Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 52

Hier hat Vorli die Fragebögen von Dr. Eisenbeis zerfetzt. Zum Glück hat Dr. Eisenbeis alles schon digital abgespeichert.

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema

Wir kommen jetzt zu hinreichenden Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema einer Funktion

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R},$$

die auf Eigenschaften der zweiten Richtungsableitungen, genauer der Hesse-Form, beruhen und die entsprechenden Kriterien in einer Variablen verallgemeinern. Zunächst brauchen wir ein Lemma, das beschreibt, wie die Definitheit (oder der „Definitheitstyp") der Hesse-Form vom Punkt abhängt.

Lemma 52.1. *Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und*

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_P f$ positiv (negativ) definit sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ in jedem Punkt $Q \in U$ positiv (negativ) definit ist.

Beweis. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und sei $H(Q)$ die Gramsche Matrix zur Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ im Punkt $Q \in G$ bezüglich dieser Basis. Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen hängt $H(Q)$ stetig von Q ab. Daher hängen auch die Determinanten der quadratischen Untermatrizen von $H(Q)$ stetig von Q ab. Die Determinanten

$$D_k(P) = \det((H(P)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$$

sind nach Korollar 44.16 alle von 0 verschieden. Daher gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass für alle $Q \in U$ die Determinanten

$$D_k(Q) \,=\, \det((H(Q)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$$

das gleiche Vorzeichen haben wie $D_k(P)$. Da diese Vorzeichen nach Korollar 44.16 über die Definitheit entscheiden, folgt die Behauptung. □

Satz 52.2. *Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und*

$$f\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in G$ mit $(Df)_P = 0$. Dann gelten folgende Aussagen.

1. *Wenn $\operatorname{Hess}_P f$ negativ definit ist, so besitzt f ein isoliertes lokales Maximum in P.*
2. *Wenn $\operatorname{Hess}_P f$ positiv definit ist, so besitzt f ein isoliertes lokales Minimum in P.*
3. *Wenn $\operatorname{Hess}_P f$ indefinit ist, so besitzt f in P weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.*

Beweis. (1). Aufgrund von Lemma 52.1 gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ negativ definit für alle $Q \in U(P, \delta)$ ist. Für alle Vektoren $v \in V$, $v \in U(0, \delta)$, gibt es nach Satz 50.5 ein $c = c(v) \in [0, 1]$ mit

$$f(P+v) \,=\, f(P) + \sum_{|\,r\,|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P+cv) \cdot v^r \,=\, f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+cv} f(v,v),$$

wobei die zweite Identität auf Aufgabe 50.13 beruht. Da die Hesse-Form negativ definit ist, steht rechts für $v \neq 0$ eine Zahl, die echt kleiner als $f(P)$ ist. Daher liegt ein isoliertes lokales Maximum vor. (2) wird wie (1) bewiesen oder durch betrachten von $-f$ darauf zurückgeführt. (3). Sei $\operatorname{Hess}_P f$ indefinit. Dann gibt es Vektoren v und w mit

$$\operatorname{Hess}_P f(v,v) > 0 \text{ und } \operatorname{Hess}_P f(w,w) < 0\,.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Hesse-Form gelten diese Abschätzungen auch für $\operatorname{Hess}_Q f$ für Q aus einer offenen Umgebung von P (mit den gleichen Vektoren v und w). Wir können durch Skalierung von v und w annehmen, dass $P+v$ und $P+w$ zu dieser Umgebung gehören. Wie im Beweis zu Teil (1) gilt daher (v und w sind nicht 0)

$$f(P+v) \,=\, f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+cv} f(v,v) \,>\, f(P)$$

und

$$f(P+w) \,=\, f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+dw} f(w,w) \,<\, f(P)$$

mit $c, d \in [0, 1]$. Also kann in P kein Extremum vorliegen. □

Beispiel 52.3. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x + 3x^2 - 2xy - y^2 + y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 6x - 2y \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y + 3y^2\,.$$

Zur Berechnung der kritischen Punkte dieser Funktion eliminieren wir x und erhalten die Bedingung

$$9y^2 - 8y + 1 \,=\, 0,$$

die zu

$$y \,=\, \frac{\pm\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}$$

führt. Die kritischen Punkte sind also

$$P_1 = \left(\frac{2\sqrt{7}-1}{54},\, \frac{\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9} \right) \text{ und } P_2 = \left(\frac{-2\sqrt{7}-1}{54},\, \frac{-\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9} \right).$$

