Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 47

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 47.1. Heinz Ngolo und Mustafa Müller sagen abwechselnd reelle Zahlen auf. Dabei sind die Zahlen von Heinz alle positiv und fallen, die Zahlen von Mustafa sind negativ und wachsen. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die dadurch gegebene Folge.

(1) Kann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine von 0 verschiedene Zahl konvergieren?
(2) Muss $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren?

Übungsaufgaben

Aufgabe 47.2. Zeige, dass der einzige Körperisomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Identität ist.

Aufgabe 47.3.*
Es sei K ein Körper, R ein Ring mit $0 \neq 1$ und

$$\varphi\colon K \longrightarrow R$$

ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 47.4. Es sei $u \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{Q}$.

(1) Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u + v$ irrational ist.
(2) Sei zusätzlich $v \neq 0$. Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u \cdot v$ irrational ist.

Aufgabe 47.5.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0,1[$ mit
$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0,1[$ mit
$$a^2 + b^2 \neq c^2 .$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0,1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0,1[$ mit
$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Aufgabe 47.6.*

In $\mathbb{Q}$ sei eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, deren Anfangsglieder durch $x_0 = 0$, $x_1 = 0,7$, $x_2 = 0,73$, $x_3 = 0,734$ gegeben sind. Muss die Folge in $\mathbb{Q}$ konvergieren? Muss die Folge in $\mathbb{R}$ konvergieren? Kann die Folge in $\mathbb{Q}$ konvergieren? Kann die Folge in $\mathbb{R}$ konvergieren?

Aufgabe 47.7. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen
$$x = 0,24\ldots$$
und
$$y = 0,51\ldots .$$
Was kann man über die Ziffernentwicklung der Summe $x + y$ sagen?

Aufgabe 47.8. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen
$$x = 0,24719113\ldots$$
und
$$y = 0,60421809\ldots .$$
Was kann man über die Ziffernentwicklung der Summe $x + y$ sagen?

Aufgabe 47.9. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen
$$x = 0,3\ldots$$
und
$$y = 0,3\ldots .$$
Was kann man über die Ziffernentwicklung des Produktes $x \cdot y$ sagen? Was kann man über die erste Nachkommaziffer des Produktes sagen, wenn die zweite Nachkommaziffer gleich 5 ist.

Aufgabe 47.10. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,536080713\ldots$$

und

$$y = 0,663184254\ldots.$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung des Produktes $x \cdot y$ sagen?

Aufgabe 47.11.*

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ die Teilmenge aller reellen Zahlen, bei denen die 17. Nachkommastelle in der (kanonischen) Dezimalentwicklung eine 0 ist. Welche Eigenschaften eines Ideals erfüllt diese Menge, welche nicht?

Aufgabe 47.12.*

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,523\ldots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Aufgabe 47.13. Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,3715\ldots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Aufgabe 47.14. Zeige, dass es keinen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon (\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G mit der Eigenschaft gibt, dass $r \in \mathbb{R}$ genau dann irrational ist, wenn $\varphi(r) = 0$ ist.

Aufgabe 47.15.*

Es sei $u \in \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl und sei

$$G = \{a + bu \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

(1) Zeige, dass G eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, 0, +)$ ist.
(2) Zeige, dass es kein Element $v \in \mathbb{R}$ mit
$$G = \mathbb{Z}v = \{cv \mid c \in \mathbb{Z}\}$$
gibt.
(3) Zeige, dass es in G kein positives minimales Element gibt.

Aufgabe 47.16. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Wir definieren zwei Folgen mit den Anfangswerten $y_0 = x_0$ und $z_0 = 0$ rekursiv durch

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n + x_{n+1} - x_n, & \text{falls } x_{n+1} \geq x_n\,, \\ y_n \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

und

$$z_{n+1} = \begin{cases} z_n + x_{n+1} - x_n, & \text{falls } x_{n+1} < x_n\,, \\ z_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

(1) Zeige, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist.
(2) Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist.
(3) Zeige

$$x_n = y_n + z_n.$$

Man kann also jede Folge als Summe einer wachsenden und einer fallenden Folge darstellen.

Aufgabe 47.17. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass man die alternierende Folge $(-1)^n$ nicht als Summe

$$(-1)^n = y_n + z_n$$

schreiben kann, wenn $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte und monotone Folgen sind.

Aufgabe 47.18.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine reelle Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2}$$

definiert. Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Bei $x_0 > a$ ist $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng fallend.

(b) Bei $x_0 = a$ ist die Folge konstant.

(c) Bei $x_0 < a$ ist $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng wachsend.

(d) Die Folge konvergiert.

(e) Der Grenzwert ist a.

Aufgabe 47.19. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede wachsende, nach oben beschränkte Folge in K konvergiert. Zeige, dass K vollständig ist.

Aufgabe 47.20.*

Wir betrachten die Folge, die durch die Folgenglieder

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

gegeben ist. Zeige, dass dies eine Nullfolge ist.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 47.21. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Aufgabe 47.22. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 47.23. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass zu einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_+$ durch

$$x_{n+1} := \frac{x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{2}$$

eine Folge definiert wird, die gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.

