始

24. 11. 28

[illegible]

Es ist so schön soldat zu sein R.

力學

東北帝國大學理科大學教授
理學博士
愛知敬一著

東京 裳華房 發行

序

著者は京都理工科大學に在職中,工科の學生の爲めに力學を講ずること二回,理科の學生の爲めに講ずること三回に及び,其後海外に留學し獨,英の諸大學に於ける力學並に應用力學の講義を聽くの機會を得,歸朝後職を東北帝國大學に奉ずること爰に七年,其間恆に力學を講じ,又講ずる毎に其系統を變じて新組織を試みたり。是等の講義を礎とし,其難きものの幾分を取り去りて,新に易きものの幾分を補ひて得たるもの卽ち本書なり。

著者は階梯として初等の力學書を讀みたる後,本書を讀まれんことを薦めず。反りて力學に志す人の直ちに本書に就きて學ばれんことを望む者なり。何學,何技に於ても一種の風に染みたる後,正風に復せんとするには多大の困難を感ずるものにして,初めより正風を學ぶの易きに若かざるなり。圍碁を學ぶにも,初めより定石を學びて

正式に門に入るを良しとし,自己の經驗にのみ依賴する所謂力碁なるものの反りて上達し難きが如し。著者は本書のみが力學に入るの正路を示すものなりとは思はざるも,本書も亦其一たりと信ずる者なり。若し讀者にして多少の數學の素養あらんか。直ちに本書に就きて力學を學びて困難を感ぜざる可しと信ず。

其數學の素養とは坐標幾何學の一般と,微積分學の初步となり。もとより力學は微分方程式の智識なくては學び能はざるに相違なし。されど數學書に在る如き微分方程式を要すとの意にはあらず。力學を學ぶに必要なる微分方程式は總て本書中に於て說明せり。むづかしき數學を用ふることと,力學の本義を知ることとは別途のことに屬す。數學は精確に事實を表はし得るの利益あれば,一種の言ひ表はし方卽ち一種の語學として,其記號を用ふるを便とするなり。むづかしき計算,殊に積分法の計算の如きは必要少なし。著者は出來るだけ數學なる外衣を去りて力學の眞面目を顯はさんと努めたり。

初めより本書に就きて,力學を學ぶものは,力學は元來斯かるものなりとして學び,他の力學書と比較研究を爲すの機會なかる可し。されど在來の力學書(獨,英,佛竝に日本の)に就きて學ばれし者は,夫れと本書と比較して說明を異にせる所少なからざるを見る可し。而して其說明を異にせる點こそ著者が多年の熟考の後に決定したるものにして,多大の理由ありて存するものなり。斯かる讀者の爲めに其理由を附記して,本書の特色を示すも亦無益のことに非ざらん。

1。速度,加速度の定義に就きて。在來の書は點の動きたる曲線上の微小部分を採りて速度を定義し,然る後に坐標軸上の速度の部分の定義に移る。然るに加速度の定義を與ふるに際しては速度のヴェクトル差として出だすを常とす。もと變位より速度を導きたると全く同じ方法によりて,速度より加速度を導びくものなるに,此方法にては其導びき方異なるが如くに見ゆ。且つ曲線は其微小部分を採るも何處迄も曲線にして,之に就きて速度の定義を與ふるは多少不分明なるが如くに思はる。既に曲線の長さなるものが,其微小部分を直線にて置き換へ其極限値を考へて初めて知り得るものなるに非ずや。

著者の考にては,先づ一直線上の運動を基礎とし,これに就きて速度を定義すれば位置を示す數量のみにて定まり,普通の微分學

にて論じ得る場合となる。次ぎに一般の運動の場合は,其三軸上の運動によりて完全に學び得るを以て,三軸上の分速度を採りて考ふれば足れり。又此分速度より合速度の大さと,方向とを定義し得べし。これと同樣にして三軸上の加速度の部分より,合加速度の大さと方向とを定義し得。然るに速度の場合には合速度の大さが曲線の長さより出したるものと極限値に於て一致することとなるも,加速度の場合には斯かる簡單なるものとして表はし得ず。これ著者が本書に於て與へたる說明にして,ボルツマンの力學原理に基づく。

力學にては速度,加速度を上述の如くに定義するも,加速度以上のもの,卽ち高次加速度を考へざるは何故なるか。斯くの如きは重大なる問題なれども,從來の力學書には此解を與へたるもの少し。本書は斯かる根本問題の說明を充分に與へたり。されど第一編は本書中にて面白き部分に非ざるべし。

2。運動の法則に就きては種種の云ひ表はし方あり。新しき言ひ表はし方を用ひたる方著書が新しき樣に見ゆるは自然なり。されど何れもニウトンの法則と同じものに歸し,單に言葉の上の相違か,法則を出す順序の上の相違かに止まる。言ひ方のみ新しくするも,朝にはヒックスの言ひ方を採り,夕にはマッハの言ひ方に從ふも面白からず。本書は出來得る限りは舊に從ひて新を衒はざらんとの方針より,ニウトンのを其儘用ひたり。只數多の質點あるに及びて,運動の第三則は初めて入用のものなれば,之が說明を後に置けり。

又舊來の力なるものを力學の基礎として採りたれど,其說明を舊來のものならぬ樣にしたる點を注意して讀まれんことを望む。こはヘルムホルツの考案に基づくものなり。

3。力學は自然界に起る運動を研究するものには相違なきも

此研究なる字に就きて說明を要す。任意の時刻に物體が何れの處に在るかを知り得れば,これにて運動の狀態は判明するなり。されど之を簡明に知らんとするは,別種の問題にして先づ其運動の特色を明かにせざる可らず。其特色を明かにするには微分方程式を要す。既に此特色を明かにしたる上は各箇の問題に對して夫れに相應する特殊の條件を附すれば可たり。こは單に微分方程式を作るとか,之を解くとか云ふ如き數學上の形式を用ひたるのみにては說明は不充分にして,力學上より根本の說明を與ふることを要す。此說明を重力,彈力に就きて委しく爲し,何れも大綱を委しく說明して出來得べくんば,種種の異なれる方面より見て解せんと努めたり。

4。次ぎに球振子の章に於ては,小振動の場合,圓錐振子の場合,單振子の場合の連關を明かにしたり。尙ほ振子の絲に就きて注意を要することは,絲が質量なくして伸びざるものと假定して其張力を何何とすと云はば夫れ迄なれど,自然科學にては斯くの如き假定を獨斷的に爲すは不合理なり。其說明には張力の起る原因を說きて絲の彈力に及ばざる可らず。

5。重力のもとに質點は拋物線の運動を爲し,在來の書には其性質に就きて委しく論じあり。されど空氣の抵抗等あるにより實際には殆んど見られざる運動なれば,本書には委しく說明せざることとせり。

之に反して,日常よく見る所にてもあり,又機械の運動に於ても最も重要なるものは振動なり。故に振動の論は在來の書よりも非常に委しくなせり。

6。萬有引力の節には,初め力の中心點を固定せるものと假定して論じ,次ぎに二つの質點が相互に萬有引力を及ぼす場合を論じたり。此時重心を採りて考ふるを便とし,之にて第三編の質點

系統の編に移る階梯とせり。

7。第三編には先づニウトンの第三則を述べ,之を數多くの質點に用ひて,重心の定理と廻轉能率の定理とを出したり。此兩定理が第四編に至り剛體の定義を與ふるに及びて剛體の運動を定むる基礎の式となるものなり。

8。剛體力學は質點力學の一つの特別の場合として出づ。而して剛體に働く外力の効果は,一つは合力として,一つは廻轉能率として表はるるを以て,此兩者だに等しくば剛體に對する作用も亦等し。此事より剛體に働く力の合成はもとより,偶力の分解,合成に至る迄總てを斷定し得るものなり。普通の書にてはこれを一々定理として數十枚に渉りて證明しあるものなれども,爰には僅に數頁にて其全部を出せり。且つ剛體の運動に關しても之と同一の論を用ひて,そがネヂの運動に歸し得ることを證明せり。

9。力學は力を根本思想として運動を論ずるものなるが,エネルギー,仕事なる思想をも導びき,之を基として論ずる場合も少なからず。爰に於て果して力が根本のものなるか,エネルギーが根本のものなるか,將た此兩者が何れも等しく根本のものなるかとの疑を生ず。且つ仕事の如きも,何故に力と力の方向に於ける變位との積として定義す可きかとの理由に至りても說明を要す。

本書は飽く迄も力のみを根本思想として力學の全部を論ずる事とし,只隨所エネルギーの保存則に就きて留意したるのみにしてエネルギーはもとより仕事をも用ひずして,第四編に至れり。第五編に至りて初めてエネルギーの保存則を說明し,之もライプニッツの原則より導ひ出すこととせり。而してエネルギーの保存則の說明より初めて仕事の定義を述べ,然る後に一般の場合に於ける仕事の定義に移れり。斯くの如くして始めて仕事なる思想の力學に表はるる所以を明かにし得べく,又其重要なる理由をも

明かにし得べしと信ず。

以上に述べたる如く,力なる思想のみにて力學を論じたる事,エネルギーを論じたる後に仕事の定義を出したる事等は,今日迄の力學書には全く類無き事にして,著者は是れが最も自然なる方法なりと信ずる者なり。殊に仕事を說明したる章の如きは熟讀の上在來の力學書の仕事の說明と比較されん事を望むものなり。此說明はエネルギー保存則の發見者たるヘルムホルツの考に負ふ所少なからず。

10。ラクランジュの一般坐標の運動の式は今日迄は高等の力學書の外には餘り說明しあるを見ず。されど工學上の諸問題に力學を應用する場合の如き此坐標によるを便とす。從うて最近歐米諸國に於てラグランジュの運動の式のみを說明せる小冊子の出版されたるもの少なからず。勿論初めより一般坐標が n 個なる場合に就きて說明せんとすれば,幾多の難點ある可し,されど坐標の數が二個の場合(卽ち二次の自由度の場合)に就きて說明せんとすれば,左程の困難なかるべし,且つ應用多きは,實に坐標が二個の場合なり。故に本書に於ては坐標が二個の場合に就きてのみ論ずることとし,ラグランジュの運動の式を出せり。而して坐標の數が n 個ある場合にも同樣の式が成り立つ事を附記するに止めたり。

著者は數學上より見て難解の問題を幾多取り扱はんよりはラクランジュの式の如き根本の問題を委しく論ずるを至當と考ふる者なり。極坐標を用ひたる場合の加速度の式竝に運動の式の如きもラグランジュの式より導き出すを便とす。此編の說明はラムの力學書に負ふ所多し。

11。以上には根本の問題のみを說明し,枝葉の問題には立ち入らざりき。但し一通り本義を理解したる上にて,各箇の問題を解

きて自己の能力を試みたしとの望ある人も有る可く,斯かる人の爲めに問題集と云ふが如きものを作りて第七編に置けり。

されど只問題を列べたるのみにては面白からず。從うて問題を其形式と解法とによりて類別し,最小の時間と最小の勞力とを以て(これが力學にて運動を論ずる時の方針なれば).如何に問題を取り扱ふ可きかを示さんとせり。讀者は之によりて,問題解法の大體に通ぜられん事を望む。從うて本編は各編を讀まれし際適宜に少しづつ讀まるるも差支なし。

本書の特色は決して上記の十一條にて盡したるには非ざるも,之にて其一斑を明かにせりと信ず。

本書は筆を起してより爰に二星霜を經,其間下記の諸君の多大なる協力を得て,初めて出版するの機會に達せり。其諸君は東北理科大學助教授大久保準三君を主とし,同講師三枝彦雄君,同講師遠藤美壽君,竝に同助手鈴木義之君,同助手萱場眞君等にして爰に特記して其勞を謝す。

又本書は印刷中に及びても,多少なりとも改良すべき點を見出せば直ちに改竄し,甚だしきは三校,四校に及びて爲したる所も少しとせず。裳華房の野口健吉君の盡力によりて遺憾なく之を實行するを得たり。

又圖板の如きも幾度か改め多少在來の書とは其觀を異にせるものありと信ず。これ亦同君竝に印刷の局に當られし諸君の盡力によるものにして爰に其好意を謝す。

大正七年冬至の日

仙臺にて　　著者記す

力　　學

力學の定義　力學とは物體の位置の變化を考ふる學問なり。尙ほこれが特別の場合として,如何なる條件の滿足せらるる時物體は靜止するかをも併せて考ふるものとす。

力學目次

第一編　運動學

第二編 一質點の力學

第三編　質點系統の力學

第四編　剛體の力學

第四章　物理振子

第五章　一般の定理

第五編　エネルギーの原則

第一章　保存力

第二章　中心力は保存力に屬す

第三章　等ポテンシャル面

第四章　仕　事

第六編　自由度とラグランジュの式

第一章　自由度

第二章　ラグランジュの式

第七編　力學問題の解法

第一編
運動學

第一章
一直線上の運動

1. 一直線上の運動。 先づ最も簡單なる場合より始むる事とし,一點Pが直線AB上を運動する場合を取りて考へん。此直線上の一點Oを取り,これを原點として動點Pに至る距離を測る事とし,且つこの距離はOより一方に測りたる時は正の値,反對の方向に測りたる時は負の値を採るものとし,これをxにて表はすこととせん。然らばxの値を與ふることによりてPの位置は定まるべく,點Pは運動するを以て時刻t_1に於てPは距離x_1にあり,他の時刻t_2に於ては,他の距離x_2にありと云ふが如くなる可し。斯く任意の時刻tに對應してxは一

第一圖

定の値を採る。卽ち x は t の函數にして

$$x=f(t)$$

として表はさる。

2. 速度の定義. この x と t との關係は場合に依りて種種相異なるべきも,今最も簡單なる場合として x と t との間に

$$x=ut$$

なる關係あるものとし,此 u は t に無關係なる常數なりとせん。今或時刻 t_1 に於ける x の値を x_1 とすれば,

$$x_1=ut_1$$

にして,又時刻 t_2 に於ける,x の値を x_2 とすれば,

$$x_2=ut_2$$

なるべし。この二式より

$$x_2-x_1=u(t_2-t_1)$$

を得。此 u は常數なるが故,t_2-t_1 なる時間だに等しくば,其間に通過したる距離 x_2-x_1 は t_1 の如何に拘はらず恆に相等しかるべし。今若し t_2-t_1 を單位時間に取らば,其間に通過したる距離は丁度 u にして,此 u を其點の**速度**と名づく。斯く單位時間に通過したる距離 u によりて速度を測り得べきも,强ひて單位時間を採らずとも,任意の時間を採り

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

なる比を作れば恆に u に等し。卽ち或る時間に通過したる距離を,其時間にて除したるものにて,速度を測り得べし。然らば時間 t_2-t_1 を大きく取るも小さく取るも全く任意となる。今 t_2-t_1 を極めて小さく取ることとし,之を Δt_1 にて表はさん。然らばこれに對應する距離も亦極めて小なる可く,これを Δx_1 とすれば,速度 u は

$$u=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$$

にて定めらる。猶ほ一歩を進めて Δt_1 を次第に零に近づけたる極限を取れば,Δx_1 も亦零に近づくべきも其比たる $\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$ は依然として u に等しかるべし。今簡單の爲め,t_1 を t とし,Δt_1 を Δt, Δx_1 を Δx と書けば,速度 u は

$$u=\operatorname*{Lt}_{\Delta t=0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

にて定められ,こは微分學の記號を用ひて

$$u=\frac{dx}{dt}$$

となし得るものなり。

斯く速度を $\mathrm{Lt}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$ として定義することとすれば,$x=ut$ なる場合に限らず,一般に $x=f(t)$ なる場合にも適用し得べし。只相異なる所は $\frac{dx}{dt}$ にて定めたる速度は,時時刻刻異なる値を取り,一定の値とならざるこ

とにして,即ち或る時刻 t に於て,原點より動點に至る距離を x とし,時刻 $t+\Delta t$ に於ける距離を $x+\Delta x$ とすれば,**時刻 t に於ける速度 u は**

$$u=\mathrm{Lt}_{\Delta t=0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

として定義せらる。斯く速度は時時刻刻變化すべく,時刻 t_1 に於ける速度 u_1 を求むるには $u=\frac{dx}{dt}$ なる式の t に t_1 を置換して得べし。即ち x と t との間の關係が $x=f(t)$ にて與へられ

$$u=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

とすれば,$f'(t)$ は一般に時刻 t に於ける速度を表はすこととなる。

例 1.　$x=\frac{1}{2}gt^2$ に於て g を常數とすれば

$$u=\frac{dx}{dt}=gt.$$

例 2.　$x=\cos(\omega t+\varepsilon)$ に於て ω, ε を常數とすれば

$$u=\frac{dx}{dt}=-\omega\sin(\omega t+\varepsilon).$$

故に速度の極大は $\sin(\omega t+\varepsilon)=-1$ の時にして,其値は $+\omega$ なり。又 $\sin(\omega t+\varepsilon)=1$ の時其速度は極小にして,其値は $-\omega$ なり。

3.　加速度の定義。 動點が直線上を運動するとき,原點よりの距離 x を時間 t の函數として與ふれば,此

微分係數として速度を得たり。斯くして求めたる速度は亦一般に時間 t の函數なり。

今簡單なる場合を選び,速度 u と時間 t との關係が

$$u=\alpha t$$

にて表はさるるものとし,此 α は時間に無關係なる常數なりとせん。而して時刻 t_1, t_2 に於ける速度をそれぞれ u_1, u_2 とすれば

$$u_2-u_1=\alpha(t_2-t_1)$$

にして,(t_2-t_1) を單位時間に取れば,此間に起る速度の變化 (u_2-u_1) が丁度 α に等しきを知るべし。斯く單位時間に於ける速度の増加を表はす α を**加速度**と名づく。然れども速度の場合と同じく (t_2-t_1) を必ずしも單位時間にとることを要せず,一般に

$$\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}$$

は加速度 α に等しきを以て,此式によりて加速度を定義するも差支なかる可し。斯くすれば (t_2-t_1) を大きく採るも小さく採るも全く任意なる故,(t_2-t_1) を極めて小さき Δt_1 に取り,之に相當する (u_2-u_1) を Δu_1 とすれば

$$\alpha=\frac{\Delta u_1}{\Delta t_1}$$

にて與へらる。猶ほ Δt_1 を次第に零に近づかしむれ

ば Δu_1 も亦零に近づくべしと雖も其比なる $\frac{\Delta u_1}{\Delta t_1}$ は依然として α に等しかる可し。今 u_1, t_1 を各々 u, t と書すれば,加速度は

$$\alpha = \underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt}$$

にて表はさる。此式にて加速度を定義することとすれば,前述の如き簡單なる場合のみに限らず,如何なる場合にも,其儘用ふることを得。

即ち

$$u = \mathrm{F}(t)$$

なるとき

$$\alpha = \frac{du}{dt} = \mathrm{F}'(t)$$

により,**時刻 t に於ける加速度**を定義す。故に速度が t の函數として與へらるるとき加速度を求むることは,恰も距離 x が t の函數として與へられたるとき速度を求むると全く同様にして,何れも微分係數を求むることに歸着す。

4. 速度。加速度を求むること。 要するに動點の位置が

$$x = f(t)$$

にて表はさるるとき,其速度 u は

$$u = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

にして,加速度 α は

$$\alpha = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

なる故,t に關する x の一次微分係數は速度を表はし,二次微分係數は加速度を表はすなり。時として $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ を略してそれぞれ $\dot{x}$, $\ddot{x}$ と書く事あり。

例 1. $x = \frac{1}{2}gt^2$, 但し g は常數。

$$u = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = gt.$$

$$\alpha = \frac{du}{dt} = \ddot{x} = g.$$

例 2. $x = a\cos(\omega t + \varepsilon)$, 但し a, ω は常數。

$$u = \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin(\omega t + \varepsilon).$$

$$\alpha = \frac{du}{dt} = -a\omega^2\cos(\omega t + \varepsilon),$$

或は

$$\alpha = -\omega^2 x$$

と書くことを得。

5. 高次加速度。 上述の例に見る如く,α は尚ほ t の函數なるが故,猶ほ進んで高次の微分係數 $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^4x}{dt^4}$, …… をも,誘導することを得べく,是等を一括して,**高次加速度**と稱す。然れども翻つて考ふるに,力學はもと自然界に起る運動を論ずるを目的とするものにして,此立脚點より云へば,自然界に起る運動の基礎をなすものは,普通の加速度のみなる故高次の加速度は之を

考究するの必要なきものなり。斯く普通の加速度が特に自然界の運動に於て重要視せらるるに至れるは實に**ガリレイ**の發見にかかるものとす。故に自然科學の一分科たる力學に於ては論を普通の加速度に止めて,これ以上高次の加速度に及ぶの要なし。これ力學と數學との相違する所なり。

例 1. $x=\frac{1}{2}(at^2+2bt+c)$, (但し a, b, c は常數) なるとき,任意の時刻に於ける速度及び加速度を求む。

$$\text{答}\quad \dot{x}=at+b$$
$$\ddot{x}=a.$$

例 2. $x=\frac{1}{6}at^3+bt$, (但し a, b は常數) なる時,任意の時刻に於ける速度及び加速度を求む。

$$\text{答}\quad \dot{x}=\frac{1}{2}at^2+b$$
$$\ddot{x}=at.$$

例 3. $x=Ae^{nt}+Be^{-nt}$, (但し A, B 常數) なるとき,速度及び加速度を求む。

$$\text{答}\quad \dot{x}=nAe^{nt}-nBe^{-nt}$$
$$\ddot{x}=n^2x.$$

o **例 4.** 加速度 $\alpha=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}$ なり。この u は t の函數には相違なきも,t によりて位置 x 定り,位置 x によりて速度 u 定まるものと看做せば,加速度は

$$\alpha=\frac{du}{dt}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dx}u$$

として書き表はし得べし,

今 $u^2=Ax^2$ なる時,加速度を求むる問題ありとせん。先づ x につき此式を微分して

$$2u\frac{du}{dx}=2Ax$$

を得。故に加速度 α は

$$\alpha=u\frac{du}{dx}=Ax$$

なるを知る。

次に

$$u^2=Ax^2+2Bx+C$$

なる關係より加速度を求めよ。

$$\text{答}\quad u\frac{du}{dx}=Ax+B.$$

$2u\frac{du}{dx}=4Ax+2B.$

$\frac{1}{2}(2at+2b)=at+b$

$Ae^{nt}+\frac{B}{e^{nt}}$

$\frac{1}{2}at^2+b$

at

第二章

一般の場合に於ける速度

6. 分速度。第一章に於ては,點が直線上を運動する場合につき記述せしが,これより進んで點が空間を運動する一般の場合を考究せん。

直角坐標軸 x, y, z を取り,或時刻に於ける動點 P の位置を (x, y, z) なる坐標にて表はすものとせん。時の經過に連れて,點が空間を動けば其坐標も亦其値を變ず可く,坐標 (x, y, z) は何れも時間 t の函數にして,夫々

$$x=f_1(t), \qquad y=f_2(t), \qquad z=f_3(t)$$

として表はし得べし。扨て點が動くに從ひ x 坐標の値も亦變じ,其速度は前章に述べたる如く $\dfrac{dx}{dt}$ なり。y, z 坐標につきても之と同樣にして其速度はそれぞれ $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$ なり。

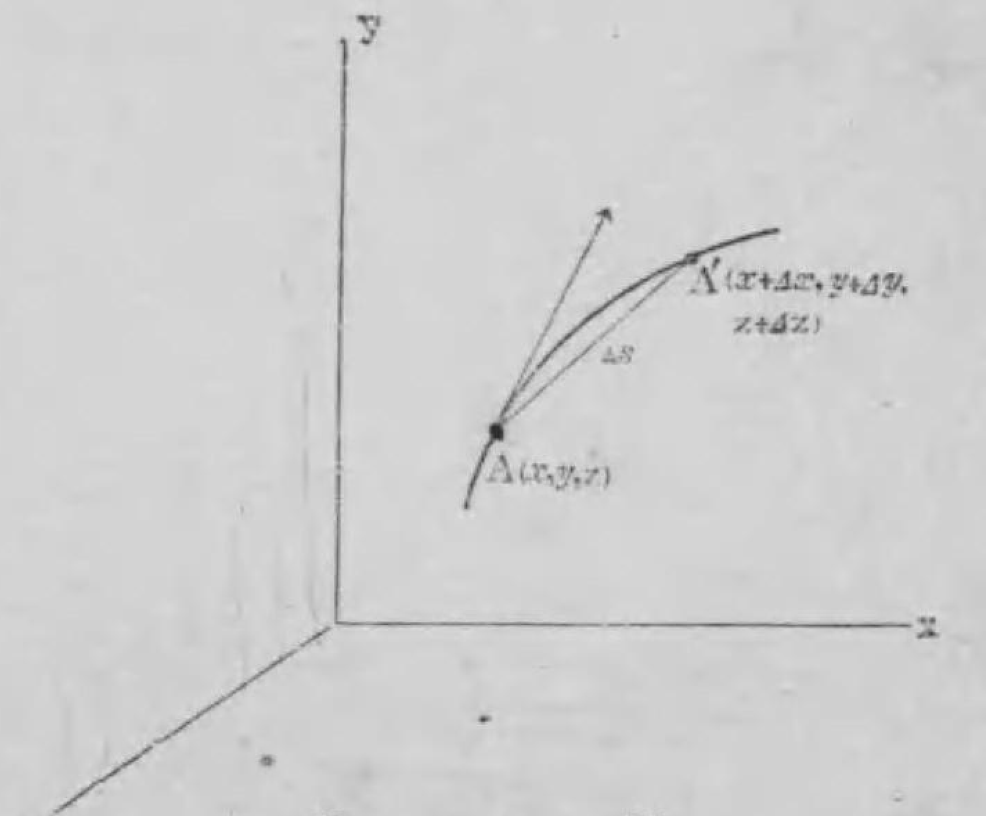
斯く點が空間を動くとき,各坐標軸上に於ける其射影の速度を**各軸の方向の分速度**と名づく。故に三軸の方向の分速度をそれぞれ u, v, w とすれば

$$\left.\begin{aligned} u&=\underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f_1'(t)\\ v&=\underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}=f_2'(t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$w=\underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz}{dt}=f_3'(t)$$

なり。

7. 合速度(或は單に**速度**)。これ等分速度を用ひて,點が空間を動く場合の運動狀態を明かにし得べきも,是等分速度の組合せと看做すべき**合速度**(或は單に**速度**)を用ふるを便とすることあり。今時刻 t に於て動點は A にあり,其坐標を x, y, z なりとし,これより Δt なる時間を經過したる後,A′ に變位せりとし,この坐標を $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ とせん。又 A, A′ を直線にて結び,其長さを Δs とせん。Δt を零に近づくるに從ひ直線 AA′ は,其點の動く徑路に近づく。從て其徑路の上に一定點 M をとり,これより徑路に沿ひて測りたる線 MA の長さを s とすれば, AA′ は s の增加 Δs に等しと謂ひ得べし。さて



第　二　圖

$$\Delta s=+\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\}}$$

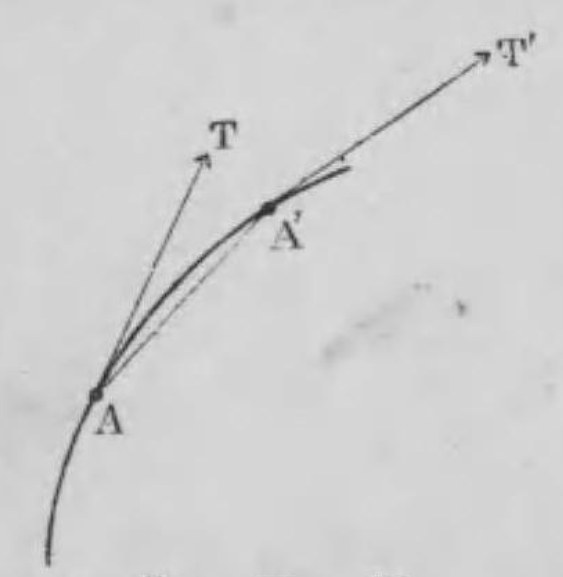
なるが故, $\Delta t=o$ の極限に於ける $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ の値は

$$\underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=+\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}$$

$$=+\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる。

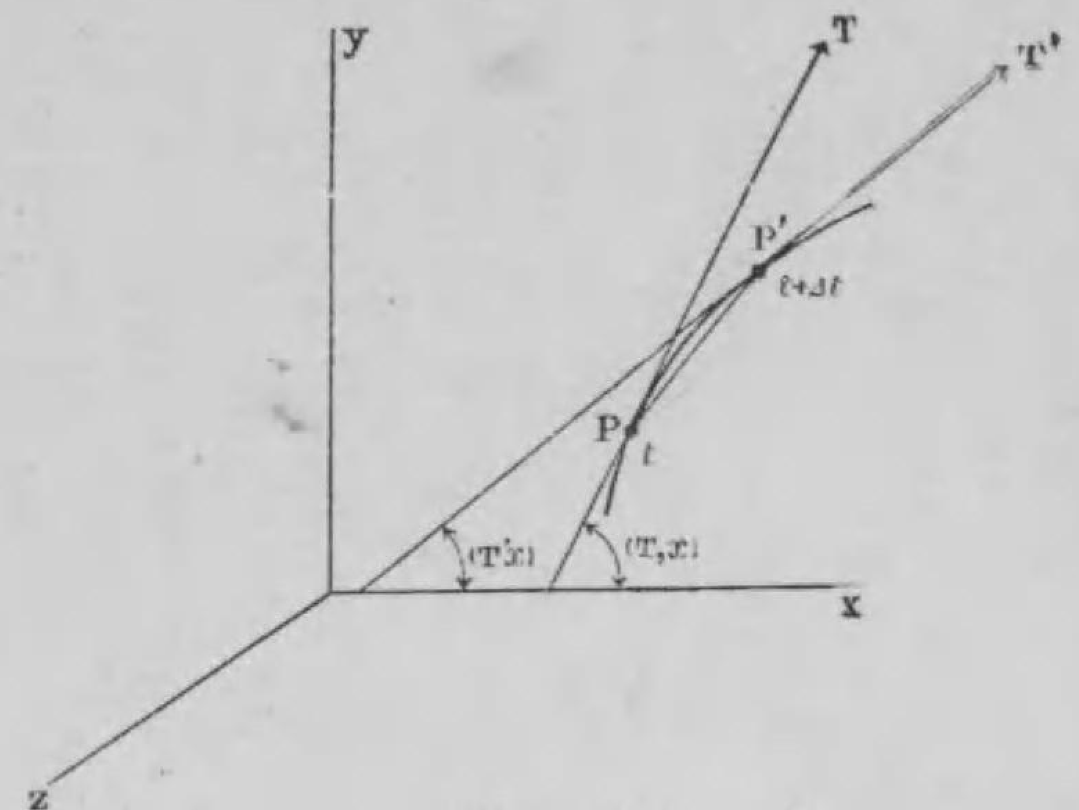
此量は常に正の量にして,之を**時刻 t に於ける速度の大さ**と定義す。而して點の運動を研究するには,速度の大さを知ると同時に,其動く方向をも併せ知るを便利とす。故に Δt が零に近づきたる時に直線 AA′ の取る方向を以て,**時刻 t に於ける速度の方向**と定義す。**これ點の徑路に引きたる切線 T の方向に同じ。** 而して點が s の増加する方向に動くときは $\frac{ds}{dt}$ は正號にして,速度は s の増加する方向に引きたる切線の方向を有す。之に反して,點が s の減ずる方向に動くときは $\frac{ds}{dt}$ は負號を取るべし。こは $\frac{ds}{dt}$ に正號を附したるものが速度の大さを表はし, s の減ずる方向に引きたる切線が速度の方向を表はすことを意味す。要するに,合速度は一定の正の大さと,一定の方向とを有する量なり。



第三圖

次に合速度と分速度との關係を求めん。今一定の

方向を有する直線 T が,坐標軸となす角をそれぞれ (T,x), (T,y), (T,z) にて表はせば



第四圖

$$\left.\begin{aligned}\Delta x&=\Delta s\cos(\Delta s,x)\\ \Delta y&=\Delta s\cos(\Delta s,y)\\ \Delta z&=\Delta s\cos(\Delta s,z)\end{aligned}\right\}$$

にして,この式は Δt の如何に拘はらず成立する故,是等の兩邊を Δt にて除し,且つ Δt が零となる極限をとれば,

$$\left.\begin{aligned}\underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta x}{\Delta t}&=u=\frac{ds}{dt}\cos(T,x)\\ \underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta y}{\Delta t}&=v=\frac{ds}{dt}\cos(T,y)\\ \underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta z}{\Delta t}&=w=\frac{ds}{dt}\cos(T,z)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

となる　故に合速度が豫め與へられたる時は,この三式より分速度を求め得べく,又逆に分速度が與へられたる時は(2)式を用ひて

$$\frac{ds}{dt}=\mathrm{V}=+\sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

より合速度Vの大さを知り,又

$$\cos(\mathrm{T},x)=+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=\frac{u}{\mathrm{V}}$$

$$\cos(\mathrm{T},y)=+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=\frac{v}{\mathrm{V}}$$

$$\cos(\mathrm{T},z)=+\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=\frac{w}{\mathrm{V}}$$

に依りて其方向Tを知るを得べし。

斯くの如く,點が空間を運動する場合に,其速度を求むるに二種の方法あり。即ち

(i)　點の位置 x, y, z が t の函數として與へらるれば,之を t に對して微分することにより**各軸の方向に於ける分速度**を得,これより合速度の大さ,及び方向を求むることを得。

(ii)　點の動く徑路を知り,且つ此徑路上に於ける點の位置 s を t の函數として與へられたるときは,s の t に對する微分係數が,**合速度の大さ**を表はし,徑路の切線の方向が,**合速度の方向**を示し,これより三軸の方向に於ける分速度を求むることを得。

注意。前に述べたる $\underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta x}{\Delta t}=u$ の意味を考ふるに,Δx と $u\Delta t$ との差は極めて小さく,Δt を零に近からしむるに從ひ $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ と u との差は如何程にても小さくなし得ることを示す。

斯かる場合には微分學の記號を用ひて

$$udt=dx,\qquad vdt=dy,\qquad wdt=dz$$

とするも可なり。故に略して,u の速度にて dt 間に dx だけ動けりと謂ふも差支なかるべく,以下本書に於ても斯くの如き言葉を用ふることあるべし。

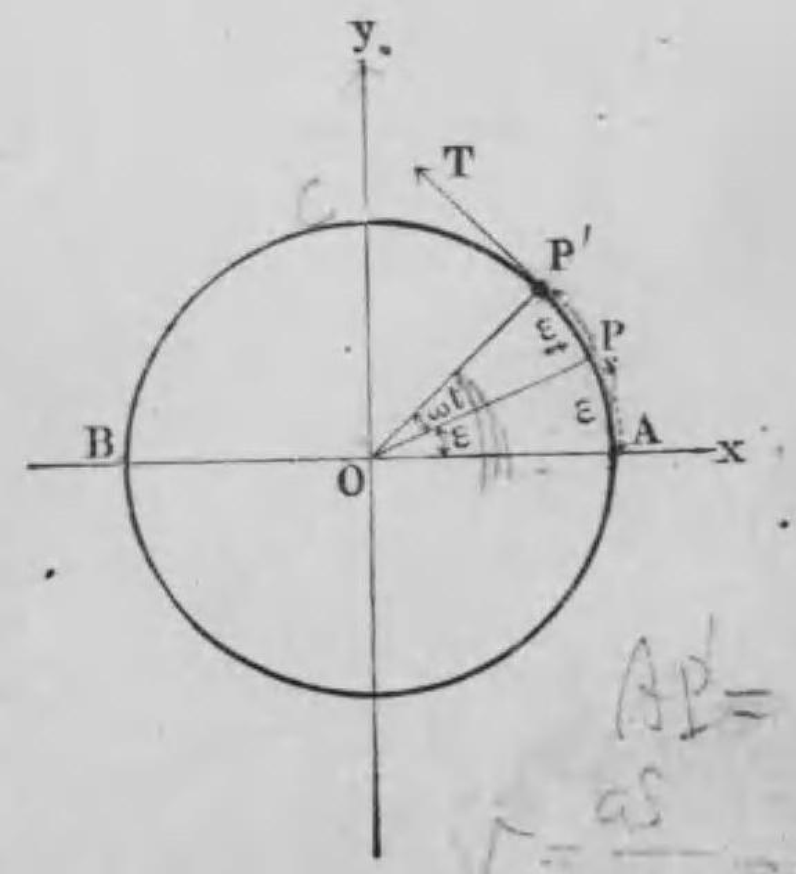
3. **角速度**。半徑1の圓周あり。直徑BOAの一端Aより圓弧に沿ひて ε なる距離にある點をPとす。動點は $t=o$ のとき此P點より出立し,單位時間に圓弧 ω を進むものとす。

時刻 t のとき動點がP′にありとすれば,圓弧 $\mathrm{AP}'=s$ にして,

$$s=(\omega t+\varepsilon)$$

なり。故にP′に於ける速度の大さは

$$\mathrm{V}=\frac{ds}{dt}=\omega$$



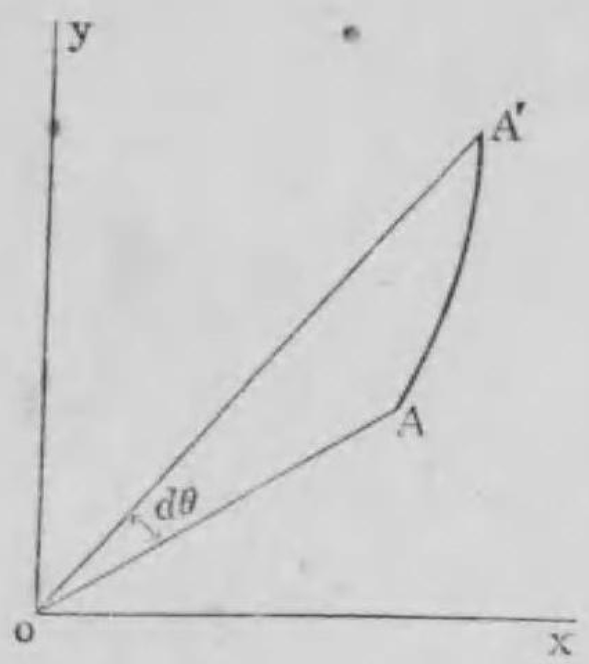
第　五　圖

$AP' =$

$V=\frac{ds}{t}=W$

にて與へられ,P'の位置の如何に關せず恆に一定なり。また速度の方向は,P'に於ける切線Tの方向にあり。

次に此圓は,單位半徑の圓なるを以て,圓弧の長さはこれが中心に於て開く角(ラヂアンにて測りたるもの)と等しく,從つて動點は中心Oに對して單位時間に角ωだけ廻轉するものと謂ひ得べし。このωを**動點のOに對する角速度**と稱することあり。又動徑OPが廻轉するものと看做して,**OPの角速度**と稱することあり。



第六圖

ωが常數なる場合に限らず,一般に時間dtの間に動徑OAがOA'に動き,中心Oに對して角$d\theta$だけ變位するものとせば,$\frac{d\theta}{dt}$を以て點の角速度となす(第六圖)。

次ぎに上の場合に於ける分速度を求めん。第七圖に於てOAをx軸,OCをy軸に取れば,P'の坐標x, yは

$$x=\cos(\omega t+\varepsilon)$$
$$y=\sin(\omega t+\varepsilon)$$

にて表はさるべし。之をtに對して微分すれば,

$$\frac{dx}{dt}=-\omega\sin(\omega t+\varepsilon),$$
$$\frac{dy}{dt}=\omega\cos(\omega t+\varepsilon)$$

を得,これx, y軸の方向に於ける分速度なり。

此分速度より合速度を求むれば

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\omega^2}=\omega$$

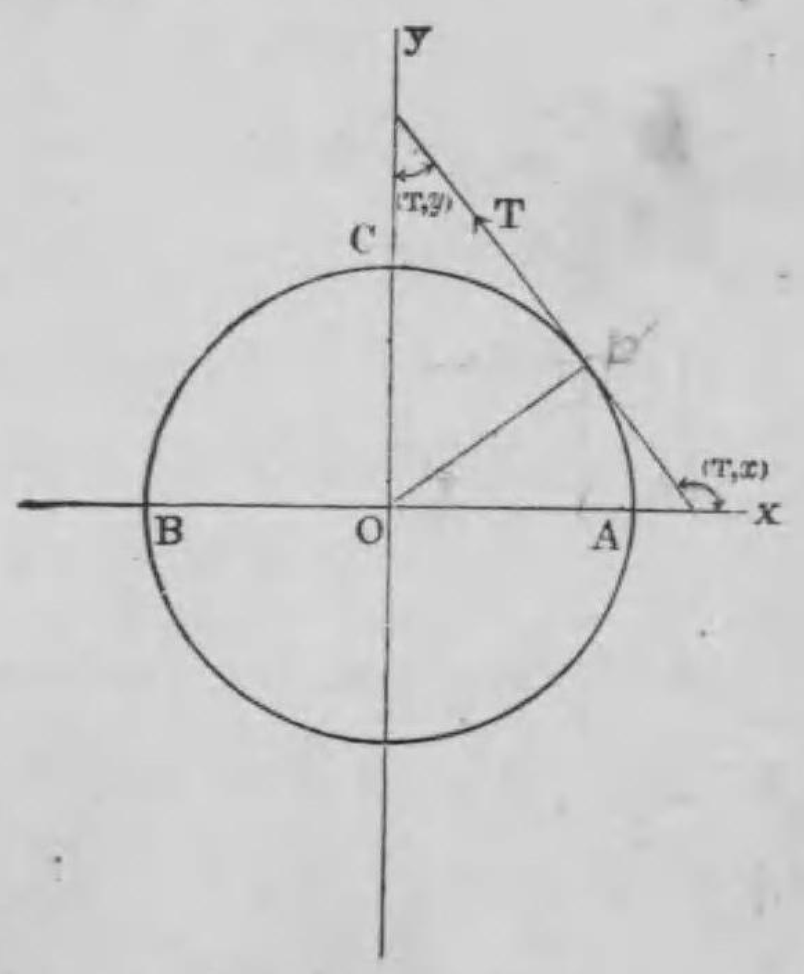
となり,上に出したる値と一致するを見る可し。而して切線Tの方向餘弦は

$$\cos(T,x)=-\sin(\omega t+\varepsilon),$$
$$\cos(T,y)=\cos(\omega t+\varepsilon)$$

なるが故に,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos(T,x)=-\omega\sin(\omega t+\varepsilon),$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos(T,y)=\omega\cos(\omega t+\varepsilon)$$

としても求め得べく,上に得たる値と同一なることを知るべし。



第七圖

斯く點が,圓周上を一定の角速度を以て廻轉するとき,點は**等速圓運動**をなすと云ひ,又坐標軸上に於ける其點の射影の行ふ運動を**單弦運動**と名づく。

例 1. 上記の場合に於て,圓の半徑が a なる時,其合速度の大さは $a\omega$ なることを證明せよ。

例 2. $x=t^2$, $x=t^3$ なるとき任意の時刻に於ける分速度及び合速度を求む。

答 分速度 $\dot{x}=2t$, $\dot{y}=3t^2$.

