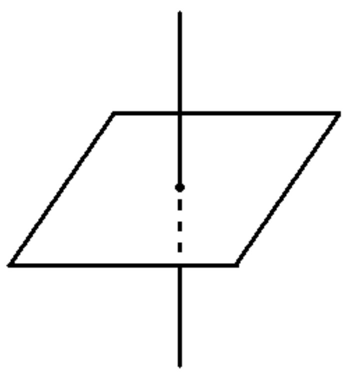
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 2

Aufgaben

Aufgabe 2.1. Finde ein Ideal, dessen Nullstellenmenge das folgende Gebilde ist.



Aufgabe 2.2. Skizziere die reellen Nullstellengebilde von $Y^n - X^n$ und bestimme das Verschwindungsideal zu den affin-algebraischen Mengen $V_n \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, die aus allen Geraden durch den Nullpunkt und durch die Eckpunkte eines regulären n-Ecks (mit $(1,0)$ als einem Eck) besteht.

Aufgabe 2.3. Es sei

$$V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$$

eine affin-algebraische Menge. Zeige, dass unter der Identifizierung

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

die Teilmenge V auch eine affin-algebraische Menge des $\mathbb{A}^{2n}_{\mathbb{R}}$ ist. Zeige, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 2.4. Eine wichtige Möglichkeit, eine Anschauung für eine gegebene ebene affin-algebraische Kurve

$$V = V(f) \subset \mathbb{A}_K^2$$

zu entwickeln, ist es, die Schnitte von V mit der Geradenschar $V(X-c)$, $c \in K$, zu betrachten. Diese Schnitte sind eine endliche Ansammlung von Punkten auf der Geraden oder aber (das ist ein Ausnahmefall) die volle Gerade. Diese Punktemengen variieren mit dem Parameter c. Man kann sich also eine ebene Kurve als eine variierende Familie von nulldimensionalen Objekten vorstellen. Versuche diesen Ansatz anhand einiger Beispiele (für $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) durchzuführen.

Aufgabe 2.5. Eine wichtige Möglichkeit, eine Anschauung für eine gegebene affin-algebraische Menge

$$V = V(f_1, \ldots, f_m) \subset \mathbb{A}_K^n$$

zu entwickeln, ist es, die Schnitte von V mit der Hyperebenenschar $V(X-c)$, $c \in K$, zu betrachten. Diese Schnitte sind affin-algebraische Mengen, die in einer kleineren Dimension leben, und mit dem Parameter c variieren. Man kann sich also beispielsweise eine affin-algebraische Fläche $V(f) \subseteq \mathbb{A}_K^3$ als eine variierende Familie von ebenen algebraischen Kurven vorstellen. Versuche diesen Ansatz anhand einiger Beispiele (für $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) durchzuführen, beispielsweise für den Doppelkegel.

Aufgabe 2.6. Es seien

$$V = V(f_1, \ldots, f_s) \subseteq \mathbb{A}_K^m$$

mit $f_1, \ldots, f_s \in K[X_1, \ldots, X_m]$ und

$$W = V(g_1, \ldots, g_t) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

mit $g_1, \ldots, g_t \in K[Y_1, \ldots, Y_n]$ affin-algebraische Teilmengen. Zeige, dass die Produktmenge

$$V \times W \subseteq \mathbb{A}_K^m \times \mathbb{A}_K^n = \mathbb{A}_K^{m+n}$$

ebenfalls affin-algebraisch ist, und zwar von den Polynomen

$$f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \in K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$$

bestimmt wird.

Aufgabe 2.7.*

Es seien

$$V = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

und

$$W = V(g_1, \ldots, g_\ell) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

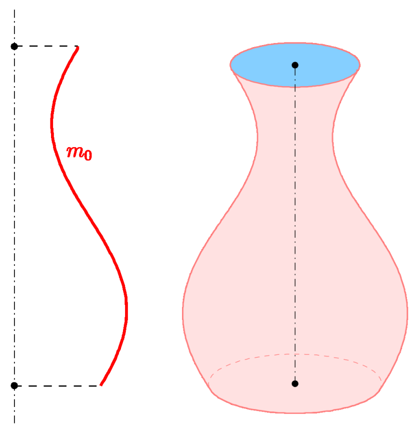
affin-algebraische Teilmengen. Zeige, dass es eine affin-algebraische Menge im $\mathbb{A}_K^{n+1}$ gibt, die die disjunkte Vereinigung der beiden Mengen ist.

Aufgabe 2.8. Es sei $V \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ eine affin-algebraische Menge und

$$U := \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \setminus V$$

das offene Komplement. Zeige, dass U in der metrischen Topologie wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2.9. Zeige, dass eine ebene algebraische Kurve über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ nicht kompakt in der metrischen Topologie ist.



