立體幾何學

李耀春譯述
舒塞斯原著

北平文化學社印行
1933

SOLID GEOMETRY

By Schultze-Sevenoak-Schuyler

立體幾何學

李耀春譯述

北平文化學社印行

1933

目 錄

立體幾何學

立體幾何學

第六編

空間之線與平面——多面角

480. 定義. 空間的幾何學或立體幾何學者，其所討論圖形之各部，不全在同一平面者也。

481. 定義. 一平面 爲一面聯其上任意二點之直線，全在此面內者也。

若過諸點或諸線能作一平面，且僅能作一平面，則此一平面由此諸已知點或線而決定。

自理A. 過不在一直線上之三點僅能作一平面。

自理B. 若二平面有一公共點，則必尙有第二公共點。

482. 定義. 若一直線與一平面無論如何延長終不相遇，則此直線與平面爲平行。

483. 定義. 若二平面無論如何引長終不相遇，則此二平面爲平行。

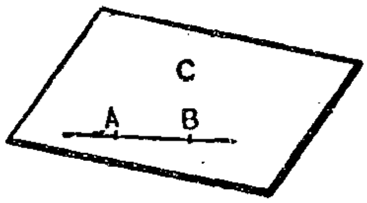
注. 上述任何要素所決定之平面，於立體幾何學中之作圖，常若有實質的方法者然 若用模型，顯然能作，且僅有此法。若用尺及圓規則得大概象徵；即所得之圖爲所欲作圖形之記號，但不能得眞正所求之圖，若平面幾何學所求者也。

命題I.　定理

484. 決定一平面：
(1)　由一直線及線外一點。
(2)　由兩相交線。
(3)　由二平行線。

(1)　求證一平面之決定，由於一直線AB，及線外一點C。

過線內兩點 A,B，與點C可作一平面。

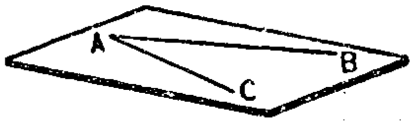


且僅可作一平面。(481，自理A)

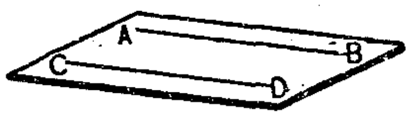
線AB位於此平面。(481)

(2)　求證二相交線AB與AC決定一平面。

〔學者自証之〕



(3)　求證二平行線AB與CD決定一平面。



由定義知平行線AB與CD位於同一平面。

因AB與點C決定一平面，則二平行線決定一平面。

485. 系. 二平面之交線爲一直線.

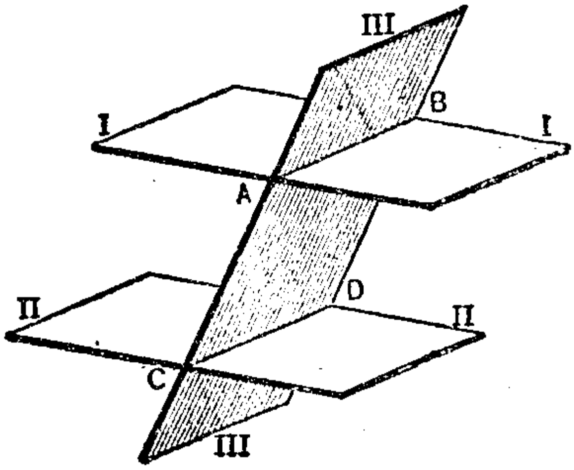
因交線不能含不在一直線之三點，因通過似此之三點，僅能作一平面也　(481，自理B)。

習題1.　何故照像者之鏡箱或測量者之轉鏡儀，必支以三足？

習題2.　不在一平面上之四點，可決定幾個平面？

命題 II. 定理

486. 二平行面與第三平面之交線彼此平行。



已知　平行平面 I 與 II，各與第三平面 III 交於 AB 及 CD.

求證　$AB \parallel CD$.

證　AB 與 CD 不能相遇，因否則平面 I 與 II 將能相遇。

AB 與 CD 又位於同一平面。

故　$AB \parallel CD$.

487. 系. 平行線夾於平行平面間者必相等。

×習題1. 若一平面交二平行平面之一，則必交其他一平面。

×習題2. 若一線交二平行平面之一，則必交其他一平面。

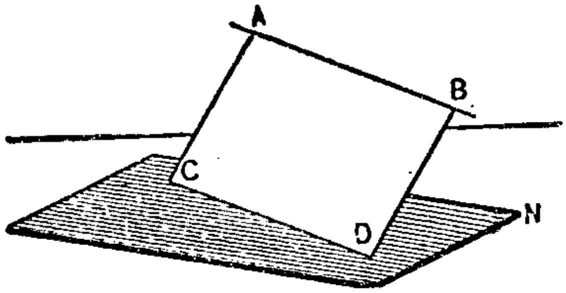
習題3. 於敎室中指出命題 II 之說明。

習題4. 於命題 II 之圖，若 $AC \parallel BD$. 証 $AB=CD$.

注. 學者當注意於立體幾何學中若欲證兩線之平行，僅証線之不能相遇尚不滿足，仍必須說明兩線位於一平面也。

命題Ⅲ. 定理

488. 一平面含二平行線之一且僅含其一者必平行於其他直線。



已知 $AB \parallel CD$，且平面 MN 僅含 CD.

求證 平面 $MN \parallel AB$.

證 AB 與 CD 所決定之平面，交 MN 於 CD.

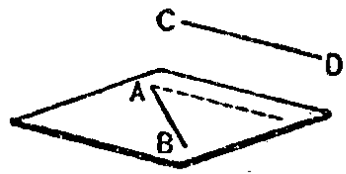
故，若 AB 遇 MN，則必遇 MN 於 CD.

但，因 $AB \parallel CD$，故此爲不可能.

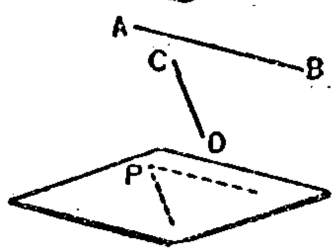
故 平面 $MN \parallel AB$.

489. 注意. 命題Ⅲ告以作一平面平行於一已知直線 AB 之方法；在如此之作圖常先作一直線 CD，平行於已知直線 AB，於是作一平面通過 CD.

490. 系1. 通過一已知直線，能作一平面平行於任何他一已知直線；若此二線不平行，則僅能作如此之一平面。



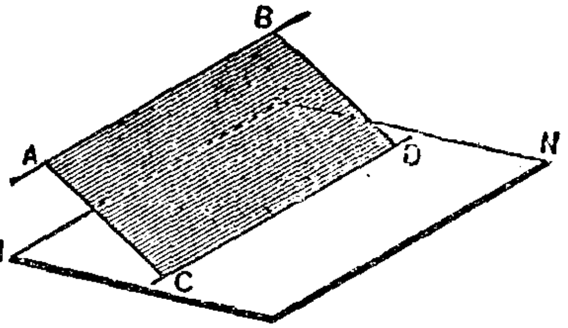
491. 系2. 過一已知點，能作一平面，平行於空間任二已知線；若此二線不平行，則僅能作如此之一平面。



習題. 作一平面，平行於一已知直線，且通過二已知點。

命題IV.　定理

492. 設一線平行於一平面，則此線必與此平面及通過此線之任何平面之交線平行。



已知　$AB \parallel$ 平面 MN，且平面 BC 含 AB 而交 MN 於 CD.

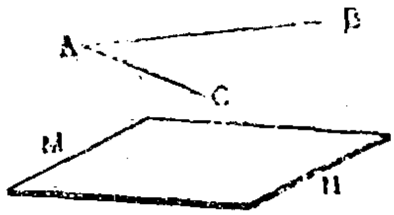
求證　$AB \parallel CD$.

證　AB與CD不能相遇，因設能相遇，則AB將遇平面MN.

AB 與 CD 又在同一平面.

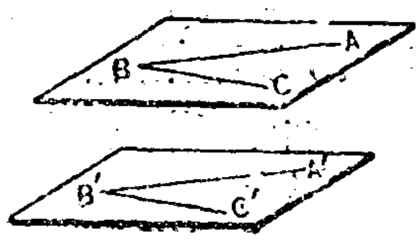
故　$AB \parallel CD$.

493. 系1. 若兩相交線之每一線平行於一已知平面，則其所在之平面平行於此已知平面。



設 AB 與 AC 皆平行於 MN. 若平面 ABC 能交 MN，則其交線將平行於 AB 及 AC，而此爲不可能。

494. 系2. 若兩角之邊彼此各各平行，則其所在之平面平行。

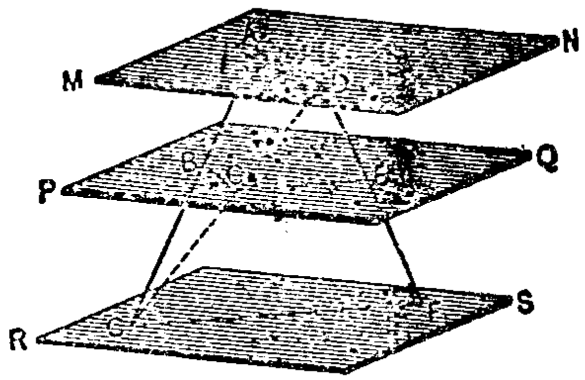


因 $AB \parallel A'B'$，平面 ABC 平行於 $A'B'$；同理平面 ABC 平行於 $B'C'$

故平面 $ABC \parallel$ 平面 $A'B'C'$.（系1.）

命題V．　定理

495．設二直線為諸平行平面所截，其相當線分成比例。



已知　平行平面 MN，PQ，及 RS 分別交二直線於 A，B，C 及 D，E，F.

求證　$AB:BC=DE:EF$.

證　作 DC，且通過 AC 與 DC 作一平面交平面 PQ 及 MN 各於 BG 與 AD.

於是　$AD \parallel BG$.　(486)

通過 DC 與 DF 作一平面，依同理，得，

$GE \parallel CF$.

故　$\frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC}$，且 $\frac{DE}{EF}=\frac{DG}{GC}$.（何故？）

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.　（公理1.）

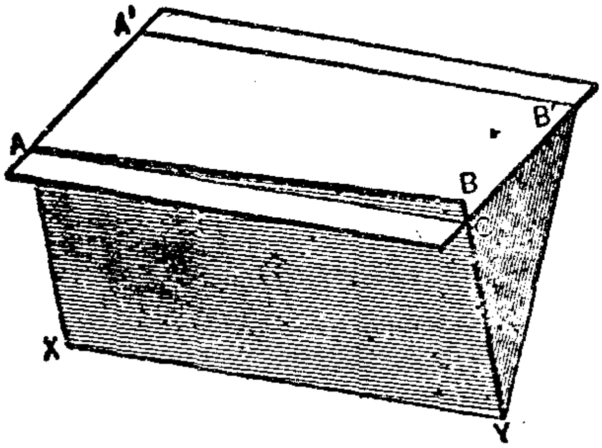
496．系．設經過任一點作諸直線為二平行平面所截，其相當線份成比例。

習題1．若三平面在一截線上截相等線份，則在每一截線上截相等線份。

╳習題2．若於命題V之圖，$BG=5$，$AD=15$，$DE=4$，求 EF，

命題VI. 定理

497. 設二直線平行於第三直線，則必彼此平行。



已知 $AB \parallel XY$，及$A'B' \parallel XY$.

求證 $AB \parallel A'B'$.

證 通過 AB 與 XY 作平面 AY，又通過 $A'B'$ 與點 A 作平面 $B'A$.

設平面 AY 與 $B'A$ 交於 AC.

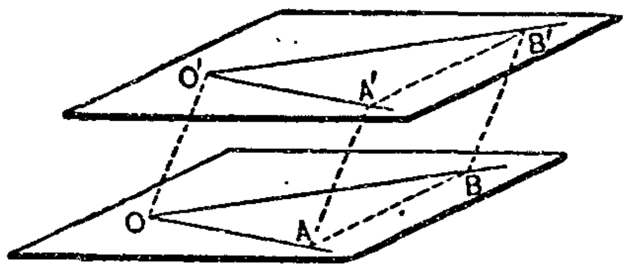
	平面 $B'A \parallel XY$.	(488)
故	$AC \parallel XY$.	(492)
但	$AB \parallel XY$.	(題設)
所以	AB 與 AC 密合.	(公理16.)
	AB 與 $A'B'$ 位於一平面.	
但	AB 與 $A'B'$ 不能相遇.	(公理16.)
故	$AB \parallel A'B'$.	

習題. 若一線 AB 平行於一平面 P，又平行於另一線 CD，於是平面$P \parallel CD$.

授意. 通過 AB 作一平面交平面 P 於線 XY.

命題VII. 定理

498. 設兩角不在一平面，其彼此之邊平行且在相同方向，則兩角相等。



已知 角 AOB 與角 $A'O'B'$ 之邊各各平行且在相同方向。

求證 $\angle AOB=\angle A'O'B'$.

證 取$OA=O'A'$，及 $OB=O'B'$.

作 AA'，BB'，AB 與 $A'B'$.

AO' 爲一平行四邊形. (何故？)

BO' 爲一平行四邊形. (何故？)

故 AA' 等於 OO' 且平行於OO'，

且 BB' 等於 OO' 且平行於OO'.

所以 AA' 等於 BB' 且平行於 BB' (公理1)(497)

由此 $AA'B'B$ 爲一平行四邊形，

且 $AB=A'B'$

$\therefore$ $\triangle AOB\cong\triangle A'O'B'$. (何故？)

$\therefore \angle O=\angle O'$.

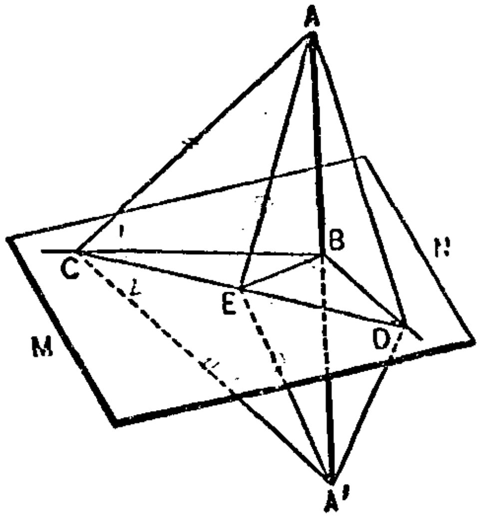
499. 定義. 一線交一平面之足即其交點。

500. 定義. 設一直線垂直於一平面內引過其足之諸線則此直線垂直於此平面。

501. 定義. 若一線垂直於一平面，則此平面垂直於此直線。

命題VIII. 定理

502. 設一直線於兩線之交點，垂直於兩直線，則此直線垂直於兩線所定之平面。



已知　BC 與 $BD \perp AB$，且平面 MN 含 BC 與 BD.

求證　$AB \perp$ 平面 MN.

證　在平面 MN 內過 B 作任意直線 BE.

作 CD 過 BE 於 E 且引長 AB 至 A'，使 $BA'=AB$.

作 AC，AE，AD，CA'，EA'，與 DA'，

$AC=A'C$，$AD=DA'$. (125)

$CD=CD$. (何故？)

故　$\triangle ACD \cong \triangle CDA'$. (何故？)

$\therefore \angle ACD = \angle A'CD$，

且　$\triangle ACE \cong \triangle A'CE$. (何故？)

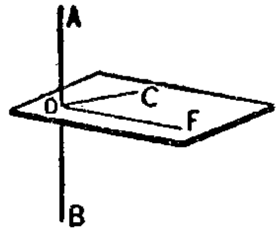
$\therefore EA=EA'$.

於是，　$BE \perp AA'$. (79)

故，　AB 垂直於平面 MN 內經過其足之任意線，而 $AB \perp$ 平面 MN. (500)

503. 系. 過一點作一平面垂直於已知直線。

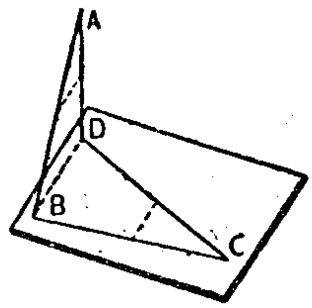
I. 已知直線 AB 及其線內之點 D.通過 AB 作二平面,在此二平面內(不在圖內)作 $DC\perp AB$ 及 $DF\perp AB$,則平面 CDF 爲所求之平面。



II. 已知直線 AB 及線外之點 C. 作 $CD\perp AB$.通過 AB 作一平面不含點 C.在此平面內作 $DF\perp AB$. 則所求平面爲 CDF.

習題1. 在命題 VIII 之圖,若 $AD=5$, $AB=4$, $BC=5$, $\angle CBD=120°$,且 $AB\perp$ 平面 MN,求 CD 之長.

習題2. 若 $ABCD$ 爲空間一四邊形(即 A,B,C,與 D 不全在一平面上)且 $AB=BC$, $CD=DA$, 於是平面角 A 等於平面角 C.



習題3. 聯空間四邊形兩隣邊中點之線與聯其他二邊中點之線平行且相等.

習題4. 若兩角,不在一平面,其彼此之邊平行且在相反方向,則兩角相等.

習題5. 若兩角之邊平行,在何種條件之下則兩角將互爲補角?

習題6. 在何種條件之下通過二點之一平面能垂直於一已知直線?

習題7. 通過五點可作幾平面,無四點在同一平面者?

習題8. 能包含空間一定部分之最少數平面爲若干? 何故?

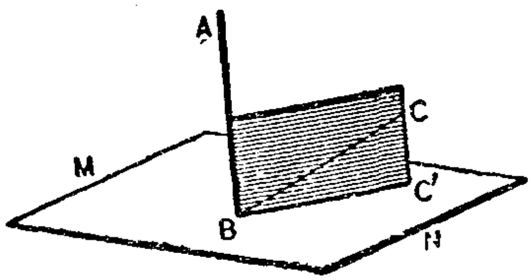
習題9. 證: (a) 一四邊形決定一平面若其二對角線相交,

(b) 若有二邊相平行,

(c) 若有二對邊相交。

命題IX. 定理

504. 在一已知點垂直於一直線之一切垂線，必在於該點垂直於此直線之平面內。



已知 $AB \perp BC$，及 $AB \perp$ 平面 MN 於 B.

求證 BC 在平面 MN 內.

證 通過 AB 與 BC 作一平面，並設其交 MN 於 BC'.

$AB \perp BC'$. (500)

$AB \perp BC$. (題設)

故 BC 與 BC' 密合， (47)

而 BC 在平面 MN 內.

505. 系1. 在一直線之已知點，能作一平面，且僅能作一平面，垂直於此直線。

506. 系2. 過直線外之一點，能作一平面，且僅能作一平面，垂直於該直線。

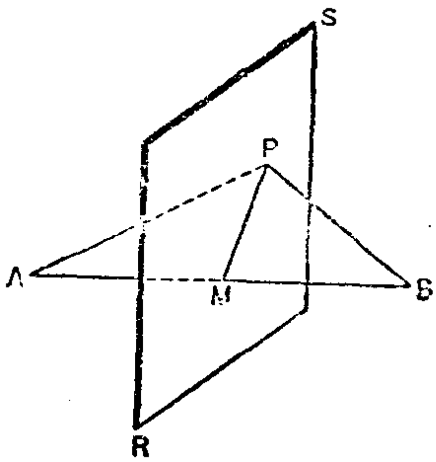
習題1. 一直角以其一邊作軸旋轉，問其轉動之邊生何種平面?

X習題2. 三線互為垂直，證明不能作第四線垂直於所有此三已知線。

X習題3. 證明不能作一直線垂直於有一公共點之二平面。

命題 X. 定理

507. 設一平面平分一直線，且與之成直角，則此平面內各點，皆距直線兩端等距離。



已知 點 P 爲平面 RS 內一點，且 $RS \perp$ 直線 AB 於其中點 M.

求證 點 P 距 A 及 B 等距離；即

$$PA=BP.$$

證 PM 爲 AB 之$\perp$平分線， (何故？)

$PA=PB.$ (何故？)

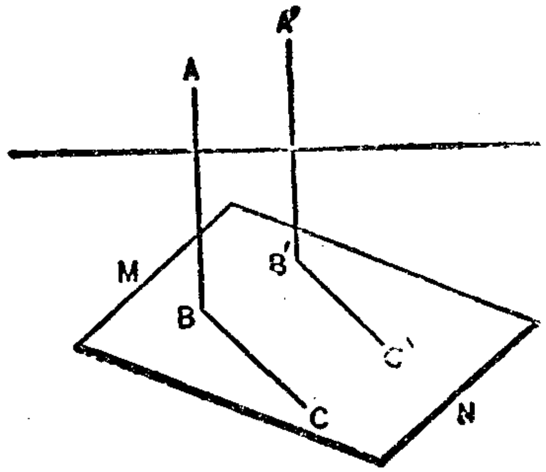
508. 系1. 凡點之距一直線兩端相等者，必在平分此線且與之成直角之平面內。

授意. 用上圖，由通過點 $P \perp$ 直線 AB 所作之平面，證平面 RS 將平分 AB，因此，平面 RS 即爲直線 AB 之垂直平分面。

509. 系2. 距一直線兩端等距離之一切點之軌跡，爲於中點垂直此線之一平面。

命題XI．　定理

510．設二平行線之一線垂直於一平面，則他線亦垂直於此平面。



已知　$AB \parallel A'B'$，且 $AB \perp$ 平面 MN．

求證　$A'B' \perp$ 平面 MN．

證　在平面 MN 內，過 B 與 B' 作任意二平行線 BC 與 $B'C'$．

於是　$\angle ABC = \angle A'B'C'$．　(何故？)

但　$\angle ABC$ 為一 $rt.\angle$．

故　$\angle A'B'C'$ 為一 $rt.\angle$．

而　$A'B'$ 垂直於引過其足之任意直線，

由此，故　$A'B' \perp$ 平面 MN．

習題1．　依次聯結空間四邊形各邊中點之線，作成一平行四邊形。

習題2．　聯結空間任意四邊形對邊中點之線，彼此平分。

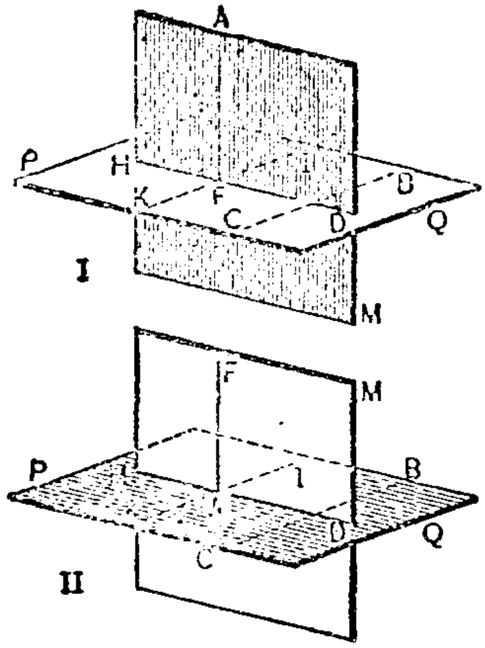
習題3．　說明命題 XI 如下式：若一平面垂直於二平行線之一，……

習題4．　作 BB'，此外更用一對線如 BC 與 $B'C'$ 以證明命題 XI．

習題5．　若一平面斜交二平行線之一線，證其不垂直於他一線。

命題XII.　　作圖題

511. 過一已知點，作一線垂直於一已知平面。



已知　平面 PQ 及點 A.

求作.　過 A，作一線垂直於 PQ.

作圖.　於平面 PQ 內，作任意直線 BC.
過 A 作一平面 $AM \perp BC$ 交 PQ 於 DH.
過 A 在平面 AM 內作 $AF \perp DH$.
AF 爲所求之垂直線。

證　過 AF 之足（於圖 I 爲 F，於圖 II 爲 A）在平面 PQ 內作 $IK \parallel BC$.

因	$BC \perp$ 平面 AM.	（作　圖）
	$BC \parallel IK$.	（作　圖）
	$\therefore IK \perp$ 平面 AM.	（5 1 0）
	$\therefore FA \perp IK$.	（何故？）
但	$FA \perp DH$.	（作　圖）
	$\therefore FA \perp$ 平面 PQ.	（何故？）

512. 系1. 過一已知點，能作一垂線且僅能作一垂線垂直於一已知平面。

因若有二垂線通過此點，則此二線所定之平面將交已知平面於一直線，與二垂線皆成垂直。或，於一平面內，有二垂線過一已知點，垂直於一已知線，此為不可能。

513. 系2. 若二直線垂於一平面，此二線必平行。

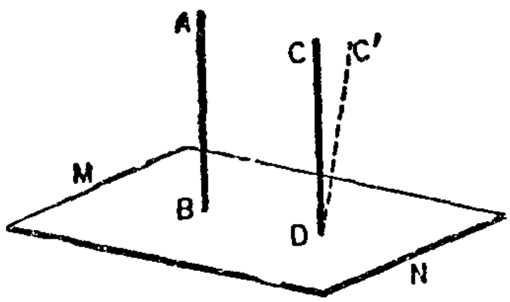
設

AB 與 $CD\perp$ 平面MN.

作 $DC'\parallel AB$.

於是 $DC'\perp MN$.

但過D僅能作一垂直線至平面MN.



故DC與DC'密合，而$DC\parallel AB$.

514. 定義. 自一點至一平面之距離為自此點至該平面垂直線之長。

習題1. 距已知平面有一定距離之點之軌跡為何？

習題2. 距已知平面有一定距離且與他二已知點成等距離之點之軌跡為何？

習題3. 求距 A 與 B 等距離且距 C 與 D 等距離之點之軌跡。

習題4. 討論習題3當(a)線 $AB\parallel$ 線CD時，$(b)C$與 B 密合時，(c) A,B,C，與 D各點皆在一直線時。

習題5. 過二相交平面外一點，作一線平行於每一平面。

習題6. 證：每三角形決定一平面。

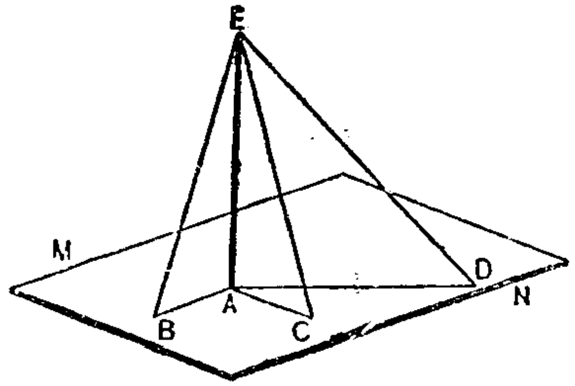
習題7. 若 $AB\parallel A'B'$且通過每線作一平面相交於 CD，於是交線$CD\parallel AB$.

命題XIII. 定理

515. 設，自平面外一點，作諸斜線至平面，則：

(1) 任意二線遇平面之點與垂線足之距離等者必相等。

(2) 二直線遇平面之點與垂線足之距離不等，則距離遠者其線長。



已知 EA垂直於平面 MN.作斜線 EB, EC,與 ED 使 $AB=AC$ 及 $AD>AC$.

求證 (1) $EB=EC$.

(2) $ED>EC$.

授意. 1. 用合同三角形法證明;

2. $\overline{ED}^2=\overline{EA}^2+\overline{AD}^2$, $\overline{EC}^2=\overline{EA}^2+\overline{AC}^2$.

516. 系1. 反言之，由一點至一平面所作諸相等斜線，其遇平面之點與由已知點至該平面之垂線足距離相等，若兩斜線不等，則長線遇平面之點，距垂線足之距離遠。

517. 系2. 空間一點與圓周上各點之距離等者其軌跡爲通過圓心而垂直於圓平面之一直線。

518．系3．垂線爲由平面外一點至一平面之最短線；反言之，由一點至一平面之最短線，爲自此點至平面之垂線。

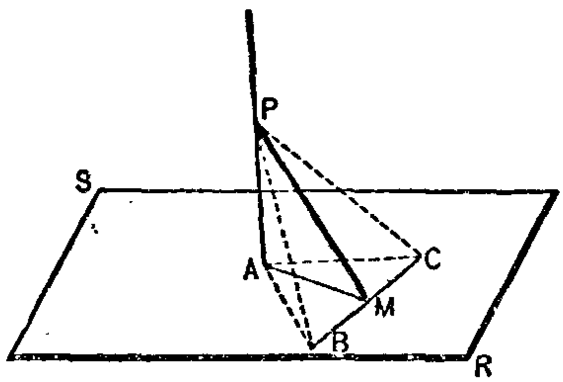
519．系4．若兩平面平行，則其間處處距離相等；反言之，兩平面之距離處處相等，則兩平面平行。

習題1．在命題XIII之圖，若$\angle B=\angle C$，於是$EB=EC$，又$AB=AC$．

×習題2．由距一平面MN 3吋之一點P，作一直線PA，A在MN內．若$PA=5$時，問A與由P至MN之垂線足之距離爲何？

命題XIV．　定理

520．設由平面內之垂線足作一直線與此平面內之任一線交成直角，則由其交點至垂線內任一點之直線，必垂直於平面內之直線。



已知　$PA\perp$平面SR，$AM\perp$平面SR內之直線BC，及PM爲由點M至PA之任一線。

求證　$PM\perp BC$．

證　截$BM=MC$；作AB，AC，PB，及PC．

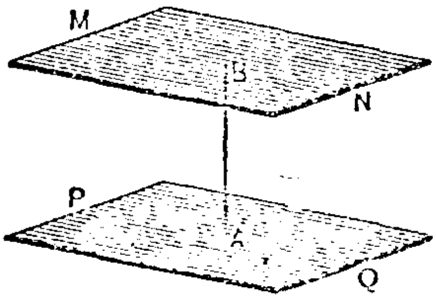
$AB=AC$．　（何故？）

$PB=PC$．　（515）

$\therefore PM\perp BC$．　（何故？）

命題XV. 定理

521. 垂直於一直線之兩平面必平行。



已知 平面 MN 與 PQ 垂直於直線 AB.

求證 平面 $MN \parallel$ 平面 PQ.

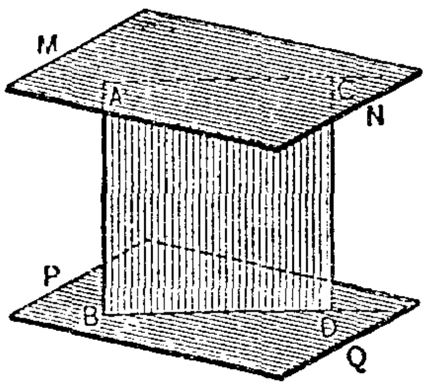
證 若平面 MN 與 PQ 不平行，則將遇於某點。

此爲不可能 (506)

$\therefore$ 平面 $MN \parallel$ 平面 PQ.

命題XVI. 定理

522. 一直線垂直於二平行平面之一平面者亦必垂直於他平面。



已知 平面 $MN \parallel$ 平面 PQ，又 $AB \perp$ 平面 MN.

求證 $AB \perp$ 平面 PQ.

證　通過 AB 作任意平面交 MN 於 AC 交 PQ 於 BD.

$AC \parallel BD$, (486)

又　$AC \perp AB$. (500)

故　$BD \perp AB$. (105)

所以 $AB \perp PQ$ 內通過 B 點之任何線。

是以　$AB \perp$ 平面 PQ.

523. 系. 過一已知點，能作一平面且僅能作一平面，平行於一已知平面。

習題. 若兩平面各平行於第三平面，則必彼此平行。

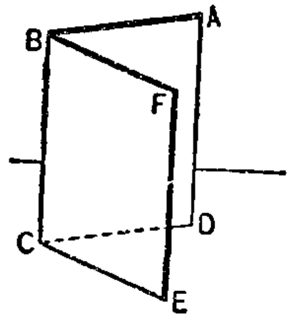
授意. 作一線垂直於二平行平面之一。

二 面 角

524. 若一平面 ABC 繞線 BC 旋轉以至達於 FBC 位置，於是其旋轉之總量稱爲二面角。

直線 BC 稱爲二面角之稜，而其平面 ABC 與 FBC 稱爲二面角之面。

注意. 學者應注意上列敘述並非定義，而僅爲二面角之說明。



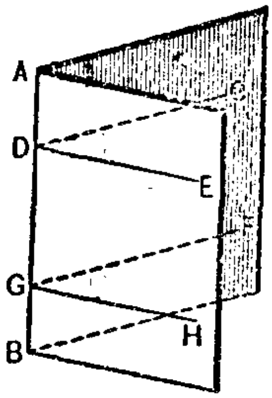
525. 二面角可以其稜上之二字母表之；設幾個二面角有一公共稜，則以四字母表之，每面一字母，稜上兩字母，稜上之字母放於他兩字母之間。

如，附圖內之二面角可以 BC 表示之，或記爲 $A\text{-}BC\text{-}E$.

