

今設確定於幅為 2π 之隔間 $(\alpha,\alpha+2\pi)$ 內並滿足狄氏條件之一函數 $f(x)$, 吾等顯然可得他一函數 $F(x)$ 具有週數 2π, 並於 $(\alpha,\alpha+2\pi)$ 內與 $f(x)$ 符合, 此函數 $F(x)$ 對於各 x 值可以一三角級數表之, 其係數由公式

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\cos mx\,dx,\qquad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\sin mx\,dx$$

而定. 吾等可書

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{\pi}F(x)\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{a}F(x)\cos mx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{\pi}F(x)\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{a+2\pi}F(x)\cos mx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}F(x)\cos mx\,dx.$$

同法可化 b_m, 而吾等有

$$(13)\qquad \begin{cases} a_m' = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\cos mx\,dx, \\ b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\sin mx\,dx. \end{cases}$$

此見若設 $f(x)$ 確定於幅爲 2π 之任意隔間內,則不必化隔間爲 $(-\pi,\pi)$, 而伏氏級數可逕由公式(13)得之.

例 1. 設欲求一伏氏級數使其和於 $-\pi<x<0$ 爲 -1 而於 $0<x<\pi$ 爲 $+1$. 由公式(3)有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}dx=0$$

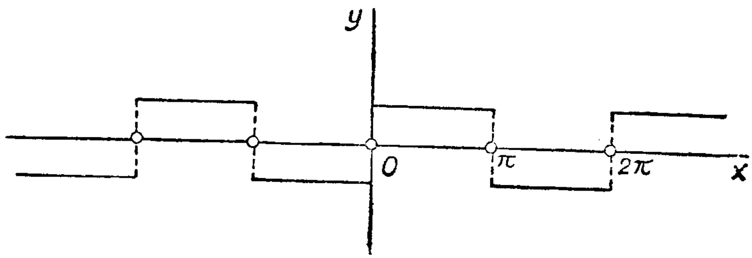
$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos mx\,dx=0$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin mx\,dx=\frac{2-\cos mx-\cos(-m\pi)}{m\pi}$$

b_m 於 m 爲偶數時爲零而於 m 爲奇數時等於 $\frac{4}{m\pi}$. 若以 $\frac{\pi}{4}$ 乘各係數,則得級數

$$(13)\qquad y=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\cdots+\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}+\cdots\cdots$$

而知其於 $-\pi<x<0$ 間以 $-\frac{\pi}{4}$ 爲和,並於 $0<x<\pi$ 間以 $+\frac{\pi}{4}$ 爲和. 致 $x=0$ 爲一間斷點,而級數於是點之和等於零.



第 39 圖

普通於 $\sin x>0$ 有 $y'=\frac{\pi}{4}$ 而於 $\sin x<0$, 有 $y=-\frac{\pi}{4}$ 又於 $\sin x=0$, 有 $y=0$. 方程式(13)之圖線由與 x 軸平行之無窮個線段及 $(x=k\pi, y=0)$ 無窮個孤點合成之.

例 2. 求於 $(0, 2\pi)$ 內展 x 爲伏氏級數. 由公式(13)有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx=2\pi$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos mx\,dx=\left[\frac{x\sin mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi}\sin mx\,dx=0$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin mx\,dx=-\left[\frac{x\cos mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx$$

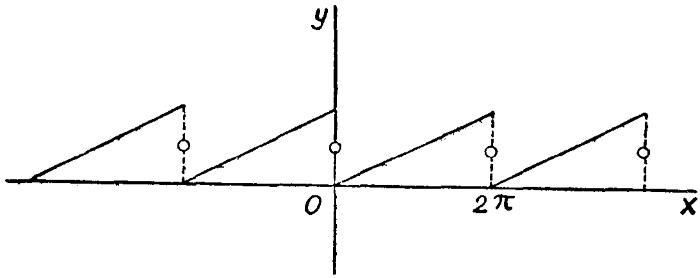
$$=-\frac{2}{m}$$

而得
$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\cdots$$

此關係對於 $0<x<2\pi$ 之各 x 值皆合. 方程式

$$y=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}=\cdots\cdots$$

之圖線由平行於$y=\frac{x}{2}$直線之無窮個線段及無窮個孤點所合成,有如圖40所示.



第 40 圖

注意. 1°. 若$f(x)$在$(-\pi, +\pi)$內爲偶函數使$f(-x)=f(x)$,

則 $$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin mx\,dx=-\int_{0}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$$

而各b_m係數皆等於零,因之$f(x)$可展爲餘弦級數.反之,若$f(x)$爲奇函數即$f(-x)=-f(x)$,則各a_m係數爲零,而$f(x)$可展爲正弦級數.

又若一函數$f(x)$僅確定於$(0,\pi)$內,吾等可設其於$(-\pi,0)$內由

$$f(-x)=f(x) \quad 或 \quad f(-x)=-f(x).$$

確定.故$f(x)$可於$(0,\pi)$內展爲一正弦級數或餘弦級數.