Wenn man die rote Kurve um die y-Achse rotieren lässt, entsteht die Vasenoberfläche. Wenn die Kurve algebraisch ist, so ist auch die Fläche algebraisch.

Wir erinnern an die Definition einer Rotationsmenge.

Zu einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennt man

$$\left\{ (x, y \cos \alpha, y \sin \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \, (x,y) \in T, \ \alpha \in [0, 2\pi] \right\}$$

die zugehörige *Rotationsmenge* (um die x-Achse).

Aufgabe 2.10. Es sei $V = V(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine reelle ebene algebraische Kurve, die durch das Polynom $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ definiert werde. Zeige, dass die zugehörige Rotationsfläche, die im $\mathbb{R}^3$ durch Rotation um die x-Achse entsteht, als Nullstellenmenge zu einem Polynom aus $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ beschrieben werden kann.

Man untersuche zuerst den Fall, dass y in f nur mit geradzahligen Exponenten vorkommt.

Aufgabe 2.11. Man finde jeweils eine polynomiale Gleichung in drei Variablen, die die Rotationsflächen um die x-Achse zu den folgenden algebraischen Kurven

$$V = V(f) \subset \mathbb{R}^2$$

beschreibt. Skizziere die Situation.

(1) $V(X-1)$,
(2) $V(X^2+Y^2-1)$,
(3) $V(X-Y^2)$,
(4) $V(X^2-Y^2)$,
(5) $V(X^3+Y^2)$,
(6) $V(X^2+X^3+Y^2)$.

Bestimme die singulären Punkte und die singulären Punkte der Rotationsflächen.

Aufgabe 2.12. Man finde jeweils eine polynomiale Gleichung in drei Variablen, die die Rotationsflächen um die x-Achse zu den folgenden algebraischen Kurven

$$V = V(f) \subset \mathbb{R}^2$$

beschreibt. Skizziere die Situation.

(1) $V(Y-1)$,
(2) $V(XY)$,
(3) $V(Y-X)$,
(4) $V(Y-X^2)$,
(5) $V(Y-X^2+1)$,
(6) $V(X^2+Y^3)$,
(7) $V(X^2+Y^3+Y^2)$.

Bestimme die singulären Punkte und die singulären Punkte der Rotationsflächen.

Aufgabe 2.13. Zeige, dass die offenen und die abgeschlossenen Bälle $U(P,r)$ bzw. $B(P,r)$ im $\mathbb{R}^n$ zu $r > 0$ nicht offen bzw. abgeschlossen in der Zariski-Topologie sind.

Aufgabe 2.14. Es sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass jede nichtleere Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}_K^n$ dicht ist.

Aufgabe 2.15. Es sei K ein Körper.

(1) Man zeige, dass für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ die Standardtopologie (die metrische oder euklidische Topologie) feiner ist als die Zariski-Topologie.
(2) Man zeige, dass für $K[X]$ die Zariski-Topologie mit der kofiniten Topologie übereinstimmt. Gilt dies auch für $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $n > 1$?
(3) Wann ist die Zariski-Topologie T_1, wann ist sie hausdorffsch?
(4) Wie sieht die Zariski-Topologie aus, wenn K ein endlicher Körper ist?

AUFGABE 2.16. Es sei $F \neq 0$ ein Polynom in n Variablen über $\mathbb{R}$ und es sei

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

die Nullstellenmenge des Polynoms. Zeige

$$\lambda^n(T) = 0.$$

AUFGABE 2.17. Sei

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m$$

eine Abbildung, die durch m Polynome in n Variablen gegeben sei. Zeige, dass φ stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist.

AUFGABE 2.18. Man beschreibe eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,$$

die bezüglich der Zariski-Topologie stetig ist, die aber nicht durch ein Polynom gegeben ist.

AUFGABE 2.19. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Beweise den folgenden Spezialfall des Hilbertschen Nullstellensatzes direkt: Wenn $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ keine Nullstelle im K^n besitzt, so ist f ein (von 0 verschiedenes) konstantes Polynom.

AUFGABE 2.20.*

Wir betrachten die beiden Polynome X^2+Y^2 und X^2-Y^3 und die zugehörigen algebraischen Kurven über den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

(1) Gilt $V(X^2+Y^2) \subseteq V(X^2-Y^3)$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$?
(2) Gilt $V(X^2+Y^2) \subseteq V(X^2-Y^3)$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$?
(3) Gehört X^2-Y^3 zum Radikal von (X^2+Y^2) in $\mathbb{R}[X,Y]$?
(4) Gehört X^2-Y^3 zum Radikal von (X^2+Y^2) in $\mathbb{C}[X,Y]$?

Aufgabe 2.21. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Beweise den Hilbertschen Nullstellensatz direkt für den Polynomring in einer Variablen.