二面角之大小不依其面之廣袤而變化甚顯著也。

526. 定義. 二面角之平面角為由其兩面內於同點垂直於其稜之二直線作成之角。

如，若 CD 垂直於 AB 及 ED 垂直於 AB，則 $\angle CDE$ 為二面角 AB 之平面角。



一二面角之兩平面角，如 CDE 與 FGH，相等，因其邊各各平行且在相同方向也。

或，由二面角稜內任何點作出之平面角相同。

527. 兩二面角能使密合時則兩二面角相等。

叠置兩相等二面角，則其平面角能使密合，故相等二面角有相等平面角。

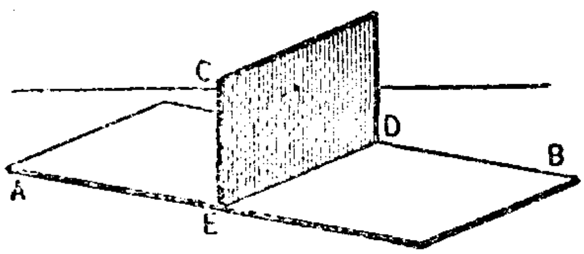
528. 二面角為銳，直，鈍，或平，依其平面角之為銳，直，鈍，或平角而定。

一平二面角之兩面位於相同平面甚為顯然。

二面角為餘二面角，補二面角，隣二面角，對頂二面角，等等，依其平面角為餘角，補角，隣角，等而定。

若此平面遇他平面所成之兩隣二面角相等，則各二面角顯為一直二面角。

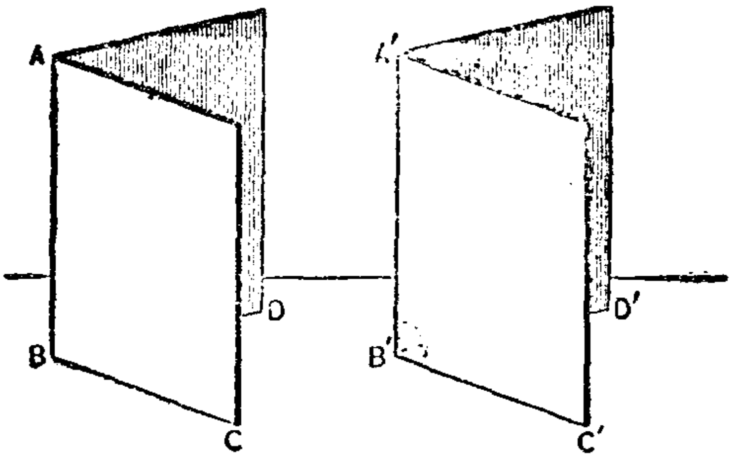
529. 一平二面角分為180等份，每份稱為一度。度分為分，分分為秒。



530. 作成直二面角之二平面稱為互為垂直。如，設平面 CD 與平面 AB 作成直二面角，則平面 CD 垂直於平面 AB。

命題XVII.　定理

531. 設兩二面角之平面角相等，則此兩二面角必等。



已知　二面角 AB 與 $A'B'$ 之平面角 CBD 及 $C'B'D'$ 相等。

求證　二面角 $AB=$ 二面角 $A'B'$.

證　因 $AB\perp BD$，及 $AB\perp BC$，

$AB\perp$ 平面 BDC.

又，依同理，$A'B'\perp$ 平面 $B'D'C'$.

放 $\angle DBC$ 於 $\angle D'B'C'$ 上.

於是平面 BDC 與平面 $B'D'C'$ 密合。

故 BA 與 $B'A'$ 密合，(512)

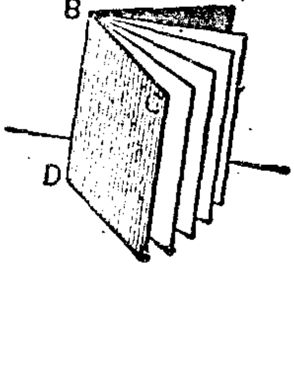
又因 DB 與 $D'B'$ 密合，

平面 AD 與平面 $A'D'$ 密合。(484)

同樣，平面 AC 與平面 $A'C'$ 密合。

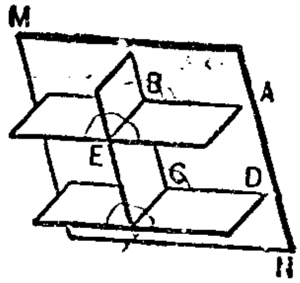
故，二面角 AB 與二面角 $A'B'$ 密合。

所以兩二面角相等。



532. 系. 若一二面角分爲 n 等份，則其平面角亦分爲 n 等份；反言之亦然。

習題1. 對頂二面角相等。

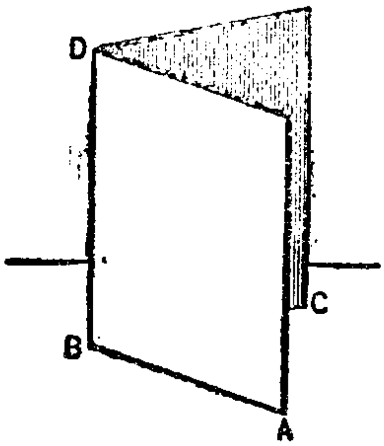


習題2. 若二平行平面爲第三平面所截，其同位二面角必相等。

授意. 作一平面 $MN \perp EB$，兩平面之交線。

命題XVIII. 定理

533。二面角以其平面角度之。



已知 $\angle ABC$，二面 $\angle BD$ 之平面角。

求證 $\angle ABC$ 與二面 $\angle BD$ 以同度數量之。

證 例I. $\angle ABC$ 所含之度數爲一有理數，例如$\frac{m}{n}$，其 m 與 n 爲整數。

180° 之二面角有 180° 之一平面角。 (527)

$\therefore 1^\circ$ 之二面角有 1° 之一平面角。 (532)

$\therefore \left(\frac{1}{n}\right)^\circ$ 之二面角有 $\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$ 之一平面角。 (532)

$\therefore \left(\frac{m}{n}\right)^\circ$ 之二面角有 $\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$ 之一平面角。

例Ⅱ. ∠ABC 內所含之度數爲無理數。

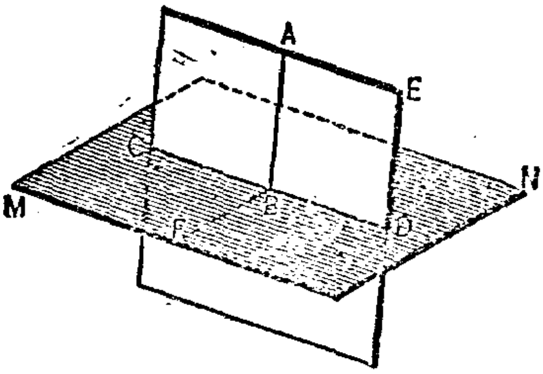
∠ABC 之任何近似值，爲一有理數，必等於 BD 之相應近似值 (例 I)

或，ABC 與 BD 之數量之一切近似值均各各相等，故此等數量相等。 (223)

習題. 若兩隣二面角各爲 30° 與40°，求平分此等二面角之二平面所作成之二面角。

命題XIX. 定理

534. 設一直線垂直於一平面，則通過此線之各平面必垂直於此平面。



已知 $AB \perp$ 平面 MN，且平面 EC 含 AB.

求證 平面 $EC \perp$ 平面 MN.

授意. 於平面 MN 內之 B 點，作 $BF \perp CD$，並證 ∠ABF 爲一直角。

535. 注意. 前命題供給作一平面垂直於一已知平面之普通方法，在此等之作圖先作一線垂直於已知平面，然後作一平面通過之。

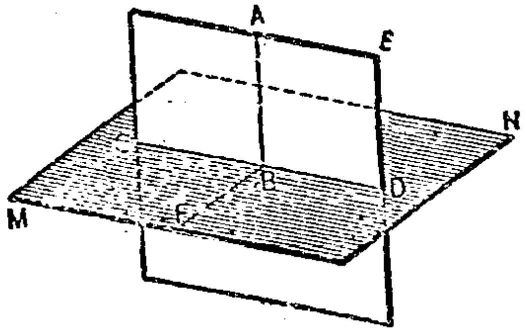
習題1．過一已知點作一平面垂直於二已知平面。

習題2．過一已知點作一平面垂直於一已知平面 P 且平行於一已知直線 CD．

習題3．過一已知直線作一平面垂直於一已知平面。

命題XX．　定理

536．設兩平面互爲垂直，則在一平面上所作垂直於其交線之直線，亦必垂直於他平面。



已知　平面 $CE\perp$ 平面 MN，又於 CE 內線 $BA\perp$ 交線 CD.

求證　$AB\perp$ 平面 MN.

授意．於 B 作平面角並證 $AB\perp$ 經過其足之二線。

537．系1．若兩平面互爲垂直，則於其交線內任一點所作垂直於此平面之垂線，必在彼平面內。

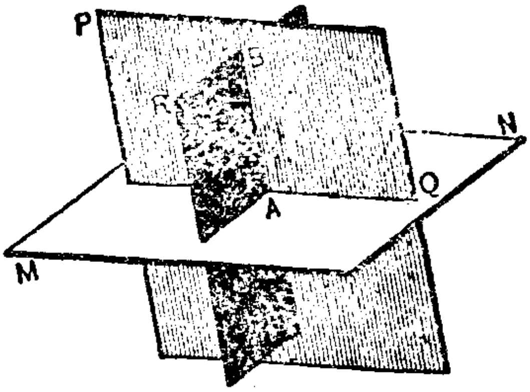
設 $BP\perp$ 平面 MN 於 B．作 BA 如上圖．於是 BP 與 BA 密合．故 BP 在平面 CE 內。

538．系2．若兩平面互爲垂直，則由此平面內任一點所作垂直於彼平面之垂線，必在此平面內。（用間接法證明）

習題．在命題XX之圖內，若平面 $CE\perp$ 平面 MN，$AB\perp CD$，$AB=m$ 時，$BF=n$ 時，求 AF 之長。

命題XXI． 定理

539．設兩相交平面各垂直於第三平面，則其交線亦垂直於第三平面。



已知 平面 PQ 與 RA 交於 AB，且各 $\perp$ 平面 MN．

求證 $AB\perp$ 平面 MN．

證 於 A 作一直線 $\perp MN$．

此直線必在平面 PQ 及平面 RA 內． (537)

故必與 AB 密合。

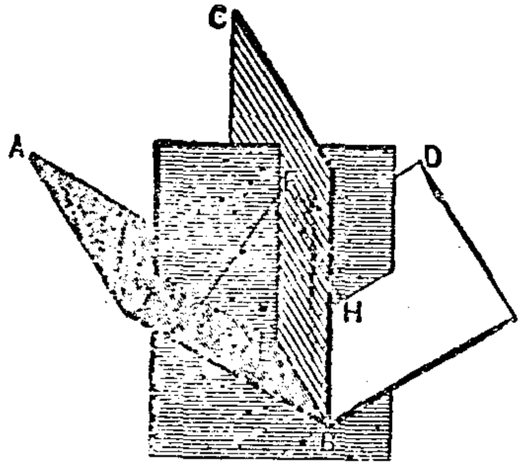
或 $AB\perp$ 平面 MN．

540．系．若兩平面互為垂直，且第三平面垂直於其交線，則每交線必垂直於其他兩交線。

習題．若一線平行於一平面，則垂直於此線之任何平面，亦必垂直於第一平面。

命題XXII. 定理

541. 平分二面角之平面內諸點，與二面角之面等距離。



已知 平面 CB 平分二面 $\angle A\text{-}BE\text{-}D$，且 FG 與 FH 各為由平面 BC 內任一點 F，至 AB 與 BD 之距離.

求證 $FH=FG$.

證 通過 FG 與 FH 作一平面交二面角之面於 EG 與 EH.

平面 $FGH\perp AB$ 與 DB. (534)

所以 平面 $FGH\perp BE$. (539)

故 $EB\perp EG$, EF, 及 EH. (500)

$\therefore$ $\angle GEF$ 與 $\angle HEF$ 為二面角 $A\text{-}BE\text{-}C$ 與 $D\text{-}BE\text{-}C$ 之平面角。

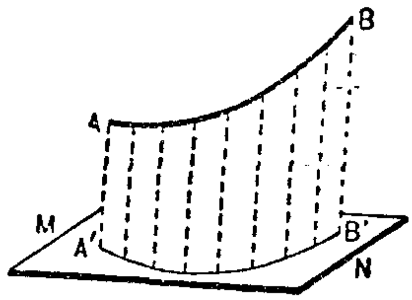
(學者自完成其證明，參考70.)

542. 系. 凡與一二面角之面等距離之點必在平分二面角之平面內。

習題. 與兩相交平面等距離之點之軌跡，為平分該相交平面作成之二面角之二平面。

543．定義．一點在一平面上之射影爲由此點至此平面上之垂線足。

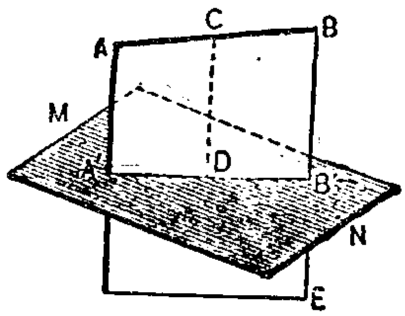
一圖在一平面上之射影爲此圖內之一切點在此平面上之射影之軌跡。



如，　　$A'B'$表示AB在平面MN上之射影。

命題XXIII．　定理

544．過不垂直於一平面之任一已知線，能作一平面，且僅能作一平面垂直於已知平面。



已知　直線AB不⊥平面MN.

求證　　通過AB能作一平面，且僅能作一平面⊥MN.

證　　由AB內之任一點C，作$CD \perp MN$.

通過　AB與CD作一平面AE.

於是　平面$AD \perp MN$.　　(534)

若通過AB能作二平面⊥平面MN．則其交線AB，將垂直於平面MN.　　(539)

但此爲不可能，因與題設矛盾故也。故，過AB僅能作一平面垂直於平面MN.

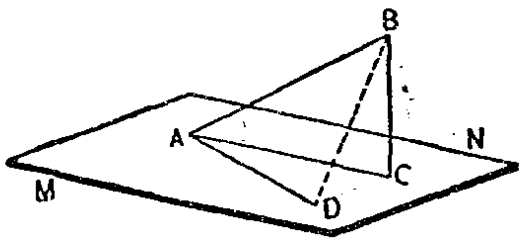
545．系．不垂直於一平面之直線，其在該平面上之射影爲一直線。

546．定義．一線在一平面上之傾角，或一線與平面作成之角，爲此線與其在該平面上之射影所成之角。

如，於下命題之圖中，若 AC 爲 AB 在 MN 上之射影，於是 $\angle BAC$ 爲 AB 與 MN 所成之角。

命題XXIV．　定理

547．一線與其在一平面上之射影所成之銳角，爲其與平面內任何直線所成之最小角。



已知　直線 AC，爲直線 AB 在平面 MN 上之射影，及 AD，爲 MN 內過 A 之任意直線．

求證　$\angle BAC < \angle BAD$.

證　於平面 MN 內作 $AD=AC$，並作 BD.

於 $\triangle ABC$ 與 ABD，

$AB=AB$，

$AC=AD$，

$BC<BD$.　(518)

故　$\angle BAC<\angle BAD$.　(133)

習題1． 兩平面平行，一平面內之圓射影於他平面上，問其射影爲何？若二平面互爲垂直，問其射影爲何？

習題2． 若一圖在一平面上之射影爲一直線，則此圖爲一平面圖。

習題3． 若一線 AB 與一平面 MN 作成一 $45°$ 之角，又 $AB=10$ 時，問 AB 在 MN 上之射影長若干？

習題4． 於命題 XXIII 之圖，求 AB 與 MN 之傾角，若 $AA'=6$，$BB'=11$，與 $AB=10$．

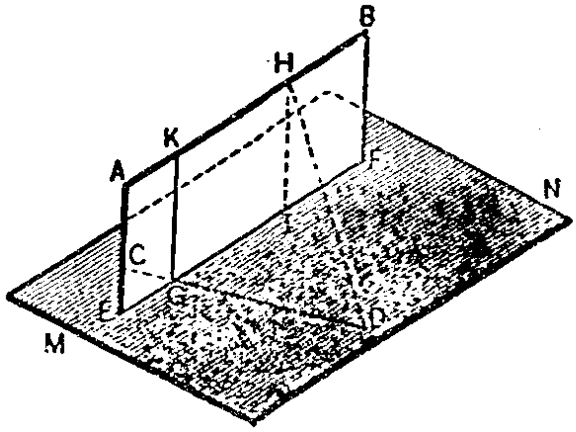
習題5． 於命題 XXIV 之圖，若 $AC=3$ 時，$\angle BAC=60°$，及 $\angle CAD=90°$，$AC=AD$．及 $\angle C=90°$，求 BD 之長。

習題6． 二平行線與一平面之傾角相等。

習題7． 於命題 XXIV 之圖（但 $AC\neq AD$），若 $AB=10$，$CD=5\sqrt{2}$，$\angle BAC=30°$ 及 $\angle CDA=90°$，求 $\angle BAD$．

習題8． 在一相似圖內，若 $AD=m$，$DC=n$，$CB=P$，及 $\angle ADC=90°$，求 AB 與 BD．由此求出 $\angle ADB$ 之值。

習題9． 作不在一平面上二線 AB 與 CD 之公垂線。



授意． 通過 CD 作平面 $MN \parallel AB$．

過 AB 作平面 $AF \perp MN$．

作 $GK \perp EF$．

GK 即爲所求之線。

習題10． 證僅能作一似此之公垂線，（用上圖）。

習題11． 求與不在一直線上三已知點等距離之點之軌跡。

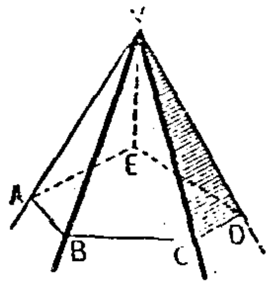
習題12． 若一線過其射影於一平面，則在平面內於其交點垂直一線之任何線，亦必垂直於他線。

多 面 角

548．**定義．一多面角**爲一圖形由一直線繼續交一定多邊形，而一端又限於不在多邊形平面上之定點移動而生者也。

如，　$V\text{-}ABCDE$爲一多面角，

549．多面角之**頂**即定點，如 V．動線之在任意位置者**爲織造線**，織造線之過多邊形之頂者爲**稜**；如 VA，VB，VC 等等．二連續之稜所決定之平面部分爲一**面**；如AVB，BVC，等等。二連續之稜所成之角爲多面角之**面角**；如$\angle AVB$，$\angle BVC$，等等。二隣面所成之二面角爲多面角之**二面角**；如二面$\angle VA$，$\angle VB$，等等。



550．若已知多邊形爲凸多邊形，則此多面角爲**凸**多面角。

551．**定義**．一多面角依其有三，四，等等面而稱爲**三面角**，**四面角**，等等。

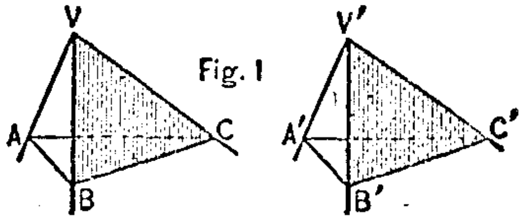
552．**定義**．一三面角依其有一，二，或三直二面角而稱爲**一直角三面角**，**二直角三面角**，或**三直角三面角**。

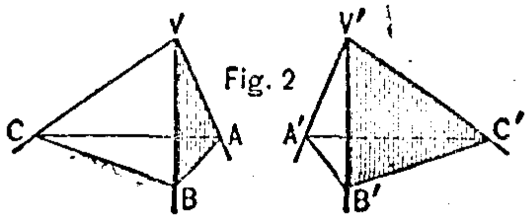
553．**定義**．三面角有二面角相等者爲**等翼三面角**。

554．若二多面角之面角及二面角彼此各各相等，且一切部分排列之次序相同，則此二多面角爲**全等**（因顯然能使其密合也）。

若二多面角之面角及二面角彼此各各相等，而一切部分排列之次序相反，則此二多面角爲對稱。

如，於圖1三面$\angle V\text{-}ABC\cong$三面$\angle V'\text{-}A'B'C'$若$\angle AVB=\angle A'V'B'$，$\angle BVC=\angle B'V'C'$，$\angle CVA=\angle C'V'A'$，而二面$\angle AV=$二面$\angle A'V'$，二面$\angle BV=$二面$\angle B'V'$，及二面$\angle CV=$二面$\angle C'V'$.





而於圖2，$V\text{-}ABC$與$V'\text{-}A'B'C'$爲對稱。

大概二對稱多面角不能使其密合，甚爲顯然。

命題XXV．　定理

555．設兩三面角有兩個面角及其所夾之二面角彼此各各相等，且相等部分排列於相同次序，則此兩三面角爲全等。

〔用叠置法證明〕

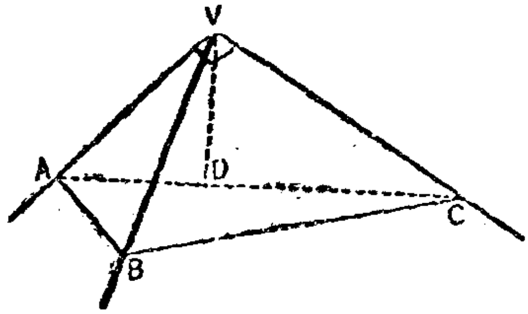
命題XXVI．　定理

556．設兩三面角有兩二面角及其所夾之面角彼此各各相等，且相等部分排列於相同次序，則此兩三面角爲全等。

〔用叠置法證明〕

命題XXVII.　定理

557. 三面角任兩面角之和，大於第三面角。



已知　$\angle AVC$，三面角 $V\text{-}ABC$ 之最大面角。

求證　$\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC$.

證　於面角 AVC 作 AC，於是作 VD 使 $\angle DVA=\angle BVA$.

截 $VB=VD$.　作 BC.

於是　$\triangle AVB\cong\triangle AVD$.　(何故？)

$\therefore\ AB=AD$.

但　$AB+BC>AC$.　(何故？)

$\therefore\ BC>DC$.　(公理5.)

但於 $\triangle BVC$ 及 DVC 內，

VC 為公有，

$VD=VB$,　(何故？)

而　$BC>DC$.

故　$\angle BVC>\angle DVC$.　(133)

加等角 AVB 與 AVD,

$\angle AVB+\angle BVC>\angle DVC+\angle AVD$,

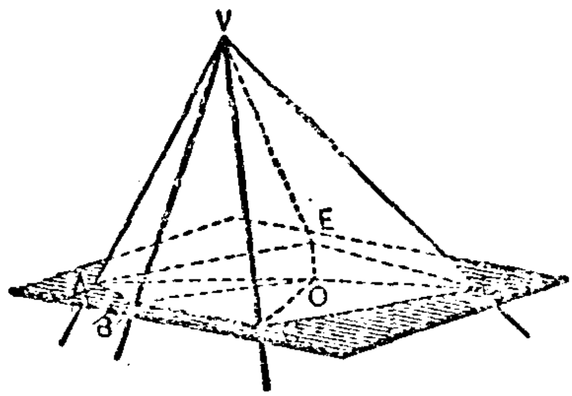
或　$\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC$.

習題1.　作成多面角之任一平面角小於其他平面角之和。

習題2.　蛋（非平面的）四邊形各角之和小於四直角。

命題XXVIII. 定理

558. 任何凸多面角之面角之和，小於四直角。



已知　V-$ABCDE$，任何凸多面角.

求證　$\measuredangle AVB, BVC$，等角之和，小於四直角.

證　作一平面交稜於A, B, C，等等，交面於AB, BC, CD等等．於是$ABCDE$爲一凸多邊形。

聯平面ABC內任意點O至A, B, C，等等.

於是　$\angle VBA + \angle VBC > \angle ABC$，

而　$\angle VCB + \angle VCD > \angle BCD$，等等.　(557)

故頂點爲　V之三角形所有底角之和，

大於頂點爲　O之三角形所有底角之和。

但頂點爲　V之三角形所有各角之和，

等於頂點爲　O之三角形所有各角之和。　(何故？)

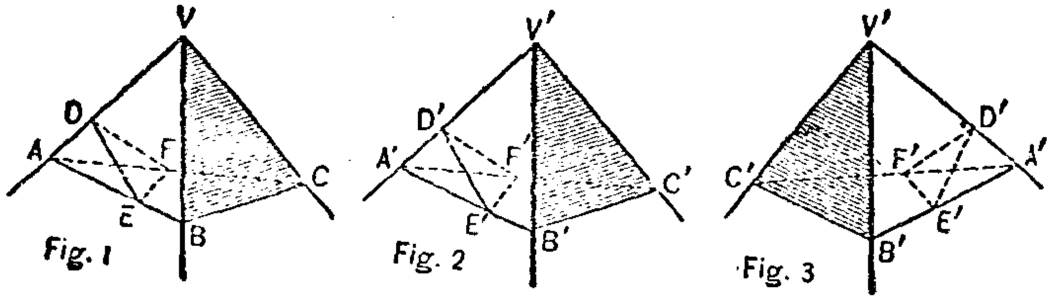
自等量之中減去諸底角，則得頂V上諸角之和小於頂O上諸角之和。

但頂O諸角之和等於四直角、

是以，頂V上諸角之和小於四直角。

命題XXIX.　定理

559. 設兩三面角有三個面角彼此各各相等，則其相當二面角相等，而兩三面角必相等或對稱。



已知　於三面角 $V\text{-}ABC$ 及 $V'\text{-}A'B'C'$ 內，

$\angle AVB=\angle A'V'B'$，$\angle BVC=\angle B'V'C'$，$\angle CVA=\angle C'V'A'$.

求證　$V\text{-}ABC\cong$ 或對稱於 $V'\text{-}A'B'C'$ 而二面 $\measuredangle VA$，VB，與 VC 各各等於 $V'A'$，$V'B'$，$V'C'$.

證　　在六稜上截

$$VA=VB=VC=V'A'=V'B'=V'C'.$$

作 AB，BC，CA，$A'B'$，$B'C'$，與 $C'A'$.

於是　　$\triangle AVB\cong\triangle A'V'B'$.　　（何故？）

又　　$AB=A'B'$.

同理，　　$BC=B'C'$，$CA=C'A'$.

在 AV 及 $A'V'$ 上，各截 AD 等於 $A'D'$. 於面 AVB 作 DE，又於面 AVC 作 DF，垂直於 VA. 此二線分別遇 AB 及 AC，因三角形 AVB 與 AVC 爲等腰三角形也。

同理，作 $D'E'$ 與 $D'F'$，又聯 EF 與 $E'F'$.

〔學者自完成之〕

授意．　證　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$．

$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$．

$\triangle ADF \cong \triangle A'D'F'$．

$\triangle AEF \cong \triangle A'E'F'$．

$\triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$．

560。定義．若一多面角之諸棱爲他多面角諸棱過頂之延長線，則此二多面角爲對頂。

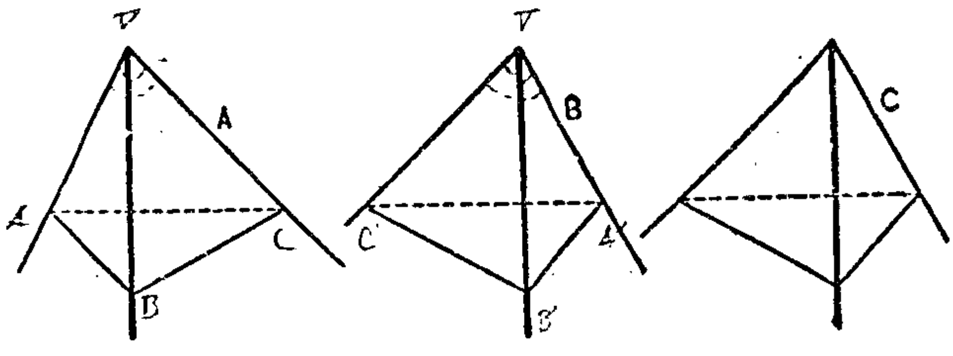
命題 XXX

561．兩三面角爲對稱：

(1) 設兩面角與其所夾之二面角彼此各各相等，

或，(2) 設兩二面角與其所夾之面角彼此各各相等，

或，(3) 三個面角彼此各各相等，倘其諸相等部分排列於相反次序。

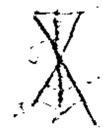


證　設 A 與 B 爲已知三面角，作三面角 C 與 A 對稱。

因 C 與 A 之諸部分排列之次序相反，C 與 B 之諸部分排列之次序相同。

故　$C \cong B$．

但因 C 對稱於 A，則其全等形 B 對稱於 A.



562．系．對頂三面角爲對稱。

593．注意．三角形與三面角間有一非常的類似（多邊形與多面角間亦然）．三角形之邊相當三面角之面角，三角形之角相當三面角之二面角．關於三面角定理之證明，常可由類似之三角形命題加字母 V（即，頂點）於每一符號而得之。如，於下列敘述，設取消各處之字母 V，則爲下命題之證明：

設三角形 (ABC) 之兩邊 $(AB$ 與 $BC)$ 相等，則其對角 $(A$ 與 $B)$ 相等．若含字母 V，則爲下定理之證明：

設三面角之兩面角相等，則其相對之二面角相等。

例題．已知　$\angle AVB=\angle BVC$.

求證　二面 $\angle VA=$ 二面 $\angle VC$.

證　作平面 VBD 平分 $\angle VB$.

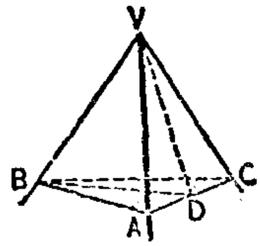
$\angle AVB=\angle BVC$.　（題設）

$A\text{-}VB\text{-}D=C\text{-}VB\text{-}D$.　（作圖）

$\angle BVD=\angle BVD$.　（恆等）

$\therefore V\text{-}ABD$ 與 $V\text{-}BDC$ 爲對稱。

$\therefore$ 二面 $\angle VA=$ 二面 $\angle VC$.



習　題

習題1．敘述與下列平面幾何學之定理相應之三面角或多面角之命題：

(a)　三角形兩邊之和大於第三邊。

(b)　設三角形之兩角相等，則其對邊相等。

(c)　設三角形之兩邊不等，則其對角不等，等等。

(d)　兩三角形爲全等設一三角形之兩邊及夾角，等等。

(e)　設四邊形之對邊相等，則其對角相等。

習題2. 於命題 XXVII 之圖內，

$\angle AVD+\angle DVB<\angle AVC+\angle CVB$，

習題3. 設於四面角 $V\text{-}ABCD$ 內，$\angle AVB=\angle AVD$ 又 $\angle BVC=\angle CVD$，於是二面角 VD=二面角 VB.

習題4. 設四面角之相對面角相等，則其相對之二面角相等。

習題5. 平行線在一平面上之射影平行。

習題6. 平分補隣二面角之平面彼此互為垂直。

習題7. 一線之長為其在一平面上射影之二倍，問此線對於平面之傾角為何？

習題8. 設三面角之三個面角相等，則其三個二面角相等。

習題9. 設三面角之三個面角為直角，則其三個二面角為直二面角（一個三直角三面角）。

習題10. 設一直線交二平行平面，則此直線與二平面作成等角。

習題11. 對頂多面角彼此對稱。

習題12. 求與三面角之三面等距離之點之軌跡。

習題13. 求與不在一平面上四點等距離之點之軌跡。

習題14. 設 X 在平面 MN 內，P 為 MN 外一點，PX 等於已知長，問點 X 之軌跡為何？

習題15. 設四邊形四角之和等於四直角，則其頂點在一平面上。

習題16. 設 D 為三面角 $V\text{-}ABC$ 內一點，於是

$\angle AVD+\angle BVD+\angle CVD>\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle BVC+\angle CVA)$.

習題17. 過一已知點作一線平行於一已知平面。

習題18. 何時一直角之射影為一直角？何時為一銳角？何時為一平角？

習題19. 於 563 節下之例題內，證平面 BVD 垂直於平面 VAC.

復習

習題1. 二線平行於一平面，二線互爲平行否？何故？

習題2. 設一直線與一平面皆垂直於同一平面，則此直線與第一平面平行，或在第一平面上。

習題3. 設一平面通過平行四邊形之一對角線，則自其他對角線端所作垂直於此平面之垂線必相等。

習題4. 已知空間一點及兩不相交之直線，證過此點大概僅能有一直線過此二線，陳述其例外情形。

習題5. 設一直線垂直於相交二平面之一平面，證此垂線在他平面上之射影必垂直於二平面之交線。

習題6. 求一已知三面角內與其稜等距離之一切點的軌跡。

習題7. 設自二面角內任何點作垂線於其面，證此二垂線所定之平面必垂直於二面角之稜。

習題8. 三平面角爲20°，80°，及150°，此諸角將作成一三面角否？何故？

習題9. 所有距兩相交線等距離之點之軌跡爲何？距兩平行線等距離之點之軌跡爲何？兩不平行又不相交者爲何？

習題10. 由二面角內任何點作垂直線於其面。證二垂線所作之角與二面角之平面角爲補角。

習題11. 設二平行線段射影於相同平面，證其射影之比，如二線段之比。

習題12. 諸平行平面於一截線上截等距離者，必於任一截線截等距離。

習題13. 作一平面交一銳二面角之面，使其交線作成一直角。

習題14. 以一平面截一四面多面角之四面，使其截面爲一平行四邊形。

習題15．求在平面內與空間三已知點等距離之一點。

習題16．於一已知平面內，决定一點使其與此平面同旁二點距離之和爲最小。

√習題17．問距兩已知平面距離之和等於一已知線段之點之軌跡爲何?

習題18．已知空間三直線，作一直線由第一線至第二線且平行於第三線。

習題19．證：設一直線平行於一平面，則線上處處與平面等距離。

√習題20．設於任何三面角之面上作一直線過其頂點且垂直於對稜，證此三線在一平面。

習題21．在長方形屋之一牆有一點 A 在其對牆有一點 B．不必證明而說出在地板上何點與 A 及 B 等距離。

習題22．一直線能垂直於相交二平面之每一平面耶? 何故?

