

## Die Pausenaufgabe

### Aufgabe 2.1.

Es sollen möglichst viele bijektive Abbildungen zwischen den Fingerspitzen der linken Hand und den Fingerspitzen der rechten Hand dadurch realisiert werden, dass sich jeweils die zugehörigen (aufeinander abgebildeten) Fingerspitzen berühren.

- (1) Realisiere die „natürliche“ Bijektion.
- (2) Realisiere diejenigen Bijektionen, bei denen zwei benachbarte Fingerspitzen ihr natürliches Gegenüber vertauscht berühren und die drei anderen Fingerspitzen ihr natürliches Gegenüber berühren (benachbarte Transposition).
- (3) Realisiere diejenigen Bijektionen, bei denen zwei Fingerspitzen ihr natürliches Gegenüber vertauscht berühren und die drei anderen Fingerspitzen ihr natürliches Gegenüber berühren (Transposition).
- (4) Realisiere diejenigen Bijektionen, bei denen genau zwei Fingerspitzen ihr natürliches Gegenüber berühren.
- (5) Realisiere diejenigen Bijektionen, bei denen genau eine Fingerspitze ihr natürliches Gegenüber berührt.
- (6) Realisiere diejenigen Bijektionen, bei denen keine Fingerspitze ihr natürliches Gegenüber berührt.



## Übungsaufgaben

**Aufgabe 2.2.** Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass  $\varphi$  injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass  $\psi$  surjektiv, aber nicht injektiv ist.

**Aufgabe 2.3.** Welche Funktionsvorschriften kennen Sie aus der Schule?

**Aufgabe 2.4.** Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ob  $f$  injektiv bzw. surjektiv ist?

**Aufgabe 2.5.** Welche bijektiven Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oder zwischen Teilmengen von  $\mathbb{R}$ ) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

**Aufgabe 2.6.\***

- (1) Es sei  $H$  die Menge aller (lebenden oder verstorbenen) Menschen. Untersuche die Abbildung

$$\varphi: H \longrightarrow H,$$

die jedem Menschen seine Mutter zuordnet, auf Injektivität und Surjektivität.

- (2) Welche Bedeutung hat die Hintereinanderschaltung  $\varphi^3$ ?  
 (3) Wie sieht es aus, wenn man die gleiche Abbildungsvorschrift nimmt, sie aber auf die Menge  $E$  aller Einzelkinder und auf die Menge  $M$  aller Mütter einschränkt?  
 (4) Seien Sie spitzfindig (evolutionsbiologisch oder religiös) und argumentieren Sie, dass die Abbildung in (1) nicht wohldefiniert ist.

**Aufgabe 2.7.** Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  mit  $x_1 < x_2$  auch  $f(x_1) < f(x_2)$  gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion  $f$  injektiv ist.

**Aufgabe 2.8.** Ist die Abbildung

$$\mathbb{Q}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}, x \longmapsto x^2,$$

injektiv? Ist sie surjektiv?

**Aufgabe 2.9.\***

Ist die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+, (a, b) \longmapsto (a + b, ab, a^b),$$

injektiv oder nicht?

**Aufgabe 2.10.** Bestimme die Hintereinanderschaltungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  für die Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

**Aufgabe 2.11.\***

Es seien  $L, M, N$  Mengen und  $F: L \rightarrow M$  und  $G: M \rightarrow N$  surjektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung  $G \circ F$  ebenfalls surjektiv ist.

**Aufgabe 2.12.\***

Es seien  $L, M, N$  Mengen und  $F: L \rightarrow M$  und  $G: M \rightarrow N$  injektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung  $G \circ F$  ebenfalls injektiv ist.

**Aufgabe 2.13.\***

Es seien  $L, M, N$  Mengen und

$$f: L \rightarrow M \text{ und } g: M \rightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: L \rightarrow N, x \mapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn  $g \circ f$  injektiv ist, so ist auch  $f$  injektiv.

Bei den folgenden Aufgaben zur Potenzmenge denke man an die Interpretation, wo  $G$  die Leute in einem Kurs sind und  $M = \mathfrak{P}(G)$  die möglichen (in Hinblick auf die Teilnehmer) kursinternen Parties sind. Bei Aufgabe 2.16 denke man an  $A = \text{Damen im Kurs}$ ,  $B = \text{Herren im Kurs}$ .

**Aufgabe 2.14.** Es sei  $G$  eine Menge und  $\mathfrak{P}(G)$  ihre Potenzmenge. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathfrak{P}(G) \rightarrow \mathfrak{P}(G), T \mapsto \complement T,$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung?

**Aufgabe 2.15.** Es sei  $G$  eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(G) \text{ und } \text{Abb}(G, \{0, 1\}).$$

**Aufgabe 2.16.\***

Es sei  $G$  eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$G = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(G)$  und der Produktmenge  $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ .

**Aufgabe 2.17.** Es seien  $M, N, L$  Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen  $\text{Abb}(M \times N, L)$  und  $\text{Abb}(M, \text{Abb}(N, L))$ .

Man mache sich diese Situation für  $M = N = [0, 1]$  und  $L = \mathbb{R}$  klar.

**Aufgabe 2.18.** Wie kann man sich den Graphen einer Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wie sich den Graphen einer Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vorstellen?

