Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 36

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher“ zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f\colon L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum M durch den Abstand im Definitionsraum L kontrollierbar ist. Sei $x \in L$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x', die „nahe“ an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ „nahe“ an $f(x)$ sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“ (oder „Zieltoleranz“). Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit“ oder „Starttoleranz“) mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Definition 36.1. Seien (L, d_1) und (M, d_2) metrische Räume,

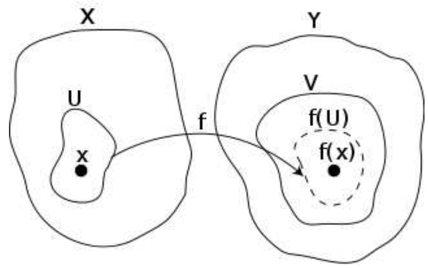
$$f\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung und $x \in L$. Die Abbildung f heißt *stetig in x*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass

$$f(B\,(x, \delta)) \subseteq B\,(f(x), \epsilon)$$

gilt. Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie stetig in x für jedes $x \in L$ ist.

Statt mit den abgeschlossenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den offenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion $T \subseteq M$ einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben. Bei $L = M = \mathbb{R}$ stimmt diese Definition mit der bisherigen überein.



Der folgende Satz heißt *Folgenkriterium* und ist eine direkte Verallgemeinerung von Lemma 10.5.

LEMMA 36.2. *Es sei*

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M und sei $x \in L$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig im Punkt x.*
(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x,x') \leq \delta$ folgt, dass*
$$d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$$
ist.
(3) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Sei nun (2) erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in L, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (2) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \delta$$

gilt. Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (3) erfüllt und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir nehmen an, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in L$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand größer als ϵ besitzt. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl n gibt es ein $x_n \in L$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenwerte zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (3). □

Satz 36.3. *Es sei*

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig in jedem Punkt $x \in L$.*
(2) *Für jeden Punkt $x \in L$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x,x') \leq \delta$ folgt, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist.*
(3) *Für jeden Punkt $x \in L$ und jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*
(4) *Für jede offene Menge $V \subseteq M$ ist auch das Urbild $f^{-1}(V) = \{x \in L \mid f(x) \in V\}$ offen.*

Beweis. Die Äquivalenz der ersten drei Formulierungen folgt direkt aus Lemma 36.2. Sei (1) erfüllt und eine offene Menge $V \subseteq M$ gegeben mit dem Urbild $U := f^{-1}(V)$. Sei $x \in U$ ein Punkt mit dem Bildpunkt $y = f(x) \in V$. Da V offen ist, gibt es nach Definition ein $\epsilon > 0$ mit $U(y,\epsilon) \subseteq V$. Nach (2) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U(x,\delta)) \subseteq U(y,\epsilon)$. Daher ist

$$x \in U(x,\delta) \subseteq U$$

und wir haben eine offene Ballumgebung von x innerhalb des Urbilds gefunden. Deshalb ist U offen. Sei (4) erfüllt und $x \in L$ mit $y = f(x)$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da der offene Ball $U(y,\epsilon)$ offen ist, ist wegen (4) auch das Urbild $f^{-1}(U(y,\epsilon))$ offen. Da x zu dieser Menge gehört, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$U(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U(y,\epsilon)),$$

so dass (1) erfüllt ist. □

Lemma 36.4. *Seien L, M, N metrische Räume und seien*

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

stetige Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig.

Beweis. Dies folgt am einfachsten aus der Charakterisierung von stetig mit offenen Mengen, siehe Satz 36.3. □

Verknüpfungen und stetige Abbildungen

Wir verwenden das Symbol $\mathbb{K}$ als gemeinsame Bezeichnung für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ existiert auf $\mathbb{C}$ eine Metrik, die durch den komplexen Betrag gegeben ist.

Lemma 36.5. *Die Negation*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto -x,$$

und die Inversenbildung

$$\mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\},\, x \longmapsto x^{-1},$$

sind stetig.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus

$$|-x - (-y)| = |-x + y|\,.$$

Zur zweiten Aussage sei $x \neq 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Sei $b = |x| > 0$. Wir setzen $\delta = \min\left(\frac{b^2\epsilon}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Dann gilt für jedes y mit $|x - y| \leq \delta$ die Abschätzung (wegen $|y| \geq b/2$)

$$\left|x^{-1} - y^{-1}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{|y-x|}{|x| \cdot |y|} \leq \frac{b^2\epsilon/2}{b^2/2} = \epsilon.$$

□

Lemma 36.6. *Die Addition*

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

sind stetig.

Beweis. Siehe Aufgabe 36.7. □

Lemma 36.7. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum und seien Funktionen*

$$f_i \colon M \longrightarrow \mathbb{K}$$

(für $i = 1, \ldots, m$) gegeben mit der zusammengesetzten Abbildung

$$f \colon M \longrightarrow \mathbb{K}^m,\, x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Dann ist f genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig sind.

Beweis. Es genügt, diese Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu zeigen. Dafür folgt sie direkt aus Lemma 35.13 unter Verwendung von Lemma 36.2. □

Beispiel 36.8. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*,[1] also die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Einer reellen Zahl t (im Bogenmaß) wird dabei der zugehörige Punkt auf dem Einheitskreis

$$S^1 \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\right\}$$

zugeordnet. Diese Abbildung ist periodisch mit der Periode 2π. Sie ist stetig, da die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus nach Satz 12.2 stetig sind und daraus nach Lemma 36.7 die Stetigkeit der Gesamtabbildung folgt.

