算學叢書

第七種

二次方程式詳論

何　魯著

商務印書館發行

自序

本書所論同解原理及一二次方程式取材均與近行之本不同讀者能於得材之外深究證理演題之方法細尋理論推闡之次第必能助其精進余九年夏在南京高等師範授暑期學校算學課卽節取此書與初等代數倚數變跡而成凡欲於初等代數求完全了解者宜合讀此二書余演講之恉蓋在是余介石嚴濟慈二君於原稿均曾詳加校訂且多所增益余於二君均深感謝其勤勞

民國十二年季曾何魯識於學海室

二次方程式詳論

目　錄

二次方程式詳論

第　一　章

同　解　原　理

§1. <u>等式</u>　表 A, B 二量相等用 $=$ 符號,如

$$A=B$$

讀如 A 等於 B.

等式有二;有<u>全等式</u>,如

$$(x+1)^2=x^2+2x+1$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)=(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2 \qquad \textit{Lagrange}$$

等是也;全等式云者,兩端於代字(如 x, a, b, α, β 等)任為何數時(如 $1, 2, 3 \ldots$)均相等也,有時用 $\equiv$ 符號以示別.如

$$A\equiv B$$

為全等式是也.

有<u>方程式</u>,如

$$3x+1=2x+2$$

此式除 $x=1$ 以外即不能合.故方程式者,代字(未可稱未知數)等於某某定數時,始合者也.此定數謂之上式之根,亦曰解.

§2. <u>同解式</u>　謂

$$A=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$A'=B' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

為同解式者,當(1)式於代字等於某組特值(值為定數)時能合後,(2)式亦於同一代字等於同一組特值能合;反之,(2)式於代字等於某組特值合後,(1)式在同一情形亦能合也;如

$$3x+1=2x+2$$

$$3x=2x+1$$

是也.

在解方程式及聯立方程式,同解式為用極多,而近行教本,於此咸闕,遇式每肆意變化,由甲而乙,而丙;不知丙之解,不必為乙之解,乙之解不必為甲之解;或丙之解,有為乙之解者,而不盡為乙之解;乙之解,亦不盡為甲之解也.必也由甲而乙,反覆證明其有同解,由乙而丙亦然,於是甲乙丙均為同解式矣.任解其一式,卽得他二式之解,如是乃稱精確.

今試問曰,已與一式,何以能得其同解式? 曰,一式受二種原理之支配,可成同解式.今試分究此二種原理:

§3. 同解原理一

如有

$$A=B\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

C 為任何數,則

$$A+C=B+C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

與(1)式為同解式.

余謂(1)之解卽(2)之解,蓋所謂(1)之解者,卽在 A, B 式內所有代字變為特值時,A, B 兩式數值可相等,如是則兩端同加 C 仍為相等無疑,卽此組特值可以使(2)式合也,反之,如與(2)式中代字以某組特值俾其合,C 與 C 本相等,則 A, B 二式必以此組特值有等值,卽(1)式可合,是(2)之解亦(1)之解也,故(1)(2)兩式為同解式.

§4. 應用

已與

$$3x+1=2x+2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩端同加 $-2x$, 則有

$$3x-2x+1=2x-2x+2$$

$$x+1=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

兩端又同加 -1, 則有

$$x+1-1=2-1$$

即

$$x=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

即 (2) 之解, 亦即 (1) 之解也.

凡移一項, 由左端至右端, 或由右端至左端, 但變此項之號即可, 即本此出, 於是

$$Ax+B=A'x+B'$$

可書為

$$ax+b=0$$

中

$$a=A-A'$$

$$b=B-B'$$

推廣之, 任一方程式, 可以符號

$$f(x)=0$$

表之.

§5. 方程式之根及其特性

如令

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m=0$$

中 m 為正整數, $f(x)$ 稱為多項全式, $f(x)=0$ 為 m 次方程式, 謂 a 為 $f(x)=0$ 之根, 必

$$f(a)=0$$

特性一　如以 $x-a$ 除 $f(x)$，則餘數爲 $f(a)$，因

$$f(x)=(x-a)f(x)+R$$

令 $x=a$，則有

$$R=f(a)$$

特性二　如 a 爲 $f(x)$ 之根，則 $R=0$ 卽 $f(a)=0$，故此時 $f(x)$ 可以 $(x-a)$ 除盡.

特性三　凡一 m 次方程式至少有一根，或虛或實，故有 m 根. 此節證從略，以無涉易之法故也.

§ 6. 定理

如一 m 次方程式，有 $(m+1)$ 不同根，則此式爲全等式.

設已與三次方程，爲

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

設此式有四根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$；有

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

因 δ 亦爲根，故

$$f(\delta)=0$$

卽

$$a(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)=0$$

但 $\delta-\alpha$, $\delta-\beta$, $\delta-\gamma$ 均不爲零，必 $a=0$，於是 x 任以何數 λ

$$a(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)=0$$

均爲零，是 $f(x)$ 爲全等式矣. 亦卽有

$$a=0$$

$$b=0$$

$$c=0$$

$$d=0$$

§7. 定理 如兩同次之係數成比例則兩式有同根.

設
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$g(x)=a'x^3+b'x^2+c'x+d'$$

如二式之係數成比例

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\lambda$$

則
$$a=\lambda a',\ b=\lambda b',\ \cdots\cdots d=\lambda d'$$

代入,有
$$f(x)\equiv\lambda g(x)$$

故 $g(x)=0$ 之根,即 $f(x)=0$ 之根也.

反之,設 f, g 有同根,必可得一數 λ,俾成全等式

$$f(x)\equiv\lambda g(x)$$

即
$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv\lambda a'x^3+\lambda b'x^2+\lambda c'x+\lambda d'$$

亦即
$$(a-\lambda a')x^3+(b-\lambda b')x^2+(c-\lambda c')x+(d-\lambda d')\equiv0$$

故有,準§6
$$a-\lambda a'=0$$
$$b-\lambda b'=0$$
$$c-\lambda c'=0$$
$$d-\lambda d'=0$$

即
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$

§8. 同解原理二 設

$$A=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

如 m 不爲零,亦不爲無極,則

$$mA=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

與(1)式有同解.

其一. (1)之解卽(2)之解.蓋代入解後,A旣等於0.原設m不爲無極,故有$mA=0$卽(2)能合也.

其二. (2)之解卽(1)之解.蓋代入解後

$$mA=0$$

二因子中必一爲零.m原設不爲零,是$A=0$卽(1)式能合也.

如m爲常數不爲零者

$$A=0$$

$$mA=0$$

恆爲同解式.若m亦含有代字(或未知數),則(1)(2)兩式不必盡有同解.以(1)之解必爲(2)之解,而(2)之解屬於

$$m=0$$

者,則不必能合(1)式故也.故(2)式之解廣於(1)式.解(2)式後,當細究其能合(1)式與否,不可漫幷異解而納之也.[合(2)不合(1)者曰異解]

§9. 應用

依定義,如A,B均爲多項全式,則

$$\frac{A}{B}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

爲有理方程式.下列各情形能合,卽得有理式之解.

1	$A=0$	$B\neq 0$	
2	$A=$有限	$B=\infty$	
3	$A=0$	$B=0$	$\frac{A}{B}$之眞值爲0
4	$A=\infty$	$B=\infty$	$\frac{A}{B}$之眞值爲0

例. 試解有理式

$$\frac{x^2(x^2-5x+6)}{(x-2)(x-3)^2(x+2)^2}-\frac{1}{(x-3)(x+2)}=0$$

令 $$m=(x-2)(x-3)^2(x+2)^2$$

以 m 徧乘，得 $x^2(x^2-5x+6)-(x-2)(x-3)(x+2)=0$

亦卽
$$\begin{aligned} & x^2(x-2)(x-3)-(x-2)(x-3)(x+2) \\ &=(x-2)(x-3)\{x^2-(x+2)\} \\ &=(x-2)(x-3)(x+1)(x-2) \\ &=(x-2)^2(x-3)(x+1)=0 \end{aligned}$$

其根為
$$x=2$$
$$x=3$$
$$x=-1$$

其一. 以 -1 代 x，不能使 m 為 0，故 $x=-1$ 為根.

其二. 當 $x=2$. 有 $\dfrac{(x-2)^2(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-3)^2(x+2)^2}=\dfrac{0}{0}$

依定義，其眞值為 $\lim\limits_{x=2}\dfrac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x+2)^2}$

此限為 0，故 $x=2$ 亦為根.

其三. 當 $x=3$. $\dfrac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x+2)^2}$

亦成不定式 $\dfrac{0}{0}$，其限為 $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)^2}$

當 $x=3$ 趨進於無極，故 $x=3$ 非根.

其四. 當 $x=\infty$ 時 $\dfrac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x+2)^2}$

可書為 $$\frac{x^3+\varepsilon}{x^4+\varepsilon'}$$

$\varepsilon\varepsilon'$對於其前項爲無窮小，故其限爲

$$\frac{x^3}{x^4} \sim \frac{\infty}{\infty}$$

其眞値爲
$$\frac{1}{x}$$

於x爲無極時爲0，於是$x=\infty$爲根.

故所與式之根，爲
$$\left| \begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=\infty \end{array} \right.$$

第 二 章

§10. 一次方程式

其最普通之形爲

$$ax+b=0$$

1　$a \neq 0$　立得解　$x=-\frac{b}{a}$

與式爲獨解式.

2　$a \sim 0$　$b \neq 0$　$x \sim \infty$

此時爲無解式.

3　$a \sim 0$　$b \sim 0$

所與爲無定式.以x任爲何數均合故也.

§11. 關於一次方程式之問題

I. 問題　Hiéron 金製之冠重 £20. Archimède 水中稱之少 £$1\frac{1}{4}$. 假定此冠係金銀羼做,求金銀之重.

(金之比重爲19)

(銀之比重爲10.5)

解. 令x爲金重,$(20-x)$即銀重.(磅爲單位)

如以重一磅之水之體積爲單位,則x磅金之體積爲

$$\frac{x}{19}$$

而$(20-x)$磅銀之體積爲　$\frac{20-x}{10.5}$

金冠之體積爲　$\frac{x}{19}+\frac{20-x}{10.5}$

依物理原則凡物入水稱其失重等於物體排出水重今金冠失重爲$\frac{5}{4}$磅則排出水體積亦爲$\frac{5}{4}$,於是應有

$$\frac{x}{19}+\frac{20-x}{10.5}=\frac{5}{4}$$

由此,得 $x=15.367$ 磅

銀重 = 4.633

其精密階級爲 $\frac{1}{1000}$

§ 12. II. 問題 三水管同給一水池.