習題23．設舉一直尺平行於黑板，其黑板上之影將平行於直尺否? 何故?

習題24．A 與 B 爲相隔 8 吋之點，問與 A 及 B 等距離且與相隔 10吋之二平行平面等距離之點之軌跡爲何?

習題25．問與二平行平面等距離之點之軌跡爲何?

習題26．過直線內每點，作線平行於一已知直線，證此諸線皆在一平面上。

習題27．三面角之二面角之平分面交於一直線。

習題28．一三角形 6″之底在一平面上，此底上之高爲 4″．設三角形與平面成 60° 之角，問其在平面上射影之面積爲何?

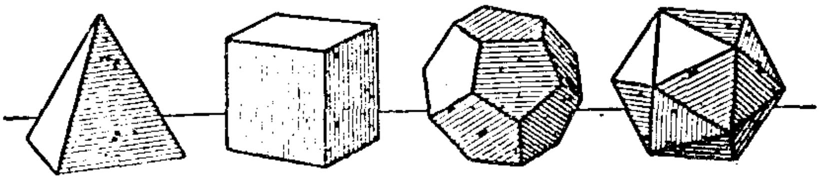
第七篇

多面體，圓柱體，及圓錐體

多面體

564．定義．多面體者由平面多邊形所作成之封口形體也

多面體之界面多邊形爲其面；面之交線爲稜；稜之交點爲頂點。



565．定義．多面體有四面者爲四面體；有六面者爲六面體；有八面者爲八面體；有十二面者爲十二面體；有二十面者爲二十面體。

注意．　一多面體能有之最少面數爲四；因三平面交於一公共點作成一三面角，故更需一平面始能作成一立體。

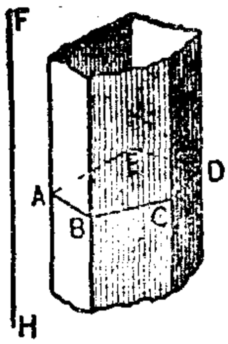
566．定義．　多面體之對角線爲聯結不在同面內任二頂點之直線。

567．定義．凸多面體爲一多面體其各截面爲凸多邊形者也。

注意．　此書中討論之一切多面體皆爲凸多面體。

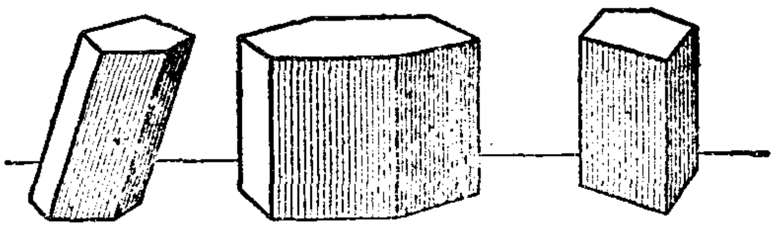
角柱體與平行六面體

568。定義．角柱皮爲一面由一動直線繼續交一已知多邊形（如 $ABCDE$）且平行於不在多邊形平面內之定直線（如 FH）移動而生。



569．定義．角柱體爲一多面體由一角柱皮及截角柱皮之二平行平面而成。平行平面所作之面爲底；角柱皮所作之面爲側面，兩連續側面之交線爲側稜，諸側面面積之和爲側面積，角柱體之高爲底平面間之垂直距離。

顯然所有側面皆爲平行四邊形（486）而諸側稜平行且相等。



570．定義．直角柱體者角柱體之側稜垂直於底平面者也。

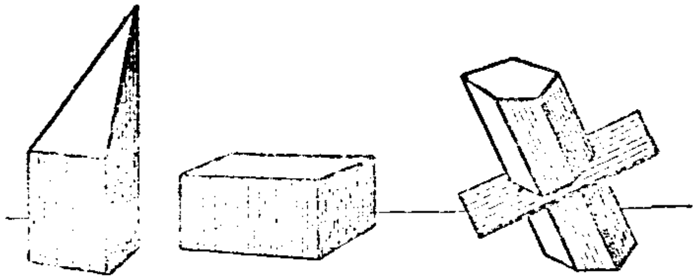
於直角柱體內所有側面皆爲垂直於底之矩形，而所有側稜皆等於其高。

571．定義．正角柱體者直角柱體之底爲正多邊形者也。

572．定義．斜角柱體者角柱體之側稜不垂直於底平面者也。

一角柱體爲三角柱體，四角柱體，等等，依其底爲三角形，四邊形，等等而定。

573．定義．**斷角柱體**者角柱體之一部分夾於一底及不平行於底之平面截諸側稜所作之截面間者也。



574．定義．角柱體之**正截面**爲一截面由垂直於角柱體諸側稜（遇必要時引長之）之平面作成者也。

設一平面垂直於角柱體之一側稜，則垂直於任何側稜 (510).

575．定義．**平行六面體**者角柱體之底爲平行四邊形者也；故其所有之面爲平行四邊形。

576．定義．**直平行六面體**者平行六面體之側稜皆垂直於其底者也。

顯然若平行六面體之一稜垂直於其底，則爲直平行六面體。

577．定義．**長方體**（長方形之立體）者平行六面體之底爲長方形者也；故其所有之面皆爲長方形。

證一平行六面體爲長方體，僅需證其在任一頂點之三角爲三直角已足。

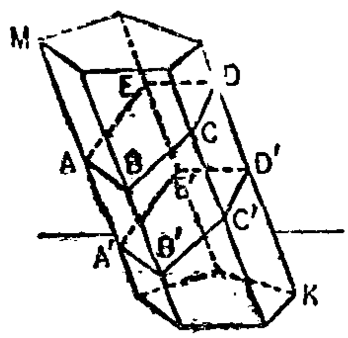
578．定義．**立方體**者平行六面體之所有各面皆爲正方形者也。

習題1．問能作幾對角線於(a)一平行六面體？(b)一五角柱體？(c)一四角柱體？

習題7. 一多面體最少能有幾面？最少能有幾稜？幾頂？

命題I. 定理

579. 諸平行平面截角柱體一切側稜所作之截面爲全等多邊形。



已知 KM，一角柱體爲平行平面 AD 及 $A'D'$ 所交，截其一切側稜。

求證 截面 $AD\cong$ 截面 $A'D'$.

證 $AB\parallel A'B'$，$BC\parallel B'C'$，等等. (486)

$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle BCD=\angle B'C'D'$，等等. (498)

$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CD=C'D'$，等等. (141)

$\therefore$ 截面 $AD\cong$ 截面 $A'D'$. (155)

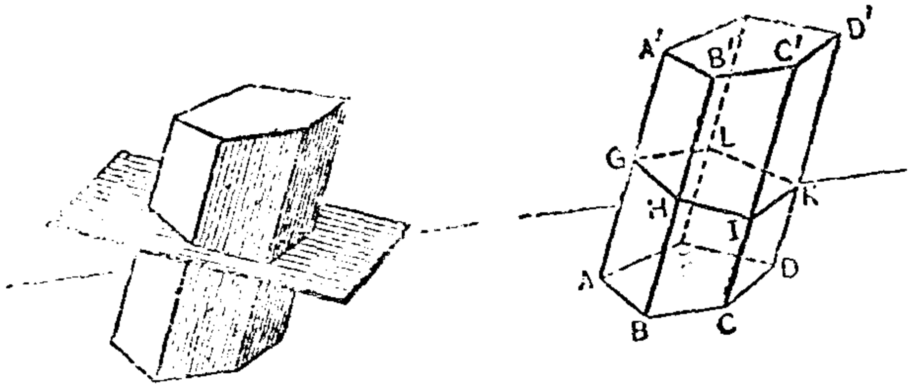
580. 系. 角柱體之兩底爲全等形，且角柱體之截面由平行於底之平面所作者必與底成全等形。

習題1. 於命題I之圖，證通過任二不連續側稜之平面必由角柱體切出平行四邊形。

習題2. 於同圖中，證任何平行於一稜且切角柱體之平面，必由角柱體切出一平行四邊形。

命題II.　定理

581. 角柱體之側面積等於其正截面之周界與一側稜之積。



已知　一角柱體 AD'，L 為其側面積，E 為一側稜，及 P 為正截面 GK 之周界。

求證　$L=P\times E$.

證　$BB'\perp GH$.　(500)

$\therefore$ 面積 $AB'=GH\times BB'=GH\times E$.　(353)

同理　面積 $BC'=HI\times E$，等等.

但　$L=$ 面積 $AB'+$ 面積 $BC'+\cdots$

$=GH\times E+HI\times E+IK\times E+\cdots$

$=(GH+HI+IK+\cdots)\times E$

$=P\times E$.

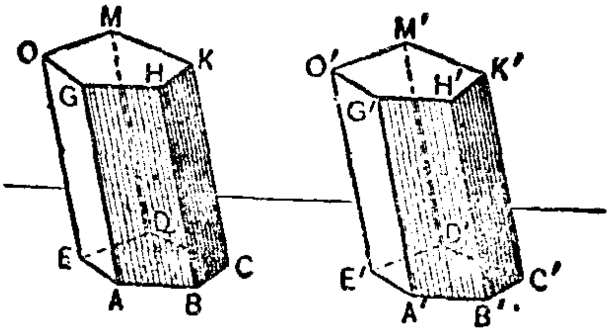
582. 系. 直角柱體之側面積等於底面之周界以其高乘之。

習題1. 求直角柱體之側面積若其高為 15 吋，而其底為一三角形，其邊為 8 吋，10吋，及11吋。

習題2. 求直角柱體之高若其側面積等於 190 平方吋，而其底為一四邊形，其邊為 7 吋，8 吋，11吋，及12吋。

命題III. 定理

583. 設兩角柱體有含一三面角之三面彼此各相等，且各面位於相似位置，則兩角柱體必全等。



已知 角柱體 AM 之面 AD，AH，AO，分別$\cong$角柱體 $A'M'$ 之面 $A'D'$，$A'H'$，$A'O'$，且在相似位置。

求證 $AM \cong A'M'$.

證 $\angle BAE = \angle B'A'E'$，$\angle BAG = \angle B'A'G'$，

$\angle EAG = \angle E'A'G'$. (何故？)

∴三面角 $A \cong$ 三面角 A'. (559)

置三面 $\angle A$ 於 $\angle A'$ 上。

於是面 AD 與面 $A'D'$ 密合，面 AH 與面 $A'H'$ 密合，及面 AO 與面 $A'O'$ 密合。

點 C 落於 C'，而 D 落於 D'. (何故？)

CK 將落於 $C'K'$，而 DM 落於 $D'M'$. (何故？)

點 G，H，與 O 各與 G'，H'，及 O' 密合. (何故？)

∴平面 GM 與平面 $G'M'$ 密合. (481，自理 A)

故點 K 與 K' 密合，而 M 與 M' 密合. (何故？)

∴兩角柱體全然密合而全等.

584．系1．等底與等高之二直角柱體全等。

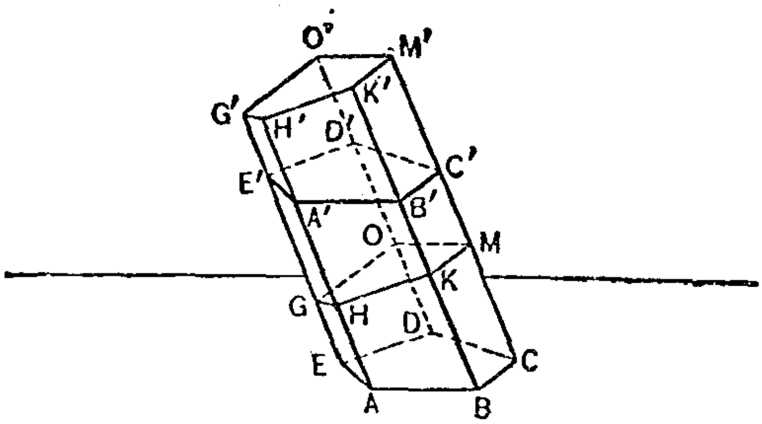
585．系2．二斷角柱體若合於上列定理之假設時，則必全等。

586．定義．任何立體之體積爲其所含單位體積之倍數。體積之單位爲一立方體其稜等於單位長。

587．定義．等積或相等立體爲諸立體之體積相等者也。

命題IV． 定理

588．斜角柱體與以其正截面爲底以其側稜爲高之直角柱體爲等積。



已知 GM，斜角柱體 AD' 之正截面，而 GM'，一直角柱體其高等於 AD' 之一側稜。

求證 $AD'=GM'$.

證 於四邊形 $ABKH$ 及 $A'B'K'H'$ 內，

$AH=A'H'$，$BK=B'K'$. (公理3)

$AB=A'B'$，$HK=H'K'$. (139)

$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle K=\angle K'$，$\angle H=\angle H'$. (106)

$\therefore ABKH\cong A'B'K'H'$. (155)

同理 $BKMC \cong B'K'M'C'$.

但 面 $AD \cong$ 面 $A'D'$. (580)

$\therefore$ 斷角柱體 $AM \cong$ 斷角柱體 $A'M'$. (585)

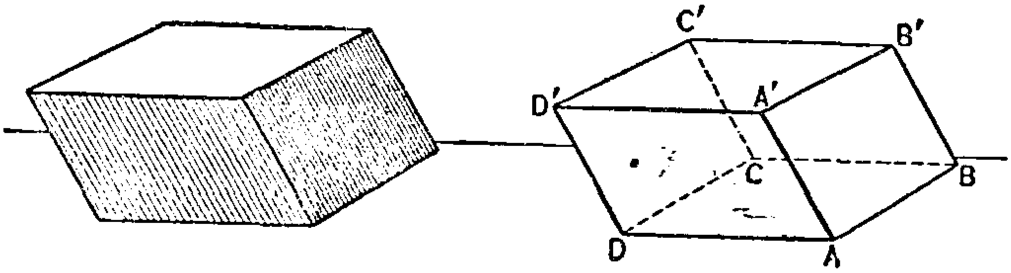
故 $AM' - AM = AM' - A'M'$, (公理3)

或 $AD' = GM'$.

589．系．有全等正截面及相等側稜之諸角柱體必等積。

命題V．　定理

590．平行六面體之相對側面為全等且平行。



已知 AB' 與 DC'，平行六面體 AC' 之對面。

求證 面 $AB' \cong DC'$ 且面 $AB' \parallel DC'$.

證 $AB = $ 且 $\parallel DC$. (575，139)

$A'A = $ 且 $\parallel D'D$.

$\therefore \angle A'AB = \angle D'DC$. (498)

$\therefore$ 面 $AB' \cong DC'$, (147)

且 面 $AB' \parallel DC'$. (494)

591．系．平行六面體之任兩對面可以作底。

√習題1. 於一長方體內，如上圖字母所示，求對角線 AC' 之長，若 $AB=9$，$BC=12$，$CC'=8$.

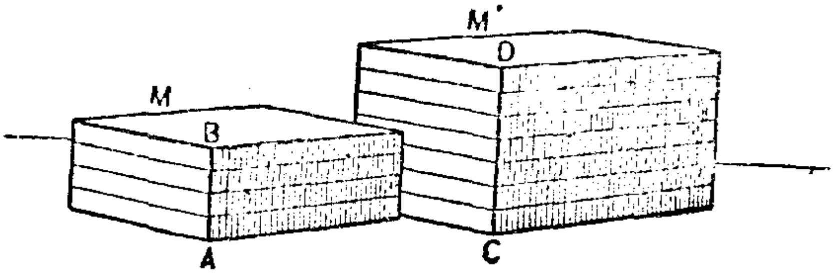
√習題2. 於同樣表示之直平行六體內；求對角線 AC' 之長，若 $AB=5$，$BC=3$，$CC'=2$，及 $\angle ABC=120°$

習題3. 求一直角柱體之全面積設其高爲12吋，而其底爲一三角形，其邊爲13吋，15吋，及4吋。

習題.4 求一直角柱體之全面積設其高爲9吋而其底爲每邊4吋之菱形且有一角爲60°。

命題VI.　定理

592. 等底之二長方體之比如其高之相比。



已知　AB 與 CD，等底之長方體 M 及 M' 之高。

求證　$M : M' = AB : CD$.

例I.　$\frac{AB}{CD}$＝一有理數。

設$\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$，其 m 與 n 爲整數，

即，設分 CD 爲 n 等份，取其一份截 AB，則 AB 含此份之 m 倍。

通過諸分點作平面平行於其底。

〔學者完成之.〕

例II.　$\frac{AB}{CD}$爲一無理數。

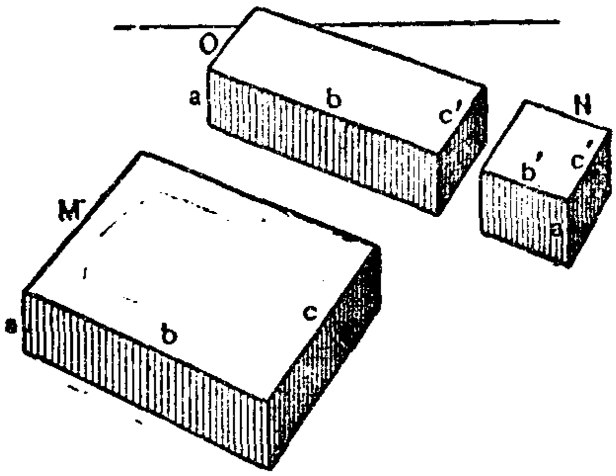
用第四篇命題I之法。

593. 定義. 長方體之三度為過於同一頂點之三稜。

594. 系. 前定理可述為: 有兩公共度之二長方體之比等於其第三度之比。

題命VII. 定理

595. 等高之二長方體之比如其底之相比。



已知 a, b, c 及 a, b', c'，各為長方體 M 及 N 之三度；a 為其等高。

求證 $M:N=b\times c:b'\times c'$.

證 作一長方體 O，其三度為 a, b, 及 c'.

$$\frac{M}{O}=\frac{c}{c'}. \qquad (594)$$

$$\frac{O}{N}=\frac{b}{b'}. \qquad (594)$$

$$\therefore \frac{M}{N}=\frac{b\times c}{b'\times c'}. \qquad (\text{公理}7)$$

596．系．有一公共度之二長方體之比如其他兩度之乘積之比。

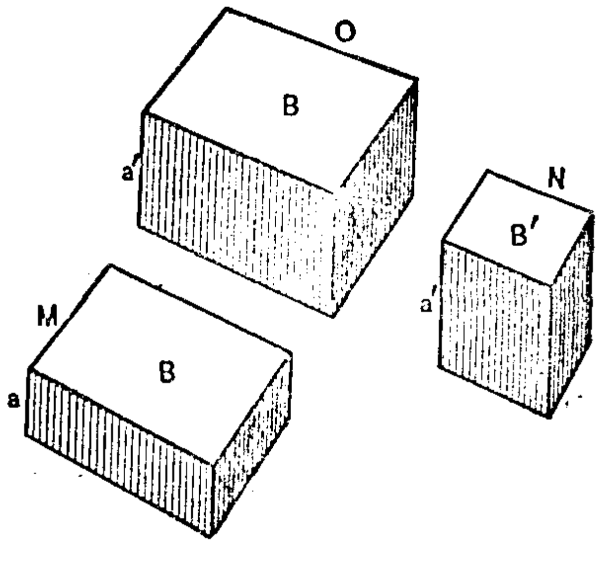
597．注意．三線之乘積，或一面積與一線之乘積，表示此諸量之數量之積。

習題1. 等高之二長方體其底之二度各爲4與7，及5與9，求其體積之比。

習題2. 等底之二長方體其高各爲 a 與 b，問其體積之比爲何？

命題VII.　定理

598．二長方體之比如其底高乘積之比。



已知　二長方體 M 與 N，B 與 B' 爲其底，a 與 a' 爲其高。

求證　$M : N = B \times a : B' \times a'$.

證　作一長方體 O，以B爲底，以 a' 爲高。

$$\frac{M}{O}=\frac{a}{a'}. \qquad (592)$$

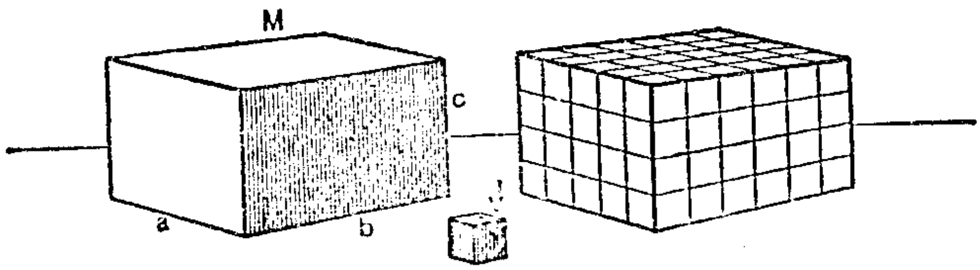
$$\frac{O}{N}=\frac{B}{B'}. \qquad (595)$$

$$\therefore \frac{M}{N}=\frac{B\times a}{B'\times a'}. \qquad (公理7)$$

599．系．二長方體之比等於其三度乘積之比。

命題IX．　定理

600．長方體之體積等於其三度之乘積。



已知　a，b，c，爲長方體 M 之三度．

求證　M 之體積 $=a\times b\times C$.

授意．作 V＝體積之單位，又用命題 VIII.

601．系 1．立方體之體積等於其稜之立方。

602．系 2．長方體之體積等於其高與底之乘積。

習題1. 求一長方體之底面積其高為 6，設此立體與三度為 8，12，及15者之長方體為等積。

習題2. 求一長方體之體積其底之二度為 12 與 20，其全表面積為800.

習題3. 求一長方積之體積其底之二度為12吋與 a 吋，其全表面積為 $(120+34a)$ 方吋。

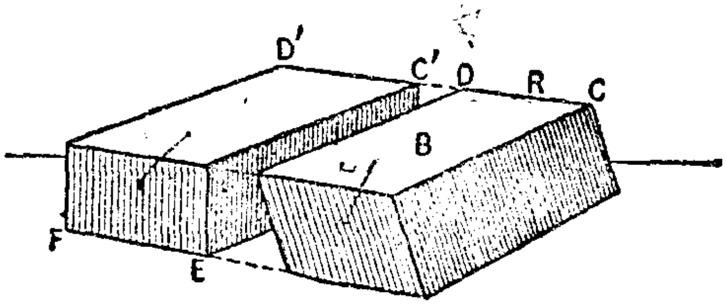
習題4. 兩立方體之稜為 120 吋與 209 吋，求一立方體之稜其表面等於二已知立方體表面之和。

習題5. 一長方體三度之比如3，4，及 5. 設其全表面含 2350 平方吋，求此長方體之三度與體積。

習題6. 求一立方體之體積其對角線等於 $\sqrt{18}$.

命題X. 定理

603. 直平行六面體之體積等於其一側面與其相當高之乘積。



已知 R，為直平行六面體之體積 B 為其一側面，H 為其相當高.

求證　體積 $R=B\times H$.

證　引長 CD 及與其平行之稜，取 $C'D'=CD$，並作平面 $C'E$ 及 $D'F$ 垂直於 $C'D'$，若此作成平行六面體 $C'F$.

於是　體積 $C'F=$ 體積 R.　(588)

但在 C' 之三角皆為直角.　(540)

$\therefore$ $C'F$ 爲一長方體． (577)

故 $C'F=$底×高． (602)

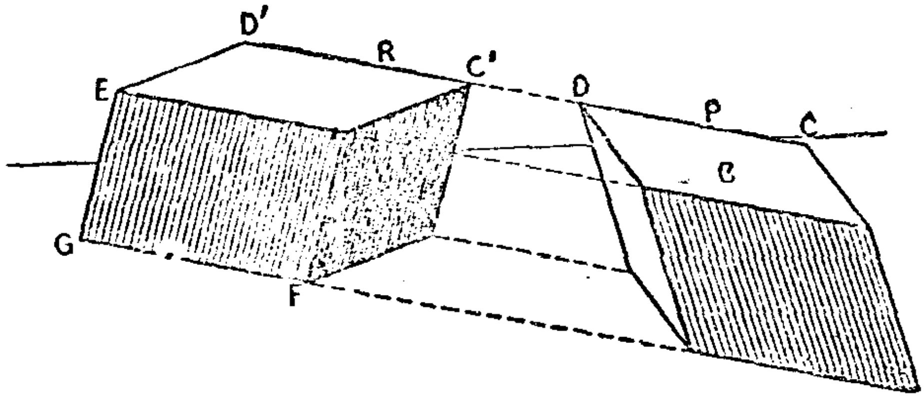
但 $C'F$ 之底$=B$， (354)

而 $C'F$ 之高$=H$． (519)

$\therefore R=B\times H$． (代入)

命題XI． 定理

604． 任何平行六面體之體積等於其底高相乘之積。



已知 P 爲任何平行六面體之體積，B 爲其底，而 H 爲其高。

求證 體積 $P=B\times H$.

證 引長稜 CD 及與其平行之稜，取 $C'D'=CD$，並過 C' 與 D' 作平面 $C'F$ 及 $D'G$ 垂直於 $C'D'$；若此作成平行六面體 R.

$R=P$. (588)

但 R 爲一直平行六面體． (576)

故 $R=EC'\times$ 其高． (603)

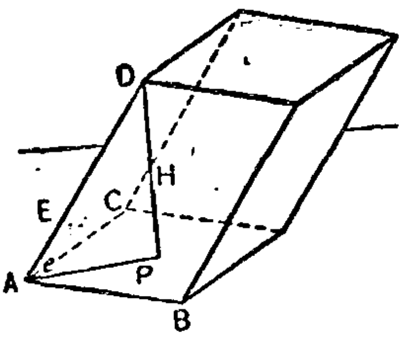
但 $EC'=B$， (354)

又 R 之高$=H$． (519)

$\therefore R=B\times H$． (代入)

故 $P=B\times H$．

605. **注意**. 在任何角柱體內，其側稜 E，高 H，及 E 在底上之射影作成一直角三角形，對 H 之角 e，為 E 與底之傾角。



習題1. 求一平行六面體之體積，其底面積為50，其側稜為 20，設側稜與底之傾角為30°.

習題2. 求一平行六面體之體積，其底面積為20，其側稜為 10，設側稜與底之傾角為45°.

習題3. 於前圖，求平行六面體之體積，設 $AB=6$，$AC=5$，$\angle BAC=30°$，$E=10$，E在底面上之射影等於8.

習題4. 於同圖求平行六面體之體積，設 $AB=5$，$AC=6$，$AD=8$，$\angle BAC=60°$，E 與底之傾角等於60°.

習題5. 求一平行六面體之體積，其底面積為10方呎，設其側稜在底面上之射影等於 2 呎，側稜與底之傾角為60°.

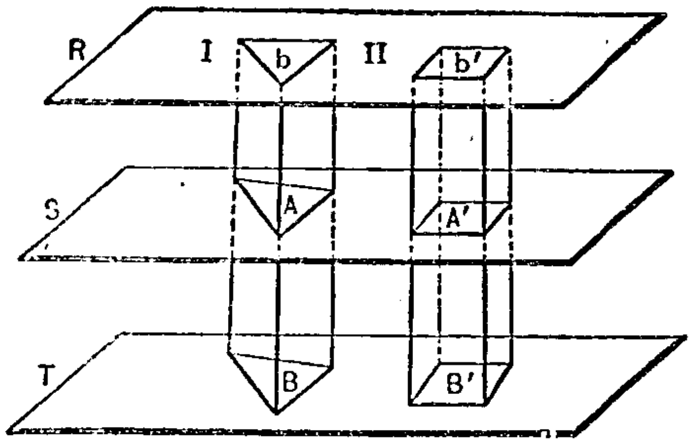
習題6. 一長方槽，5 呎長，4 呎寬，3 呎深，鑲之以鋅，其厚為$\frac{1}{8}$吋，若允許重叠 3 方呎，問需用鋅若干立方呎？

習題7. 設一立方吋之金，椎為金葉，將蓋 20,000 方呎之面，問金葉之厚若干？

習題8. $\frac{1}{2}$吋厚之鐵作為開口之槽，其外面之三度如下：長等於 2 呎，寬 1 呎 6 吋，高 1 呎.若 1 立方呎之鐵重 460 磅，求水槽之重。

習題9. 設 1 立方呎之水重62·5磅，問於1$\frac{1}{4}$吋之雨量有若干噸水降於一英畝之地面。

606. 卡維里爾氏(cavalieri)定理. 設兩立體含於二平行平面之間其平行於此二平行平面之一切相當截面相等，則兩立體有相等之體積。



已知 兩體積如上，且平面 $S\parallel R$ 又 $\parallel T$ 所作諸截面之面積 $A=$ 面積 A'.

於是此定理斷言體積 I＝體積 II.

此定理之證明應用積分始能嚴正。

607. 定理. 底等積且等高之二角柱體其體積相等。

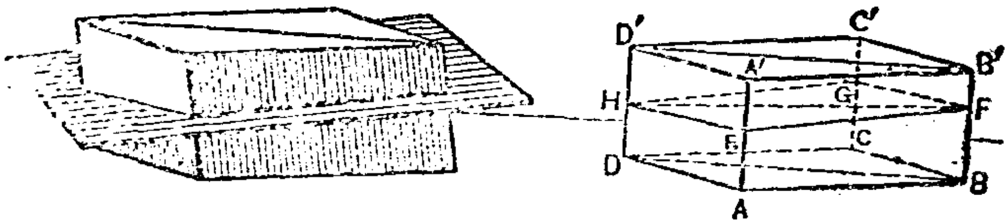
用上圖，得

面積 $B=$ 面積 B'	(題設)
面積 $A=$ 面積 B	(579)
面積 $A'=$ 面積 B'	(579)
面積 $A=$ 面積 A'	(代入)
∴體積 I＝體積 II.	(606)

習題. 用此定理以證命題 XI.

命題XII. 定理

608. 通過平行六面體之兩斜對稜之平面分此體爲兩等積三角柱體。



已知 $BDD'B'$ 爲通過平行六面體 AC' 之稜 DD' 及 BB' 之一平面。

求證 角柱體 $ABD\text{-}A'$ = 角柱體 $BCD\text{-}C'$.

證 作正截面 $EFGH$，交 $DD'B'B$ 於 HF.

平面 AB' ∥ 平面 DC'. (590)

$\therefore EF \parallel HG$. (486)

同理， $EH \parallel FG$.

$\therefore$ $EFGH$ 爲一平行四邊形。

$\triangle EFH \cong \triangle FGH$. (140)

$\therefore$ 角柱體 $ABD\text{-}A'$ = 角柱體 $BDC\text{-}C'$. (589)

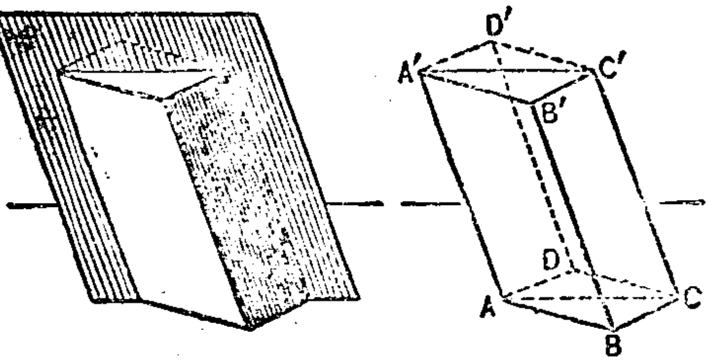
習題1. 設於命題 XII 之圖中，$\triangle ABD = 60$ 方吋，而此立體之高等於10吋，求三角柱體 $A'\text{-}ABD$ 之體積。

習題2. 於一直平行六面體，標字一如上圖，$AB = 6$，$AD = 4$，$AA' = 8$，及 $\angle DAB = 30°$，求三角柱體 $A'-ABD$ 之體積。

習題3. 用卡維里爾氏定理，證命題 XII。

命題XIII. 定理

三角柱體之體積等於其底高相乘之積。



已知 V 表三角柱體 $ABC\text{-}B'$ 之體積，B 表其底，H 表其高。

求證 體積 $V=B\times H$.

證 於稜 AB，BC，BB' 上，作平行六面體 $ABCD\text{-}D'$.

$ABC\text{-}B'=\frac{1}{2}ABCD\text{-}B'$. (608)

$ABCD\text{-}B'$ 之體積 $=$ 底 $ABCD\times H$. (604)

但 $ABCD=2B$.

故 $ABCD\text{-}B'=2B\times H$.

$\therefore V=B\times H$.

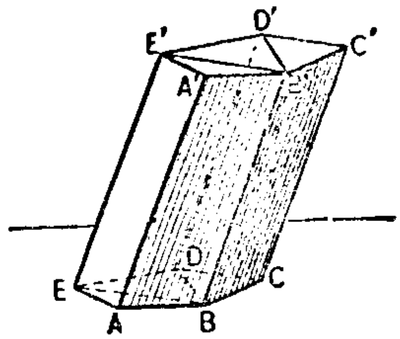
習題1. 於命題 XIII 之圖中，設 $ABC\text{-}B'$ 之體積為 200，其高為 20，求 $\triangle ABC$ 之面積。

∨習題2. 於同圖中，設 $BA=2$，$BC=6$，$\angle ABC=30°$，及$H=7$，求 $ABC\text{-}B'$ 之體積。

習題2. 於同圖，中設$AB=4$,$BC=6$,$BB'=5$,$\angle ABC=60$，及BB'在底上之射影等於4，求$ABC\text{-}B$ 之體積。

命題XIV. 定理

610. 任何角柱體之體積等於其底高相乘之積。



已知 V 表任何角柱體之體積，B 表其底，及 H 表其高。

求證 $V=B\times H$.