合速度 $\mathrm{V}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=t\sqrt{4+9t^2}$

例 3. $x=\cos t$, $y=2\sin t$ なるとき任意の時刻に於ける分速度及び合速度を求む。

答 分速度 $\dot{x}=-\sin t$, $\dot{y}=2\cos t$.

合速度 $\mathrm{V}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{1+3\cos^2 t}$.

例 4. $x=ae^{kt}$, $y=be^{kt}$, (但し a, b, k は常數)なるとき,任意の時刻に於ける分速度及び合速度を求む。

答 分速度 $\dot{x}=kae^{kt}=kx$, $\dot{y}=kbe^{kt}=ky$.

合速度 $\mathrm{V}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=k\sqrt{x^2+y^2}$.

例 5. $x=at\cos\alpha$, $y=at\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$, (但し a, α, g は常數)なるとき,任意の時刻に於ける分速度及び合速度を求む。

答 分速度 $\dot{x}=a\cos\alpha$, $\dot{y}=a\sin\alpha-gt$.

合速度 $\mathrm{V}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$

$$=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha+g^2t^2-2agt\sin\alpha}$$

$$=\sqrt{a^2-2gy}.$$

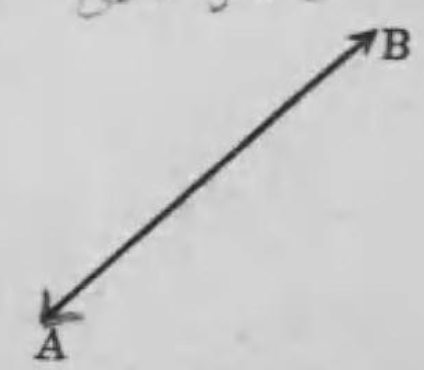
第三章

ヴェクトル

9. ヴェクトルの表はし方。 代數學にて取扱ふ量は,大さを有するのみなるも前に定義したる速度及び加速度は**大さ**と**方向**とを有す。

斯くの如く**大さと方向とを有する**量を,一般に**ヴェクトル**と稱し,これに對して大さのみを有する普通の量を,**スケーラー**と稱す。力學に於ては速度,加速度のみならず,他にも斯かるヴェクトルと看做すべきもの多く表はるを以て豫め其取扱方の一般を述ぶることとせん。

ヴェクトルを圖上に表はすには,其大さと方向とを同時に表はすを要す。故にヴェクトルの方向に一直線を引き,其長さを(適當の單位にて測りて)ヴェクトルの大さに等しくとる。例へば,第八圖に於て直線ABの長さはヴェクトルの大さを示し,矢の方向はヴェクトルの方向を示すが如し。此直線を引く起點につきては別に制限なく,何れの點をとるも差支なく,便宜上坐標の原點より引くこと多し。



第八圖

ヴェクトルは大さと方向とを有する量なる故,普通の量と區別するため文字に( )を付して(A),(B)……と記しA,B………にて其大さを表はす。其方向を示すには,ヴェクトルが坐標軸となす角を以てするも可なれども,多くは其角の餘弦即ち方向餘弦なるcos(A.x),cos(A.y),cos(A.z)を以てすを常とす。

速度の場合には,ヴェクトルの大さに相當する$\frac{ds}{dt}$と切線の方向餘弦とによりて定まること前章に述べたるが如し。

されど速度は坐標軸の方向に於ける部分によりても亦表はし得るなり。此事は一般のヴェクトルにつきても同様にしてヴェクトル(A)のx軸の方向に於ける部分はAcos(A,x), y軸の方向に於ける部分はAcos(A,y), z軸の方向に於ける部分はAcos(A,z)にして,これをそれぞれA_x, A_y, A_zとすればヴェクトル(A)の大さは

$$A=+\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2+(A_z)^2}$$

にて與へられ,其方向は

$$\cos(A.x)=\frac{A_x}{A},\quad \cos(A.y)=\frac{A_y}{A},\quad \cos(A.z)=\frac{A_z}{A}$$

にて定まる。

斯くヴェクトルを表はす方法三種あり。即ち

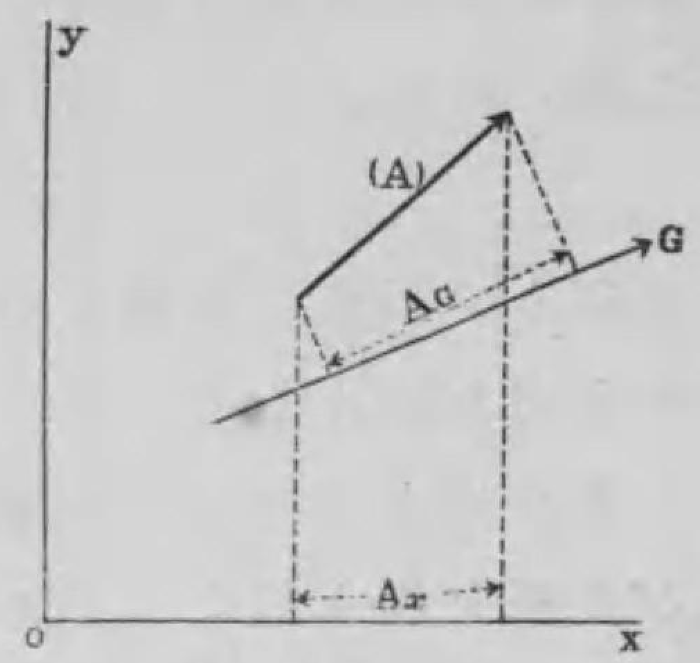
(i) 圖上に於て方向と大さとを有する直線を用ふること。

(ii) 大さ竝に坐標軸となす方向餘弦を與ふること。

(iii) 坐標軸の方向に於ける部分を與ふること。

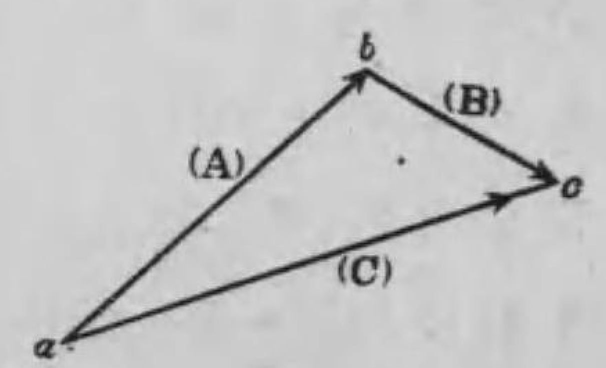
これなり。

Gなる一定の方向を有する直線上に於ける**ヴェクトル(A)の部分**と名づくるはAcos(G,A)なる量の意にして,これをA_Gにて表はさん。若しGがx軸なりとすれば,其上のヴェクトルの部分は前にA_xにて表はしたるものとなる。これ等A_G, A_x等は何れも大さを表はすものにして,ヴェクトルに非ず。これにGの方向又はxの方向を附したる後初めてヴェクトルとなるなり。



第九圖

10. ヴェクトルの加減法. 次にヴェクトルの加減法を説明せん。第十圖に見る如く,ヴェクトル(A)の終りbを起點としてヴェクトル(B)を引き,(A)の起點aと(B)の終點cとを結びて作りた



第十圖

るヴェクトルを(C)とせば,(C)は(A)と(B)との和を表はすことと定む。これを

$$(A)+(B)=(C)$$

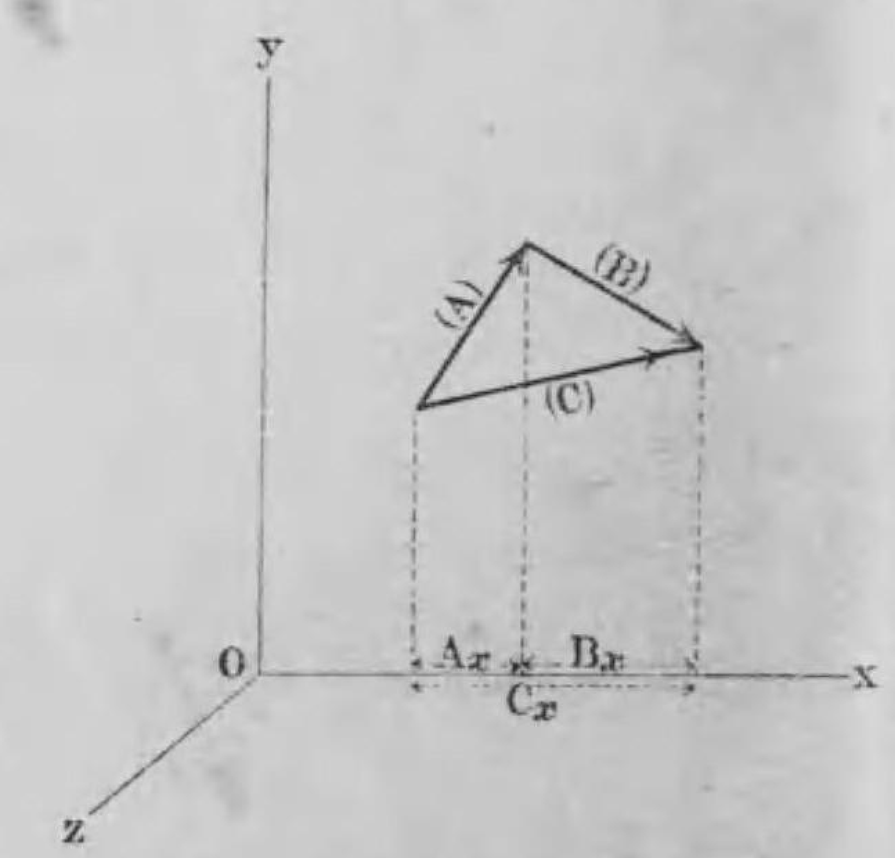
なりと記す。又(C)は(A)と(B)とを兩邊とする平行四邊形の對角線にて表はさると云ひ得べし。此加法の定義の結果として

$$(C)-(B)=(A),\qquad (C)-(A)=(B)$$

となりて減法の定義を得,卽ち(C)より(B)を減ずるは,(B)の方向を逆にしたるものを(C)に加へたることと同じ。

三つ以上のヴェクトルの和及び差も上に說明したる方法を繰り返して求むることを得べし。

上にはヴェクトルを圖上に於て加へ又減ずることを述べたるも,これを其ヴェクトルの部分につきて云はば如何なる事となるか。ヴェクトル(A)の部分を A_x, A_y, A_z ヴェクトル(B)の部分を B_x, B_y, B_z とすれば,(A)+(B)なるヴェクトルの部



第十一圖

分がそれぞれ A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z なるべきは射影の理によりて明なるべし。

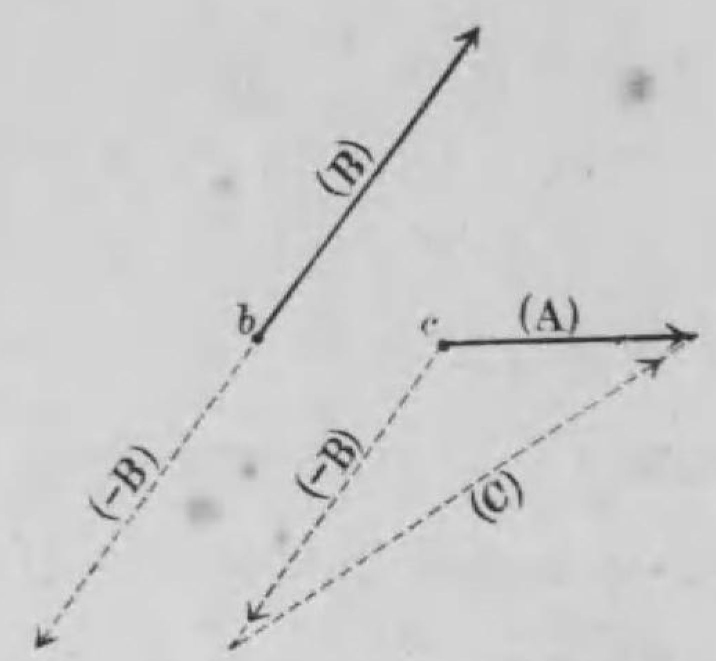
同樣に(C)−(B)なるヴェクトルの部分はそれぞれ C_x-B_x, C_y-B_y, C_z-B_z なり。

今これを速度の場合に適用せんに,一點が(A),(B)にて表はさるる二つの速度を同時に有すると云ふことは,畢竟(A)+(B)にて表はさるる速度(C)を有すと云ふに歸着すべく,又此事を分速度にて言へば,其部分が A_x, A_y, A_z なる速度と,其部分が B_x, B_y, B_z なる速度とを同時に有することは,卽ち A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z なる分速度を有すると同じことなり。

これを二つの速度(A),(B)を合成したるとき,(A+B)なる速度となると云ひ,此(A+B)にて表はさるる速度を合速度と稱す。又一點が(C)にて表はさるる速度を有するとき (C)=(A)+(B) なる關係ある(A)と(B)とに分ちて考ふれば,此點は(A)及び(B)の二つの速度を同時に有することとなる。これを(C)なる速度を(A)と(B)との二つの速度に分解すると云ふ。

次ぎに b 點が(B)にて表はされたる速度を有し,c 點は(C)にて表されたる速度を有するとき,b 點に對する c 點の速度を求めたきことあり。これを b 點に對する c 點の**相對速度**と云ふ。これを求むるには b, c 二點に

對して(−B)にて表はさるる速度を加ふるものと考ふればよく, b 點の速度は零となり, c 點の速度は(C)−(B)となる。これにより b 點に對する c 點の**相對速度**は(C)−(B)なるヴェクトルにて表はさるることを知る。



第十二圖

これを分速度にて表はせば, b に對する c の**相對分速度**は $C_x-B_x, C_y-B_y, C_z-B_z$ なりと云ふことを得べく又 b 點の分速度を $\frac{dx_b}{dt}, \frac{dy_b}{dt}, \frac{dz_b}{dt}$, c 點のそれを $\frac{dx_c}{dt}, \frac{dy_c}{dt}, \frac{dz_c}{dt}$ とせば, b 點に對する c 點の相對分速度は

$$\frac{dx_c}{dt}-\frac{dx_b}{dt},\quad \frac{dy_c}{dt}-\frac{dy_b}{dt},\quad \frac{dz_c}{dt}-\frac{dz_b}{dt}$$

なり。

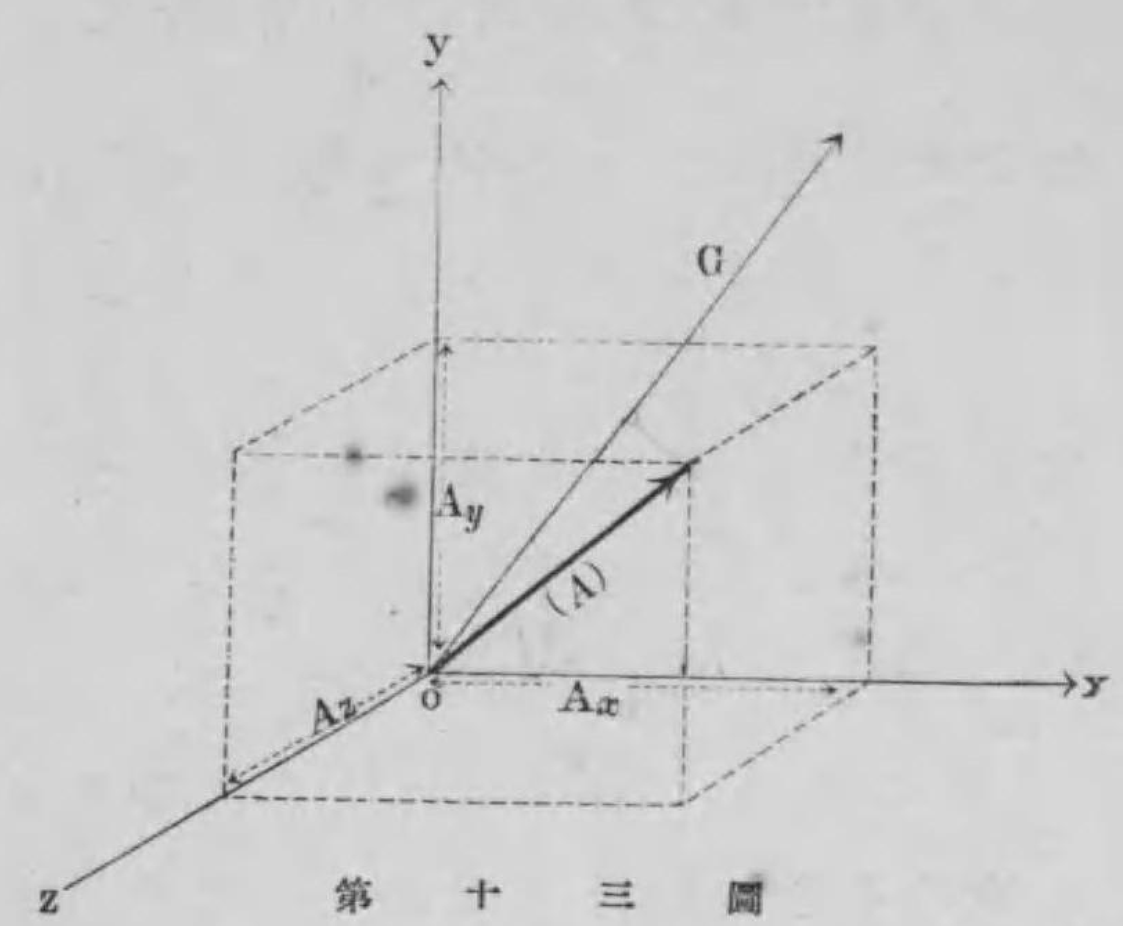
例　ヴェクトル(A)あり。一定の方向を有する直線G上に於ける(A)の部分を A_G とし,これを(A)の坐標軸上に於ける部分 A_x, A_y, A_z にて表はさん。

先づ定義によりて

$$A_G=A\cos(A,G)$$

なるべく又(A)のx, y, z軸となす角の餘弦はそれぞれ

$$\cos(A.x),\quad \cos(A.y),\quad \cos(A.z)$$



第十三圖

にして, Gのx, y, z軸となす角の餘弦はそれぞれ

$$\cos(G.x),\quad \cos(G.y),\quad \cos(G.z)$$

なり。然るに立體幾何學によりて

$$\cos(A.G)=\cos(A.x)\cos(G.x)+\cos(A.y)\cos(G.y)+\cos(A.z)\cos(G.z)$$

なるが故

$$(A_G)=A\{\cos(A.x)\cos(G.x)+\cos(A.y)\cos(G.y)+\cos(A.z)\cos(G.z)\}$$
$$=A_x\cos(G.x)+A_y\cos(G.y)+A_z\cos(G.z)。$$

これ求むる所の式なり。故に A_G は直線G上に於ける A_x, A_y, A_z の部分の和なりと云ふを得。

第四章

一般の場合に於ける加速度

11. 加速度。 一點が空間にて動く場合をとりて,其速度を定義したるが,これより加速度の定義を與へん。

點が空間を動けば其 x 坐標も亦其値を變ずべく其速度は $\frac{dx}{dt}$ にして其加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}$ なり。これと同様にして y, z 坐標につきては其加速度はそれぞれ $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ なり。故に此 $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ を以て其點の**坐標軸の方向に於ける分加速度**と定義するなり。又是等の分加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ を部分となせるヴェクトルを作り得べくこれにて表さるる加速度を**合加速度**又は略して**加速度**と稱す。此加速度を表はすヴェクトルを(J)にて表はすこととせん。

加速度は大さと方向とを有する一つのヴェクトルなれば,前章に述べたるヴェクトルの計算法を用ひて,其大さは

$$J=+\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

にして,其方向は

$$\cos(J.x)=\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{J}=\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{+\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

$$\cos(J.y)=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{J}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

$$\cos(J.z)=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{J}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}$$

によりて定まることを知る。

逆に合加速度(J)を知りて,三軸の方向に於ける其分加速度を求むれば,—

$$\frac{d^2x}{dt^2}=J\cos(J.x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=J\cos(J.y)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=J\cos(J.z)$$

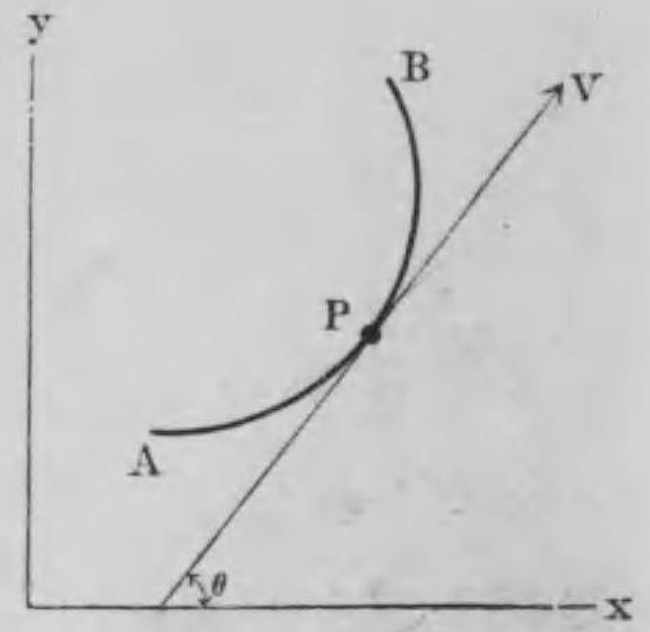
なり。

12. 切線並に法線の方向に於ける分加速度。

速度を表はすヴェクトルを(V)とすれば,其大さは $\frac{ds}{dt}$ にして其方向は徑路への切線の方向なること前に述べたる如し。されど加速度(J)の場合には其大さ並に方向を斯くの如く簡單に表はすことを得ず。加速度

の大さは一般に $\frac{d^2s}{dt^2}$ に等しからず，又其方向も必ずしも切線の方向と一致せず。從ひて加速度を表はすには三軸上に於ける部分を以てするを最も簡便とす。されど時として三軸以外の他の方向に於ける部分を以て表はすを便とすることあり。

今點が一平面上にある線 AB 上を動くものとし，時刻 t のとき P にありて其速度は(V)なりとせん。速度(V)の大さは $\frac{ds}{dt}$ にして，P に於ける(V)の方向と x 軸との間の角を θ とすれば



第十四圖

x 軸の方向の分速度 $V_x=\frac{ds}{dt}\cos\theta$,

y 軸の方向の分速度 $V_y=\frac{ds}{dt}\sin\theta$

にして，從ひて x, y 軸上の分加速度はそれぞれ

$$\frac{dV_x}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)\cos\theta-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt}$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}\cos\theta-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{dV_y}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\sin\theta+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt}$$

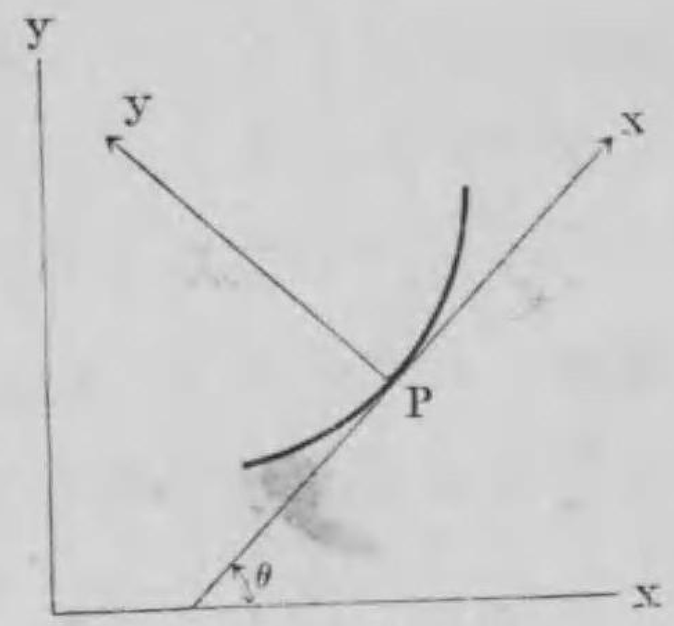
なるべし。此微分の際注意すべきは，s のみならず，θ も亦 t の函數なることとす。何となれば，t が變ずれば P も亦變じ從ひて P に於ける切線が x 軸となす角 θ も亦變ずべきを以てなり。

今 x, y 軸(第十五圖參照)は何處にとるも不可なきを以て，原點を P にとり，P に於ける切線を x 軸とし，法線を y 軸とすれば

$$\theta=o$$

なる故に

$$\cos\theta=1,\quad \sin\theta=o$$



第十五圖

にして從ひて x 軸の方向の分加速度は $\frac{d^2s}{dt^2}$ となる。これ P 點に於ける切線の方向の分加速度と稱すべきものにして，之を J_t にて表はさん。

同樣に y 軸の方向の分加速度は $\frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt}$ にしてこれ法線の方向の分加速度と稱すべきものなり。これを J_n にて表さん。此 J_n の式は少しく書きかへて

$$J_n=\frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt}=\frac{d\theta}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

とするを得べく $\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho}$ と置けば法線の方向の分加速度は

$$J_n=\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

となる。此 ρ はP點に於ける曲率半徑と名づけらるる者なり。斯く加速度Jは切線の方向の部分 $J_t=\frac{d^2s}{dt^2}$ と法線の方向の部分 $J_n=\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ との二部分にて表はすことを得るなり。

此事は平面運動に限らず點が空間を動く場合にも,其儘適用することを得。卽ち曲線上に於てP點に非常に接近せる二點をとり此三點にて決定せらるる一平面をとりて平面の場合と同樣に論じ得べし。

注意 時間の經過と共にPの位置は變じ,從ひてPに於ける切線並に法線の方向も亦變ずべし。上に述べたることは或る時刻に於て其時の切線及び法線の方向をx, y軸とすれば其の方向の分加速度がそれぞれ $\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ となると云ふの意にして從つて次の時刻をとれば,其時刻に於ける切線及び法線の方向と一致せる新らしきx, y軸の方向の分加速度がそれぞれ $\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ にて表さるることとなる。

例1. 半徑1の圓周上に等速運動をなす點あり,此加速度を求む。

此場合には前に述べたる如く

$$s=\omega t+\varepsilon$$

にしてx,y軸の方向に於ける分速度はそれぞれ

$$\frac{dx}{dt}=-\omega\sin(\omega t+\varepsilon),$$

$$\frac{dy}{dt}=\omega\cos(\omega t+\varepsilon)$$

なる故,分加速度はこれを t につきて微分し

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2\cos(\omega t+\varepsilon)=-\omega^2x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2\sin(\omega t+\varepsilon)=-\omega^2y$$

を得。從つて,其合加速度は

$$J=+\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\omega^2$$

にして,其方向は

$$\cos(J,x)=\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{J}=\frac{-\omega^2x}{\omega^2}=-x,$$

$$\cos(J,y)=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{J}=\frac{-\omega^2y}{\omega^2}=-y$$

なり。故に合速度の大さは ω^2 にして,其方向は其點より坐標の原點,卽ち圓の中心に向へることを知る。

又Pに於ける切線の方向の分加速度 J_t を求むるには s の式を微分して,

$$\frac{ds}{dt}=\omega,\quad 從つて\quad \frac{d^2s}{dt^2}=0$$

$$\therefore\quad J_t=0.$$

此圓は半徑1なれば其曲率半徑も亦1にして,法線

の方向の分加速度 J_n は

$$J_n=\frac{1}{1}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\omega^2$$

なり。

例 2. 上の例に於て半徑 a なるときは如何。

答　分加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y,$

加速度の大さは $J=a\omega^2$ にして

其方向は中心に向ふ。

例 3. 次の如き式にて表はさるる運動あり。これが速度及び加速度を求む。

$$x=a\cos(\omega t+\varepsilon),\quad y=b\sin(\omega t+\varepsilon).$$

答　$$\dot{s}=\omega\sqrt{a^2\sin^2(\omega t+\varepsilon)+b^2\cos^2(\omega t+\varepsilon)},$$

$$\ddot{x}=-\omega^2x,\quad \ddot{y}=-\omega^2y.$$

例 4. 點が平面上を運動するとき,切線の方向の加速度は

$$J_t=\frac{d^2x}{dt^2}\cos(T,x)+\frac{d^2y}{dt^2}\cos(T,y)=\frac{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

にして,法線の方向の分加速度は

$$J_n=\frac{-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

なることを證明せよ。此 T は切線の方向を表はす。

例 5. 一點 P が平面上にて運動するとき,其 x 軸の方向の分速度は x 坐標に比例し, y 軸の方向の分速度は y 坐標に比例すと云ふ。分加速度を求む。

答　$\frac{dx}{dt}=Kx$ とすれば $\frac{d^2x}{dt^2}=K\frac{dx}{dt}=K^2x.$

$\frac{dy}{dt}=K'y$ とすれば $\frac{d^2y}{dt^2}=K'\frac{dy}{dt}=K'^2y.$

例 6. 點が平面上に於て運動し任意の時刻 t に於ける位置が

$$x=t^2,\qquad y=t^3$$

にて定まるとき,時刻 t に於て徑路に切線並に法線の方向に於ける分加速度を求む

例 4 の J_t, J_n の式を用ひて

$$J_t=\frac{4t+18t^3}{t\sqrt{4+9t^2}}=\frac{4+18t^2}{\sqrt{4+9t^2}},$$

$$J_n=\frac{12t^2}{t\sqrt{4+9t^2}}=\frac{12t}{\sqrt{4+9t^2}}.$$

第二編

一質點の力學

第一章

運動の式

1. 質點. 前編に於ては速度及び加速度は何れもヴェクトルなること並に其合成及び分解につきて論じたるも,本編に於ては自然界に起る運動の簡單なる場合を考究せん。

大さを有する物體の運動は甚だ複雜なるを以て,爰に先づ**質點**の運動を考へん。質點とは其大さ並に形狀を度外視し得るものの意にして,一點と同樣に其位置を定め得るものなり。斯く云へばとて,其物を必ずしも幾何學上の一點と同一なりとするの要なし。只今考究せんとする運動に關して,其物の大さ及び形狀を論ずるの必要なき時,これを質點と看做すと云ふにあり。

例へば地球の如き大なるものにてもこれが太陽の周圍を運行する時は其運動の範圍に比して地球は極

めて小なる故これを質點と考へ得べし。これに反して一分子の如き小なるものにても,其廻轉運動を考ふる時は質點として論ずるを得ず。

2. 力. 今迄靜止したる物體が新に運動を始めたりとすれば,何か運動を生ぜしめたる原因の働きたるによると考ふるは至當の事なるべし。又これと同一の原因が,既に運動しつつある物體に働けば其物體の運動の狀態に何等かの變化を生ずべき事も亦明かなるべし。只玆に言ふ運動の狀態の變化とは如何なる變化にして,如何にして測定さるべきかは甚だ難き問題なり。初めてこれに解答を與へたるはガリレイにして,氏は運動狀態の變化とは前編に定義したる加速度を意味するものとせり。從て靜止せる物體が運動を始めたる場合にも加速度あり。故に物體が今迄靜止したりとも又既に運動しつつありとも,兎に角加速度の存在せる時は,これに外より働ける原因の存在せる事を示すものにして,此原因こそ**力**と名づけらるるものなり。吾人は手にて石を抛ち又物體を動かしたる場合に石又は物體が運動を始めたる原因は手の働きにあるべく,此際手の受くる一種の感覺は卽ち力の感じに外ならず.