第一第二管同時開 12鐘 能將水池注滿.

第二第三管同時開 20鐘 能將水池注滿.

第三第一管同時開 15鐘 能將水池注滿.

如於水池空時將三管齊開,若干時能使水池滿.

解. 令x爲第一管獨開注滿水池鐘數,則一點鐘時間第一管能注水池之$\frac{1}{x}$.

同樣,y爲第二管注滿水池鐘數,$\frac{1}{y}$爲一鐘時間所注水池部分.

z爲第三管注滿水池鐘數,$\frac{1}{z}$爲一鐘時間所注水池部分.

如三管同開則一鐘時間水池應滿

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

部分,其注滿水池時間應爲

$$t=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

依題設
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$$

相加得
$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15}$$
$$=\frac{5+3+4}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

亦即
$$\frac{2}{t}=\frac{1}{5}$$

故
$$t=10\text{點鐘}$$

即三管同開,10點鐘能將水池注滿.

§13. 關於勻動之問題

一動點駛行之路,與時間成比例者,此種動爲勻動.

令 s 爲駛行路長

t 爲時間(且設 $s=0$ 當 $t=0$)

則有
$$\frac{s}{t}=v=\text{常數}$$

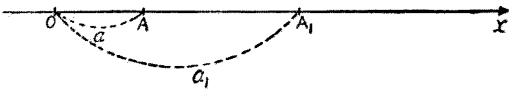
v 爲動點駛行速率.例如1點鐘久行3里,2點鐘久行6里,...爲勻動
$$v=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\cdots\cdots\cdots\cdots 3$$

在
$$s=vt$$

式中,任知二數,可求第三數.

§ 14. III. 問題 求一直路上兩匀動點 M, M_1, 其速率爲 v, v_1 者, 之遇處及相遇時間.

fig. 1



解. A 上爲 M 點之起點. A_1 上爲 M_1 之起點. 任取 O 爲原點.

俾 $\left.\begin{array}{l} OA\ =a \\ OA_1=a_1 \end{array}\right\}$ 均爲已知

設 s 爲 M 經 t 鐘後距 O 點遠近, 則

$$s=a+vt$$

s_1 爲 M_1 經 t 鐘後距 O 點遠近, 則

$$s_1=a_1+v_1t$$

欲二點相遇, 必 $s=s_1$

即 $$a+vt=a_1+v_1t$$

$$(v-v_1)t=a_1-a$$

如 $v \neq v_1$, 則有 $t=\dfrac{a_1-a}{v-v_1}$

如相遇時間. 其相遇地點, 可以距 O 點遠近定之

$$s=s_1=a+v\frac{a_1-a}{v-v_1}$$

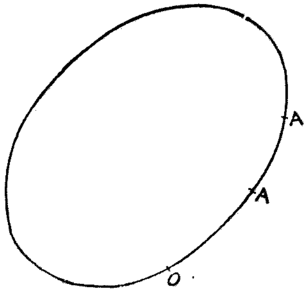
$$=\frac{a_1v-av_1}{v-v_1}$$

如 $v=v_1$, $a_1 \neq a$ 無解,

如 $v=v_1$, $a_1=a$ 無窮解, 蓋兩動點 M, M_1, 有同一速度, 由同一點啓行, 常不離開故也.

§15. IV. 問題 同前問題,惟將直路變為任一圜路,如 fig. 2.

fig. 2.



同前,令 $$s=a+vt$$

$$s_1=a_1+v_1t$$

此時欲求二點相遇處,不必 $s=s_1$,但 $s-s_1$ 為圜路全長之整倍數皆可. 卽

$$s-s_1=nl \qquad n \text{ 為整數.}$$

亦卽 $$a+vt-(a_1+v_1t)=nl$$

亦卽 $$(v-v_1)t+(a-a_1)=nl$$

設 $v-v_1 \neq 0$, 故 $$t=\frac{nl}{v-v_1}+\frac{a_1-a}{v-v_1}$$

設第一相遇處,當 $n=0$, 則相遇時間為

$$t_0=\frac{a_1-a}{v-v_1}$$

$n=1$, 相遇時間為 $$t_1=\frac{a_1-a}{v-v_1}+\frac{l}{v-v_1}=t_0+\frac{l}{v-v_1}$$

$n=2$, 得 $$t_2=\frac{a_1-a}{v-v_1}+\frac{2l}{v-v_1}=t_1+\frac{l}{v-v_1}$$

依此類推 $$t_n=\frac{a_1-a}{v-v_1}+\frac{nl}{v-v_1}=t_{n-1}+\frac{l}{v-v_1}$$

令 $$\theta=\frac{l}{v-v_1}$$

θ 為一常數,又為兩相遇時間之勻距.

蓋 $$t_1=t_0+\theta$$

$$t_2=t_1+\theta=t_0+2\theta$$

$$t_n=t_{n-1}+\theta=t_0+n\theta$$

故也.令T爲M繞圜路一次之時間,則

$$T=\frac{l}{v}$$

同理,令T_1爲M_1繞圜路一次之時間,則

$$T_1=\frac{l}{v_1}$$

於是,由
$$\theta=\frac{l}{v-v_1}$$

得
$$\frac{v-v_1}{l}=\frac{1}{\theta}$$

亦卽
$$\frac{v}{l}-\frac{v_1}{l}=\frac{1}{\theta}$$

亦卽
$$\frac{1}{T}-\frac{1}{T_1}=\frac{1}{\theta}$$

§ 16. V. 問題 求錶上分針時針相遇時間.

解. 取鐘爲單位,并各在分針及時針上取距心等於1者M, M_1兩點.則M一週所經路,爲2π其每鐘速率爲2π,故

$$T=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

M_1一週所經路,亦爲2π惟每鐘速率爲$\frac{2\pi}{12}$,故

$$T_1=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{12}}=12$$

於是
$$\frac{1}{\theta}=\frac{1}{1}-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

$$\theta=\frac{12}{11}=1+\frac{1}{11}$$

如第一次相遇時間爲正午,則第二次相遇時間爲

$$1^{h}+\frac{1}{11}$$

第三次 $$2^{h}+\frac{2}{11}$$

第 n 次 $$(n-1)^{h}+\frac{n-1}{11}$$

第三章

§ 17. 不等式原理

原理一. 如 $A>B$

亦有 $A+C>B+C$

若 $C=-B$, $A>B$

可變爲 $A-B>0$

原理二. 如 $A>B$ 又設 $C>0$, 則有

$$AC>BC$$

蓋 $A>B$

可書爲 $A-B>0$

C 旣爲正, 以 C 乘之, 有 $C(A-B)>0$

$$AC-BC>0$$

亦卽 $AC>BC$

如 C 爲負 $C(A-B)<0$

$$AC-BC<0$$

卽 $AC<BC$

於是凡以一數乘不等式之兩端時, 必確知此數之號乃可. 如不知其號, 則不能以之乘不等式之兩端.

§ 18. **原理三.** 如 A, B 均爲正, 而 $A>B$

亦有 $A^2>B^2$

例如 $4>3$

兩端方之 $16>9$

如A,B均爲負而 $A>B$

方之當有 $A^2<B^2$

例如 $-4<-3$

而 $(-4)^2>(-3)^2$

卽 $16>9$

注意. 當A,B不同號時,則不能究,兩端方之,如

$$\left.\begin{array}{l}4>-3\\4>-4\\4>-5\end{array}\right\}\text{而}\quad\begin{array}{l}16>9\\16=16\\16<25\end{array}$$

§19. 原理四. 如有 $A>B$ $A'>B'$ 則亦有

$$A+A'>B+B'$$

但後式不能代替任一前式,換言之

$$\text{I}\begin{cases}A>B\\A'>B'\end{cases}\qquad\text{II}\begin{cases}A>B\\A+A'>B+B'\end{cases}\qquad\text{III}\begin{cases}A'>B'\\A+A'>B+B'\end{cases}$$

II, III式不必與I式同時合也,如用II式

$$A+A'>B+B'$$

可書爲 $A+A'-(B+B')>0$

或 $(A-B)+(A'-B')>0$

此時$A-B>0$但不必有$A'>B'$此式亦可合也,卽II式不一定能生$A'>B'$之結果也,用III式證同故從略.

注意. 已與 $A>B$

$A'>B'$

不必亦有 $A-A'>B-B'$

卽不能就兩不等式施以減法也.

如 $$4>3$$

$$3>1$$

相減得 $$1<2$$

§ 20. **原理五.** 設 A, B, A', B' 均為正，如有

$$A>B$$

$$A'>B'$$

亦有 $$AA'>BB'$$

證. 蓋後式可書為 $AA'-BB'>0$

而 $$AA'-BB'=A'(A-B)+B(A'-B')$$

中 $$A'>0 \qquad B>0 \qquad A-B>0 \qquad A'-B'>0$$

故 $$AA'-BB'>0$$

亦即 $$AA'>BB'$$

但 $$A>B \quad 與$$

$$AA'>BB'$$

兩式，未必能生 $$A'>B'$$

而 $A'>B'$ 與 $AA'>BB'$ 兩式，不必能生 $A>B$ 也.

系. 如 $$A>B$$

$$A'<B'$$

則有 $$\frac{A}{A'}>\frac{B}{B'}$$

§ 21. <u>一次不等式</u> 其形為

$$ax+b\gtreqless 0$$

設欲解 $$ax+b>0$$

其一. $a>0$ $$x>-\frac{b}{a}$$

其二. $a<0$ $$x<-\frac{b}{a}$$

§ 22. 一次未定式 凡一一次方程式,含有二個以上未知數者,爲不定式,如

$$ax+by-c=0$$

是也. 如 $a\neq 0$ 可得

$$x=\frac{c-by}{a}$$

每與 y 一值 y_0, x 恆有一當相値 $x_0=\frac{c-by_0}{a}$, 故有無窮組值能合上式也. 如單求整數解或正整數解,則往往只有有限之解,或竟無解. (觀於此類問題,宜參看比人 Césaro 之著作,法國 Intermèdìares des Mathématiques 雜誌,及余撰"治算學方法"見"科學"三卷八期)

第 四 章

§ 23. 聯立多元一次方程式

定義. 如與 $$\mathrm{I}\begin{cases} f(x, y, \ldots)=0 \\ g(x, y, \ldots)=0 \end{cases}$$

如能求出一組特值 $x_0\,y_0\ldots$ 代入上兩式同時合者,則 $f=0$, $g=0$ 爲有解聯立式,否則爲無解式.如一組值 $x_1\,y_1\ldots$ 可合 $f=0$, 而另一組值 $x_2\,y_2\ldots$ 可合 $g=0$, 而不合 $f=0$, 則 $x_1\,y_1\ldots$, $x_2\,y_2\ldots$ 不得爲 I 之解, I 幷不得稱聯立式.