證 通過一側稜 BB'，及底之對角線 BE，BD，等等，作諸平面。

此角柱體將分爲諸三角柱角，每三角柱體將以 H 爲其高。

$$B'\text{-}ABE=H\times(ABE). \quad (何故？)$$

$$B'\text{-}BDE=H\times(BDE)，等等.$$

$$\therefore V=H\times(ABE+BDE+\cdots) \quad (何故？)$$

或 $$V=H\times B.$$

611. 系1. 底等積之兩角柱體之比等於其高之比。

612. 系2. 等高之兩角柱體之比等於其底之比。

613. 系3. 等高且底等積之兩角柱體必等積。

習題1. 求一正四角柱體之體積，設其底之邊為4，其側稜為6.

習題2. 求一正六角柱體之體積，設其底之邊為2，其側稜為5.

習題3. 求一正六角柱體之高，設其底之邊等於4，其體積等於60$\sqrt{3}$.

習題4. 求一正三角柱體之積體，設其底之邊為8，其高為10.

習題5. 求一直三角柱體之體積，設其側稜為9，其底之邊為6，8，及10.

習題6. E為直四角柱體之側稜，而$ABCD$為其底，設$AB=9$，$BC=12$，$CD=14$，$DA=13$，$AC=15$，及$E=10$，求體積。

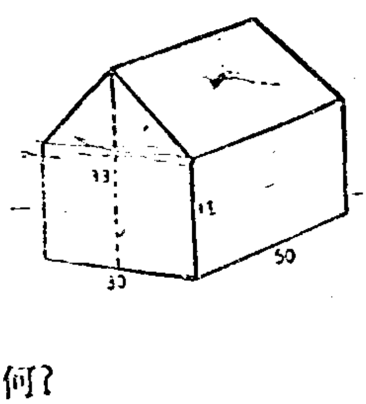
習題7. 求一三角柱體之體積，設其底之邊為6，4，及4，側稜$E=8$，E對於底之傾角為30°.

習題8. E為角柱體之側稜，p為E在其底上之射影，而s為其底之邊，設$E=7$，$p=1$，$s=1$，而底為一正六邊形，求體積。

習題9. 在命題XIV之圖內，設$V=200$，$ABCDE=25$，AA'在底上之射影為6，求AA'.

習題10. 在命題XIV之圖內，設$ABCDE=15$，AA'在底上之射影等於3，AA'與底之傾角等於45°，求角柱體之體積。

習題11. 於同圖中求AA'與底之傾角，設$AA'=6$，$ABCDE=20$，及$V=60$.



習題12. 平行六面體之對角線彼此平分。

習題13. 求建築物內有多少立方呎之空氣其三度如附圖所示。

習題14. 問前題所述房屋之全表面積為何？

復 習

習題1. 立方體之對角線為 $8\sqrt{3}$. 求立方體之體積與其全面積。

習題2. 斷直三角柱體之三側稜為 8″, 9″, 與 12″, 其底之邊各為 12″, 27″, 25″. 求側面積。

習題3. 直角柱體之底為一菱形，其一邊為10吋，短對角線為12吋。角柱體之高為15吋。求其體積。

習題4. 高 7 吋之角柱體之底為一正六邊形，其邊為 4 吋；角柱體之稜與高成 60° 之角，求角柱體之體積。

習題5. 證一立方體之體積等於其對角線之立方乘 $\frac{1}{9}\sqrt{3}$.

習題6. 已知二點 A 與 B 各在二相交平面 M 與 N 內. 求 M 與 N 之交線內一點 Z，使 $AZ+ZB$ 將為最小。

習題7. 三平面角為120°, 80°, 165°. 此諸角將作成一三面角否? 何故?

習題8. 一等二面角之三面角亦等面角，反言之亦然。

習題9. 設 M 與 N 為由一點 P 至二平面之垂線足，證此二面之交線垂直於平面 MNP.

習題10. 設二直線在一平面上之射影平行，證此二線不必為平行。

習題11. 在一平面上求對平面外一已知直線成直角之諸點之軌跡，並證何時此軌跡成為一點，何時消滅。

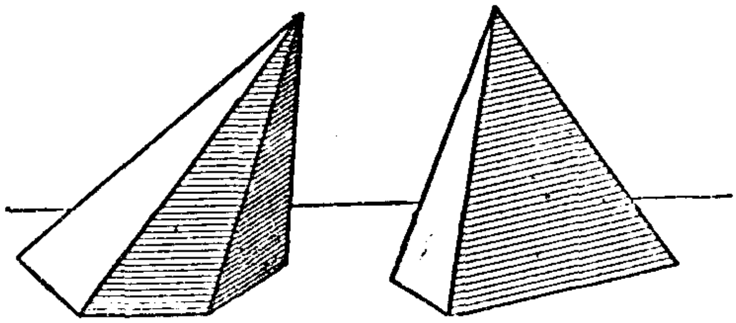
習題12. 一立方體之對角線及其不相遇之一稜間之最短距離為一面上對角線之半。

習題13. 設 MA, MB, MC 為一平行六面體之稜，MD 為一對角線，於是 MD 為平面 ABC 分於三等分點。

習題14. 設一四面體之三對對稜相等，則其諸面為銳角三角形。

習題15. 設一四面體與一平面之公共截面為一平面四邊形，則此平面平行於一對稜。

角錐體



614．定義．角錐體為一多面體以一多面角諸面及交其各面之一平面為界者也。

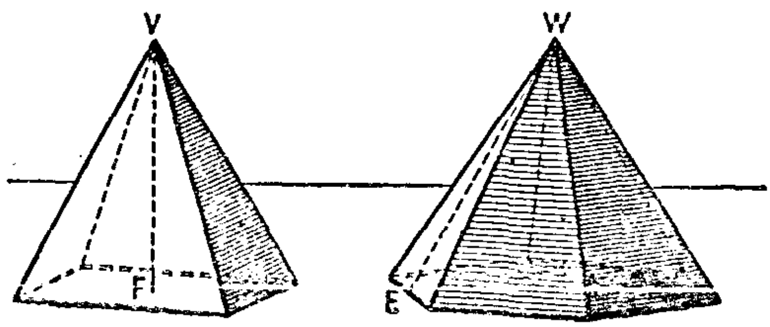
顯然，遇於多面角之頂之各面皆為三角形，其餘之面為一多邊形。

615．角錐體之頂為多面角之頂，其諸側稜為多面角之諸稜，諸側面為遇於頂點之諸三角形，其側面積為諸側面面積之和，其底為對頂點之面。

616．定義．角錐體為一三角錐體，四角錐體，等等，依其底為一三角形，四邊形，等等而定。

注意．四面體為一三角錐體。

617．定義．角錐體之高為由角錐體之頂至底平面之垂線之長，如 VF．



618．定義．正角錐體爲一角錐體其底爲一正多邊形，而多邊形之中心與高之垂足密合者也。

正角錐體又稱爲直角錐體。

619．定義．正角錐體之軸爲過頂點而垂直於底之直線。

正角錐體之諸側稜相等，因其由高之垂足截出等距離故也。

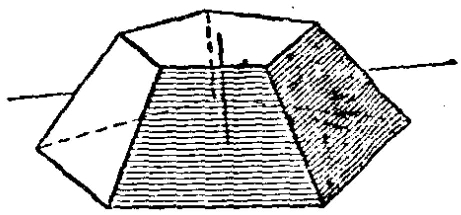
故一正角錐體之諸側面爲相等之諸等腰三角形。

620．定義．正角錐體之斜高爲任一側面之高，如 WE.

（頁61之圖）

621．定義．斷角錐體爲角錐體之一部分含於底及截其諸側稜之平面所作之截面間者也。

622．定義．角錐體之平行斷錐爲一斷角錐體其截面平行於其底者也。



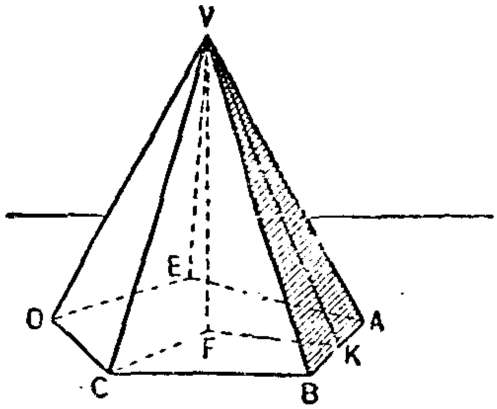
623．定義．平行斷錐之高爲其兩底間之垂直距離。

624．定義．平行斷錐之側面積爲其諸側面面積之和；正角錐體之平行斷錐之側面爲相等之等腰梯形。

625．定義．正角錐體之平行斷錐之斜高爲作成側面之梯形之高。

命題XV. 定理

626．正角錐體之側面積等於其斜高乘底之周界之半。



已知 $V\text{-}ABCDE$ 爲 n 側面之正角錐體，P 爲底之周界，L 爲側面積，S 爲其斜高。

求證 $$L=\frac{P\times S}{2}.$$

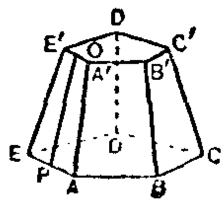
證 $\triangle VAB=\triangle VBC=\triangle VCD$，等等. (619)

$$\triangle VAB=\frac{AB\times S}{2}.$$

$$\therefore L=\frac{n\times AB\times S}{2},$$

或 $$L=\frac{P\times S}{2}.$$

627．系．正角錐體之平行斷錐之側面積等於兩底周界和之半乘以斜高。



授意．側面之形狀爲何？

628．關於正角錐體之許多計算中，直角三角形之三種形式最爲重要，(閱命題XV之圖．) 此諸形式可用三角形 VKF，VAK，與 VFC 說明之．$\triangle VKF$ 含 S，H，r，$\angle f$．$\triangle VAK$ 含 E，S，$\frac{s}{2}$．$\triangle VFC$ 含 E，H，R，$\angle e$．

此處所用記號表示:	此後所用其他少數記號:
E = 側稜.	B = 底面積 (若有兩底時則爲下底).
H = 立體之高.	b = 上底面積.
S = 斜高.	L = 側面積.
s = 底之邊.	V = 體積.
r = 底之邊心距.	T = 全面積.
R = 底之半徑.	h = 下底三角形之高.
$\angle e$ = E 與底之傾角.	h' = 上底三角形之高.
$\angle f$ = 側面與底之傾角.	s' = 上底之邊.
	r' = 上底之邊心距.
	R' = 上底之半徑.

求下形之側面積:

習題1．正三角錐體若 $s=6$，與 $S=4$．

習題2．正四角錐體若 $s=8$，及 $H=3$．

習題3．正八角錐體若 $E=13$，及 $s=10$．

習題4．正四角錐體若 $E=8$，及 $\angle e=30°$．

習題5．求正三角錐體之全面積若 $s=2$，及 $S=3$．

習題6．求正六角錐體之全面積若 $s=4$，及 $H=2$．

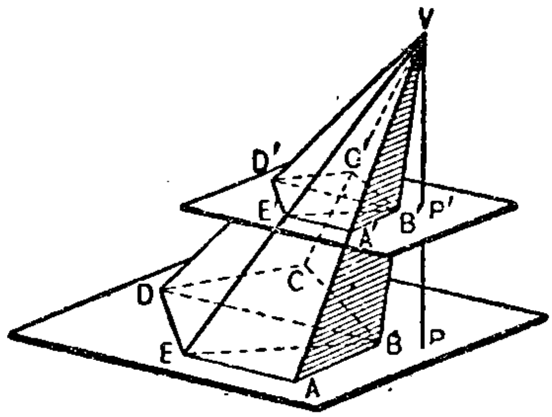
習題7．求正五角錐體之斜高若 $L=90$，及 $S=3$．

命題XVI.　定理

629．設一角錐體爲與其底平行之一平面所截則：

(1) 其諸側稜與高分成比例.

(2) 其截面爲與其底相似之多邊形.



已知　角錐體 $V\text{-}ABCDE$，爲一平行於其底之平面所截，交諸側稜於 A'，B'，C'，D'，E'，及其高 VP 於 P'.

1.　**求證**　$\dfrac{VA'}{VA}=\dfrac{VB'}{VB}=\cdots\dfrac{VP'}{VP}$.

作一平面經過 $V \parallel$ 底，此可由 (495) 直接得出.

2.　**求證**　$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

證　過 VB 與 VE 作平面交平行平面各於 BE 及 $B'E'$. 同理求 BD 與 $B'D'$.

$AB \parallel A'B'$，$BE \parallel B'E'$，及 $EA \parallel E'A'$.　(486)

$\therefore \angle ABE = \angle A'B'E'$，$\angle BEA = \angle B'E'A'$.　(498)

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$，　(305)

同理　$\triangle BED \sim \triangle B'E'D'$，等等.

$\therefore ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.　(316)

630．系1．角錐體平行於底之截面與其底相比等於由頂至截面距離之平方與角錐體之高之平方相比。

由△VAB及$VA'B'$之相似性，知

$$AB : A'B' = VA : VA' = VP : VP',$$

但 $$ABCDE : A'B'C'D'E' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$$
$$= \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2.$$

631．系2．設兩角錐體有等高與等積之底，則由平行於底且與頂點等距離之諸平面所作之諸截面，必等積。

授意．設B為等底之面積，b與b'為截面之面積，於是

$$B : b = \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2,$$

且 $$B : b' = \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2,$$ （用275）

習題1．正三角錐體之高為12呎，其底之每邊為4呎，求平行於底且距頂4呎之平面所作截面之面積。

習題2．正四角錐體之底之每邊為3呎，其高為8呎，求距頂3呎且平行於底之平面所作截面之面積。

習題3．正六角錐體之底之邊長10吋，設其高為5吋，問一平面必距頂點若干遠始能作一截面使其面積為$3\sqrt{3}$？

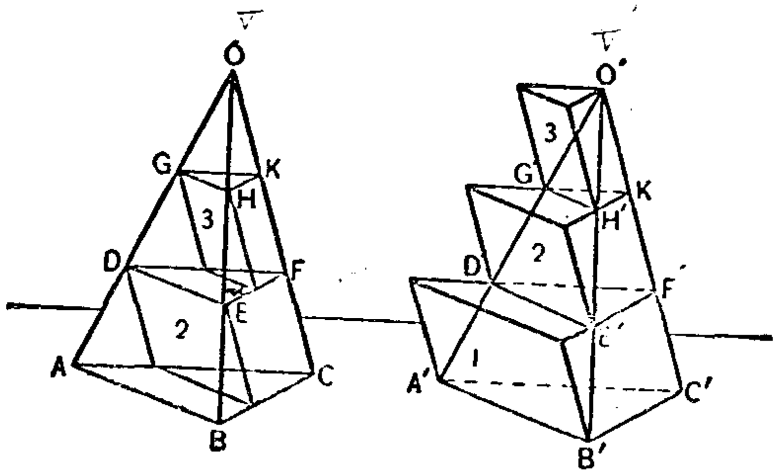
習題4．求一正三角錐體之平行斷錐之側面積，設$S=6$，$s=4$，及$s'=3$.

習題5．求一正四角錐體之平行斷錐之側面積，設$s=12$，$s'=4$，及$H=3$.

習題6．稜為4″之立方體之角為過該頂上諸稜之中點之一平面切下，此等方法在立方體之每角反復作之，求所餘立體之表面積。

命題XVII.　定理

632. 底等積且等高之兩三角錐體必等積。



已知　兩三角錐體 $O\text{-}ABC$ 與 $O'\text{-}A'B'C'$ 有等積之底，等高，且其體積各為 V 及 V'.

求證　$V = V'$.

證　假設 $V' > V$.

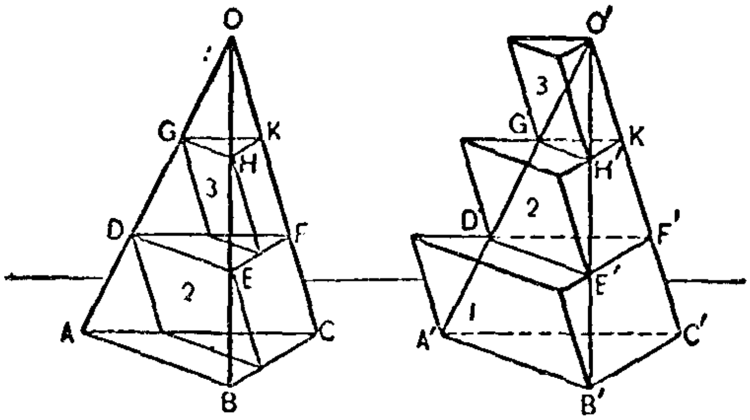
置角錐體使其底在一平面內，

分其高為 n 等份，稱每份之長為 h.

過諸分點作諸平面平行於底.

如此所作之相當截面必等積.　(631)

在底 $A'B'C'$ 上，並於 $O'\text{-}A'B'C'$ 之每一平行截面上作為下底，作一角柱體使其側稜平行於 $O'C'$ 且其高等於 h. 於 $O\text{-}ABC$ 之每一截面上作為上底作一角柱體使其側稜平行於 OC 且其高等於 h.



O-ABC之每一角柱體與O'-$A'B'C'$內上一層之角柱體爲等積，故兩組角柱體之差即爲O'-$A'B'C'$內之最下角柱體．增加每角柱體之高之等分數目，則每份h，以故O'-$A'B'C'$內最下角柱體之體積，能以減小至無限，或設P'與P表兩組角柱體之體積，則$(P'-P)$之極限$=O$．

但 $P'>V'$， （公理11）

而 $P<V$． （公理11）

$$\therefore P'-P>V'-V'.$$[1]

雖然，設V'大於V，則$V'-V$將爲一正量，或一正量而小於漸近零以爲極限之一量，此爲不可能．

$\therefore V'$不大於V．同理可證角錐體V不大於角錐體V'．

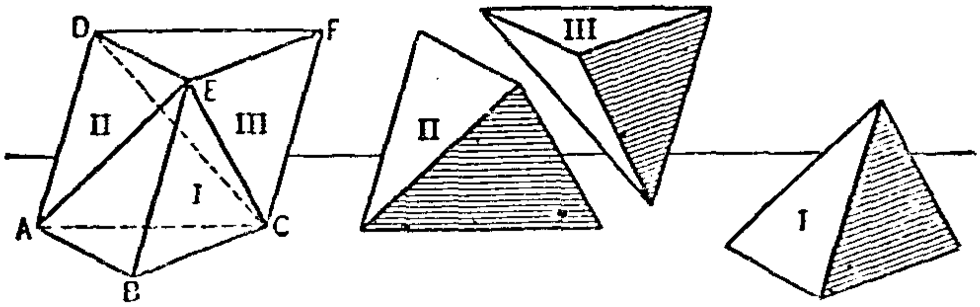
$$\therefore V=V'.$$

習題． 用卞維里爾氏定理証此定理。

1．此處所含之原理雖能由其他公理誘導而出，即：設不等量減不等量而其次序不同，則餘數不等，但此爲一公理的原理也。

命題XVIII. 定理

633. 三角錐體之體積等於其底高乘積之三分之一。



已知 V 爲三角錐體 $E\text{-}ABC$ 之體積，B 爲其底，H 爲其高.

求證 $V=\frac{1}{3}B\times H$.

證 於 ABC 上作角柱體 $ABC\text{-}DEF$，其側稜與 EB 相等且平行。

此角柱體爲角錐體 $E\text{-}ABC$ 及四角錐體 $E\text{-}ACFD$. 所組成。

通過 ED 與 EC 作平面截 $ACFD$ 於 DC，作成兩三角錐體，$E\text{-}DCF$ 與 $E\text{-}ADC$.

今表示 $E\text{-}ABC$，$E\text{-}ADC$，與 $E\text{-}DCF$ 之體積各以 I，II，及 III.

以 C 當作公共頂點，則角錐體 I 與 II 有等高及等底。 (140)

$$\therefore \text{I}=\text{II}. \qquad (632)$$

以 E 當作 II 與 III 之頂點，依同理即得

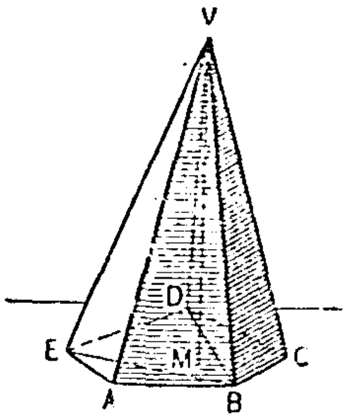
$$\text{II}=\text{III}.$$

$$\therefore \text{I}=\text{II}=\text{III}.$$

故， $\text{I}=\frac{1}{3}$ 角柱體 $ABC\text{-}DEF$.

所以 $V=\frac{1}{3}B\times H.$ (609)

634. 任何角錐體之體積等於其底高乘積之三分之一。



因作平面通過底之相當對角線之任何稜則角錐體分為諸三角錐體，皆有公共高 VM，或 H.

$$V\text{-}ABE = \tfrac{1}{3} H \times ABE.$$

$$V\text{-}BED = \tfrac{1}{3} H \times BED, \text{等等}.$$

$$\therefore V\text{-}ABCDE = \tfrac{1}{3} H (ABE + BED + \cdots).$$

$$V\text{-}ABCDE = \tfrac{1}{3} H \times B.$$

635. 系2. 兩角錐體體積之比如其底與高之乘積之比。

636. 系3. 底等積之兩角錐體之比如其高之相比，等高之兩角錐體之比如其底之相比。

637. 系4. 等高且底等積之兩角錐體必等積。

√習題1. 求一三角錐體之體積，設其底等於20，其一側稜等於12，此稜與底之傾角為 30°.

習題2. 求一三角錐體之體積，其高等於8，其底之邊等於14，15，及13.

√習題3. 求一角錐體之高其底為一正方形，設其體積等於72，其底之邊等於6.

習題4. 求一正六角錐體之體積，設 $s = 6$，與 $H = 8$.

（閱628之記號）

習題5. 求一正三角錐體之體積，設 $s = 4$，與 $H = 6$.

√習題6．求一正四角錐體之體積設 $s=6$，與 $S=5$.

√習題7．求一正四角錐體之體積設 $S=12$，與 $\angle f=30°$.

√習題8．求一正六角錐體之體積設 $E=12$，與 $\angle c=30°$.

習題9．求一正四角錐體之體積設 $E=11$，與 $H=7$.

習題10．求一正六角錐體之體積設 $E=7$，與 $s=1$.

√習題11．求一正四角錐體之體積設 $S=4$，與 $\angle f=45°$.

習題12．求一正四角錐體之側稜設 $V=336$，與 $H=7$.

√習題13．金字塔（吉澤王朝之尖塔）之底爲 233 公尺之正方形，高爲 146.5 公尺．計算其體積，及重量，假定其質料之平均重量爲每立方公尺 3 噸。

習題14．問一立方體之對角線與其在底上之射影作成何角？

√習題15．一平面平行於一四面體之兩對稜且交四面體，則截成一平行四邊形。

習題16．於一長方體中，證四對角線彼此相等。

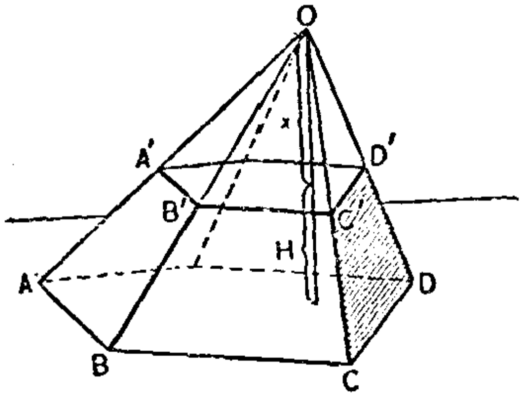
√習題17．聯四面體每頂至其對面諸中線交點之線必相遇於一點分每線爲二部分成 3:1 之比。

習題18．角錐體之側面積大於其底之面積。

√習題19．正角錐體之體積等於其側面積與由底之中心至一側面之距離之三分之一之積。

命題XIX. 定理

638. 設H表一角錐體之平行斷錐之高，B表下底之面積，b表上底之面積，則其體積等於$\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$



證　引長平行斷錐之側稜直至其遇於O，且表上部角錐體之高以x.

顯然，
$$V=(O\text{-}ABCD)-(O\text{-}A'B'C'D')$$
$$=\tfrac{1}{3}B(H+x)-\tfrac{1}{3}bx \qquad (633)$$
$$=\tfrac{1}{3}\{BH+Bx-bx\}.$$
$$V=\tfrac{1}{3}\{BH+x(B-b)\}.$$

求x之值，視察下列之比例
$$B:b=(H+x)^2:x^2. \qquad (630)$$
$$\therefore \sqrt{B}:\sqrt{b}=H+x:x. \qquad (287)$$
$$\therefore \sqrt{B}-\sqrt{b}:\sqrt{b}=H:x. \qquad (282)$$
$$\therefore x=\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

以此值代入　$V=\frac{1}{3}\{BH+x(B-b)\}.$
$$V=\tfrac{1}{3}\left\{BH+\frac{H\sqrt{b}(B-b)}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{3}H\{B+\sqrt{b}(\sqrt{B}+\sqrt{b})\}$$

或
$$V=\tfrac{1}{3}H\{B+\sqrt{Bb}+b\}.$$

習題1. 求一三角錐體之平行斷錐之體積，設下底爲9，上底爲4，高爲5.

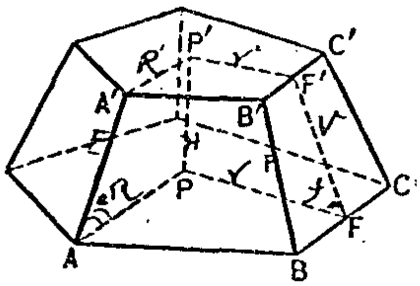
習題2. 求一正四角錐體之平行斷錐之體積，設下底之稜爲7，上底之稜爲6，而其高爲8.

習題3. 一角錐體之平行斷錐之上底爲2，下底爲 18，設其體積爲260，求其高。

習題4. 一正三角錐體之平行斷錐之底之邊爲 8 與6，而其高爲9，求其體積。

習題5. 一正六角錐體之平行斷錐之底之邊爲 4 與2，而其高爲3，求其體積。

639. 注意. 於較雜之平行斷錐例題中，三梯形甚爲重要，即 $APP'A'$，$FPP'F'$，及 $BFF'B'$ (附圖).



用 (628) 之記號，

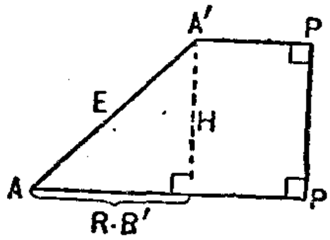
$APP'A'$ 含 H，E，R，R'，$\angle e$.

$FPP'F'$ 含 H，S，r，r'，$\angle f$.

$BFF'B'$ 含 S，E，$\frac{s}{2}$，$\frac{s'}{2}$.

因每一四邊形含二直角，設三部分爲已知，其餘各部可以求得。

解一梯形常過一頂點作一線平行於其對邊而解所得出之三角形。



習題6. 求一正六角錐體之平行斷錐之體積，設 $s=10$，$s'=6$，及 $E=5$.

習題7. 求一正四角錐體之平行斷錐之體積，設 $S=13$，$r=11$，及 $r'=7$.

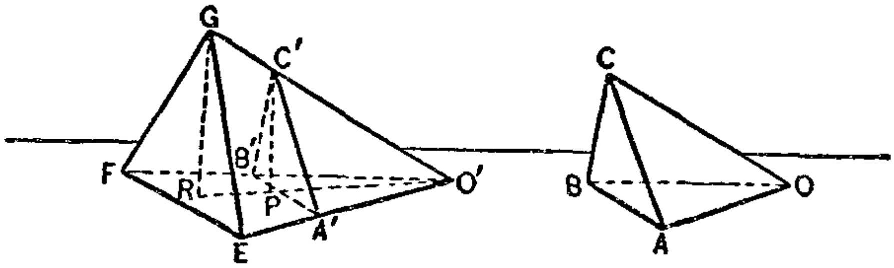
習題8. 求一正五角錐體之平行斷錐之側面積設 $s=11$，$s'=5$，及 $E=5$.

習題9. 求一正六角錐體之平行斷錐之側面積設 $s=10$，$s'=8$，$E=4$.

習題10. 克略裴查氏針 (Cleopatra's Needle) 爲一埃及方尖塔已移置紐約中央公園中，此塔爲四角錐體之平行斷錐高64呎，底爲每邊 8 呎之正方，頂爲每邊 5 呎之正方，其上更置高 7 呎之角錐體，求其體積及重量。(假定一立方呎之重爲 165 磅).

命題XX。　定理

640。兩三角錐體有一三面角彼此各相等則其體積之比，如三面角之三稜連乘積之相比。



已知　V 與 V' 為三角錐體 $O\text{-}ABC$ 及 $O'\text{-}EFG$ 之體積，其相等三面角為 O 與 O'.

求證　$\dfrac{V}{V'}=\dfrac{OA\times OB\times OC}{O'E\times O'F\times O'G}$.

證　放角錐體使三面 $\angle O$ 與三面 $\angle O'$ 密合。

作 $C'P$ 與 GR 垂直於面 $O'FE$，並設 $C'P$ 與 GR 所定之平面交面 $O'EF$ 於線 $O'PR$.

因 $O'A'B'$ 與 $O'EF$ 為角錐體 $C'\text{-}O'A'B'$ 及 $G\text{-}O'EF$ 之底，而 $C'P$ 與 GR 為其高.

$$\frac{V}{V'}=\frac{\triangle O'A'B'\times C'P}{\triangle O'EF\times GR}=\frac{\triangle O'A'B'}{\triangle O'EF}\times\frac{C'P}{GR}. \qquad (635)$$

$$\frac{\triangle O'A'B'}{\triangle O'EF}=\frac{O'A'\times O'B'}{O'E\times O'F} \qquad (377)$$

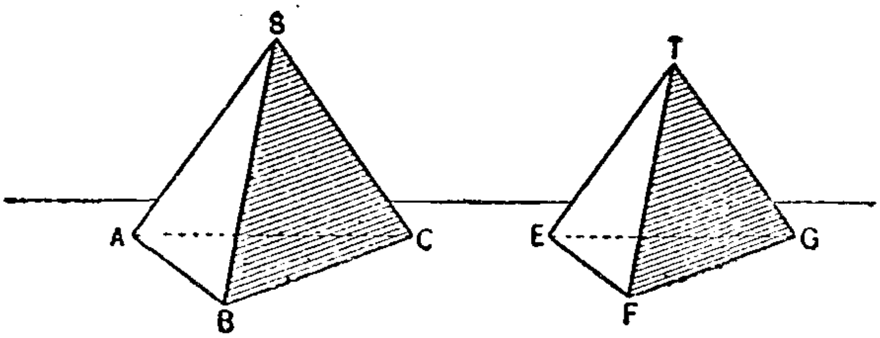
$$\frac{C'P}{GR}=\frac{O'C'}{O'G} \qquad (何故?)$$

$$\therefore\frac{V}{V'}=\frac{O'A'\times O'B'}{O'E\times O'F}\times\frac{O'C'}{O'G}=\frac{OA\times OB\times OC}{O'E\times O'F\times O'G}. \qquad (何故?)$$

641．定義．相似多面體者多面體有同數之面，彼此各相似，且在相似位置，而其諸多面角相等者也。

命題XXI． 定理

642．兩相似四面體之體積之比等於其兩相當稜之立方之比。



已知 V與V'為相似四面體 $S\text{-}ABC$ 與 $T\text{-}EFG$ 之體積。

求證 $\frac{V}{V'}=\frac{\overline{SB}^3}{\overline{TF}^3}=\frac{\overline{SA}^3}{\overline{TE}^3}$，等等．

證 三面$\angle S=$三面$\angle T$． (641)

$$\frac{V}{V'}=\frac{SB\times SC\times SA}{TF\times TG\times TE}\text{或}\frac{SB}{TF}\times\frac{SC}{TG}\times\frac{SA}{TE}. \quad (640)$$

但 $$\frac{SB}{TF}=\frac{SC}{TG}=\frac{SA}{TE}. \quad (\text{何故？})$$

$$\therefore \frac{V}{V'}=\frac{\overline{SB}^3}{\overline{TF}^3}. \quad (\text{何故？})$$

習題1．於命題XXI之圖內，設 $SA=3$，及 $TE=2$，求V與V'之比。

習題2．於同圖中求TF，設 $SB=2$，及 $V:V'=1:2$．

正多面體

643. 定義. 正多面體 者多面體之各面皆爲相等之正多邊形，而其各多面角亦皆相等者也。

於命題 XXII 內證明僅有五種多面體爲可能，即四面體，八面體，立方體，二十面體與十二面體.（閱頁 40 及頁 77 之圖.）

命題XXII. 作圖題

644. 決定能作之正凸多面體之數.