斯く物體が加速度を有することは必ずや之に働く力

の存在を意味し,且つ其加速度の大さと方向とによりて力の大さと方向とを知り得るものとす。然れども飜りて考ふるに吾人の實測し得るものは加速度にして之を離れては力につきて何物をも定量的に知る所なし(上例に於ての如く筋肉の感じと云ふ如き定性的のものの外)。然るに何故に吾人は加速度の外に力なるものを考ふる必要あるか。

蓋し吾人の心は**同一の狀況の許にあるものは恆に同一の作用を受くるものと**考ふる習慣を有し,これを以て自然を學ぶ最も適當の方法なりと信ず。然るに不幸にも加速度につきては同一の狀況の許にあるものは恆に同一の加速度を受くと言ふ事を得ず。力なる考へを入れて初めて同一の狀況の許にあるものは恆に同一の力を受くと云ひ得るなり。例へば地球上にありと云ふ同一の狀況の下にある物體も,時としては落下の加速度を有する事あり,時としては有せざる事あり。地面に對しては同一の狀況にある書籍も,机上にあるときは靜止し,机を取れば落下するが如し。然れども地球上にある物體は,恆に落下の加速度を生ずべき原因たる重力が作用するものと看做し得べし。斯く同一の狀況の許にある事より,當然力が作用すと認め得べき場合にも,加速度の表はれざる事あるは何故か。其力は依然作用するも,それによりて生ずべき加速度を丁度打ち消す樣に他の力が同時に作用し,恰も力の作用なきときと同一の結果となるものとして解釋し得べし。上例に於て机上にある書籍にも重力は依然として作用するも,これと同時に机より物體に作用する力のあるありて重力を打ち消すため結局力の作用なきと同一の結果となりて靜止するなり。斯く自然界に起る運動の現象を考究するに當りこれが原因たる力に關係せしめて考究するを以て,力學なる名稱も亦起れるなり。

斯く一つ一つとしては其作用を知れる多くの力が,物體に同時に作用したる場合には,其際生ずる加速度は各〻の力によりて生ずべき加速度のヴェクトル和なることを實驗上知れり。從て前編に加速度の合成,分解を述べたるも,茲にも力の考へを入れて初めて其意味を生ずるなり。何となれば一點は只一種の運動をなし得るのみなれば其加速度も亦一定の値を有し,此合成分解の如きは實際上の意味なく,只多くの力の作用する場合をとりて爰に初めて加速度の合成は其意味を生ずるなり。

3. 運動の法則。力の何たるかは前節に於てこれを述べたり。これより進んで力學の基礎たる法則を

述べん。此法則は**ニユートン**が創めて運動の法則として發表したるものにして氏はこれを公理なるかの如くに說述したるも何れも實驗上の事實に基く法則にして,前編に述べたる速度又は加速度が何れも定義なりしとは全く其趣を異にす。

ニユートンの運動の法則は三あり。爰には其二つを述ぶることとし第三則は後編に於て說明すべし。

運動の第一則に云ふ所は,力の作用なきときは物體は靜止せる儘か又は現在の運動狀態を其儘持續するかと云ふにあり。これ前節に於てガリレイの發見に係かると云ひしものと同一にして,力の作用なきときは加速度なしと云ふに外ならず。物體が斯く靜止の狀態又は等速運動を其儘持續することを物體に慣性なる一種の性質ありと云ふことあり。

運動の第二則はニユートンが述べたる形式を變更して次の如くするを便とす。卽ち作用する力の方向とこれによりて生ずる加速度の方向とは相一致し,且つ力の大さは加速度の大さと物體の質量の大さとの相乘に比例す。唯一つの質點のみを論ずるときには,其質量は一定なる故强ひて其大小を云ひ表はす必要なきも,二つ以上の質點を取扱ふに當りては,其質量を比較する必要を生ず。卽ちこれ等質點に同一の力を

作用せしめ其際各質點の受くる加速度を測れば,上の法則によりて質量は加速度に逆比例するものとして比較し得らるべし。又總ての物體は重力の作用を受け,此重力の大小は質量に比例すること實驗によりて明かなれば,此理を用ひて物體の質量を比較するも可なり。

今適當の單位を用ひて物體の質量を測り得たりとし之を m なる數にて表はさん。又質量1の質點に働くとき1の加速度を生ずる力を,力の單位に選ぶこととせん。質量 m の質點に F なる力働きて,J なる加速度を生じたりとすれば上の法則によりて F と J とは同一の方向にありて且つ mJ は F に比例すべきも,今力の單位を $m=1$, J$=1$ のとき F$=1$ になる樣に選びたることなれば mJ は F に等しかるべし。

故に此關係はヴェクトルの式 $m(\mathrm{J})=(\mathrm{F})$ によりて表はさるべし。

實際に計算するには此ヴェクトルの式を用ひずして,坐標軸の方向に於ける分加速度及び力の部分を以てするを便とす。今質點の直角坐標を x, y, z とすれば,分加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$ にしてこれに働く分力をそれぞれ X, Y, Z とすれば,上式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

となる。斯く運動の第二則は上の**ヴェクトル**の式又は此三つの式によりて表はさるるなり。

此式はもと運動の第二則を表はしたるものなるも，第一則も亦此式中に含まる。何んとなれば力の作用なきときは X=Y=Z=0 なる故

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}=o$$

となり,從て $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ なる分速度は何れも常數となりて質點は等速運動をなすことを示し,又若し此常數が零ならば x, y, z は常數となりて，質點は靜止せることを示すを以てなり。

ニュートンは別に法則としては述べざりしも實驗上一質點に作用する力の效果は其質點に作用する他の力の影響を受くることなし。從つて一質點に多くの力が同時に作用するときは,これ等の力を其儘**ヴェクトル**として加へたる合力が其質點に作用するものと看做し得るなり。又これを坐標軸に就きて云へばこれ等多くの力の三軸上の分力を其儘加へ得ると云ふこととなる。

4.　運動の式.　質點の位置を坐標 x, y, z に依りて定め,三軸の方向に於ける力の部分を X, Y, Z とすれば前節に述べたる所によりて

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

なり。故に分力 X, Y, Z が x, y, z 並に t に依り如何に變ずるか,換言すれば X, Y, Z は x, y, z, t の如何なる函數なるかを知らば,此式によりて x, y, z がそれぞれ t の如何なる函數なるかを定め得べし。

今此函數

$$x=f_1(t),\qquad y=f_2(t),\qquad z=f_3(t)$$

を求め得たりとすれば,これによりて運動の有樣は全く知るを得べし。卽ち任意の時刻 t に於ける質點の位置 x, y, z は勿論,其速度は上式を微分して求め得べく,此三式より t を消去して質點の動く徑路をも明かにするを得べし。只爰に困難なるは上式を滿足する樣に t の函數として x, y, z を求むる方法の如何にあり。

5.　運動の有樣を與へて力を求むること.　時としては**質點の動き方が與へられて**,逆に**作用する力を求め**んとすることあり。例へば絲にて質點を結び,或る運動をなさしめたる場合に,此運動をなさしむるために絲に加ふべき力を求めんと云ふが如し。

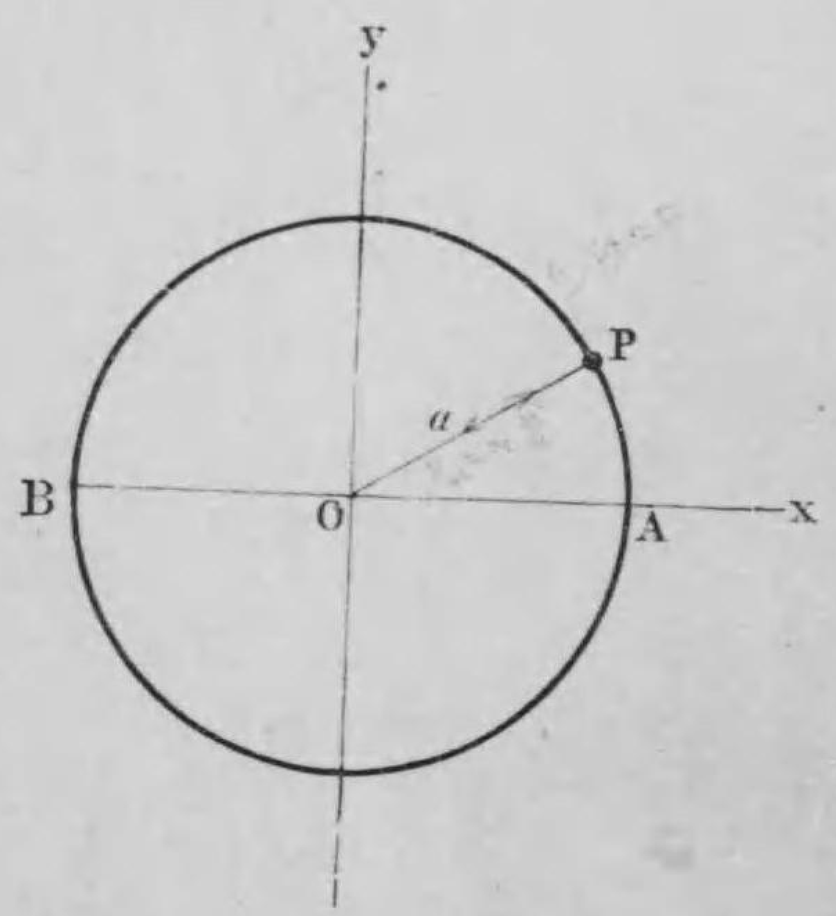
此問題は前述の直角坐標軸に關する式を用ひて解

き得るは勿論なれども,徑路が旣知なるを以てこれに切線及び法線を引き,其方向につきて考ふるを便とす。而して此方向に於ける加速度は,第一編第壹章 12 によりてそれぞれ $\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ なることを知れる故,此二つの方向に於ける力をそれぞれ F_t, F_n とすれば

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_t \qquad m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=F_n \quad \text{..............(1)}$$

なる關係を得。さて徑路は旣知なれば,これより曲率半徑 ρ を求め得べく,又 s が t により如何に變ずるかを知れるを以て,$\frac{ds}{dt}$ 並に $\frac{d^2s}{dt^2}$ を求め得べし,從て上式によりて F_t 及び F_n なる力を知り得べし。

今一例として,等速圓運動の場合をとりて考へん。卽ち質點を半徑 a の絲にて定點O に結び,此絲は伸びず又質量なきものとし,質點は半徑 a の圓上にて等速運動をなすものとせん。



第十六圖

然らば

$\frac{ds}{dt}$= 常數 これを v とす)

なる故

$$\frac{d^2s}{dt^2}=0$$

從て(1)式によりて

$$F_t=0$$

なり。又曲率半徑 ρ は a に等しく,$\frac{ds}{dt}=v$ なる故

$$F_n=m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{m}{a}v^2$$

となる。

故に切線の方向には力の作用なく只中心に向ひて $m\frac{v^2}{a}$ なる力の作用するのみなり,これ所謂**求心力**なり。又速度 v の代りに角速度 ω を與へたりとすれば,

$$v=a\omega$$

にして求心力は

$$F_n=m\omega^2a$$

となる。

第二章

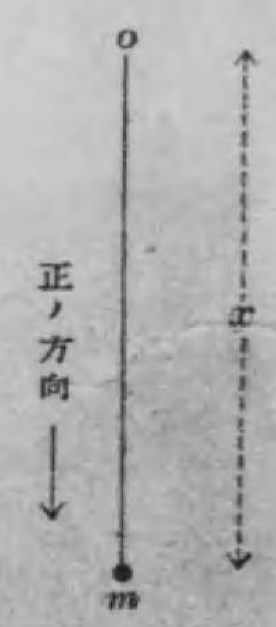
重　　力

6. 落體の運動. 地球上にある總ての物體は重力の作用を受く。今物體の質量を m とし,重力の加速度を g とすれば,重力の大さは mg にて表はさる。此 g は赤道と北極とにて,又高山の頂と海面とにて多少の差異あれども,實驗室內の如き小範圍內に於ては一定不變と看做すことを得。

今一點Oを原點とし,これより引きたる垂直線をx軸とし,下方に正の方向をとることとせん。質點が此直線上にて運動する場合を採りて考ふることとし,其坐標を x とすれば加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}$ にして運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg$$

なり。兩邊の m は相約し得るを以て,運動は m の大小如何に關せざることを知る。上式は



第十七圖

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g$$

卽ち

$$\frac{d^2x}{dt^2}-g=o \quad \text{..........................} (1)$$

となし得。これより x と t との關係を求むるには,上式を書き換へて,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)-g=o$$

とし,

$$g=\frac{d}{dt}(gt)$$

なることを考ふれば(1)式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-gt\right)=o$$

となる。これ $\frac{dx}{dt}-gt$ の t に對する微分係數が零なることにして,換言すれば $\frac{dx}{dt}-gt$ は t を含まざる常數なることを示す。故に

$$\frac{dx}{dt}-gt=\text{常數（これを } c_1 \text{ とす）} \text{..............} (2)$$

なり。而して(1)式よりは此常數につきて,全く知り得る所なし。

今任意の時刻例へば $t=o$ の時の質點の速度が v_0 なることを知り居たりとせば,これ上式の特別の場合に外ならざる故,上式に此條件を入れて c_1 を求むることを得べく,卽ち

$$t=o, \qquad \frac{dx}{dt}=v_0$$

と置けば

$$c_1=v_0$$

を得。故に上式は

$$\frac{dx}{dt}-gt=v_0 \text{..........................} (3)$$

となる。卽ち(1)式を滿足する多くの解答中 $t=o$ のとき $\frac{dx}{dt}=v_0$ なる條件を滿足するは(3)式なり。

次ぎに $gt=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ なるを以て，(3)式を書き換へ

$$\frac{d}{dt}(x)-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)=\frac{d}{dt}(v_0t)$$

卽ち
$$\frac{d}{dt}\left(x-\frac{1}{2}gt^2-v_0t\right)=o$$

とすれば $\left(x-\frac{1}{2}gt^2-v_0t\right)$ の t に對する微分係數も亦零となる故に

$$x-\frac{1}{2}gt^2-v_0t=\text{常數(これを } c_2 \text{ とす)} \text{......} (4)$$

となる。此常數 c_2 も(1)式又は(3)式によりては定むることを得ず。今任意の時刻，例へば $t=o$ のとき $x=x_0$ なりとせば，此値を(4)式に入れて

$$c_2=x_0$$

を得。從て(4)式は

$$x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0 \text{.......................} (5)$$

となる。

此式は落下する質點の任意の時刻に於ける位置を與ふるものなり。此式により任意の時刻に於ける速度其他此質點の運動に關する總ての事項を知り得べし。斯く x と t との函數的關係を表はす(5)式こそ吾人が求むる解答なり。

(1)式は**微分方程式**と名づけらるるものにして，これより(5)式を求むることを微分方程式を解くと云ひ(5)式を**解式**と云ふ。力學にて取扱ふ微分方程式は一般の微分方程式の智識を借らずとも容易に解き得るもの少からず。

(1)式は上に述べたる如くして解きたるも尚ほ他の方法にても之を解き得べし。次に其方法を說明せん。先づ(1)式を

$$\frac{d^2x}{dt^2}-g=o$$

と書きかへて，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=g, \quad \text{卽ち} \quad d\left(\frac{dx}{dt}\right)=gdt$$

としてこれを積分すれば，

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right)=\int gdt$$

卽ち
$$\frac{dx}{dt}=gt+c_1$$

となる。再び之を書き換ふれば

$$dx=(gt+c_1)dt$$

となり，これを積分すれば

$$x=\int(gt+c_1)dt=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$$

となる。卽ち(1)の解式を求むるには(1)式を二度積分して求むるも可なり。

7. 微分方程式の必要。 力學に於ては多くの現象

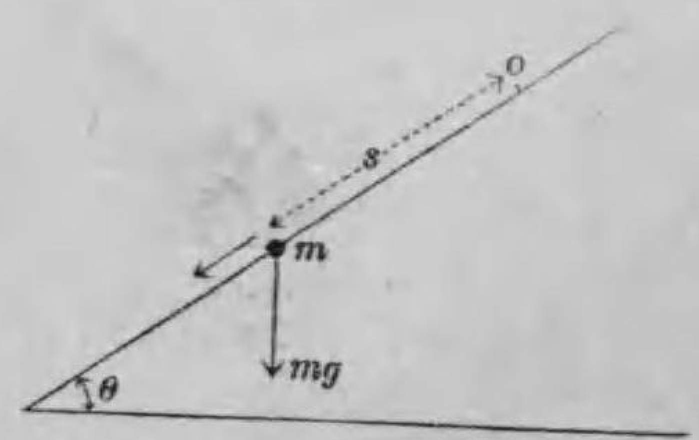
に就き共類似の性質を抽象し,これを一括して研究するを便とし。此目的を達するには微分方程式を用ふることを要す。今一例として,上に述べたる落體の運動に就て述べんに,質點が何れの位置より運動を始むるとも,こは主要なる事柄にあらず,これ等落體の現象に共通なる**重要なる特色は加速度が g に等しき**こととなり。こは

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g$$

なる微分方程式に依りて初めて表はさる。故に此**微分方程式には此特色を有する總ての場合を含む。**

而して格段の場合に於ける運動を定むるには,其運動に附帶する格段の條件を之に加入して考ふべく例へば $t=o$ のとき $v=v_0$ 及び $x=x_0$ なりと云ふが如き此格段の場合に於ける條件なり。これを**初めの條件**と云ふ。

次ぎに上に解きたる微分方程式と同様なる微分方程式に依りて定めらるる二三の運動を擧げん。



第十八圖

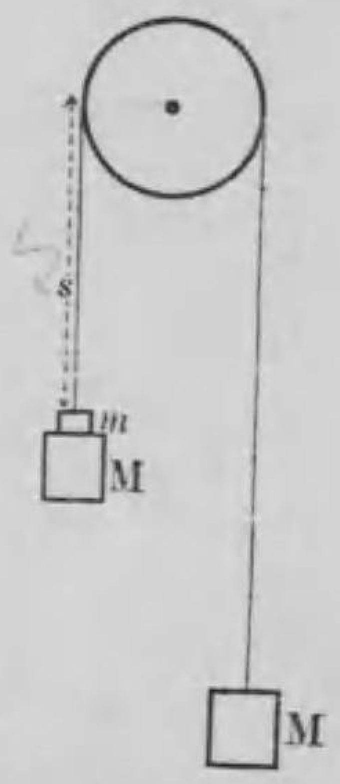
例 1. 水平面と角 θ をなす斜直線上に於ける質量 m なる質點の運動を論せよ。

此直線上の一點 o を原點とし,これより距離 s を測りて質點の位置を定むることとせん。重力は垂直下の方向に働くが故に,此斜直線に沿へる分力は $mg\sin\theta$ なり。從て運動の式は　摩擦ナイモノトスル件

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg\sin\theta$$

にして,落體の場合に於ける g の代りに $g\sin\theta$ を置けばよし。

例 2.　アトウードの裝置。



第十九圖

伸長することなく,且つ質量を有せざる絲の兩端に質量Mを吊し,これを滑車に懸け其一方に小なる質量 m を加へたるとき,Mは如何なる運動をなすべきか。

二つの質量Mは伸びざる絲にて結ばるるを以て,一方が下れば,夫れ丈け他方は上るべし。故に一方の運動を擧べば充分なり。

今 m を附したる方の運動を考ふる事とせん。定點より m に至る距離を s とすれば加速度は $\frac{d^2s}{dt^2}$ なり。次ぎに質量は一方には $M+m$, 他方には M なるを以て,動かさるべき全質量は $2M+m$ なり。又重力は一方にては運動の方向に $(M+m)g$ 他方に於ては運動と反對の

方向に Mg が作用する故，差引き $(M+m)g-Mg=mg$ が作用することとなる。故に運動の式は

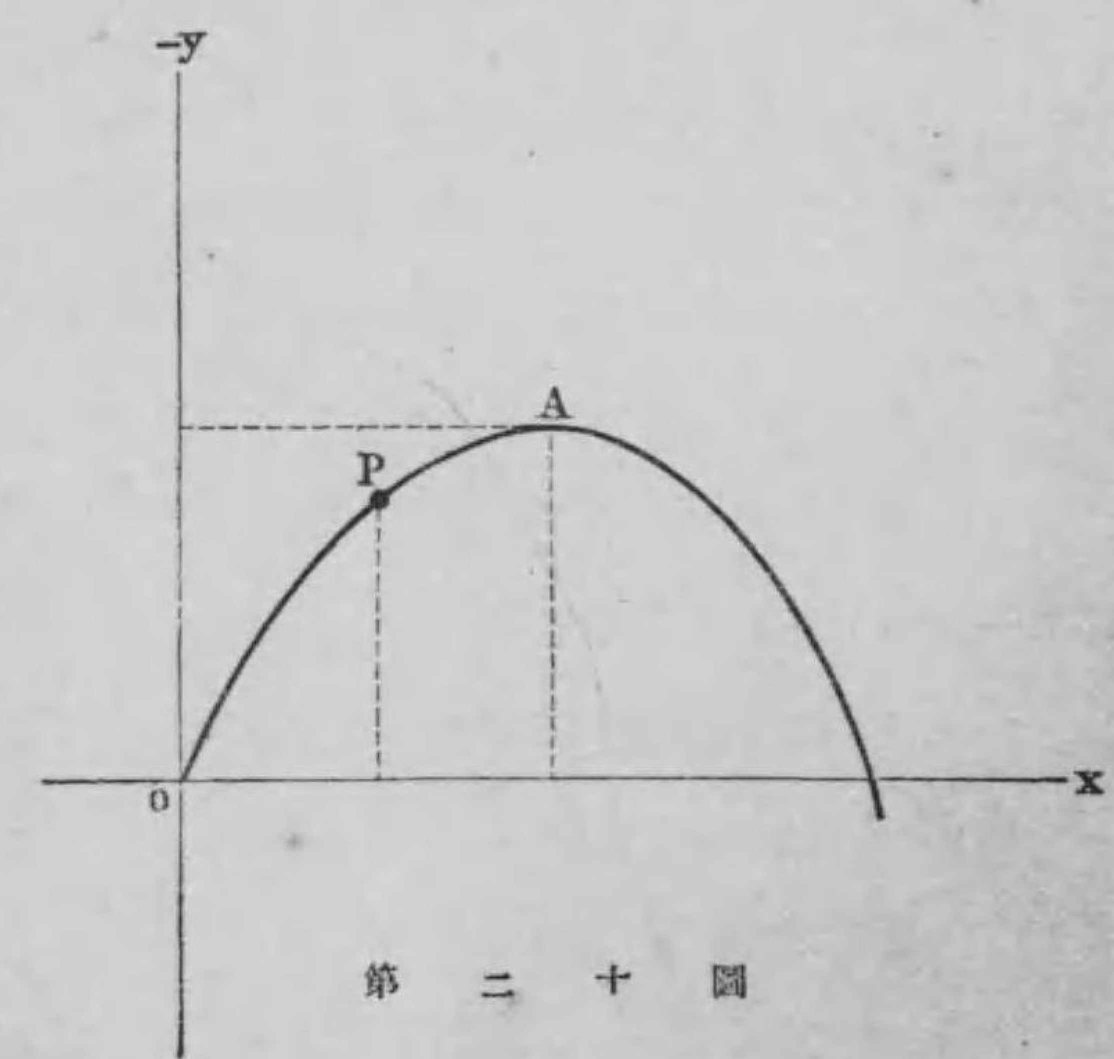
$$(2M+m)\frac{d^2s}{dt^2}=mg$$

或は　(運動スル全質量、2M+m)

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{m}{2M+m}g$$

にして，此運動の式も亦落體の運動の式と同様にして只 g の代りに $\frac{m}{2M+m}g$ を置きたるものなり。

5. 拋物體の運動。 質量 m なる質點に重力 mg が作用し，此質點が一垂直面内に於て運動する場合を考へん。x 軸を水平の方向に，y 軸を垂直下方に取りて質點の位置を定むることとせん。



第二十圖

x 軸即ち水平の方向には質點に作用する力なきを以て運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=o \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

にして，y 軸の方向には mg なる重力作用する故運動の式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

なり。此式の解は前に求めたる如く

$$y=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

なり。又 (1) 式は (2) 式に於て $g=o$ と置きたる場合なる故

$$x=c_3t+c_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

なり。此 (3) (4) の兩式によりて運動は定めらる。されど格段の場合を考ふるには常數 c_1, c_2, c_3, c_4 の値を知らざるべからず。これは質點の初めの條件によりて定まるものにして，今 $t=o$ のとき質點は $x=o, y=o$ にありとせんに，此條件を上式に入れて

$$c_2=o, \quad c_4=o$$

を得。故に (3) (4) 式は

$$y=\frac{1}{2}gt^2+c_1t$$

$$x=c_3t$$

となる。又 $t=o$ のとき質點の速度を u_0, v_0 とすれば，

$$\frac{dx}{dt}=u_0, \qquad \frac{dy}{dt}=v_0$$

なるを以て上式を微分して,

$$c_1=v_0, \qquad c_3=u_0$$

を得べく,これを上式に入るれば

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{2}gt^2+v_0t \\ x&=u_0t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

を得。此式によりて質點の位置は全く定まる。

又時間の經過につれて質點の位置は漸次變ずべく,此際質點の運動せる軌跡を求めんには x, y の兩式より t を消去して x と y との關係式を作るべし。此軌跡を徑路と云ふ。この場合には徑路の式は

$$y=\frac{v_0}{u_0}x+\frac{g}{2u_0^2}x^2$$

なり。これを書き換へて,

$$\left(x+\frac{u_0v_0}{g}\right)^2=\frac{2u_0^2}{g}\left(y+\frac{v_0^2}{2g}\right)$$

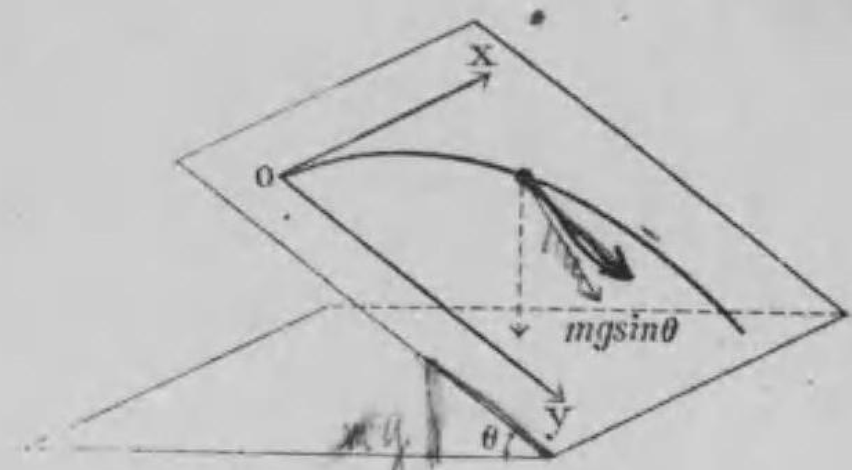
と爲すを得べく,此式は

$$-\frac{u_0v_0}{g}, \quad -\frac{v_0^2}{2g}$$

を頂點とする拋物線なることを知る。

上には垂直面內に於ける運動を考へたるも,水平面と角 θ をなす平面內に於ける質點の運動も,之と同樣にして論ずることを得べし。今此平面內に於て水平の方向に x 軸をとり,これに直角に此面內にて下方に

y 軸を取らん。



第二十一圖

然らば質點に働く重力 mg は,垂直に下方に向ふを以て,y 軸の方向の分力は $mg\sin\theta$ なり。故に運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=o, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=mg\sin\theta$$

となる。これ前の(2)式の g の代りに $g\sin\theta$ と置きたるものに外ならずして其徑路も亦拋物線なるを知るべし。

例　質點が高さ y にあるとき其分速度を u, v とすれば次ぎの關係ある事を證明せよ。

$$u^2+v^2+2gy=u_0^2+v_0^2.$$

之を證明するには(5)式を t に就きて微分し

$$\frac{dx}{dt}=u=u_0, \qquad \frac{dy}{dt}=v=gt+v_0,$$

と爲し,然る後兩邊を二乘して相加ふれば

$$u^2+v^2=2g\left(\frac{1}{2}gt^2+v_0t\right)+v_0^2+u_0^2$$

となる。故に

$$u^2+v^2+2gy=v_0^2+u_0^2.$$

若し此式の兩邊に $\frac{1}{2}m$ を乘ずれば,

$$\frac{1}{2}m(u^2+v^2)+mgy=\frac{1}{2}m(u_0{}^2+v_0{}^2)$$

となる。第一項の $\frac{1}{2}m(u^2+v^2)$ は $\frac{1}{2}\times$ 質量 $\times$ (速度)^2 にして**運動のエネルギー**と名づけられ,また第二項 mgy は**位置のエネルギー**と名づけらるるものなり。また右邊の $\frac{1}{2}m(u_0{}^2+v_0{}^2)$ は初めの時に於ける質點の運動のエネルギーを表はす,此質點は初めの時 $y=o$ なりし故其時の位置のエネルギーは零なり。故に,上式は運動のエネルギー及び位置のエネルギーの和は恆に一定の値を有することを示し所謂**エネルギーの保存則**を表はすものなり。

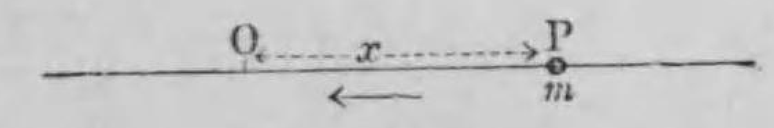
第三章

彈　　力

9.　彈力。 質點が一定の位置Oにある時は釣合の有樣にありて力の作用を受けざれども,他の位置Pにあるときは一定の力の作用を受け其力の方向はPよりOに向ひ,其大さは OP の距離に比例するものとせん。然らば質點がOより遠ざかれば遠ざかる程,大なる力にて釣合の位置Oに引き戻さるべし。斯くの如き力を**彈力**と云ふ。これ彈性體が變形を受け舊の狀態に復せんとする時に表はるる力と相類似するを以てなり。先づ質點が彈力に作用せられて一直線上を運動する場合を論ぜん。

10.　彈力のもとに一直線上を運動するとき。 釣合の位置Oを原點とし其力の方向を示す直線をX軸に取り,P點の坐標を x とすれば,彈力は x に比例し其方向は x の減ずる向きにあるを以て

$$X=-a^2x$$



第二十二圖

にて表はすことを得べし。此 a^2 は常數にして,其値が大なる程同じ位置 x に於ける彈力Xも亦大となる故,

a^2は彈力の大さを示すものと看做し得。質點の質量は m にして加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}$ なれば運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x \text{ .... } (1)$$

なり。此式は右邊に變數 x を含むを以て,落體の場合の如く簡單ならず,從て x と t との關係を直ちに求むるを得ず。上式を解く爲め先づ兩邊に $\frac{dx}{dt}$ を乘ずれば

$$m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x\frac{dx}{dt}=o \text{ .... } (2)$$

然るに

$$m\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]=-a^2x\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]$$

$$a^2x\frac{dx}{dt}=a^2\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}x^2\right]$$

なるを以て,上式は

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}a^2x^2\right]=o$$

と爲すを得。これによりて括弧內の量は時間 t に無關係なる常數なることを知るべく,此常數を E とすれば

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}a^2x^2=\mathrm{E} \text{ .... } (3)$$

となる。

此式の第一項 $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ は $\frac{1}{2}\times$(質量)$\times$(速度)^2 にして,此質點の**運動のエネルギー**を表はし又第二項 $\frac{1}{2}a^2x^2$

は質點が x にあるときの**位置のエネルギー**を表はす。(位置のエネルギーは $-a^2x$ なる力に逆ひて質點を靜止の位置 x 迄動かすときの仕事 $\int_o^x(+a^2x)dx=\frac{1}{2}a^2x^2$ に等しきこと第五編に至りて說明すべし)。

而して此二つのエネルギーの和が常に同一の値を有することを(3)式より知り得べし。卽ち(3)式はエネルギー保存則を表はす式なり。而して今の場合に運動並に位置のエネルギーは何れも正の量なるが故この何れの量もEなる一定の値より大なること能はず。卽ち x が增加するものと考ふれば位置のエネルギー $\frac{1}{2}a^2x^2$ も亦增加する故運動のエネルギー $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ は減ずるの外なく終には零となるべし。これ其時の速度 $\frac{dx}{dt}$ が零なることを示すを以て,質點はこれ以上 x の增す方へ進む能はずして戾るの外なし。故に質點は x の値の或範圍內にて往復運動をなすことを推定するに難からず。

速度が零となりたるとき質點は最大の變位に達したるものにして其時の x の値を h とすれば

$$\frac{1}{2}a^2h^2=\mathrm{E}$$

なり。之を上式に入るれば,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}a^2(h^2-x^2)$$

となる。これより

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{a^2}{m}}\sqrt{h^2-x^2}$$

を得。此際平方根の符號は如何に定むべきかと云ふに,質點は往復運動をなすが故 $\frac{dx}{dt}$ は正なることも負なることもあるに相違なし。

また $\sqrt{\frac{a^2}{m}}$ の符號は正,負何れかに定むれば恆に同じ符號を有する故今正符號を取るものとせん。

然らば $\sqrt{(h^2-x^2)}$ の符號を選ぶには $\frac{dx}{dt}$ の符號と同一ならしむべく從て

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{h^2-x^2}}$$

なる形に置けば常に一定の符號を有することとなる。

故に上式を

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{h^2-x^2}}=+\frac{a}{\sqrt{m}}$$

とし,これを

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{h}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}-\frac{a}{\sqrt{m}}=0$$

の形に書き直せば再び變形して

$$\frac{d}{dt}\left\{\cos^{-1}\frac{x}{h}-\frac{a}{\sqrt{m}}t\right\}=0$$

と爲し得べし。これより括弧內にある量は t に無關

係の常數なることを知る。これを ε とすれば

$$\cos^{-1}\frac{x}{h}-\frac{a}{\sqrt{m}}t=\varepsilon$$

$\frac{1}{h}\frac{\sqrt{m}}{a}\cos^{-1}\frac{1}{h}-t=$

にして

$$x=h\cos\left(\frac{a}{\sqrt{m}}t+\varepsilon\right) \quad\text{..............(4)}$$

を得。此式にて x を t の函數として表はし得たり。

此式の形より質點の運動は單弦運動なることを知り得べく,餘弦は $+1$ と -1 との間にて變ずる故,x は $+h$ と $-h$ との間にて變じ,其變化の模樣は餘弦函數と同樣なることを知る。又餘弦は角 2π を增加する毎にもとの値に復するを以て,質點が T なる時間の後同じ位置に歸り,同じ方向に同じ速度にて運動するものとすれば

$$\frac{a}{\sqrt{m}}\mathrm{T}=2\pi,$$

卽ち

$$\mathrm{T}=2\pi\frac{\sqrt{m}}{a}$$

なる可く,此式にて定めらるるTを週期と稱す。

上式に依りて,週期が力の强さ a^2 と質量 m とに依りて如何に變化するかを知り得べし。卽ち a^2 が大なる程,Tは小に,m が大なる程Tは大なり。時としては週期よりも,一秒時間になす振動數を知るを便とすることあり。これを單に**振動數**と云ふ。今振動數を ν とすれば

$$\nu=\frac{1}{\mathrm{T}}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{a}{\sqrt{m}}$$

なり。尙ほ 2π 秒間になす振動數を n とせば

$$n=2\pi\nu=\frac{a}{\sqrt{m}},$$

即ち

$$n^2=\frac{a^2}{m}$$

にて與へらる。

此 n を代入すれば,運動の式 (1) は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x$$

と書くを得べく,又其解は

$$x=h\cos(nt+\varepsilon)$$

となる。此 h と ε とは常數にして,初めの條件に依りて定まるものなるも,時としては上式を

$$x=h\cos nt\cos\varepsilon-h\sin nt\sin\varepsilon.$$

の形とし $h\cos\varepsilon=\mathrm{A},\quad -h\sin\varepsilon=\mathrm{B}$

と置きて

$$x=\mathrm{A}\cos nt+\mathrm{B}\sin nt \quad\text{..................(5)}$$

とすることあり。然る時は h,ε なる二常數の代りに A, B なる常數を用ひたることとなる。從うて此 A, B は初めの條件に依りて,定めらるるものなり。

11. 微分方程式の性質。 前節に述べたる微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x$ の性質を研究せん。今此微分方程式

を滿足する x の二つの値 x_1, x_2 を得たりとすれば

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-n^2x_1 \quad\text{........................(1)}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=-n^2x_2 \quad\text{........... ....(2)}$$

なるべし。此初めの式に常數Aを,次の式に常數Bを乘じて,相加ふれば,

$$\mathrm{A}\frac{d^2x_1}{dt^2}+\mathrm{B}\frac{d^2x_2}{dt^2}=-n^2(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}x_2),$$

即ち

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}x_2)=-n^2(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}x_2)$$

となる。これ $(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}x_2)$ も亦上の微分方程式を滿足することを示すものにして且つA及びBは任意の常數にて可なり。

質點が直線上を運動する場合にありては,初めの條件と看做すべきものは,位置と速度との二つにして,これを滿足せしむるには微分方程式の解が二つの常數を含むことを要す。これを其微分方程式の**全解**と名づく。又若し常數が二つより少きときは其解を**特解**と名づく。上に得たる $\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}x_2$ は A, B なる二個の常數を含むを以て其微分方程式の全解にして, x_1, x_2 は何れも其特解なり。

扨て上の計算には虛數 $i=\sqrt{-1}$ を入るるも差支なきを以て(1)式にA,(2)式に iB を乘じて加ふるときは,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{A}x_1+i\mathrm{B}x_2)=-n^2(\mathrm{A}x_1+i\mathrm{B}x_2)$$

を得。故に Ax_1+iBx_2 も亦,もとの微分方程式の解なることを知る。而して複素量の相等しきと云ふ場合には,恆に實量並に虛量の各ゝが相等しきことを示すものなり。故に上の場合に於ても Ax_1 なる實量と iBx_2 なる虛量とが何れも別別に微分方程式を滿足することを示すものにして,これ x_1, x_2 の各ゝが微分方程式の解なりと云ふに外ならず,結局何等新らしき關係を得たるにあらず。然れども微分方程式を解く場合に實量の解よりも却て複素量の解を得易きことあり。然らば先づ複素量の解を求め然る後これを實量の部分と虛量の部分とに分ちて,爰に微分方程式の特解二個を同時に求め得べく,場合に依りては此二個の特解より全解をも作り得べし。今上の微分方程式を例にとりこれを說明すべし。

今試みに $x=e^{pt}$ と置き,此 p は未定の數とせん。これを t につきて微分すれば,

$$\frac{dx}{dt}=pe^{pt}=p.x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}(px)=p.\frac{dx}{dt}=p^2x$$

