Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 22

Aufgabe 22.1. Sei $R = K[X,Y,W,Z]/(XY-ZW)$ und $\mathfrak{p} = (X,Z)$. Zeige, dass das maximale Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ durch ein Element erzeugt wird, dass aber $\mathfrak{p}$ weder in R noch in $R_{(X,Y,Z,W)}$ durch ein Element erzeugt wird (und zwar auch nicht als Radikal).

Aufgabe 22.2. Es sei eine Blockmatrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeige, dass der Rang von M gleich der Summe der Ränge von A und von B ist.

Aufgabe 22.3. Skizziere die Diagonale auf dem Torus (in seiner dreidimensionalen Realisierung).

Aufgabe 22.4.*

Es sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die Diagonale

$$\triangle = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge im Produktraum $X \times X$ ist.

Aufgabe 22.5. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\varphi \colon M \longrightarrow M \times M,\, x \longmapsto (x,x),$$

die Diagonalabbildung in das Produkt $M \times M$. Zeige, dass die Diagonale $\varphi(M)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 22.6. Zeige, dass die Diagonale $\Delta \subseteq \mathbb{A}^n_K \times \mathbb{A}^n_K$ durch n Polynome beschrieben wird.

Aufgabe 22.7. Es sei K ein Körper und sei V eine affin-algebraische Menge über K. Zeige, dass die Diagonale

$$V \longrightarrow V \times V,\, P \longmapsto (P,P),$$

eine abgeschlossene Einbettung ist.

Aufgabe 22.8. Es sei K ein Körper, sei V eine affin-algebraische Menge über K und sei $U = D(g) \subseteq V$ eine Zariski-offene affine Teilmenge. Zeige, dass

$$U \times U \subseteq V \times V$$

ebenfalls eine affine offene Teilmenge ist.

Aufgabe 22.9. Es seien V und W affine Varietäten und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine durch Polynome gegebene Abbildung. Zeige, dass der Graph der Abbildung eine abgeschlossene Teilmenge in der Produktvarietät $V \times W$ ist.

Die folgenden Aufgabe beschäftigen sich mit der Frage, inwiefern eine Eigenschaft, die „lokal“ im lokalen Ring zu einem Punkt P einer Varietät V gilt, bereits „global“ in einer (Zariski)-offenen affinen Umgebung $P \in U = D(g) \subseteq V$ des Punktes gilt. Wenn R der Koordinantering zu V ist, so ist die Nenneraufnahme R_g der Koordinantering zu $D(g)$. Beachte, dass man bei diesem Übergang innerhalb der endlich erzeugten K-Algebren bleibt und sich nach Korollar 19.8 auch die Dimension nicht ändert.

Aufgabe 22.10. Es sei $P \in V$ ein glatter Punkt einer affin-algebraischen Menge V. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $P \in U \subseteq V$ derart gibt, dass U in jedem Punkt glatt ist.

Aufgabe 22.11. Es sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. In der Nenneraufnahme R_S gelte

$$\mathfrak{a}R_S = (f_1, \ldots, f_n)\,.$$

Zeige, dass es ein $g \in S$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ mit

$$\mathfrak{a}R_g = (a_1, \ldots, a_n)$$

gibt.

Aufgabe 22.12. Es sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Der R_S-Modul M_S werde durch n Elemente erzeugt. Zeige, dass es dann ein $g \in S$ derart gibt, dass auch der S_g-Modul M_g durch n Elemente erzeugt wird.

Aufgabe 22.13. Es sei R der lokale Ring zu einer affinen Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Beweise Satz 18.8 mit Hilfe von Korollar 22.10. Welche Verschärfung gilt dabei für die Parameter?

Abbildungsverzeichnis