§ 24. 同解式, 定理一

如 M 及 N 不爲零亦不爲無極,則 $$\mathrm{I}\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \quad 與 \quad \mathrm{II}\begin{cases} A=0 \\ MA+NB=0 \end{cases}$$

有同解: 其一. I 之解卽 II 之解,蓋 $A=0$, $B=0$ 時, M 及 N 均不爲無極,亦必有 $MA+NB=0$, 卽 II 式合也.

其二. II 之解卽 I 之解,蓋 $A=0$ 後其第二式變爲 $NB=0$, 原設 $N\neq 0$, 故必有 $B=0$, 卽 I 式可合也.

§ 25. 定理二

如 M, N, M', N' 均爲有限,而 $MN'-M'N \neq 0$, 則 $$\mathrm{I}\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \qquad \mathrm{II}\begin{cases} MA+NB=0 \\ M'A+N'B=0 \end{cases}$$

有同解: 其一. I 合後, II 無不合,此易明.

其二. II 式可以

$$N'(MA+NB)-N(M'A+N'B)=0$$

代其一卽 $$(MN'-M'N)A=0$$

原設 $MN'-M'N\neq 0$, 故 $A=0$ 而 MA 亦 $=0$.

於是 $NB=0$ $N\neq 0$, 故 $B=0$ 卽 I 式可合也.

§ 26. 二元一次聯立式

設

$$\mathrm{I}\begin{cases}A=ax+by-c=0\\B=a'x+b'y-c'=0\end{cases}$$

解設 $a'\neq0$, 則

$$\mathrm{II}\begin{cases}a'A-aB=0\\B=0\end{cases}$$

與I式有同解,而 $a'A-aB=(a'b-ab')y-(a'c-ac')=0$

1. 設 $a'b-ab'\neq0$, 則有 $y=\dfrac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$

以 y 之值代入 $B=0$, 得

$$a'x+b'\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}-c'=0$$

$$a'(a'b-ab')x+b'(a'c-ac')-c'(a'b-ab')=0$$

$$a'(a'b-ab')x-a'(c'b-cb')=0$$

原設 $a'\neq0$, $a'b-ab'\neq0$, 故可得 $x=\dfrac{c'b-cb'}{a'b-ab'}$

要言之,此時

$$x=\frac{c'b-cb'}{a'b-ab'}\qquad y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$$

為I式之獨解. I此時稱為獨解式.

2. $a'b-ab'=0$

此時如 $c'b-cb'$, 或 $a'c-ac'$ 任一異於零,則I式終有一式不合,而聯立式為無解式.

3. $a'b-ab'=0$, 如有 $a'c-ac'=0$

亦有 $c'b-cb'=0$

於是

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

即I之兩式有同解也,但解一式足矣.

由 $a'x+b'y-c'=0$

得

$$x=\frac{c'-b'y}{a'}$$

任與y一值,x有一相當值,此時聯立式為無定式.

4. a, b, a', b'均為零,c, c'任一異於零,I為無解式.

c, c'同與a, b, a', b'等為零,I為完定無定式.

§ 27. 解 $\quad \mathrm{I}\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

別法: 設$a \neq 0$,由$A=0$得$x=\dfrac{c-by}{a}$........................(α)

代入二式可得y,復將y代入卽得x. 又設a'亦異於零,

$$x=\frac{c'-b'y}{a'} \quad \cdots\cdots(\beta)$$

等α, β兩式,得
$$\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}$$

由此可得y,代入α, β任一式可得x.

§ 28. 公式 如成表

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

而令
$$\delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$\delta_1=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

$$\delta_2=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

則
$$\begin{cases} x=\dfrac{\delta_1}{\delta} \\ y=\dfrac{\delta_2}{\delta} \end{cases}$$

以$\dfrac{x}{z}$代x, $\dfrac{y}{z}$代y, 則I式變為

$$ax+by-cz=0$$

$$a'x+b'y-c'z=0$$

其解爲 $$\frac{x}{z}=\frac{\delta_1}{\delta}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{\delta_2}{\delta}$$

或 $$\frac{z}{\delta}=\frac{x}{\delta_1}=\frac{y}{\delta_2}$$

§29. 試討論下式

$$\mathrm{I}\begin{cases}\lambda x+y=1\\ x+\lambda y=\mu\end{cases}$$

以 λ 乘第二式,相減得 $(1-\lambda^2)y=1-\lambda\mu$

以 $-\lambda$ 乘第一式,相加得 $(1-\lambda^2)x=\mu-\lambda$

1. 如 $1-\lambda^2\neq 0$, 卽 $\lambda\neq\pm1$

所得獨解爲 $$x=\frac{\mu-\lambda}{1-\lambda^2}$$

$$y=\frac{1-\lambda\mu}{1-\lambda^2}$$

2. 如 $\lambda=\pm1$, 設爲 $+1$

則 $$\delta_1=\mu-1$$

$$\delta_2=1-\mu$$

如 $\mu\neq1$ 無解

$\mu=1$ I 爲無定式

設 $\lambda=-1$ $$\delta_1=\mu+1$$

$$\delta_2=1+\mu$$

$\mu\neq-1$ 無解

$\mu=-1$ I 爲無定式

要言之,如μ等於λ,則I只能爲獨解式或無定式.μ異於λ時,I可爲獨解式或無解式也.

§30. 問題

求於

$$ax-b=0\cdots\cdots(1)$$

$$a'x-b'=0\cdots\cdots(2)$$

中消去x,由(1)得　$x=\frac{b}{a}$

由(2)得　$x=\frac{b'}{a'}$

等之　$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$

亦即　$a'b-ab'=0$

成　$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0$

此爲(1)(2)兩式有公根之情形也.其公根,即

$$x=\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$$

推廣言之,如於　$f(x)=0$

$$g(x)=0$$

二式中消去x所得情形,爲f,g至少有一公根之情形.

§31. 三元一次聯立式

設

$$\begin{cases} A=ax+by+cz-d=0 \\ B=a'x+b'y+c'z-d'=0 \\ C=a''x+b''y+c''z-d''=0 \end{cases}$$

白氏 Bèzont 解法,以λ乘A,λ'乘B後,三式相加,得

$$(\lambda a+\lambda'a'+a'')x+(\lambda b+\lambda'b'+b'')y+(\lambda c+\lambda'c'+c'')z-(\lambda d+\lambda'd'+d'')=0$$

如使 y 及 z 之係數爲零,則可得 x.

$$(\alpha)\quad \begin{cases}\lambda b+\lambda' b'+b''=0\\ \lambda c+\lambda' c'+c''=0\end{cases}$$

$$x=\frac{\lambda d+\lambda' d'+d''}{\lambda a+\lambda' a'+a''}$$

$\lambda\ \lambda'$ 爲 α 式之解.倣此可得

$$y=\frac{\lambda d+\lambda' d'+d''}{\lambda b+\lambda' b'+b''}$$

中 λ 及 λ' 爲 β 式之解.

$$(\beta)\quad \begin{cases}\lambda a+\lambda' a'+a''=0\\ \lambda c+\lambda' c'+a''=0\end{cases}$$

又

$$z=\frac{\lambda d+\lambda' d'+d''}{\lambda c+\lambda' c'+c''}$$

中 λ 及 λ' 爲 γ 式之解.

$$(\gamma)\quad \begin{cases}\lambda a+\lambda' a'+a''=0\\ \lambda b+\lambda' b'+b''=0\end{cases}$$

√§ 32. 例解 試解下式.

$$\begin{cases}A=4x-3y+2z=9\\ B=5x+4y-3z=7\\ C=7x-2y+4z=28\end{cases}$$

就

$$\lambda A+\lambda' B+C=0$$

中,陸續使 y 及 z, z 及 x 或 x 及 y 爲零,則陸續得 x, y, z.

$$x=\frac{9\lambda+7\lambda'+28}{4\lambda+5\lambda'+7}$$

$$\begin{cases}-3\lambda+4\lambda'-2=0\\ \ \ 2\lambda-3\lambda'+4=0\end{cases}$$

$$\lambda'=8$$

$$\lambda=10$$

於是

$$x=\frac{9\times10+7\times8+28}{4\times10+5\times8+7}$$

$$=\frac{174}{87}=2$$

同樣可得 $$y=3$$
$$z=5$$

§33. 別法

已與
$$A=ax+by+cz-d=0$$
$$B=a'x+b'y+c'z-d'=0$$
$$C=a''x+b''y+c''z-d''=0$$

可以同解式代其二，如
$$\begin{cases}a'A-aB=0\\a'C-a''B=0\end{cases}$$

是也，由此可求得y及z，以之代入任一式$A=0$，可得x.

或就 $$\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$$

二式，求出x, y，以之代入第三式，可得z，以所得z代回x, y式內，又得x, y之數值，此又一法也.

關於三元三式之普通討論，請參看余與段君子燮合著之行列式詳論，用初淺方法亦能討論，但繁而不能透，不如就式論式爲愈.

§34. 雜例

詳解聯立式
$$\begin{cases}z+ay+a^2x+a^3=0\\z+by+b^2x+b^3=0\\z+cy+c^2x+c^3=0\end{cases}$$

a, b, c實爲下式.
$$X^3+xX^2+yX+z=0$$

故有 $$X^3+xX^2+yX+z\equiv(X-a)(X-b)(X-c)$$

各等X各次方之係數，得
$$x=-(a+b+c)$$
$$y=ab+ac+bc$$
$$z=-abc$$

第 五 章

§35. 二次方程式 其最普通之形為

$$f(x)=ax^2+bx+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

中 a, b, c 均為已知實數, x 為未知數; a 必異於零,否則 $f(x)$ 為一次式. 於解普通式之前,試先研究下舉諸特例:

1. 設 $c=0$, 則 (1) 式變為

$$f(x)=ax^2+bx=x(ax+b)=0$$

欲 $f(x)$ 為零,必任一因子為零.

$$x=0 \quad 得 \quad x_1=0$$

$$ax+b=0 \quad 得 \quad x_2=-\frac{b}{a}$$

$x_1\ x_2$ 為 $f(x)=0$ 之二根.