を得。これを上の微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x$ に入るれば

$$p^2x=-n^2x$$

となる。故に若し p が $p^2=-n^2$ 即ち $p=\pm in$ なる關係

を滿足するものとせば $x=e^{pt}$ 即ち $x=e^{\pm int}$ は上の微分方程式の解なりと云ふを得べし。然るに

$$e^{\pm int}=\cos nt\pm i\sin nt$$

なるが故,今得たる解は元の微分方程式の複素量としての解なることを知る可し。斯く複素數の解が實量の解よりも反つて容易に求め得るなり。既に此複素量の解を求め得ればこれより $\cos nt$, 及び $\sin nt$ の各ゝも亦上の微分方程式の特解なるべく,即ち

$$x_1=\cos nt,\quad x_2=\sin nt$$

なることを知る。又此二特解より直ちに全解

$$x=A\cos nt+B\sin nt$$

を得べく,前に得たる結果と一致するを見るべし。

12. バネと錘。 一端を固定したるバネの下端に質量 m の錘を附し,これを下方に引きたる後放たば錘は上下に運動をなすべし。これ彈力の許に起る運動の一例なり。錘の運動の爲めバネは x 丈伸び又は縮むものとすれば,バネは x に比例する力を以てもとの長さに戻らんとする傾向を生じ,これが爲め錘は其變位 x に比例し,且つ釣合の位置に向ふ力に働かるることとなる。今 x はバネのもとの長さに比し

第二十三圖

て小なりとし又バネの質量は錘の質量 m に比して省略し得るものとせん。又錘には重力の作用するを以て錘を附けたる爲めバネは既にその自然の長さより幾分か引延ばされをるべく,此影響をも考へに入るることとせん。錘に作用する力は重力 mg とバネの及ぼす彈力 $-a^2x$ との二つなる故運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x+mg$$

にして

$$n^2=\frac{a^2}{m}$$

と置けば

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=g$$

となり
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x-\frac{g}{n^2}\right)+n^2\left(x-\frac{g}{n^2}\right)=o$$

とすることを得。これ前の微分方程式の x の代りに $x-\frac{g}{n^2}$ を置きたるものに等しき故其解は **10** の(5)式と同様に

$$x-\frac{g}{n^2}=\mathrm{A}\cos nt+\mathrm{B}\sin nt$$

なり。此式は $x_1=\frac{g}{n^2}$ なる位置を中心とせる單弦運動なることを示す。この $x_1=\frac{g}{n^2}$ なる位置は彈力 $\left(-a^2x_1=-\frac{a^2g}{n^2}=-mg\right)$ と重力 mg とが釣合を保つ所にして錘がバネを引き伸ばしたるまま靜止する位置なり。

13. 小振幅の振動. 直線上に於ける振動の問題は其振幅が小なるものと看做さるる場合には質點に作用する力の如何に拘はらず **10** に論じたる場合に歸著す。

先づ質點が釣合の位置より小距離 x 丈け變位したる爲めに $f(x)$ なる力を受くるものとせん。

x が小なる故,$f(x)$ を x の級數に展開して

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots$$

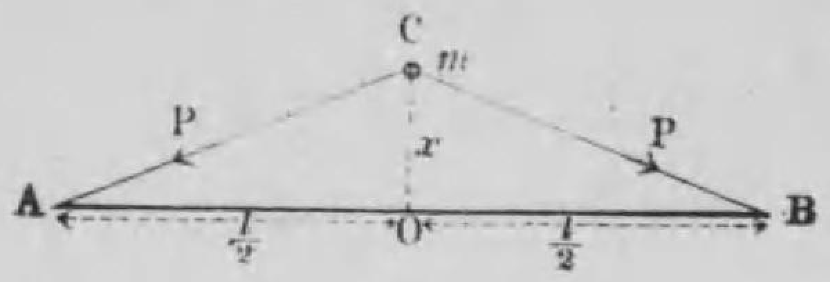
なる形と爲し得べし。而して $x=o$ は釣合の位置なる故此所にては力 $f(x)$ は零なるべく從て $a_0=o$ なり。又 x を小なりと假定したる故,x に比較して x^2 以上の項を省略するも不可なかるべく結局

$$f(x)\doteqdot a_1x$$

と看做し得べし。次ぎに此力が變位の方向に作用する場合には質點は益〻大なる變位を受くるのみにてもとの位置に歸ることなく從ひて小振動とはならず。質點が小振幅の振動をなすには,力は變位と反對の方向に向ひて作用すべし。これ a_1 の符號が負なることに外ならず。これより,釣合の位置の附近に於ける振動は何れも **10** に論じたる如き運動卽ち單弦運動なることを知り得べし。

例 1. 針金に張力 P を加へて A, B 二點間に張り,

其中央Cに質點mを附し,これを其平面內にてABに直角の方向に動かしたる後,手を放たば質點mは如何なる運動をなすべきか。但し針金の質量は省略し得るものとし,且つ橫の變位は非常に小なるものとす。



第二十四圖

橫の變位をx,針金の長さをlとすれば,$\frac{x}{l}$は極めて小なり。從てxの何れの値に對しても張力Pは其大さを變ぜざるものと看做し得べし。されど其方向を變ずるため,OCの方向に分力を生じ,此方向は即ち質點mの變位する方向なり。$\frac{x}{l}$は小なる故 sinCBO 及び sinCAO は何れも$\frac{x}{\frac{l}{2}}$と置くことを得。從うて張力PのOCの方向に於ける分力として

$$-P\sin CBO-P\sin CAO=-2P\frac{x}{\frac{l}{2}}=-4P\frac{x}{l}$$

を得。故に運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-4P\frac{x}{l}$$

なり。今$l=100$糎,$m=5$瓦,$P=980\times1000$ダインとすれば其週期は$T=0.071$秒となる。

例2. 上例に於て $AC=a$, $CB=b$ なる時週期が

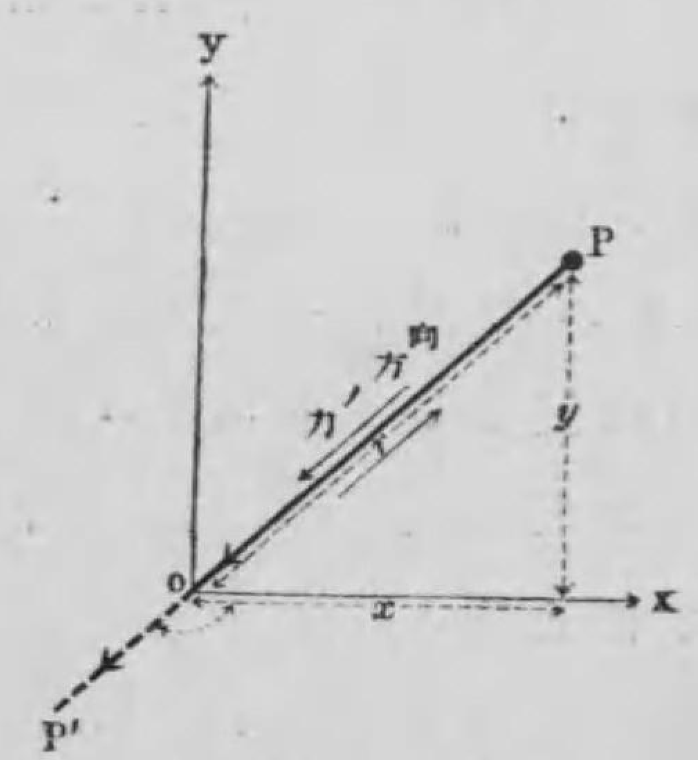
$2\pi\sqrt{\frac{m}{P}\frac{a.b}{a+b}}$ なることも,これと同樣にして證明し得。

針金の長さが與へられたる時には質點を中央(即ち$a=b$)に附したるときの週期が最大なり。

14. 彈力に基く平面上の運動。 彈力に作用せられつつ質點が一直線上を運動する場合は之を**10**に於て述べたり。これより質點が彈力の作用を受けて,一平面上を運動する場合の研究に進まん。

質點に働く力は彈力なるを以て,其大さは一點Oより質點に至る距離rに比例する故a^2rとして表はし得べく,其方向はOに向ふ。

質點の運動は一平面上にあるを以て,定點Oを原點とし,此平面上にx, y軸を取り,時刻tに於て質點の占むる位置Pの坐標をx, yにて表はさん。然らば質點の受くる力のx軸の方向の分力の大さはa^2rに乘ずるにx軸とPOP′との間の角,P′OXの餘弦を以てしたるものに等しかるべし。



第二十五圖

而して此餘弦は大さ$\frac{x}{r}$にして,(−)の符號を有するを以てx軸の方向の分力として

$$-a^2r\frac{x}{r}=-a^2x$$

を得。これと同様にして, y 軸の方向の分力は

$$-a^2r\frac{y}{r}=-a^2y$$

なり。故に質點の質量を m とすれば,其運動の式は,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-a^2y,$$

即ち
$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{a^2}{m}x,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{a^2}{m}y$$

なり。此微分方程式は **10** の(12)式 $\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x$ と全く同じ形なる故 $n=\frac{a}{\sqrt{m}}$ とし, A, B, A′, B′ が常數を表はすものとして其解は

$$x=\mathrm{A}\cos nt+\mathrm{B}\sin nt,$$

$$y=\mathrm{A}'\cos nt+\mathrm{B}'\sin nt$$

なることを知るべし。若し初めの條件として, $t=o$ のときの質點の位置及び速度を與へられたるものとすれば, x, y 坐標並に x, y 軸の方向に於ける分速度の四つの既知量より A, B, A′, B′ を定め得べし。されど此計算に立ち入る事を止め今は只質點の動く徑路を求むるに止めん。

これを求むるには上式より t を消去して, x と y との關係を求むればよく,これには上式を書き換へて

$$\mathrm{A}\cos nt+\mathrm{B}\sin nt-x=o,$$

$$\mathrm{A}'\cos nt+\mathrm{B}'\sin nt-y=o$$

とし,これを $\cos nt$, $\sin nt$ に對する聯立方程式と看做して,解けば

$$\cos nt=\frac{\mathrm{A}'x-\mathrm{A}y}{\mathrm{AB}'-\mathrm{BA}'},\quad \sin nt=\frac{\mathrm{B}'x-\mathrm{B}y}{\mathrm{AB}'-\mathrm{BA}'}$$

を得。而して $\cos^2nt+\sin^2nt=1$ なる關係あるにより上式の兩邊を二乘して相加ふれば

$$(\mathrm{A}'x-\mathrm{A}y)^2+(\mathrm{B}'x-\mathrm{B}y)^2=(\mathrm{AB}'-\mathrm{BA}')^2$$

を得。これ x, y の關係式にして t を含まざる故徑路の式なり。此式が x, y に就きて二次式なるより圓錐曲線を表はすことを知るべく,尙ほ書き直して

$$x^2(\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2)+y^2(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)-2xy(\mathrm{AA}'-\mathrm{BB}')=(\mathrm{AB}'-\mathrm{A}'\mathrm{B})^2$$

とすれば, x^2, y^2 の係數は共に正量なることより,此曲線が橢圓にして,其中心が原點にあることを知るべし。もとより初めの條件の如何に依りて質點の動く徑路は種種異なるべしと雖も,何れも**原點を中心とする**橢圓たることに至りては何時も變りなし。これ彈力に作用せられて質點が平面運動をなすときの特色にして,恰も重力の作用する場合に質點の徑路が必ず拋物線たる特色を有せしことに相似たり。

又 t が $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{n}$ 丈け增加する每に $\cos nt$ 及び $\sin nt$ は何れも前と同一の値に復し,從ひて x, y も亦前と全く同一の値に復す。これ質點が徑路を一周することを

示す。これに要する時間$T=\frac{2\pi}{n}=2\pi\frac{\sqrt{m}}{a}$は其週期なり。

此式より直ちに,週期Tが徑路たる楕圓の大小,形狀の如何に關することなく,只質點の質量並に彈力の大さのみに依りて定まることを知るべし。

斯く徑路は一般に楕圓なるも,特別の場合にこれが直線となることあるべし。これ質點が直線上を運動するときにして,**10** に論じたるものに外ならず。今一つ特別なる場合あり,こは楕圓が圓となるときなり。此時質點に働く力は中心に向ふを以て切線の方向には分力なく,從ひて質點の速度は何時も同一にして等速圓運動となる。これ**4**に述べたるものなり。

例 1. 彈力の大さを表はすa^2rのa^2を週期Tにて表はせば$a^2=(2\pi)^2\frac{m}{T^2}$となるべし。

又rが一定にして等速圓運動をなす場合を採れば**4**によりて求心力の大さは$m\frac{(\text{速度})^2}{\text{半徑}}$なり。此半徑を$r$とし,速度を$r$と週期Tとにて表はせば求心力の値は彈力$a^2r$より得たる値$(2\pi)^2\frac{m}{T^2}r$と同一なり。

例 2. 同一の週期を有し,互に直交する單弦運動はこれを合成すれば楕圓運動となり,特別の場合には直線運動又は圓運動となることを證明し得べし。これ光學及び音響學に於て屢〻應用さるるものなり。

例 3. 質點が一直線上にて動くものとし,原點よりの距離xに比例する斥力が作用する場合には運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=a^2x$$

なる形を有すべし。今試みに$x=e^{pt}$と置けば

$$p^2=a^2 \quad \text{即ち} \quad p=\pm a$$

となり,從て此微分方程式の解は

$$x=Ae^{at}+Be^{-at}$$

なることを知る。

例 4. 質點が一平面上にて動くものとし,原點よりの距離rに比例する斥力が作用する場合には,運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=+a^2x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=+a^2y$$

にして,此解は

$$x=Ae^{at}+Be^{-at}, \qquad y=A'e^{at}+B'e^{-at}.$$

となる。質點の徑路は$(A'x-Ay)(B'x-By)=$常數。にて與へられ,原點を中心とする雙曲線となる。

15. 彈力に基く一般の運動. 彈力に作用せらるる質點が空間に於てなす運動も,一平面上に於ける運動より推定することを得。

固定點Oと初めの時の速度の方向とに依りて,一平面定まるべく彈力は恆に此平面內に於て作用するを以て質點は此平面以外に出ずることなく,其運動は恆

に此平面内に限らる。從て此平面を xy 面と看做せば,**14** に說明せる理論を其儘適用することを得べし。故に彈力に作用せらるる**質點が空間を運動する場合も亦質點の徑路は原點を中心とせる橢圓にして週期は** $T=2\pi\frac{\sqrt{m}}{a}$ **なることを知る。**

例 1. 前述の一般の場合の運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-a^2y,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=-a^2z$$

なり。

解 原點より質點へ向へる直線の方向餘弦がそれぞれ $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$,なることより容易に上式を得べし。

例 2. 質點の位置が

$$x=A\cos nt+B\sin nt,$$

$$y=A_1\cos nt+B_1\sin nt,$$

$$z=A_2\cos nt+B_2\sin nt$$

にて表はさる時は,其徑路は一平面内にあり。

解 これ等の式中何れか二つをとり $\cos nt$, $\sin nt$ に就きて解き,其値を殘りの式に入るれば x, y, z 間の一次式を得べし。此一次式にて表はさるる平面内にて質點は運動す。

例 3. 同一の週期を有し,互に直交せる三つの方向に於ける單弦運動を合成すれば橢圓運動となるべし。

第四章

球振子

16. 球振子. 球振子とは重力の作用を受けつつ球面上を運動する質點の意なり。斯く運動を球面上に限るは,質點が此面より少しにても離るれば直ちに力の作用を受けて再び此面に引き止めらるるに依る。

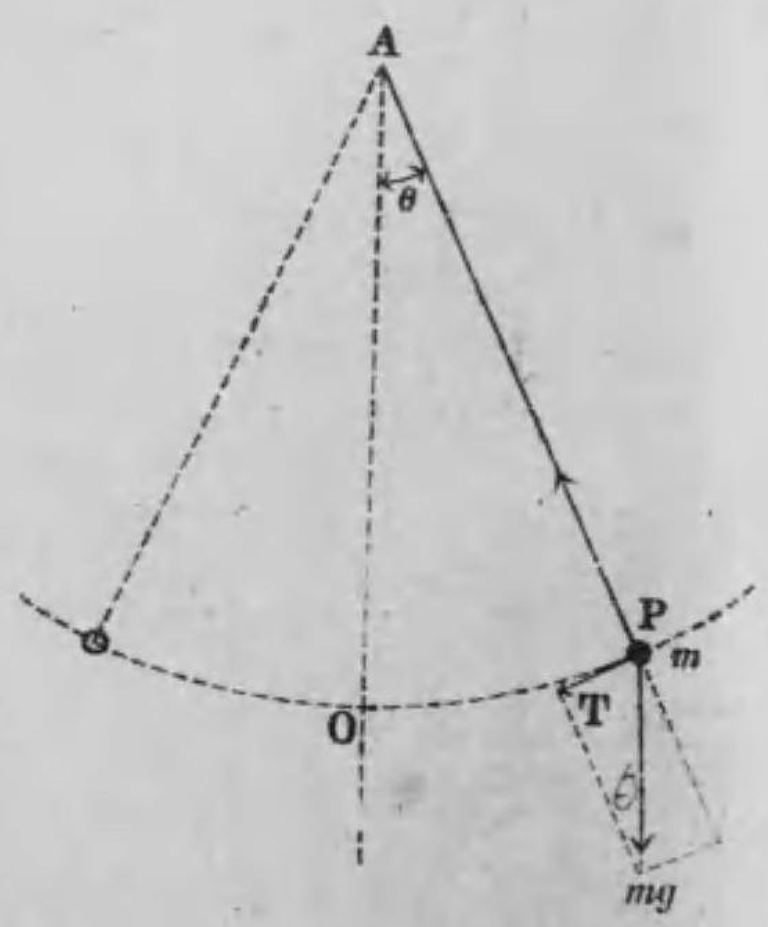
球振子を實現する方法の一つは,質點を絲にて吊し絲の他端を固定するにあり。其固定點に於て絲は自由に屈撓し得べく且つ少しも絲の運動に障礙を及ぼさざるものとす。絲の質量は極めて小なるものとし,又絲を少しにても引き伸さんとする力の加はれば絲は直ちに彈力を生じて引き伸さんとする力を打ち消して恆に一定の長さを保つものとす。

今述べたる方法にて球振子を實現するにつき缺點と云ふ可きは絲の撓むことにして,質點が運動して球の上部に昇るとき絲は撓む恐れあり。されど今考へんとするは主として,球の下半部に於ける運動なれば此目的には絲にて球振子を實現せしめ得。

質點は絲の固定點を中心とし,絲の長さを半徑とする球面上に於て運動するものとし質點に重力の作用あるとき,一般に其運動を考究するは甚だ難解の問題

なり。故に今は下の如き主なる三つの場合を採りて考ふるに止めん。(i)質點の運動が小振動なるとき,(ii)質點の運動が一水平面上に限られ圓錐振子と稱せらるるとき,(iii)質點が垂直面内にありて動き,單振子と稱せらるるときこれなり。

17. **小振動**。今絲の固定點Aを中心として,絲の長さlを半徑とせる球面を畫き,Aの垂直下にある球面上の點をOとすれば,Oは振子が重力のもとに釣合を保つ位置なり。又任意の時刻に於ける振子の位置をPとすればPは面AOPとAO,APの間の角θとに依りて定まる。今振子が其釣合の位置Oの附近にて小振動をなしθは恆に小なるものと假定すれば,其運動の範圍に屬する球面の小部分は,水平なる一平面と看做し得べし。



第二十六圖

扨て振子に働く力は重力mgにして,OAP面内にある故,APの方向と切線PTの方向とに分つことを得べし。APの方向の分力は$mg\cos\theta$

にして,こは絲の生ずる張力に依りて打ち消さる。又PTの方向の分力は$mg\sin\theta$なるも假定によりてθは小なる故$\sin\theta$はθと看做し得べく,又弧OPの長さをsとすれば$l\theta=s$にして,從ひて$\theta=\frac{s}{l}$なり。故に

$$mg\sin\theta\fallingdotseq mg\theta=\frac{mg}{l}s\qquad\cdots\cdots(1)$$

となる。故に振子に働く力は釣合の位置Oに至る距離sに比例すと云ふことを得。又此力は切線PTの方向にありて,球面の一部を平面と看做すときは,PTは其平面上に横はりてOに向ひ,從て力は釣合の位置Oに向ふものと云ふことを得べし。これ彈力と同一の法則に從うものにして,只彈力の强さを表はすa^2の代りに$\frac{mg}{l}$の表はるる相違あるのみ。從ひて**10. 14.**の結果を其儘利用し得べく,即ち此振子は釣合の位置を中心として,一直線上に單弦運動をなすか,又は釣合の位置の周りに楕圓運動をなし,何れの場合に於ても,其週期は彈力の場合に於ける$T=2\pi\frac{\sqrt{m}}{a}$なる式のaに$\sqrt{\frac{mg}{l}}$を代入したる

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\qquad\cdots\cdots(2)$$

にて表さる。これより週期は振幅にも,楕圓の大さにも亦質量mにも無關係なることを知るべし。

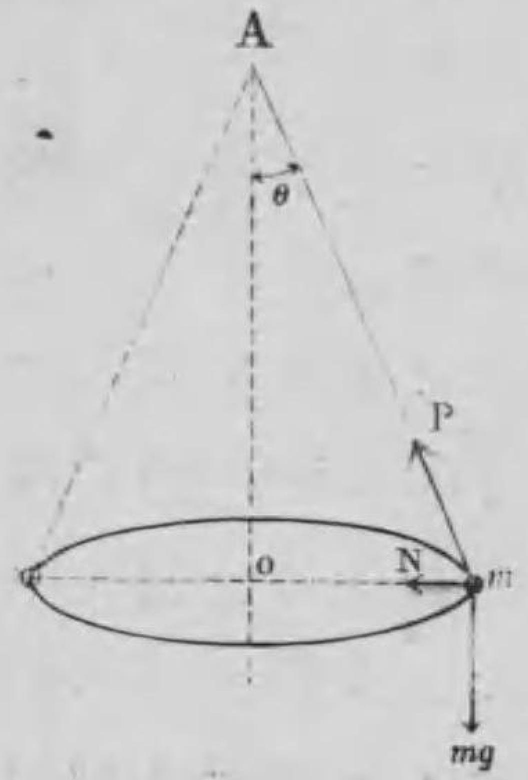
例 單弦運動をなす場合に$t=o$なる時$\theta=\theta_0$ $\frac{d\theta}{dt}=\omega$

ならば

$$\theta=\theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)+\sqrt{\frac{l}{g}}\,\omega\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

にて與へらる。

18. 圓錐振子。 振子が水平面上にある圓周を廻りて運動する場合を考へん。絲は此時圓錐體の表面を畫くこととなる故圓錐振子と稱せられ，θが任意の一定値を有するを其特色とす。



第二十七圖

此時振子に働く力は重力mgと絲の張力Pとの二つにして何れもAOm平面内にあり，然るに振子の運動の方向は恆にAOm面に垂直にして，此運動の方向には一つの分力もあることなく從うて速度の大さは一定にして變ずることなし。故に振子の爲す運動は等速圓運動なることを知る。

從て振子に働く力としては求心力あるべく，今角速度をωとすれば圓の半徑が$l\sin\theta$なる故，求心力の大さは$m\omega^2 l\sin\theta$にして，mNの方向に向ふ。然るにmNの方向には重力は分力を有せず，只張力Pの分力たる$P\sin\theta$あるのみなり。故に此$P\sin\theta$こそ上の求心力たるに相違なく，從つて

$$P\sin\theta=m\omega^2 l\sin\theta \quad \dots\dots(1)$$

なる關係式を得。

次ぎにmに於ける垂直線の方向につきて考へん。振子は此方向に少しも加速度を有せざれば，張力の此方向に於る分力$P\cos\theta$と重力とは釣合を保つべく卽ち

$$P\cos\theta=mg \quad \dots\dots(2)$$

なる關係あるべし。これより

$$P=\frac{mg}{\cos\theta} \quad \dots\dots(3)$$

を得，これによりて張力Pを得。これを(1)式に代入して$\omega^2=\frac{g}{l\cos\theta}$を得，これより角速度$\omega$を得。

又振子が圓周を一周する週期をTとすれば

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\theta} \quad \dots\dots(4)$$

なり。故に振子が高き所にて廻轉する程θは大にして其週期Tは小なることを知る。

19. 單振子。 振子が垂直面内にある圓周上を運動するとき，これを單振子と稱す。

圓の半徑をlとし，圓心Aよりの垂直線をAO，任意の時刻に於ける振子の位置をP，AOとAPとの間の角をθとすること，總て前と同じとす。

尚ほ圓弧OPをsとすれば，

$$s=l\theta$$

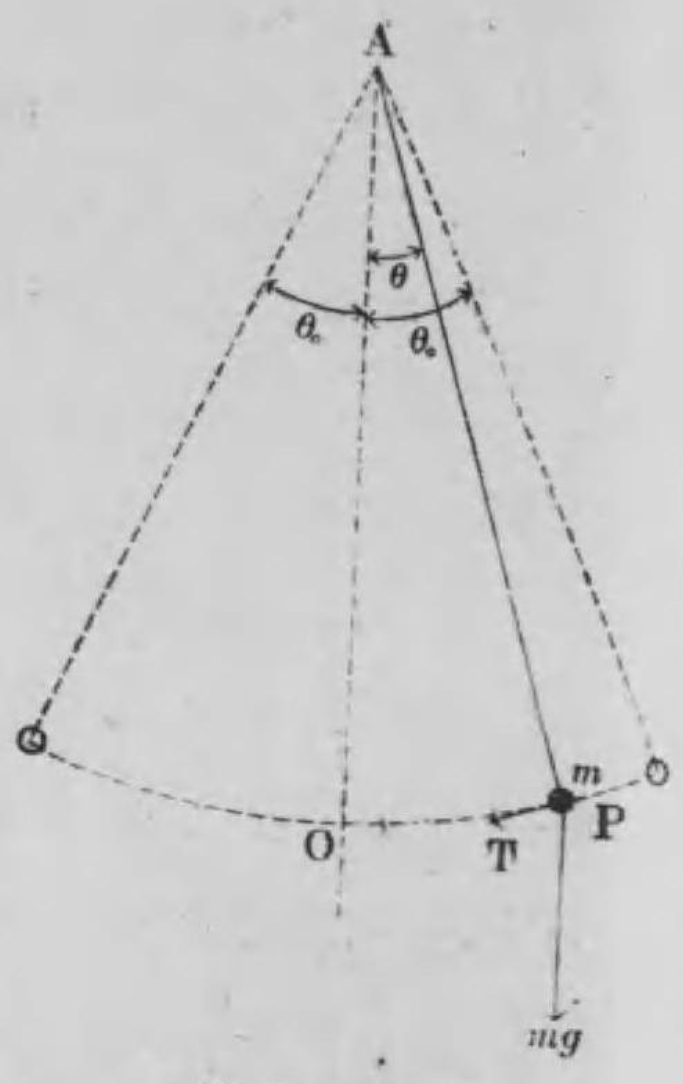
にしてlは一定なれば之をtに就きて微分して

$$\frac{ds}{dt}=l\frac{d\theta}{dt}$$

なる關係を得べく,再び t に就きて微分して

$$\frac{d^2s}{dt^2}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

を得。



第二十八圖

此場合には振子の徑路は圓周なる故,其切線及び法線の方向につきて,運動の式を作るを便とす。されど法線の方向には振子の動かざること,初めより明かなれば,これを考ふるの要なかるべし。

切線PTの方向の分力は $mg\sin\theta$ なるを以て切線の方向の運動の式は

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta,$$

即ち
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta \quad \text{..............(1)}$$

なり。(1)式を解くため先づ兩邊に $\frac{d\theta}{dt}$ を乘じて

$$l\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

とし

$$\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

なること及び $-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos\theta)$

なることを考へ,上式を

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{l}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-g\cos\theta\right]=o$$

と爲せば括弧内の量が常數 c に等しきことを知るべく,即ち

$$\frac{l}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-g\cos\theta=c \quad \text{.............(2)}$$

を得。

猶ほ進んで此式を論ずるには,二つの場合に分つを便とす。(i)振子の運動するに當り,速度 $\frac{ds}{dt}=o$ なることが起る場合にして,此時の θ の値を θ_0 とせん。振子は運動して θ_0 の點に來れば速度は零となるを以て,之より進むこと能はず,再びもとの徑路を戻りて往復運動をなすべし。(ii)これに反して速度 $\frac{ds}{dt}$ が零となることなくば,振子は恆に一方にのみ動きて固定點Aを廻りて回轉すべし。此第二の場合は興味少なきを以て暫らく後に讓ることとし,先づ第一の場合を考察せん。

斯く $\theta=\theta_0$ に於て $\frac{ds}{dt}=l\frac{d\theta_0}{dt}=o$ とすれば,これを(2)式に入れて常數 c の値

$$c=-g\cos\theta_0$$

を得。

從て(2)式は

$$\frac{1}{2}l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=g(\cos\theta-\cos\theta_0) \quad \text{...... .....(3)}$$

となる,これに

$$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \cos\theta_0=1-2\sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

を入るれば

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

を得。兩邊を平方に開き又其符號の正負を定むるには,振子が θ の增す方向に運動しつつある場合を考ふることとして $\frac{d\theta}{dt}$ は正なるものとせん。然る時は

$$\frac{d\theta}{dt}=2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

を得。

此式にて t を含む項は左邊に, θ を含む項は右邊に集め然る後兩邊を別別に積分すれば

$$\int\sqrt{\frac{g}{l}}dt=\int\frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}\ \cdots\cdots(5)$$

となる。

上式の左邊の積分は直ちに求め得れども,右邊の積分は普通に出で來る函數として表はし得ざるなり。今これを比較的簡單なる形に移すために先づ變數 θ を

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

なる關係式に依りて定めらるる φ に代ふる事とせん。

(6)式を微分すれば,

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi d\varphi$$

となる,故 $d\theta$ と $d\varphi$ との關係式として

$$d\theta=\frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

を得。(5)式の右邊の $\sin\frac{\theta}{2}$ に(6)式よりの値を入れ,又 $d\theta$ に(7)式よりの値を入るれば

$$\int\frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}=\int\frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi}=\int\frac{d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

となり,再び(6)式に依りて

$$=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

となる。故に(5)式は結局

$$\int\sqrt{\frac{g}{l}}dt=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

となる。

此式は複雜にして前の小振動の場合の如く容易に運動の有様を明かにし得ず。故に今は只週期を求むるに止めん。

振子が $\theta=o$ に相當するO點(第二十八圖)より振動を始めて, θ の增加する方向に進むものとすれば, $\theta=\theta_0$ に達して速度は零となり,これより反對の方向に戻りてO點を通り越し, $-\theta_0$ に達して速度零となり,再び戻りてO點に來る。これにて振子は初めと同じ位置に歸

りて同じ速度を有す。此間に經過したる時間を週期と稱す。これをTにて表はすこととせん。

此 θ の變化に伴なふて φ の如何に變化するかは(6)式の關係より知ることを得べく,次表に示すが如し。

t	$0 \to \frac{1}{4}T \to \frac{1}{2}T \to \frac{3}{4}T \to T$
$\frac{\theta}{2}$	$0 \to$ 增 $\to \frac{\theta_0}{2} \to$ 減 $\to 0 \to$ 減 $\to -\frac{\theta_0}{2} \to$ 增 $\to 0$
φ	$0 \to$ 增 $\to \frac{\pi}{2} \to$ 增 $\to \pi \to$ 增 $\to \frac{3}{2}\pi \to$ 增 $\to 2\pi$

斯く週期Tの間に φ は 0 より 2π 迄增加するを以て,(8)式の積分を此間にとれば

$$\sqrt{\frac{g}{l}}T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}.$$

此式の右邊の積分はモヂュラス $\sin\frac{\theta_0}{2}$ に對する第一種の完全楕圓積分と謂はるるものにして,普通 $F(\sin\frac{\theta_0}{2})$ にて表はされ,θ_0 の種種の値に對して**ルジヤンドル**の作りたる表あり。

故に上の積分式は

$$\sqrt{\frac{g}{l}}T = 4F(\sin\frac{\theta_0}{2})$$

即ち　　$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}F(\sin\frac{\theta_0}{2})$$

となりてTを計算することを得。

若し θ_0 が非常に小にして $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ を零と看做し得るときは

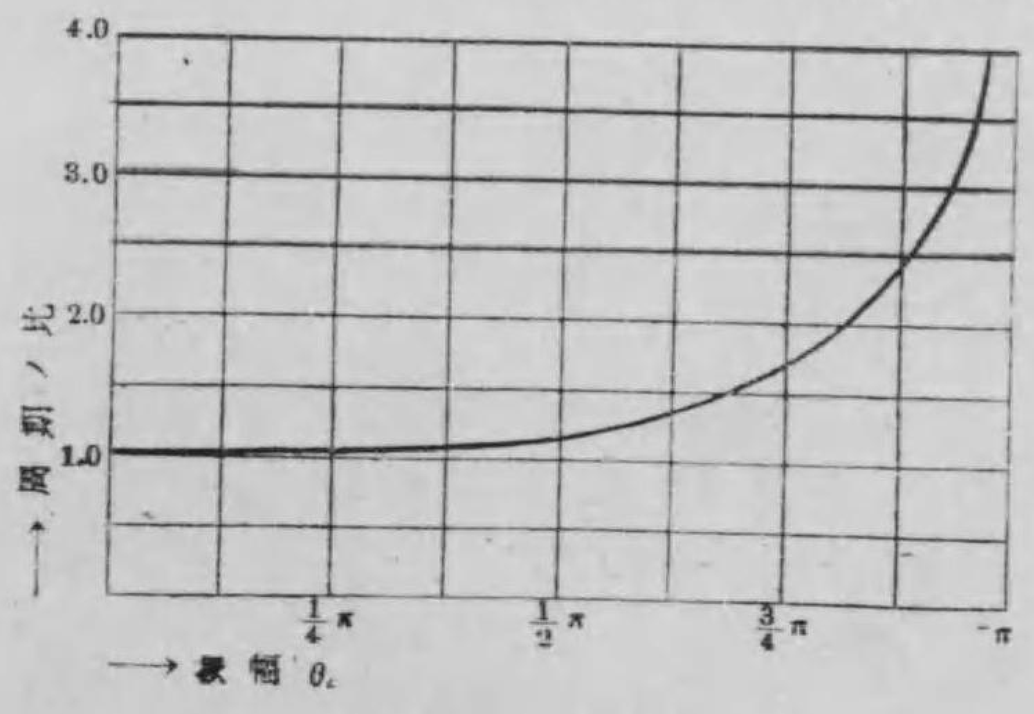
$$F(\sin\frac{\theta_0}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

となりて小振動の時に求めたる週期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

と一致す。

故に θ_0 が任意の値のときの週期 $4\sqrt{\frac{l}{g}}F(\sin\frac{\theta_0}{2})$ は θ_0 が非常に小なる場合の週期 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ に比較すれば $\frac{2}{\pi}F(\sin\frac{\theta_0}{2})$ 丈け大にして,此比は $F(\sin\frac{\theta_0}{2})$ の表より知ることを得べし。これを圖にて示せば第二十九圖の



第二十九圖

如くなる。これより週期Tが振幅 θ_0 によりて如何に

變ずるかの大略を明かにし得べく,且つ振幅の大となるにつれて週期も亦大となるを知るべし。

例 1.　$\mathrm{T}=4\sqrt{\dfrac{l}{g}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$ に於て,θ_0は小さきには相違なきも,$\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ を全然省略することなく此項の存在を幾分か計算に入れたきことあり。此場合には二項定理によりて展開し

$$\mathrm{T}=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4\frac{\theta_0}{2}\sin^4\varphi+\ldots\ldots\right\}d\varphi$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{3^2}{2^2 4^2}\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

とし $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ を補正の項として止め,$\sin^4\frac{\theta_0}{2}$ 以下の項を省略すれば

$$\mathrm{T}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)$$

となる。若し補正の項が0.001ならば,$\sin\frac{\theta_0}{2}=0.0632$ にして $\theta_0 \fallingdotseq 3°36'$ なり。

例 2.　本文には切線の方向につきて運動の式を作りたるが法線の方向につきて運動の式を作れば

$$ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\mathrm{P}-mg\cos\theta$$

にして,これより絲の張力Pを求め得。Pが負號をとるとき此絲は撓む。

例 3.　$\theta=o$ より $\theta=\theta_1$ に至るに要する時間を t とすれば

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

sin

にして此φ_1は　$\sin\frac{\theta_1}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi_1$　にて定めらるるものなり。

上式の積分はθ_0並にφ_1に依るを以て $\mathrm{F}(\sin\frac{\theta_0}{2},\varphi_1)$ にて表はし,これをモヂュラス $\sin\frac{\theta_0}{2}$ に對する第一種の橢圓積分と云ふ。これにも $\sin\frac{\theta_0}{2}$ 並にφ_1の種種の値に對してルジャンドルの計算したる表あり。

例 4.　本文には$\frac{ds}{dt}=l\frac{d\theta}{dt}=o$ なることが起る場合,卽ち第一の場合と名づけたるものを考へたるが,これより第二の場合卽ち $\frac{ds}{dt}$ が零となることなく,振子は恆に一方にのみ廻轉する場合を考へん。

初めの條件として $\theta=o$ のときの角速度$\frac{d\theta}{dt}$を與へられたりとし,これをwとせん。

(2)式卽ち

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g\cos\theta+\mathrm{C}$$

に此條件を入れ $lw^2=2g+\mathrm{C}$ なる關係を得てCの値を決定し得。此Cの値を(2)式に入れて

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=w^2-2\frac{g}{l}(1-\cos\theta)=w^2-4\frac{g}{l}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

を得。此式に於て$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2>o$なる爲めには$w^2>4\frac{g}{l}\sin^2\frac{\theta}{2}$なることを要す。これ振子が一方にのみ動くために必要なる條件なり。