例欲於$(0,\pi)$隔間內展$\sin px$ (p爲整數)爲餘弦級數,於此若p爲偶數,則$f(x)=-f(\pi-x)$,立知$a_2k=0$,而

$$a_{2k+1}=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin px\cos(2k+1)x\,dx=\frac{4p}{\pi}\frac{1}{p^2-(2k+1)^2}.$$

若 p 爲奇數,則 $f(x)=f(\pi-\alpha)$ 而 $a_{2k+1}=0$,

$$a_{2k}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin px\cos 2kx\,dx=\frac{4p}{\pi}\frac{1}{p^2-(2k)^2}$$

於是 p 在 $(0,\pi)$ 內得:於 p 爲偶數

$$\sin px=\frac{4p}{\pi}\left[\frac{\cos x}{p^2-1}+\frac{\cos 3x}{p^2-3^2}+\cdots\cdots+\frac{\cos(2k+1)}{p^2-(2k+1)^2}+\cdots\cdots\right],$$

而於 p 爲奇數

$$\sin px=\frac{4p}{\pi}\left[\frac{1}{2p^2}+\frac{\cos 2x}{p^2-2^2}+\cdots\cdots+\frac{\cos 2kx}{p^2-(2k)^2}+\cdots\cdots\right],$$

2°. 設 $f(x)$ 可於 $(-\pi,+\pi)$ 內展爲伏氏級數,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots\cdots$$
$$+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\cdots\cdots$$

若易 x 爲 $-x$,則

$$f(-x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x-b_1\sin x)+\cdots\cdots$$
$$+(a_m\cos mx-b_m\sin mx)+\cdots\cdots$$

由此二式可決定

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+\cdots\cdots+a_m\cos mx+\cdots\cdots,$$

$$b_1\sin x+\cdots\cdots+b_m\sin mx+\cdots\cdots$$

兩級數在 $(-\pi,+\pi)$ 內爲收斂,而依次表函數:

$$\phi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\qquad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

吾等易於驗知適爲關於此兩函數之伏氏級數.

248. 充足條件之推廣.

狄氏條件僅爲充足的而絕非必要的,吾等尙可代以意

義較廣之條件,如 $f(x)$ 爲於 $(-\pi,+\pi)$ 內之囿變函數,則可書爲二單調函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 之和,命 $S(x),S_1(x),S_2(x)$ 依次表此三函數所生之伏氏級數;準上所論,$S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 在 $(-\pi,+\pi)$ 內爲收斂,並對於 $-\pi<x<+\pi$ 之各 x 值有

$$S_1(x)=\frac{f_1(x+0)+f_1(x-0)}{2} \qquad S_2(x)=\frac{f_2(x+0)+f_2(x-0)}{2}.$$

再則因 $S(x)$ 之每項等於 S_1 與 S_2 相當項之和,可知 $S(x)$ 亦收斂而等於 $S_1(x)+S_2(x)$, 卽 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 同理於 $x=\pm\pi$ 時級數亦收斂,而以 $\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$ 爲和,是知在 $(-\pi,+\pi)$ 內之一囿變函數所生之伏氏級數於 $-\pi$ 與 $+\pi$ 間之各 x 值爲收斂,其和等於 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$,並於 $x=\pm1$ 等於

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}.$$

今若再設 $f(x)$ 僅有有法間斷點,則於 $-\pi$ 與 $+\pi$ 間各 x 值伏氏級數之和等於 $f(x)$.

249. 伏氏係數之性質及伏氏級數之一致收斂性.

爲簡便計,吾等稱伏氏級數之係數爲伏氏係數;茲往論其對於無窮小 $\frac{1}{m}$ 之級.設於 $(-\pi,+\pi)$ 內之囿變函數 $f(x)$, 並設 $(-\pi,+\pi)$ 可分爲一定個數之隔間

$$(-\pi,\alpha_1),\ (\alpha_1,\alpha_2),\cdots\cdots,\ (\alpha_{p-1},\alpha_p),\ (\alpha_p,+\pi)$$

使於每小隔間內 $f(x)$ 及其前二級紀數 $f'(x),f''(x)$ 均爲連續的與囿變的;如是有

$$\pi a_m=\int_{-\pi}^{a_1} f(a)\cos ma\,da+\int_{a_1}^{a_2} f(a)\cos ma\,da+\cdots\cdots$$
$$+\int_{a_p}^{\pi} f(a)\cos ma\,da$$

用部分法求積，得

$$\pi a_m=\left[\frac{1}{m}f(a)\sin ma\right]_{-\pi}^{a_1}+\left[\frac{1}{m}f(a)\sin ma\right]_{a_1}^{a_2}+\cdots\cdots$$
$$+\left[\frac{1}{m}f(a)\sin ma\right]_{a_p}^{\pi}$$
$$-\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{a_1} f'(a)\sin ma\,da-\int_{a_1}^{a_2} f'(a)\sin ma\,da-\cdots\cdots$$
$$-\frac{1}{m}\int_{a_p}^{\pi} f'(a)\sin ma\,da$$

若命

(15) $$\pi A_m=\sum_{i=1}^{p}\sin m a_i\,[f(a_i-0)-f(a_i+0)]$$

則可書

(16) $$a_m=\frac{A_m}{m}-\frac{b'_m}{m}$$

而 b'_m 卽係 $f'(x)$ 之伏氏係數之一.

