

Lineare Algebra und analytische Geometrie I**Arbeitsblatt 9****Die Pausenaufgabe**

AUFGABE 9.1. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis \mathfrak{u} und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gegebene Basis \mathfrak{v} im \mathbb{R}^3 .

Übungsaufgaben

AUFGABE 9.2. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^2 .

- Zeige, dass sowohl \mathfrak{v} als auch \mathfrak{u} eine Basis des \mathbb{R}^2 ist.
- Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis \mathfrak{v} die Koordinaten $(-2, 5)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis \mathfrak{u} ?
- Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von \mathfrak{v} nach \mathfrak{u} beschreibt.

AUFGABE 9.3. Bestimme die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}$ zum identischen Basiswechsel von \mathfrak{v} nach \mathfrak{v} .

AUFGABE 9.4. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis \mathfrak{u} und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 + 5i \\ 1 - i \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 4 + i \end{pmatrix},$$

gegebene Basis \mathfrak{v} im \mathbb{C}^2 .

AUFGABE 9.5.*

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}$ und $M_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$ für die Standardbasis \mathbf{u} und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis \mathbf{v} im \mathbb{R}^3 .

AUFGABE 9.6. Es sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq d$. Bestimme die Übergangsmatrizen zwischen den Basen $\mathbf{u} = X^0, X^1, X^2, \dots, X^d$ und $\mathbf{v} = P_0, P_1, P_2, \dots, P_d$ mit $P_0 = 1$ und

$$P_i = (X - 1) \cdots (X - i)$$

für $d = 0, 1, 2, \dots, 4$.

AUFGABE 9.7. Es sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathbf{u} = X^0, X^1, X^2, X^3$. Zeige, dass die Polynome

$X^3 + 3X^2 - X + 4$, $-X^3 + 4X^2 + 5X + 3$, $2X^2 - X + 1$, $3X^3 + 5X^2 + 7X - 2$ ebenfalls eine Basis von V bilden und bestimme die beiden Übergangsmatrizen.

AUFGABE 9.8. Es sei V der Vektorraum der 2×2 -Matrizen mit der Standardbasis

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Basis von V ist und bestimme die Übergangsmatrizen.

AUFGABE 9.9.*

Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum der Dimension n . Es seien $\mathbf{u} = u_1, \dots, u_n$, $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$ und $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_n$ Basen von V . Zeige, dass die Übergangsmatrizen zueinander in der Beziehung

$$M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{u}} = M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} \circ M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}$$

stehen.

AUFGABE 9.10.*

Es seien V und W endlichdimensionale K -Vektorräume. Es seien $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$ und $\mathbf{u} = u_1, \dots, u_n$ Basen von V und $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_m$ und $\mathbf{z} = z_1, \dots, z_m$ Basen von W . Es seien $M_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$ und $M_{\mathbf{z}}^{\mathbf{w}}$ die Übergangsmatrizen. Durch welche Übergangsmatrix wird der Basiswechsel von der Basis $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)$ zur Basis $(u_1, 0), \dots, (u_n, 0), (0, z_1), \dots, (0, z_m)$ vom Produktraum $V \times W$ beschrieben?

AUFGABE 9.11. Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der von

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum $U \subseteq K^3$ die Dimension 2 besitzt.

b) Bestimme eine Basis und die Dimension des Lösungsraumes $L \subseteq K^3$ der linearen Gleichung

$$-6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0.$$

c) Bestimme eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap L$.

d) Bestätige Satz 9.7 in diesem Beispiel.

AUFGABE 9.12. Zeige, dass der Raum der $m \times n$ -Matrizen über einem Körper K die direkte Summe aus den Spaltenräumen S_j , $j = 1, \dots, n$, ist, wobei der j -te Spaltenraum aus denjenigen $m \times n$ -Matrizen besteht, die in der j -ten Spalte beliebige Einträge und sonst überall den Eintrag 0 besitzen. Man gebe die direkte Summenzerlegung für die 3×4 -Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 10 & -2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

an.

AUFGABE 9.13. Zeige, dass der Raum der $n \times n$ -Matrizen über einem Körper K die direkte Summe aus dem Raum der Diagonalmatrizen, dem Raum der oberen Dreiecksmatrizen mit Nulldiagonale und dem Raum der unteren Dreiecksmatrizen mit Nulldiagonale ist.

AUFGABE 9.14.*

Man gebe ein Beispiel für Untervektorräume U_1, U_2, U_3 in einem Vektorraum V derart, dass $V = U_1 + U_2 + U_3$ ist, dass $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$ ist, und so, dass die Summe nicht direkt ist.

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

AUFGABE 9.15. Es sei $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Zeige, dass es eine direkte Summenzerlegung

$$V = G \oplus U$$

gibt, wobei G den Untervektorraum der geraden Funktionen und U den Untervektorraum der ungeraden Funktionen bezeichnet.

AUFGABE 9.16. Der Vektorraum V sei die direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2 . Zeige, dass ein Untervektorraum $U \subseteq V$ nicht die direkte Summe der Untervektorräume $U \cap V_1$ und $U \cap V_2$ sein muss.

AUFGABE 9.17. Bestimme ein direktes Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

AUFGABE 9.18.*

Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume gleicher Dimension. Zeige, dass U_1 und U_2 ein gemeinsames direktes Komplement besitzen.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 9.19. (4 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}$ und $M_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$ für die Standardbasis \mathbf{u} und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis \mathbf{v} im \mathbb{R}^3 .

AUFGABE 9.20. (6 (3+1+2) Punkte)

Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^3 .

a) Zeige, dass sowohl \mathbf{v} als auch \mathbf{u} eine Basis des \mathbb{R}^3 ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^3$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis \mathbf{v} die Koordinaten $(2, 5, 4)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis \mathbf{u} ?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von \mathfrak{v} nach \mathfrak{u} beschreibt.

AUFGABE 9.21. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \dots, v_n$.
Es sei $w \in V$ ein Vektor mit einer Darstellung

$$w = \sum_{i=1}^n s_i v_i,$$

wobei $s_k \neq 0$ sei für ein bestimmtes k . Es sei

$$\mathfrak{w} = v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n.$$

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$ und $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}}$.

AUFGABE 9.22. (8 (2+2+3+1) Punkte)

Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum $U \subseteq K^4$ die Dimension 3 besitzt.

b) Bestimme eine Basis und die Dimension des Lösungsraumes $L \subseteq K^4$ der linearen Gleichung

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0.$$

c) Bestimme eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap L$.

d) Bestätige Satz 9.7 in diesem Beispiel.