上式に於て

$$k=2\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{1}{w}$$

と置けば

$$\frac{d\theta}{dt}=w\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

となる,これを積分し,又$\frac{\theta}{2}=\varphi$とせば

$$wt=\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}=2\int_0^{2\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$=2F(k,\varphi)$$

となる。此場合にも運動は第一種の楕圓積分にて表はさる。

又若し$\theta=o$より$\theta=\pi$(垂直上)に至る時間を求むれば

$$\frac{2}{w}F\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{1}{w}\right)$$

なる完全楕圓積分にて表はさる。

第五章

振　　動

20. 振動の減衰と抵抗力。 第三章に述べたる振動は一度或る原因によりて生ぜらるれば,限りなく其振動狀態を繰返し,振幅の如きも少しも減少せざるものなり。然れども自然界に起る振動は決してかかることなく,總ての振動は時の經過に連れて漸次其振幅を減じ,終には靜止の狀態に歸するものなり。

斯く振動の減衰を來すは,運動の方向に反對に,これを止めんとする力が働くためにして,此力は速度の大なる程大なることは確かなるも,其精密なる關係に至りては明かならず。今は速度に比例するものと假定せん。此假定の正否は計算の結果と觀測とを比較して始めて判定し得べし。今日吾人の經驗に依れば速度が甚だしく大ならざる限り此假定は正しきが如し。

上述の力は常に速度と反對の方向に働きて,運動を止めんとするものなればこれを**抵抗力**と稱す。

今質點が一直線上に於て上に假定したるが如き抵抗力を受けつつ小振動をなすものとすれば,運動の式は**10**の(1)式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x$$

に抵抗力を表はす項 $-k\frac{dx}{dt}$ を附加して表はすことを得べし。此 k は抵抗力の大小を表はす常數にして,抵抗力は恆に速度 $\frac{dx}{dt}$ と反對の方向を有するを以て,k は必ず正の値を有するものなり。

即ち運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x-k\frac{dx}{dt}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

なり。此式の解を求むる爲めに

$$x=e^{pt}$$

と置けば

$$\frac{dx}{dt}=px,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=p^2x$$

にして,これを上の微分方程式に入れて

$$x\left(p^2+\frac{k}{m}p+\frac{a^2}{m}\right)=o$$

を得べし。而して爰に考へつつあるは,質點の運動する場合なれば x は零に等しからず。故に

$$p^2+\frac{k}{m}p+\frac{a^2}{m}=o$$

なるべく,即ち p を

$$p=-\frac{k}{2m}\pm\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}-\frac{a^2}{m}}$$

に選ぶを要す。從ひて此 p の値を $x=e^{pt}$ に入るれば,上の微分方程式の特解を得ることとなる。

p は根號内の式の正負に依りて,實數なる場合と複素數なる場合とあり。次ぎに此二つの場合につきて別別に研究の歩を進むることとせん。

21. 非週期運動(p が實數なる場合)。抵抗力大にして $\frac{k}{2m}\geq\frac{a}{\sqrt{m}}$ なる關係を有するときは p は實數にして且つ負號を有す。今

$$\left.\begin{aligned}-\beta_1&=-\frac{k}{2m}+\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}-\frac{a^2}{m}},\\ -\beta_2&=-\frac{k}{2m}-\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}-\frac{a^2}{m}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

從うて $o<\beta_1<\beta_2$

と置けば上の微分方程式の特解は $e^{-\beta_1 t}$ 並に $e^{-\beta_2 t}$ にして全解は A,B を常數とするとき

$$x=Ae^{-\beta_1 t}+Be^{-\beta_2 t}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

にて與へらる。此二つの指數函數は何れも t の增加に從ひて減少するものにして,しかも β の大なる程速かに減少す。又 β_2 は β_1 より大なる故上の第二項は第一項に比して速かに減少す。

上の場合に質點は時間の經過と共に徐ゝに釣合の位置に近づくのみにして振動することなき故**非週期運動**と名づけらる。而して常數A,B の大小如何によりて,二つの場合を生ず。第一の場合は振幅は時間と共に減少するのみにして,漸次釣合の位置に歸り第三

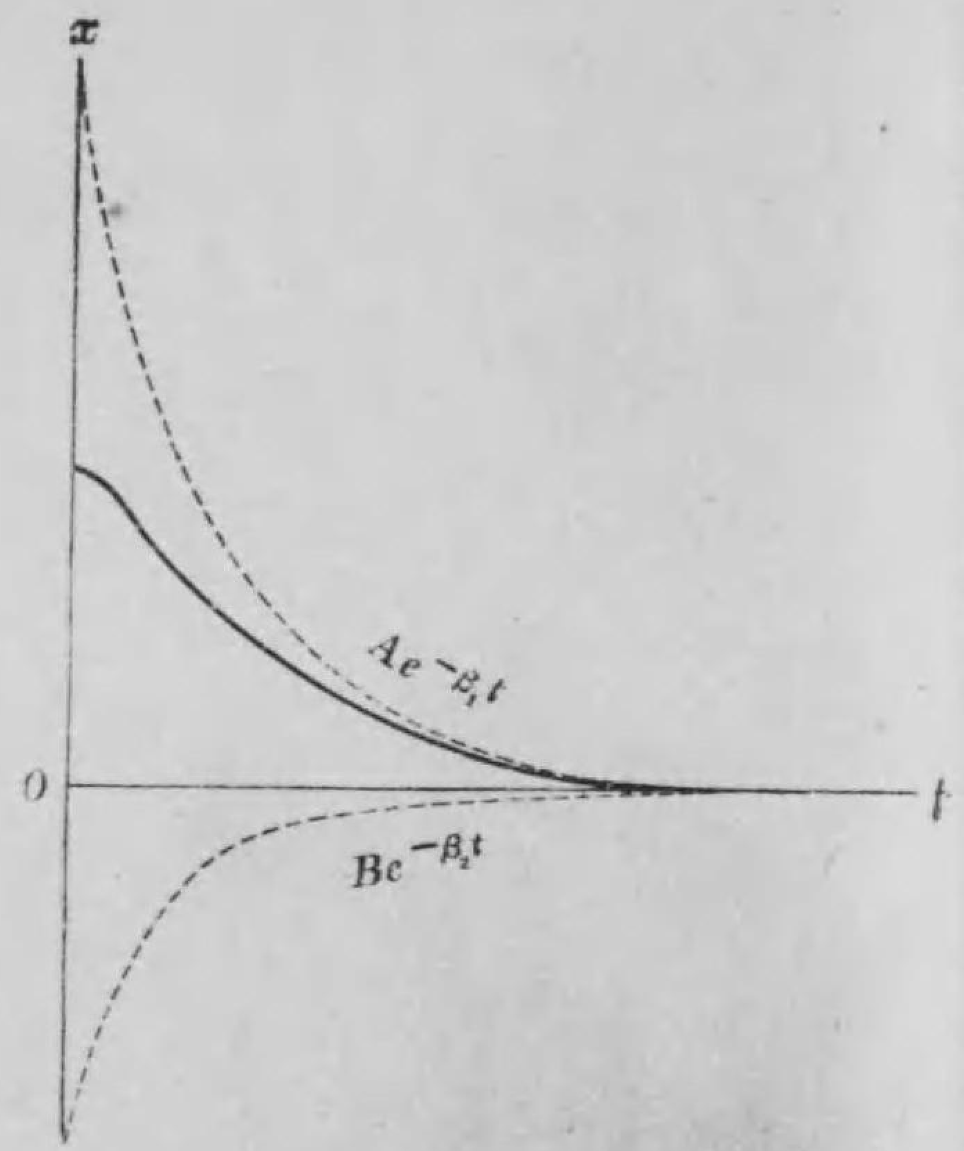
十圖に示す如きものなり。又第二の場合は振幅は減じて零となり質點は一度釣合の位置を過ぎて反對の側に進み一定の位置に達したる後振幅は再び減少して釣合の位置に近づき第三十一圖に示すが如きものなり。

例 1. 初めの條件として $t=0$ のとき $x=x_0$ 及び $\dfrac{dx}{dt}=u_0$ ならば $x=\mathrm{A}e^{-\beta_1 t}+\mathrm{B}e^{-\beta_2 t}$ の常數 A, B の値は

$$\mathrm{A}=\frac{\beta_2 x_0+u_0}{\beta_2-\beta_1}$$

$$\mathrm{B}=-\frac{\beta_1 x_0+u_0}{\beta_2-\beta_1}$$

なり。



第　三　十　圖

例 2. $\dfrac{k}{2m}=\dfrac{a}{\sqrt{m}}$ なる時は $\beta_1=\beta_2$ となり,二つの特解は同一となる。この場合に特解を求むるには $x=[\mathrm{A}+\mathrm{B}e^{-(\beta_2-\beta_1)t}]e^{-\beta_1 t}$ と書き,然る後に β_2 が β_1 に限り無く近づきたる極限を求むれば

$$e^{-(\beta_2-\beta_1)t}\doteqdot 1-(\beta_2-\beta_1)t$$

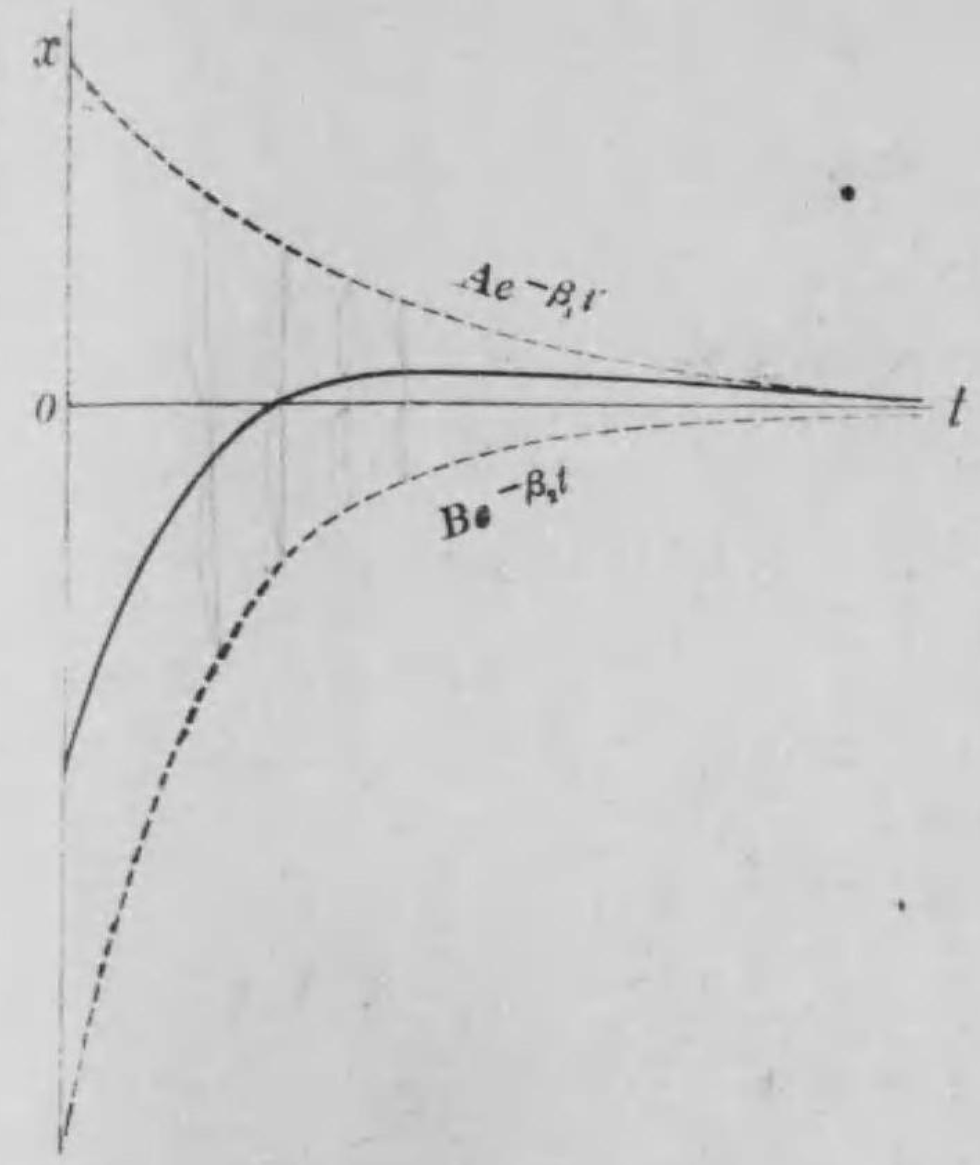
となる故

$$x=(\mathrm{A}+\mathrm{B})e^{-\beta_1 t}-\mathrm{B}(\beta_2-\beta_1)te^{-\beta_1 t}$$

を得。猶ほ $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{A}_1$ 及び $\mathrm{B}(\beta_2-\beta_1)=\mathrm{B}_1$ と置けば

$$x=\mathrm{A}_1 e^{-\beta_1 t}+\mathrm{B}_1 te^{-\beta_1 t}$$

となり全解を得。$e^{-\beta_1 t}$ 並に $te^{-\beta_1 t}$ が特解なることは,これを微分して,もとの微分方程式に入れて確むることを得。



第　三　十　一　圖

例 3. 第三十一圖に示したる場合は A と B とが反對の符號を有し,且つ A < B なる場合にして,釣合の位置を過ぐる時刻を t_0 とすれば,

$$t_0=-\log\left(-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)\div 2\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}-\frac{a^2}{m}}$$

にて與へらる。

22. 減衰週期運動（p が複素數なる場合)。抵抗力

小にして $\frac{k}{2m}<\frac{a}{\sqrt{m}}$ なるとき p は複素數となる。即ち

$$p=-\frac{k}{2m}\pm i\sqrt{\frac{a^2}{m}-\frac{k^2}{4m^2}}$$

にして,今　$\frac{k}{2m}=b,\quad \sqrt{\frac{a^2}{m}-\frac{k^2}{4m^2}}=n$ ......(4)

と置けば

$$p=-b\pm in \quad \text{..........................(5)}$$

となり,此微分方程式の特解として

$$e^{-bt+int},\qquad e^{-bt-int}$$

を得。これ等は何れも複素數にして,

$$e^{-bt}[\cos nt+i\sin nt],\qquad e^{-bt}[\cos nt-i\sin nt].$$

と書き得るものなり。**11.** に述べたるが如く,微分方程式の解式が複素數として得られたるときは,其實數部分並に虚數部分が何れも其解式なるが故

$$x_1=e^{-bt}\cos nt,\qquad x_2=e^{-bt}\sin nt$$

は何れも上の微分方程式の特解にして,從うてA, Bを二つの常數とすれば,其全解は

$$x=\mathrm{A}e^{-bt}\cos nt+\mathrm{B}e^{-bt}\sin nt$$
$$=e^{-bt}(\mathrm{A}\cos nt+\mathrm{B}\sin nt)$$

なり。或はA,Bの代りに h, ε なる常數を用ひて簡單に

$$x=e^{-bt}h\cos(nt+\varepsilon)=he^{-bt}\cos(nt+\varepsilon)$$

と書き改むることを得べし。　[illegible]

$T=\frac{2\pi}{n}$

此式にて表はされたる運動の性質を研究するにはこれを單弦運動と比較して考ふるを便とす。即ち兩者の相違は e^{-bt} なる因數の有無にあり。

故に上式の表はす運動は $\frac{2\pi}{n}$ なる一定の週期を有する振動にして,其**單弦運動と異なる所は振幅が一定ならずして e^{-bt} なる因數を含む爲めに時と共に減少するにあり。** 故に此運動を**減衰週期運動**と稱す。而して振幅の減少する程度は b の大なるときほど速かにして,こは k の大なるとき,即ち抵抗力の大なるときなり。猶ほ詳しく此運動の性質を研究せん。

質點は釣合の位置を過ぎて一方に進むに從ひ,其速度は次第に減少して遂に零となる所あるべく,これより方向を轉じて戻り釣合の位置を通り越して反對の側に進み再び速度零となる。斯く速度の零となる所を**回歸點**と名づく。故に回歸點は質點が釣合の位置より最も遠く離れたる所なり。

今速度を計算するため上に得たる $x=he^{-bt}\cos(nt+\varepsilon)$ を t につきて微分すれば

$$\frac{dx}{dt}=-he^{-bt}[n\sin(nt+\varepsilon)+b\cos(nt+\varepsilon)]$$

を得。$\frac{dx}{dt}$ 即ち速度が零となる時刻を t' とすれば

$$n\sin(nt'+\varepsilon)+b\cos(nt'+\varepsilon)=o,$$

即ち　$\tan(nt'+\varepsilon)=-\frac{b}{n}$

となる。故に此式を滿足する時刻t'のとき質點は回歸點に達すと云ふことを得べし。又若しt'のときに此式が滿足せらるるならば,上式より$t_1'+\frac{\pi}{n}=t_2'$のときにも亦滿足せらるることを知り得べく,質點は$\frac{\pi}{n}$なる時間を經て回歸點を過ぐることを知る。

今質點が回歸點に達する時刻のうち何れか一つを採り,これをt_1'とし,次ぎに反對の側にある回歸點を過ぐる時刻をt_2'とせん。此t_1'及びt_2'のとき質點は釣合の位置よりx_1及びx_2の距離にあり。此x_1, x_2は正負の符號に關係なく只大さのみを表はすものとせん。然らばx_1, x_2は相續きたる二つの振幅の大さを表はす。

然らば

$$x_1=he^{-bt_1'}\cos(nt_1'+\varepsilon)$$

$$x_2=he^{-bt_2'}\cos(nt_2'+\varepsilon)$$

$$=he^{-b(t_1'+\frac{\pi}{n})}\cos(nt_1'+\varepsilon)$$

なる故

$$\frac{x_2}{x_1}=e^{-b\frac{\pi}{n}}$$

なり。斯く相續きたる二つの振幅の比は常に$e^{-b\frac{\pi}{n}}$なる一定の値を有す。換言すれば振幅は此一定の比を以て漸次減少するなり。

回歸點に於ては速度零となるを以て吾人は其位置を精密に觀測するを得,觀測の結果は能く上述の結果

と一致す。これより吾人が曩に抵抗力を以て速度に比例せりと假定せしことの正しきを推定し得。

又$\frac{x_2}{x_1}=e^{-b\frac{\pi}{n}}$の代りに其對數を取れば

$$\log x_2-\log x_1=-b\frac{\pi}{n} \quad \text{..................(6)}$$

となる。これを**減衰の對數**と云ふことあり。

回歸點に於ける振幅の觀測よりx_1, x_2を得べく,又一回歸點より次ぎの回歸點に至る時間を測ればこれ卽ち$\frac{\pi}{n}$にして,此兩觀測より(6)式によりてbを求め得べし。然らば(4)式によりてkをも知り得。斯くの如く運動の模樣を觀測して抵抗力の常數たるkを求め得。

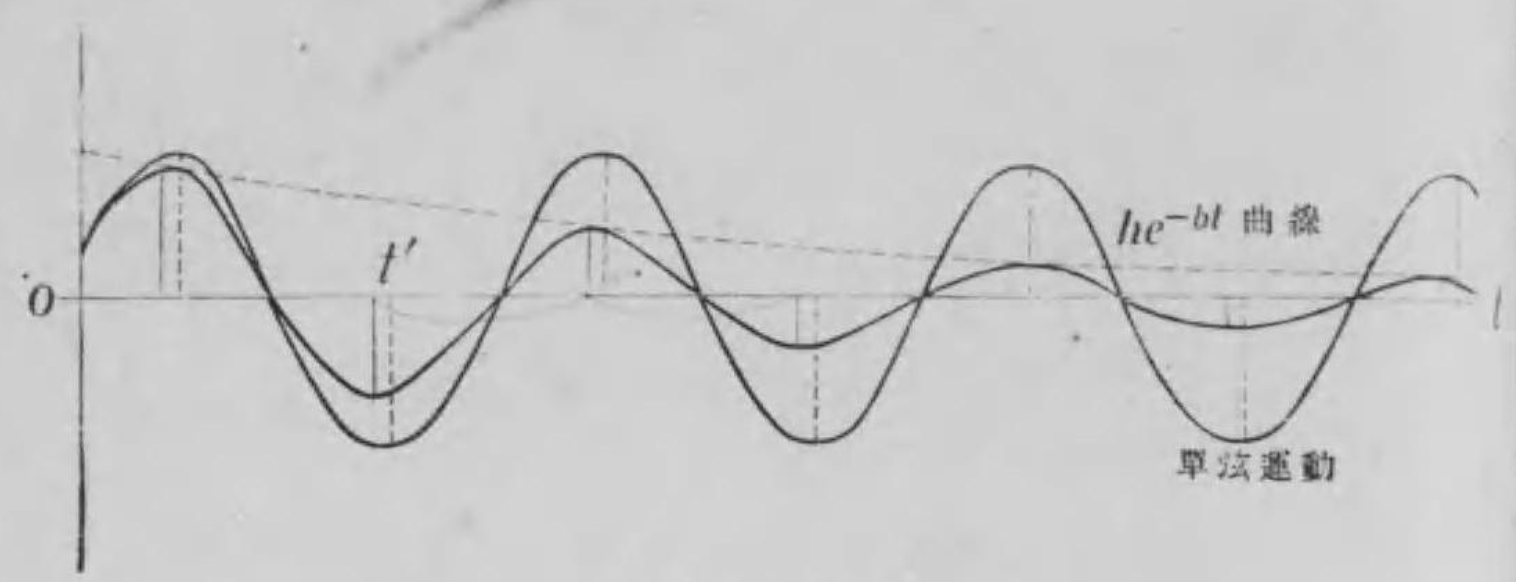
次ぎに抵抗力の大小が週期$\frac{2\pi}{n}$に及ぼす影響を考究せん。$n^2=\frac{a^2}{m}-\frac{k^2}{4m^2}$に於て

$$\frac{a^2}{m}=n_0^2 \quad \text{........................(7)}$$

と置けば,n_0は抵抗力なき場合のnの値にして,上式は

$$n^2=n_0^2-\frac{k^2}{4m^2} \quad \text{..................(8)}$$

となる。故にkの大なるとき,卽ち抵抗力の大なるとき,nの値は小なることを知り得べく,從うて週期$\frac{2\pi}{n}$は大なり。されどkは上式中に二乘の形にて表はる故抵抗力小なる限りは其影響微弱にして,これを省略し得べく,又これに反して抵抗力大なるときは其影響も亦極めて大なり。



第三十二圖

例 1.　質點が靜止の位置を過ぐる時刻を t_0 とすれば, t_0 は

$$\cos(nt_0+\varepsilon)=o$$

にて定められ,從うて i を任意の整數として

$$t_0=i\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}-\frac{\varepsilon}{n}$$

にて與へらる。

例 2.　質點が回歸點に來る時刻を t' とすれば,此時の速度は零なる故, t' は

$$n\sin(nt'+\varepsilon)+b\cos(nt'+\varepsilon)=o$$

にて定めらる。此式に

$$n=n_0\cos\gamma,\quad b=n_0\sin\gamma$$

と置けば, $\sin(nt'+\varepsilon+\gamma)=o$ の形となり

$$t'=i\frac{\pi}{n}-\frac{\varepsilon}{n}-\frac{\gamma}{n}$$

にて與へらる。

從ひて質點が釣合の位置を過ぎる時を t_0 とし,次ぎに回歸點にある時を t' とすれば, $t'-t_0=\frac{\pi}{n}-\frac{\gamma}{n}$ となる。

例 3.　回歸點より次ぎの回歸點に至る距離を順次に s_i にて表はせば

$$\frac{s_{i+1}}{s_i}=\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i-1}+x_i}=\frac{x_{i+1}}{x_i}\cdot\frac{\dfrac{x_i}{x_{i+1}}+1}{\dfrac{x_{i-1}}{x_i}+1}=\frac{x_{i+1}}{x_i}=e^{-b\frac{\pi}{n}}$$

にして從ひて

$$\log s_{i+1}-\log s_i=-b\frac{\pi}{n}$$

となる。

此方法を用ふれば,對數減衰を求むるに,質點の釣合の位置を知る必要なき便あり。

23.　強制振動。 質點は一直線上に於て運動するものとし彈力及び抵抗力の外に尙ほ時の函數 $F(t)$ として表はされたる力が作用する場合を考へん。もと同一の狀況の許にありて同一の作用をなすものの必要を感じて力なる考を導きたるに,斯く時に依りて其値を變ずるは何故か。抑も此質點が力を受くるは他に幾多の質點の存在するありて,これより作用さるるが爲めなるべくこれ等幾多の質點が時と共に其位置を變ずれば,其作用も亦時と共に變じて,力は時の函數として表はさるべし。されど何故力が時に依りて變ずるかと云ふ原因に就きては今は暫く問はざることとし只斯かる力を與へられたりとして,此力の下に質

點が如何なる運動をなすかを攻究するに止めん。

此場合に運動の式は一般に下の形にて與へらる

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x-k\frac{dx}{dt}+\mathrm{F}(t).$$

されど今特に $\mathrm{F}(t)$ が $\mathrm{A}\cos\mathrm{N}t$ なる形にて表はさるる場合を考へん。即ち力は A なる大さを有し，$\frac{2\pi}{\mathrm{N}}$ なる週期を以て餘弦の法則に從て變ずるものなり。されど微分方程式を取扱ふ上には

$$\cos\mathrm{N}t+i\sin\mathrm{N}t=e^{i\mathrm{N}t}$$

なる關係ある故 $\mathrm{A}\cos\mathrm{N}t$ の代りに $\mathrm{A}e^{i\mathrm{N}t}$ をとるを便とす。即ち $\mathrm{F}(t)=\mathrm{A}e^{i\mathrm{N}t}$ として上の微分方程式の複素數にて表はされたる解式を求め，之を實數竝に虚數の部分に分てば前者は $\mathrm{A}\cos\mathrm{N}t$ に相應する解式となる。

運動の式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x-k\frac{dx}{dt}+\mathrm{A}e^{i\mathrm{N}t}\quad\text{..................(9)}$$

の特解を求むるには先づ

$$x=\mathrm{B}e^{i\mathrm{N}t}$$

と假定し之が上の微分方程式を滿足する樣に B を定むれば可なり。これを t につきて微分すれば

$$\frac{dx}{dt}=i\mathrm{NB}e^{i\mathrm{N}t},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{N}^2\mathrm{B}e^{i\mathrm{N}t}$$

を得。これ等の値を微分方程式に代入し $e^{i\mathrm{N}t}$ を約せば

$$-m\mathrm{N}^2\mathrm{B}=-a^2\mathrm{B}-ik\mathrm{NB}+\mathrm{A}$$

となる，即ち B を

$$\mathrm{B}=\frac{\mathrm{A}}{a^2-m\mathrm{N}^2+ik\mathrm{N}}$$

と採るを要す。尚ほ分母子を m にて除し $\frac{a^2}{m}$ を前の如く n_0^2 と置けば

$$\mathrm{B}=\frac{\frac{\mathrm{A}}{m}}{(n_0^2-\mathrm{N}^2)+i\mathrm{N}\frac{k}{m}}\quad\text{......................(10)}$$

となる。此形にては分母に虚數を含む故他の形に改むるを便とす。之が爲め

$$n_0^2-\mathrm{N}^2=\mathrm{P}\cos\varphi,\quad \mathrm{N}\frac{k}{m}=\mathrm{P}\sin\varphi\quad\text{.........(11)}$$

と置けば，P 及び φ は

$$\mathrm{P}=\sqrt{(n_0^2-\mathrm{N}^2)^2+\mathrm{N}^2\frac{k^2}{m^2}},\quad \tan\varphi=\frac{\mathrm{N}k}{m(n_0^2-\mathrm{N}^2)}\quad\text{...(12)}$$

にて與へられ，從うて

$$\mathrm{B}=\frac{\frac{\mathrm{A}}{m}}{\mathrm{P}\cos\varphi+i\mathrm{P}\sin\varphi}=\frac{\mathrm{A}}{m\mathrm{P}}e^{-i\varphi}\quad\text{...........(13)}$$

を得。故に上の微分方程式の特解は

$$x=\frac{\mathrm{A}}{m\mathrm{P}}e^{i(\mathrm{N}t-\varphi)}$$

にして，これを

$$x=\frac{\mathrm{A}}{m\mathrm{P}}\{\cos(\mathrm{N}t-\varphi)+i\sin(\mathrm{N}t-\varphi)\}\quad\text{........(14)}$$

とせば實數と虚數との二つの部分に分れ，

$$\mathrm{F}(t)=\mathrm{A}\cos\mathrm{N}t$$

なる力に相應する部分は

$$x=\frac{A}{mP}\cos(Nt-\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

となる。又虚數の部分より $F(t)=A\sin Nt$ に相應する解を得るも必要なき故これを省略す。

24. 强制振動の運動狀態。 (15)式にて表はされたる運動を考ふるに $\frac{A}{mP}$ は常數なる故,一定の振幅を有する單弦運動なり。而して其振動數 $\frac{N}{2\pi}$ は此質點が彈力のみに働かるるときの振動數 $\frac{n_0}{2\pi}$ とも等しからず,又彈力と抵抗力とが同時に働く場合の振動數 $\frac{n}{2\pi}$ とも相異なるを見るべく,其振動數は外部よりこれに加へたる力 $A\cos Nt$ の振動數と一致す。これが爲めに此運動を**强制振動**と名づく。

されど質點の運動は $\cos(Nt-\varphi)$ にて表さるる故外部より加へらるる力 $\cos Nt$ とは其位相に於て φ 丈けおくるることとなる

次ぎに强制振動の振幅を h とすれば $h=\frac{A}{mP}$ にして P の値を入るれば

$$h=\frac{A}{m\sqrt{(n_0^2-N^2)^2+N^2\frac{k^2}{m^2}}} \quad \cdots\cdots\cdots(16)$$

となる。故に

(i) 振幅は外力の强さ A に比例し,

(ii) 質點の質量 m に逆比例す。

(iii) 抵抗力小なるときは根號内の $N^2\frac{k^2}{m^2}$ は省略し得べきを以て振幅は $\sqrt{(n_0^2-N^2)^2}$ に逆比例し,N が n_0 に近づく時ほど振幅大となる。

(iv) されど N が n_0 に極めて近づけば,$N^2\frac{k^2}{m^2}$ は $(n_0^2-N^2)^2$ に對して省略し得ず。$N=n_0$ のときの振幅を h_m とすれば

$$h_m=\frac{A}{Nk}$$

となる。斯く最大の振幅は抵抗力 k の大小に依りて定まるものなり。

次ぎに N が增加して次第に n_0 に近づくものとすれば振幅も亦漸次增大して最大振幅に近づく。されど最大振幅への近づき方に種種あり。(16)式よりこれを明かにすることを得。

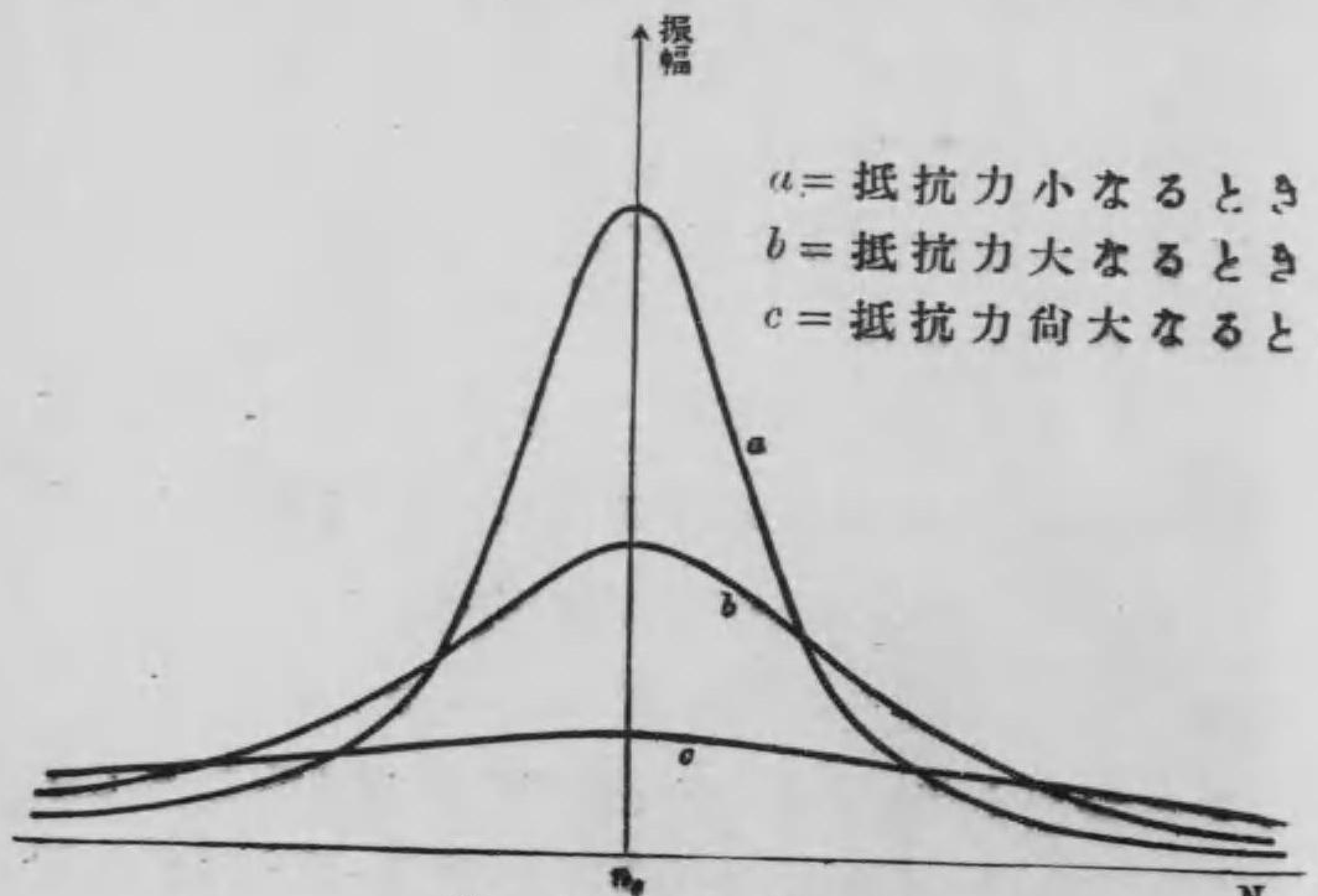
卽ち m が大なれば振幅は一般に小なり。されど抵抗力小にして,且つ N が n_0 に甚だしく接近したる場合に於ては振幅は急に增大し $h_m=\frac{A}{Nk}$ なる値に達す。

一例を擧げて斯くの如き場合を示さん。音叉は彈力の下に振動し恰も一質點と同樣なる運動をなし,其質量大なり。且つ良好なる音叉にありては,振動の減衰極めて遲し,これ抵抗力の小なることに外ならずして上述の場合に該當する適例なり。故に空氣を經由して來る振動がこれに働くも,一般に音叉のなす强制

振動は極めて微小なり。唯だ外力の振動數が音叉の振動數と極めて近きときのみ,振幅の極めて大なる强制振動を起し所謂共鳴の現象を表はす。

これに反して抵抗力大なるときは,k^2の値大にして初めよりこれを省略するを得ず。從てNとn_0との値が近くとも,又稍遠くとも,(16)式の分母には左程の變化を及ぼすことなし。從てNの廣き範圍に亙りて殆んど同樣の振幅を有する强制振動をなす。

此二つの場合の相違を圖にて示せば次ぎの如し。



第三十三圖

例 1.　本文の記號を用ひて$\dfrac{h}{h_m}=\dfrac{\mathrm{N}k}{m\mathrm{P}}=\sin\varphi$を得べし。故に强制振動の振幅$h$を測れば,上式によりて位相の

差φを知るを得。

例 2.　外力の振動數Nを次第に增せば,最大の振幅は$\mathrm{P}=\sqrt{(n_0{}^2-\mathrm{N}^2)^2+\mathrm{N}^2\dfrac{k^2}{m^2}}$の極小なる時に起るべし。此時のNを$\mathrm{N}_m$とすれば

$$\mathrm{N}_m^2=n_0^2-\frac{k^2}{2m^2}$$

なり。

彈力のみ働くときの振動數はn_0,彈力と抵抗力と同時に働くときの振動數は$n=\sqrt{n_0{}^2-\dfrac{k^2}{4m^2}}$なり。尙ほこれに外力の働くときは上に得たる$\mathrm{N}_m=\sqrt{n_0{}^2-\dfrac{k^2}{2m^2}}$なる場合に振幅最大となる。此差異に注意せよ。

例 3.
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x-k\frac{dx}{dt}+\mathrm{A}\cos\mathrm{N}t$$

の解をx_1, x_2とすれば,x_1-x_2は

$$m\frac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2}=-a^2(x_1-x_2)-k\frac{d(x_1-x_2)}{dt}$$

を滿足し,且つ此式の全解は**22.**によりて

$$x_1-x_2=he^{-bt}\cos(nt+\varepsilon)$$

なり。

而して$x_2=\dfrac{\mathrm{A}}{m\mathrm{P}}\cos(\mathrm{N}t-\varphi)$なりと看做せば

$$x_1=\frac{\mathrm{A}}{m\mathrm{P}}\cos(\mathrm{N}t-\varphi)+he^{-bt}\cos(nt+\varepsilon)$$

はh, εなる二常數を含み上の微分方程式の全解なり。此第二項はe^{-bt}なる因數を含む故,時と共に減衰し後

には唯だ强制振動のみ殘る。

例 4. $A_1 \cos N_1 t$ なる外力の働くときの運動の式の解を x_1 とすれば

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -a^2x_1 - k\frac{dx_1}{dt} + A_1\cos N_1 t.$$

又 $A_2\cos N_2 t$ なる外力の働くときの運動の式の解を x_2 とすれば

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -a^2x_2 - k\frac{dx_2}{dt} + A_2\cos N_2 t.$$