仿之，命

(15′) $$\pi B_m=-\sum_{i=1}^{p}\cos m a_i\,[f(a_i-0)-f(a_i+0)]$$
$$-\cos m\pi\,[f(\pi-0)-f(-\pi+0)]$$

則有

(16′) $$b_m=\frac{B_m}{m}+\frac{a'_m}{m}$$

而 a'_m 爲 $f'(x)$ 之伏氏係數之一.

如上法就 $f'(x)$ 論之,則有

$$(17)\qquad a'_m=\frac{A'_m}{m}-\frac{b''_m}{m}m,\qquad b'_m=\frac{B'_m}{m}+\frac{a''_m}{m},$$

其中 a''_m, b''_m 爲關於 $f''(x)$ 之伏氏係數,並

$$(18)\qquad \begin{cases}\pi A'_m=\sum_{i=1}^{k}\sin m\alpha_i\,[f'(\alpha_i-0)-f'(\alpha_i+0)],\\ \pi B'_m=-\sum_{i=1}^{k}\cos m\alpha_i\,[f'(\alpha_i-0)-f(\alpha_i+0)]\\ \qquad\qquad -\cos m\pi[f'(\pi-0)-f(-\pi+0)].\end{cases}$$

於是由 (16),(16′) 及 (17) 得

$$(19)\qquad a_m=\frac{A_m}{m}-\frac{B'_m}{m^2}-\frac{A''_m}{m^2},\qquad b_m=\frac{B_m}{m}+\frac{A'_m}{m^2}-\frac{b''_m}{m^2}.$$

若令 $m\to\infty$,則 A_m, B_m A'_m, B'_m 均小於一定數,又確定 a'_m, b'_m a''_m, b''_m 等值之積分之被積函數均爲囿的,是知 a'_m, b'_m, a''_m, b''_m 等亦均小於一定數.

由 (16) 與 (16′) 二式可知普通 a_m 與 b_m 與 $\frac{1}{m}$ 同級.然則囿變函數之伏氏級數之收斂普通受其項之改號影響較受其項絕對值之減小速度影響爲多.

今若 $A_m=0$ 及 $B_m=0$,則關於 $f(x)$ 之伏氏級數爲絕對一致收斂.

欲 $A_m=0$, $B_m=0$,必須並祇須

$$f(\alpha_i-0)=f(\alpha_i+0),\qquad f(\pi-0)=f(-\pi+0),$$

即 $f(x)$ 爲連續函數.

然則設 $f(x)$ 爲在 $(-\pi,+\pi)$ 內之囿變函數,若並設其爲連續的,則所生之伏氏級數在 $(-\pi+\delta,+\pi-\delta)$ 內一致收斂,而其和等於 $f(x)$.

伏氏級數可求微分之充足條件. 設函數 $f(x)$ 於 $(-\pi,\pi)$ 內爲連續並有紀數 $f'(x)$, 且 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 同於 $(-\pi,\pi)$ 內爲囿變函數,而僅具有一定個數之有法間斷點,則 $f(x)$ 可逐項求紀.

蓋將 $f(x)$ 之伏氏級數

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots\cdots+a_m\cos mx+b_m\sin mx+\cdots\cdots$$

逐項求紀,得

$$b_1\cos x-a_1\sin x+\cdots\cdots+m\,b_m\cos mx-ma_m\sin mx+\cdots\cdots$$

準 $f(x)$ 爲連續之假定吾等有 $A_m=B_m$, 並可取 $\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx=0$, 於是由 (14) 與 (16′) 立知此級數即 $f(x)$ 所生之伏氏級數:

$$\frac{a_0}{2}+a_1'\cos x+b_1'\sin x+\cdots\cdots+a_m'\cos mx+b_m'\sin mx+\cdots\cdots$$

伏氏級數於所表函數 $f(x)$ 之間斷點失其爲一致收斂之情形,亦可由次理而明:吾等知各項爲連續函數之級數,若一致收斂則爲連續,今伏氏級數其各項均係連續函數,故不能於含有 $f(x)$ 之間斷點之隔間內一致收斂.

250. 可積的囿函數之伏氏係數.

