Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 26

> Man muß nur Ein Wesen
> recht von Grund aus lieben,
> da kommen einem die übrigen
> alle liebenswürdig vor!
>
> Johann Wolfgang von Goethe

Rang von Matrizen

DEFINITION 26.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Untervektorraums von K^m den *(Spalten-)Rang* der Matrix, geschrieben

$$\operatorname{rang} M .$$

LEMMA 26.2. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 26.21. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer $m \times n$-Matrix als die Dimension des von den Zeilen erzeugten Untervektorraumes von K^n ein.

LEMMA 26.3. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Wenn man M im Sinne von Satz 21.9 mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix M' in Stufenform transformiert, so ist der Rang gleich der Anzahl der relevanten Zeilen von M'.*

Beweis. Es sei r die Anzahl der relevanten Zeilen in der durch elementare Zeilenumformungen gewonnenen Matrix M' in Stufenform. Wir zeigen, dass diese Zahl sowohl mit dem Spaltenrang als auch mit dem Zeilenrang von M' und von M übereinstimmt. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Untervektorraum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang von M stimmt also mit dem Zeilenrang von M' überein. Diese Matrix hat den Zeilenrang r, da die ersten r Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang r, da die r Spalten, in denen eine neue Stufe auftritt, linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser r Spalten sind. Die Aufgabe 26.2 zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. $\square$

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom *Rang einer Matrix* sprechen werden.

KOROLLAR 26.4. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *M ist invertierbar.*
(2) *Der Rang von M ist n.*
(3) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spalten von M sind linear unabhängig.*

Beweis. Die Äquivalenz von (2), (3) und (4) folgt aus der Definition und aus Lemma 26.3. Für die Äquivalenz von (1) und (2) betrachten wir die durch M definierte lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^n.$$

Die Eigenschaft, dass der Spaltenrang gleich n ist, ist äquivalent zur Surjektivität der Abbildung, die aufgrund von Korollar 25.4 äquivalent zur Bijektivität der Abbildung ist. Die Bijektivität ist nach Lemma 25.11 äquivalent zur Invertierbarkeit der Matrix. $\square$

Determinanten

DEFINITION 26.5. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch

$$\det M = \begin{cases} a_{11}\,, & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

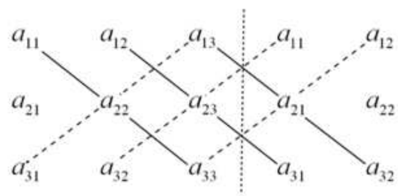
Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für kleine n kann man die Determinante einfach ausrechnen.

BEISPIEL 26.6. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$



Als Merkregel für eine 3×3-Matrix verwendet man die *Regel von Sarrus*. Man wiederholt die erste Spalte als vierte Spalte und die zweite Spalte als fünfte Spalte. Die Produkte der durchgezogenen Diagonalen werden positiv genommen, die Produkte der gestrichelten Diagonalen negativ.

Beispiel 26.7. Für eine 3×3-Matrix $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Dies nennt man die *Regel von Sarrus*.

Lemma 26.8. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n .$$

Insbesondere ist für die Einheitsmatrix $\det E_n = 1$.

Beweis. Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. $\square$

Multilinearität

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine „multilineare“ „alternierende“ Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\operatorname{Mat}_n(K) \cong (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das n-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix als ein Spaltentupel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

auf, wobei die einzelnen Einträge v_i Zeilenvektoren der Länge n sind.

Satz 26.9. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für je $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Satz 26.10. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann besitzt die Determinante*

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn in M zwei Zeilen übereinstimmen, so ist* $\det M = 0$. *D.h., dass die Determinante alternierend ist.*
(2) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich die Determinante mit dem Faktor -1.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

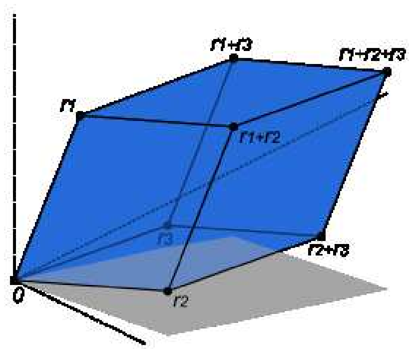
Satz 26.11. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1)
$$\det M \neq 0.$$
(2) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(3) *M ist invertierbar.*
(4)
$$\operatorname{rang} M = n.$$

Beweis. Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Korollar 26.4 gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschungen annehmen, dass $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i$ ist. Dann ist nach Satz 26.9 und Satz 26.10

$$\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von 0 verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinante der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. □



Bemerkung 26.12. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P := \{s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n \mid s_i \in [0, 1]\}.$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen“ Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\operatorname{vol} P \,=\, |\det(v_1, \ldots, v_n)|\,,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

Der Determinantenmultiplikationssatz und Folgerungen

Wir besprechen weitere wichtige Sätze über Determinanten, die wir aber nicht beweisen werden. Die Beweise beruhen auf einer systematischeren Untersuchung der für die Determinante charakteristischen Eigenschaften, multilinear und alternierend zu sein. Durch diese beiden Eigenschaften zusammen mit der Bedingung, dass die Determinante der Einheitsmatrix gleich 1 ist, ist die Determinante nämlich schon eindeutig festgelegt.

Satz 26.13. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung*

$$\det(A \circ B) \,=\, \det A \cdot \det B.$$

Definition 26.14. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die $n \times m$-Matrix

$$M^{\text{tr}} = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$

die *transponierte Matrix* zu M.

Die transponierte Matrix entsteht also, indem man die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} t & n & o & e \\ r & s & n & r \\ a & p & i & t \end{pmatrix}^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} t & r & a \\ n & s & p \\ o & n & i \\ e & r & t \end{pmatrix}.$$

Satz 26.15. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$\det M \,=\, \det M^{tr}.$$

Daraus folgt, dass man die Determinante auch berechnen kann, indem man „nach einer Zeile entwickelt“, wie die folgende Aussage zeigt.

Korollar 26.16. *Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)*

$$\det M \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}.$$

Beweis. Für $j = 1$ ist die erste Gleichung die rekursive Definition der Determinante. Daraus folgt die Aussage für $i = 1$ aufgrund von Satz 26.15. Durch Spalten- und Zeilenvertauschung folgt die Aussage daraus allgemein, siehe Aufgabe 26.12. □

Die Determinante einer linearen Abbildung

Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung eines Vektorraumes der Dimension n in sich. Diese wird bezüglich einer Basis durch eine Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ beschrieben. Es liegt nahe, die Determinante dieser Matrix als Determinante der linearen Abbildung zu definieren, doch hat man hier das *Problem der Wohldefiniertheit*: die lineare Abbildung wird bezüglich einer anderen Basis durch eine „völlig" andere Matrix beschrieben. Allerdings besteht zwischen den zwei beschreibenden Matrizen M und N und der Basiswechselmatrix B aufgrund von Korollar 25.9 die Beziehung $N = BMB^{-1}$. Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist daher

$$\begin{aligned} \det N &= \det \left(BMB^{-1}\right) \\ &= (\det B)(\det M)(\det B^{-1}) \\ &= (\det B)(\det B^{-1})(\det M) \\ &= \det M, \end{aligned}$$

so dass die folgende Definition in der Tat unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Definition 26.17. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man

$$\det \varphi := \det M$$

die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

Abbildungsverzeichnis