2. 設 $c=0 \quad b=0$, 則 (1) 式變為

$$f(x)=ax^2=0$$

其二根為

$$x_1=0$$

$$x_2=0$$

或言;此時零為雙根.

3 設 $b=0$, 則 (1) 式變為

$$f(x)=ax^2+c=0$$

遷項

$$ax^2=-c$$

或

$$x^2=-\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

如 a 與 c 異號，則 $-\frac{c}{a}$ 爲正數有方根；兩端開方得

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

此時二根同値異號　$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

如 a 與 c 同號，則 $-\frac{c}{a}$ 爲負數，不能有方根；蓋無論負數之方，或正數之方，皆爲正數，不爲負數；反之，一正數有兩方根，同値異號，而負數則無．故此時(1)式無根．

§ 36. 虛根　依上 $b=0$，a 與 c 同號，可令

$$\frac{c}{a}=k^2$$

則(2)式變爲　$x^2=-k^2$

$(-k^2)$ 爲負數無根，但可以符號 $\sqrt{-k^2}$ 作 $(-k^2)$ 之假根，假根云者 $\sqrt{-k^2}$ 自乘可還原爲 $(-k^2)$，但實無數値可言而已，又因

$$-k^2=k^2\times(-1)$$

故　$\sqrt{-k^2}=\sqrt{k^2}\sqrt{-1}$

$$=\pm k\sqrt{-1}$$

$k\sqrt{-1}$ 謂之虛數，$\sqrt{-1}$ 或作 i，謂之虛數單位．凡 i^2 均以 (-1) 代之．此時 $f(x)=0$ 之根爲　$x_1=+ki$

$$x_2=-ki$$

爲虛數，或稱虛根．(關於虛數問題，可參看何段合編之虛數詳論)

§ 37. 普通二次式之解去 試取(1)式

$$f(x)=ax^2+bx+c=0$$

以a徧乘之,得 $$a^2x^2+bax+ac=0$$

就前兩項配方 $$a^2x^2+bax+\frac{b^2}{4}+ac-\frac{b^2}{4}=0$$

卽 $$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4}=0$$

令 $$X=ax+\frac{b}{2}$$

$$\delta=b^2-4ac$$

則前式變爲 $$X^2-\frac{\delta}{4}=0$$

卽 $$X^2=\frac{\delta}{4}$$

如δ爲正數,則兩端可開方,

$$X=\pm\frac{\sqrt{\delta}}{2}$$

卽 $$ax+\frac{b}{2}=\pm\frac{\sqrt{\delta}}{2}$$

於是 $$ax=-\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{\delta}}{2}$$

以a徧除,得 $$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\delta}}{2a}$$

故方程式之二根,爲

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ x_2&=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

設δ為負,上式仍適用,但宜知

$$\sqrt{b^2-4ac}=i\sqrt{4ac-b^2}$$

中$i=\sqrt{-1}$; $4ac-b^2$為正.此時x_1, x_2稱為交錯虛根,或曰方程式無根.

設$\delta=0$,則 $$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

此時$-\frac{b}{2a}$為雙根,(3)式為普通二次方程根之公式

§38. 討論與判定式 (Discriminant)

上節所得結果為:—

1 $\delta>0$ x_1及x_2二根為實數且不同.

2 $\delta=0$ x_1 x_2二根為實數但相等.

3 $\delta<0$ x_1 x_2二根為交錯虛數.

反之,如二次方程式(1)之根為實數,則δ必為正.

(1)之根為雙根,則δ必為零.

(1)之根為虛數,則δ必為負.

於是不待解方程式,先視δ之值如何,卽可斷定此式有實根,或有雙根,或竟無根.δ謂之判定式.

例 1. $x^2-3x+2=0$ $\delta=9-4\cdot2=1>0$

二根為實數,且$x_1=2, x_2=1$

例 2. $x^2+2x+1=0$ $\delta=4-4\cdot1=0$

二根相等,且等於-1.

例 3. $x^2-2x+2=0$ $\delta=4-4\cdot2=-4<0$

二根為虛根,且$x_1=1+i, x_2=1-i$

注意. 當 b 爲雙數時,可令

$$b=2b$$

$$\delta=b^2-4ac=(2b')^2-4ac=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)=4\delta'$$

4 爲常數 δ 與 δ' 同號或同爲零,故可以 δ' 作判定式. 此時 (3) 式亦變簡

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-\frac{b'}{a}+\frac{\sqrt{b'^2-ac}}{a} \\ x_2&=-\frac{b'}{a}-\frac{\sqrt{b'^2-ac}}{a} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)'$$

§ 39. 若 a, b, c 諸係數可以變易,則 a 雖不能爲零,有時可趨進於零,其符號爲 $a\sim 0$, 或 $a\doteq 0$, 此解析幾何所常見也. 於 a 未趨進於零時,以 x^2 遍除全式,得

$$f_1(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=0 \tag{4}$$

1. 設 $a\sim 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, 則 (4) 式變爲

$$f_1(x)=\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=0$$

欲 $f_1(x)$ 爲零,必任一因子爲零

$$\frac{1}{x}=0 \qquad 得 \qquad x_1=\infty$$

$$b+\frac{c}{x}=0 \qquad 得 \qquad x_2=-\frac{c}{b}$$

2. 設 $a\sim 0$, $b\sim 0$, $c\neq 0$, 則 (4) 式變爲

$$f_1(x)=\frac{c}{x^2}=0$$

其二根同時趨進於無極.

3. 設 $a\sim 0$, $c\sim 0$, $b\neq 0$, 則

$$f(x)=ax^2+bx=x(ax+b)=0$$

中一根爲零,一根當 $a\sim 0$ 時爲無極.

4. 設 $a\sim 0$, $b\sim 0$, $c\sim 0$, 則 $f(x)=0$ 爲無定式, 以 x 任爲何數, 均合故也.

應用根之普通公式, 亦可證得同一之結果

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

各以 $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ 及 $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ 乘其分子分母得

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}=-\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

及
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}=-\frac{2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

當 $a\sim 0$ 時, $\sqrt{b^2-4ac}\sim b$

1. $a\sim 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, 則 $x_1=-\frac{c}{b}$; $x_2\sim\infty$.

2. $a\sim 0$, $b\sim 0$, $c\neq 0$, 則 $x_1\sim\infty$, $x_2\sim\infty$.

3. $a\sim 0$, $b\neq 0$, $c\sim 0$, 則 $x_1=0$, $x_2\sim\infty$.

4. $a\sim 0$, $b\sim 0$, $c\sim 0$, 則 $x_1=\frac{0}{0}$, $x_2=\frac{0}{0}$ 故爲無定.

綜上所論, 得定理如次.

定理. 凡二式方程式恆有二根可虛可實可同可異可有極可無極.

第 六 章

§ 40. 根與係數之關係

已知普通二次方程式

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

之二根爲

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

則

$$x_1+x_2=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a} \qquad (5)$$

(1) 式若書爲

$$f(x)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

或

$$f(x)=x^2+px+q=0$$

則

$$x_1+x_2=-p, \qquad x_1x_2=q \qquad (5)'$$

故於 x^2 係數爲 1 之二次方程式,其二根之和,等於 x 之係數,而易其號,二根之積,等於常數項.(卽不含 x 者)

若 $-\frac{b}{a}=0$, 則 $x_1+x_2=0$, 卽 $x_1=-x_2$, 二根等量而異號,或曰二根之絕對值相等.

若 $\frac{c}{a}=1$, 則 $x_1x_2=1$, 卽 $x_1=\frac{1}{x_2}$, 二根互爲倒數

§ 41. 根之號

旣明根與係數之關係,卽可不藉演算,而知二根之號,及其相形之大小,試取 (1) 式

$$f(x)=ax^2+bx+c=0$$

1. 若 $\frac{c}{a}>0$，即 $ac>0$，判定式可正可負，亦可爲零，卽其根之有無，爲未定也.

設 $\delta>0$，則以其二根之積爲正，$f(x)=0$ 必有二實根且同號者，欲究其均爲正，抑均爲負，當視二根之和 $-\frac{b}{a}$ 之號而定，若 $-\frac{b}{a}>0$，二根均爲正，$-\frac{b}{a}<0$，則二根均爲負.

設 $\delta=0$，則 $f(x)=0$ 有雙根，$-\frac{b}{a}>0$，雙根爲正，$-\frac{b}{a}<0$，雙根爲負.

設 $\delta<0$，則 $f(x)=0$ 無實根.

2. 若 $\frac{c}{a}<0$，即 $ac<0$，則判定式恆爲正，$f(x)=0$ 恆有二實根，惟其積爲負，故二根異號，凡異號二數相加，其和之號，卽爲二數絕對值大者之號，故 $-\frac{b}{a}>0$ 時，根之絕對值大者爲正，$-\frac{b}{a}<0$ 時，根之絕對值大者爲負.

3. 若 $\frac{c}{a}=0$，即 $c=0$，(1) 式變爲

$$f(x)=ax^2+bx=x(ax+b)=0$$

故其二根，一爲零，一爲 $-\frac{b}{a}$.

舉上所述，列表如次：

$$\text{I.}\quad \frac{c}{a}>0\begin{cases}1.\ \delta>0\begin{cases}(a)\ -\frac{b}{a}>0, & \text{二正根}\\[2ex] (b)\ -\frac{b}{a}<0, & \text{二負根}\end{cases}\\[4ex] 2.\ \delta=0\begin{cases}(a)\ -\frac{b}{a}>0, & \text{正雙根}\\[2ex] (b)\ -\frac{b}{a}<0, & \text{負雙根}\end{cases}\\[3ex] 3.\ \delta<0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{方程式無根}\end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \frac{c}{a}<0\begin{cases}1.\ -\dfrac{b}{a}>0 & \text{二實根,一正一負,根之絕對值大者爲正.}\\ 2.\ -\dfrac{b}{a}<0 & \text{二實根,一正一負,根之絕對值大者爲負.}\\ 3.\ -\dfrac{b}{a}=0 & \text{二實根,等量而異號.}\end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \frac{c}{a}=0\begin{cases}1.\ -\dfrac{b}{a}>0 & \text{二實根,一爲零,一爲正.}\\ 2.\ -\dfrac{b}{a}<0 & \text{二實根,一爲零,一爲負.}\\ 3.\ -\dfrac{b}{a}=0 & \text{雙根爲零.}\end{cases}$$

例 1: $f(x)=4548x^2-x-36715=0$

因 $\dfrac{c}{a}=-\dfrac{36715}{4548}<0$, 上方程式必有兩實根, 且異號者, 又 $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4548}>0$, 故根之絕對值大者爲正.