若吾等不設函數 $f(x)$ 爲囿變的,而僅設其爲囿的與可積

的，則伏氏級數可不爲收斂．但有極可注意者：伏氏係數 a_m 與 b_m 於 $m\to\infty$ 時仍趨於零，試就

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

論之．

按函數 $f(x)$ 於 (a,b) 內爲可積（黎曼氏意義）之必要與充足條件爲於各小隔間 $\delta_i\to 0$ 時，

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\delta_i\to 0$$

M_i, m_i 爲 $f(x)$ 於 δ_i 內之高低界（見 105 及 107 節）．今分 $(0,2\pi)$ 爲 n 等分而命 M_k, m_k 爲 $f(x)$ 於第 $k+1$ 分

$$\left[k\frac{2\pi}{n},\ (k+1)\frac{2\pi}{n}\right]$$

中之高界低界．若將此隔間以其中點 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}$ 分之爲二，則在其前部 $\sin nx>0$，而有

$$(20)\qquad \frac{2m_k}{n\pi}=\frac{m_k}{\pi}\int_{k\frac{2\pi}{n}}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}\sin nx\,dx$$

$$\leqq\frac{1}{\pi}\int_{k\frac{2\pi}{n}}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nx\,dx\leqq\frac{N_k}{\pi}\int_{k\frac{2\pi}{n}}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}\sin nx\,dx=\frac{2M_k}{n\pi}$$

又於此隔間之後部內 $\sin nx<0$，而有

$$(21)\qquad -\frac{2M_k}{n\pi}\leqq\frac{1}{\pi}\int_{\left(k+\frac{1}{2}\right)}^{(k+1)\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nx\leqq-\frac{2\ \ _k}{n\pi}.$$

令(20)與(21)兩結果之各端相加而命 $\omega_k=M_k-m_k$，則得

$$-\frac{2\,\omega_k}{n\pi}\leqq\frac{1}{\pi}\int_{k\frac{2\pi}{n}}^{(k+1)\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nx\,dx\leqq\frac{2\,\omega_k}{n\pi}.$$

吾等顯然有

$$|b_n|\leqq\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{k\frac{2\pi}{n}}^{(k+1)\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nx\,dx\right|\leqq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\,\omega_k}{n\pi},$$

即

$$(22)\qquad |b_n|\leqq\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\frac{2\pi}{n},$$

但 $\Sigma\omega_k\dfrac{2\pi}{n}$ 即分 $(0,2\pi)$ 爲 n 等分而得之 $f(x)$ 之相關差數 $S-s$，既設 $f(x)$ 爲可積，故知此差趨於零，因之由(22)知 $b_n\to 0$.

同法可證 a_n 於 $n\to\infty$ 時趨於零.

251. 伏氏級數於一間斷點附近之狀態：基卜斯氏現象 (Cibbs' phenomenon).

伏氏級數於一間斷點附近有一奇特之狀態係基卜斯氏所闡明者因稱爲基氏現象.茲卽就基氏之一例明之.

在 $(0,2\pi)$ 內求展 $\dfrac{\pi-x}{2}$ 爲伏氏級數有

$$(23)\qquad \frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin 2x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots\cdots$$

$$=S_n(x)+R_n(x)$$

內設

$$S_n(x)=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots\cdots+\frac{\sin nx}{n}.$$

吾等知 $S_n(x)$ 在 $(+\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$ 內一致趨於 $\frac{\pi-x}{2}$ 而無論正數 ε 如何小. 試令 n 無限增大,並 x 由適當之值趨於零以討論 $S_n(x)$ 之變狀.

吾等有

$$S_n(x)=\int_0^x(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots\cdots+\cos n\alpha)\,d\alpha$$

$$=\int_0^x\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right]d\alpha$$

$$=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

而據(22)得

$$(24)\qquad R_n(x)=\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

$R_n(x)$ 隨 x 而變(n 爲固定)之情形不難討論,其紀

$$R_n'(x)=-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

以 $x_k=2k\pi/(2n+1)$ 爲限,吾等立知 $R_n(x)$ 於 $x_1, x_3,\cdots\cdots, x_{2p+1},\cdots\cdots$ 點爲極小,而於 $x_2, x_4,\cdots\cdots, x_{2p},\cdots\cdots$ 點爲極大.

由一甚易之變數替換可代(24)右端之積分以較易討論之積分:

$$\int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

試書

(25)
$$R_n(x)=\frac{\pi}{2}-\int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

$$+\int_0^x\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right]d\alpha$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha+I_n(x)$$

其中

(26)
$$I_n(x)=\int_0^x \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right]d\alpha$$

$$=\int_0^x \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}-\alpha}{2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha.$$

設 x 介於0與小於 π 之任一正數 h 間;吾謂 <u>I_n 隨 $\frac{1}{n}$ 趨於零,且其級可與 $\frac{1}{n}$ 者比擬.</u>

蓋用部分求積法有

$$I_n(x)=\frac{x-2\sin\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{\alpha^2\cos\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\alpha^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha.$$

於 α 近於 0 時 $\left(\alpha^2\cos\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)/4\alpha^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ 仍爲連續. 可知 (26) 中之積分無論 x 爲 0 與 h 間之何值皆爲囿於上之函數.

又 $\dfrac{x-2\sin\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ 亦於 $0\leqq x\leqq h$ 囿於上. 於是吾等可判斷於 $0\leqq x\leqq h$.

$$|I_n(x)|<\frac{M}{n+\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

M 爲一定數.