Die Hesse-Form ist in einem Punkt $Q = (x,y)$ gleich

$$\operatorname{Hess}_Q f \,=\, \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2+6y \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Definitheitstyps ziehen wir Korollar 44.16 heran, wobei der erste Minor, also 6, natürlich positiv ist. Die Determinante der Hesse-Matrix ist

$$-16 + 36y\,,$$

was genau bei $y > \frac{4}{9}$ positiv ist. Dies ist im Punkt P_1 der Fall, aber nicht im Punkt P_2. Daher ist die Hesse-Matrix im Punkt P_1 nach Korollar 44.16 positiv definit und somit besitzt die Funktion f im Punkt P_1 nach Satz 52.2 ein isoliertes lokales Minimum, das zugleich ein globales Minimum ist. In P_2 ist die Determinante negativ, so dass dort die Hesse-Form indefinit ist und somit, wiederum nach Satz 52.2, kein Extremum vorliegen kann.

Beispiel 52.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^y.$$

Es ist

$$x^y \,=\, e^{(\ln x)\cdot y}.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x} \cdot e^{(\ln x)\cdot y} = \frac{y}{x} \cdot x^y \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\ln x) \cdot e^{(\ln x)\cdot y} = (\ln x) \cdot x^y\,.$$

Da die Exponentialfunktion stets positiv ist, ist $P = (1,0)$ der einzige kritische Punkt. Die Hesse-Matrix in einem Punkt (x,y) ist

$$\begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot e^{(\ln x)\cdot y} & \frac{1+y\ln x}{x} \cdot e^{(\ln x)\cdot y} \\ \frac{1+y\ln x}{x} \cdot e^{(\ln x)\cdot y} & (\ln x)^2 \cdot e^{(\ln x)\cdot y} \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot x^y & \frac{1+y\ln x}{x} \cdot x^y \\ \frac{1+y\ln x}{x} \cdot x^y & (\ln x)^2 \cdot x^y \end{pmatrix}.$$

In P ist dies

$$\mathrm{Hess}_P\, \varphi \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar 44.16 ist daher die Hesse-Form im kritischen Punkt weder positiv definit noch negativ definit. Man kann direkt zeigen, dass diese Matrix indefinit ist (vom Typ $(1,1)$), da diese Bilinearform auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ positiv und auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ negativ definit ist. Nach Satz 52.2 liegt in diesem Punkt also kein Extremum vor.

Dies kann man auch ohne Differentialrechnung erkennen. Für $x = 1$ oder $y = 0$ ist $x^y \,=\, 1$. Ansonsten gelten die folgenden Beziehungen.

(1) Für $0 < x < 1$ und $y > 0$ ist $x^y \,<\, 1$.
(2) Für $x > 1$ und $y > 0$ ist $x^y \,>\, 1$.
(3) Für $0 < x < 1$ und $y < 0$ ist $x^y \,>\, 1$.
(4) Für $x > 1$ und $y < 0$ ist $x^y \,<\, 1$.

Daher gibt es in jeder Umgebung von $(1,0)$ Punkte, an denen die Funktionswerte größer bzw. kleiner als 1 sind.

Bemerkung 52.5. Es sei

$$g\colon\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und

$$a \,=\, x_0 \,<\, x_1 \,<\, x_2 \,<\, \ldots \,<\, x_n \,<\, b \,=\, x_{n+1}$$

eine Unterteilung des Intervalls durch n Zwischenpunkte (in $n+1$ Teilintervalle). Dazu gehört die Treppenfunktion, die auf $[x_i, x_{i+1}[$ den konstanten Wert $g(x_i)$ annimmt. Wenn g monoton wachsend ist, so ist dies eine untere Treppenfunktion, und das zugehörige Treppenintegral ist eine untere Schranke für das bestimmte Integral $\int_a^b g(t)dt$. Das Treppenintegral ist durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) \,=\, \sum_{i=0}^{n} g(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

gegeben. Wir fragen uns, für welche Intervallunterteilung mit n Teilpunkten das Treppenintegral maximal oder minimal wird. Dazu kann man die differentiellen Methoden zur Bestimmung von Extrema für Funktionen in mehreren Variablen verwenden (nämlich den variablen Unterteilungspunkten $x_1, \ldots, x_n$), vorausgesetzt, dass g (hinreichend oft) differenzierbar (in einer Variablen) ist. In diesem Fall sind die partiellen Ableitungen von f gleich