**Aufgabe 2.19.** Es sei  $F: L \rightarrow M$  eine Abbildung. Zeige, dass das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L), T \longmapsto F^{-1}(T),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen  $T, T_1, T_2 \subseteq M$ ):

- (1) 
$$F^{-1}(T_1 \cap T_2) = F^{-1}(T_1) \cap F^{-1}(T_2),$$
- (2) 
$$F^{-1}(T_1 \cup T_2) = F^{-1}(T_1) \cup F^{-1}(T_2),$$
- (3) 
$$F^{-1}(M \setminus T) = L \setminus F^{-1}(T).$$

**Aufgabe 2.20.** Es sei  $F: L \rightarrow M$  eine Abbildung. Zeige, dass das Bildnehmen

$$\mathfrak{P}(L) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), S \longmapsto F(S),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen  $S, S_1, S_2 \subseteq L$ ):

- (1)  $F(S_1 \cap S_2) \subseteq F(S_1) \cap F(S_2),$
- (2)  $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2),$
- (3)  $F(L \setminus S) \supseteq F(L) \setminus F(S).$

Zeige durch Beispiele, dass die beiden Inklusionen in (1) und (3) echt sein können.

**Aufgabe 2.21.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $F$  genau dann injektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L), T \longmapsto F^{-1}(T),$$

surjektiv ist.

**Aufgabe 2.22.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $F$  genau dann surjektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L), T \longmapsto F^{-1}(T),$$

injektiv ist.

Die Idee zu den folgenden Aufgaben stammt von

<http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Challenge/Challenge.html>, siehe auch

<http://www.vier-zahlen.bplaced.net/>.

**Aufgabe 2.23.** Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi: \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel  $(a, b, c, d)$  das Vierertupel

$$(|b - a|, |c - b|, |d - c|, |a - d|)$$

zuordnet. Es bezeichne  $\Psi^n$  die  $n$ -fache Hintereinanderschaltung von  $\Psi$ .

(1) Berechne

$$\Psi(6, 5, 2, 8), \Psi^2(6, 5, 2, 8), \Psi^3(6, 5, 2, 8), \Psi^4(6, 5, 2, 8) \dots,$$

bis das Ergebnis das Nulltupel  $(0, 0, 0, 0)$  ist.

(2) Berechne

$$\Psi(1, 10, 100, 1000), \Psi^2(1, 10, 100, 1000), \Psi^3(1, 10, 100, 1000), \Psi^4(1, 10, 100, 1000) \dots,$$

bis das Ergebnis das Nulltupel  $(0, 0, 0, 0)$  ist.

(3) Zeige  $\Psi^4(0, 0, n, 0) = (0, 0, 0, 0)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 2.24.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi: \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel  $(a, b, c, d)$  das Vierertupel

$$(|b - a|, |c - b|, |d - c|, |a - d|)$$

zuordnet. Bestimme, ob  $\Psi$  injektiv und ob  $\Psi$  surjektiv ist.

**Aufgabe 2.25.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi: \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel  $(a, b, c, d)$  das Vierertupel

$$(|b - a|, |c - b|, |d - c|, |a - d|)$$

zuordnet. Zeige, dass sich bei jedem Starttupel  $(a, b, c, d)$  nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

**Aufgabe 2.26.** Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi: \mathbb{Q}_{\geq 0}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}^4,$$

die einem Vierertupel aus nichtnegativen rationalen Zahlen  $(a, b, c, d)$  das Vierertupel

$$(|b - a|, |c - b|, |d - c|, |a - d|)$$

zuordnet. Zeige, dass sich nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

Wir werden später auch die Frage behandeln, wie es mit reellen Vierertupeln aussieht, siehe insbesondere Aufgabe 23.16.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 2.27.** (3 Punkte)

Bestimme die Hintereinanderschaltungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  für die Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

**Aufgabe 2.28.** (3 Punkte)

Man beschreibe eine Bijektion zwischen  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 2.29.** (3 Punkte)

Es seien  $L, M, N$  Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn  $g \circ f$  surjektiv ist, so ist auch  $g$  surjektiv.

Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

**Aufgabe 2.30.** (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow M, x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne  $\varphi^{1003}$ , also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von  $\varphi$  mit sich selbst.

**Aufgabe 2.31.** (5 Punkte)

Es seien  $L$  und  $M$  Mengen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \text{Abb}(L, M) \longrightarrow \text{Abb}(\mathfrak{P}(M), \mathfrak{P}(L)), f \longmapsto f^{-1},$$

bei der einer Abbildung das Urbildnehmen zugeordnet wird.

a) Zeige, dass  $\Psi$  injektiv ist.

b) Es sei  $L \neq \emptyset$ . Zeige, dass  $\Psi$  nicht surjektiv ist.

### Die Aufgabe zum Aufgeben

Lösungen zu der folgenden Aufgabe direkt an den Dozenten.

**Aufgabe 2.32.** (8 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel  $(a, b, c, d)$  das Vierertupel

$$(|b - a|, |c - b|, |d - c|, |a - d|)$$

zuordnet. Man gebe ein Beispiel für ein Vierertupel  $(a, b, c, d)$  mit der Eigenschaft an, dass sämtliche Iterationen  $\Psi^n(a, b, c, d)$  für  $n \leq 25$  nicht das Nulltupel liefern. Überprüfe das Ergebnis auf

<http://www.vier-zahlen.bplaced.net/raetsel.php> .

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

- Quelle = Fingerpermutation2.jpg , Autor = Benutzer Bocardodarapti  
auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 1
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9