現仍就公式

$$R_n(x)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin x}{x}\,dx+I_n(x)$$

$$S_n(x)=\frac{\pi-x}{2}-R_n(x)$$

論之. 此等式對於 $x\neq 0$ 成立.

試與 x 以令 $R_n(x)$ 爲極大或極小之值 $x_k=2k\pi/(2n+1)$, 有

$$R_n(x_k)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{k\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx+I_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

設 k 固定而令 $n\to\infty$, 則據 (27) 知 $R_n(x_k)$ 趨於定數

$$P_k=\frac{\pi}{2}-\int_0^{k\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

吾等可書

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots\cdots + (-1)^k u_k + \cdots\cdots,$$

其中

$$u_0 = \int^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx, \cdots\cdots, (-1)^k u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

u_k 爲漸減而趨於零之正數. 如是有

(28) $$P_k = (-1)^k(u_k - u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots\cdots),$$

P_k 之起始數個值求得爲

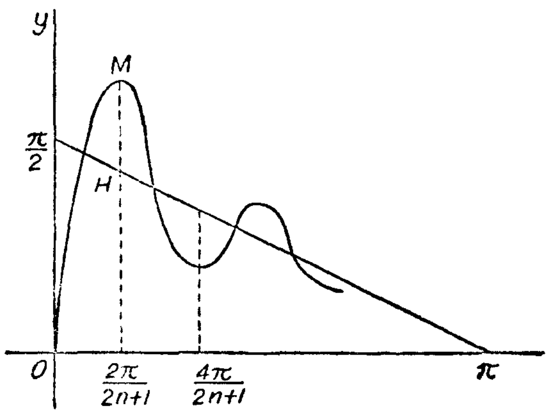
$$P_1 = -0.2811\cdots\cdots$$

$$P_2 = +0.153\cdots\cdots$$

$$P_3 = -0.104\cdots\cdots$$

$$P_4 = +0.079\cdots\cdots$$

於是例如命 $k=1$, 則有一貫隨 $\frac{1}{n}$ 漸趨於零之點 $2\pi/(2n+1)$; 於此等點



第 41 圖

$$S_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)=\frac{\pi-\dfrac{2\pi}{2n+1}}{2}-R_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)$$

趨於

$$\frac{\pi}{2}+0.2811\cdots\cdots$$

就幾何表示言之,曲線 $y=S_n(x)$ 在 0 與 2π 間纏繞直線 $y=(\pi-x)/2$ 而作波狀,其波弧於 $(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$ 隔間內一致降平,但於諸 $2\pi/(2n+1)$ 點則恆大於一定限,而此等點於 $n\to\infty$ 時咸趨往聚於間斷點,又於 $2k\pi/(2n+1)$ 諸點情形亦同.

於 $2\pi/(2n+1)$ 點,差數 $S_n(x)-\dfrac{\pi-x}{2}$ 於 $n\to\infty$ 不趨於零而趨於 0.1811……… 在圖 41 內,HM 即表此差數於 $2\pi/(2n+1)$ 點之值,當 n 增大時 $y=S_n(x)$ 曲線之波弧漸收窄而落於 $0y$ 上,以及其平行線 $x=2l\pi$ 上(l 爲一整數).凡 oy 軸上位於

$$y_1=-\frac{\pi}{2}+0.2811\cdots\cdots$$

$$y_2=\frac{\pi}{2}+0.2811\cdots\cdots$$

二點間之點均爲 $y=S_n(x)$ 於 $n\to\infty$ 時之限點.

此結果明切顯出 $S_n(x)$ 之斂於 $f(x)$,在含有間斷點之隔間內非一致的.並在間斷點附近,$S_n(x)$ 與 $f(x)$ 之間有一確定之距離.

此現象先由都布瓦藹孟氏(Du Bois Reymond)發見,惟所言稍有錯誤,基氏實澈底闡明之,故名基氏現象.

251. 多項式的級數.

定伏氏級數之係數之法,尙可推廣而用以展一函數 $f(x)$ 爲正交函數之級數,特別用以展 $f(x)$ 爲勒氏多項式之級數. 設有一貫正交函數

$$\phi_0,\ \phi_1, \cdots\cdots,\ \phi_n\cdots\cdots$$

按定義對於任何相異之二正整數 m 與 n 有

$$\int_a^b \phi_m\,\phi_n\,dx = 0. \tag{29}$$

今若函數 $f(x)$ 可展爲在 (a, b) 內一致收斂之級數

$$f(x) = A_0\,\phi_0 + A_1\,\phi_1 + \cdots\cdots + A_n\,\phi_n + \cdots\cdots, \tag{30}$$

則係數 $A_0, A_1, \cdots\cdots, A_n$ 極易定之如次: 以 ϕ_n 乘 (30) 兩端並準 (29) 有

$$\int_a^b \phi_n(x) f(x)\,dx = A_n \int_a^b \phi_n{}^2\,dx;$$

由是便得 A_n. 吾等所須討論者乃如是求得之級數究爲收斂而以 $f(x)$ 爲和否.