Lemma 36.9. *Es sei M ein metrischer Raum und seien*

$$f, g\colon M \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f+g\colon M \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x)+g(x),$$

$$f-g\colon M \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x)-g(x),$$

$$f\cdot g\colon M \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x)\cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq M$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g\colon U \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Wir betrachten Abbildungsdiagramme der Form

$$M \xrightarrow{f,g} \mathbb{K}\times\mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}\,.$$

Die Abbildung links ist stetig aufgrund von Lemma 36.7. Die rechte Abbildung ist stetig aufgrund von Lemma 36.6. Daher ist wegen Lemma 36.4 auch die Gesamtabbildung stetig. Die Gesamtabbildung ist aber die Addition der beiden Funktionen. Für die Multiplikation verläuft der Beweis gleich, für die Negation und die Division muss man zusätzlich Lemma 36.5 heranziehen und (für die Division) das Diagramm

$$U \xrightarrow{f,g^{-1}} \mathbb{K}\times\mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$$

betrachten. □

Satz 36.10. *Es sei $\mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Metrik versehen und sei*

$$\varphi\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ stetig.

[1] Eine Abbildung $I \to M$, wobei I ein reelles Intervall ist, deren Bild gleich einer „Kurve“ $C \subseteq M$ ist, nennt man eine *Parametrisierung* von C.

Beweis. Eine komplex-lineare Abbildung ist auch reell-linear, und die euklidische Metrik hängt nur von der reellen Struktur ab. Wir können also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen. Aufgrund von Lemma 36.7 können wir $m = 1$ annehmen. Die Abbildung sei durch

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Nullabbildung ist konstant und daher stetig, also sei $a = \max(|a_i|, i = 1, \ldots, n) > 0$. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) \leq \frac{\epsilon}{na}$ ist insbesondere $|x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{na}$ für alle i und daher ist

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y)) &= \left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - y_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i (x_i - y_i)| \\ &\leq na\, |x_i - y_i| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Polynome in mehreren Variablen

Wir haben schon Polynome in einer Variablen verwendet. Ein Polynom in den zwei Variablen x und y ist z.B.

$$5 + 3x + 7y + 4x^2 - xy - 2y^2 + 4x^3 - 6x^2y + 5xy^2 - 11y^3 + 8x^4 - 6x^2y^2 + xy^3,$$

es ist also eine endliche Summe aus Variablenprodukten $x^i y^j$ mit zugehörigen Koeffizienten. Die folgende präzise Definition verwendet eine Multiindex-Schreibweise, um Polynomfunktionen in beliebig (endlich) vielen Variablen einzuführen. Dabei steht ein Index ν für ein Tupel

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$$

und für Variablen $x_1, \ldots, x_n$ verwendet man die Schreibweise

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}.$$

Ein solcher Ausdruck heißt ein *Monom* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Definition 36.11. Eine Funktion

$$f \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

die man als eine Summe der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$$

mit $a_\nu \in \mathbb{K}$ schreiben kann, wobei nur endlich viele $a_\nu \neq 0$ sind, heißt *polynomiale Funktion*.

Ein Polynom ist also eine endliche Summe aus mit Konstanten multiplizierten Monomen. Diese Konstanten nennt man die *Koeffizienten* des Polynoms. Beim eingangs erwähnten Beispiel ist $a_{0,0} = 5$, $a_{1,0} = 3$, $a_{2,1} = -6$, $a_{3,1} = 0$, u.s.w. Ein Beispiel in den drei Variablen x, y, z ist

$$\begin{aligned} 2 + 6x - 4y - 3z + 5x^2 + y^2 - 2z^2 - xy - 4xz + 3yz + 7x^3 + 4y^3 - 5z^3 - x^2y \\ + 5xy^2 - 11xz^2 + 4x^2y + 8y^2z + 3yz^2 + 5xyz + 17x^3y^6z^5. \end{aligned}$$

Bemerkung 36.12. Machen wir uns die Wirkungsweise eines Polynoms f in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ als Funktion

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

klar. An einer Stelle $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ ergibt sich $f(b)$ einfach dadurch, dass man für die Variable x_i überall die Zahl b_i einsetzt und alles in $\mathbb{K}$ ausrechnet. Die Variable x_i ist somit einfach die i-te Projektion

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (b_1, \ldots, b_n) \longmapsto b_i.$$

Zumeist benennt man die Koordinaten einfach wieder mit x_i. Die Summe und die Produkte von polynomialen Funktionen sind wieder polynomial, und zwar ergibt sich die Summe einfach dadurch, dass man monomweise addiert, und das Produkt dadurch, dass man distributiv ausmultipliziert. Auch wenn man Polynome in andere Polynome einsetzt, ergibt sich wieder ein Polynom.

Satz 36.13. *Eine polynomiale Funktion*

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

ist stetig.

Beweis. Die einzelnen Variablen x_i repräsentieren die i-te lineare Projektion

$$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow x_i.$$

Nach Satz 36.10 sind diese stetig. Aufgrund von Lemma 36.9 sind dann auch die monomialen Funktionen

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und damit aus dem gleichen Grund überhaupt alle polynomialen Funktionen. $\square$

Abbildungsverzeichnis