一凸多面角至少必有三面，其諸面角之和必小於 360°.（558）

1. 一凸多面角可由聯合三，四，或五等邊三角形而成，因等邊三角形之每角爲 60°，則如此六角之和爲 360°，即大於一凸多面角諸面角之和矣。

故以**等邊**三角形爲面而作正凸多面體有**三**種爲可能。

2. 一凸多面角可由聯合三正方形而成，但不能由四或更多之正方形而成。（何故？）

故以**正方形**爲面而作正凸多面體有一種爲可能。

3. 一凸多面角可由聯合三正五邊形而成，但不能由四，等等，五邊形而成。（何故？）

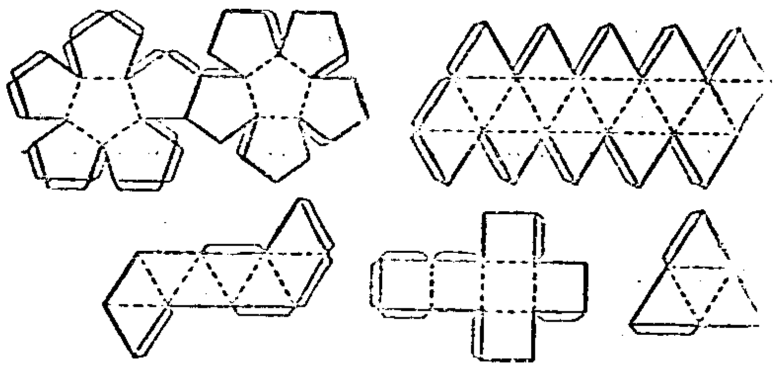
故以**正五邊形**爲面而作正凸多面體有一種能作。

4. 由聯合正六邊形，正七邊形，正八邊形，等等而作一凸多面角爲不可能.（何故？）

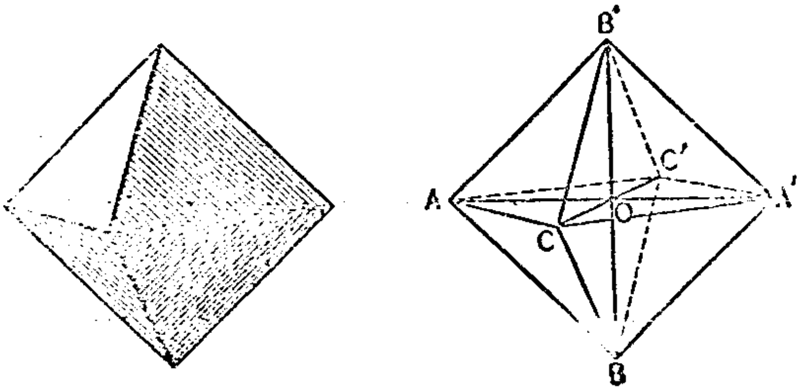
故僅有五種正凸多面體爲可能：即**四面體**，**八面體**，**二十面體**（以等邊三角形爲面），**六面體**或**立方體**（以正方形爲面），

及十二面體(以正五邊形爲面)：

645．作正多面體，可於硬紙或厚紙上作下圖，於虛線上半切之，摺疊之並使其稜接觸以窄紙條粘之。



習題1．設三等線 AA'，BB'，與 CC' 之中點在一點 O，且每線垂直於其他二線，於是諸點 A，B，C，A'，B'，C'，決定一正八邊形．(線



AA'，BB'，與 CC'，稱爲八邊形之軸)．

習題2．設八邊形之一稜等於 2 吋，求諸軸之長(AA' 等等)。

習題3．設八邊形之一稜等於 4 吋，求此立體之體積與表面積。

習題4．一角錐體底之三邊各爲 10，17，與 21．設其高爲 5，求其體積。

習題5 一角錐體底之三邊各爲 9，10，17. 設一側稜爲 20，而其在底上之射影等於 12，求其體積。

習題5. 一角錐體之側稜等於 10，其與底之傾角爲30°. 設角錐體之體積爲 100，求其底面積。

習題7. 一角錐體之底爲一菱形其對角線各爲10與 12. 設其高爲6，求體積。

習題8. 平行六面體之對角線分此體爲六個等積角錐體。

習題9. 設於平行六面體內任何點聯線至其 8 頂，則作成 6 個角錐體，其中任兩相對角錐體體積之和等於其他任兩相對角錐體體積之和。

習題10. 三角錐體之每稜等於 10，求其體積。

習題11. 正角錐體之三角形底之周界爲 30. 設其高爲 12，求其體積。

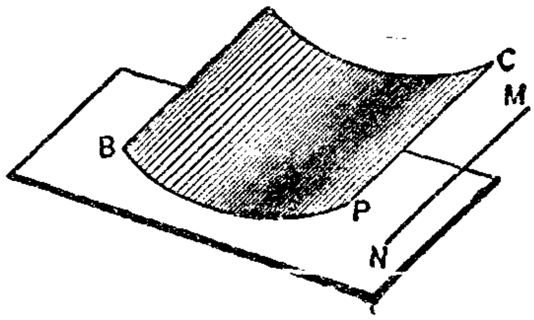
習題12. 一角錐體之底爲一平行四邊形，其底爲10，高爲8. 設其一側稜等於6，且與底作成 45° 之角，求其體積。

習題13. 一角錐體之底爲一長方形，其邊各爲 a 及 b. 一側稜等於 c，而其與底之傾角爲 30°，求體積。

習題14. 一角錐體之底爲 b，與底 a.高 h 之另一角錐體等積，求其高。

圓柱體

646. 定義. 圓柱皮爲一面，由一直線繼續交一定曲線且常與不在此曲線平面內之一定直線平行，移動而生者也。



647. 定義. 其動線爲柱皮之母線；其

已知曲線爲**準線**；在任何位置之動線爲柱皮之**織造線**。

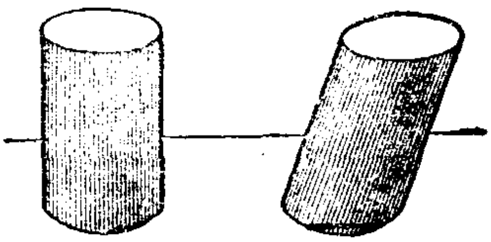
648. **定義.** **圓柱體**者由一圓柱皮及截其織造線之二平行平面作成之形體也；圓柱體之兩**底**爲平行平面之界以圓柱皮之部分，圓柱體之**側面**爲圓柱皮之夾於二平行平面間之部分。

圓柱體之諸織造線相等因其爲夾於∥平面間之∥線也。

649. **定義.** **正圓柱體**爲一圓柱體其底爲正圓者也。

650. **定義.** **直圓柱體**爲一圓柱體其織造線垂直於其底者也。

651. **定義.** **斜圓柱體**爲一圓柱體其織造線傾斜於其底者也。

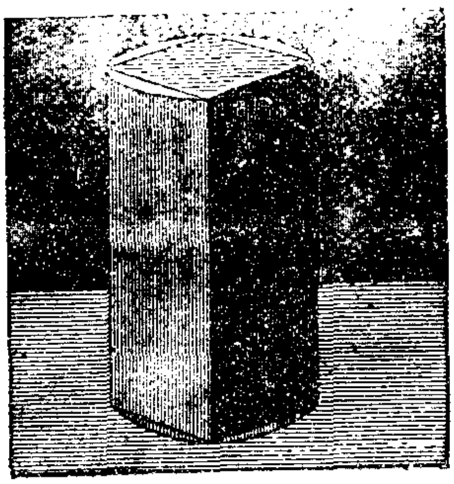


直圓柱體　　斜圓柱體

652. **定義.** 圓柱體之**高**爲其兩底間之垂直距離。

653. **定義.** 設一線觸圓柱體之側面於一點但引長之後亦不相交則爲圓柱體之**切線**；設一平面含圓柱體之一織造線而不交圓柱體則爲圓柱體之**切面**。

654. **定義.** 設角柱體之側稜爲圓柱體之織造線而其底內接於圓柱體底，則爲圓柱體之**內接體**。

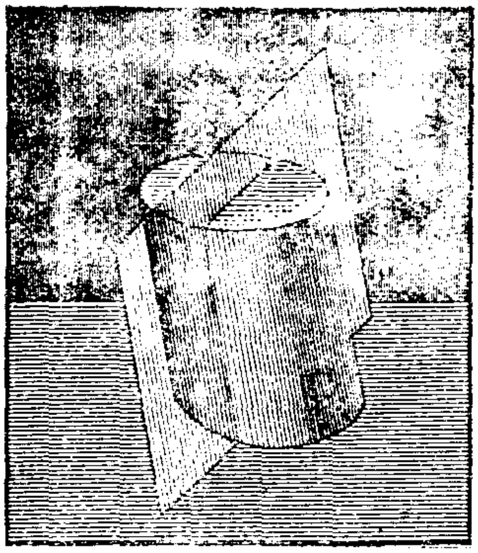


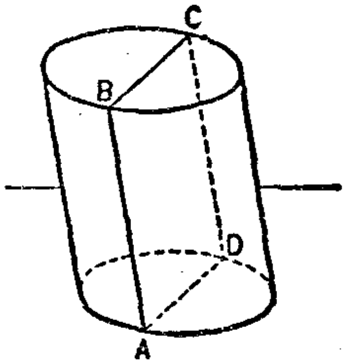
內接角柱體

655．定義．**圓柱體之截面**爲圓柱體與一平面相交而成之圖形；**正截面**爲垂直於織造線之一平面所作之截面。

命題XXIII． 定理

656．圓柱體之截面爲通過其織造線之一平面所作者爲一平行四邊形。





已知 $ABCD$ 爲過織造線 AB 之平面與圓柱體 AC 所作之截面。

求證 $ABCD$ 爲一平行四邊形。

證 於平面 AC，過 D，作一線 $\parallel AB$.

此線爲圓柱體之織造線。 (646)

因此線在平面 AC 並爲圓柱皮之織造線，故必爲其交線，是以與 DC 密合。

$\therefore DC$ 爲 $\parallel AB$ 之一直線。

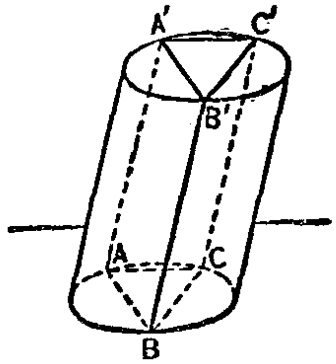
又 AD 爲 $\parallel BC$ 之一直線。 (何故？)

$\therefore ABCD$ 爲一平行四邊形。 (何故？)

657．系．直圓柱體之截面爲通過其一織造線所作者爲一矩形。

命題XXIV. 定理

658. 圓柱體之兩底全等。



已知 ABC 與 $A'B'C'$ 爲圓柱體 BC 之兩底。

求證 底 $ABC \cong$ 底$A'B'C'$.

證 設 A 與 B 爲下底內之二點，及 C 爲下底內之任一他點，且 AA'，BB'，CC' 爲相當織造線。

作 $\triangle ABC$ 及 $A'B'C'$.

AB'，BC'，及 CA' 爲 ▱. (656)

故 $AB = A'B'$，$BC = B'C'$，$CA = C'A'$.

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. (s.s.s. = s.s.s.)

置上底於下底之上，使 $A'B'$ 與 AB 密合，於是 C' 必與 C 密合，但因 C' 爲上底周界內任一點，故上底內之諸點，與其下底內之諸相當點密合；反言之，下底內諸點與其上底內之諸相當點密合。

$\therefore$ 兩底爲全等。

659. 系 1. 截圓柱體一切織造線之任二平行截面爲全等。

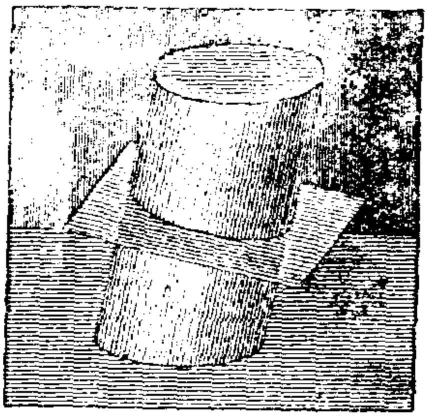
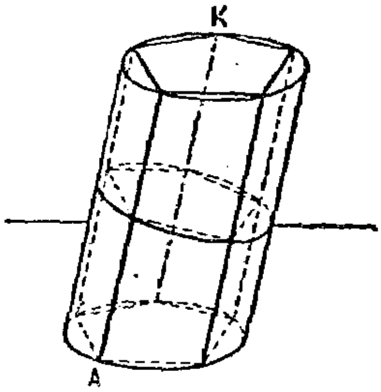
660. 系 2. 圓柱體之任一截面平行於底者與底爲全等。

661. 定義。設圓柱體之內接角柱體之側面數目無限增加則圓柱體之側面積爲其內接體側面積漸近之極限。

設圓柱體之內接角柱體之面數無限增加則圓柱體之體積爲其內接體體積漸近之極限。

命題XXV. 定理

662. 圓柱體之側面積等於其正截面之周界與其織造線之乘積。

已知 L 爲圓柱體AK之側面積，P 爲其正截面之周界，及 E爲其一織造線；L' 爲內接圓柱體 AK 以正多邊形爲底之角柱體之側面積，P' 爲其截面之周界。

求證 $L=P\times E.$

證[1] 內接角柱體之稜與圓柱體之織造線密合。

$$\therefore L'=P'\times E. \qquad (581)$$

設內接角柱體之面數增加，L' 將漸近 L 以爲極限，而 P' 將漸近 P 以爲極限。

$$\therefore L=P\times E. \qquad (414)$$

1. 閱頁 96，701 節.

663．定義．旋成圓柱體為一直圓柱體，因其可由一矩形繞其一邊為軸旋轉而成也。

664．定義．相似旋成圓柱體者，乃諸圓柱體之由相似矩形繞其相當邊為軸旋轉而成者也。

665．系1．旋成圓柱體之側面積為其底之圓周與其高之乘積。

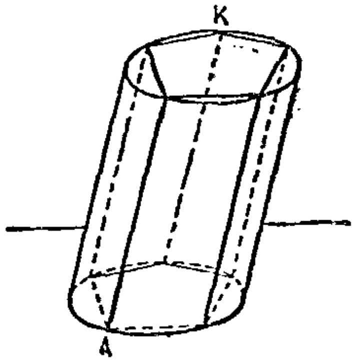
666．系2．設 L 表旋成圓柱體之側面積，T 表其全面積，H 表其高，及 R 表其半徑，則

$$L=2\pi RH，與\ T=2\pi R(H+R).$$

習題．求一旋成圓柱體之全面積，設 $H=6$，與 $R=2$.

命題XXVI．　定理

667．圓柱體之體積等於其底高相乘之積。



已知　V 為圓柱體 AK 之體積，B 為其底，及 H 為其高；V' 為圓柱體 AK 之內接角柱體之體積，B' 為其底之正多邊形。

[1]求證　$V=B\times H.$

授意．用極限定理如前命題。[2]

1．閱頁 410，7_1節。

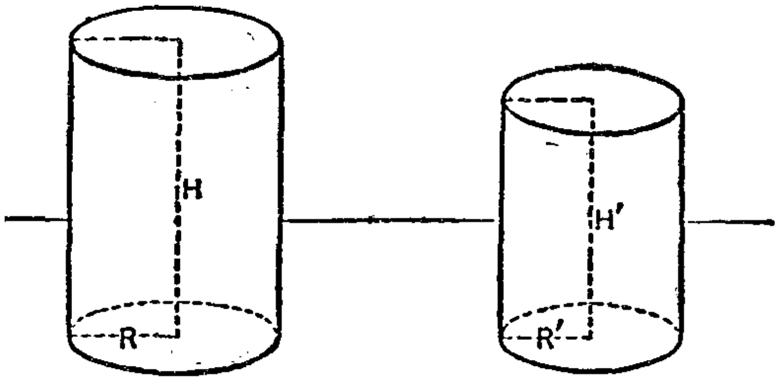
2．設其邊數無限增加，假定 B 為 B' 漸近之極限。

668. 系. 於一旋成圓柱體其底半徑爲 R,

$$V=\pi R^2\times H.$$

命題XXVII. 定理

669. 兩相似旋成圓柱體之側面積，或全面積之比如其半徑之平方之比，或其高之平方之比，而其體積之相比如其半徑之立方之比，或其高之立方之比。



已知　L, L'，爲兩相似旋成圓柱體之側面積；T, T'，爲其全面積；V, V'，爲其體積；R, R'，爲其半徑；及 H, H'，爲其高。

求證　$L:L'=T:T'=R^2:R'^2=H^2:H'^2$,

及　$V:V'=R^3:R'^3=H^3:H'^3$.

證　$$\frac{H}{H'}=\frac{R}{R'}=\frac{H+R}{H'+R'}.\qquad(284)$$

$$\frac{L}{L'}=\frac{2\pi RH}{2\pi R'H'}=\frac{R}{R'}\times\frac{H}{H'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{H^2}{H'^2},\qquad(666)$$

及　$$\frac{T}{T'}=\frac{2\pi R(H+R)}{2\pi R'(H'+R')}=\frac{R}{R'}\times\frac{H+R}{H'+R'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{H^2}{H'^2},\qquad(666)$$

及　$$\frac{V}{V'}=\frac{\pi R^2H}{\pi R'^2H'}=\frac{R^2}{R'^2}\times\frac{H}{H'}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{H^3}{H'^3}.\qquad(668)$$

習題1. 求兩相似旋成圓柱體之體積之比，設其高之比如 3 比4.

習題2. 求一旋成圓柱體之底之半徑，設其側面積等於440，而其高等於 7 (設 $\pi=\frac{22}{7}$).

習題3. 求一旋成圓柱體之底之半徑，設其側面等於三旋成圓柱體側面之和，其半徑為3，4，與5，而此四圓柱體之高相等。

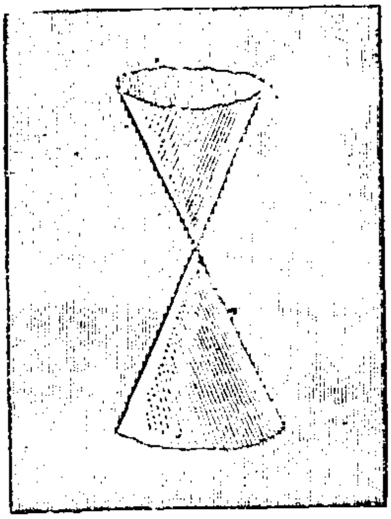
習題4. 兩旋成圓柱體之高相等，而其半徑各為 3 與4.求一等高之第三旋成圓柱體與二已知圓柱體之和為等積。

習題5. 求一圓柱體之體積，設其底之半徑為 3，緣造線 E，等於 4 而 E 與底之傾角為 45°.

圓 錐 體

670. 定義. **圓錐皮**為一面由一直線繼續交一已知定曲線且常通過不在此曲線平面內之一定點移動而生者也。

671. 定義. 移動直線為圓錐皮之 **母線**；已知曲線為其 **準線**；定點為圓錐皮之**頂**。



圓 錐 皮

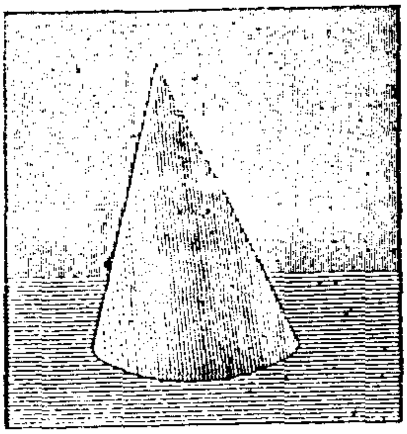
672. 定義. 圓錐皮之織造線爲在任何位置之母線。

673. 定義. 當母線之長爲無限時，則作成之圓錐皮在頂上及頂下之部分稱爲上節及下節。

674. 定義. 圓錐體者一形體以圓錐皮及截其諸織造線之平面作成者也。

675. 定義. 圓錐體之側面爲圓錐皮；圓錐體之底爲其平面；圓錐體之頂爲圓錐皮之頂；圓錐體之織造線爲圓錐皮之織造線。

676. 定義. 正圓錐體者圓錐皮之底爲正圓者也；正圓錐體之軸爲聯其頂及底之圓心之直線。



正圓錐體

677. 定義. 正直圓錐體者爲正圓錐體之軸垂直於其底者也；斜圓錐體者正圓錐體之軸不垂直於其底者也。

注意. 在此書內僅論正圓錐體。

678. 定義. 圓錐體之高爲由頂至底平面之垂線。

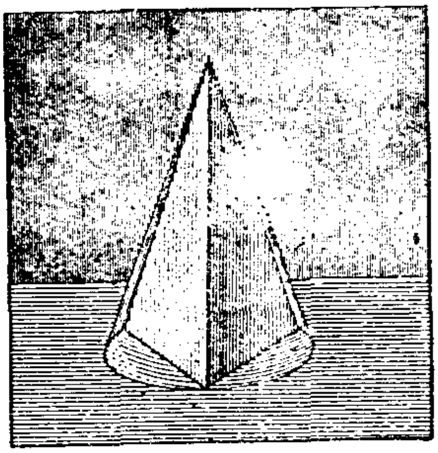
679. 定義. 旋成圓錐體為一正直圓錐體，因後者可由一直角三角形繞其一腰為軸旋轉而成也。

680. 定義. 相似旋成圓錐體者乃由相似直角三角形繞其相當腰旋轉而生之圓錐體也。

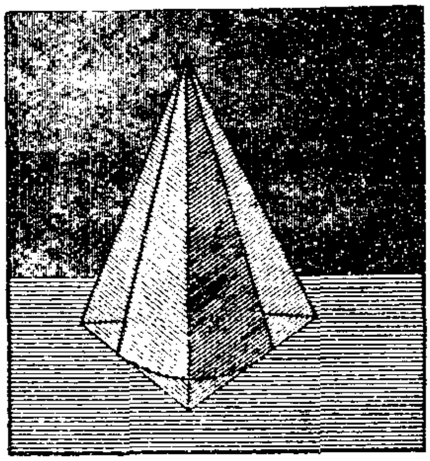
681. 定義. 設一線僅觸圓錐體於一點引長之亦不相交者，則此線切於此圓錐體。

682. 定義. 設一平面含圓錐體之一綫造線而不含其他點者，則此平面切於此圓錐體。

683. 定義. 設角錐體之底內接於圓錐體之底而其頂與圓錐體之頂密合者則此角錐體為圓錐體之內接體。



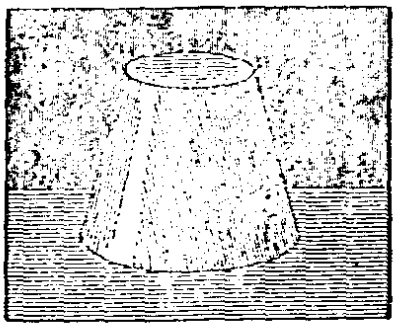
圓錐體之內接體



圓錐體之外切體

684. 定義. 設角錐體之底外切於圓錐體之底而其頂與圓錐體之頂密合者則此角錐體為圓錐體之外切體。

685. 定義. 圓錐體之**平行斷錐**爲圓錐體之一部分含於其底及與其底平行之一平面間者也，平行斷錐之**下底**爲圓錐體之底，其**上底**則爲平面所作之截面。



圓錐體之平行斷錐

686. 設角錐體外切及內接於一圓錐體，而圓錐體之體積爲V，側面積爲L，底面積爲B，底之圓周爲C，且角錐體側面之數無限增加，於是

L 爲外切角錐體之側面積之極限。

V 爲內接角錐體之體積之極限。

B 爲內接角錐體之底之極限。

C 爲外切角錐體之底之周界之極限。

注意。前二敘述可視爲定義；後二則爲假定。

於下節更將假定

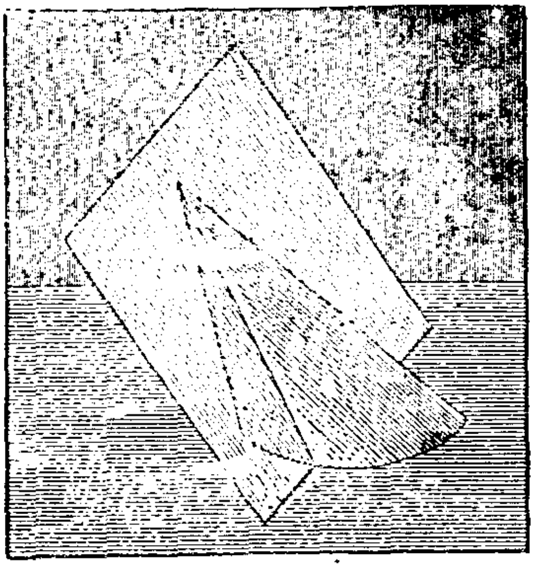
(a) 諸變量之和之極限等於諸變量之極限之和。

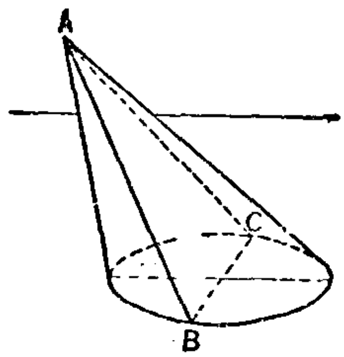
(b) 二變量之積之極限等於其各極限之積，設無一極限爲零時。

所有此四假定根據適當定義俱能證明。

命題XXVIII. 定理

687. 圓錐體之截面為通過其頂之平面所作者為一三角形。





已知 ABC 為通過頂點 A 之一平面，在圓錐體所作之截面。

求證 ABC 為一三角形。

證 聯 A 與 B 為一直線。

此線為圓錐體之一織造線。 (670)

此線位於已知平面內。 (481)

∴此線為圓錐皮與已知平面之交線。

同理即得直線 AC 為圓錐皮與已知平面之交線。

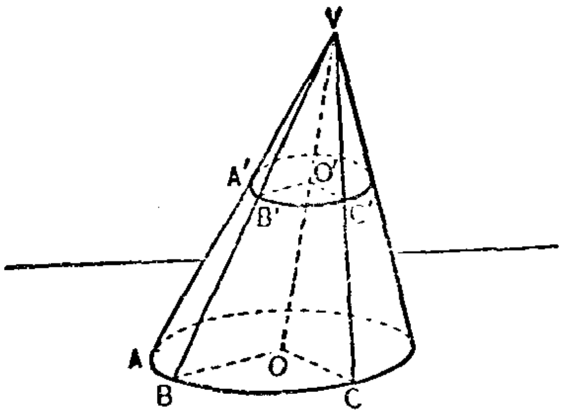
BC 為一直線。 (485)

∴截面 ABC，為一三角形。

688. 系。正直圓錐體之截面為通過其頂之平面所作者為一等腰三角形。

命題XXIX.　定理

689. 正圓錐體之截面爲與其底平行之一平面所作者爲一圓。



已知　$A'B'C'$ 爲圓錐體 V-ABC 與 $\parallel ABC$ 之一平面所作之截面，O 爲底之圓心，與 O' 爲 VO 與平面 $A'B'C'$ 之交點。

求證　$A'B'C'$爲一圓。

證　通過 VO 與定半徑 OB 作平面，又過 VO 與變半徑OC作平面，並設其各交平面 $A'B'C'$ 於 $O'B'$及$O'C'$.

$$OB \parallel O'B'. \qquad (486)$$

$$\therefore \triangle VOB \sim \triangle VO'B'. \qquad (307)$$

$$\therefore \frac{VO}{VO'} = \frac{OB}{O'B'}. \qquad (303)$$

同理 $$\frac{VO}{VO'} = \frac{OC}{O'C'}. \qquad (303)$$

但 $$OB = OC. \qquad (何故？)$$

$$\therefore O'B' = O'C'. \qquad (275)$$

$\therefore A'B'C'$ 爲一圓。

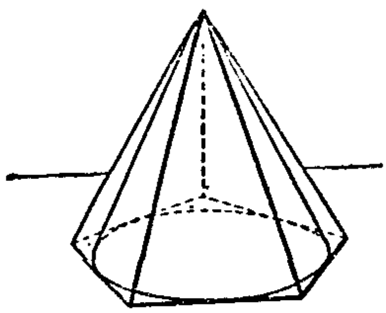
690. 系1. 正圓錐體之軸通過與其底平行之每一截面之中心，或

平行於底之平面與圓錐體所作諸截面之中心之軌跡爲圓錐體之軸。

691．系2．平行於底之平面與正圓錐體所作諸截面之比，等於其半徑平方之比，或等於與錐頂距離之平方之比。

命題XXX． 定理

692．旋成圓錐體之側面積等於其斜高與其底之圓周乘積之半。



已知 L 為圓錐體之側面積，C 為其底之圓周，S 為其斜高；L' 為外切角錐體之側面積，P 為其底之正多邊形之周界。

[1]求證 $L=\frac{1}{2}C\times S.$

授意．外切一角錐體；其斜高為 S．用極限定理。

693．系．設 L 為旋成角錐體之側面積，T 為其全面積，H 為其高，S 為其斜高，R 為其底之半徑，

$$L=\pi R\cdot S.$$
$$T=\pi R(S+R).$$

習題1．求一旋成圓錐體之側面積其半徑為12其高為5。

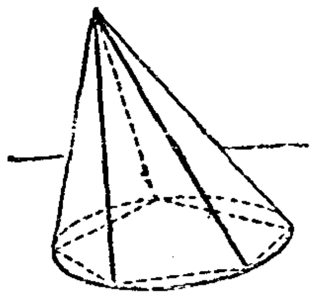
習題2．求一旋成圓錐體之側面積設其旋轉三角形之弦為10时而其每銳角為45°.

習題3．求一旋成圓錐體之高設 $L=36\pi$，與 $R=4$.

1．閱頁96．節701.

命題XXXI. 定理

694. 圓錐體之體積等於其底高乘積之三分之一。



已知 V爲圓錐體之體積，B爲其底，H爲其高；V'爲內接角錐體之體積 B'爲作成其底之正多邊形。

[1]求證 $V = \frac{1}{3}B \times H.$

授意．用極限定理，$V' = \frac{1}{3}B' \times H.$ (633)

695. 系．設圓錐體爲一旋成圓錐體，以R爲B之半徑，於是

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2H.$$

習題1．求一旋成圓錐體之體積其半徑爲6而高爲2.

習題2．求一旋成圓錐體之體積其半徑爲5而其斜高爲13.

習題3．求一旋成圓錐體之側面積設其體積爲314而其高爲3.（設 $\pi = 3.14.$）

習題4．正圓錐體之軸等於17吋，其在底上之射影等於8吋，設其體積等於80 π 求其底之半徑。

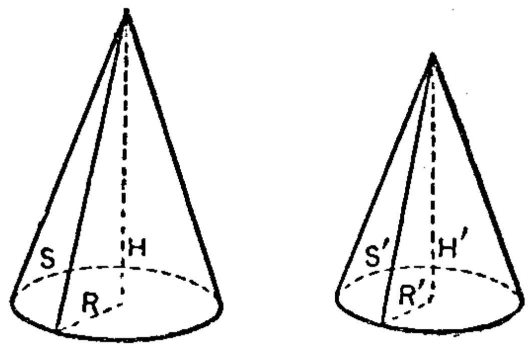
習題5．3吋高之旋成圓錐體，其底之面積爲81 π 方吋，爲平行於底且距底爲2吋之一平面所截，求平行斷錐之體積。

習題6．一木製之圓錐體其頂角等於60°，而其底之半徑等於2吋，半徑一吋之圓柱形孔鑽入全圓錐體，孔之軸與圓錐體之軸密合，問圓錐體之若干部分鑽爲木片？

1．閱 頁96，節701．

命題XXXII. 定理

696. 兩相似旋成圓錐體之側面，或全面積之比，如其高之平方之比，如其半徑之平方之比，或如其斜高之平方之比；而其體積之比如其高之立方之比，如其半徑之立方之比，或如其斜高之立方之比。



已知 L，L' 爲兩相似旋成圓錐體之側面積，T，T' 爲其全面積，V，V' 爲其體積，H，H' 爲其高，R，R' 爲其半徑，S，S' 爲其斜高。

求證 $$L:L'=T:T'=H^2:H'^2=R^2:R'^2=S^2:S'^2,$$

及 $$V:V'=H^3:H'^3=R^3:R'^3=S^3:S'^3.$$

此證明與命題 XXVII 相似。

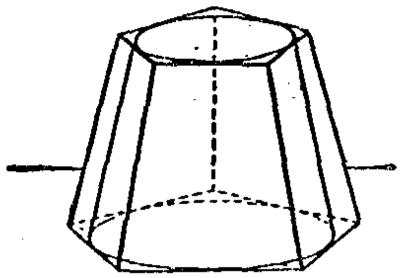
習題1. 求兩相似旋成圓錐體之全面積之比其高爲 (a)12 吋與 24 吋；(b) 5 吋與 d 吋

習題2. 一旋成圓錐體之體積爲 343 立方吋而其高爲 7 吋，求一相似圓錐體之體積，高爲(a) 8 吋；(b) 15 吋。

習題3. 求一直角三角形繞其弦爲軸旋轉所成立體之體積，設其腰各爲 15″與 20″.