吾等知勒氏多項式 X_n 爲在 $(-1, +1)$ 內之正交函數,故可展一函數爲 X_n 之級數. 見於定係數之公式內之積分於此爲

$$K_n = \int_{-1}^{+1} X_n{}^2\,dx,$$

甚易求出. 命 a_n 爲 X_n 內 x^n 之係數,則準關係

$$(n+1)\,X_{n+1} - (2n+1)x\,X_n + n\,X_{n-1} = 0$$

有
$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx=\int_{-1}^{+1} a_n\,x^n\,X_n\,dx$$
$$=\int_{-1}^{+1} a_n\,x^{n-1}\frac{(n+1)X_{n+1}+nX_{n-1}}{2n+1}\,dx$$
$$=\frac{na_n}{2n+1}\int_{-1}^{+1} x^{n-1}\,X_{n-1}\,dx.$$

而命 a_{n-1} 爲 X_{n-1} 內 x^{n-1} 之係數亦有

$$\int_{-1}^{+1} X^2{}_{n-1}\,dx=a_{n-1}\int_{-1}^{+1} x^{n-1}\,X_{n-1}\,dx.$$

故得

$$\frac{K_n}{K_{n-1}}=\frac{na_n}{(2n+1)a_{n-1}}=\frac{2n-1}{2n+1}.$$

於 $n=0$, $K_0=2$. 於是易得 $K_n=\dfrac{2}{2n+1}$.

習　題

1. 取以 2π 爲週期之循環函數 $f(x)$ 而設其爲圓的與可積的; 又設有窮三角和數

$$S_n=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

試定係數 a_i, b_i 以使積分

$$I=\int_0^{2\pi}[f(x)-S_n]^2\,dx$$

爲極小.

答: a_0, a_i, b_i 適爲伏氏係數.

2. 若 $\phi(x)$ 爲在 $(0,\pi)$ 隔間內合於一適當條件之函數, 則

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}\,\phi(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\,[\phi(\pi+0)+\phi(\pi-0)],$$

試證明之.

3. 求證於 $a>0$

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}e^{-ax}=\frac{\pi}{2}\coth\frac{2\pi}{2}.$$

(Cambridge, Math. Trip. 1894).

4. 求由級數代表之一循環函數以$4a$爲週期，且自$x=-2a$至$x=0$等於$a+x$而自$x=0$至$x=2a$等於$a-x$.

(Cambridge, Trin. College 1881).

答：$\frac{8a}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\frac{(2p+1)\pi x}{2a}.$

5. 求由伏氏級數表一偶函數$f(x)$使自$x=0$至$x=a(0<a<\pi)$等於常數b而自$x=a$至π等於零，並繪其圖線.

6. 求由伏氏級數表一奇函數$f(x)$使於$(0, a)$內$f(x)=\frac{bx}{a}$而於(a, π)內$f(x)=b(\pi-x)/(\pi-a)$. 繪其圖線.

7. 求以伏氏級數表$(0, \pi)$內等於x^2之偶函數，並繪其圖線.

答：$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{1}{p^2}\cos px$，圖線由拋物線弧合成.

8. 求於$(0, \pi)$內展$x(\pi-x)$爲正弧級數.

(Oxford, 1900).

答：$\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\sin(2p+1)x.$

9. 求於$(0, \pi)$內展$\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$爲餘弧級數.

答：$-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos px}{p}.$

10. 試證於$0\leqq x\leqq\pi$

$$\frac{1}{96}\pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-2x^2)=\cos x+\frac{\cos 3x}{3^4}+\frac{\cos 5x}{5^4}+\cdots\cdots$$

(Whittaker, mordern Analysis).

11. 求以$2l$爲週期之一循環函數$f(x)$，使其自$-l$至$-\frac{l}{2}$等於$\frac{l}{4}$，自$-\frac{l}{2}$至$+\frac{l}{2}$等於$\frac{x^2}{2}$，又自$\frac{l}{2}$至l等於$\frac{l}{4}$. 繪其圖線.

(Edwards, Calculus)

答：$f(x)=\frac{1}{6}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^2}\cos\frac{p\pi}{2}-\frac{2}{\pi p^2}\sin\frac{p\pi}{2}\right)\cos\frac{p\pi x}{l}$

12. 設於 $-\pi<x<0$ 等於定量 $-H$ 而於 $0<x<\pi$ 等於 $+H$ 之伏氏級數,試就此級數論基氏現象之理.

繼取 $H=\frac{\pi}{2}$ 而討論級數前部止於 $\sin 3x$ 項與止於 $\sin 7x$ 項之和 $y=S_3(x)$ 與 $y=S_7(x)$. 於 $(0, \pi)$ 間繪出其圖線而以與基氏現象理所預示吾等之結果比較之.

(吾等知函數 $\sin x/x$ 自 0 至 π 之定積分等於 1.8519, 而其自 0 至 2π 之定積分等於 1.418.)

(G. Julia, Ex. d'Analyse).

13. 凡異於零之連續函數不能有恆等於零之伏氏級數.