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \,=\, g'(x_i)(x_{i+1} - x_i) - g(x_i) + g(x_{i-1})$$

für $i \,=\, 1, \ldots, n$ (wobei $x_0 \,=\, a$ und $x_{n+1} \,=\, b$ zu lesen ist). Als Definitionsbereich von f kann man die offene Menge

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b\} \,\subseteq\, \mathbb{R}^n$$

oder aber $[a,b]^n$ wählen. Es ist im Allgemeinen schwierig, die kritischen Punkte dieser Abbildung zu bestimmen.

Beispiel 52.6. Wir wollen für die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t) = 1 - t^3,$$

und das Einheitsintervall $[0,1]$ bestimmen, für welche zwei Unterteilungspunkte $0 < x < y < 1$ das Treppenintegral der zugehörigen (dreistufigen) unteren Treppenfunktion maximal wird. Das Treppenintegral wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\big(1-x^3\big) + (y-x)\big(1-y^3\big) \\ &= x - x^4 + y - y^4 - x + xy^3 \\ &= -x^4 + y - y^4 + xy^3 \end{aligned}$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 + y^3$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 4y^3 + 3xy^2.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte. Aus der ersten partiellen Ableitung ergibt sich die Bedingung

$$y = \sqrt[3]{4}x$$

und daraus ergibt sich mit der zweiten partiellen Ableitung die Bedingung

$$1 - 16x^3 + 3 \cdot 4^{2/3}x^3 = 0,$$

also

$$\big(16 - 3 \cdot 4^{2/3}\big)x^3 = 1$$

bzw.

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}} \right) \\ &\cong (0,4911,\ 0,7796) \end{aligned}$$

der einzige kritische Punkt. Wir bestimmen die Hesse-Matrix in diesem Punkt, sie ist

$$\operatorname{Hess}_P f = \begin{pmatrix} -12x^2 & 3y^2 \\ 3y^2 & -12y^2 + 6xy \end{pmatrix}$$

und in P gleich

$$\begin{pmatrix} -2,8942 & 1,8233 \\ 1,8233 & -4,9961 \end{pmatrix},$$

also negativ definit nach Korollar 44.16. Daher liegt in P ein Maximum nach Satz 52.2 vor.

Beispiel 52.7. Wir wollen für die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t,$$

und das Einheitsintervall $[0,1]$ bestimmen, für welche n Unterteilungspunkte $0 < x_1 < \ldots < x_n < 1$ das Treppenintegral der zugehörigen ($(n+1)$-stufigen) unteren Treppenfunktion maximal wird. Das Treppenintegral wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + \cdots \\ &\quad + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + x_n(1 - x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 - 2x_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i$$

für $i = 2, \ldots, n-1$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = x_{n-1} + 1 - 2x_n.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte, indem wir die partiellen Ableitungen gleich 0 setzen. Die ersten $n-1$ Gleichungen ergeben sukzessive die Bedingungen

$$x_i = i x_1$$

für alle i. Dies zeigt man durch Induktion, der Induktionsanfang ($i = 1$) ist trivial, $i = 2$ folgt direkt aus der ersten Gleichung und der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$x_{i+1} = -x_{i-1} + 2x_i = -(i-1)x_1 + 2ix_1 = (i+1)x_1.$$

Aus der letzen Gleichung folgt schließlich

$$0 = x_{n-1} + 1 - 2x_n = 1 + (n-1-2n)x_1 = 1 - (n+1)x_1$$

und somit $x_1 = \frac{1}{n+1}$. Der einzige kritische Punkt liegt also in der äquidistanten Unterteilung vor. Die Hesse-Form ist (unabhängig vom Punkt) gleich

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist negativ definit nach Korollar 44.16. Daher liegt in der äquidistanten Unterteilung nach Satz 52.2 das Maximum vor.

Abbildungsverzeichnis