上の二式を加へて

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) = -a^2(x_1+x_2) - k\frac{d}{dt}(x_1+x_2) + [A_1\cos N_1 t + A_2\cos N_2 t].$$

これより $A_1\cos N_1 t + A_2\cos N_2 t$ なる外力が働くときの運動の式の解は x_1+x_2 なることを知り得べし。

同様にして多くの外力の働くときの强制運動は、各一つづつの外力の働くときの强制振動の和に等しきことを知る。

例 5. 垂直面内にて振動する單振子に於て、絲と垂直線との間の角を小なりとし、絲の固定せる點を水平に動かす場合を考へん。

一定の垂直線 CO に對する固定點及び質點の距離をそれぞれ ξ, x とすれば、運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\frac{x-\xi}{l}.$$

第三十四圖

にして、$n^2 = \frac{g}{l}$ と置けば、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = n^2\xi$$

となる。

卽ち絲の上端固定せられて、質點に $n^2\xi$ なる加速度を生ずる水平力の作用する場合と同様なり。

今 $\xi = a\cos Nt$ とすれば

$$x = \frac{n^2a}{n^2-N^2}\cos Nt$$

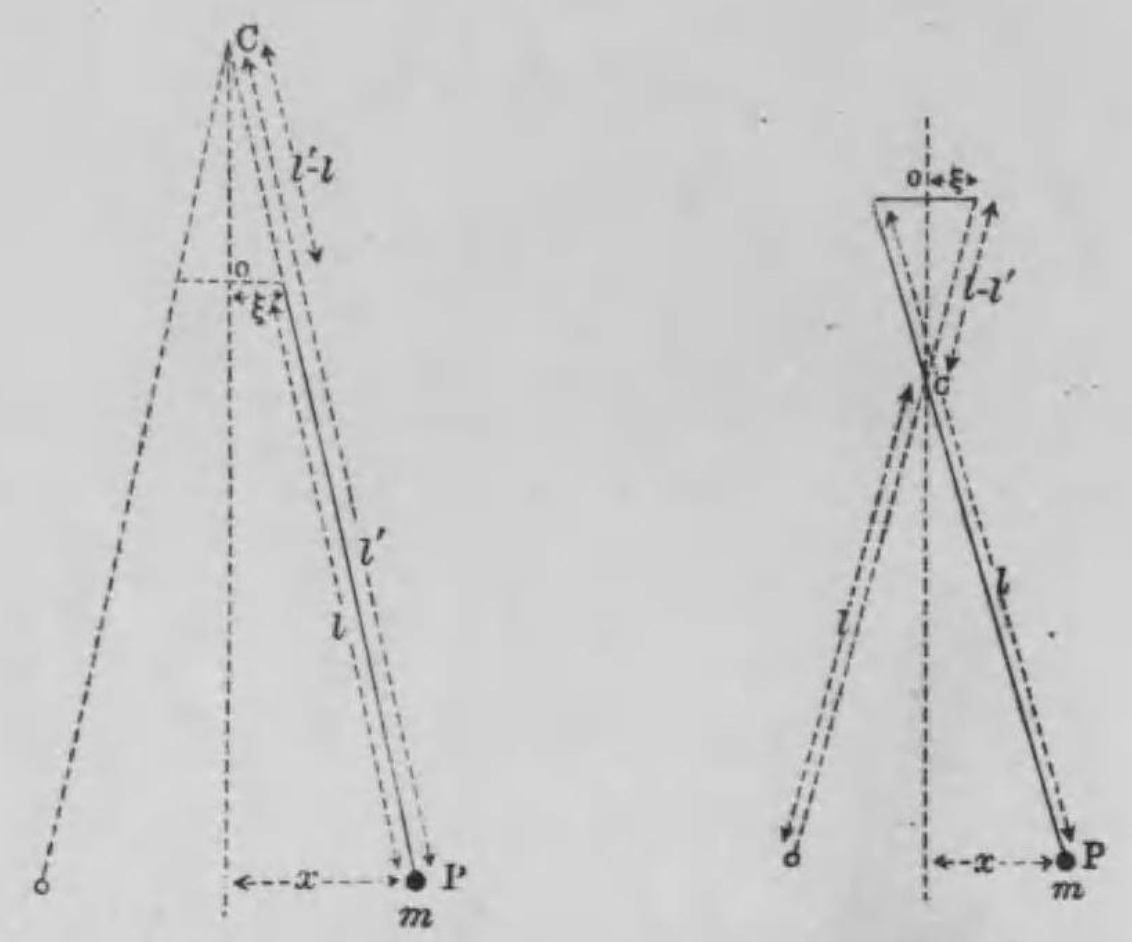
となる。

又此 ξ の運動を長さ l' の單振子により起れるものと見れば、$l' = \frac{g}{N^2}$ 卽ち $N^2 = \frac{g}{l'}$ にして、$x = \frac{l'}{l'-l}$ となり、第三十五圖の C 點を定點とせる單振子の運動と同様なるを知るべし。

而して $n^2 \gtrless N^2$ 卽ち $l' \gtrless l$ の如何に依りて二つの場合を生ず。

(i) $n>N$ なるときは、n^2-N^2 は正にして、x と ξ と位相を同じくし、ξ が右方にて最大の値に達するときは x も亦右方にありて最大の値に達す。(第三十五圖甲)

(ii) $n<N$ なるときは、n^2-N^2 は負にして、x と ξ とは位相相反せり。故に ξ が右方にて最大の値に達するとき x は反對に左方にありて最大の値に達せり。(第



第三十五圖

三十五圖乙)

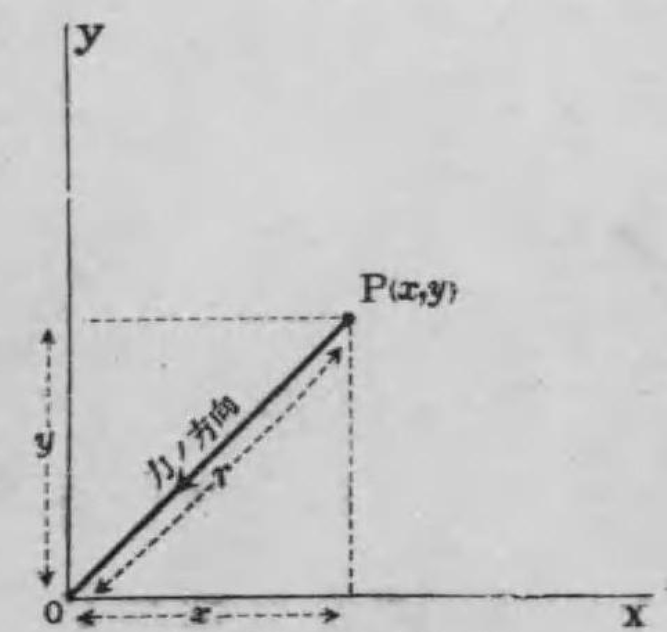
此(i)の場合は $n>N$ なれば,單振子の振動數が絲の固定點の振動數より大なるときにして,換言すれば振子の週期よりも長き週期を以て絲の固定點を動かしたるときなり。これに反して(ii)の場合は $n<N$ なれば單振子の週期よりも早き週期にて絲の固定點を動かしたるときなり。

第六章

萬有引力

25. 遊星の運動. 質點に働く力の方向が恆に固定點Oを過ぎ,其大さが質點と固定點との距離 r の函數卽ち $f(r)$ にて表はさるる場合多し。斯くの如き力を**中心力**と云ふ。而して中心力が固定點Oに向へる場合は引力にして,反對の方向に向へる場合は斥力なり。前に論じたる彈力は,其大さが距離 r に比例する引力なれば,これ亦中心力の一例なり。これより考へんとするは,引力が距離 r の二乘に逆比例し,質點の質量 m に比例する場合なり。卽ち λ を正の常數として,引力の大さは $\lambda\frac{m}{r^2}$ にて表はさる。

先づ運動が一平面内にて起る場合を考へん。力を及ぼす中心點Oを坐標の原點とし,運動の平面内にて任意の方向にx,y軸を取り,質點Pの坐標を x,y とせん。



第三十六圖

質點に働く力の大さは $\lambda\frac{m}{r^2}$ にして,其方向はPOの方向にあり,x軸とOP線と

の間の角の餘弦は $\frac{x}{r}$ に等しく,POはOPと反對の方向にある故, x 軸の方向の分力は

$$\lambda\frac{m}{r^2}\cdot\frac{-x}{r}$$

に等し。又 y 軸の方向の分力は同様にして

$$\lambda\frac{m}{r^2}\cdot\frac{-y}{r}$$

なる事を知る。故に運動の式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\lambda\frac{m}{r^2}\frac{x}{r},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\lambda\frac{m}{r^2}\frac{y}{r}$$

なり。此運動の式は m にて約し得るを以て

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\lambda\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}, \quad\text{.................(1)}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\lambda\frac{1}{r^2}\frac{y}{r} \quad\text{.................(2)}$$

となすことを得。從て質點に $m\frac{\lambda}{r^2}$ なる中心力が働くと見る代りに,此質點は固定點Oに向ひて $\frac{\lambda}{r^2}$ なる加速度を有するものと見るを得べく,斯かる加速度の許に,質點が如何なる運動をなすかを考へんとするなり。

上の r は

$$r^2=x^2+y^2 \quad\text{..........................(3)}$$

なる故に,(1)式の r^3 の中には y を含み,(2)式の r^3 の中には x を含むを以て,此微分方程式は從來論じたるものの如く(1)と(2)とを別別に解くこと能はず。恰も代數學に於ける聯立方程式と類似するを以て之を聯立微分方程式と云ふ。

26. えねるぎーの式。 この聯立微分方程式を解くには(1)式に $\frac{dx}{dt}$ を,(2)式に $\frac{dy}{dt}$ を乘じて,邊邊相加ふれば

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\lambda}{r^3}\left\{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right\} \quad\text{........(4)}$$

を得。

而して

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \qquad \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

なる故(4)式の左邊は

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$$

となる。

又 $r^2=x^2+y^2$ を t に就きて微分すれば

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2r\frac{dr}{dt}.$$

故に(4)式の右邊は

$$-\frac{\lambda}{r^3}\left\{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right\}=-\frac{\lambda}{r^2}\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{r}\right)$$

となる。

故に(4)式は

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\lambda}{r}\right]=0$$

となる。これより $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\lambda}{r}$ は t に無關係なる常數なることを知る。此常數を $\frac{1}{2}k$ と置けば

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\lambda}{r}=\frac{1}{2}k$$

となり,これに質點の質量mを乘ずれば

$$\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\lambda m}{r}=\frac{1}{2}mk \quad \text{............(5)}$$

となる。

此$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$は速度の二乘にして,之に質量を乘じたるものの$\frac{1}{2}$は運動のエネルギーに外ならず。又$-\frac{\lambda m}{r}$は位置のエネルギーなれば,上式は此二つのエネルギーの和は恆に常數$\frac{1}{2}mk$に等しきこと卽ちエネルギーの保存則を表はす。

今初めの條件を與へられたるものとすれば,其時の速度の大さV_0と,原點よりの距離r_0とは,共に既知量なる故エネルギーの値$\frac{1}{2}mV_0^2-\frac{\lambda m}{r_0}$も亦既知量と看做し得べし。而してエネルギーの値は$t$に無關係に恆に常數$\frac{1}{2}mk$に等しきことを知れるを以てこれより常數$k$を定め得。故に以下$k$の値は既知のものと看做さん。

扨て前の$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\lambda}{r}=\frac{1}{2}k$は$m$を乘ずればエネルギーの保存則を表はす式となるを以て,これを**えねるぎーの式**と名づけん。

運動の式はtに對する二次の微分係數$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$を含み,エネルギーの式はこれより一次低き微分係數を含むのみなれば,エネルギーの式は運動の式の一次積分式なりと云はる。されど運動の式の一次積分式はエネルギーの式のみならずして他にもあり。次ぎに述べんとする面積速度の式も亦其一なり。

27. 面積速度の式。 再び運動の式に立ち歸りて面積速度の式を出さん。先づ(1)に$-y$を,(2)にxを乘じて邊邊相加ふれば

$$\frac{d^2y}{dt^2}x-\frac{d^2x}{dt^2}y=-\frac{\lambda}{r^3}(yx-xy)=o,$$

卽ち
$$\frac{d^2y}{dt^2}x-\frac{d^2x}{dt^2}y=o.$$

然るに
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right\}=\frac{d^2y}{dt^2}x+\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}y$$
$$=\frac{d^2y}{dt^2}x-\frac{d^2x}{dt^2}y$$

なるを以て上式は

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right\}=o$$

となる。これ$\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y$が$t$に無關係なる常數に等しきことを示すものなれば此常數をhとして

$$\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y=h. \quad \text{..................(6)}$$

此式も$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$の一次微分係數を含むのみなれば亦運動の式の一次積分式にして上に述べたる**面積速度の式**卽ちこれなり。

此式が面積速度の式と云はるる所以を明かにする

には,これを直角坐標より極坐標に移して考ふるを便とす。今

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

とし,x, y の代りに r, θ なる極坐標を用ふれば時間の經過と共に x, y は變じ,之と同時に r, θ も亦變ず。

故に上式を t につきて微分すれば

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

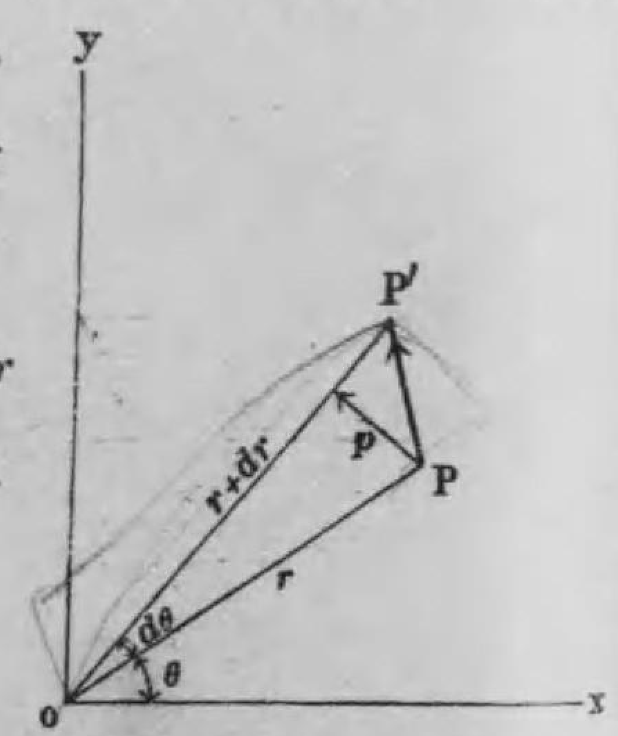
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

初めの式の左邊に $-y$ を,右邊には $-y$ に等しき $-r\sin\theta$ を乘じ又後の式の左邊には x, 右邊には x に等しき $r\cos\theta$ を乘じて兩式を邊邊相加ふれば

$$\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y=r^2\frac{d\theta}{dt}=h$$

となる。

今時刻 t に於て質點は P にあり, $t+dt$ に於て P′ に來れりとし,P の坐標を (r, θ), P′ の坐標を $(r+dr, \theta+d\theta)$ とすれば第三十七圖に示す如く



第三十七圖

角 $POP'=d\theta$, $OP=r$, $OP'=r+dr$ なる故三角形 POP′ の面積の二倍を dA にて表せば

$$dA=r(r+dr)\sin d\theta$$

にして,r に比して dr を neglect

$dr\to 0$ lim $dA=r^2d\theta$

$\sin d\theta$ を $d\theta$ とすれば

$$dA=r^2d\theta$$

となる。故に

$$\frac{dA}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}$$

にして,上に得たる式 $r^2\frac{d\theta}{dt}=h$ は

$$\frac{1}{2}\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}h \qquad \text{..................(7)}$$

となる。

然るに $\frac{1}{2}dA$ は原點より質點に引きたる動徑 r が, dt の間に畫く面積を表はすを以て, $\frac{1}{2}\frac{dA}{dt}$ は動徑 r が面積を畫く速度にして,上式は此速度が恆に一定の値 $\frac{1}{2}h$ に等しきことを示すものなり。これ本式を面積速度の式と名づくる所以なり。

今この面積を $t=0$ のときより測り始むることとして,之を A にて表はせば, $\frac{1}{2}\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}h$ の積分として $\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}ht$ を得。即ち動徑の畫く面積は時間 t に比例することを示す。

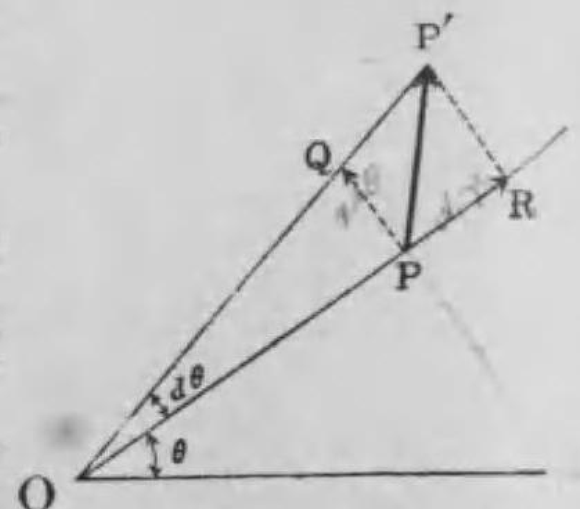
而して初めの時刻に於ける質點の位置と,速度とを與へられたるものとすれば,これより h の値を定め得。故に h は初めの條件によりて定められたる旣知量として取扱ふべし。

此面積速度には猶ほ他の形を與ふることを得。上の三角形 POP′ に於て,頂點Oより底邊 PP′ へ垂線を下し,其長さを p とすれば,三角形 POP′ の面積 $\frac{1}{2}dA$ は, $\frac{1}{2}\times PP'\times p$ にて表はすことを得。然るに PP′ は dt の間に質點の動きたる距離なるが故に, Vdt として表はさるべく,面積速度は $\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}\times p$ なる形となし得。

23. 極坐標にて表はされたるエネルギーの式.

面積速度の式を極坐標にて表はしたる如く,エネルギーの式も亦,極坐標にて表はさん。

今時間 dt の間に質點はPより P′ に變位したりとし,之を OP の方向の變位 $PR=dr$ 及び之に直角なる PQ の方向に於ける變位 $PQ=rd\theta$ との二部分に分つものとす。然らば OP 及び PQ の方向に於ける分速度は夫々 $\frac{dr}{dt}$, $r\frac{d\theta}{dt}$ なるべし。



第三十八圖

此事は又次ぎの如くして明かにすることを得べし。x y の方向に於ける分速度はそれぞれ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ なるを以て r の方向に於ける分速度は

$$\frac{dx}{dt}\cos(r,x)+\frac{dy}{dt}\cos(r,y)$$

なり,然るに

$$\cos(r,x)=\cos\theta,\quad \cos(r,y)=\sin\theta,$$

竝に

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

なるを以て之を上式に代入して, r の方向の分速度は $\frac{dr}{dt}$ となることを知るべし。

又 r に直角なる方向の分速度は

$$\frac{dx}{dt}(-\sin\theta)+\frac{dy}{dt}\cos\theta$$

にして之が $r\frac{d\theta}{dt}$ となることも容易に知り得べし。而して $r\frac{d\theta}{dt}$ は θ の增加する方向の分速度なるを以て θ の方向の分速度と云ふことあり。

之を要するに極坐標を用ひたるときの分速度はそれぞれ $\frac{dr}{dt}$, $r\frac{d\theta}{dt}$ にて表はさるるを以て,速度の二乘の和は $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ となり,直角坐標に於ける $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ に外ならざれば

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

なり。故にエネルギーの式 $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\lambda}{r}=\frac{1}{2}k$ を極坐標にて表はせば

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\lambda}{r}=\frac{1}{2}k \quad \text{..............(8)}$$

となる。

上に得たるエネルギーの式と,面積速度の式との二つを用ひて質點の運動を完全に知ることを得。

29.　徑路。　先づ $r^2\frac{d\theta}{dt}=h$ より求め得たる $\frac{d\theta}{dt}$ の値をエネルギーの式(8)に代入すれば

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2}=\frac{\lambda}{r}+\frac{1}{2}k,$$

即ち
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2\lambda}{r}+k-\frac{h^2}{r^2}$$

となる故書き換へて

$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2\lambda}{r}+k-\frac{h^2}{r^2}}$

$\frac{dr}{dt}=\frac{ar^2}{\ }$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2\lambda}{r}+k-\frac{h^2}{r^2}}}=dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

とするを得。これを積分すれば,r を t の函數として表はし得べし。されど今求めんとするは質點の畫く徑路にして,之を求むるには

$$dt=\frac{r^2d\theta}{h}$$

として,上式に入れて

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2\lambda}{r}+k-\frac{h^2}{r^2}}}=\frac{r^2}{h}d\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

を得。之を積分すれば,r と θ との關係式卽ち徑路の式を得るなり。

之を積分するには,先づ平方根内の量を書き直して

$$\left(k+\frac{\lambda^2}{h^2}\right)-\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{r}\right)^2$$

とす。初めの括弧内の量は正なれば,之を

$$k+\frac{\lambda^2}{h^2}=\alpha^2$$

と置き,又次ぎの項にて

$$\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{r}=z$$

と置き,dz と dr との關係を求むれば

$$\frac{h}{r^2}dr=dz$$

となる,是等の値を上の(10)式に入るれば

$$\frac{dz}{\sqrt{\alpha^2-z^2}}=d\theta$$

となり,積分して

$$\cos^{-1}\frac{z}{\alpha}=\theta+C$$

即ち
$$\frac{z}{\alpha}=\cos(\theta+C)$$

を得。θ は x 軸より測りたる角を表はするものなるが,其 x 軸は任意の方向に採り得るを以て,之を適當に選びて常數 $C=o$ となる樣に採り得べし。斯く x 軸を適當の方向にとりたるものとして上式を

$$\frac{z}{\alpha}=\cos\theta$$

とせん。今 z の代りに再び r を戻せば

$$\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{r}=\alpha\cos\theta,$$

即ち
$$r=\frac{\frac{h^2}{\lambda}}{1+\frac{h\alpha}{\lambda}\cos\theta}$$

となる。又

$$\frac{h\alpha}{\lambda}=\frac{h}{\lambda}\sqrt{k+\frac{\lambda^2}{h^2}}$$

を e と置けば $e^2=1+\dfrac{kh^2}{\lambda^2}$ となり,上式は

$$r=\frac{\dfrac{h^2}{\lambda}}{1+e\cos\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

となる。λは假定に依り正なる故 $\dfrac{h^2}{\lambda}$ も亦正にして,從て此式にて表はさるる曲線は**原點を焦點とせる圓錐曲線**なることを知る。

而して　　$e>1$　ならば　**雙曲線**

　　　　　$=1$　ならば　**拋物線**

　　　　　<1　ならば　**橢　圓**

なり。

質點がこの三種の曲線のうち,何れの徑路を取りて運動するかを識別するには $e^2=1+\dfrac{kh^2}{\lambda^2}\gtreqless 1$ の何れに相當するかを吟味すれば可なり。卽ち λ^2, h^2 は何れも正量なるが故, $k\gtreqless 0$ 卽ち $\dfrac{1}{2}mk\gtreqless o$ の何れなるかを識別すれば足れり。而して $\dfrac{1}{2}mk$ はエネルギーの式(4)又は(8)より明かに知る如く,運動のエネルギーと位置のエネルギーとの和,卽ち全エネルギーを表はすを以て,之が正量ならば雙曲線,零ならば拋物線,負量ならば橢圓となるを知るべし。

上の研究より質點の動く徑路は,力の中心を焦點とせる圓錐曲線にして,其全エネルギーが正なるか,零なるか,負なるかによりて雙曲線,拋物線,橢圓の何れかとなることを知る。

前に述べたる彈力の場合にも,質點の徑路は橢圓なりしが,力の中心は橢圓の**中心**に位して,**焦點**にあらず。これ萬有引力の場合との相違の點なり。

30. 橢圓形の徑路の場合。 橢圓の徑路を畫く場合を尙ほ精しく考ふることとせん。

其長軸を a,短軸を b とすれば離心率は $e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$ にして,此橢圓の式は焦點を原點とすれば

$e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$

$b^2=a^2(1-e^2)$

$b=a\sqrt{1-e^2}$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

なり。之を前に得たる橢圓の式と比較して

$$a(1-e^2)=\frac{h^2}{\lambda}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$e^2-1=\dfrac{kh^2}{\lambda^2}$

を得。然るに $e^2=1+\dfrac{kh^2}{\lambda^2}$ なれば,これより k, λ を用ひて a, b を表はすことを得。卽ち

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{h^2}{\lambda(1-e^2)}=-\frac{\lambda}{k}\\ b&=a\sqrt{1-e^2}=\sqrt{\frac{h^2}{-k}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

なり。

次ぎに面積速度の式を用ひて,橢圓を一周するに要する時間を求めん。

前に出したる式 $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{2}$ を積分して

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_0^{T}\frac{h}{2}dt=\frac{h}{2}T$$

を得。然るに $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta$ は動徑の畫きたる楕圓の全面積なるが故,長軸 a,短軸 b の楕圓にありては

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\pi.a.b.=\pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

なり。故に

$$\pi a^2\sqrt{1-e^2}=\frac{h}{2}T$$

にして此兩邊を二乘し,且つ $a(1-e^2)=\frac{h^2}{\lambda}$ を入るれば

$$\pi^2a^3\frac{h^2}{\lambda}=\frac{h^2}{4}T^2,$$

となる。故に

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\lambda}{4\pi^2},$$

卽ち

$$T=2\pi\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda}} \quad\text{……………………(15)}$$

を得。

次ぎに二質點 P, P′ が同じ固定點 O より距離の二乘に逆比例する加速度を受くるも其比例常數は相異なるものとし,これを λ 竝に λ′ とすれば

$$\left.\begin{array}{ll}\text{P に就ては} & \dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{\lambda}{4\pi^2}\\[2ex] \text{P′ に就ては} & \dfrac{a'^3}{T'^2}=\dfrac{\lambda'}{4\pi^2}\end{array}\right\} \quad\text{……………(16)}$$

なる關係成立す。

又若し比例常數同じく $\lambda=\lambda'$ なれば $\frac{a^3}{T^2}=\frac{a'^3}{T'^2}$ なる關係式成立す。

31. ケプレルの法則。 チコ,ブラァヘが遊星の運行を觀測したる表よりケプレルは下の三法則を發見せり。

(i) 遊星の徑路は太陽を焦點とせる楕圓なり。

(ii) 遊星が太陽の周圍に畫く面積速度は同一なり。

(iii) 各遊星より太陽に至る平均距離 a と,其週期 T との間には $\frac{a^3}{T^2}=$常數 なる關係あり。

實にブラァヘの浩瀚なる觀測表は,ケプレルの此三則に歸納せられたるものにして,此法則に依り必要に應じて,ブラァヘの觀測表を作り,又は遊星の占むべき位置をも豫知するを得るなり。故に遊星運動の特色は,此ケプレルの三則にて表はさると云ひ得るなり。

然れども太陽を固定點とし,遊星を質點と看做し,之が太陽より $\frac{\lambda}{r^2}$ なる加速度を受くるものとし,且つ λ を何れの遊星につきても同一とすれば直ちにケプレルの三則を導き出し得ること上に述べたる如し。故に之がケプレルの法則よりも,一層適切に遊星運動の特性を表はすものと云ふも過言に非ざるべし。これ實に**ニウトン**の發見に係かるものなり。

今上に述べたる主要なる式と常數とを一括して列

記せん。

加速度の値 $-\dfrac{\lambda}{r^2}$,

エネルギーの式 $\dfrac{1}{2}[\text{速度}]^2=\dfrac{\lambda}{r}+\dfrac{1}{2}k$,

面積速度の式 $\dfrac{dA}{dt}=r^2\dfrac{d\theta}{dt}=h$,

$$e^2=1+\frac{kh^2}{\lambda^2}$$

として徑路の式 $r=\dfrac{\frac{h^2}{\lambda}}{1+e\cos\theta}$。

楕圓の場合には長軸を a, 短軸を b として

$$a=\frac{h^2}{\lambda(1-e^2)}=-\frac{\lambda}{k},\qquad b=\frac{h}{\sqrt{-k}}。$$

離心率 $e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$,

週期 $T=2\pi\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda}}$,

卽ち $\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{\lambda}{4\pi^2}$.

例 1. r と θ とを t の函數として求めよ.

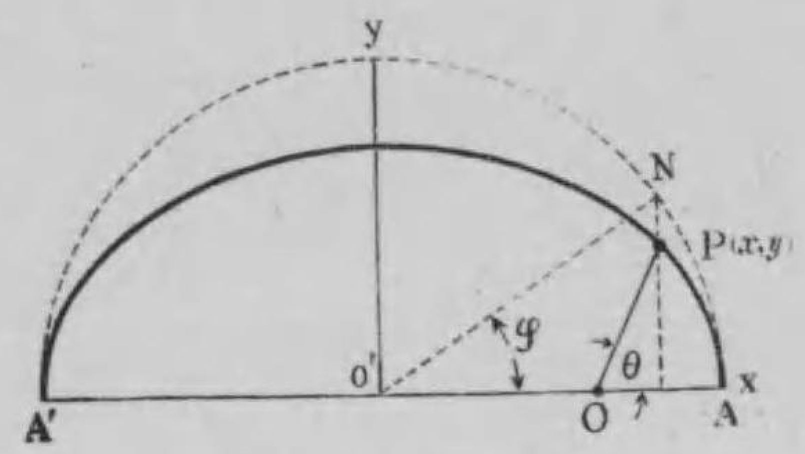
先づ(9)式

$$dt=\frac{rdr}{\sqrt{kr^2+2\lambda r-h^2}}$$

に於て r の代りに $r=a(1-e\cos\varphi)$ と置きて,新に φ を導入したりとすれば,此 φ は如何なる量なるか.

今楕圓の中心を O′,焦點を O,長軸を O′A,t に於ける質

點の位置を P とすれば, OP$=r$, 角 POA$=\theta$ なり。今 O′ を中心として半徑 a の圓を書き,P を過ぎて OA に垂直線を引き,此圓と交る點を N とせん。



第三十九圖

又 O′ を原點とし, OA を x 軸とせる直角坐標を用ひ,P の坐標を x, y とすれば,楕圓の式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

然るに第三十九圖より明かなる如く

$$y^2=r^2-(x-ea)^2$$

にして,此 y^2 の値を楕圓の式に入れ,$e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$ なる關係を利用して

$$r=a-ex=a-e(a\cos \mathrm{NO'A})$$
$$=a(1-e\cos \mathrm{NO'A})。$$

これを $r=a(1-e\cos\varphi)$ と比較して角 φ は角 NO′A なることを知る。

扨て $r=a(1-e\cos\varphi)$

より $dr=ae\sin\varphi\, d\varphi$

を得. また $k=-\dfrac{\lambda}{a}$ を $r^2=a^2(1-e\cos\varphi)^2$ の兩邊に乘ずれば

$$kr^2=-\lambda a(1-e\cos\varphi)^2.$$

而して $$h^2=a\lambda(1-e^2)$$

なる故に

$$\sqrt{kr^2+2\lambda r-h^2}=2\sqrt{a\lambda}\sin\varphi$$

を得。是等の値を $dt=\dfrac{rdr}{\sqrt{k^2+r^2+2hr-h^2}}$ に入れて積分し且つ $t=o$ の時に質點がAにあるものとすれば

$$t=\sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}(\varphi-e\sin\varphi)$$

を得。

又質點は其徑路たる橢圓を一周するに $T=2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\lambda}}$ の時を要す。故に今此質點が力の中心に對して恆に同一の角速度 n を以て運動するものと假定すれば nT は 2π に等しかるべし。何んとなれば角速度 n と時間 T との相乘は角の増加に等しかるべく,角の増加は 2π なればなり。故に

$$n=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{\lambda}{a^3}}$$

となる。

此 n を質點の**平均運動**と云ふ。$\sqrt{\dfrac{a^3}{\lambda}}$ の代りに n を代入すれば上式は

$$nt=\varphi-e\sin\varphi$$

となる。

質點が橢圓の上を動く場合に,力の中心に近き方の

長軸の端 A を**近日點**と云ひ,遠き方の端 A′ を**遠日點**と名づく。

例 2. 橢圓の式は (10) 式より

$$\frac{\frac{h^2}{\lambda}}{r}=1+e\cos\theta \quad\text{.................(1)}$$

と書き得べく,又例 1. の如く

$$r=a(1-e\cos\varphi) \quad\text{...............(2)}$$

とせば

$$nt=\varphi-e\sin\varphi \quad\text{...................(3)}$$

となる。故に θ を與ふれば,(1) 式によりて r を求め得べく,r を知れば (2) 式に依りて φ を見出し得べく,φ を知れば (3) に依りて t を計算し得べし。

星學上に於ては此問題の逆,卽ち t を與へて r, θ を求むることを要する故,今其計算法を述ぶることとせん。而して遊星の軌道は甚だ圓に近き橢圓なるを以て e の値は小にして,此事を用ひて計算を簡略にすることとせん。

$r^2\dfrac{d\theta}{dt}=h$ と此 (1) 式とより

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{r^2}{h}=\frac{h^3}{\lambda^2}(1+e\cos\theta)^{-2}$$

を得べく,$h^2=a\lambda(1-e^2)$ を入るれば

$$\frac{dt}{d\theta}=\sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}(1+e\cos\theta)^{-2}.$$

故に
$$\frac{ndt}{d\theta}=(1-e^2)^{\frac{3}{2}}(1+e\cos\theta)^{-2}$$
$$=(1-\frac{3}{2}e^2+\ldots)(1-2e\cos\theta+3e^2\cos^2\theta-\ldots)$$
$$\fallingdotseq 1-2e\cos\theta+\frac{3}{2}e^2\cos 2\theta.$$
これを積分して,
$$nt\fallingdotseq\theta-2e\sin\theta+\frac{3}{4}e^2\sin 2\theta$$
となる。即ち
$$\theta=nt+2e\sin\theta-\frac{3}{4}e^2\sin 2\theta\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$
を得。故に第一近似値は
$$\theta\fallingdotseq nt$$
にして,第二近似値は(4)式の第二項に$\theta\fallingdotseq nt$を入れたるもの
$$\theta\fallingdotseq nt+2e\sin nt.$$
次ぎに此θの値を再び(4)式の右邊の第二項に入れ,$\theta\fallingdotseq nt$ を第三項に入るれば,θの第三近似値を得べく誤差はe^3の項にして
$$\theta\fallingdotseq nt+2e\sin(nt+2e\sin nt)-\frac{3}{4}e^2\sin 2nt$$
$$\fallingdotseq nt+2e(\sin nt+2e\sin nt\cos nt)-\frac{3}{4}e^2\sin 2nt$$
$$\fallingdotseq nt+2e\sin nt+\frac{5}{4}e^2\sin 2nt.$$
同様にしてrの近似値を見出すには,先づ
$$\varphi\fallingdotseq nt+e\sin\varphi\fallingdotseq nt+2e\sin nt$$

を得。次ぎに
$$\frac{r}{a}=1-e\cos\varphi\fallingdotseq 1-e\cos(nt+2e\sin nt)$$
$$\fallingdotseq 1-e\cos nt+\frac{1}{2}e^2(1-\cos nt).$$
例3.　質點が橢圓の軌道を畫くとき其速度の大さをVとすれば,下の關係あることを證明せよ。
$$\frac{1}{2}V^2=\lambda\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)$$
解　kをaにて表はし,これをエネルギーの式に入るべし。

例4.　木星の週期は11.8618年なりと云ふ。木星軌道の長軸a_Jは地球軌道の長軸a_Eの何倍なるか。

ケプレルの第三則により
$$\left(\frac{a_J}{a_E}\right)^3=(11.8618)^2$$
なる故
$$\frac{a_J}{a_E}=5.2011.$$
例5.　中心力が$m\,f(r)$なる大さの時,運動の式は
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{x}{r}m\,f(r),$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{y}{r}m\,f(r)$$
にして,エネルギーの式は
$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-\varphi(r)=\frac{1}{2}k\ (\text{常數})$$

なり。但し$-\varphi(r)=\int f(r)dr$にて與へらるるものとす。

又面積速度の式は

$$\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y=r^2\frac{d\theta}{dt}=h$$