由是觀之,不必解方程式,並不必運算,即可知是方程式有二實根,一正一負,且二根之中,絕對值大者爲正.將此式解之,得二根之近似值爲

$$x_1=\frac{25936}{9096}\qquad\qquad x_2=-\frac{25984}{9096}$$

以絕對值論,二根相差甚微,然二根之號及其相形之大小,與上所討論者,未嘗或誤焉.

例 2: $f(x)=\lambda x^2-2(\lambda+3)x+\lambda-1=0$

1. 若 $ac=\lambda(\lambda-1)<0$, 即 $0<\lambda<1$, 方程式有兩實根,且異號者,又 $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{2(\lambda+3)}{\lambda}$ 當 $0<\lambda<1$ 時爲正,故根之絕對值大者爲正.

2. 若 $\lambda<0$ 或 $\lambda>1$，則 $ac=\lambda(\lambda-1)>0$，欲 $f(x)=0$ 有二實根，

則必 $$\delta'=(\lambda+3)^2-\lambda(\lambda-1)>0$$

即 $$7\lambda+9>0$$

$$\therefore\quad \lambda>-\frac{9}{7}$$

又 $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{2(\lambda+3)}{\lambda}$ 與 $\lambda(\lambda+3)$ 同號，當 $\lambda>1$ 時爲正，故 $f(x)=0$ 有二正實根，當 $-\dfrac{9}{7}<\lambda<0$ 時爲負，故 $f(x)=0$ 有二負實根.

3. 若 $\lambda=1$，則 $f(x)=x^2-8x=x(x-8)=0$

$$\therefore\quad x_1=0,\quad x_2=8$$

4. 若 $\lambda\doteq0$，則方程式之一根爲無極，他一根爲 $-\dfrac{1}{6}$.

5. 若 $\lambda=-\dfrac{9}{7}$，則 $f(x)=0$ 有雙根爲

$$\frac{\lambda+3}{\lambda}=\frac{3-\frac{9}{7}}{-\frac{9}{7}}=-\frac{4}{3}$$

6. 若 $\lambda<-\frac{9}{7}$，則方程式無實根.

乃將上得結果，列表如下，並設 $|x_2|>|x_1|$：

λ	δ'	a	b	c	結論
$-\infty$	$-$	$-$	$+$	$-$	無實根
$-\frac{9}{7}$	0	$-$	$-$	$-$	$x_1=x_2<0$
	$+$	$-$	$-$	$-$	$x_2<x_1<0$
0	$+$	0	$-$	$-$	一根爲無極，他根爲負
	$+$	$+$	$-$	$-$	$x_1<0<x_2$
1	$+$	$+$	$-$	0	$0=x_1<x_2$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$+$	$0<x_1<x_2$

§ 42. 應用 A, B 爲二有理數，而 B 非整方數，試求二有理數 x, y 以合下式

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

兩端各自乘方，得 $$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

於是 $$x + y = A$$

$$xy = \frac{B}{4}$$

x 及 y 當爲次式之根.

$$X^2 - AX + \frac{B}{4} = 0$$

解之得 $$x = X_1 = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B}$$

$$y = X_2 = \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B}$$

故其有解之充要情形，爲 $A^2 - B$ 爲整方數也.

例: 試求下式之方根.

$$1 + a^2 + (1 + a^2 + a^4)^{\frac{1}{2}}$$

令 $$\sqrt{1 + a^2 + \sqrt{1 + a^2 + a^4}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

平方之，得 $$1 + a^2 + \sqrt{1 + a^2 + a^4} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

於是 $$x + y = 1 + a^2$$

$$xy = \frac{1 + a^2 + a^4}{4}$$

乃作方程式 $$X^2 - (1 + a^2)X + \frac{1 + a^2 + a^4}{4} = 0$$

即 $$X^2-\left(\frac{1+a+a^2}{2}+\frac{1-a+a^2}{2}\right)X+\frac{1+a+a^2}{2}\times\frac{1-a+a^2}{2}=0$$

故 $$x=X_1=\frac{1+a+a^2}{2}$$

$$y=X_2=\frac{1-a+a^2}{2}$$

$$\sqrt{1+a^2+\sqrt{1+a^2+a^4}}=\sqrt{\frac{1+a+a^2}{2}}+\sqrt{\frac{1-a+a^2}{2}}.$$

§ 43. 問題 I. 已知x_1, x_2爲方程式

$$x^2+px+q=0$$

之二根,若有 $$ax_1+bx_2+c=0, \qquad a\neq b,$$

則p, q應有何關係?

由 (5)′ $$x_1+x_2=-p$$

$$x_1x_2=q$$

又 $$ax_1+bx_2+c=0$$

由第一,第三兩式,將x_1, x_2解之,得

$$x_1=\frac{bp-c}{a-b}, \qquad x_2=\frac{c-ap}{a-b},$$

以之代入第二式,即得所求p, q之關係,爲

$$(bp-c)(c-ap)=q(a-b)^2$$

特例: $$x_1=mx_2, \qquad m+1\neq 0,$$

則 $$x_1=-\frac{pm}{m+1}, \qquad x_2=-\frac{p}{m+1},$$

故所求p, q之關係,爲 $$p^2m=q(m+1)^2$$

§ 44. 問題 II.

已與方程式

$$x^2-(\lambda+3)x+2\lambda-1=0$$

λ 爲助變量, 試求其二根 x_1 及 x_2 間之關係.

由 (5)′
$$x_1+x_2=\lambda+3$$
$$x_1x_2=2\lambda-1$$

乃將上二式之 λ 消去之, 得

$$x_1x_2=2(x_1+x_2-3)-1$$

即
$$2(x_1+x_2)=x_1x_2+7.$$

√§ 45. 根之勻稱式

設 x_1, x_2 爲方程式

$$f(x)=x^2+px+q=0$$

之二根, 則
$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

故
$$x_1+x_2=-p, \qquad x_1x_2=q$$

根之勻稱式, 普通之形爲

$$x_1^{m+n}x_2^n+x_2^{m+n}x_1^n, \qquad m, n \text{ 皆爲整數},$$

余謂皆可以 p 及 q 表出之.

因
$$x_1^{m+n}x_2^n+x_2^{m+n}x_1^n=x_1^nx_2^n\left(x_1^m+x_2^m\right)=q^n\left(x_1^m+x_2^m\right)$$

故能以 p, q 表 $x_1^m+x_2^m$, 上題爲解決矣. 但 x_1, x_2 既爲 $f(x)=0$ 之根,

則必有
$$x_1{}^2+px_1+q=0 \tag{1}$$

及
$$x_2{}^2+px_2+q=0 \tag{2}$$

以 x_1^{m-2} 乘 (1), x_2^{m-2} 乘 (2), 相加得

$$x_1^m+x_2^m+p\left(x_1^{m-1}+x_2^{m-1}\right)+q\left(x_1^{m-2}+x_2^{m-2}\right)=0 \tag{3}$$

令
$$S_m=x_1^m+x_2^m, \quad S_{m-1}=x_1^{m-1}+x_2^{m-1}, \quad S_{m-2}=x_1^{m-2}+x_2^{m-2},$$

則 (3) 式爲
$$S_m+pS_{m-1}+qS_{m-2}=0$$

故若 S_{m-1} 及 S_{m-2} 可以 p, q 表之，則 S_m 亦可以 p, q 表之，

但 $\qquad S_1=x_1+x_2=-p, \qquad S_0=x_1^0+x_2^0=1+1=2,$

故 $\qquad S_2=-pS_1-qS_0=p^2-2q$

於是，由 $\qquad S_3+pS_2+qS_1=0$，得 $S_3=3pq-p^3$

$\qquad S_4+pS_3+qS_2=0$，得 $S_4=p^4-4p^2q+2q^2$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

逐漸求之，可得 S_m 矣.

若 $m=-m'$ (m' 爲正整數)，則

$$S_m=S_{-m'}=x_1^{-m'}+x_2^{-m'}=\frac{1}{x_1^{m'}}+\frac{1}{x_2^{m'}}=\frac{x_1^{m'}+x_2^{m'}}{x_1^{m'}x_2^{m'}}=\frac{x_1^{m'}+x_2^{m'}}{q^{m'}}=\frac{S_{m'}}{q^{m'}}$$

同上法，亦可得

$$QS_{-m}+PS_{-(m-1)}+S_{-(m-2)}=0$$

例 1: 已知 x_1, x_2 爲方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

之根，試求 $x_1^7+x_2^7$ 及 $\frac{1}{x_1^7}+\frac{1}{x_2^7}$ 之值

$$S_0=x_1^0+x_2^0=2, \qquad S_1=x_1+x_2=-\frac{b}{a}.$$

故 $$S_2=x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$S_3=x_1^3+x_2^3=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

但 $$S_2^2\cdot S_3=(x_1^2+x_2^2)^2(x_1^3+x_2^3)=(x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2)(x_1^3+x_2^3)$$

$$=x_1^7+x_2^7+x_1^3x_2^3(x_1+x_2)+2x_1^2x_2^2(x_1^3+x_2^3)$$

$$=S_7+\frac{c^3}{a^3}S_1+2\frac{c^2}{a^2}S_3$$

故 $$S_7=x_1^7+x_2^7=S_2^2\cdot S_3-\frac{c^3}{a^3}S_1-\frac{2c^2}{a^2}S_3$$

$$=\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)^2\times\frac{3abc-b^3}{a^3}+\frac{bc^3}{a^4}-\frac{2c^2}{a^2}\times\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

$$=\frac{(b^4-4ab^2c+4a^2c^2)(3abc-b^3)}{a^7}-\frac{5abc^3-2b^3c^2}{a^5}$$

$$=\frac{12a^3bc^3-16a^2b^3c^2+7ab^5c-b^7}{a^7}-\frac{5abc^3-2b^3c^2}{a^5}$$

$$=\frac{7a^3bc^3-14a^2b^3c^2+7ab^5c-b^7}{a^7}$$

$$S_{-7}=\frac{1}{x_1^7}+\frac{1}{x_2^7}=\frac{x_1^7+x_2^7}{x_1^7x_2^7}=\frac{a^7}{c^7}S_7$$

$$=\frac{7a^3bc^3-14a^2b^3c^2+7ab^5c-b^7}{c^7}$$

例 2: 試定 q, 俾方程式

$$x^2-5x+q=0$$

之根之平方之和爲 13.