演證步驟: 命 a, b 爲 0 與 π 間之二數而於 (a, b) 隔間內設 $f(x)>m>0$, 並命

$$\psi=1+\cos\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\cos\frac{a-b}{2}.$$

繼求證積分 $\int_0^{2\pi} f(x)\psi^n\,dx$ 無論如何不能爲零. (見 Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, p. 37.)

由是可推斷相異之二連續函數不能有同一伏氏級數; 因之若連續函數 $f(x)$ 所產生之伏氏級數爲一致收斂, 則此級數之和即等於 $f(x)$.

中 西 索 引

七畫

八畫

九畫

十畫

十一畫

十二畫

十三畫

十四畫

十五畫

十六畫

十七畫

十八畫

二十畫

二十三畫

二十八畫

中 西 索 引

M

N

O

P

R

S

T

高等算學分析勘誤表

(行數前置 – 號者應自下而上計算)

頁數	行數	誤	正
序1	1	伯萊	萊伯
目錄4	1	動	運
本文2	8	視 q 爲	視 p 爲
5	4	$r_1+\varepsilon$	$a_1+\varepsilon$
7	11	$\Sigma\frac{1}{n\lambda}$	$\Sigma\frac{1}{n^\lambda}$
8	−8	形爲	形如
8	−7	$b'-a'.$	$b'-a',$
11	1	係	系
12	−3	數集 M	數集 (E)
19	−9	連續函數. $y=f(x)$	連續函數 $y=f(x)$
21	−10		此行應與 −9 行相連
22	6	$\vert f(x')-(x'')-<\frac{\varepsilon}{2}$	$\vert f(x')-f(x'')\vert<\frac{\varepsilon}{2}$
23	4	$f(x)=0$	$F(x)=0$
24	1	於確定	爲確定
32	5	C_n	c_n
36	−6	斷續點	間斷點
46	12		此行應與 13 行相連
47	1		此行應與 2 行相連
51	−7	du	dU
51	−5	du	dV
53	−4	$X, \cdot, Z$	$x, y, z,$

頁數	行數	誤	正
55	−7	=	+
56	5	代全微分	代以全微分
57	3	$dv=e^{x}(dx+dy)$	$dv=e^{x+y}(dx+dy)$
66	−7	b	h
68	7	併	并
68	−2	$u_1=\sqrt[n]{x\sqrt[q]{x}}$	$u_1=\sqrt[n]{x\sqrt[q]{x}}$
73	−5	z	Z
74	−8	$<\leqq_0+h$	$\leqq y_0+h$
74	−8	v_0+h	y_0-h
74	−7	則有 (4) 式	則由 (4) 式
78	9	經緯標	位標
79	11	等	級
80	7	$2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2\partial y}y'$	$2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'$
80	−3	$2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}$	$2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$
80	−2	$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$
80	−1	$\frac{\partial^2 F}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$	$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$
89	1	反面	反函數
94	−9	(28)	(29)
96	1	行列式下右角脫落 x	
116	8	$e^{xy}[\sec(x, y)]^{\frac{1}{2}}=0$	$e^{xy}[\sec(x-y)]^{\frac{1}{2}}=0$
118	−4	$y\frac{1}{v}$	$y=\frac{1}{v}$
119	5	$\partial\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}$	$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}$

頁數	行數	誤	正
120	1	$\frac{\partial x_i}{\partial x_k}-\frac{\partial x_k}{\partial x_i}$	$\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}$
120	6	$\frac{\partial y_i}{\partial y_k}-\frac{\partial y_k}{\partial y_i}$	$\frac{\partial Y_i}{\partial Y_k}-\frac{\partial Y_k}{\partial Y_i}$
156	3	$-3x^2y^2$	$-3x^2y$
156	−6	$\Sigma x_i=313\frac{x_1}{2}=$	$\Sigma x_i=313,\ \frac{x_1}{2}=$
158	−3	$\int\cos x\,dx$	$\int\cot x\,dx$
162	−2	第二積分中 ddt	dt
169	7	積分號應刪去	
177	−5	$p=\frac{\lambda}{\mu}$	$q=\frac{\lambda}{\mu}$
199	3	xdx	x^2dx
199	4	$(x-a)(x-b)^2$	$(x-a)(x-b)$
199	−11	$\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x}$	$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}$
200	9	$\sqrt{-x^2}$	$\sqrt{1-x^2}$
204	−5		此行應與 −4 行相連
209	−2	$(x)\phi(x)$	$f(x)\phi(x)$
218	−5	$\sin\omega_{i+1}-\omega_i)$	$\sin(\omega_{i+1}-\omega_i)$
220	−8	x_i-x_{i-1}	t_i-t_{i-1}
224	11	$l'-l<-\frac{\varepsilon}{2}$	$l'-l<\frac{\varepsilon}{2}$
224	11	$l'>S-\frac{\varepsilon}{2}$	$l'>s-\frac{\varepsilon}{2}$
224	11	$S-l<\varepsilon$	$s-l<\varepsilon$
231	−7	$\left(0,\ \frac{\pi}{1}\right)$	$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$
259	−5	p 與 n 之齊次式	p 與 n 之 −1 級齊次式