命題XXXIV. 定理

697. 旋成圓錐體之平行斷錐之側面積，等於其兩底周界之半和與其斜高相乘之積。



已知 L 爲平行斷錐之側面積，C 與 C' 爲其底之周介，R 與 R' 爲其半徑，及 S 爲其斜高；L' 爲圓錐體之外切正角錐體之平行斷錐之側面積，P 與 P' 爲其底之周介。

求證 $L=\frac{1}{2}(C+C')\times S.$

證[1] 外切角錐體平行斷錐之斜高$=S$. (何故？)

$\therefore L'=\frac{1}{2}(P+P')\times S.$ (何故？)

〔學者完成之， 用極限之定理。〕

698. 系. 旋成圓錐體之平行斷錐之側面積等於與其兩底等距離之截面之周界乘其斜高。

因 $\frac{1}{2}(C+C')=\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi R')=2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right).$

但 $2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right)=$ 與兩底等距離之截面之周界。

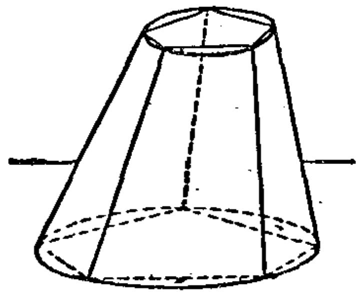
習題. 求一旋成圓錐體之平行斷錐之側面積，設其兩底之半徑各爲6與7，而

(a) 斜高等於3. (b) 高等於12.

1、 閱頁 96，節701，注意。

命題XXXIV. 定理

699. 正圓錐體之平行斷錐之體積等於其兩底及兩底比例中項之和，乘以高之三分之一。



已知 V 爲平行斷錐之體積，B 爲其下底，b 爲其上底，H 爲其高；V' 爲內接角錐體之平行斷錐之體積，B' 爲其下底，b' 爲其上底，兩底俱爲正多邊形。

求證 $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B\times b})$.

證[1] 角錐體之平行斷錐之高 $=H$.

於是 $V'=\frac{1}{3}H(B'+b'+\sqrt{B'\times b'})$. (638)

使內接平行斷錐之面數無限增加，

V' 則爲一變量以 V 爲極限，

B' 漸近 B 以爲極限。

b' 漸近 b 以爲極限，而 $B'\times b'$ 漸近 $B\times b$ 以爲極限。

$\therefore B'+b'+\sqrt{B'\times b'}$ 漸近

$B+b+\sqrt{B\times b}$ 以爲極限。

$\therefore V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B\times b})$. (何故？)

700. 系. 設平行斷錐爲旋成圓錐體之斷錐，以 R 及 R' 爲其底之半徑，則

$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR')$.

1.閱 頁 96，節 701，注意。

注意．前命題可以述爲：

正圓錐體之平行斷錐之體積等於三圓錐體體積之和，其公共高爲平行斷錐之高，其諸底爲平行斷錐之上底，下底，及兩底之比例中項。

因，V 之數值可以寫爲，

$$\tfrac{1}{3}H\times B+\tfrac{1}{3}H\times b+\tfrac{1}{3}H\times\sqrt{B\times b}.$$

習題1．求一正圓錐體之平行斷錐之體積，設 $R=5$，$R'=4$，及 $H=6$．

習題2．一荷蘭風車之石工作物成一孔狀圓錐之平行斷錐，50呎高，其底之外徑爲35呎頂之外徑爲30呎，底之內徑爲30呎頂之內徑爲26呎，問此風車之石有若干立方呎？

習題3．正直圓錐體之平行斷錐之上底與下底之半徑各爲 3 吋與 9 吋；平行斷錐之高爲 8 吋，求(1)斜高，(2)體積．(3)全面積。

習題4．一正直圓錐體之平行斷錐之底各爲 3 吋及 5 吋，其體積等於高 6 吋底半徑 4 吋之正圓錐體之體積，問其高爲何？求至一吋之十分之一。

習題5．於習題 1 內求平行斷錐之側面積。

習題6．一等腰梯形繞聯其二底中心之線旋轉，二底之長各爲6吋及12吋，而旋出之體積爲 105 π 立方吋，求梯形之高。

701．以正多邊形爲底之角柱體（或角錐體）之任何性質，不問其底之邊數爲何，亦爲正圓柱體（或圓體錐）之一性質。

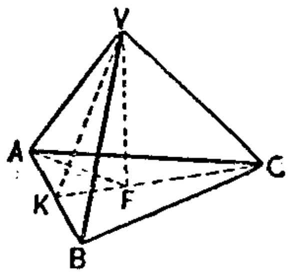
此敘述能用更進之方法證明並能用以證明第七編內之命題 XXV，$XXVI$，XXX，及 $XXXI$．

習題1．應用 701 節之假定，證第七編之命題 XXV，$XXVI$，XXX 及 $XXXI$．

習題2．於 701 節，以"一角錐體之平行斷錐"代"角錐體"，證命題 $XXXIII$ 及 $XXXIV$．

雜　題

習題1. 求一正三角錐體之側稜，側面積，及體積，其底之每邊爲5而其高爲3.



習題2. 求一正六角錐體之平行斷錐之側稜，側面積，及體積，其底之邊各爲14與6，而其高爲8.

設O與P爲下底及上底之中心，作OE與PF分別垂直於BC與GH，作OA，PD，$DM\perp OA$，及$FN\perp OE$.

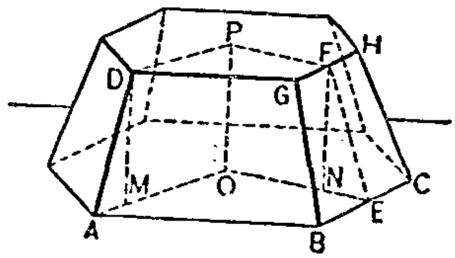
$NE=OE-PF=7\sqrt{3}-3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

$S=FE=\sqrt{\overline{FN}^2+\overline{NE}^2}=\sqrt{64+48}=4\sqrt{7}$.

$AD=\sqrt{\overline{DM}^2+\overline{AM}^2}=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}$.

$L=\frac{6}{2}[(14+6)4\sqrt{7}]=240\sqrt{7}$.

$V=(B+b+\sqrt{Bb})\dfrac{H}{3}=(294\sqrt{3}+54\sqrt{3}+126\sqrt{3})\dfrac{8}{3}=1264\sqrt{3}$



習題3. 設S=正角錐體之底之一邊，n爲其底之邊數，及H爲其高，求其側稜，及體積設

(a) $n=3$， $s=12$， $H=12$.

(b) $n=4$， $s=6$， $H=9$.

1. 於記號，則閱(628).於此及以下例題之解法所根據之原理閱(628)及(639).

習題4.　用前題之記號求側面積設

(a) $s=6$，　$n=3$，　$H=1$.

(b) $s=8$，　$n=4$，　$H=5$.

習題5.　設$s=$平行斷錐下底之一邊，s'爲上底之一邊，n爲底之邊數，及H爲其高，求側面積，及體積設

(a) $s=10$，$s'=6$，　$n=4$，　$H=1$.

(b) $s=8$，　$s'=5$，　$n=4$，　$H=3$.

(c) $s=10$，$s'=6$，　$n=6$，　$H=2$.

習題6.　用前題之記法求側面積設

(a) $s=10$，$s'=2$，　$n=4$，　$H=5$.

(b) $s=6$，　$s'=4$，　$n=4$，　$H=3$.

習題7.　求一正角錐體之V，設$E=11$，$s=12$，及$n=4$.

習題8.　一立方體之全面積爲336方吋，求其體積。

習題9.　直角柱體之側面積爲140，而其底爲一三角形其邊爲5，7，與8，求其體積。

習題10　求一斜角柱體之體積其底爲一正六邊形內接於半徑5吋之一圓，設一側稜爲8吋而其在底平面上之射影爲3吋。

習題11．一角錐體之高爲24，其底爲一正方形，每邊爲10，求距頂4吋且平行於底之截面面積。

習題12．於側稜a上必距頂若干遠作一平面 ‖ 於底，始能分角錐體爲等積之二份?

習題13．以正六邊形爲底之角錐體，其高爲28吋，其底之每邊爲8吋，一截面之面積爲$\frac{3\sqrt{3}}{2}$方吋，求其與頂之距離。

習題14．求一立方體之表面積與體積其每面之對角線爲15吋。

習題15．求一立方體之表面積與體積其對角線爲30吋。

習題16. 直角柱體之底爲四邊形$ABCD$，其$AB=7$吋，$BC=20$吋，$CD=15$吋，$DA=24$吋，且角A與角C爲直角．設角柱體之高爲12吋，求其全面積及體積。

習題17. 一直角錐體與一稜爲10吋之立方體等底等高，求其側面積。

習題18. 長方體之對角線相等。

習題19. 求一正角錐體之平行斷錐之側面積，其高爲15吋，其兩底爲邊長40吋及24吋之正方形。

習題20. 一旋成圓錐體高12吋底之直徑爲16吋，爲一平行於底且距底9吋之一平面所截，求作成之平行斷錐之側面積及體積。

習題21. 四面體兩對對稜之中點可定一平行四邊形。

習題22. 直角柱體之高爲10吋，底爲一正六邊形其邊爲8吋，求由角柱體割出之同軸之最大可能圓柱體之面積與體積。

習題23. 直角錐體之底爲一正六邊形其邊爲20吋，側面與底之傾角爲60°，求其體積。

習題24. 聯四面體對稜中點之線過於一點且互相平分。

習題25. 旋成圓錐體之高爲27吋，其曲面爲底面積之7倍，求底之半徑。

習題26. 求一正六角錐體之體積，設其側稜等於13，其底之邊等於11.

習題27. 求一正四面體之體積與面積其稜等於4吋。

習題28. 求一正四面體之全面積，設由其一頂至對面之垂線爲5吋。

習題29. 立方體之角爲經通過於公共頂點之三稜之中點之平面所切，設立方體之稜爲2呎，求作成之立體之體積。

習題30. 一圓筒池直徑10吋欲使容10加侖，設一加侖等於 231 立方吋，求圓筒之高至十分之一吋。

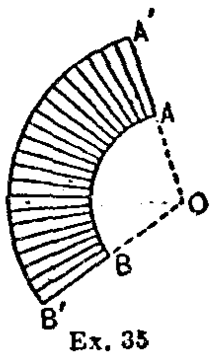
習題31. 求一空圓柱之重量，其長爲 5 呎，外半徑爲 1 呎，厚 1 吋，設柱之質料爲水重之$7\frac{1}{2}$倍（即比重 $= 7\cdot5$），而 1 立方呎之水重 62·5磅。

習題32. 一圓筒狀池，直徑 6 吋，一部盛水，浸入一不規則之物體後，水面升高 2 吋，求物體之體積。

習題33. 一立方吋之白金製成厚$\frac{1}{100}$吋之白金絲可長多少碼？

習題34. 摺叠半徑 5 吋之半圓形紙可作成一圓錐皮，求此而所作成之圓錐體之體積與全面積。

習題35. 摺叠兩同心圓弧及兩半徑之部分所介之面積 $AA'B'B$ 使成圓錐體之平行斷錐之側面其下底等於 36π. 求 $\angle O$，及平行斷錐之體積設 $OA = 5$，而 $OA' = 10$.



Ex. 35

習題36. 摺叠與前題之圖相似之紙而欲得一圓錐體之平行斷錐，其斜高等於5，而其底之半徑各爲 9 與 6，求 OA, OA', 與 $\angle O$.

習題37. 一圓柱形錫罐其頂封閉設其高等於其直徑則需最少量之錫，求似此之罐而能容一夸得（1 夸得 $= 57\cdot75$ 立方吋）者之直徑。

習題38. 一圓錐形幕高 8 呎，設幕布含 $188\frac{4}{7}$ 方呎，問此幕罩地若干方呎？（假定 $\pi = 3\frac{1}{7}$）.

習題39. 一圓錐形瓶其高等於底之直徑含 6 吋深之水，於浸入一立方體後，水面升高 2 吋，求立方體之稜。

習題40. 一圓柱形鍋長 6 呎直徑 2 呎盛水一部分，設水之最深處爲 6 吋而圓柱體之軸在水平位置，求水之體積。

復 習

習題1. 已知 e 爲正四面體一稜之長，證其全面積$=e^2\sqrt{3}$，而體積$=\frac{e^3}{12}\sqrt{2}$.

習題2. 求一正八面體之體積及全面積以其稜 c 表之。

習題3. 二長方形之底各爲 a 與 b，其高各爲 b 與 a，繞其高爲軸旋轉，比較由此所生二正直圓柱體之全面積及體積。

習題4. 一直角三角形繞其每一腰爲軸旋轉，比較由此所生二立體之全面積及體積。

習題5. 設 AB 與 CD 爲不在一平面（傾斜線）之二直線，並設 E 爲 AB 內任一點而 F 爲 CD 內任一點，問 EF 之中點之軌跡爲何？述其理由。

習題6. 一正六邊形，邊$=e$，繞其一長對角線旋轉 360°，以 c 表示其全面積與體積。

習題7. 證：直三角柱體之體積等於任一側面與該面上之高乘積之半。

習題8. 證：設四角柱體之諸對角線經過一公共點，此角柱體爲一平行六面體。

習題9. 證如何作一平面截一立方體使其截面爲一正六邊形。

習題10. 正角柱體之體積等於其側面積及其底之邊心距之半之積。

習題11. 與一平面及垂直於該平面之直線等距離之點之軌跡爲何？

習題12. 側面積相等之二旋成圓柱體之體積之比爲何？

習題13. 體積相等之二旋成圓柱體之側面積之比爲何？

第八編

球

702．定義．球爲一面，其面上各點皆與一定點等距離者也。此定點稱爲球心。

703．定義．球之半徑爲由球心至球上任一點之直線。

704．定義．球之直徑爲過球心而界以球面之直線。

705．定義．由定義而知

(1) 球之一切半徑均相等，一切直徑亦均相等。

(2) 一半圓繞其直徑，旋轉一 360° 之角則生一球。

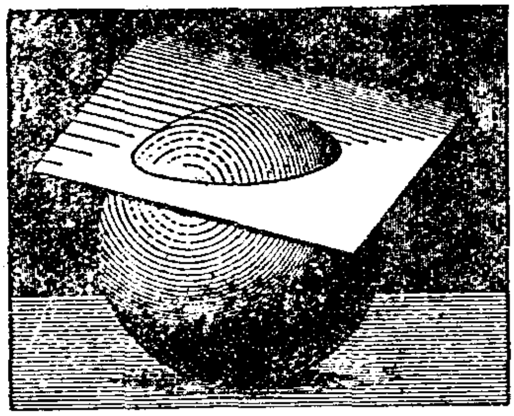
(3) 設兩球之半徑或直徑相等則兩球相等，反言之，設兩球相等則其半徑或其直徑相等。

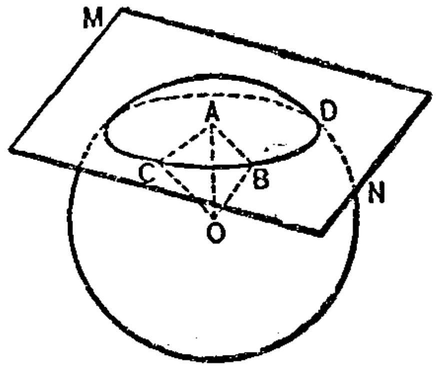
(4) 設一點與球心之距離大於半徑則此點在球外。

習題．兩球之半徑各爲10吋與4吋，而其球心之距離爲7吋，小球上各點皆在大球內否？

命題I. 定理

706. 球之截面爲一平面所作者爲一圓。





已知 CBD 爲平面 MN 與球之交線，其球心爲 O.

求證 CBD 爲一圓.

證 自 O 作 $OA \perp MN$.

作 AB, AC, CO, 及 OB, AC 爲定直線.

因 $OC = OB$,

$CA = AB$. (516)

因 AC 爲定直線，則與其相等之 AB 必有一變動之點 B 與 A 有一定距離。

或 CBD 爲一圓。 (37)

707. 系1. 球之截圓爲與其中心等距離之平面所作者必相等；而二截圓爲不與其中心等距離之兩平面所作者，其距中心較近之平面所作之圓大。

因 $\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{AO}^2$，而 AO 增大則 AC 減小。

708. 定義. 球之大圓爲通過其中心之一平面所作之截面。

709．定義．球之小圓為不通過其中心之一平面所作之截面。

710．定義．球之一圓之軸為垂直於該圓平面之球徑；其兩端為圓之極。

711．系2．圓之軸必通過該圓之圓心。

712．系3．球之一切大圓均相等。

713．系4．球之任二大圓彼此平分。

因每一圓平面含球之中心，其交線為一直徑而平分二圓。

714．系5．球之每一大圓必平分此球。

715．系6．過球面上任意三點可作一圓且僅可作一圓。（三點可決定一平面。）

716．系7．過球面上二點B與C可作一大圓。（三點B，C，與中心O，決定一平面）

平常通過二已知點僅可作一大圓，但設已知點為一直徑之兩端點時，則通過此諸已知點能作任何多之大圓。

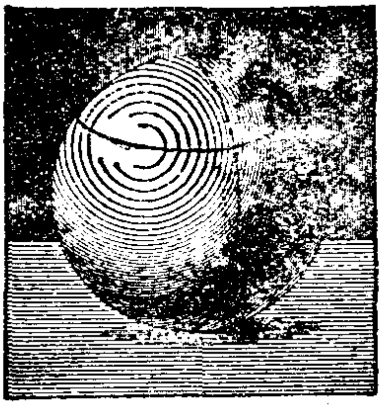
717．定義．球面上兩點間之距離為兩點間大圓之劣弧之長。

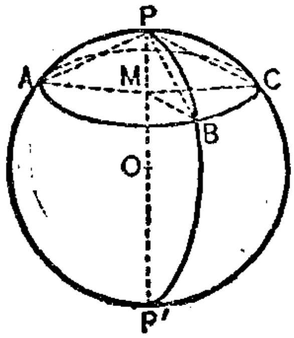
習題1．以地球作為圓球，問其子午線為何類之圓？諸緯度圈為何類之圓？赤道為何類之圓？緯度圈之極為何？

習題2．設小圓之平面與球心之距離為9吋，而球之半徑為15吋，問小圓之半徑為何？

命題II. 定理

718. 球之一圓圓周內諸點皆與該圓之極爲等距離。





已知 P 與 P' 爲球之一圓 ABC 之極。

求證 弧 PA = 弧 PB = 弧 PC,

及 弧 $P'A$ = 弧 $P'B$ = 弧 $P'C$.

授意. 用 (711,515) 證直線 PA, PB, 及 PC 之相等。

719. 定義. 球之一圓之極距爲由圓上一點至其近極之距離。

720. 注意. 球面幾何學內之一象限爲一大圓之四分之一。

721. 系1. 一大圓之極距爲一象限。

系2. 由一圓之極至圓上諸點所作諸大圓之弧相等。

習題1. 球之一圓之極距爲 60°, 而點之半徑爲13吋, 求

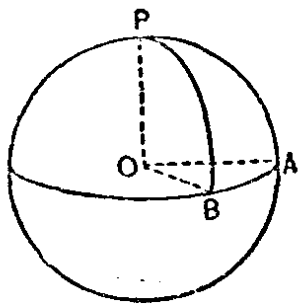
(a) 圓平面與球心之距離。

(b) 圓之半徑。

習題2. 視地球為一圓球其半徑等於 4000 哩，求北回歸線($23\frac{1}{2}°N.$)與北極之極距。

命題III. 定理

722. 球面上一點與他兩點之距離各為一象限，此兩點非為一直徑之兩端，則此一點為通過該兩點之大圓之極。



已知 P，A，與 B，為球面上三點，PA 與 PB 為象限。

求證 P 為大圓 AB 之極。

授意. 用(502)證 OP 垂直於平面 ABO.

723. 注意. 定理Ⅲ能告以若知球之半徑則過實質球面上兩點可用兩脚規作一大圓。

由已知點 A 與 B 為圓心，以一象限之弦為半徑，作兩弧，相交於 P。由 P，以同半徑，作一圓，則為所求之圓。

724. 定義. 設一平面與一球有一公共點且僅有一公共點則此平面切於此球。

725. 定義. 設一線雖引至極遠與一球有一公共點且僅有一公共點則此線切於此球。

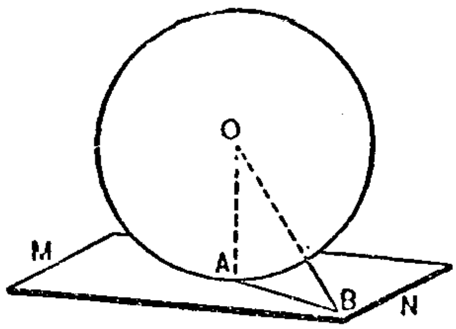
726. 定義. 設兩球有一公共點且僅有一公共點則兩球彼此相切。

727. 定義. 設多面體之各面切於一球則此球內切於多面體。

728. 定義. 設多面體之各頂皆在球面上則此球外接於多面體。

命題IV. 定理

729. 一平面垂直於球半徑之外端則切於此球。



已知 平面 $MN\perp$ 於球 O 之半徑 OA 於 A.

求證 MN 切於此球。

證 聯結 MN 內任意點 B 至 O.

於是 $OB>AO$. (518)

故 B 在球體外。 (705,(4))

所以,除 A 外,MN之每點,皆在球外,而 MN 切於此球。

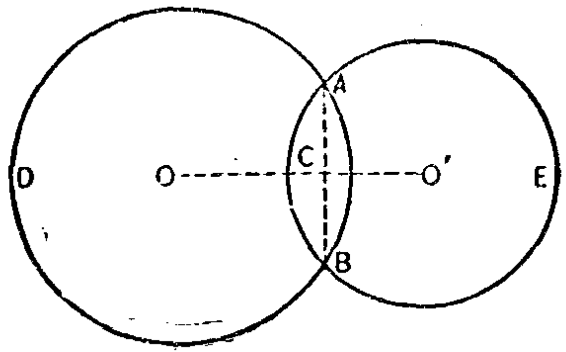
730. 系. 一平面(或直線)切於一球則垂直於至切點之半徑。〔用間接法證明.〕

習題1. 垂直於半徑外端之任何線切於此球。

習題2. 切於球之一圓之切線爲球之一切線且位於在該切點切球之平面內。

命題V. 定理

731. 兩球之交線爲一圓。



已知 ABD 與 ABE 爲兩相交圓其球心爲 O 與 O'.

求證 ABD 與 ABE 之交線爲一圓。

證 兩相交球可由二相交圓 ABD 與 ABE 繞其聯心線 OO' 旋轉而生，其交線則由旋轉點 A 而生。

但 OO' 爲 AB 之垂直平分線， (79)

∴線 AB 旋轉而生一平面， (504)

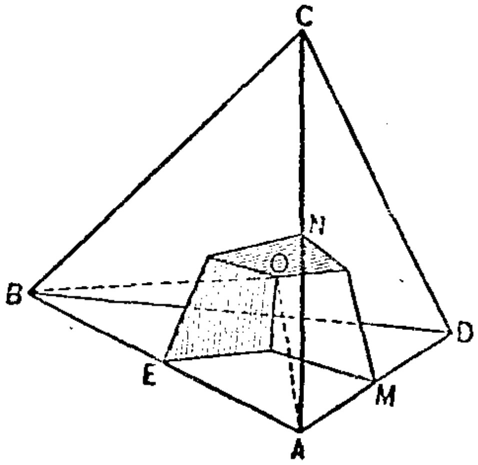
點 A (或 B) 旋轉而生一圓其半徑爲 CA，

故兩球之交線爲一圓。

732. 系. 兩球之交圓之平面垂直於其聯心線，而其圓心則在聯球心之線內。

命題VI. 定理

733。一球能外接於任何四面體.



已知 $ABCD$ 爲一四面體.

求證 一球可外接於$ABCD$.

證 於 AB 之中點 E，作平面垂直於 AB.

同理，於 AC 與 AD 之中點 N 及 M，各作平面垂直於 AC 與 AD.

設三平面相遇於 O. （何故？）

$$\therefore OA = OB. \qquad (507)$$

同理，$OA = OC$，而 $OA = OD$.

故 O 與 A，B，C，及 D，爲等距離，而以 O 爲中心以 OA 爲半徑所作之球將外接此四面體。

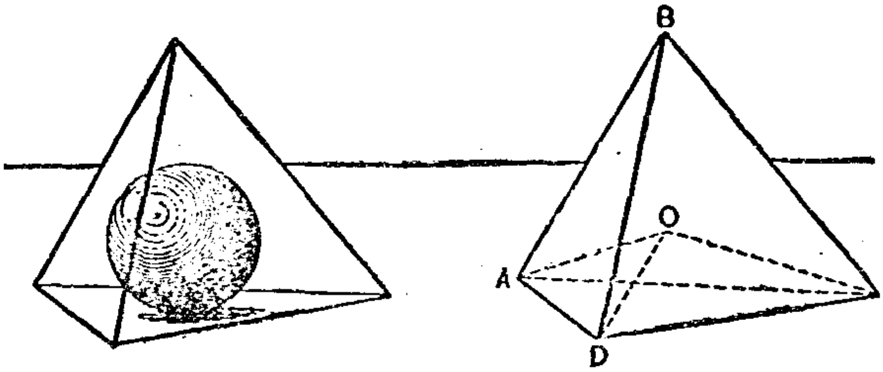
734. 系。不在一平面之四點決定一球。

六平面於四面體之六稜之中點垂直於其稜者相遇於一點。

習題. 於一四面體不能有二外接球。

命題VII. 定理

735. 一球能內切於任何已知四面體。



已知 $ABCD$，一四面體．

求證 一球可內切於 $ABCD$．

證 以諸平面 OAD，ODC，及 OAC 平分任何三個二面角如 AD，DC，與 AC．

於是 O 與四面體之四面爲等距離。

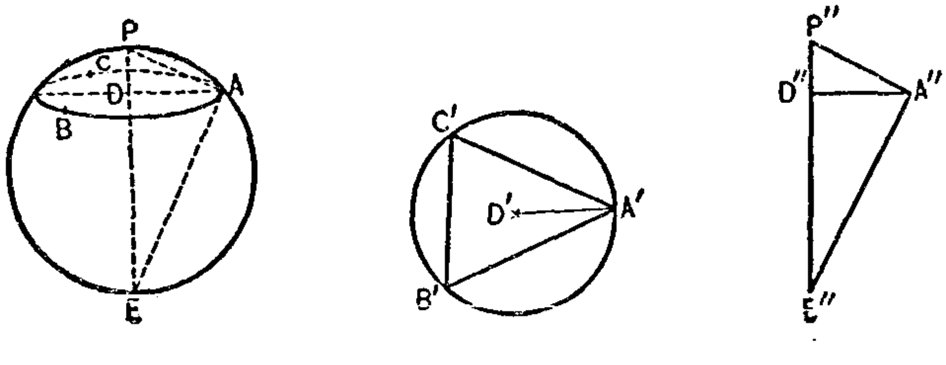
〔學者完成之.〕

736. 系．平分四面體之二面角之六平面相遇於一點。

習題．四面體之體積等於其表面積與其內切球之半徑乘積之三分之一。

命題VII. 作圖題

737. 已知一實質球求其直徑。



已知　一實質球 $ABCE$.

求　此球之直徑.

作圖　以任意點 P 爲中心，以任意〔兩脚規之開口爲〕半徑，作一圓 ABC.

量〔以兩脚規〕三弦 AB，BC，與 CA，並於任何平面作$\triangle A'B'C'$，使其邊各各等於 AB，BC，及 CA.

作外接圓 $A'B'C'$ 之半徑 $D'A'$.

作直角三角形 $P''A''D''$，使其弦 $P''A''=PA$，及一腰 $D''A''=D'A'$.

於A'' 作 $A''E''\perp P''A''$，遇 $P''D''$ 之引長線於 E''，

於是 $P''E''$ 爲所求之直徑。

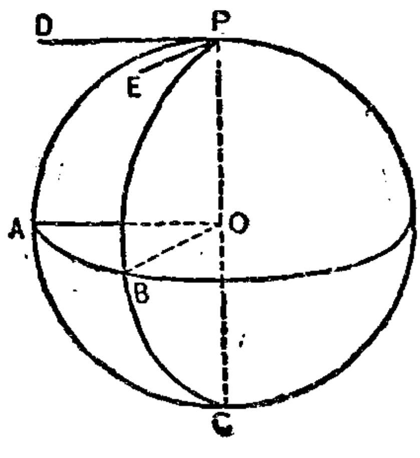
授意.　證$\triangle PAE\cong\triangle P''A''E''$.

738. **定義. 兩相交曲線間之角**即於其交點上兩切線所成之角。

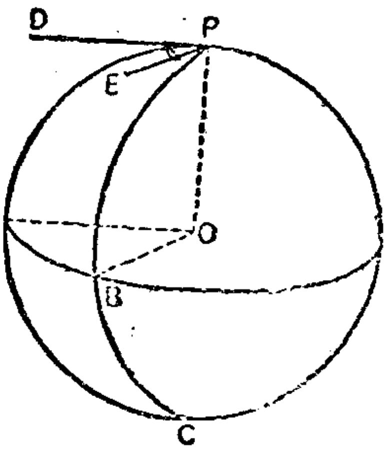
739. **定義. 球面角**爲二相交大圓間之角。

命題IX.　定理

740. 球面角可以其頂爲極所作大圓之弧而夾於兩邊或其引長線之間者度之。



已知DPE，大圓PAC與PBC所作之球面角；AB，以P爲極之大圓之弧．



求證　$\angle DPE$以$\overset{\frown}{AB}$度之．

證　作半徑OA，OB，與OP．

$\angle POA$以象限PA度之，　(227)

故　$AO \perp OP$．

但　$DP \perp OP$，　(284)

而AO與DP在$\odot PAO$之平面內。

故　$AO \parallel DP$．　(96)

同理　$BO \parallel EP$．

$\therefore \angle DPE = \angle AOB$．　(498)

但$\angle AOB$以$\overset{\frown}{AB}$度之．　(227)

故$\angle DPE$以$\overset{\frown}{AB}$度之．

741．系1．兩大圓所作之角等於其二平面所作二面角之平面角。

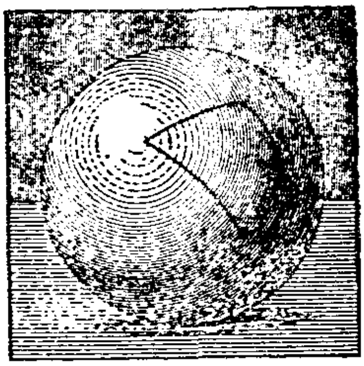
742．系2．過一大圓之極之一切大圓必垂直於此大圓。

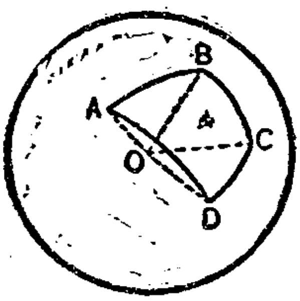
球面多邊形

743. 定義. **球面多邊形**爲球面上之圖形由三或多大圓之弧作成者也。

其弧爲**邊**，其交點爲**頂**，其邊所作之球面角爲多邊形之**角**。

如，$ABCD$ 爲一球面多邊形，AB，BC，等等，爲其邊，A，B，C，等等，爲其頂，而 $\measuredangle ABC$，BCD，等等，爲其角。





744. 定義. **球面多邊形之對角線**爲聯任二不相隣頂點之弧。

745. 定義. **球面三角形**爲三邊之球面多邊形，球面三角形稱爲**等腰**，**等邊**，等等，與平面三角形所稱者有相同情形。

球面多邊形之諸邊之平面於球心作成一多面角(O-$ABCD$)稱爲球面多邊形之**相當**多面角。

球面多邊形之**諸邊**以其相當多面角之**諸面角**度之；而球面多邊形之**諸角**則等於其相當多面角之**諸二面角**。

746. 注意. 用球面多邊形之各部分與其相當多面角之各部分間之關係，則可由多面角之任何定理而推知球面多邊形之一相似定理。

747. 設球面多邊形之相當多面角爲凸多面角，則此球面多邊形爲凸球面多邊形。一切球面多邊形除非另爲說明，皆指凸多邊形而言。

748. 設球面多邊形之相當多面角爲對稱，則此球面多邊形爲對稱，顯然，對稱球面多邊形之各部分必分別相等，但依相反次序排列。

大概，兩對稱球面多邊形不能使其密合；

球面多邊形之諸邊恆以度量之。

習題. 說明關於球面多邊形之定理之直接由下命題推得者：

(a) 設兩三面角之面角各各相等則兩三面角爲全等或對稱。

(b) 設三面角之兩面角相等，則其所對之二面角相等。

(c) 設三面角之三個面角爲直角，則其三個二面角爲直角。

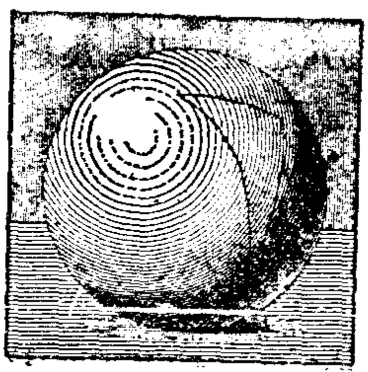
(d) 多面角諸面角之和小於 360°

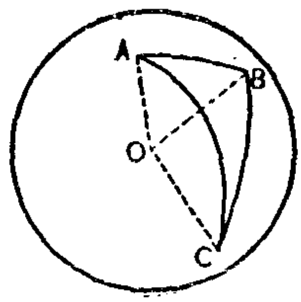
(e) 三面角之兩個面角之和大於第三面角。

(f) 設四面角之相對面角相等，則其相對之二面角相等。

命題X. 定理

749. 球面三角形兩邊之和大於第三邊。





已知 ABC,一球面三角形.

求證 $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AC}$.

證 作半徑 OA, OB, 及 OC.