設 x_1, x_2 爲其兩根, 則

$$x_1+x_2=5,\qquad x_1x_2=q$$

於是 $$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5^2-2q=13$$

$$\therefore\quad q=\frac{25-13}{2}=6$$

例 3: 已知 x_1, x_2 爲方程式

$$f(x)=x^2+px+q=0$$

之根, 來作二次方程式, 以 $\frac{x_1}{x_2}$ 及 $\frac{x_2}{x_1}$ 爲其根者.

$$x_1+x_2=-p, \qquad x_1x_2=q,$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1x_2}=\frac{p^2-2q}{q}, \qquad \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}=1,$$

故所求之方程式,爲 $\quad x^2+\frac{p^2-2q}{q}x+1=0$

卽 $\quad qx^2+(p^2-2q)x+q=0.$

第七章

§46 三項式號之研究

令 $$y=ax^2+bx+c$$

凡與x一實值x_0, y必有一相當值$y_0=ax_0{}^2+bx_0+c$, 惟y_0爲正乎? 抑爲負乎? 乃分下三情形而討論之.

1. $\delta=b^2-4ac<0$, 則y永不能爲零, 以$ax^2+bx+c=0$無實根故也, 乃書y爲

$$y=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$恆爲正, 依假設$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$亦爲正, 故無論與$x$以何實值,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

恆爲正, 於是 $$y=a\times\text{正數}$$

故y此時恆與x^2之係數a同號.

又 $y=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$之絕對值常大於$\frac{4ac-b^2}{4a}$,

惟$x=-\frac{b}{2a}$, 則$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, 故$x=-\frac{b}{2a}$時, 如$a>0$, 則$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$爲極小; $a<0$, 則$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$爲極大.

例: $$y=2x^2-x+1$$

$$\delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot2\cdot1=1-8=-7<0$$

故無論x爲何實值, y恆爲正. 以x^2之係數爲$2>0$也.

又 $$y=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+1-\frac{1}{8}=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$

故當 $x=\frac{1}{4}$ 時, $y=\frac{7}{8}$ 爲極小.

2. $\delta=0$, y 可書爲

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 恆爲正,故 y 恆與 a 同號,當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時, $y=0$ 爲其極大或極小.

例:

$$y=-4x^2+4x-1$$

$$\delta'=b'-ac=2^2-4=0$$

$$a=-4<0$$

故 y 恆爲負,而於 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2}$ 時等於零,爲其極大.

3. $\delta>0$, 則 $y=ax^2+bx+c=0$ 有二實根 x_1 及 x_2, 且 $x_2>x_1$, 於是

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)$$

設 $x_0<x_1$, 則 $x_0-x_1<0$, $x_0-x_2<0$,

$$y_0=a\times \text{正數}.$$

設 $x_1<x_0<x_2$, 則 $x_0-x_1>0$, $x_0-x_2<0$,

$$y_0=a\times \text{負數}.$$

設 $x_0>x_2$, 則 $x_0-x_1>0$, $x_0-x_2>0$,

$$y_0=a\times \text{正數}$$

故當 x 介於 x_1, x_2 二根之間, y 與 a 異號; 當 x 小於 x_1, x_2 二根之較小者,或大於二根之較大者, y 與 a 同號.

又 y 可書爲 $$y=-a\left\{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right\}$$

故 y 之絕對值常小於 $\frac{b^2-4ac}{4a}$，惟當 $x=-\frac{b}{2a}$，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$，

故當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時，如 $a>0$，$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ 爲其極小；如 $a<0$，

$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ 爲極大.

例： $$y=6+x-x^2=(2+x)(3-x)$$

$$\therefore\quad x_1=-2,\quad x_2=3$$

當 $x_0=-3<x_1=-2$，　$y_0=(2-3)(3+3)=-6$，與 $a=-1$ 同號.

當 $x_1=-2<x_0=1<x_2=3$，　$y_0=(2+1)(3-1)=6$，與 a 異號

當 $x_0=4>x_2=3$，　$y_0=(2+4)(3-4)=-6$，與 a 同號

由上所論，得定理如次：

定理. $y=ax^2+bx+c$ 之號，當與 x 一實值時，恆與 a 之號相同，惟 $y=0$ 有不相等之二實根時，所與 x 之值又介於其二根之間，則 y 之號與 a 異.

當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時，$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$，如 $a>0$，則爲極小，$a<0$，則爲極大.

§ 47. 含助變量之方程式

設 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 中 $a=f_1(\lambda)$，　$b=f_2(\lambda)$，　$c=f_3(\lambda)$

f_1, f_2, f_3 皆爲助變量 λ 之一次式.

欲研究 λ 變時，$f(x)=0$ 根之情形，則先求其判定式

$$\delta=b^2-4ac=\{f_2(\lambda)\}^2-4f_1(\lambda)f_3(\lambda)=A\lambda^2+B\lambda+C=F(\lambda)$$

I. $A>0$

1. $\Delta=B^2-4AC<0$，則 δ 恆爲正，故 $f(x)=0$ 恆有二實根.
2. $\Delta=B^2-4AC=0$，則 $\delta\geqq 0$，故 $f(x)=0$ 有二實根或雙根.

3. $\Delta=B^2-4AC>0$, 此時 $F(\lambda)=0$ 有二實根 λ_1 及 λ_2:

(a) 當 λ 處 λ_1 及 λ_2 之外時, $\delta>0$, $f(x)=0$ 有二實根,

(b) 當 λ 在 λ_1 及 λ_2 之間時, $\delta<0$, $f(x)=0$ 無實根.

II. $A<0$, 結果皆與上反.

III. $A=0$,

1. $\lambda>-\dfrac{C}{B}$, 則 $\delta>0$, $f(x)=0$ 有二實根,

2. $\lambda=-\dfrac{C}{B}$, 則 $\delta=0$, $f(x)=0$ 有雙根,

3. $\lambda<-\dfrac{C}{B}$, 則 $\delta<0$, $f(x)=0$ 無實根,

當 λ 趨進 $f_1(\lambda)=0$, $f_2(\lambda)=0$, 或 $f_3(\lambda)=0$ 之根時, $a\sim 0$, $b\sim 0$, 或 $c\sim 0$, 若 f_1, f_2, f_3 三式中, 更有二者之根相同, 則 a, b, c 中亦有二者同時趨進於零, 此時 $f(x)=0$ 二根之情形, 見前§5, 又若 f_1, f_2, f_3 三式之根盡同, 則 a, b, c 同時趨進於零, 此時 $f(x)=0$ 爲無定式.

根之號及其相形之大小, 悉依§7討論之, 玆不再贅.

例 1: $f(x)=(\lambda+2)x^2-(\lambda-1)x+\lambda-4=0$

$$\delta=b^2-4ac=(\lambda-1)^2-4(\lambda+2)(\lambda-4)$$

$$=\lambda^2-2\lambda+1-4\lambda^2+8\lambda+32=33+6\lambda-3\lambda^2$$

$$=3(11+2\lambda-\lambda^2)=3F(\lambda)$$

$$\Delta^1=1^2+11=12>0, \qquad A=-1<0$$

乃將 $F(\lambda)=11+2\lambda-\lambda^2=0$ 解之, 得

$$\lambda_1=1-\sqrt{12} \qquad \lambda_2=1+\sqrt{12}$$

1. $\lambda<\lambda_1=1-\sqrt{12}$, 則 $\delta<0$, $f(x)=0$ 無實根.

2. $\lambda_1=1-\sqrt{12}<\lambda<\lambda_2=1+\sqrt{12}$, 則 $\delta>0$, $f(x)=0$ 有二實根.

(a) $\lambda_1=1-\sqrt{12}<\lambda<-2$, 則 $-ab=(\lambda+2)(\lambda-1)>0$, $ac=(\lambda+2)(\lambda-4)>0$, 故 $f(x)=0$ 之二實根均爲正數.

(b) $-2<\lambda<1$, 則 $-ab=(\lambda+2)(\lambda-1)<0$, $ac=(\lambda+2)(\lambda-4)<0$, 故 $f(x)=0$ 之二根, 一正一負, 根之絕對値大者爲負.

(c) $1<\lambda<4$, 則 $-ab=(\lambda+2)(\lambda-1)>0$, $ac=(\lambda+2)(\lambda-4)<0$, 故 $f(x)=0$ 之二根, 一正一負, 根之絕對値大者爲正.

(d) $4<\lambda<1+\sqrt{12}$, 則 $-ab=(\lambda+2)(\lambda-1)>0$, $ac=(\lambda+2)(\lambda-4)>0$, 故 $f(x)=0$ 之二根, 均爲正數.

3. $\lambda>\lambda_2=1+\sqrt{12}$, 則 $\delta<0$, $f(x)=0$ 無實根.

4. $\lambda=\lambda_1=1-\sqrt{12}$, 或 $\lambda=\lambda_2+=1\sqrt{12}$, 則 $\delta=0$, $f(x)=0$ 有雙根,

爲
$$x_1=x_2=\frac{\lambda_1-1}{2(\lambda_1+2)}=\frac{-\sqrt{12}}{2(3-\sqrt{12})}=\frac{-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}(3+2\sqrt{3})}{(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})}$$
$$=\frac{-6-3\sqrt{3}}{9-12}=2+\sqrt{3}.$$

或
$$x_1=x_2=\frac{\lambda_2-1}{2(\lambda_2+2)}=\frac{\sqrt{12}}{2(3+\sqrt{12})}=\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})}{(3+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-6}{9-12}=2-\sqrt{3}.$$

5. $\lambda=-2$, 則 $a\sim 0$, 一根趨進於無極, 他一根爲 2.

6. $\lambda=1$, 則 $b=0$, $x_1=-1$, $x_2=+1$.