Ein Ideal $\mathfrak{m}$ in einem kommutativen Ring R heißt *maximales Ideal*, wenn $\mathfrak{m} \neq R$ ist und wenn es zwischen $\mathfrak{m}$ und R keine weiteren Ideale gibt.

Aufgabe 2.22. Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal in R. Zeige, dass I genau dann ein maximales Ideal ist, wenn der Restklassenring R/I ein Körper ist.

Aufgabe 2.23. Zeige, dass zu einem Punkt $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$ das zugehörige Ideal

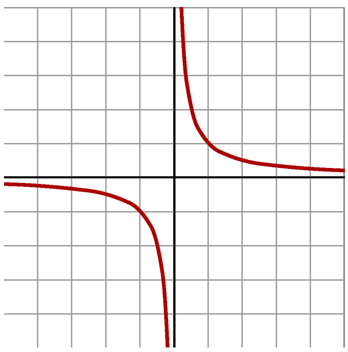
$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)$$

maximal ist.

Aufgabe 2.24.*

Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ genau dann ein Primideal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 2.25. Bestimme die irreduziblen Komponenten der reellen Hyperbel.



Aufgabe 2.26. Sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Begründe, ob

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$$

irreduzibel ist oder nicht.

Aufgabe 2.27. Zeige, dass das reelle Polynom
$$P = X^2(X-1)^2 + Y^2\left(X^2 + (X-1)^2\right) \in \mathbb{R}[X,Y]$$
ein Primpolynom ist, und dass die Nullstellenmenge
$$V(P) \subseteq \mathbb{R}^2$$
nicht leer, aber reduzibel ist.

Aufgabe 2.28. Berechne in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ den Schnitt des Zylinders $V(x^2+y^2-1)$ mit der Kugel mit Mittelpunkt $P=(0,0,0)$ und Radius r in Abhängigkeit von r. Wann ist der Durchschnitt leer, wann irreduzibel?

Aufgabe 2.29. Betrachte die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie. Ist $\mathbb{R}$ irreduzibel?

Aufgabe 2.30. Zeige, dass ein metrischer Raum X nur dann irreduzibel ist, wenn er einpunktig ist.

Aufgabe 2.31. Zeige, dass die folgenden K-Algebren zueinander isomorph sind.

(1) Der Produktring $K \times K \times K$.
(2) Der Restklassenring $K[X]/(X^3 - X)$.
(3) Der Restklassenring $K[X,Y]/(X,Y) \cdot (X-1, Y-1) \cdot (X, Y-7)$.

Aufgabe 2.32. Sei K ein Körper und seien $P_1, \ldots, P_n$ endlich viele Punkte in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2_K$. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ beliebig vorgegebene Werte. Zeige, dass es ein Polynom $F \in K[X,Y]$ mit $F(P_i) = a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gibt.

Aufgabe 2.33. Bestimme den Koordinatenring zu einer affin-algebraischen Menge $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$, die aus d Punkten besteht.

Aufgabe 2.34. Bestimme den Koordinatenring zur affin-algebraischen Menge $V = V(5X - 8Y + 3) \subseteq \mathbb{A}^2_K$.

Aufgabe 2.35. Sei K ein unendlicher Körper und sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von 0 verschiedenes Polynom. Zeige, dass dann die zugehörige Polynomfunktion
$$F\colon K^n \longrightarrow K,\ (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto F(a_1, \ldots, a_n),$$
nicht die Nullfunktion ist.

Aufgabe 2.36.*

Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine irreduzible affin-algebraische Menge mit Verschwindungsideal $\operatorname{Id}(V)$. Zeige, dass $\operatorname{Id}(V)$ ein Primideal ist.

Aufgabe 2.37. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Radikal mit dem zugehörigen Restklassenring $R = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$, der der Koordinatenring zu $V = V(\mathfrak{a})$ ist. Zeige, dass die irreduziblen Komponenten von V den minimalen Primidealen von R entsprechen.

Aufgabe 2.38.*

Man gebe ein Beispiel für eine polynomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

derart, dass das Urbild von einem Punkt reduzibel ist, das Urbild von allen anderen Punkten aber irreduzibel.

Aufgabe 2.39. Wir betrachten die beiden algebraischen Kurven

$$V(x^2 + y^2 - 2) \text{ und } V(x^2 + 2y^2 - 1)$$

über dem Körper $\mathbb{Z}/(7)$. Zeige, dass der Durchschnitt leer ist, und finde einen Erweiterungskörper $K \supseteq \mathbb{Z}/(7)$, über dem der Durchschnitt nicht leer ist. Berechne alle Punkte im Durchschnitt über K und über jedem anderen Erweiterungskörper. Man beschreibe auch den Koordinatenring des Durchschnitts.

Abbildungsverzeichnis