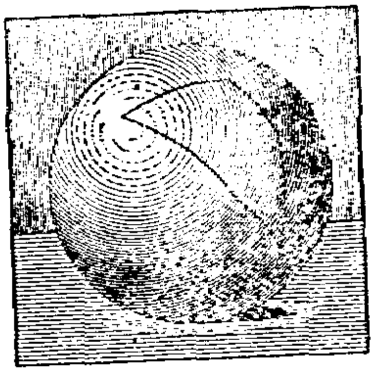
於是 $\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC$. (557)

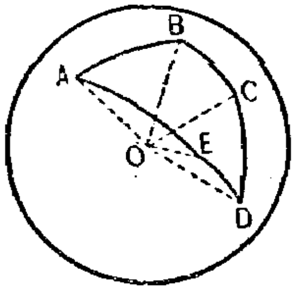
但圓心角以其截弧度之,

$$\therefore \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AC}.$$

命題XI. 定理

750. 凸球面多邊形諸邊之和小於一大圓之圓周。





已知 $ABCDE$, 一 n 邊之球面多邊形。

求證 $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA}$, 等等$<360°$.

授意。 作相當多面角且比較注意(746).

命題XII. 定理

751. 同球上之兩三角形爲全等:

(1) 設一三角形之兩角及夾邊各各等於他三角形之兩角及夾邊。

(2) 設一三角形之兩邊及夾角各各等於他三角形之兩邊及夾角。

(3) 設一三角形之三邊各各等於他三角形之三邊。

並設其相等部分排列於相同次序。

授意. 證相當多面角之爲全等。

652. 系. 兩對稱等腰三角形爲全等。

命題XIII. 定理

753. 同球上兩三角形爲對稱：

(1) 設一三角形之兩角與夾邊各各等於他三角形之兩角與夾邊；

(2) 設一三角形之兩邊與夾角各各等於他三角形之兩邊與夾角；

(3) 設一三角形之三邊各各等於他三角形之三邊；

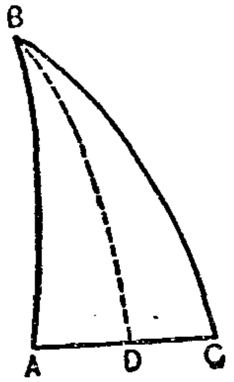
並設其相等部分排列於相反次序。

授意. 證相當多面角爲對稱。

754. 注意. 球面角與弧之相等恆以相等或對稱三角形證之。

命題XIV・定理

755. 等腰球面三角形之底角相等。



授意。 平分頂角且證作成兩對稱三角形。

756. 系. 等邊球面三角形亦等角。

757. 注意. 球面幾何學之許多定理可用與平面幾何學相似之方法證之。

758. 注意. 下列諸題參考之一切圖形皆假定作於球面，而一切作圖當用一付兩脚規及作大圓弧（例如，半球杯之緣）之方法於球面黑版上實行作出之。

在關於球面形之命題，其諸字如線，半徑，聯心線，中心角，等等，常用以表大圓之弧，極距，聯兩圓之極之弧，在極作成之角，等等。

習題1. 大圓弧之垂直平分線內之點與弧之兩端等距離。

習題2. 與一大圓弧之兩端等距離之二點決定此弧之垂直平分線。

習題3. 平分一球面角。

習題4. 平分一大圓弧。

習題5. 於一大圓之已知弧上一點，作一線垂直於此弧。

習題6. 由弧外一點，作一線垂直於大圓之已知弧。

習題7. 設球面四邊形之對邊相等，則其對角相等。

習題8. 對頂球面角相等。

習題9. 設一球面四邊形之對邊相等，則其對角線彼此平分。

習題10. 作一球面三角形之外接圓。

習題11. 於大圓內之已知點，作一角等於一已知角。

習題12. 有兩已知邊及其夾角作一球面三角形。

習題13. 已知三邊作一球面三角形。

習題14. 已知底，高，及底上之相當中線，作一球面三角形。

習題15. 等腰球面三角形底角之平分線相等。

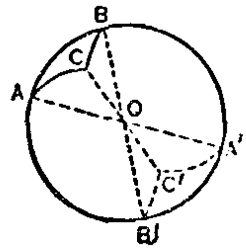
習題16. 等邊球面四邊形之對角線彼此垂直。

習題17. 球面上一圓之中心角以其截弧度之。

習題18. 設球面上兩圓相交，則其聯心線平分其公共弦且與之成直角。

習題19. 設一半徑平分球面上一小圓之弦，則垂直於其弦。

習題20. 於球面上一圓，其相等弦與其極等距離。

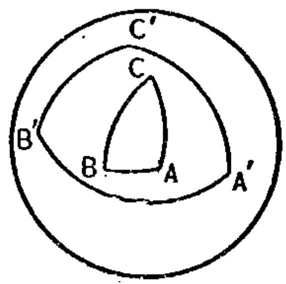


759. 定義. 設兩球面多邊形之相當多面角爲對頂，則兩球面**多邊形爲對頂。** (560)

習題. 兩對頂球面三角形爲對稱。

極三角形

760. 定義. 設以任何球面三角形之頂爲極　作諸大圓之弧，則將作成另一三角形稱爲第一三角形之**極三角形**。



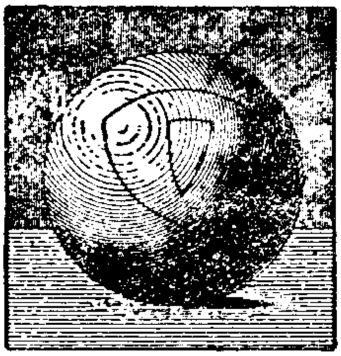
如，設 A 爲大圓 $B'C'$ 之極， B 爲大圓 $A'C'$ 之極，而 C 爲大圓 $A'B'$ 之極，則△ $A'B'C'$ 爲三角形 ABC 之極三角形。

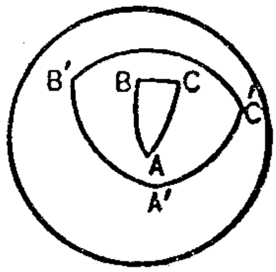
設自諸極 A,B，與 C 作諸全圓，則將作成八個三角形，而其極三角形可由下法選擇：

表示由 B 與 C 所作之弧相交而成之頂爲 A'，於是大圓弧之二交點其與 A 之距離小於一象限者爲 A'，依同理而取 B' 與 C'。

命題XV. 定理

761. 設一球面三角形爲另一球面三角形之極三角形，於是此第二三角形亦爲第一三角形之極三角形。



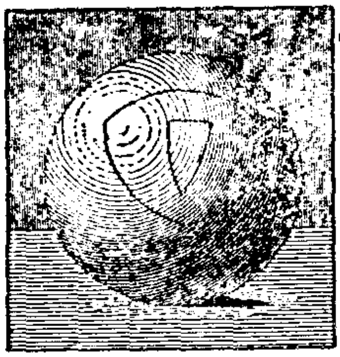


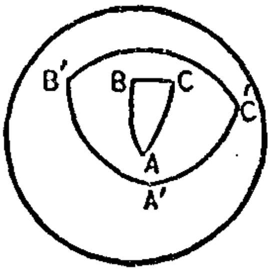
已知　△ $A'B'C'$，爲△ABC 之極三角形。

求證　　△ABC 爲△$A'B'C'$ 之極三角形。

證　　因 A 爲 $B'C'$ 之極，則距離 AB' 爲一象限，又因 C 爲 $A'B'$ 之極，則 $B'C$ 亦爲一象限.

所以，　　B' 爲 AC 之極.　　(722)

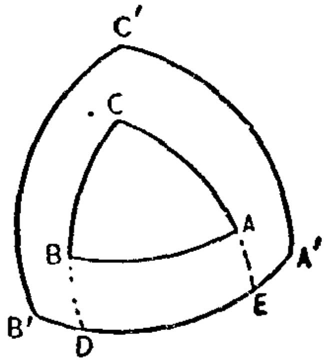




同理，　A' 爲 BC 之極，
且　　　C' 爲 AB 之極。
但距離 AA'，BB'，CC'；俱小於一象限，
故 ABC 爲 $A'B'C'$ 之極三角形。

命題XVI. 定理

762. 在兩極三角形內，一三角形之各角與他三角形之各對邊相補。



已知　ABC 與 $A'B'C'$，兩極三角形。
求證　$\angle C$ 爲 $B'A'$ 之補角。
證　引長 $\angle C$ 之邊至遇 $B'A'$ 於 D 及 E.
於是　$\angle C$ 以弧 DE 度之，　(740)
又　$B'E$ 與 DA' 各爲 90°.　(76.)
但　$DE + B'A' = B'E + DA'$ 或 180°.
故　DE 與 $B'A'$ 相補，
$\therefore \angle C$ 與 $B'A'$ 相補.

習題1. 球面三角形之邊爲 $60°$, $50°$, 及 $100°$, 求其極三角形之諸角。

763. 注意. 極球面三角形爲用關於邊之諸相當命題以證關於角之諸命題之方法，反言之亦然。

習題2. 關於 $\triangle ABC$ 之何種定理可由以下關於極三角形 $A'B'C'$ 之命題直接推得?

(a) 設 $A'B' = A'C'$, 於是 $\angle B' = \angle C'$.

(b) $A'B' + B'C' + C'A' < 360°$.

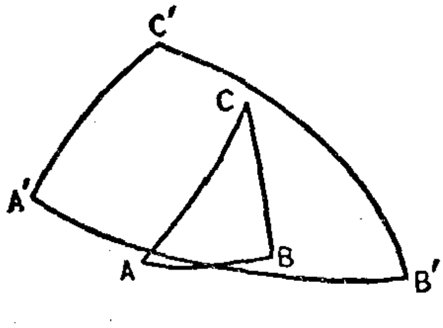
(c) $A'B' + B'C' > A'C'$.

習題3. 設於球面 $\triangle ABC$ 內, $\angle A = 110°$, 而 $\angle B = 80°$, 證 $\angle C > 10°$.

授意. 作極 $\triangle A'B'C'$.

命題XVII. 定理

764. 球面三角形諸角之和大於二直角而小於六直角。



已知 ABC, 一球面三角形。

求證 $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$,

又 $\angle A + \angle B + \angle C < 540°$.

證 作極三角形 $A'B'C'$, 且表 $B'C'$, $C'A'$, 與 $A'B'$ 之度數, 各以 a, b, 與 c.

於是 $A = 180° - a$. (762)

$B = 180° - b$.

$C = 180° - c$.

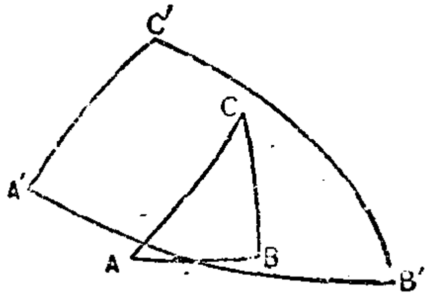
加諸方程式，得

$$A+B+C=540^\circ-(a+b+c).$$

故 $A+B+C<540^\circ.$

但 $a+b+c<360^\circ.$ (740)

故 $A+B+C>180^\circ.$

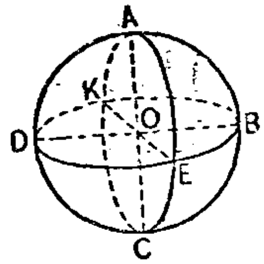


765．系．一球面三角形可有一，二，或三直角；亦可有一，二，或三鈍角。

766．定義．球面三角形之有兩直角者，爲兩直角球面三角形。

767．定義．球面三角形之有三直角者，爲三直角球面三角形。

768．系 1．設三平面通過球心，每一平面垂直於其他二面，則球面分爲八相等三直角球面三角形，其各邊皆等於象限。



769．系 2．一球面等於一三直角球面三角形面積之八倍。

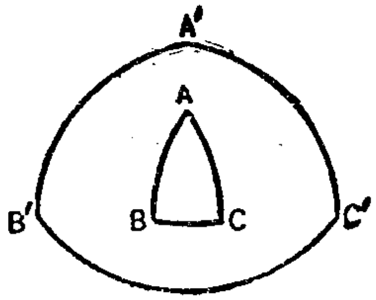
習題1．球面三角形之外角小於其二較遠內角之和。

習題2．球面四邊形諸角之和大於四直角。

習題3．一三直角球面三角形與其極三角形密合。

命題XVIII. 定理

770. 設球面三角形之兩角相等，則其對邊相等。



已知 球面三角形 ABC，及 $\angle B=\angle C$.

求證 $\widehat{AB}=\widehat{AC}$.

證 作極 $\triangle A'B'C'$.

於是 $\widehat{A'B'}$ 爲 $\angle C$ 之補角，而 $\widehat{A'C'}$ 爲 $\angle B$ 之補角， (762)

故 $\widehat{A'B'}=\widehat{A'C'}$.

$\therefore \angle B'=\angle C'$. (755)

但 $\widehat{AB}$ 與 $\widehat{AC}$ 各爲 $\angle C'$ 與 $\angle B'$ 之補角， (762)

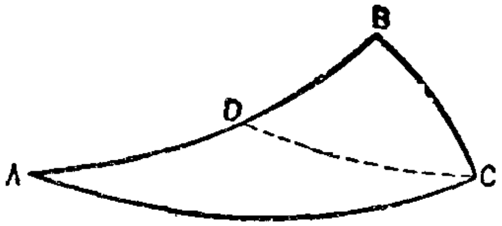
是以 $\widehat{AB}=\widehat{AC}$.

習題1. 等角球面三角形亦等邊。

習題2. 設於等邊球面三角形 ABC 之三邊 AB，BC，與 CA，截等距離 AA'，BB'，及 CC'，於是 $A'B'C'$ 亦爲等邊三角形。

命題XIX. 定理

771. 於任何球面三角形內，大邊必對大角。



已知　球面三角形 ABC，及 $\angle BCA > \angle BAC$.

求證　$\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

證　作一大圓之弧 CD 使 $\angle DCA = \angle A$，又設 D 爲 $\widehat{AB}$ 與 $\widehat{DC}$ 之交點。

於是　$\widehat{AD} = \widehat{DC}$.　(770)

但　$\widehat{DB} + \widehat{DC} > \widehat{BC}$.　(749)

$\therefore \widehat{DB} + \widehat{AD} > \widehat{BC}$.　(代入)

或　$\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

習題．設 $\widehat{BC}$ 爲等腰球面三角形 ABC 之底，而 D 爲 $\widehat{AC}$ 內任一點，於是 $\widehat{BD} > \widehat{CD}$.

命題XX．　定理

772．於任何球面三角形內，大角必對大邊。

已知　於球面 $\triangle ABC$ 內，$\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

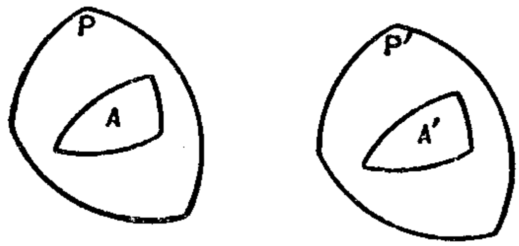
求證　$\angle C > \angle A$.

授意。用間接法證明。

習題．用極三角形證命題XX．

命題XXI。　定理

773. 設同球上兩三角形爲互等角，則此兩三角形互等邊，而爲全等或對稱。



已知　球面 $\triangle$ A 與 A' 互等角.

求證　A 與 A' 互等邊且或相等或對稱.

證　作 A 之極三角形 P，與 A' 之極三角形 P'.

因 A 與 A' 爲互等角，　(題設)

P 與 P' 爲互等邊.　(762)

故 P 與 P' 爲互等角.　(751,753)

但 A 與 A' 爲 P 與 P' 之極三角形，　(761)

故 A 與 A' 爲互等邊.　(762)

故 A 與 A' 爲相等或對稱。

習題1. 設球面四邊形之對角相等，則其對邊相等。

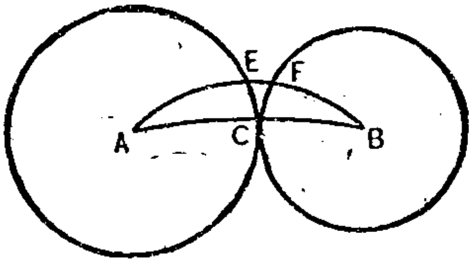
授意。引長二對邊於兩方向直至其相遇，且求二全等三角形。

習題2. 設於球面四邊形 $ABCD$ 內，$\angle A=\angle B$，且 $\angle C=\angle D$，於是 $BC=AD$。　(授意. 習題1.)

習題3. 設兩點 A 與 B 其距離爲 $180°$ 以二半圓 ACB 與 ADB 聯之，且 $\angle BCD=\angle CDA$，於是 $BC=AD$。

命題XXII. 定理

774. 球面上兩點間之最短線爲一大圓之劣弧。



已知 AB，一大圓之劣弧，在一已知球上.

求證 AB 較球面上聯 A 與 B 之任何他線爲短.

證 於 AB 上取任一點 C，以 A 與 B 爲圓心，以等於 AC 及 BC 之長各爲半徑，作兩圓，此二圓不能遇於任一他點，因設其能遇於某點 D，則 $\triangle ADB$ 之兩邊 AD 與 DB 之和將不大於第三邊 AB.

所以，A 與 B 間之任一他線 $AEFB$，各交圓周於二點 E 及 F.

但 $AEFB$ 不能爲 A 與 B 間之最短線，因繞 A 旋轉 AE，繞 B 旋轉 BF 直至 E 與 F 與 C 密合，則將得聯 A 與 B 之一線而小於 $AEFB$.

故，A 與 B 間之最短線必經過 C.

但因 C 爲 AB 內任一點，則 A 與 B 間之最短線必與 AB 密合

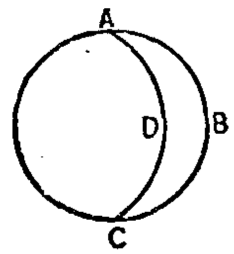
或 AB 爲聯 A 與 B 之最短線。

習題. 紐約與伯爾多（葡萄牙城名）位於（近似的）相同緯度，設一船從紐約駛向伯爾多恒在此緯度航行，則其航路將爲最短可能之航路否?

球面圖形度量法

775. **定義. 月形**者球面上之一圖形由兩半圓作成者也，如 $ABCD$.

776. **月形之角**爲其兩弧所作球面角之一.



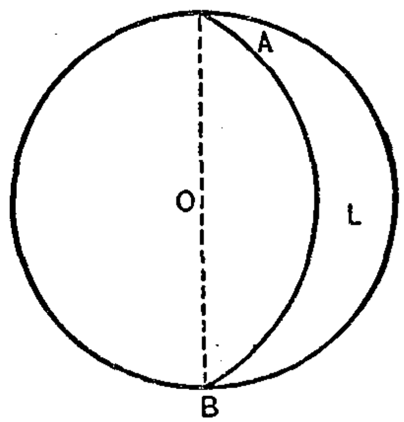
顯然，若同球上諸月形之角相等則此兩月形相等，故設月形之角分爲 n 等份則如此作成之小月形爲已知月形之 n 分之一。

777. 於球面幾何學一**三直角三角形**之面積常取作面積之**單位**，而直角則作爲角之單位，

於是一球之面積爲8，而半球之面積爲4。

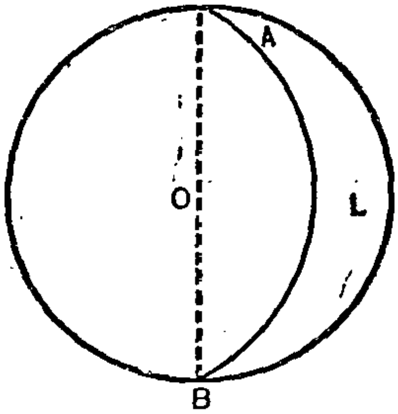
命題XXIII. 定理

778. 設取直角爲角之單位，而三直角三角形爲面之單位，則一月形之面積以二倍其一角度之。



已知 L 表月形 AB 內所含三直角三角形之數，而 A 爲其角所含直角之數.

求證 $L=2A$。



證 今可將球之全表面看作一月形其角 $= 4\,rt.\angle s$.

或設 $A = 4,\ L = 8.$

∴設 $A = 1,\ L = 2.$ (776)

∴設 $A = \frac{1}{n}, L = \frac{2}{n}.$ (776)

∴設 $A = \frac{m}{n}, L = \frac{2m}{n}.$

或 $L = 2A$，設 A 爲一有理數.

設 A 爲無理數，則 $2A$ 與 L 之一切繼續近似值各各相等。

故 $L \doteq 2A.$ (223)

779. 系1. 同球或等球上二月形之比如其角之相比。

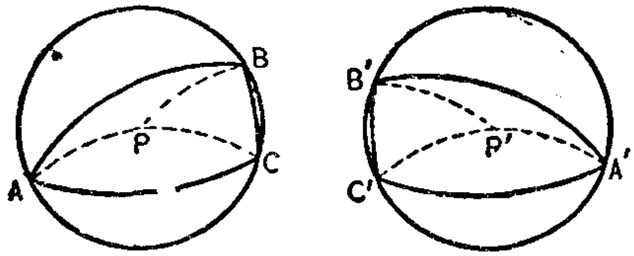
780. 系2. 月形與其所在之球球面積之比等於其角與四直角之比。

習題1. 求一月形所含三直角三角形之數，設其角等於 (a) $1\frac{1}{2}$ $rt.\angle s$，(b) $45°$。

習題2. 設 A 表月形之角，Tr 表球面三直角三角形之面積，其球面積等於 S，求月形之面積，設 (a) $A = 2\frac{1}{2}\,rt.\angle s$，$Tr = 20$ 方呎
(b) $A = 60°$，$Tr = 30$ 方呎.
(c) $A = \frac{1}{3}\,rt.\angle$，$S = 80$ 方吋.
(d) $A = 20°$，$S = 4$ 方吋.

命題XXIV. 定理

781. 同球上對稱三角形必等積。



已知 ABC 與 $A'B'C'$，爲同球上兩對稱球面三角形.

求證 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

證 設 P 與 P' 各爲通過 A,B,C 及 A',B',C'，兩小圓之極.

因弧 AB，BC，CA 各等於弧 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$；弦 AB，BC，CA 各等於弦 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$. (187)

故平面 $\triangle ABC$ 與 $A'B'C'$ 爲全等， (74)

故圓 ABC = 圓 $A'B'C'$. (193)

作 PA，PB，PC，$P'A'$，$P'B'$，及 $P'C'$.

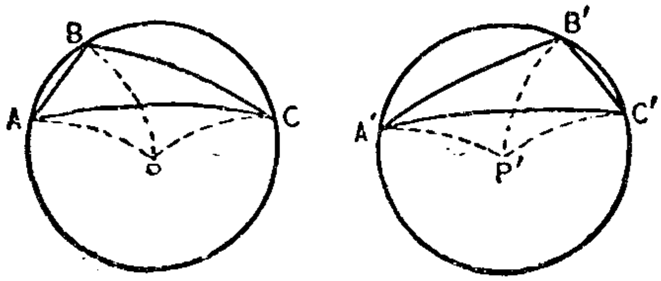
此諸弧皆相等. (718)

故 $\triangle ABP \cong \triangle A'B'P'$. (752)

同理， $\triangle ACP \cong \triangle A'C'P'$，

$\triangle BCP \cong \triangle B'C'P'$.

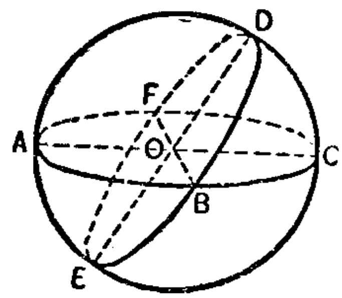
故用加法 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.



782. 注意. 設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 之極在圓外，此證須稍爲變化。

授意： $\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle BCP - \triangle ACP$.

783. 系. 設兩大圓 ABC 與 DBE 之二弧交於一半球，則二相對球面三角形 ABE 與 DBC 面積之和等於一月形之面積而月形之角等兩大圓弧所夾之角 ABE.



授意.

$\widehat{AB}=\widehat{CF}, \widehat{EB}=\widehat{DF}, \widehat{AE}=\widehat{DC}$.

$\therefore \triangle ABE$ 與 $\triangle DCF$ 爲對稱.

$\therefore \triangle ABE=\triangle DCF$，等等.

784. 定義. 球面多邊形之**球面盈餘**爲其各角之和超過同邊數之平面多邊形各角之和之剩餘。在此書中球面盈餘恆以直角度之。

如，設 A, B，與 C 爲球面三角形之三角表之以直角者，而其球面盈餘則表之以 E，於是

$$E=A+B+C-2.$$

設 $A, B, C, \cdots$，爲 n 邊多邊形之角，表之以直角者，於是

$$E=(A+B+C+\cdots)-2(n-2).$$

習題1. 求球面三角形 ABC 之球面盈餘，設

(a) $A=\frac{1}{2} rt. \angle, B=\frac{3}{4} rt. \angle, C=1 rt. \angle$.

(b) $A=60^\circ, B=70^\circ, C=80^\circ$.

(c) $A=90^\circ, B+C=180^\circ$.

習題2. 求球面四邊形 $ABCD$ 之球面盈餘，設

(a) $A=90^\circ, B=100^\circ, C=110^\circ, D=80^\circ$.

(b) $A=150^\circ, B=110^\circ, C+D=190^\circ$.

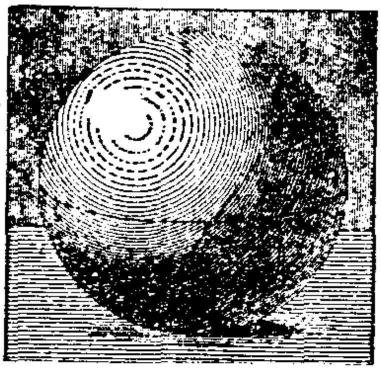
習題3. 求球面六邊形之球面盈餘，設其每角等於

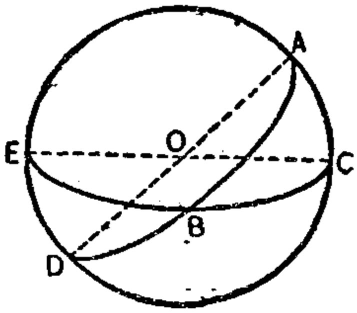
(a) 130°.

(b) 170°.

命題XXV. 定理

785. 設取直角爲角之單位，及三直角三角形爲面積單位，則球面三角形之面積以球面盈餘度之。





已知 ABC，一球面三角形.

求證 面積 $ABC = A + B + C - 2$，設角之單位爲一直角，而面積之單位爲一三直角三角形.

證 完成圓 $ACDE$，且引長 $\widehat{AB}$ 與 $\widehat{CB}$ 直至其各遇 ACD 於 D 及 E.

於是，因 $\triangle ABC + \triangle BED$ 等於一月形，

其角等於 $\angle ABC$， (783)

$$\triangle ABC + \triangle BED = 2B. \quad (778)$$

但 $\triangle ABC + \triangle ABE = 2C$， (778)

又 $\triangle ABC + \triangle BCD = 2A$. (778)

加此諸方程式，得

$$3\triangle ABC + \triangle BED + \triangle ABE + \triangle BCD = 2(A + B + C).$$

但 $\triangle ABC + \triangle BED + \triangle ABE + \triangle BCD =$ 一半球或4.

故 $2\triangle ABC + 4 = 2(A + B + C)$，

或 $\triangle ABC + 2 = A + B + C$.

是以 $\triangle ABC = A + B + C - 2$.

786. 系. 設 E 表一球上球面三角形之球面盈餘，其球面為 S，則三角形之面積等於 $E\times\frac{S}{8}$.

習題1. 設一球之面積為40方呎，求一球面三角形之面積其角各為 $40°$，$60°$，及 $100°$.

習題2. 一球面三角形其角各為 $90°$，$100°$，及 $110°$，問占一球之表面之幾分之幾?

習題3. 一等角球面三角形其面積為球面之四分之一，問其角若干?

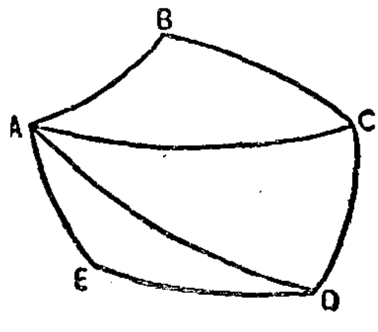
習題4. 一月形其角等於 $80°$ 與角為 $80°$ 之等邊三角形之比為何?

習題5. 一等腰球面三角形其底角為 $80°$，將其腰引長以作成月形，設三角形為月形之三分之一求其頂角。

習題6. 一球面三角形之角為 $80°$，$90°$，及 $100°$. 求其等積月形之角。

命題XXVI. 定理

787. 設取直角為角之單位，而三直角三角形為面之單位，任意球面多邊形之面積以球面盈餘度之。



已知 $ABCD\cdots$，一 n 邊球面多邊形.

求證 $ABCD\cdots$ 以 $(A+B+C+\cdots)-2(n-2)$ 度之。

證 由 A 作一切對角線，則將分 $ABCD\cdots$ 為 $(n-2)$ 三角形.

每一三角形之面積等於其角之和少2. (785)

故多邊形 $ABCD\cdots$ 之面積等於

$$(A+B+C+\cdots)-2(n-2).$$

788. 注意. 命題XXV與XXVI給出球表面積之相對大小，但非絕對大小。

習題1. 求一等角六邊形之面積其角為 160°.(取三直角三角形為單位)

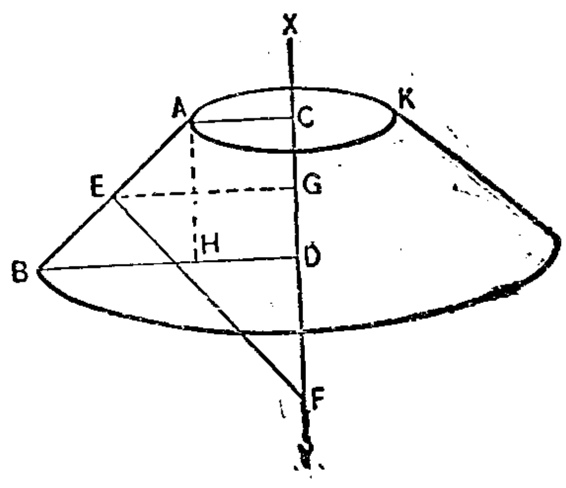
習題2. 六邊形之角為 130°, 140°, 130°, 150°, 120°, 160°, 問占球面之若干分?

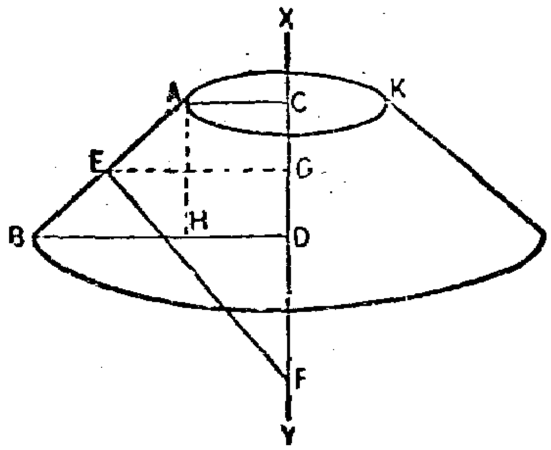
習題3. 球面四邊形之角為 90°, 100°, 110°, 及 120°, 求其等積等邊三角形之角。

習題4. 兩球中心之距離為 13, 設球之半徑各為 5 與 12, 求交圓之半徑。

命題XXVII. 定理

789. 一直線繞其平面內一軸旋轉所生之面積，等於此線在軸上之射影乘以圓周，而其半徑為由線之中點所作之垂線且以軸為限。





已知 AB 繞其平面內一軸 XY 旋轉，而生面 ABK，CD 爲 AB 在 XY 上之射影，EF 爲 AB 之垂直平分線限於 XY.

求證　面積 $ABK = CD \times 2\pi EF$.

證　作 $EG \parallel BD$, $AH \parallel CF$.

面 ABK 爲旋成圓錐體之平行斷錐之側面。

故　面積 $ABK = AB \times 2\pi EG$.　(1)　(698)

但　$\triangle ABH \sim \triangle EFG$.　(306)

$\therefore \dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AH}{EG}$.　(303)

是以　$AB \times EG = AH \times EF$，　(274)

或　$AB \times EG = CD \times EF$.　(代入)

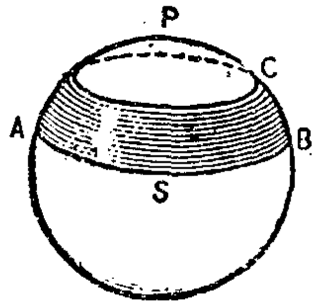
以此值代入 (1)，

面積 $ABK = CD \times 2\pi EF$.

習題. 在直徑26呎之半圓內引一弦，此弦距半圓之中心爲12呎，弦之中心距直徑爲 6 呎，問繞直徑旋轉此弦所生之面若何?

790. 定義. 球帶爲球面之一部分介乎二平行平面之間者也。

791. 定義, 球與二平面之公共圓作成球帶之兩底, 二平面間之距離爲球帶之高。



如球 S 之部分 ABC 表一球帶, 設兩平面之一切於此球, 而其他則交此球 則截一單底球帶, 如 PAB.