7. $\lambda=4$, 則 $c=0$, $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$,

乃將上得結果,列表如下:

λ	δ	$-ab$	ac	結　論
$-\infty$	$-$			無實根
λ_1	0	$+$	$+$	$0<x_1=x_2$
	$+$	$+$	$+$	$0<x_1<x_2$
-2	$+$	0	0	一根爲無極,他一根爲2
	$+$	$-$	$-$	$x_2<0<x_1$
1	$+$	0	$-$	$x_1=-1,\ x_2=+1$
	$+$	$+$	$-$	$x_1<0<x_2$
4	$+$	$+$	0	$x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2}$
	$+$	$+$	$+$	$0<x_1<x_2$
λ_2	0	$+$	$+$	$0<x_1=x_2$
$+\infty$	$-$			無實根

例 2: $f(x)=\lambda x^2+(2\lambda+1)x+(\lambda+3)=0$

$$\delta=b^2-4ac=(2\lambda+1)^2-4\lambda(\lambda+3)=4\lambda^2+4\lambda+1-4\lambda^2-12\lambda$$

$$=1-8\lambda$$

1. $\lambda<\frac{1}{8}$, 則 $\delta>0$, $f(x)=0$ 有兩實根

(a) $\lambda<-3$, 則 $-ab=-\lambda(2\lambda+1)<0$, $ac=\lambda(\lambda+3)>0$,

故 $f(x)=0$ 之二根,均爲負數.

(b) $-3<\lambda<-\frac{1}{2}$, 則 $-ab=-\lambda(2\lambda+1)<0$, $ac=\lambda(\lambda+3)<0$,

故 $f(x)=0$ 之二根,一正一負,根之絕對值大者爲負.

(c) $-\frac{1}{2}<\lambda<0$, 則 $-ab=-\lambda(2\lambda+1)>0$, $ac=\lambda(\lambda+3)<0$,

故 $f(x)=0$ 之二根,一正一負,根之絕對值大者爲正.

(d) $0<\lambda<\frac{1}{8}$, 則 $-ab=-\lambda(2\lambda+1)<0$, $ac=\lambda(\lambda+3)>0$

故 $f(x)=0$ 之兩根,均爲負數

(e) $\lambda=-3$, 則 $f(x)=-3x^2-5x=-x(3x+5)=0$

$\therefore\quad x_2=-\frac{5}{3},\ x_1=0$

(f) $\lambda=-\frac{1}{2}$, 則 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(5-x^2)=0$

$\therefore\quad x_1=-\sqrt{5},\ x_2=+\sqrt{5}$

(g) $\lambda\sim 0$, 則 $a=\lambda\sim 0$,

故 $f(x)=0$ 之一根爲無極, 他一根爲 -3

2. $\lambda=\frac{1}{8}$, 則 $\delta=0$, $f(x)=0$ 有雙根爲

$$x_1=x_2=-\frac{2\times\frac{1}{8}+1}{2\times\frac{1}{8}}=-\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}}=-5$$

3. $\lambda>\frac{1}{8}$, 則 $\delta<0$, $f(x)=0$ 無實根

舉上所得結果, 列表如下:

λ	δ	$-ab$	ac	結 論
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$x_2<x_1<0$
-3	$+$	$-$	0	$x_2=-\frac{5}{3},\ x_1=0$
	$+$	$-$	$-$	$x_2<0<x_1$
$-\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$x_1=-\sqrt{5},\ x_2=+\sqrt{5},$
	$+$	$+$	$-$	$x_1<0<x_2$
0	$+$	0	0	一根爲無極, 他一根爲 -3
	$+$	$-$	$+$	$x_2<x_1<0$
$\frac{1}{8}$	0	$-$	$+$	$x_1=x_2=-5<0$
$+\infty$	$-$			無實根

第 八 章

§ 48. 根與與數之比較

令 $f(x)=ax^2+bx+c=0$, α 為一與數, 求比較 α 與 $f(x)=0$ 之二根, 換言之, 卽定其對於二根之位置也. 以 α 代 x, 則有

$$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c$$

1. $af(\alpha)<0$, 卽 $f(\alpha)$ 與 a 異號, 則 $f(x)=0$ 必有二實根 $x_1<x_2$, 且 α 在二根之間, 卽 $x_1<\alpha<x_2$.

2. $af(\alpha)>0$, 卽 $f(\alpha)$ 與 a 同號, 則 $f(x)=0$ 之有無實根, 須視其判定式之號而定.

(a) $\delta<0$, 則 $f(x)=0$ 之二根為虛數, 與 α 無比較之可言.

(b) $\delta=0$, 則 $f(x)=0$ 有雙根為 $-\frac{b}{2a}$, 可直比較 α 與 $-\frac{b}{2a}$.

(c) $\delta>0$, 則 $f(x)=0$ 有二實根, 且 α 在 $f(x)=0$ 二根之外,

但 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$, 卽 $x_1<-\frac{b}{2a}<x_2$,

故若 $\alpha>-\frac{b}{2a}$, 則 $\alpha>x_2>x_1$, $\alpha<-\frac{b}{2a}$, 則 $x_2>x_1>\alpha$

3. $af(\alpha)=0$, 卽 $f(\alpha)=0$, 故 α 為 $f(x)=0$ 之根.

例 1: 令 $f(x)=2x^2-8x+\lambda+1=0$, 3 為與數, 求於 λ 變時, 3 對於 $f(x)=0$ 之根之位置.

$$f(3)=2\cdot3^2-8\cdot3+\lambda+1=\lambda-5,\quad a=+2>0.$$

1. $\lambda<5$, 則 $2f(3)<0$, 故 $f(x)=0$ 有二實根, 且 3 在二根之間.

2. $\lambda=5$, 則 $f(3)=0$, 故 3 爲 $f(x)=2x^2-8x+6=0$ 之一根, 又 $3>\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{2}=2$, 故爲其較大者.

3. $\lambda>5$, 則 $2f(3)>0$

$$\delta'=b'^2-ac=16-2(\lambda+1)=2(7-\lambda)$$

(a) 若 $\lambda>7$, 則 $\delta<0$, $f(x)=0$ 無實根.

(b) 若 $\lambda=7$, 則 $\delta=0$, $f(x)=0$ 有雙根爲 $2<3$.

(c) 若 $5<\lambda<7$, 則 $\delta>0$, $f(x)=0$ 有二實根 $x_1<x_2$,

但 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}=\frac{8}{2\cdot 2}=2<3$, 故 $x_1<x_2<3$.

將上得結果, 列表如次:

λ	$2f(3)$	δ'	論　結
$-\infty$	$-$		$x_2>3>x_1$
5	0		$x_2=3>x_1$
	$+$	$+$	$3>x_2>x_1$
7	$+$	0	$3>x_1=x_2=2$
$+\infty$	$+$	$-$	

例 2: 試定 λ, 俾下方程式

$$f(x)=x^2-(\lambda+3)x+2\lambda-1=0$$

之二根, 均大於 1.

上方程式有二實根之情形爲

$$\delta=b^2-4ac=(\lambda+3)^2-4(2\lambda-1)=\lambda^2-2\lambda+13>0 \qquad (1)$$

欲1不介於二根之間,則必

$$af(1)=1^2-(\lambda+3)+2\lambda-1=\lambda-3>0 \tag{2}$$

且1小於二根,則有

$$-\frac{b}{2a}-1=\frac{\lambda+3}{2}-1=\frac{\lambda+1}{2}>0 \tag{3}$$

(3) 式之解爲 $\lambda>-1$

(2) 式之解爲 $\lambda>3$

故 λ 能合 (2) 式時,恆能合 (3) 式.

(1) 式之判定式爲

$$\delta'=1^2-13=-12<0$$

故無實根,且 λ^2 之係數爲正,故 (1) 式不等式恆能成立,故本題之解爲 $\lambda>3$.

§ 49. 上節所論,爲根與一與數之比較,茲更進而論根與二與數之比較,

令 $f(x)=ax^2bx+c=0$, α,β 爲二與數,而 $\alpha>\beta$, 以 α, 代 x, 得

$$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c,\qquad f(\beta)=a\beta^2+b\beta+c$$

1. $f(\alpha)f(\beta)<0$, 卽 $f(\alpha)$ 與 $f(\beta)$ 異號,則必有一與 a 異號,故 $f(x)=0$ 有二實根 x_1 及 x_2

若 $af(\alpha)<0$, 則 $\beta<x_1<\alpha<x_2$,

若 $af(\beta)<0$, 則 $x_1<\beta<x_2<\alpha$.

2. $f(\alpha)f(\beta)>0$, 卽 $f(\alpha)$ 與 $f(\beta)$ 同號,故二者皆與 a 同號,或均與之異.

(a) $af(\alpha)<0$, 則 $af(\beta)<0$, $f(x)=0$ 有二實根, α,β 同介於其間,卽 $x_1<\beta<\alpha<x_2$.

(b) $af(\alpha)>0$, 則 $\alpha f(\beta)>0$, $f(x)=0$ 有無實根,須視其判定式而定,

若 $\delta>0$, 則 α,β 皆在其二根之外,

(1) $-\dfrac{b}{2a}>\alpha>\beta$, 則 $\beta<\alpha<x_1<x_2$,

(2) $\alpha>-\dfrac{b}{2a}>\beta$, 則 $\beta<x_1<x_2<\alpha$,

(3) $\alpha>\beta>-\dfrac{b}{2a}$, 則 $x_1<x_2<\beta<\alpha$,

若 $\delta=0$, 則 $f(x)=0$ 有雙根爲 $-\dfrac{b}{2a}$,可直比較 α,β 與 $-\dfrac{b}{2a}$.

若 $\delta<0$, 則 $f(x)=0$ 之根爲虛數,與 α,β 無比較之可言.

例 1: 令 $f(x)=(\lambda-3)x^2+2\lambda x+\lambda-4=0$, $+1$, -1 爲二與數,求當 λ 變時,二與數與根之比較.

$f(-1)=(\lambda-3)(-1)^2-2\lambda+\lambda-4=\lambda-3-2\lambda+\lambda-4=-7$

$f(+1)=(\lambda-3)\cdot1^2+2\lambda+\lambda-4=\lambda-3+2\lambda+\lambda-4=4\lambda-7$

1. $\lambda>\frac{7}{4}$, 則 $f(+1)>0$, $\therefore f(+1)f(-1)<0$,

此時 $f(x)=0$ 有二實根 $x_1<x_2$, $+1$ 及 -1 中必有一數介於其間,

若 $\lambda>3$, 卽 $\lambda-3>0$, 則 $(\lambda-3)f(-1)<0$, $\therefore x_1<-1<x_2<+1$,

若 $3>\lambda>\frac{7}{4}$, 卽 $\lambda-3<0$, 則 $(\lambda-3)f(+1)<0$, $\therefore -1<x_1<+1<x_2$.