頁 數	行 數	誤	正
241	6	分橢圓面積	分方程式列於下之橢圓面積
246	3	$>\frac{1}{x^2}$	$<\frac{1}{x^2}$
268	8	$\leqq y \leqq d$	$c \leqq y \leqq d$
271	7	$v_0 \leqq a$	$a_0 \leqq a$
273	3	$\lvert a \rvert = 0$	$\lvert a \rvert = 1$
276	-1	第二積分中 $\log(\log x)^{\lambda}$	$\log x(\log_2 x)^{\lambda}$
276	-1	第三積分中 $(\log)^{\lambda}$	$(\log_3 x)^{\lambda}$
278	15		答應寫爲 $\beta-a+\sin(\beta-a)$ $\left[\cos(\beta-a)-\frac{\cos^2 a+\cos^2\beta}{\cos a \cos\beta}\right]$
280	1	dx	dz
293	3	$\frac{\partial a}{\partial u}=\frac{\partial P}{\partial v}$	$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}$
297	4	$z \quad X$	$x=X$
298	11	吾可等	吾等可
299	5	D	A
300	-4	xy	yz
310	-6, -7, -8,	所有 I 均應改作 l	
322	11	布於拋物線	布於下列拋物線
348	-9	$(1+kx^2)$	$(1+kx^2)dy$
349	-8	$U(x\cos a+y\cos\beta+V\cos\gamma$	$U(x\cos a+y\cos\beta)+V\cos\gamma$
351	-3	$\int_l^1 x^{a-1}e^{-x}dx$	$\int_1^l x^{a-1}e^{-x}dx$
354	-8	$x=1$ 及 $y=1$ $(1>0)$	$x=l$ 及 $y=l$ $(l>0)$
354	-5	$1\to\infty$	$l\to\infty$
359	-8	(11)	(12)

頁　數	行　數	誤	正
366	-8	m^x	m^{a-1}
366	-6	$m+1$	$a+1$
366	-4	n^a	m^a
367	7	$\int \log a$	$\int \log a da$
367	9	$I(a)=\int_0^1 \log \Gamma(x) dz$	$I(0)=\int_0^1 \log \Gamma(x) dx$
367	11	$\int_0^{\frac{1}{2}} [\log \Gamma(x)+\log \Gamma(1-x)]$	$\int_0^{\frac{1}{2}} [\log \Gamma(x)+\log \Gamma(1-x)] dx$
378	8	$f(u) du$	$f(a) du$
380	-8	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1 d}$	$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1}$
383	-9	$d\delta y=\delta dx$	$d\delta y=\delta dy$
389	5	$Z=\frac{dZ'}{dx}$	$Z-\frac{dZ'}{dx}$
389	-3	$X' \delta d X$	$X' \delta dx$
392	-6	$\frac{\partial z'}{\partial x}$	$\frac{dZ'}{dx}$
395	9	問題	202 問題 II
397	4	302	203
400	-1	δk	δK
410	-1	dy	dv
411	-3	dy	dv
418	-1	$\phi(x)<\phi(a+p)$	$\phi(x)>\phi(a+p)$
419	1	$<$	$>$
419	-6	$\lambda<1$	$\lambda>1$
427	5	(11)	(12)
427	5	(10)	(11)

頁 數	行 數	誤	正
427	8	(9) (12) 與 (13)	(10) (14) 與 (15)
429	3	(15)	(17)
432	7, −10	(16)	(19)
432	7,8, −8,	(16)	(18)
432	−10	(17)	(20)
432	−8	(19)	(21)
434	9, 11, −9	(20)	(22)
434	9, 11	(21)	(23)
434	9	(22)	(24)
435	2	(21)	(23)
437	3	(23)	(25)
444	5	$\|u_0\|<U_n$	$\|v_n\|<V_n$
450	−10	$2^k a_2 k$	$2^k a_{2k}$
451	−10	$(1+q^{2n})$	$(1+q^{2^n})$
452	2	$Q_3=\Pi(1+q^{2n-1})$	$Q_3=\Pi(1+q^{2n-2})$
452	−5	$\Pi(1+u_n(x)$	$\Pi(1+u_n(x))$
454	1	$\Sigma\frac{1}{n}x^n$	$\Sigma\frac{1}{n^2}x^n$
463	−4	之 $f(x)$	爲 $f(x)$ 之
473	−4	$(-x)p$	$(-x)^p$
474	−2	級數	級數 (40)
475	3	爲	卽
475	4	各級	各項
480	9	整，數	整數，
480	−8	$\frac{1}{567}$	$\frac{1}{5.6.7}$

頁 數	行 數	誤	正
480	−8	$\frac{1}{(4n+1)(4n+2)\cdots\cdots(4n+3)}$	$\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$
484	−2, −4	a^0	a_0
500	9	mk	m_k
索引 511	五畫	删去(法文) 改 Rectufiable 爲 Rectifiable	