にして此兩式より

$$dt=\frac{dr}{\sqrt{2\varphi(r)+k-\frac{h^2}{r^2}}},$$

$$d\theta=\frac{hdr}{r^2\sqrt{2\varphi(r)+k-\frac{h^2}{r^2}}}$$

なることを證明し得べし。

32. 萬有引力の法則。 前節に於て固定點Oより$\frac{\lambda}{r^2}$なる加速度を質點に及ぼすとき,質點が如何なる運動をなすかを考へ,次ぎに其固定點を太陽とし質點を遊星とすれば,ケプレルの法則を導き得ることを示せり。然れども太陽は決して固定せる點にあらず。ニウトンの發見せる萬有引力の法則に依れば,二つの質點は互に引力を及ぼすものにして此質量をm,m',其間の距離をr,とし,γを一定の常數とすれば,此質點間に働く引力の大さは

$$\gamma\frac{m\,m'}{r^2}$$

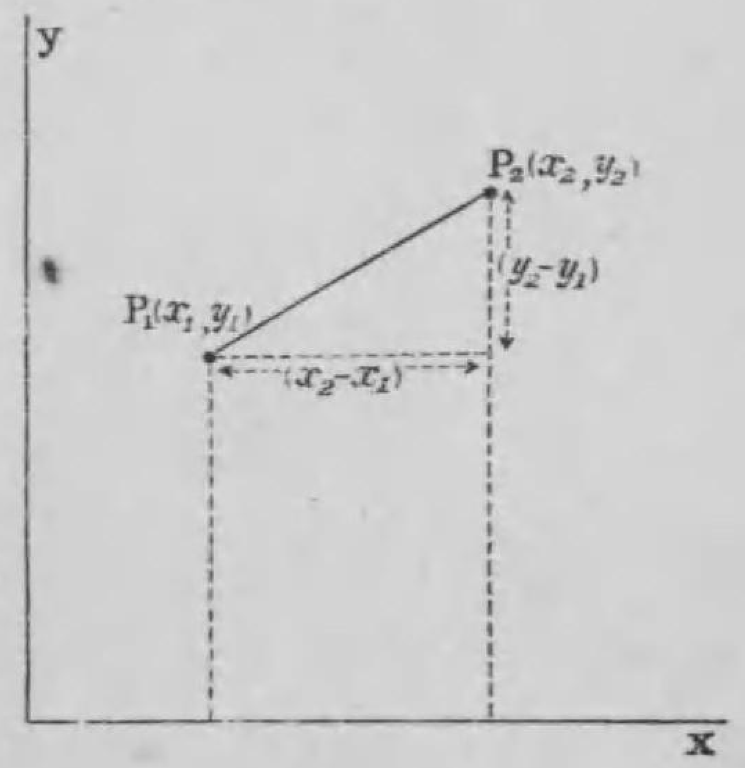
にして,其方向は二つの質點を結ぶ直線上にあり。故に太陽が遊星を引くと同時に遊星も亦太陽を引き,太

陽は此力の作用を受けて運動すべきなり。

以下攻究せんとするは萬有引力の作用を受けて太陽並に遊星が空間に於て如何なる運動をなすか,又太陽に對して遊星が如何なる運動をなすかと云ふ問題なり。

33. 重心の運動 先づ問題を少しく擴張して二つの質點間に作用する引力を,其距離rの任意の函數$f(r)$と考へ,次ぎに其格段の場合として萬有引力の場合を論ずることとせん。

今此運動が一つの平面內に於て起るものとし其平面上に任意の方向に坐標軸x, yを取り,質量m_1なる質點の位置をP_1,其坐標を(x_1,y_1)とし,又質量m_2なる質點の位置をP_2,その坐標を(x_2,y_2)とせん。P_1にある質點に働く力は,$f(r)$の大さを有し,P_1P_2の直線上にて働くを以て,x軸の方向の分力は$f(r)$に乘ずるにP_1P_2がx軸となす角の餘弦を以てしたる



第四十圖

$$f(r)\frac{x_2-x_1}{r}$$

なること明かなれば,運動の式は

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=f(r)\frac{x_2-x_1}{r}\quad\dots\dots\dots\dots(1)$$

なり。又同樣にして

$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}=f(r)\frac{y_2-y_1}{r}\quad\dots\dots\dots\dots(2)$$

を得。

次ぎにP_2にある質點に働く力は,P_1の質點に働く力と同じ大さなるも,反對の方向を有するが故,x軸竝にy軸の方向の分力はそれぞれ

$$f(r).\left\{-\frac{x_2-x_1}{r}\right\},\quad f(r).\left\{-\frac{y_2-y_1}{r}\right\}$$

にして,運動の式は

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=f(r)\frac{x_1-x_2}{r},\quad\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}=f(r)\frac{y_1-y_2}{r}\quad\dots\dots\dots\dots(4)$$

なり。而して

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\dots\dots\dots\dots(5)$$

なるを以て,此運動の式を聯立微分方程式として解くことは甚だ困難なるが如く見ゆるも,次ぎの方法に依りて之を既知の問題に歸せしむることを得。

即ちx軸に關する二式(1)と(3)とを邊邊相加ふれば

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=f(r)\frac{x_2-x_1}{r}+f(r)\frac{x_1-x_2}{r}=o,$$

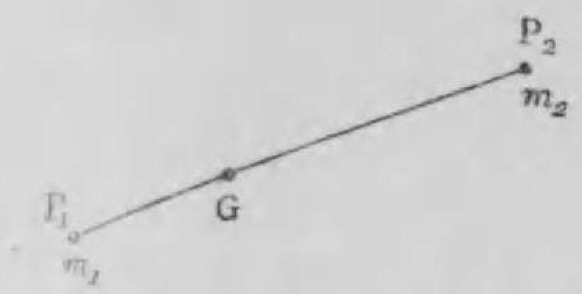
或は

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1x_1+m_2x_2)=o。\quad\dots\dots\dots\dots(6)$$

同樣にしてy軸に關する二式(2)と(4)とより

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1y_1+m_2y_2)=o\quad\dots\dots\dots\dots(7)$$

を得。



第四十一圖

今P_1P_2を結ぶ直線上に一點Gを採り,GよりP_1,P_2に至る距離の比を各質點の質量に逆比例する樣に採れりとせん。然らばGの坐標$\bar{x},\bar{y}$は

$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\qquad \bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$

なること幾何學上より明かにして,此値を(6),(7)式に代入すれば,

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=o,\quad\dots\dots\dots\dots(8)$$

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}=o\quad\dots\dots\dots\dots(9)$$

となる。上に選びたるG點はP_1にある質量m_1,P_2にある質量m_2の重心と名づけらるゝものなり。此點は質量m_1竝にm_2の位置を與ふれば,直ちに求め得べく,其質點が運動して位置を變ずれば,Gも亦之に伴ひて其位置を變ず。而してGが其位置を變ずる模樣は上の(8)(9)の兩式に依りて明かにし得べし　即ちGは靜止の

狀態にあるか,又は一直線上にて等速運動をなすべきことを知る。かくP_1,P_2にある質點は互に作用して複雜なる運動をなすべしと雖も,此二質點の重心Gの運動は極めて簡單にして,靜止の狀態にあるか,又は一直線上に於て等速運動をなすなり。

此結果を太陽と遊星との場合に適用すれば,太陽も遊星も相互の引力のもとに種々複雜なる運動をなし,其模様を詳知すること能はざれども,是等天體の重心は全く靜止せるか,又は一直線上を等速運動せることとなる。且つ太陽の質量は遊星の質量に比して非常に大なる故,太陽と遊星との重心は太陽に近き所にあるべきは推定するに難からず。

34. 相對運動。 既に重心の運動を詳かにし得たる以上は,若し重心に對するP_1とP_2との運動を知ることを得ば,これより直に空間に於けるP_1,P_2の運動を明かにし得べきなり。されど重心に對するP_1,P_2の運動を知る代りに,P_2に對するP_1の運動を知るも亦此目的を達することを得。如何となればP_2に對するP_1の位置を知れば,其重心は容易に求め得べく,從て重心に對するP_1,P_2の位置をも亦知り得ればなり。

故にP_2に對するP_1の運動を求むることとし,P_2に對するP_1の坐標x_1-x_2, y_1-y_2,を簡單にx,yと置かん。前節

の(1)式をm_1にて,(3)式をm_2にて除し,前式より後式を邊邊相減ずれば

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}=f(r)\frac{x_2-x_1}{r}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right),$$

即ち
$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(r)\frac{-x}{r}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$

を得。同様に(2),(4)の兩式より

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f(r)\frac{-y}{r}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$

を得。今

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

と置き,之に依りて定めらるるMを上式に入るれば

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-f(r)\frac{x}{r},$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=-f(r)\frac{y}{r}$$

となる。

此式は前節に論じたる微分方程式と全く形を同うし,原點より距離rの函數$f(r)$なる引力が質點に作用する場合の式なり。故にP_2に對するP_1の運動を知らんとすれば,P_2を固定點と見て,これが質點P_1に$f(r)$なる引力を作用するものとして求め得べく,只P_1の質量としてm_1を採る代りに,上に定義したるMを採ることを要し,又初めの條件としても,P_1のP_2に對する位置並

に速度を以てするを要す。

上の運動の式は又

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{f(r)}{M}\frac{-x}{r}=f(r)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{-x}{r},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{f(r)}{M}\frac{-y}{r}=f(r)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{-y}{r}.$$

と書き得るを以て,P_2に對するP_1の運動はP_2を固定點と看做し,P_2よりP_1に對して $f(r)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$ の加速度を及ぼすものと見るも可なり。

斯くP_2よりP_1に及ぼすと看做すべき加速度は萬有引力の場合には

$$f(r)=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$$

なる故,

$$f(r)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\gamma\frac{(m_1+m_2)}{r^2}$$

にして,此 $\gamma(m_1+m_2)=\lambda$ と置けば加速度の大さは $\frac{\lambda}{r^2}$ となりて前に論じたる場合となる。

即ち太陽と遊星とが互に引力を及ぼし合ひて,兩者共に運動する時と雖も,**太陽に對する遊星の運動は太陽を固定點と看做しこれより$\frac{\lambda}{r^2}$なる加速度を遊星に及ぼす場合の運動と同一なり。** 即ち遊星は太陽を焦點とする楕圓の軌道を畫き,其面積速度は一定にして,**ケプレルの第一則及び第二則は其儘成立す。** 只第三

則のみは少しく趣を異にす。これ $\lambda=\gamma(m_1+m_2)$ となりて,遊星に依りλの値を稍異にするが爲めなり。

今太陽の質量をS,地球の質量をEとし,地球の軌道なる楕圓の長軸をa_E,週期をT_Eとすれば(14)式より

$$a_E^3=\frac{\lambda}{4\pi^2}T_E^2$$

にして此λは$\gamma(S+E)$なる故に

$$a_E^3=\gamma\frac{S+E}{4\pi^2}T_E^2.$$

又木星の質量をJ,其徑路の楕圓の長軸をa_J,其週期をT_Jとすれば $\lambda=\gamma(S+J)$ なる故

$$a_J^3=\gamma\frac{S+J}{4\pi^2}T_J^2。$$

此兩式より

$$\frac{a_E^3}{a_J^3}=\frac{S+E}{S+J}\frac{T_E^2}{T_J^2}$$

を得。これケプレルの第三則に代る可き式なり。

然れども太陽の質量Sは諸遊星の質量に比し非常に大なれば,多くの場合には $\frac{S+E}{S+J}\fallingdotseq 1$ と看做して差支なし。

今 $\frac{J}{S}=\frac{1}{1047}$, $\frac{E}{S}\fallingdotseq 0$ とし,木星の週期を 11,8618 年とすれば

$$\frac{T_J}{T_E}=11.8618$$

にして

$$\left(\frac{a_J}{a_E}\right)^3=1.00096\times(11.8618)$$

即ち

$$\frac{a_J}{a_E}=5.2028$$

を得。これ$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{S}}\doteqdot 0$としたるときの値5.2011と比較し僅少なる相違あるのみなり。

例 質量m_1の質點を非常に長き絲にて吊し,此質點より更に長さlの絲にて質量m_2の質點を吊して單振子を作らん。m_1の質點に對するm_2の運動の週期はm_1を固定せる場合に比して$\sqrt{1+\frac{m_2}{m_1}}$の比にて大なることを證せよ。

解 m_1の質點は非常に長き絲にて吊されたる故其振動の週期は非常に長くして殆んど靜止せるものと看做し得べし。m_1にはm_1gなる重力作用すれども絲の張力によりて打ち消さる。故にm_1とm_2とがm_2gなる力にて相互に引き合ふ事となりm_1に對するm_2の相對運動は **34** によりてm_2の代りに質量

$$\mathrm{M}=\frac{1}{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}$$

を採りて求め得べし。

第三編

質點系統の力學

第一章

重心の定理

1. 運動の第三則。 これまで論じたるは力の作用を受くる一質點の運動狀態にして,かかる運動狀態は運動の式によりて知るを得べく,其運動の式は運動の第二則に依りて作り得。

今より考へんとするは質點の數多き場合にして,此時にも各質點に作用する力が全然既知のものならば其一つ一つに就きて運動の式を作り得べきは勿論なり。然れども多くの質點が相互に力を及ぼす時は其力の大小は各質點の占むる位置に依りて定まり又各質點の位置は之に働く力の大小に依りて定まるべきを以て,各質點の位置と力とは相互に影響し從て各質點に働く力を豫め簡單なる形にて表はすことを得ず。前に論じたる萬有引力の法則の許に二質點がなす運

動の如き其一例として見るべきものなり。

斯く質點各個の運動は複雜にして容易に學び難きも,質點系統全體としての運動狀態は左程學び難しとせず。ニウトンは質點間に作用する力に就きて,次ぎの假定を加へて此問題に解決を與へたり。卽ち總ての力は二質點相互の作用に基づくものにして,二質點の第一が第二に力を及ぼすときは,第二の質點も亦同時に第一の質點に力を及ぼす。且つ第一の質點が第二の質點に及ぼす力の大さは,第二の質點が第一の質點に及ぼす力の大さと相等しく,其方向は兩質點を結ぶ直線上にありて相反する方向にあり。今此力を作用及び反作用と名づくれば**作用と反作用とは其大さに於て相等しくして,方向に於て反對なり**と謂ひ得。これ卽ち**ニウトンの運動の第三則**と名づけらるるものなり。

二質點間の作用反作用は他の質點の存在に依りて變ずることなく,一質點が既に第二の質點に作用を及ぼしつつあるも之が爲めに第三の質點に對する作用には影響を生ぜず。從ひて一質點が多くの質點より受くる作用は,各質點より受くる作用をヴェクトルとして加へ合せたるものに等し。斯く相互に作用を及ぼす質點の集合を**質點系統**と云ひ,系統內の質點の相

互に及ぼす力を**內力**と云ひ,又之に對して系統外より質點に働く力を**外力**と云ふ。故に內力とは此系統內の質點間の作用と反作用との兩者を含むものにして,外力は系統外より及ぼす作用のみを指し,系統內より外に及ぼす反作用を含まず。

今任意の直角坐標を採り,第一の質點の第二の質點に及ぼす力の大さを $F_{1.2}$ とし,第二質點の第一質點に及ぼす力の大さを $F_{2.1}$ とすれば,運動の第三則により

$$F_{1.2}=F_{2.1}.$$

又此 $F_{1.2}$ の坐標軸となす方向餘弦を夫々 l, m, n とすれば,各軸の方向の分力は夫々

$$X_{1.2} = F_{1.2}l,$$

$$Y_{1.2} = F_{1.2}m,$$

$$Z_{1.2} = F_{1.2}n$$

にして,又 $F_{2.1}$ の方向は運動の第三則に依りて $F_{1.2}$ と反對なるが故に

$$X_{2.1} = -F_{2.1}l = -F_{1.2}l,$$

$$Y_{2.1} = -F_{2.1}m = -F_{1.2}m,$$

$$Z_{2.1} = -F_{2.1}n = -F_{1.2}n.$$

從て

$$X_{1.2} + X_{2.1} = 0,$$

$$Y_{1.2} + Y_{2.1} = 0,$$

$$Z_{1.2}+Z_{2.1}=0$$

となる。

運動の第二則を述べたる際,質量を比較する方法として同じ大さの力を二つの質點に作用せしめ各質點に生ずる加速度を測りて,其質點の質量を比較し得ることを述べたり, されど個個別別の質點に對して同じ大さの力の働けるや否やを識別すべき方法に於ては何等述ぶる所なかりき。然るに今學びたる運動の第三則によれば,二つの質點間に作用する力は其大さ相等しきを以て,之を用ひて質量を比較することを得べし。即ち二つの質點を互に作用せしめたるとき生ずる加速度の大さを測れば兩質點の質量は之に逆比例するものとして直ちに定むることを得。

2. 重心の定理。 一つの質點系統に屬する質點の質量を $m_1, m_2, m_3, \ldots m_i \ldots\ldots$, 其坐標を $(x_1, y_1, z_1)\,(x_2, y_2, z_2)\ldots\ldots(x_i, y_i, z_i)\ldots\ldots$ とし,此系統外より是等の質點に働く外力を $(X_1', Y_1', Z_1')\,(X_2', Y_2', Z_2')\ldots(X_i', Y_i', Z_i')\ldots\ldots$ とせん。次ぎに是等質點相互の作用より起る內力に就きては,第一質點に働く內力中第二質點より働く分力を $X_{2\cdot1}, Y_{2\cdot1}, Z_{2\cdot1}$, 第三質點より働く分力を $X_{3\cdot1}, Y_{3\cdot1}, Z_{3\cdot1}, \ldots\ldots$ とすれば,第一質點の運動の式は

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=X_1'+X_{2.1}+X_{3.1}+\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}&=Y_1'+Y_{2.1}+Y_{3.1}+\ldots\ldots\\ m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}&=Z_1'+Z_{2.1}+Z_{3.1}+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(1)$$

他の質點に就きても,之と同様に運動の式を作り得べし。今 x に關する運動の式をとり,此系統に屬する總ての質點に就きて邊邊相加ふれば

$$\Sigma_i m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\Sigma_i X_i'+X_{1.2}+X_{1.3}+X_{1.4}+\ldots\ldots$$
$$+X_{2.1}+X_{3.1}+X_{4.1}+\ldots\ldots。$$

之と同様に y 竝に z に關する運動の式より,

$$\Sigma_i m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\Sigma_i Y_i'+Y_{1.2}+Y_{1.3}+Y_{1.4}+\ldots\ldots$$
$$+Y_{2.1}+Y_{3.1}+Y_{4.1}+\ldots\ldots,$$
$$\Sigma_i m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\Sigma_i Z_i'+Z_{1.2}+Z_{1.3}+Z_{1.4}+\ldots\ldots$$
$$+Z_{2.1}+Z_{3.1}+Z_{4.1}+\ldots\ldots$$

を得。而して內力は運動の第三則に從ふものなれば

$$X_{1.2}+X_{2.1}=0,\quad X_{1.3}+X_{3.1}=0,\quad \ldots\ldots$$

なる關係を滿足すべし。從て內力の x,y,z 軸の方向の分力は二つ宛消し合ひて結局總和は零となり,上式は

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}&=\Sigma X_i',\\ \Sigma m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}&=\Sigma Y_i',\\ \Sigma m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}&=\Sigma Z_i'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(2)$$

となる。扨て

$$\frac{\Sigma mx}{\Sigma m}=\bar{x},\qquad \frac{\Sigma my}{\Sigma m}=\bar{y},\qquad \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}=\bar{z}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

と置き,此 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ にて與へらるる坐標を有する點を此**質點系統の重心**と呼ばん。此重心の坐標を上式に入るれば

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m_i\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}&=\Sigma X_i',\\ \Sigma m_i\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}&=\Sigma Y_i',\\ \Sigma m_i\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}&=\Sigma Z_i'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

となり,Σm_i は此系統に屬する總ての質點の質量の總和なれば,これをMとすれば,上式は更に

$$\left.\begin{aligned}M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}&=\Sigma X_i',\\ M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}&=\Sigma Y_i',\\ M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}&=\Sigma Z_i'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

となる。

此系統に屬する各質點は,內力竝に外力に作用せられて甚だ複雜なる運動をなすべく,其運動を明かにするは容易ならざるも**此系統の重心の運動は**極めて簡單に(5)式より求め得べし。卽ち**系統內の各質點の有する質量を悉く重心に集め,又此系統の各質點に働く外力の全部をこれに働かしめ,かかる場合に其質點のなす運動を求むれば可なり**。但し此質點の初めの位置と速度として重心の初めの位置と速度とを採るべきものとす。

若し此系統に外力が全く作用せざるものとすれば重心は靜止するか,又は等速直線運動をなすかの何れかにして,彼の運動の第一則はもと一質點に就て述べたるものなれども,質點系統の重心に關しても其儘成立す。

今一二の例を擧ぐれば,太陽系は他の恒星より非常に遠ざかり居るを以て,之に働く外力はなきものと看做し得べく從うて太陽系の質量の中心は等速直線運動をなす。

又大砲の彈丸が內力に依り破碎し斷片となりて飛散するも,全體の重心の運動は唯だ外力たる重力のみによりて定まるものなれば,依然として拋物線の徑路を畫くべし。

例 1. 滑車に掛かれる絲の一端に質量 m_1 の質點を,他端に質點 m_2 の質點を吊す。今滑車の質量を省略するものとすれば,兩質點の重心は下方に

$$\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 g$$

なる加速度を以て動くことを證せよ。

解. 質點の一は上方に,他は下方に $\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$ の加速度を受くる事は容易に知り得べし。此加速度に各質

點の質量を乘ずれば力となる．本文によりこれ等の力を共儘重心に働かしめて重心の加速度を求め得．(質點には重力の外に滑車より受くる力ある故,上に得たる如き加速度となるなり.)

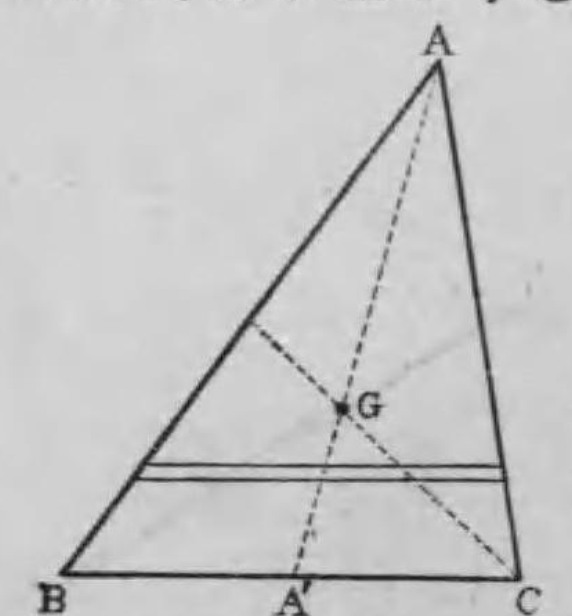
3. 重心を求むること. 數多の質點が不連續に配布せる場合には,其重心は前に述べたる(3)式

$$\bar{x}=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m},\quad \bar{y}=\frac{\Sigma my}{\Sigma m},\quad \bar{z}=\frac{\Sigma mz}{\Sigma m}$$

に依りて求め得べきも,無數の質點が密集して連續的に配布せる場合には,上のΣの代りに積分號を用ふることを要す。

4. 簡單なる場合. 質量の配布が等一なる場合には形狀の對稱等を利用して,容易に重心を求め得．次ぎに二三の例を擧げん。

例 1. 直線平行四邊形,圓,平行六面體,球等に就きては其幾何學上の中心は其重心なり。



第四十二圖

例 2. 三角形ABCの面積の重心を求めん。

底邊BCに平行なる細長き帶に分ちて考ふれば,其帶の重心は中線の上にある故,面積ABCの重心も亦此上にあるべく,斯くの如くして三角形の重心は三つの中線

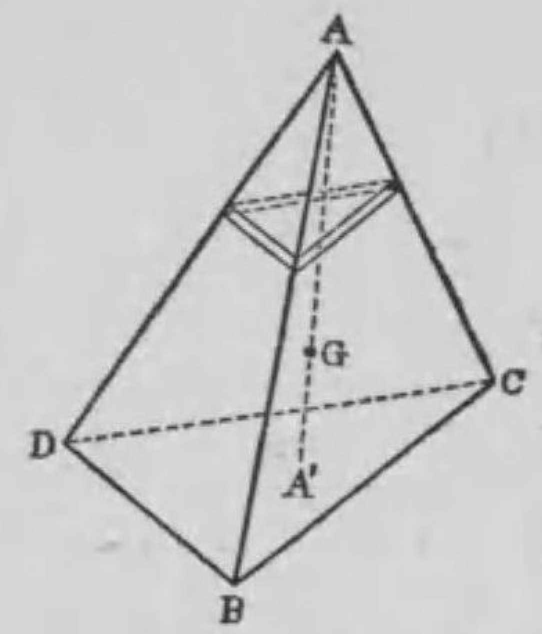
の交點にあることを知る．又三角形の頂點A,B,Cに同一の質量ある場合の重心もGにあり。

例 3. 四面體ABCDの體積の重心を求めん。

面BCDに平行なる薄板に分ちて考ふれば,各薄板の重心はBCDの重心A'とAとを結ぶ直線上にある故,四面體の重心も亦此AA'上にあるべし．次ぎに頂點B,C,Dに對する各面の重心をそれぞれB',C',D'とすれば,四面體の重心はBB',CC',DD'の上にあるべし．故に是等直線の交點Gが求むる所の重心にして

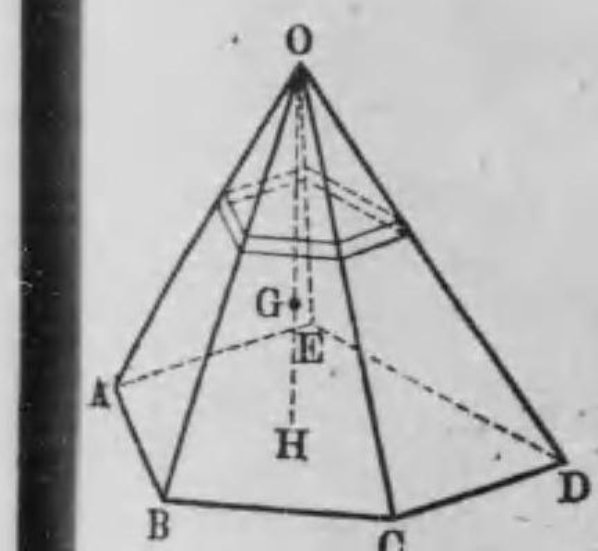
$$AG=\frac{3}{4}AA'$$

なり。



第四十三圖

頂點A,B,C,Dに同一の質量ある場合の重心も亦上と同じG點にあり。



第四十四圖

例 4. **角錐體の重心.** 例(3)と同樣にして求むることを得。

角錐體を底面に平行なる面にて切りて薄板に分てば,薄板は皆相似形となる故其重心は,底面の重心Hと頂點Oとを結ぶ直線OH上にあるべし。

analytical Method

又Oを頂點とする多くの三角稜に分ちて考ふれば,各三角稜の重心は,OよりOHの$\frac{3}{4}$の所に於て底面に平行に引きたる平面內にある可し。故にこの平面とOHとの交點に當るGは求むる重心にして,

$$OG=\frac{3}{4}OH.$$

任意の曲線を底面とする錐體に於ても其曲線は多角形の極限と看做し得る故,上例と同様にして其重心を求め得。

5. 連續體の重心。 次ぎに質量が連續的に分布せられたる場合を考へん。坐標x, y, zなる點Pに於ける密度をρとすれば,Pを含む微小體積dvの有する質量はρdvにして,このdvを直角坐標にて表はせば$dxdydz$なる故

$$\bar{x}=\frac{\iiint x\rho dxdydz}{\iiint \rho dxdydz},$$

$$\bar{y}=\frac{\iiint y\rho dxdydz}{\iiint \rho dxdydz},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint z\rho dxdydz}{\iiint \rho dxdydz}.$$

又物體全體を通じて質量の分布が一様なる時はρは常數にして積分記號の前に出して分母子相約し得べし。斯くの如く連續體の重心を求むるは單に積分

學の問題となり,力學としての興味は少きを以て玆には二三の例を擧ぐるに止めん。

6. 曲線の重心。 線上に質量の分布せる場合には線密度をμとすれば,微小線分ds上にある質量はμdsにして,從ひて平面曲線の重心は

$$\bar{x}=\frac{\int x\mu ds}{\int \mu ds},\qquad \bar{y}=\frac{\int y\mu ds}{\int \mu ds}$$

にて與へらる。

例。密度一樣なる**圓弧の重心。** 圓の中心より圓弧の中點へ引ける直線をy軸とすれば,圓弧はy軸に對して對稱なり。故に$\bar{x}=0$。

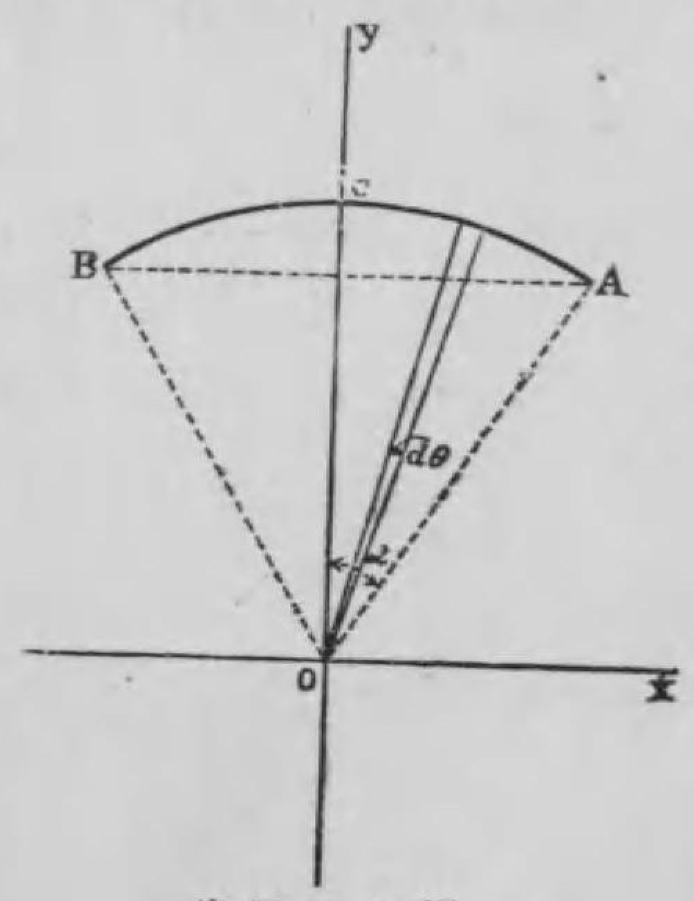
又$x=a\cos\theta$, $ds=ad\theta$なる故圓弧全體が中心に於て開く角を2αとすれば,

$$\int xds=\int_{-\alpha}^{\alpha}a^2\cos\theta d\theta=2a^2\sin\alpha,$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}ds=2a\alpha.$$

從うて

$$\bar{x}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}a.$$



第四十五圖

半圓の場合には$\alpha=\frac{\pi}{2}$なれば

$$\bar{x}=\frac{2a}{\pi}\doteqdot 0.637a.$$

7. 平面積の重心。 表面上に質量の配布せる場合

には表面密度をσとすれば,微小面積ds上にある質量はσdsなり。

今直角坐標を用ふれば,

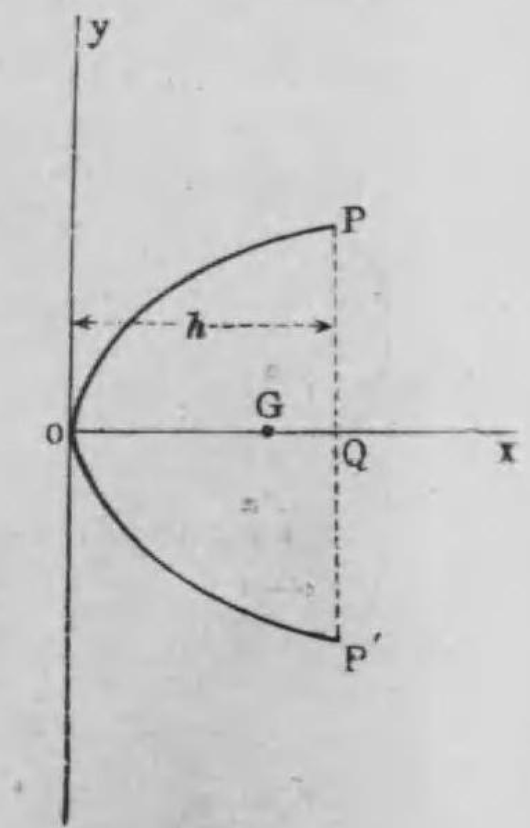
$$ds=dxdy$$

にして重心は

$$\bar{x}=\frac{\iint x\sigma dxdy}{\iint \sigma dxdy},\quad \bar{y}=\frac{\iint y\sigma dxdy}{\iint \sigma dxdy}.$$

若しσが常數にして,且つ面積が或る直線に就て對稱なるときは,其線をx軸に取り,此面積を境する曲線上の任意の點の坐標をx, yとすれば,微小面積はydxなり。從うて

$$\bar{x}=\frac{\int xydx}{\int ydx},\quad \bar{y}=0.$$



第四十六圖

例 1. 拋物線$y^2=Cx$と直線$x=h$との間の面積PQP'OPの重心は,

$$\int xydx=\frac{2}{5}C^{\frac{1}{2}}h^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^h ydx=\frac{2}{3}C^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}$$

なる故に

$$\bar{x}=\frac{3}{5}h,\quad \bar{y}=0.$$

例 2. **半圓の面積の重心**は,半徑をaとすれば

$$\int_0^a xydx=\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{3}a^3,$$

$$\int_0^a ydx=\frac{1}{4}\pi a^2$$

なる故に

$$\bar{x}=\frac{4a}{3\pi}\doteqdot 0.4244a,\quad \bar{y}=0.$$

3. **體積の重心。** 質量の配布一樣なる體積の場合には,x軸に直角なる平面にて切りたる斷面積を$f(x)$とすれば,微小體積として$f(x)dx$を採り得べく從うて

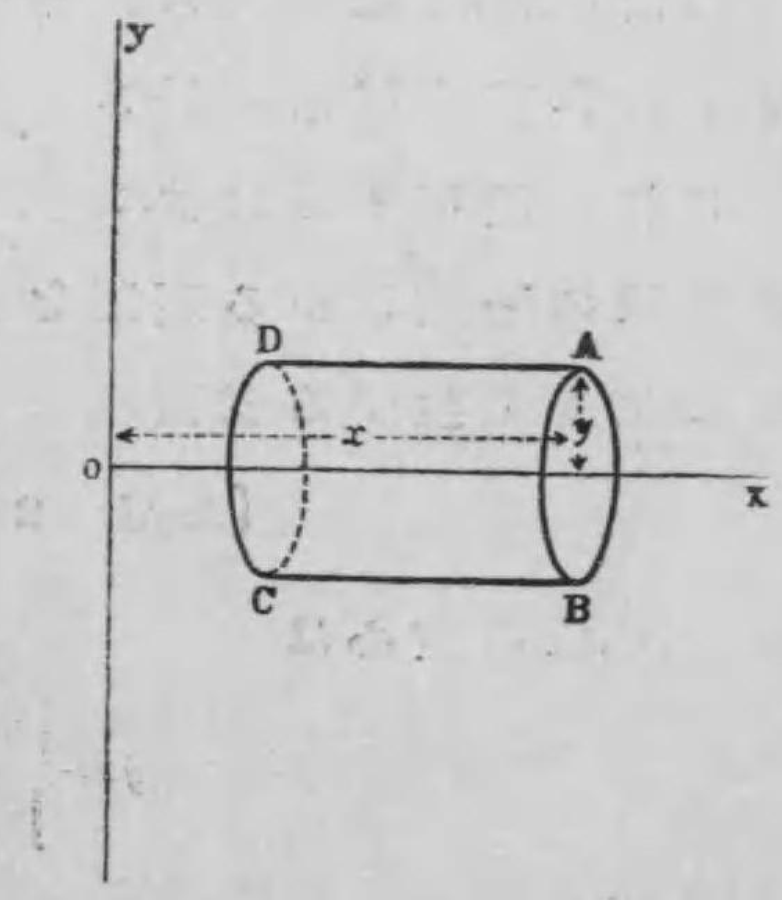
$$\bar{x}=\frac{\int xf(x)dx}{\int f(x)dx}.$$

此式は廻轉體の場合には簡單なる形となる,卽ちx軸を對稱の軸にとり,yをx軸より廻轉曲線に至る距離とすれば

$$f(x)=\pi y^2$$

なる故

$$\bar{x}=\frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}.$$



第四十七圖

例 1. **直圓錐體**に於ては頂點を原點にとれば

$$y\propto x$$

なる故高さがhなれば

$$\bar{x}=\frac{\int_0^h x^3dx}{\int_0^h x^2dx}=\frac{3}{4}h.$$

例 2. **半球**にて,半徑をaとすれば

$$y^2=a^2-x^2$$

なる故

$$\bar{x}=\frac{\int_0^a x(a^2-x^2)dx}{\int_0^a (a^2-x^2)dx}=\frac{3}{8}a.$$

例 3. 廻轉拋物體の重心。 $y^2=cx$ を x 軸の周りに廻轉して生ずる廻轉拋物體にて $x=o$ より $x=h$ に至る間の體積をとれば,斷面積は x に比例する故

$$\bar{x}=\frac{\int_0^h x^2dx}{\int_0^h xdx}=\frac{2}{3}h.$$

9. パッパス－グルダンの定理。 第一定理。 平面曲線の弧が其平面内にある軸の周りに廻轉して生ずる表面積は,其弧の長さに乘ずるに其弧の重心が廻轉するとき書く徑路の長さを以てしたるものに等し.

これを證明するには,x 軸を廻轉軸に取り,此軸より此曲線の一點に至る距離を y とすれば,曲線の弧が廻轉に依りて生ずる表面積は

$$\int 2\pi y ds=2\pi\int yds$$

にして,弧の重心は

$$\bar{y}=\frac{\int yds}{\int ds}$$

なる故

$$2\pi\int yds=2\pi\bar{y}\int ds.$$

第二定理。 平面積が其面上にある(其面積と交はらざる)軸の周りに廻轉して生ずる體積は,其面積に乘ずるに其面積の重心が畫く徑路の長さを以てしたるものに等し.

