Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 56

Übungsaufgaben

Aufgabe 56.1. Formuliere und beweise den „Satz über die surjektive Abbildung“.

Aufgabe 56.2.*

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (s,t) \longmapsto (s, -s-t^2, t^3) = (x,y,z).$$

a) Erstelle die Jacobi-Matrix von φ.

b) Bestimme die regulären Punkte (s,t) von φ.

c) Zeige, dass $\varphi(s,t)$ die Bedingung

$$(x+y)^3 + z^2 = 0$$

erfüllt.

d) Zeige, dass die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 56.3.*

Es sei

$$U = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \{(2,4),(4,2)\}.$$

Begründe, ob die Abbildung

$$\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (x,y) \longmapsto (x+y, xy, x^y) = (u,v,w).$$

injektiv ist oder nicht.

Aufgabe 56.4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\, (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Wenn f (als Abbildung) Lipschitz-stetig ist, so genügt das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung.

b) Wenn das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt, so sind für jedes feste $t \in I$ die Abbildungen

$$U \longrightarrow V,\, v \longmapsto f(t,v),$$

Lipschitz-stetig.

c) Man gebe Beispiele, die zeigen, dass die Implikationen aus a) und b) nicht umkehrbar sind.

Aufgabe 56.5. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $x \in M$ konvergiert. Es sei T eine Menge und es seien

$$f_n \colon T \longrightarrow M,\, t \longmapsto f_n(t) = x_n,$$

die zu x_n gehörenden konstanten Funktionen. Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion

$$f \colon T \longrightarrow M,\, t \longmapsto f(t) = x,$$

konvergiert.

Aufgabe 56.6. Es sei T eine endliche Menge und

$$f_n \colon T \longrightarrow X$$

eine Abbildungsfolge in einen metrischen Raum X. Zeige, dass diese Folge genau dann punktweise konvergiert, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 56.7. Sei (Y, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq Y$ eine Teilmenge. Es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \overline{T}$ und

$$g_n \colon \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen. Zeige, dass diese Folge genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn die auf T eingeschränkte Folge $f_n = g_n|_T$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 56.8. Sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $M = \operatorname{Abb}(T, E)$ versehen mit der Supremumsnorm. Beweise die folgenden Eigenschaften für diese „Norm“ (dabei ist der Wert ∞ erlaubt und sinnvoll zu interpretieren).

(1) $\| f \| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $\| f \| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt

$$\| \lambda f \| = |\lambda| \cdot \| f \| .$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$\| g + f \| \leq \| g \| + \| f \| .$$

Aufgabe 56.9. Es sei

$$C = C^0([0,1], \mathbb{R})$$

die Menge der stetigen Funktionen, die mit der Supremumsnorm versehen sei. Skizziere zu $\epsilon > 0$ die offene und die abgeschlossene ϵ-Umgebung von einem $f \in C$.

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|-\|\colon V \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto \|v\|,$$

heißt *Norm*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle $v, w \in V$ gelten.

(1) $\|v\| \geq 0$.
(2) $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

(4) Für $v, w \in V$ gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Die Norm zu einem Skalarprodukt erfüllt diese Eigenschaften.

Aufgabe 56.10. Es sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei

$$M = \{f : T \to E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E. Zeige, dass die Supremumsnorm auf M eine Norm ist.

Aufgabe 56.11. Zeige, dass ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum durch

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

zu einem metrischen Raum wird.

Aufgabe 56.12. Es sei T eine Menge, E ein euklidischer Vektorraum und

$$M = \{f : T \to E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E. Zeige, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M genau dann gegen $f \in M$ gleichmäßig konvergiert, wenn diese Folge im durch die Supremumsnorm gegebenen metrischen Raum M konvergiert.

Aufgabe 56.13. Es seien L und M metrische Räume. Zeige, dass die Menge C der stetigen Abbildungen von L nach M durch

$$d(f, g) := \min\left(\sup\left(d(f(x), g(x)), x \in L\right), 1\right)$$

zu einem metrischen Raum wird.