Aufgabe 47.24. Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{\frac{2\sqrt{n}-3}{3\sqrt{n}-2}}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 47.25.*

Welche Dezimalbruchfolgen der Form $0, z_{-1}z_{-2}z_{-3}\ldots$ mit $z_i \in \{0,\ldots,9\}$ sind Nullfolgen in $\mathbb{R}$? Welche in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 47.26. Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,11\overline{05}$$

gegeben ist.

Aufgabe 47.27. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dualsystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{3}$ gegeben ist.

Aufgabe 47.28. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dreiersystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{17}$ gegeben ist.

Aufgabe 47.29. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0,\overline{z_1\ldots z_m}$$

und

$$y = w_0,\overline{w_1\ldots w_m}.$$

Zeige, dass die Summe $x+y$ ebenfalls eine (nicht unbedingt minimale) Periode der Länge m besitzt. Erläutere, wie sich die Periode der Summe aus den beiden einzelnen Perioden ergibt.

Aufgabe 47.30. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0, z_1\ldots z_k\overline{z_{k+1}\ldots z_{k+r}}$$

und

$$y = w_0, w_1\ldots w_\ell\overline{w_{\ell+1}\ldots z_{\ell+s}}.$$

Was kann man über die Periodenlänge der Summe $x+y$ sagen?

Aufgabe 47.31. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0, z_1\ldots z_k\overline{z_{k+1}\ldots z_{k+r}}$$

und

$$y = w_0, w_1\ldots w_\ell\overline{w_{\ell+1}\ldots z_{\ell+s}}.$$

Was kann man über die Periodenlänge des Produktes $x\cdot y$ sagen?

Aufgabe 47.32.*

Sei $m \in \mathbb{N}_+$ und sei

$$x = 0,\overline{0\ldots01}$$

die reelle Zahl mit Periodenlänge m (die Periode besteht aus $m-1$ Nullen und einer 1). Sei

$$y = \sum_{i=0}^{m-1} z_i 10^i$$

mit $z_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Zeige

$$xy = 0,\overline{z_{m-1}z_{m-2}\ldots z_1 z_0}.$$

Aufgabe 47.33. Aufgrund der Wohldefiniertheit der Addition und der Multiplikation für die reellen Zahlen können wir je zwei Zahlen, die in der Form

$$z_n z_{n-1}\ldots z_1 z_0, z_{-1} z_{-2}\ldots$$

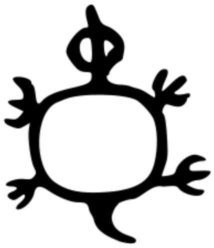
(mit Ziffern z_i aus $\{0,1,\ldots,9\}$, die nach rechts unendlich weiter gehen können) miteinander addieren und multiplizieren, insbesondere kommt dabei wieder eine Zahl in einer solchen Form heraus. Jemand kommt auf folgende Idee: „Es müsste dann ebenfalls möglich sein, auch Zahlen der Form

$$\ldots z_1 z_0, z_{-1} z_{-2}\ldots z_{-k}\,,$$

die also nach links unendlich weiter gehen dürfen, miteinander zu addieren und zu multiplizieren. Die Situation ist ja völlig symmetrisch (Spiegelung an der Einerstelle) zur Dezimalentwicklung und man muss nur die gleichen Rechenregeln analog anwenden“. Was ist davon zu halten?

Aufgabe 47.34. Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.



Aufgabe 47.35. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 47.36. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergiert.

Aufgabe 47.37. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede Dezimalbruchfolge in K konvergiert. Zeige, dass K vollständig ist.

Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ Elemente $t \in T$ mit

$$|t - x| < \epsilon$$

gibt.

Aufgabe 47.38. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 47.39. Zeige, dass die Menge der Dezimalbrüche in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 47.40. Es sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine fixierte natürliche Zahl und es sei T die Menge aller rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von k als Nenner schreiben kann. Zeige, dass T in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 47.41. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann dicht in $\mathbb{R}$ ist, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ gibt, die gegen x konvergiert.

Aufgabe 47.42. Zeige, dass die Menge der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 47.15 hilfreich.

Aufgabe 47.43. Zeige, dass die Untergruppe

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{3} \subseteq \mathbb{R}$$

dicht ist.

Aufgabe 47.44. Sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nichtnegativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.45. (4 Punkte)

Die Teilmenge

$$S = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{3} = \left\{ x + y\sqrt{3} \,|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

ist ein Körper. Zeige, dass es einen von der Identität verschiedenen bijektiven Ringhomomorphismus

$$\varphi \colon S \longrightarrow S$$

gibt.

Aufgabe 47.46. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 47.47. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K. Zeige, dass man

$$x_n = y_n + z_n$$

mit einer wachsenden Cauchy-Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einer fallenden Cauchy-Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schreiben kann.

Aufgabe 47.48. (4 Punkte)

Es sei $x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x. Zeige, dass die Folge $\sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Aufgabe 47.49. (3 Punkte)

Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,23\overline{4707}$$

gegeben ist.

Abbildungsverzeichnis