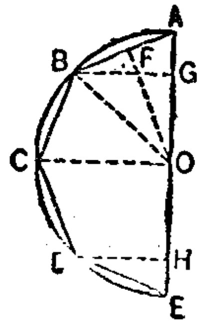
習題1. 證命題 XXVII, 於 $AB \parallel XY$ 時.

習題2. 證命題 XXVII, 於 A 在 XY 時.

習題3. 於命題 XXVII, 之圖, 求面積 ABK, 設 EF 等於 10 吋, AB 等於 8 吋, 及角 $ABH=30^\circ$.

命題XXVIII. 定理

792. 球之面積等於四倍大圓之面積。



已知 S, 爲球面積, R 爲繞 AE 旋轉半圓 ABE 所生之球之半徑.

求證 $S=4\pi R^2$.

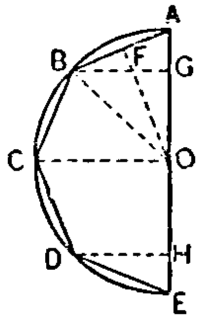
證 於半圓內作一內接有偶數邊之正多邊形之半, 如 $ABCDE$.

作 BG, CO, 及 DH 垂直於 AE, 並表諸弦 AB, BC, CD 及 DE 與 O 之公共距離以 d.

於是 面積 AB[1] $=AG\times 2\pi d$, (791, 習題2)

面積 $BC=GO\times 2\pi d$, 等等. (789)

1. 面積 AB 意即由 AB 所生之面積。



加此諸方程式

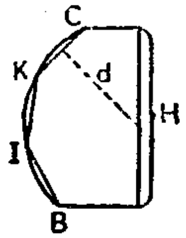
面積 $ABCDE=(AG+GO+OH+HE)\times 2\pi d$ 或面積 $ABCDE=2R\times 2\pi d=4R\pi d$.

今設內接多邊形之邊數無限增加，於是面積 $ABCDE$ 漸近於 S，而 d 漸近於 R 以爲漸限。

故， $S=4\pi R^2$。 (414)

793. 系1. 兩球面積之比如其半徑之平方之比。

794. 系2. 球帶之面積等於其高乘以大圓之周。



旋轉弧 BC 所生之球帶等於 $H\times 2\pi R$，因，設分 $\widehat{BC}$ 爲等份而聯其連續之分點，則與(792)情形相同而得

面積 $BIKC=H\cdot 2\pi d$.

故， 球帶 $=H\cdot 2\pi R$. (414)

795. 系3 同球或等球上球帶之比如其高之相比。

796. 注意. 命題 $XXVIII$，與命題 XXV 及 $XXVI$，能使求得球表面積之絕對大小。

習題1. 設 $\pi=3\cdot1416$，求球之面積其半徑爲

(a) 10 吋，(b) 4 呎，(c) 3 碼，(d) 2 呎 4 吋，(e) 4000 哩。

習題2. 求球之半徑其面積爲

(a) 314.16 方呎，(b) 628.32 方吋，(c) 1 方呎，(d) 10 π 方呎。

習題3. 在半徑等於10吋之球上，求月形之面積爲平方吋，其角爲

(a) $30°$，(b) $45°$，(c) $90°$，(d) $135°$。

習題4. 計算一球帶之面積其高爲 h，而在半徑等於 R 之球上，設

(a) $R=20$ 吋，$h=10$ 吋，

(b) $R=4$ 呎，$h=3$ 呎，

(c) $R=1$ 呎，$h=\cdot 001$ 呎。

習題5. 設 R 爲球之半徑，$\pi=\frac{22}{7}$，求球面三角形之面積其角爲 A，B，與 C，設

(a) $A=60°$，$B=70°$，$C=85°$，$R=10$ 呎，

(b) $A=70°$，$B=80°$，$C=72°$，$R=1$ 哩，

(c) $A=90°$，$B=90°$，$C=90°$，$R=1$ 哩，

(d) $A=80°$，$B=90°$，$C=100°$，$R=20$ 呎。

習題6. 設 R 爲球之半徑，求球面多邊形之面積其角爲 A，B，C，D，等，設

(a) $A=90°$，$B=100°$，$C=110°$，$D=130°$，$R=4$呎，

(b) $A=B=C=D=E=F=134°$，$R=10$吋，

(c) $A=70°$，$B=90°$，$C=100°$，$D=120°$，$R=4$ 碼，

習題7. 求一半球形屋頂之方呎數其直徑爲40呎。

習題8. 設定地球爲一圓球其半徑爲4000哩，問其面積爲何？

習題9. 設地球之半徑爲4000哩北溫帶之高爲半徑之$\frac{13}{25}$，問北溫帶之面積爲何？

習題10. 求以赤道及緯度圈 $30°N$ 所界之球帶之面積，設地球之半徑等於 4000 哩。

習題11. 分一球爲10等面積之球帶。

習題12. 一球之面積等於110方吋，一球帶在球上等於 11 方吋，求球帶之高。

習題13. 求等邊球面三角形之角，其球之半徑爲2，設三角形之面積等於 π。

球之體積

797. 定義. 漏斗形者半圓之任一平面扇形於半圓繞其直徑旋轉時所生之形體也。

漏斗形之底爲旋轉扇形之弧所生之球帶。

如，設扇形OAB,圖2,繞其直徑XY旋轉，則生漏斗形O-AB(圖1).

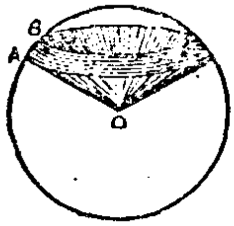


FIG.1

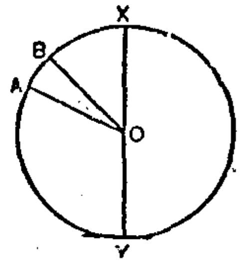
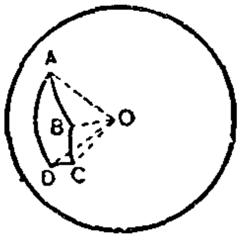


FIG.2

設旋成漏斗形之平面扇形之半徑爲軸之一部分，則漏斗形之底爲一單底球帶，而此漏斗形稱爲球圓錐體。

798. 定義. 球角錐體者由一球面多邊形及其相當多面角各面所界之之形體也。

球面多邊形爲球角錐體之底而球心爲球角錐體之頂。



如，O-$ABCD$爲一球角錐體以$ABCD$爲底。

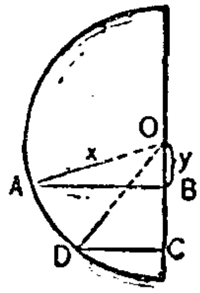
779. 定義. 鼓形者爲二平行平面及其間所夾球之一部分作成之形體也。

平行平面所作之二截面爲鼓形之底平行平面間之距離爲鼓形之高。

設其一平面切於球，則稱爲單底鼓形。

800. 定義. 梳形者由一月形及其邊之二平面所作成之形體也。

習題7. 求 $ABCD$ 所生之鼓形之體積，設 $AB=6$ 吋，$BC=2$ 吋，$DC=4$ 吋，及 $\angle B=\angle C=90^\circ$.



解. 作 OA，及 OD. 以 x 表 OA，以 y 表 OB.

因 $\angle B=90^\circ$，$x^2=y^2+36$.

因 $\angle C=90^\circ$，$x^2=(y+2)^2+16$.

相減，$O=y^2-(y+2)^2+20$.

$\therefore 4y=16$.

$y=4$.

故，$x^2=16+36$.

或 $x=\sqrt{52}=R$.

但 鼓形 $=V(ABCD)$，

而 $V(ABCD)=V(OAD)+V(ODC)-V(OAB)$.

$$V(OAD)=\text{球帶}\times\frac{R}{3}=2\pi R\times H\times\frac{R}{3}=2\pi\cdot2\cdot\frac{52}{3}=\frac{208\pi}{3}.$$

$$V(ODC)=(CD)^2\pi\cdot\frac{OC}{3}=\frac{16\cdot\pi\cdot6}{3}=\frac{96\pi}{3}.$$

$$V(OAB)=(AB)^2\pi\cdot\frac{OB}{3}=\frac{36\pi\cdot4}{3}=\frac{144\pi}{3}.$$

$$\therefore V(ABCD)=\frac{\pi}{3}(208+96-144)=\frac{160\pi}{3}.$$

習題8. 求鼓形之體積，其底之半徑爲 2 與5，其高爲1.

習題9. 求鼓形之體積，其底之半徑爲 6 與8，其高爲2.

習題10. 求單底鼓形之體積，其底之半徑爲3，其高爲2.

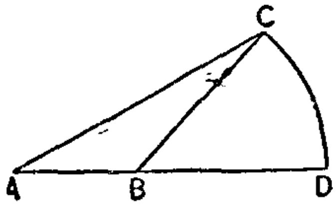
習題11. 求繞 AB 爲軸旋轉三角形 ABC 所生之體積設 $AB=14$，$BC=15$，而 $CA=13$.

習題12. 求繞底 AB 爲軸旋轉梯形 $ABCD$ 所生之體積，設 $AB=10$，$BC=AD=5$，而 $CD=4$.

習題13. 線 XY 與三角形 ABC 位於一平面，A 在 XY 內，自 C 作 CC' 垂直於 XY，同樣作 $BB'\perp XY$. 求繞 XY 旋轉三角形 ABC 所生之體積，設 $AC'=5$，$C'B'=7$，$AB'=12$，$CC'=12$，而 $BB'=5$.

習題14．於右圖內，ABD 爲一直線而 B 爲弧 CD 之中心，求繞 AC 爲軸旋轉全形所生之體積，設 $AC=15$，$CB=13$，及 $AB=4$.

習題15．於同圖內求繞 AB 爲軸旋轉三角形 ABC 所生之體積，設 $AB=5$，$BC=8$，而 $\angle ABC=120^\circ$.



習題16．兩球體積之比如 8 比125．求其半徑之比。

習題17．兩球體積之比如 125 比216．求其面積之比。

習題18．求一球之半徑其面積等於兩球面積之和，而此二球之半徑各爲 3 與4．

習題19．求一球殼之體積其外半徑爲13而其厚爲8．

習題20．求一球之半徑其體積等於一球殼之體積而球殼之外半徑爲 3 其厚爲1．

習題21．設月之直徑爲2160哩，求面積與體積。

習題22．球帶之面積爲 80，其高爲4，求球之半徑。

習題23．求球之半徑其體積等於一立方體而立體之稜等於 a。

習題24．一圓筒形池直徑 4 吋，一部入以水，浸入一球後，水面升高 1 吋，求球之直徑。

習題25．球之半徑爲 2 吋重32盎斯，求同質料半徑 3 吋之球之重量。

習題26．球角錐體之底爲一等邊三角形每角 80，設球之半徑等於10，其體積爲何?

習題27．正方形之邊爲 4 繞其一對角線旋轉，求其所生立體之體積及面積。

習題28．求單底鼓形之體積，設其曲面之面積爲20π而其高爲2．

習題29. 求球之半徑其面積等於一立方體之全面積而立方體之稜等於4.

習題30. 立方體之稜爲10吋，求外接球之直徑。

習題31. 求正四面體之內切球之半徑，其稜等於4吋。

習題32. 月形之角爲 $40°$ 等於同球上之一球帶，設球之直徑爲18吋求球帶之高。

習題33. 六邊之球角錐體之二面角各爲 $140°$，設半徑等於10求角錐體之體積。

習題34. 球之面積等於其外切圓柱體之側面積。

習題35. 求一球之體積與其外切立方體體積之比。

習題36. 設一球面四邊形之對角線彼此平分，則其對邊相等。

習題37. 球之半徑爲9吋，求一楔形之體積其角等於$60°$.

習題38. 求球之半徑其體積等於一旋成圓錐體之體積，而圓錐體之底之半徑爲 r 高爲 h.

習題39. 球帶之面積等於A；高等於h，求球之半徑。

習題40. 一球之體積與其面積之半數值相等，求其半徑。

習題41. 旋成圓柱體之體積等於其側面與其底半徑之乘積之半。

習題42. 一人與球心之距離爲半徑之三倍，問此人所見球面之部分爲全球面之幾分?

習題43. 自地面上1000哩之一點能見地球表面若干方哩? 設地爲圓球其半徑等於4000哩。

習題44. 球之半徑爲6呎，一人能見其全面積之$\frac{5}{12}$，問此人距球心若干?

習題45. 設自球外一點作一切線與一割線，則切線爲割線及其球外線分之比例中項。

習題46. 過直徑10吋之球穿一直徑6吋之圓柱形孔，設圓柱之軸通過圓心，求此立體之體積。

習題47. 球之半徑爲r，一小圓之面積爲a，求其與球心之距離。

習題48. 球之體積爲V. 求等邊球面三角形之面積其角等於 $100°$.

習題49. 求熱帶之面積設其高爲地球半徑之$\frac{4}{5}$.

習題50. 能看得地球面積$\frac{1}{20}$之處距地面若干哩?

習題51. 大氣在面積一方吋之平均壓力爲 15 lb. 求大氣之全重量。

習題52. 一立方呎鉛能製直徑$\frac{1}{4}$吋之彈丸若干粒?

習題53. 一咖啡瓶高 8 吋，頂之直徑爲 4 吋，底之直徑爲 5 吋若每杯之容積爲10立方吋，問此瓶能容咖啡若干杯?

習題54. 地面上 A，B，及 C，三地決定一球面三角形 ABC，其角爲: $A=50°$，$B=61°$，$C=71°$. 求三角形 ABC 之面積。

復　習

習題1. 凸球面多邊形諸外角之和小於四直角。

習題2. 在球內一定點互爲垂直之三會合弦之平方之和爲常量。

習題3. 一球面三角形自爲極三角形其條件爲何?

習題4. 一球能內切於一正直圓柱體，將與之切於一圓。

習題5. 一點與二定點距離之平方之和爲常量，其軌跡爲何?

習題6. 球之半徑爲12吋，求平分半徑且與之成直角之平面與球所作之小圓圓周。

習題7.　一圓柱形孔穿過球心，所餘體積等於以孔長爲直徑之球之體積。

習題8.　一球面三角形之面積與其極三角形之周界，其間之關係爲何?

習題9.　正直圓錐體之底爲球之一圓，證圓錐體交球於他一圓。

習題10.　等邊三角形繞其一邊爲軸旋轉，求其所生之體積。

習題11.　切於圓柱體之兩相交平面交於一線與綫造線平行。

習題12.　正四面體之高等於由其體內任一點向其四面所作四垂線之和。

習題13.　証：　正四面體諸稜之中點爲一正八面體之諸頂點。

習題14.　證：　平行六面體相對之三面角爲全等。

習題15.　證：　設平行六面體之四對角綫相等，則此形體爲一長方體。

習題16.　兩平行平面間之最短距離爲兩平面之垂直線。

習題17.　設一線在兩相交平面上之射影各爲直線，則此線必爲一直線而有一例外，述其例外爲何。

習題18.　證：　一圓在一平面上之射影爲一圓，僅於此圓平行於該平面時。

習題19.　一正八面體爲平行於其一面之平面所切，證此截面之周界爲一定。

習題20.　一球內切於正直圓柱體，證其全面積之比等於其體積之比。

習題21.　外切二等球之兩多面體體積之比等於其面積之比。

習題22.　諸平行平面切一球成諸圓而有相同之極。

習題23. 垂直於兩平行直線之兩平面必相交，若兩線平行則如何?

習題24. 各垂直於二面角之面之諸平面除却皆垂直於此角之稜時必相交。

習題25. 證自一定點至過他定點之諸平面之諸垂線足之軌跡爲一球。

習題26. 證自一定點至過一定直線之諸平面之諸垂線足之軌跡爲一圓。

習題27. 一線在兩平行線上之射影相等。

應用頁 301 一頁 304 所發明之原理(在平面部分)，解以下各題:

習題28. 一立方體之對角線與在其一面上之射影所成之角爲若干度。

習題29. 正四面體之兩面所作成之二面角爲若干度。

習題30. 求旋成圓錐體之體積設旋轉直角三角形之弦與軸成 40° 之角，且弦爲12吋。

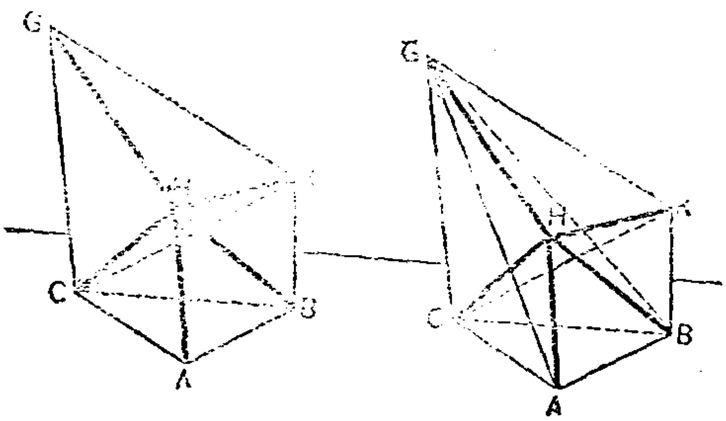
習題31. 求正四角錐體之體積，已知底之每邊爲 6 呎而每面與底所作之二面角爲 36°.

習題32. 求一正圓柱體之體積其底之半徑爲 4 呎而每纖造線 (10 呎長) 與底作一 25° 之角。

立體幾何學附錄

命題I. 定理

808. 斷三角柱體之體積等於三個角錐體體積之和，其公共底爲角柱體之底，其諸頂爲傾斜截面之三頂。



已知 $ABC-HKG$，一斷三角柱體，ABC 爲其底.

求證 $ABC-HGK=H-ABC+K-ABC+G-ABC$.

證 過 H，B，C，又過 H，K，C，作二平面作成角錐體 $H-ABC$，$H-BCK$，及 $H-CKG$.

$H-ABC$ 顯爲所求角錐體之一.

$H-BCK$ 可讀爲 $C-HBK$.

$C-HBK=C-AKB$. (637)

$C-AKB$ 可讀爲 $K-ABC$.

∴ $H-BCK$ 與所求第二角錐體爲等積.

$$H-CKG=H-GBC. \qquad (637)$$

$$H-GBC \text{ 或 } B-HGC=B-AGC \text{ 或 } G-ABC.$$

故 $H-CKG=$ 所求第三角錐體。

$$\therefore ABC-HKG=H-ABC+K-ABC+G-ABC.$$

809. 系1. 斷直三角柱體之體積等於其底與其諸側稜之和之三分之一之積。

810. 系2. 任何斷三角柱體之體積等於其正截面與其諸側稜之和之三分之一之積。

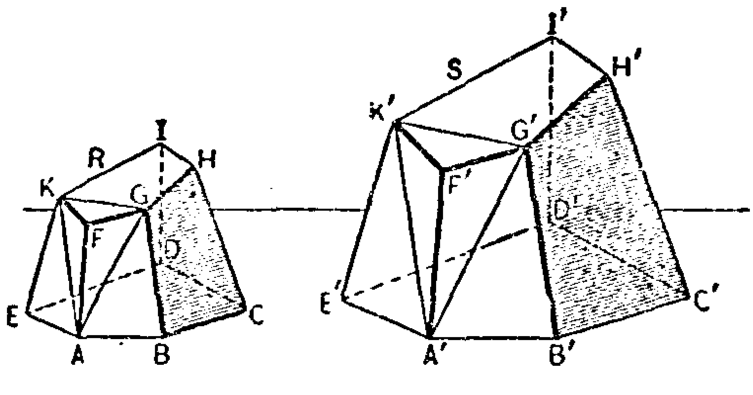
授意. 正截面分斷三角柱體爲二斷直三角柱體。

習題1. 求一斷直三角錐體之體積，設其側稜爲4，5，及6而底之稜爲6，8，與10.

習題2. 斷三角柱體之底之邊爲13，14，與15，而其側稜爲6，8，與10，設稜與底之傾角爲30°，求其體積.

命題II. 定理

811. 兩相似多面體能分爲同數之四面體彼此各相似且在相似位置。



已知 R 與 S，二相似多面體；A 與 A'，相當頂點.

求證 R 與 S 能分爲同數之四面體，彼此各相似，且在相似位置.

證 自 A 及 A' 作二立體之一切對角線.

設除却過 A 或 A' 之面外，將 R 與 S 之每面看作頂爲 A 或 A' 之角錐體之底，則每一立體分解爲若干角錐體與假定之底其數相同。

於相當之底面作相當之對角線，且通過此諸對角線及 A 與 A' 各作諸平面，則分諸相當角錐體爲同數之三角錐體。

故，R 與 S 能分爲同數之四面體.

於四面體　$A-KFG$ 及 $A'-K'F'G'$，

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AKF \sim \triangle A'K'F' \\ \triangle AFG \sim \triangle A'F'G' \\ \triangle KFG \sim \triangle K'F'G'\end{array}\right\} \qquad (315)$$

$$\frac{AK}{A'K'}=\frac{KF}{K'F'}=\frac{KG}{K'G'}=\frac{FG}{F'G'}=\frac{AG}{A'G'}. \qquad (何故？)$$

$$\therefore \triangle AKG \sim \triangle A'K'G'. \qquad (何故？)$$

四面體 $A-KFG$ 及 $A'-K'F'G'$ 所有之相當三面角相等.

(559)

$\therefore$ 四面體 $A-KFG$ 與 $A'-K'F'G'$ 相似.　(641)

當 $A-KFG$ 與 $A'-K'F'G'$ 移去時，其所餘之多面體亦相似，因其諸面仍爲相似，而其諸多面角亦相等也。

同理任二相當四面體能證其相似.

故　R 與 S 能分爲同數之四面體彼此各相似且在相似位置。

812. 系1. 相似多面體之諸相當稜成比例。

813．系2．兩相似多面體內任二相當線之比如其任二相當稜之比。

814．系3．相似多面體之二相當面之比如其任二相當稜之平方之比。

815．系4．兩相似多面體之全面積之比如其任二相當稜之平方之比。

816．系5．兩相似多面體之體積之比如其任二相當稜之立方之比。

授意，設第一多面體之一稜比第二多面體中之相當稜如 $1:n$，於是第二多面體之任一稜爲第一多面體中相當稜之 n 倍．故作成第二多面體一部分之任一四面體之體積爲第一多面體中相當四面體體積之 n^3 倍．故用加法而得以上結果。

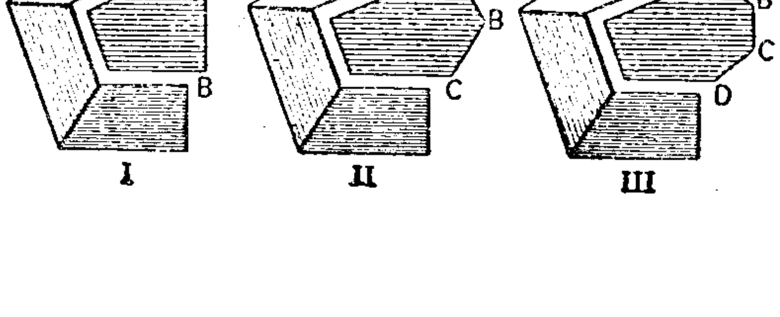
習題1．證一切正十二面體爲相似。

習題2．設 R 與 S 爲兩相似多面體之體積，而 r 與 s 爲二相當稜，求 S 設 $R=100$ 立方吋，$r=5$，而 $s=4$．

習題3．兩相似多面體之體積爲 216 立方吋，與 343 立方吋，設第一形體之一稜爲12吋，求第二形體中之相當稜。

命題III．　定理

817．在任意凸多面體內，稜數加二，等於項數加面數之和。（尤拉氏定理）



I　　II　　III

已知　E 為凸多面體之稜數，V 為頂數，而 F 為面數．

求證　$V+F=E+2$.

證　　假想此立體由先放一面然後繼續加其他各面作成，且表增加第 m 面後所增成之頂數，面數，與稜數以 v_m, f_m, e_m.

顯然 $f_m=1$，無論 m 為何值。

設 $e_m=1$，$v_m=0$.　(圖 I)

設 $e_m=2$，$v_m=1$.　(圖 II)

設 $e_m=3$，$v_m=2$.　(圖 III)，等等。

由此不難推知大概 $e_m-v_m=1=f_m$.

或　$v_m+f_m-e_m=0$.

故　$V+F-E$ 於加任何面時大概不生變化。雖然，有二例外，即首先放置之第一面，及最後之一面也。

顯然　$v_1=e_1$.

所以　$v_1+f_1-e_1=1$.

且因於最後（或第 n）面，$v_n=0$，$e_n=0$，

則得　$v_n+f_n-e_n=1$.

故得

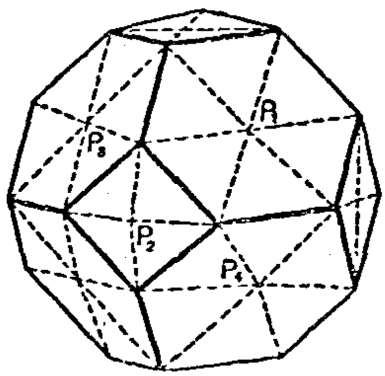
$$v_1+f_1-e_1=1.$$
$$v_2+f_2-e_2=0.$$
$$v_3+f_3-e_3=0.$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n+f_n-e_n=1.$$

由加法得

$$V+F-E=2.$$
$$\therefore V+F=E+2.$$

命題IV. 定理

818. 有n項之凸多面體諸面角之和等於$2(n-2)$平角。



已知 n為凸多面體之頂數，而s為其諸面角之和.

求證 $s=2(n-2)\,st.\,\measuredangle$.

證 由每面聯一點(如P_1, P_2, P_3,等)至其面之各頂。

設 $F=$多面體之面數，

$E=$多面體之稜數，

$P=$於P_1, P_2, P_3,等點所作各角之和，

$T=$於各面所作諸三角形之一切角之和.

顯然 $S=T-P$.

因每稜為兩三角形之底，則得$2E$三角形，且

$$T=2\,E\,st.\,\measuredangle.$$

因 P_1, P_2, P_3, 等之點數為 F,

$$P = F \times 2\,st.\ \measuredangle = 2F\,st.\ \angle.$$

$$\therefore S = (2E - 2F)\,st.\ \measuredangle.$$

$$= 2(E - F)\,st.\ \measuredangle.$$

但由前命題極易得知

$$E - F = n - 2\ (因\ n = V).$$

$$\therefore S = 2(n - 2)\,st.\ \measuredangle.$$

習題1. 求有十側面之角錐體之面角之和。

習題2. 求有六頂之多面體之面角之和；又十頂之多面體。

習題3. 求一多面體諸面角之和，設其稜數為30而其面數為12.

習題4. 証正立體之面數，頂數，與稜數與尤拉氏定理一致。

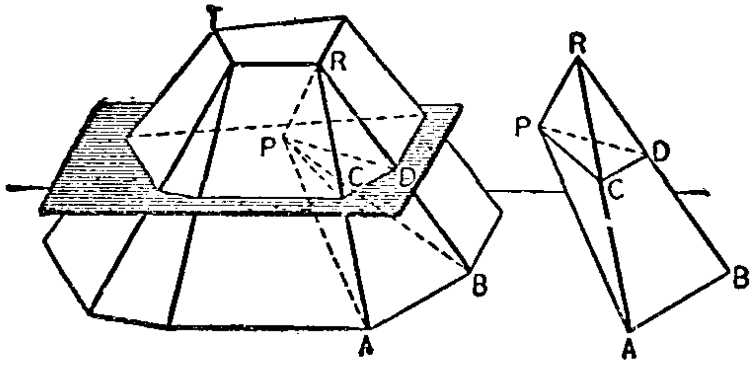
習題5. 證不能有 7 稜之多面體。

819. 定義. 一**假角柱體**為一多面體介以在平行平面內之兩多邊形（稱為**底**）及若干三角形與梯形（稱為**側面**）其一邊在一底內而其對頂或對邊在其另一底內。

兩底平面間之距離為其**高**，其**中截面**為平行於底而平分高之一平面所作之截面。

命題V.　　定理

820. 假角柱體之體積等於其兩底及四倍其中截面之和乘以其高之六分之一。



已知 V，爲假角柱體 ABT 之體積；H，爲其高；B 與 b 爲兩底之面積；而 M，爲中截面之面積.

求證 $V=\frac{H}{6}(B+b+4M)$.

證 設一側面爲一梯形，作對角線分之爲兩三角形.

設 P 爲中截面 M 內任一點，且聯 P 至各頂點，於是此立體分爲若干角錐體，皆以 P 爲其頂，而以 B，b，及其側面作成之三角形爲其底。

$$P-B\text{之體積}=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot B=\frac{H}{6}\cdot B.$$

$$P-b\text{之體積}=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot b=\frac{H}{6}\cdot b.$$

求其餘諸角錐體之體積就角錐體 $P-ABR$ 而觀察之。

$$RC=CA,\ RD=DB. \qquad (496)$$

$$\therefore \triangle RAB=4(\triangle RCD).$$

$$\therefore P-RAB=4(P-RCD). \qquad (636)$$

但設以 R 當作角錐體 $P-RCD$ 之頂點，其體積顯爲 $\frac{H}{6}(\triangle PCD)$.

$$\therefore P-RAB=4\cdot\frac{H}{6}(\triangle PCD).$$

同理每一傍角錐體之體積等於 $4\cdot\frac{H}{6}\times$中截面 M 之含於角錐體間部分之面積。

故一切傍角錐體體積之和等於 $4\cdot\frac{H}{6}\cdot M$.

$$\therefore V=\frac{H}{6}B+\frac{H}{6}b+4\frac{H}{6}M,$$

或
$$V=\frac{H}{6}(B+b+4M).$$

注意．用微積分能証初等幾何學中立體之體積皆能由假角柱體公式求得。

例題．求一球之體積其半徑等於 R。

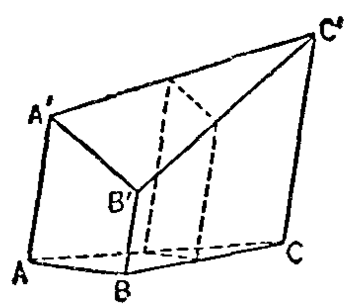
解．將球置於兩相切平行平面間且以半徑爲零之圓當作兩底，則得：

$$V\,(\text{球})=\frac{1}{6}\times 2R\times(0+0+4\times\pi R^2)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

習題1．求下列之體積 (a) 正圓柱體，(b) 正圓錐體，(c) 正圓錐體之平行斷錐。

習題2．由假角柱體公式，誘導求體積之公式：(a) 角柱體，(b) 角錐體，(c) 角錐體之平行斷錐。

習題3．求假角柱體之體積設 $B=20$，$b=6$，$M=12$，及 $H=15$.



Ex. 4

習題4．於斷角柱體 $ABC-A'B'C'$，$AA'=6$，$BB'=2$，$CC'=8$，梯形 $A'B$ 之高 $=4$，由 C 至 $ABB'A'$之垂線 $=12$．求此立體之體積。

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0982	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1614	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6012	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7219	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	6

對 數 表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	4766	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
99	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	3555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	3921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

平方，立方，及平方根立方根表

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$
1	1	1	1.000	1.000	26	676	17 576	5.099	2.962
2	4	8	1.414	1.260	27	729	19 683	5.196	3.000
3	9	27	1.732	1.442	28	784	21 952	5.292	3.037
4	16	64	2.000	1.587	29	841	24 389	5.385	3.072
5	25	125	2.236	1.710	30	900	27 000	5.477	3.107
6	36	216	2.449	1.817	31	961	29 791	5.568	3.141
7	49	343	2.646	1.913	32	1024	32 768	5.657	3.175
8	64	512	2.828	2.000	33	1089	35 937	5.745	3.208
9	81	729	3.000	2.080	34	1156	39 304	5.831	3.240
10	100	1 000	3.162	2.154	35	1225	42 875	5.916	3.271
11	121	1331	3.317	2.224	36	1296	46 656	6.000	3.302
12	144	1728	3.464	2.289	37	1369	50 653	6.083	3.332
13	169	2 197	3.606	2.351	38	1444	54 872	6.164	3.362
14	196	2 744	3.742	2.410	39	1521	59 319	6.245	3.391
15	225	3 375	3.873	2.466	40	1600	64 000	6.325	3.420
16	256	4 096	4.000	2.520	41	1681	68 921	6.403	3.448
17	289	4 913	4.123	2.571	42	1764	74 088	6.481	3.476
18	324	5 832	4.243	2.620	43	1849	79 507	6.557	3.503
19	361	6 859	4.359	2.668	44	1936	85 184	6.633	3.530
20	400	8 000	4.472	2.714	45	2025	91 125	6.708	3.557
21	441	9 261	4.583	2.759	46	2116	97 336	6.782	3.583
22	484	10 948	4.690	2.802	47	2209	103 823	6.856	3.609
23	529	12 167	4.796	2.844	48	2304	110 592	6.928	3.634
24	576	13 824	4.899	2.884	49	2401	117 649	7.000	3.659
25	625	15 625	5.000	2.924	50	2500	125 000	7.071	3.684

常用數值

1 cu. ft. = 1728 cu. in.

1 gal. = 231 cu. in.

1 bu. = 2150.4 cu. in.

$\pi = 3.1416$

$2\pi = 6.2832$

$\frac{\pi}{4} = 0.7854$

$\frac{\pi}{6} = 0.5236$

$\pi^2 = 9.8696$

$\sqrt{\pi} = 1.7725$

$\sqrt[3]{\pi} = 1.4646$

$\frac{1}{\pi} = 0.3183$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.5642$

$\frac{\pi}{180} = 0.0175$