Aufgabe 56.14. Es seien L und M metrische Räume, wobei M vollständig sei. Zeige, dass die Menge C der stetigen Abbildungen von L nach M durch

$$d(f, g) := \min\left(\sup\left(d(f(x), g(x)), x \in L\right), 1\right)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

Aufgabe 56.15.*

Sei

$$b \geq 1 \geq a > 0$$

fixiert und sei

$$M = \{f : [a,b] \to [a,b] \mid f \text{ stetig}\}.$$

a) Zeige, dass die Abbildung

$$H\colon M \longrightarrow M,\ f \longmapsto H(f) = \sqrt{f},$$

wohldefiniert ist.

b) Sei nun zusätzlich $a > \frac{1}{4}$. Zeige, dass die Abbildung H aus a) eine starke Kontraktion ist (wobei M mit der Maximumsnorm versehen sei).

c) Zeige, dass M durch die Maximumsnorm ein vollständiger metrischer Raum wird.

d) Bestimme den Fixpunkt von H.

Aufgabe 56.16. Sei

$$f\colon I \times U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld, das auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in I$ und $P \in U \cap W$ die Beziehung $f(t,P) \in W$ gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t,v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in W verläuft.

Aufgabe 56.17. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y + 1 \text{ mit } y(0) = 0\,.$$

mit der Picard-Lindelöf-Iteration.

Aufgabe 56.18. Bestimme in Beispiel 56.7 eine explizite Formel für die Iterationen φ_n.

Aufgabe 56.19.*

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Aufgabe 56.20. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 2$ und $y(0) = -7$.

Aufgabe 56.21. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 56.22. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

Aufgabe 56.23. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(1) = (3,2,6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (t,x,y,z) \longmapsto\ & t^3(3,1,4) - e^{-2t}(2,-1,7) \\ & +(t - t^2e^t)(0,4,5) + (2,2,2). \end{aligned}$$

Aufgabe 56.24. (3 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 4$ und $y(0) = 5$.

Aufgabe 56.25. (4 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = 1$.

Aufgabe 56.26. (5 Punkte)

Es sei

$$\gamma\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine reguläre Kurve. Zeige, dass die Faser über jedem Punkt $c \in \mathbb{R}^n$ endlich ist.

Aufgabe 56.27. (6 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und

$$\varphi\colon\ G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung mit injektivem totalen Differential. Zeige, dass es eine offene Umgebung U von P mit $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \cap U = \{P\}$ gibt.

Tipp: Betrachte das totale Differential auf der Einheitssphäre. Der Satz über die injektive Abbildung ist hier nicht anwendbar.

Aufgabe 56.28. (4 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $C = C^0(T,E)$ der Raum der stetigen Abbildungen von T nach E, versehen mit der Supremumsnorm. Es seien $x_1, \ldots, x_n \in T$ und $y_1, \ldots, y_n \in E$ Punkte. Zeige, dass die Teilmenge

$$\{f \in C \mid f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n\}$$

abgeschlossen in C ist.

Aufgabe 56.29. (4 Punkte)

Es sei $M_k = ((a_{ij})_k)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Folge von reellen $m \times n$-Matrizen und

$$\varphi_k\colon\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die zugehörige Folge von linearen Abbildungen. Zeige, dass die Folgen der Einträge $(a_{ij})_k$ für alle i, j genau dann konvergieren, wenn die Folge der Abbildungen punktweise konvergiert.

Aufgabe 56.30. (4 Punkte)

Sei T eine Menge und

$$f_n\colon\ T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Folge von Abbildungen. Zeige, dass f_n genau dann gegen eine Grenzabbildung

$$f\colon\ T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

gleichmäßig konvergiert, wenn die Komponentenfunktionen $(f_i)_n$ gleichmäßig gegen f_i konvergieren.

Abbildungsverzeichnis