

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 58

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 58.1. Überprüfe das sogenannte Geburtstagsparadoxon anhand der anwesenden Personen. Das Geburtstagsparadoxon besagt, dass unter relativ wenig Leuten überraschend oft zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Bei 23 Leuten beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür schon 50%, bei 50 Personen sogar 97%.

Übungsaufgaben

AUFGABE 58.2. Die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ sei mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(a) = \frac{1}{3}, P(b) = \frac{1}{4}, P(c) = \frac{1}{5}, P(d) = \frac{13}{60}$$

versehen. Es sei $B = \{a, c, d\}$ und $E = \{a, b, d\}$. Bestimme die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|B)$.

AUFGABE 58.3. Eine faire Münze wird elfmal geworfen. Es sei B das Ereignis, dass bei den ersten zehn Würfeln stets Kopf geworfen wird. Es sei E_i das Ereignis, dass beim i -ten Wurf Kopf geworfen wird. Bestimme

$$P(E_i|B)$$

für $i = 1, \dots, 11$.

AUFGABE 58.4. Fredo verfolgt die Ziehung der Lottozahlen. Die bisher gezogenen drei Zahlen kommen auf seinem Zettel vor, drei Richtige hat er also schon mal sicher. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sechs Richtige hat?

AUFGABE 58.5. Fredo verfolgt die Ziehung der Lottozahlen. Die bisher gezogenen fünf Zahlen kommen auf seinem Zettel vor, fünf Richtige hat er also schon mal sicher. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sechs Richtige hat?

AUFGABE 58.6. Fredo erfährt, dass er beim Lotto sechs Richtige hat. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahlen genau in der Reihenfolge gezogen wurden, wie er sie angekreuzt hatte?

AUFGABE 58.7. Es sei $B \subseteq M$ eine Teilmenge eines endlichen Wahrscheinlichkeitsraumes M mit positiver Wahrscheinlichkeit. Es sei E ein weiteres Ereignis und es gelte

$$P(E|B) \leq P(E).$$

zeige, dass dann

$$P(E|M \setminus B) \geq P(E)$$

gilt.

AUFGABE 58.8. Es sei M ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $x \in M$ ein Element mit einer positiven Wahrscheinlichkeit. Zeige

$$P(E|\{x\}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E, \\ 0, & \text{falls } x \notin E. \end{cases}$$

AUFGABE 58.9.*

In einem Kurs nehmen n Personen teil. Für die Person i ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Klausur durchzufallen, gleich q_i . Es wird eine Klausur und eine Nachklausur geschrieben, wobei sich diese Wahrscheinlichkeiten nicht ändern.

- (1) Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in der ersten Klausur durchfällt, gleich $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i$ ist.
- (2) Die Nachklausur schreiben nur die Personen mit, die in der ersten Klausur durchgefallen sind. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus diesem Personenkreis zufällig ausgewählte Person bei der zweiten Klausur ebenfalls durchfällt, gleich $\frac{\sum_{i=1}^n q_i^2}{\sum_{i=1}^n q_i}$ ist.
- (3) Zeige, dass die unter (2) berechnete Wahrscheinlichkeit größergleich der unter (1) berechneten Wahrscheinlichkeit ist.

AUFGABE 58.10. In der Bevölkerung ist ein Virus im Umlauf, und es gibt einen Test für den Virus, der allerdings nicht absolut sicher ist. Wenn jemand den Virus hat, so erkennt der Test dies zu 98%. Wenn jemand den Virus nicht hat, so erkennt der Test dies zu 99%. Die Wahrscheinlichkeit, den Virus zu haben, beträgt 0,1%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Virus hat, obwohl der Test ihn nicht erkannt hat?

AUFGABE 58.11. In der Bevölkerung ist ein Virus im Umlauf, und es gibt einen Test für den Virus, der allerdings nicht absolut sicher ist. Wenn jemand den Virus hat, so erkennt der Test dies zu 95%. Wenn jemand den Virus nicht hat, so erkennt der Test dies zu 99,5%. Die Wahrscheinlichkeit, den Virus zu haben, beträgt 0,05%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Virus hat, wenn der Test ihn diagnostiziert?

AUFGABE 58.12.*

Es sei M ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A, B \subseteq M$ Ereignisse mit $P(A \cap B) \neq 0$ und mit $P(A), P(B) < 1$. Zeige

$$\frac{P(B|A)}{P(M \setminus B|A)} = \frac{P(B)}{P(M \setminus B)} \cdot \frac{P(A|B)}{P(A|M \setminus B)}.$$

AUFGABE 58.13. Ein Aufschrei geht durch die sozialen Medien: An der Tanzhochschule „Parkettschwingungen“ haben sich 1000 Frauen und 1000 Männer für die beiden Fächer Ausdruckstanz und Choreographie beworben, dabei bekamen 760 Frauen einen Studienplatz, aber nur 710 Männer. Die Tanzbegabungen und sonstige Zeugnisse waren bei allen Bewerbern und Bewerberinnen sehr gut. Ein klarer Fall: Diese Schule diskriminiert Männer!

Lässt sich dieser Vorwurf angesichts der folgenden Tabelle, die die genauere Information entlang der beiden einzelnen Fächer beinhaltet, aufrecht erhalten?

	Bew. M.	Bew. F.	Ang. M	Ang. F	Quote M.	Quote F.
Ausdr.	900	200	630	136	70%	68%
Chor.	100	800	80	624	80%	78%
Ges.	1000	1000	710	760	71%	76%

AUFGABE 58.14. Erläutere die Beobachtungen in Aufgabe 58.13 mit dem Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 58.15. (2 Punkte)

Die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ sei mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(a) = \frac{1}{5}, P(b) = \frac{1}{4}, P(c) = \frac{1}{10}, P(d) = \frac{9}{50}, P(e) = \frac{4}{25}, P(f) = \frac{11}{100}$$

versehen. Es sei $B = \{a, b, c, d\}$ und $E = \{a, d, f\}$. Bestimme die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E|B)$.

AUFGABE 58.16. (2 Punkte)

Es sei M ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und es seien B_1, B_2, \dots, B_n Ereignisse, deren Gesamtdurchschnitt eine positive Wahrscheinlichkeit besitzt. Zeige

$$\begin{aligned} & P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \\ = & P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot P(B_3|B_1 \cap B_2) \cdots P(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}). \end{aligned}$$

AUFGABE 58.17. (3 Punkte)

In der Bevölkerung ist ein Virus im Umlauf, und es gibt einen Test für den Virus, der allerdings nicht absolut sicher ist. Wenn jemand den Virus hat, so erkennt der Test dies zu 99,5%. Wenn jemand den Virus nicht hat, so erkennt der Test dies zu 99,9%. Die Wahrscheinlichkeit, den Virus zu haben, beträgt 0,01%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Virus hat, wenn der Test ihn diagnostiziert?

AUFGABE 58.18. (3 (1+1+1) Punkte)

Ein gestaffelter Eignungstest ist in drei Runden aufgebaut, wobei man die vorhergehende Runde überstehen muss, um in die nächste Runde zu gelangen. Die erste Runde überstehen 10%, die zweite Runde überstehen 20% und die dritte Runde überstehen 15%.

- (1) Beschreibe diese Daten mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit.
- (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Erstrundenteilnehmer alle drei Runden?
- (3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Zweitrundenteilnehmer alle drei Runden?