

Analysis I
Arbeitsblatt 21

Übungsaufgaben

AUFGABE 21.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Was ist die Definitionsmenge D des *Tangens*?

AUFGABE 21.2.*

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

AUFGABE 21.3. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgrund von Korollar 21.4 ist die reelle Sinusfunktion und die reelle Kosinusfunktion bijektiv auf gewissen Intervallen. Die Umkehrfunktionen heißen folgendermaßen.

Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \longmapsto \arcsin x,$$

und heißt *Arcus-Sinus*.

Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi], x \longmapsto \arccos x,$$

und heißt *Arcus-Kosinus*.

AUFGABE 21.4. Bestimme die Ableitungen von Arcus-Sinus und Arcus-Kosinus.

AUFGABE 21.5. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

stetig ist und unendlich viele Nullstellen besitzt.

AUFGABE 21.6.*

Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige, dass es zu jedem λ , $-1 \leq \lambda \leq 1$, eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass die Folge der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n}$$

gegen λ konvergiert.

AUFGABE 21.7. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimit existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

AUFGABE 21.8. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimit für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \rightarrow 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

- (1) $\sin \frac{1}{x}$,
- (2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
- (3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

AUFGABE 21.9.*

Bestimme den Grenzwert der Folge $\frac{\sin n}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

AUFGABE 21.10. Zeige, dass die Folge $x_n := \sin n$ nicht konvergiert.

AUFGABE 21.11.*

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch $x_{n+1} = \sin x_n$ definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 21.12. Untersuche die Funktionenfolge

$$f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (\sin x)^n,$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. An welchen Punkten existiert die Grenzfunktion, an welchen ist sie stetig, an welchen differenzierbar? Wie verhält sich die abgeleitete Funktionenfolge, also $g_n(x) = f'_n(x)$?

AUFGABE 21.13. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei F eine komplexe auf \mathbb{C} konvergente Potenzreihe der Form

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jn} z^{jn}.$$

Zeige, dass für jede n -te komplexe Einheitswurzel ζ die Gleichheit $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

AUFGABE 21.14. Es sei $F = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ eine komplexe auf \mathbb{C} konvergente Potenzreihe und $n \in \mathbb{N}_+$. Für jede n -te komplexe Einheitswurzel ζ gelte $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $c_i = 0$ für alle i gilt, die kein Vielfaches von n sind.

AUFGABE 21.15.*

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei ζ eine n -te komplexe Einheitswurzel. Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige unter Bezug auf den Differenzenquotienten, dass die Ableitung die Beziehung $f'(\zeta z) = \zeta^{n-1} f'(z)$ erfüllt.

Was bedeutet die vorstehende Aufgabe für gerade und ungerade Funktionen?

AUFGABE 21.16. Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) Es gibt eine stetige Funktion

$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

- (2) Für alle n -ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (3) Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ ist $f(wz) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 21.17. (3 Punkte)

Bestimme die Intervalle, auf denen die reelle Sinusfunktion konvex bzw. konkav ist.

AUFGABE 21.18. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

unendlich viele isolierte lokale Maxima und unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt.

AUFGABE 21.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

die unendlich viele Nullstellen und unendlich viele isolierte lokale Maxima besitzt, deren Funktionswert ≥ 1 ist.

AUFGABE 21.20. (6 Punkte)

Zeige, dass es keine stetige Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

gibt, die unendlich viele Nullstellen besitzt derart, dass zwischen je zwei Nullstellen ein lokales Maximum existiert, dessen Funktionswert ≥ 1 ist.

AUFGABE 21.21. (6 Punkte)

Es sei $z_n \in \mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen, die wir in Polarkoordinaten als

$$z_n = r_n e^{i\varphi_n}$$

mit $r_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi_n \in [0, 2\pi[$ schreiben. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt.

- (1) Die Folge r_n konvergiert gegen 0.
- (2) Die beiden Folgen r_n und φ_n konvergieren (in \mathbb{R}).
- (3) Die Folge r_n konvergiert und die Folge φ_n besitzt die Punkte 0 und 2π als einzige Häufungspunkte.

AUFGABE 21.22. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n -Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.