何んとなれば微小面積を ds とすれば,其廻轉によりて生ずる體積は $2\pi\int yds$ にして,面積の重心は

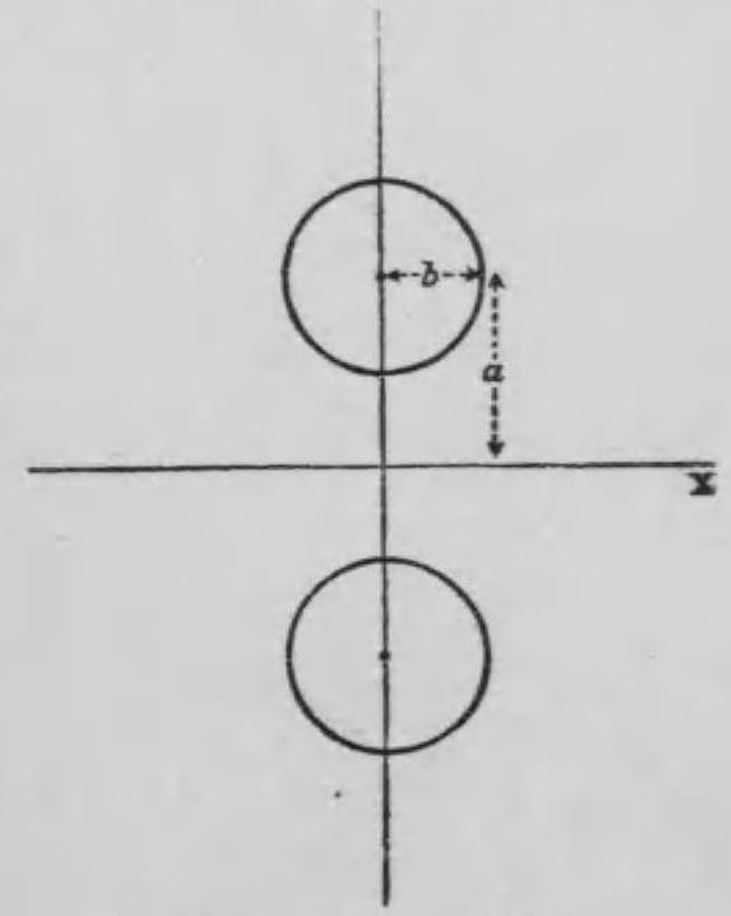
$$\bar{y}=\frac{\int yds}{\int ds}$$

なる故

$$2\pi\int rds=2\pi\bar{y}\int ds.$$

以上の二定理を**パッパス－グルダンの定理**と云ふ.

此定理を用ひて廻轉體の表面積(又は體積)が既知なるとき曲線(又は面積)の重心を求むる事を得. 又反對に曲線(又は面積)の重心を知れるとき,其廻轉によりて生ずる表面積(又は體積)を求むる事を得.



第四十八圖

例 1. 半徑 b なる圓が其平面内に於て其中心より $a\,(a>b)$ の距離にある直線の周りに廻轉して環を

生ずるときは,其表面積は

$$2\pi b\times 2\pi a=4\pi^2 ab$$

にして其體積は

$$\pi b^2\times 2\pi a=2\pi^2 ab^2。$$

例 2.　半圓弧が其兩端を結ぶ直線の周りに廻轉して生ずる球の表面積は $4\pi a^2$ なるを以て

$$[redacted]\cancel{\times 2\pi\bar{y}=4}\pi a^2 \qquad \pi a\times 2\pi\bar{y}=4\pi a^2$$

なるべく,從うて半圓弧の重心は

$$\bar{y}=\frac{2a}{\pi}$$

なることを知る.

又半圓形の面積が其兩端を結ぶ直徑を軸として廻轉するとき生ずる球の體積は

$$\frac{4}{3}\pi a^3$$

なるを以て

$$\frac{1}{2}\pi a^2\times 2\pi\bar{y}=\frac{4}{3}\pi a^3$$

なり.　故に半圓形の面積の重心は

$$\bar{y}=\frac{4a}{3\pi}$$

なり.

第二章

廻轉能率の定理

10.　廻轉能率.　質點系統はたとへ其重心が靜止するとも,猶ほ種種の運動を爲し得.　例へば重心を中心として其周りに廻轉し得べく,又重心を中心として放射狀をなして四方に擴がり得べし.　これ等の運動の模樣を明かならしむるには廻轉能率なるものを考ふるを便とす.

今此質點系統に屬する第 i 番目の質點をとり,其質量を m_i,其坐標を $x_i\,y_i\,z_i$ とし,これに働く外力及び內力の和を $X_i\,Y_i\,Z_i$ とせん。然らば運動の式は

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=X_i \qquad m_i\frac{d^2y}{dt^2}=Y_i \qquad m_i\frac{d^2z}{dt^2}=Z_i$$

なり。上には單に i 番目と爲し置きたるも質點の總數が n 個なれば i は $1,2\cdots\cdot$ より n に至る何れの値をも採り得るなり.　從うて別に混雜を來すの恐なき時は i は一々附記せざることとせん.

上の x 軸の方向の運動の式に $-y$ を乘じ,次ぎの y 軸の方向の運動の式に x を乘じて邊邊相加ふれば

$$m\left(\frac{d^2y}{dt^2}x-\frac{d^2x}{dt^2}y\right)=Yx-Xy$$

を得. 而して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)=\frac{d^2y}{dt^2}x+\cancel{\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}}-\frac{d^2x}{dt^2}y$$

なる故,上式は

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)=Yx-Xy$$

と書き得べし.

今此系統に屬する總ての質點に就きて之と同樣の式を作り,其總ての兩邊を加へ合すときは

$$\frac{d}{dt}\left[\Sigma_i\left\{m_i\left(\frac{dy_i}{dt}x_i-\frac{dx_i}{dt}y_i\right)\right\}\right]=\Sigma_i(Y_ix_i-X_iy_i)\ \ldots\ldots(1)$$

となる.

上の計算には z 軸の方向の運動の式を除外したるも,若し x 軸を除外してこれと同樣の計算をなせば

$$\frac{d}{dt}\left[\Sigma_i\left\{m_i\left(\frac{dz_i}{dt}y_i-\frac{dy_i}{dt}z_i\right)\right\}\right]=\Sigma_i(Z_iy_i-Y_iz_i)\ldots\ldots(2)$$

を得べく,又若し y 軸の方向の運動の式を除外してこれと同樣の計算をなせば

$$\frac{d}{dt}\left[\Sigma_i\left\{m_i\left(\frac{dx_i}{dt}z_i-\frac{dz_i}{dt}x_i\right)\right\}\right]=\Sigma_i(X_iz_i-Z_ix_i)\ldots\ldots(3)$$

を得べし.

此三式の右邊に表はるる $(Yx-Xy)$, $(Zy-Yz)$, $(Xz-Zx)$ を z 軸, x 軸竝に y 軸に對する**力の廻轉能率**と云ふ.

又左邊の $\frac{d}{dt}$ の內に表はるる量は $m\frac{dy}{dt}x-m\frac{dx}{dt}y$ の如

き形を有し, $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ は何れも運動量なれば

$$m\frac{dy}{dt}x-m\frac{dx}{dt}y,\quad m\frac{dz}{dt}y-m\frac{dy}{dt}z,\quad m\frac{dx}{dt}z-m\frac{dz}{dt}x$$

をそれぞれ z 軸, x 軸竝に y 軸に對する**運動量の廻轉能率**(又は略して**運動量の能率**)と云ふ.

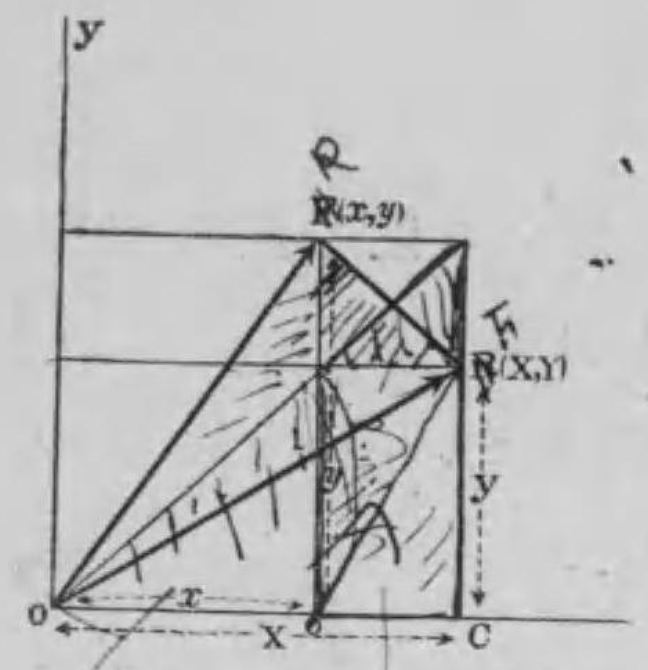
11. 廻轉能率を面積としての說明. 廻轉能率の意味は,力の廻轉能率につきて考ふるも運動量の廻轉能率につきて考ふるも同樣なれば,今力の廻轉能率につきて考ふることとせん.

力の廻轉能率の式は力の部分 X, Y, Z と坐標 x, y, z とより成り,此二つは何れもヴェクトルとして表はし得るものなり. 故に坐標 x, y, z を部分とせるヴェクトルを (R), X, Y, Z を部分とせるヴェクトルを (F) とし, (R) と (F) とを坐標の原點より引きて, (R) と (F) とが包む三角形を作らん. 然らば此三角形にて廻轉能率を表はし得るなり.

此說明に進む豫備として,先づ (R), (F) が何れも xy 面上に横たはる場合に就きて考へん.

第四十六圖より明かなる如くこの三角形の頂點の坐標は (0,0), (x,y), (X,Y) なるを以て其面積を Δ とすれば平面坐標幾何學より知る如く

$$2\Delta=Yx-Xy$$



第四十九圖

xy/2　Δ= xy/2

なり。而して此式の右邊は正なることも負なることもあるべし。(R)より(F)への廻轉(勿論180^0以下の角にて廻るものとして)が x 軸より y 軸への廻轉と同じ向きの場合には $Yx-Xy$ は正にして,此時面積 Δ を正なりと定め,又 $Yx-Xy$ が負なる時は面積 Δ を負なりと定む。此規約は解析幾何學にて用ふるものと同一なり。

而して z 軸の方向は x 軸より y 軸への廻轉により螺旋の進むが如き方向に採るものとせん。然らば上の三角形の面積 Δ の正負に關する規約は,(R)より(F)への廻轉によりて螺旋の進む方向が z 軸の方向と同じときΔは正にして,反對のときΔは負なりと云ふ事を得べし。

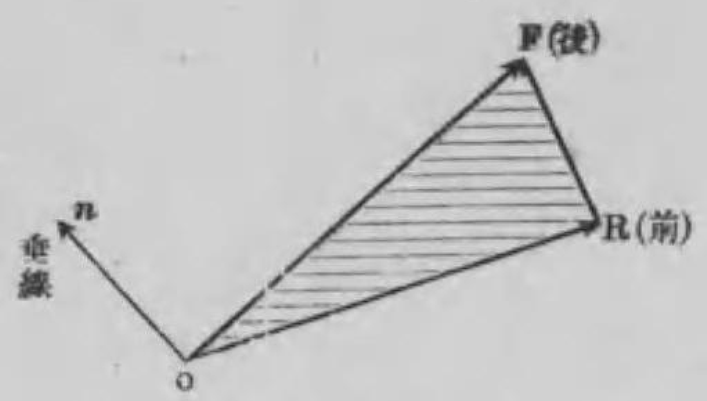
而して z 軸は(R)(F)の平面への垂線なれば z 軸の代りに(R)(F)の平面への垂線と云ふも可なり。從うて上述の規約は此垂線に一定の方向を附して廻轉の正負を表はす事に外ならず。

次ぎに(R)と(F)とが xy 面内にあらずして空間に横たはる一般の場合を考へん。此場合には(R)の部分は

x, y, z, (F)の部分は X, Y, Z にして(R)と(F)との包む三角形は空間にあり。而して此三角形の面積の正負に就きては,三角形が xy 面内にありし時の規約と一致する樣に定むべきなり。これには(R)より(F)への廻轉によりて螺旋の進むが如き方向をとりて,此三角形の面より垂線 n を立つる事とし,これを xy 面に對する z 軸と同樣に考ふることとす。然らば三角形の面積は恆に正と採ることとなり,面積には垂線 n の方向を附して考ふる事となる。

こは第一編 7 に述べたる合速度の大さは恆に正と定め且つ之に方向を附したる事と同樣なり。從うて合速度と分速度との間に成り立つ關係と同樣なる關係が,廻轉能率につきても成立す。こは下に說明すべし。又立體解析幾何學に於ては平面の何れの側より垂線を立つるも全く任意なれども力學に於ては上に述べたる規約に從うものとす。

扨て此三角形を坐標面上に射影し yz 面上の射影を Δ_x, xz 面上の射影を Δ_y, xy 面上の射影を Δ_z とせん。此 $\Delta_x \Delta_y \Delta_z$ は一方より云へば(R), (F)を各坐標面上に射影し此射影が包む三角形なり。然らば上に述べたる如く其面積の二倍は(大さ及び符號を考へて)夫々 $Zy-Yz$, $Xz-Zx$, $Yx-Xy$ にて表はし得。即ち

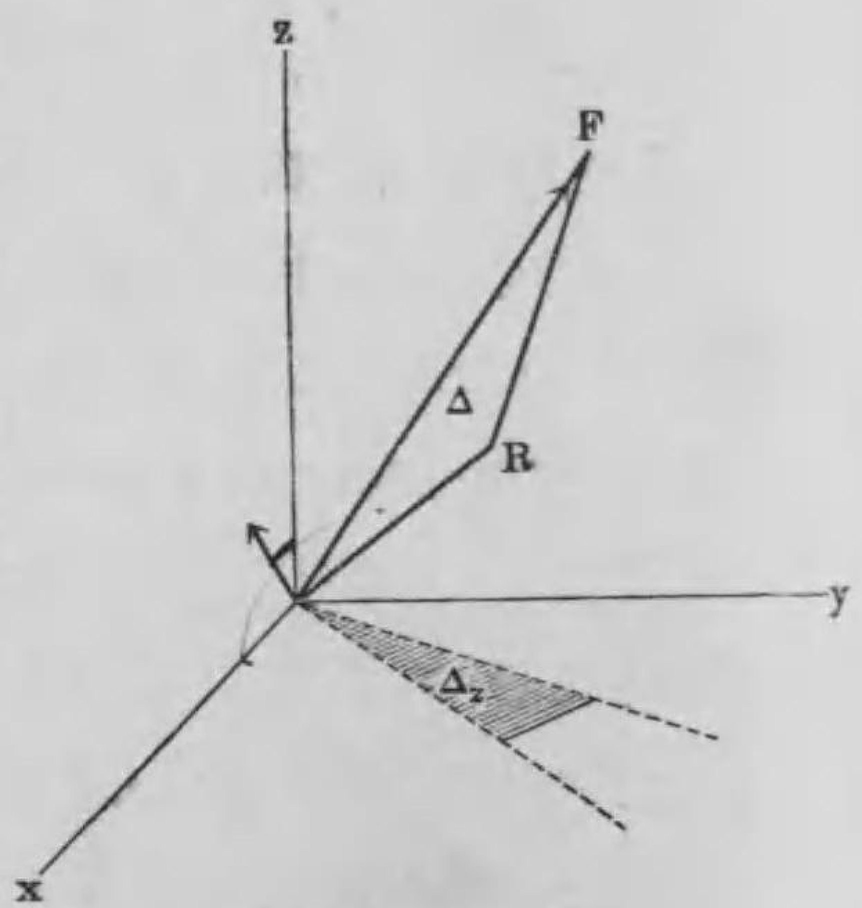


第五十圖

$$2\Delta_x = Zy - Yz,$$
$$2\Delta_y = Xz - Zx,$$
$$2\Delta_z = Yx - Xy$$

なるべし。

かくヴェクトル(R)(F)の包む三角形を作れば,これを各坐標面上に射影したるものにて力Fの各坐標軸に對す廻轉能率を表し得。故に廻轉能率が(R),(F)の含む三角形にて表はさると云ふも差支なかるべし。



第五十一圖

次ぎに面積Δ_x, Δ_y, Δ_zは三角形Δを坐標面上に射影したるものなれば面積Δと其垂線nとより求むる事を得べく,解析幾何學により

$$\Delta_x = \Delta\cos(n, x),$$
$$\Delta_y = \Delta\cos(n, y),$$
$$\Delta_z = \Delta\cos(n, z),$$

なり。又逆にΔ_x, Δ_y, Δ_zを知ればこれよりΔ竝にnを求め得べく,即ち

$$\cos(n, x) = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad \cos(n, y) = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad \cos(n, z) = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

なり。此面積Δと其方向nとがΔ_x, Δ_y, Δ_zに對する關係は,ヴェクトルと其部分との關係と全く同じ。故に三角形の面積はヴェクトルとして表はし得べく,委しく云へば其垂線nの方向に一直線を引き其長さをΔに等しく取りて作りたるヴェクトルにて表はし得べし。然らば此ヴェクトルのx, y, z軸上の部分は其三角形の各坐標面上に於ける射影Δ_x, Δ_y, Δ_zを表はす。

斯く面積がヴェクトルにて表はし得る以上は,面積として表はし得たる廻轉能率も亦ヴェクトルとして表はし得べし。即ち力の廻轉能率は(R)より(F)への廻轉によりて螺旋の進むが如き方向に垂線を立て,(R)(F)の包む三角形の面積の二倍の長さに切りて作りたるヴェクトルにて表はし得。此ヴェクトルのx, y, z軸上の部分はそれぞれ$2\Delta_x$, $2\Delta_y$, $2\Delta_z$にして,これ即ち$Zy - Yz$, $Xz - Zx$, $Yx - Xy$なり。廻轉能率はかくヴェクトルとして表はし得るを以て之を合成し又は分解するに際しても亦ヴェクトルの算法を用ひ得る事言を俟たず。

12.　一般の場合。　質點が只一つなるときは上に說明したる方法によりて直ちに廻轉能率を表し得。質點の數多き場合には各質點につきて一々上記の三角形を作り,之をヴェクトルにて表はしたる上加へ合せ,其總和のヴェクトルにて表さるる三角形を作るべし。

然らば此三角形にて質點系統の廻轉能率の大さ竝に方向を知り得べし。又此ヴェクトルの各坐標軸の方向に於ける部分を作れば,全系統の廻轉能率の x, y, z 軸の方向に於ける部分を知り得べし。これは勿論直接に各質點につきて各坐標軸に對する廻轉能率の部分を作り,これを別別に加へたるものと同じ。

今若し z 軸を廻轉能率の方向に選ぶものとすれば x, y 軸に對する廻轉能率は零となるべく,かかる場合に z 軸を**廻轉能率の主軸**なりと云ひ, xy 面を**主廻轉能率の面**と云ふ。

注意。(R)は坐標,(F)は力を表はすと云ふ制限なく,(R)も(F)も任意のヴェクトルなりとして其廻轉能率を表すに(R,F)なる記號を用ふ。此(R, F)を **R と F とのヴェクトル積**といふ。然らば(R,F)も亦一つのヴェクトルを表はすこととなり,其大さは(R)と(F)との包む三角形の面積の二倍に等しく,其方向は(R)より(F)への廻轉の際螺旋の進む方向にあり。

今 x, y, z 軸の方向に於ける(R)の部分を R_x, R_y, R_z, (F)の部分を F_x, F_y, F_z, とし又(R, F)にて表はさるるヴェクトルの部分を $(R, F)_x$, $(R, F)_y$, $(R, F)_z$ とすれば

$$(R, F)_x = F_z R_y - F_y R_z, \quad (R, F)_y = F_x R_z - F_z R_x, \quad (R, F)_z = F_y R_x - F_x R_y$$

なり。又若し(R)と(F)との順序を反對にして(F, R)にて表さるるヴェクトルを作れば,其大さは,(R)と(F)との包む三角形の二倍に等しく,其方向は(R)より(F)への廻轉の際螺旋の進む方向にあるを以て,前の(R,F)とは反對の方向にあり。此事は(F,R)の部分を作りて考ふるも明かにして上の式に於て R と F とを入れかへたる

$$(F, R)_x = R_z F_y - R_y F_z = -(R, F)_x, \; \cdots, \; \cdots\cdots,$$

なり。

斯く(R, F)の如く R を前にして其後に F を書きたるヴェクトルと,(F, R)の如く F を前にして其後に R を書きたるヴェクトルとは,大さは相等しくして方向は相反す。斯くヴェクトルの積はこれを作る順序により て異なることを注意すべし。

13. 力の廻轉能率が零なる場合。 上に廻轉能率の何たるやを說明したる故,是より進みて,力の廻轉能率と運動量の廻轉能率との關係に就きて考へん。先づ最も簡單なる場合をとりて力の廻轉能率は零なるものとせん。

力の廻轉能率が零となる第一の場合は,全く力の作用なく何れの質點も只其慣性のみによりて運動する場合なり。又たとへ力の作用ありとも,各質點に働く力が何れも原點を通過する引力又は斥力なる時卽ち所謂中心力の場合にも成り立つ。何んとなれば中心

力の大さをF,原點よりの距離をrとし,且つ其力が斥力なれば正,引力なれば負號を附することとすれば

$$X=\pm F\frac{x}{r},\quad Y=\pm F\frac{y}{r},\quad Z=\pm F\frac{z}{r}$$

にして,從ひて

$$Yx-Xy=0,\quad Zy-Yz=0,\quad Xz-Zx=0$$

なればなり。これを第二の場合とせん。

されど最も重要にして特に考究に値するものは第三の場合にして,質點系統に屬する各質點に働く力が内力のみにして運動の第三則に從ひ兩質點間に働く力が其兩質點を結ぶ直線の方向に働く場合なりとす。

今先づ此質點系統に屬する二つの質點を採り,その質量をm_1, m_2とし,m_1がm_2より受くる力を$F_{1.2}$,其部分を$X_{1.2}, Y_{1.2}, Z_{1.2}$とし又$m_2$が$m_1$より受くる力を$F_{2.1}$,其部分を$X_{2.1}, Y_{2.1}, Z_{2.1}$,とせん。然らば運動の第三則によりて

$$X_{1.2}=-X_{2.1},\quad Y_{1.2}=-Y_{2.1},\quad Z_{1.2}=-Z_{2.1}$$

なるべし。且つ此力は兩質點を結ぶ直線の方向に働くを以て其距離を$r_{1.2}$とし其斥力なるか,引力なるかによりて正負適當の符號を選ぶものとすれば

$$X_{1.2}=\pm F_{1.2}\frac{x_2-x_1}{r_{1.2}},\quad Y_{1.2}=\pm F_{1.2}\frac{y_2-y_1}{r_{1.2}},\quad Z_{1.2}=\pm F_{1.2}\frac{z_2-z_1}{r_{1.2}}$$

なるべし。從て

$$\frac{Y_{1.2}}{X_{1.2}}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

即ち

$$Y_{1.2}x_1-Y_{1.2}x_2-X_{1.2}y_1+X_{1.2}y_2=0,$$

又$X_{1.2}=-X_{2.1}$及び$Y_{1.2}=-Y_{2.1}$なることを考へて

$$(Y_{1.2}x_1-X_{1.2}y_1)+(Y_{2.1}x_2-X_{2.1}y_2)=0$$

を得。

故に此質點系統の質點の數が二個なるときはz軸に對する力の廻轉能率$\Sigma(Yx-Xy)$は零となる。

二つよりも多くの質點よりなれる質點系統に於ては其内の一質點を取りて考ふれば,之に働く力は其他の質點より之に及ぼす力の集合なるを以て

$$X_1=X_{1.2}+X_{1.3}+X_{1.4}+\ldots\ldots$$
$$Y_1=Y_{1.2}+Y_{1.3}+Y_{1.4}+\ldots\ldots$$
$$Z_1=Z_{1.2}+Z_{1.3}+Z_{1.4}+\ldots\ldots$$

なる形にて表はし得べく,$X_{1.2}$は第二の質點が第一の質點に及ぼす力の部分を,又$X_{1.3}$は第三の質點が第一の質點に及ぼす力の部分を表はす。從うて

$$\begin{aligned}Y_1x_1-X_1y_1&=(Y_{1.2}+Y_{1.3}+\ldots\ldots)x_1-(X_{1.2}+X_{1.3}+\ldots\ldots)y_1\\&=(Y_{1.2}x_1-X_{1.2}y_1)+(Y_{1.3}x_1-X_{1.3}y_1)+\ldots\ldots\end{aligned}$$

となる。又第二の質點につきても之と同樣の式を作れば

$$Y_2x_2-X_2y_2=(Y_{2.1}x_2-X_{2.1}y_2)+(Y_{2.3}x_2-X_{2.3}y_2)+\ldots\ldots$$

を得。今此系統に屬する總ての質點につきてこれと

同様の式を作り,之を加へ合せて $\Sigma(\mathrm{Y}x-\mathrm{X}y)$ を作らん.然らば第一の質點に關する $(\mathrm{Y}_{1.2}x_1-\mathrm{X}_{1.2}y_1)$ の如き項に對しては必ず第二の質點に關する $(\mathrm{Y}_{2.1}x_2-\mathrm{X}_{2.1}y_2)$ の如き項あり。而して斯くの如き項の和が零となるは前に證明したる所なれば全體の和も亦零となる。從ひて

$$\Sigma(\mathrm{Y}x-\mathrm{X}y)=0$$

なる式を得。

同様にして

$$\Sigma(\mathrm{Z}y-\mathrm{Y}z)=0,\quad \Sigma(\mathrm{X}z-\mathrm{Z}x)=0$$

なることも容易に證明し得べし。

上に述べたる三つの場合には,力の廻轉能率は零に等しきを以て **10** の(2),(3)及び(1)式により(154頁)

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(\frac{dz}{dt}y-\frac{dy}{dt}z\right)=o$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}z-\frac{dz}{dt}x\right)=o$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)=o$$

なる可く,これ運動量の廻轉能率が時間に對して一定なることを示すものなり。此常數をそれぞれ a, b, c とすれば上式は

$$\Sigma m\left(\frac{dz}{dt}y-\frac{dy}{dt}z\right)=a \quad \text{.........(4)}$$

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}z-\frac{dz}{dt}x\right)=b \quad \text{.........(5)}$$

$$\Sigma m\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)=c \quad \text{.........(6)}$$

となる。

斯く x, y, z 軸の方向の廻轉能率がそれぞれ常數 a, b, c なる故,廻轉能率の大さは $+\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\mathrm{D}$ なる一定の値を有し,其方向 n も亦一定にして

$$\cos(n, x)=\frac{a}{\mathrm{D}},\quad \cos(n, y)=\frac{b}{\mathrm{D}},\quad \cos(n, z)=\frac{c}{\mathrm{D}}$$

にて與へらる。斯く力の廻轉能率が零となる場合には運動量の廻轉能率は時間に對して一定不變なるを以て,これを**運動量廻轉能率の保存則**と云ふ。又略して廻轉能率の保存則と云ふ事あり。若し運動量の廻轉能率の方向に z 軸をとれば,これが共廻轉能率の主軸となり,xy 面は主廻轉能率の面となる。主軸の方向は質點が如何に運動するも恆に一定なる故,主廻轉能率の面の方向も亦一定にしてこれを**不變面**と名づくることあり。太陽系が他の星より受くる力は極めて小なれば此場合には不變面あり。

14. 面積速度. 運動量の廻轉能率は面積と關係あるものなれば此點より猶ほ他の説明を與へ得。

即ち質點の z 軸に對する廻轉能率は $\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y$ なるが之を $x\ y$ 面上の極坐標 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ に移せば $\rho^2\frac{d\theta}{dt}$ となる。此 ρ は原點より質點に引ける動徑を

$x\,y$ 面上に射影したるものなり。此 ρ が dt 間に畫く三角形の面積の二倍は $\rho^2 d\theta$ にして從つて $\rho^2\dfrac{d\theta}{dt}$ は此面積を畫く速度となる。之を $x\,y$ 面上の面積速度と云ふ。他の二つの坐標面上に於ても之と同様なり。

今動徑の畫きたる面積を測るに $t=o$ の時より始むる事とし,坐標面上の面積をそれぞれ $\frac{1}{2}A(y,z)$, $\frac{1}{2}A(z,x)$, $\frac{1}{2}A(x,y)$ にて表はせば

$$\frac{dz}{dt}y-\frac{dy}{dt}z=\frac{dA(y,z)}{dt},$$

$$\frac{dx}{dt}z-\frac{dz}{dt}x=\frac{dA(z,x)}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y=\frac{dA(x,y)}{dt}$$

にして,上の廻轉能率の保存則は

$$\Sigma m\frac{dA(y,z)}{dt}=a,$$

$$\Sigma m\frac{dA(z,x)}{dt}=b,$$

$$\Sigma m\frac{dA(x,y)}{dt}=c$$

として表はし得べし。而して此式は

$$\frac{d}{dt}\Big(\Sigma mA(y,z)\Big)=a,$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\Sigma mA(z,x)\Big)=b,$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\Sigma mA(x,y)\Big)=c$$

と書き得る故,之を t に就きて積分し,其際面積 A は $t=o$ のときより測り始むることとせば

$$\Sigma mA(y,z)=at,$$

$$\Sigma mA(z,x)=bt,$$

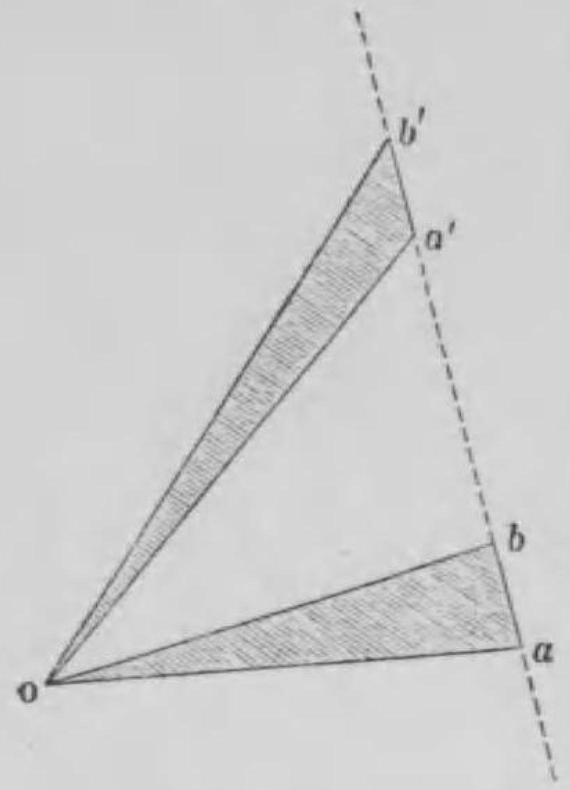
$$\Sigma mA(x,y)=ct$$

となる。此式の右邊は時間 t に比例して增加するを以て左邊も亦時間 t に比例して增加す。而して左邊に表はるる量は各質點に引ける動徑が畫く面積を各坐標面上に射影し,之に其質點の質量を乘じたる積を作り,それ等を加へ合せたるものなり。かく質量をも考に入れたる量を單に面積と呼ぶこととすれば**各坐標面上に於ては同一時間に同一の面積を畫く**と云ひ得べし。故に廻轉能率の保存則を時としては**面積速度の保存則**と云ふことあり。若し $x\,y$ 面が不變面と一致したる場合には動徑が此上にて畫く面積は他の場合よりも大にして,他の二つの坐標面上にて畫く面積は零なり。

上の場合には各質點の質量に關係するを以て多少複雜なれども,總ての質點の質量が同一なる場合には最早質量につきて考ふるの要なく只だ面積のみにつきて論ずれば足れり。

尙一層簡單なるは質點が唯だ一つあるときなり。

若し其質點が慣性によりて一直線上を等速運動をなすとすれば,此直線上にて同一時間に同一の距離だけ進む。故に動徑の畫く三角形を作れば其高さは何時も同一にして底邊亦相等しきを以て其面積の等しきは言を俟たず。又此直線と原點とを含む平面が不變面となる。



第五十二圖

次ぎに質點が原點より彈力の作用を受けて運動するものとすれば,第二編**14**に證明したる如く質點は一平面上に於て楕圓の徑路を畫くべく,此平面は卽ち不變面にして同一時間に同一の面積を畫くことも容易に證明し得べし。

又質點が原點よりの距離の二乘に逆比例する力を受けて運動する場合につきては面積速度の一定なることも第二編第六章**27**, 111頁に說明したる所なり。

例 1. 二つの質點が互に萬有引力の作用を及ぼすときにも此法則は成立す。

今重心は靜止するものと假定して之を原點にとり,二つの質點に至る動徑をそれぞれ r_1, r_2 とすれば運動量の廻轉能率は $(m_1r_1^2+m_2r_2^2)\dfrac{d\theta}{dt}$ にして定數 a に等しかるべし。

又重心を原點とせる故に

$$r_1 : r_2 = m_2 : m_1$$

なるべく,

$$r_1 + r_2 = r$$

とすれば,上式は

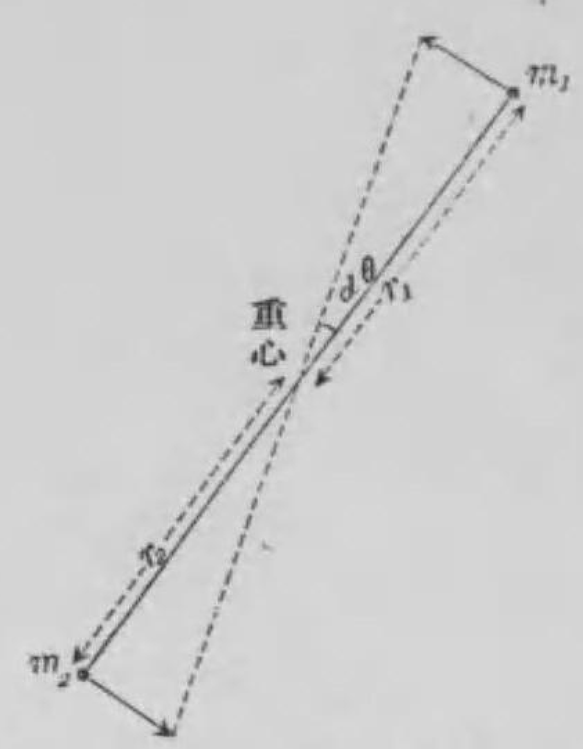
$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2\frac{d\theta}{dt}=a$$

となる。依て

$$a=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}a'$$

と置けば

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=a'$$



第五十三圖

となる。こは m_2 に對する m_1 の相對運動につきて面積速度一定なる事を示し,ケプレルの第二則に外ならず。

又動徑 r の畫く三角形の面積を A' とすれば $\dfrac{dA'}{dt}=\dfrac{1}{2}a'$ となり, $A'=\dfrac{1}{2}a't$ なり。

若し原點に對して兩質點の畫く面積を考ふれば, m_1 は $\dfrac{1}{2}r_1^2d\theta$, m_2 は $\dfrac{1}{2}r_2^2d\theta$ の面積を畫く故其面積の和は

$$dA=\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)d\theta$$

にして

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\frac{m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\frac{m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2}a'$$

$$A=\frac{1}{2}\frac{m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2}a't.$$

故にAは,相對運動のとき書く面積A′より$\frac{m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)}$だけ小なり

例 2. 猶一例を擧げんに,地球は其上にある物體例へば船舶を伴ひて,西より東に向ひて一樣なる速さにて廻轉しつつあり。而して地球に對する外部よりの影響を無きものとすれば廻轉能率の保存則成立すべきなり。

今多數の船舶が西より東に向つて新に航海し始めたりとせよ。此船舶は外部よりの影響によりて動き始めたるにあらずして,船と地球との間に働く內力のもとに動き始めたるものなる故,此運動の始まると同時に地球は幾分か西より東に向ふ廻轉を緩慢ならしむるにあらざれば船舶と地球との全體に對して廻轉能率保存の法則は成立せざるべし。其結果として一日の長さは幾分か延びる事となる。然れども船舶が港に到着すると同時に地球の廻轉は舊狀に復すべし。(只船舶と地球との全體の重心は初めの位置に復せずしてこれより少しく偏れるままなり)

15. 力の廻轉能率が零ならざる場合。 次ぎに此質點系統に屬する質點に働く力の廻轉能率が零とならざる場合を考へん。此場合には力の廻轉能率と運動量の廻轉能率との間には **10.** の(2)(3)及び(1)式の

$$\Sigma(Zy-Yz)=\frac{d}{dt}\left[\Sigma\left\{m\left(\frac{dz}{dt}y-\frac{dy}{dt}z\right)\right\}\right],$$

$$\Sigma(Xz-Zx)=\frac{d}{dt}\left[\Sigma\left\{m\left(\frac{dx}{dt}z-\frac{dz}{dt}x\right)\right\}\right],$$

$$\Sigma(Yx-Xy)=\frac{d}{dt}\left[\Sigma\left\{m\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)\right\}\right]$$

なる關係成立す。此X, Y, Zは各質點に働く外力竝に內力の和を表したるも,今此兩者を別ちて,外力による部分をX′Y′Z′,內力による部分をX″Y″Z″とすれば

$$X=X'+X'',\qquad Y=Y'+Y'',\qquad Z=Z'+Z''.$$

故に上式の左邊は

$$\begin{aligned}\Sigma(Zy-Yz)&=\Sigma\{(Z'+Z'')y-(Y'+Y'')z\}\\&=\Sigma(Z'y-Y'z)+\Sigma(Z''y-Y''z)\end{aligned}$$

となる。而して內力は運動の第三則に從うを以て前に證明したるが如く,其廻轉能率

$$\Sigma(Z''y-Y''z)=0$$

なり。故に

$$\Sigma(Zy-Yz)=\Sigma(Z'y-Y'z).$$

從ひて

$$\Sigma(Z'y-Y'z)=\frac{d}{dt}\left[\Sigma\left\{m\left(\frac{dz}{dt}y-\frac{dy}{dt}z\right)\right\}\right]\cdots\cdots\cdots(7)$$

となる。同樣にして

$$\Sigma(X'z-Z'x)=\frac{d}{dt}\left[\Sigma\left\{m\left(\frac{dx}{dt}z-\frac{dz}{dt}x\right)\right\}\right],\cdots\cdots(8)$$

$$\Sigma(Y'x-X'y)=\frac{d}{dt}\left[\Sigma\left\{m\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)\right\}\right]\cdots\cdots(9)$$