2. $\lambda<\frac{7}{4}$, 則 $\lambda-3<0$, 與 $f(+1)$ 及 $f(-1)$ 同號,乃求其判定式

$$\delta'=b'^2-ac=\lambda^2-(\lambda-3)(\lambda-4)=7\lambda-12$$

(a) $\frac{7}{4}>\lambda>\frac{12}{7}$, 則 $\delta'>0$, $f(x)=0$ 有二實根, $+1$ 及 -1 皆在二根之外,

又 $$-\frac{b}{2a}-1=\frac{\lambda}{3-\lambda}-\lambda=\frac{2\lambda-3}{3-\lambda}>0$$

$$-\frac{b}{2a}+1=\frac{\lambda}{3-\lambda}+1=\frac{3}{3-\lambda}>0$$

故 $$-1<+1<x_1<x_2.$$

(b) $\lambda=\frac{12}{7}$, 則 $\delta=0$, 於是 $f(x)=0$ 之根爲

$$x_1=x_2=\frac{\frac{12}{7}}{3-\frac{12}{7}}=\frac{4}{3}>+1>-1$$

(c) $\lambda<\frac{12}{7}$, 則 $\delta<0$, $f(x)=0$ 無實根.

3. $\lambda=\frac{7}{4}$, 則 $f(+1)=0$, 故 1 爲 $f(x)=0$ 之一根, $f(x)=0$ 變爲

$$f_1(x)=5x^2-14x+9=0$$

兩根均爲正, 1 爲其較小者, 以 $\frac{14}{2\cdot5}=\frac{7}{5}>1$ 也, 故 $-1<1=x_1<x_2$.

4. $\lambda\sim3$, 則 $\lambda-3\sim0$, $f(x)=0$ 之一根爲無極, 他一根爲 $\frac{4-3}{2\cdot3}=\frac{1}{6}$.

將上得結果, 列表如次:

λ	$\lambda-3$	δ'	$f(+1)f(-1)$	$(\lambda-3)f(-1)$	$(\lambda-3)f(+1)$	結論
$-\infty$		$-$				無實根
$\frac{12}{7}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$-1<+1<\frac{4}{3}=x_1=x_2$
	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-1<+1<x_1<x_2$
$\frac{7}{4}$	$-$	$+$	0	$+$	0	$-1<+1=x_1<x_2$
	$-$		$-$	$+$	$-$	$-1<x_1<+1<x_2$
3	0		$-$	0	0	一根爲無極, 他一根爲 $\frac{1}{6}$
$+\infty$	$+$		$-$	$-$	$+$	$x_1<-1<x_2<+1$

例 2： 試定λ，俾方程式

$$f(x)=(\lambda-2)x^2-\lambda x+\lambda-4=0$$

之一根介於2及3之間，他一根小於2，卽$x_1<2<x_2<3$，

因2介於二根x_1及x_2之間，則必有

$$af(2)=(\lambda-2)\{2^2(\lambda-2)-2\lambda+\lambda-4\}$$

$$=3(\lambda-2)(\lambda-4)<0 \qquad (1)$$

又因3在x_1及x_2之外，則

$$af(3)=(\lambda-2)\{3^2(\lambda-2)-3\lambda+\lambda-4\}$$

$$=(\lambda-2)(7\lambda-22)>0 \qquad (2)$$

由(1)式， $2<\lambda<4$

由(2)式， $\lambda<2$，或$\lambda>3\frac{1}{7}$，

故 $3\frac{1}{7}<\lambda<4$.

§50. 不等二次式之解法

解不等式$ax^2+bx+c>0$，應用三項式號之研究卽可，於上兩節，已有見之，玆再舉數例於下.

例 1： 試解 $(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')>0$

令 $$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$g(x)=a'x^2+b'x+c'$$

分研$f(x)$及$g(x)$之號，設x在某間隔內，$f(x)$與$g(x)$同號，則在該間隔內，x爲上不等式之解.

特例： $f(x)=1-x^2$， $g(x)=x^2-2x$

$$f(x)=1-x^2=(1-x)(1+x)$$

$$g(x)=x^2-2x=x(x-2)$$

乃將 $f(x)$ 及 $g(x)$ 當 x 變時之號，列表於下：

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+2$		$+\infty$
$f(x)$ 之號		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$ 之號		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)g(x)$ 之號		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

故 x 必在 $(-1,0)$ 及 $(1,2)$ 二間隔內，上不等式始合.

例 2： 試解
$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}>m$$

此題所當注意者卽不可如解等式時，妄去其分母，蓋分母 $a'x^2+b'x+c'$ 之值爲正爲負，不可必也，倘其爲負，則將變上不等式之號，故先將 m 遷至左端，得

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}-m=\frac{(a-ma')x^2+(b-mb')x+c-mc'}{a'x^2+b'x+c'}=\frac{f(x)}{g(x)}>0$$

欲 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$，必也 $f(x)$ 與 $g(x)$ 同號，是與上例之解 $f(x)g(x)>0$ 完全相同矣.

特例：
$$\frac{3x^2+7x-14}{x^2+3x-4}>2$$

遷項，得
$$\frac{3x^2+7x-14}{x^2+3x-4}-2=\frac{x^2+x-6}{x^2+3x-4}>0$$

卽
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}>0$$

乃將 $f(x)$ 及 $g(x)$ 依 x 變時之號，列表於次：

x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f(x)$ 之號		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$ 之號		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)g(x)$ 之號		$+$	$+\infty \mid -\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty \mid -\infty$	$-$	0	$+$	

故必 $-\infty<x<-4$, $-3<x<1$, 或 $2<x<+\infty$,

上不等式始能成立.

例 3: 試解下聯立式

$$\begin{cases} f(x)=x^2-2(a+m)x+m^2-a^2=0 & (1)\\ g(x)=x^2-2(m+2a)x+m^2\geqslant 0 & (2)\end{cases} \quad a>0,$$

由 (2) 式減 (1) 式得 $g(x)-f(x)=a^2-2ax=a(a-2x)\geqslant 0$

或 $$x\leqslant\frac{a}{2} \qquad (3)$$

則 (1) (3) 所成聯立式,爲原聯立式之同解式.

以 $x=\frac{a}{2}$ 代入 (1) 式得

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-2(a+m)\cdot\frac{a}{2}+m^2-a^2=m^2-am-\frac{7}{4}a^2=\varphi(m)$$

$\varphi(m)=0$ 恆有二實根,爲

$$m_1=\frac{a}{2}-\sqrt{2}\,a=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}a.$$

及 $$m_2=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}a$$

1. $m_1<m<m_2$, 則 $\varphi(m)<0$, $f(x)=0$ 有二實根 $x_1<x_2$ 爲

$$a+m\pm\sqrt{2a(a+m)}$$

且 $$x_1<\frac{a}{2}<x_2$$

故 x_1 卽爲聯立式之解.

2. $-a<m<m_1=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}a$, 則 $f(x)=0$ 之二根 x_1, x_2 均爲實數,

惟因 $\varphi(m)>0$, $\frac{a}{2}$ 不介於 x_1 及 x_2 之間,又

$$a+m<a+m_1=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}a<\frac{a}{2}.$$

故 $$x_1<x_2<\frac{a}{2}$$

二根均爲聯立式之解.

3. $m>m_2=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}a$, 則 $\varphi(m)>0$, $\frac{a}{2}$ 不介於 $f(x)=0$ 之二實根 x_1 及 x_2 之間, 又

$$a+m>a+m_2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}a>\frac{a}{2},$$

故 $$\frac{a}{2}<x_1<x_2$$

是 x_1 x_2 均非聯立式之解.

4. $m=m_1$, 或 $m=m_2$, 則 $f\left(\frac{a}{2}\right)=0$, 故 $\frac{a}{2}$ 爲 $f(x)=0$ 之一根, 他一根爲 $$a+m_1-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+m_1<\frac{a}{2}$$

或 $$a+m_2-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+m_2>\frac{a}{2}$$

故當 $m=m_1$, $x_1=\frac{a}{2}+m_1=\frac{a}{2}+\frac{1-2\sqrt{2}}{2}a=(1-\sqrt{2})a$ 及 $x_2=\frac{a}{2}$ 均爲聯立式之解, 當 $m=m_2$, 惟 $x_1=\frac{a}{2}$ 爲聯立式之解.

第 九 章

§51. 結式之研究 設有二方程式

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

及
$$g(x)=a'x^2+b'x+c'=0 \tag{2}$$

x_1, x_2 及 x'_1, x'_2 各爲 $f(x)=0$, 及 $g(x)=0$ 之根, 以普通言, x_1, x_2, x'_1, x'_2 各不相等, 欲其有等者, 則 a, b, c, a', b', c' 諸係數必須合某情形而後可, 求之如下.

以 a' 乘 (1) 式, a 乘 (2) 式, 相減得

$$(a'b-ab')x=ac'-a'c \tag{3}$$

又以 b' 乘 (1) 式, b 乘 (2) 式, 相減得

$$(ab'-a'b)x^2=bc'-b'c \tag{4}$$

(3) (4) 爲 (1) (2) 之同解式,

由 (3) 式得
$$x=\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}$$

由 (4) 式得
$$x^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$$

故
$$\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\left(\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}\right)^2$$

即
$$R=(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0$$

R 謂之 $f(x)$, $g(x)$ 二式之結式 Resultant, 結式爲零者, 二方程式至少有一公根之充要情形也, 又若 $a'b-ab'=0$, 則 $ac'-a'c$, 即

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

於是 (3) 式爲無定式, 所與 $f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 二方程式, 實爲同一方程式, 而有二公根矣.

又因 $\qquad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a},$

及 $\qquad x'_1+x'_2=-\dfrac{b'}{a'}, \qquad x'_1x'_2=\dfrac{c'}{a'},$

則 $$\begin{aligned}a'^2f(x'_1)f(x'_2)&=a'^2\{ax'^2_1+bx'_1+c\}\{ax'^2_2+bx'_2+c\}\\&=a'^2\{a^2x'^2_1x'^2_2+abx'_1x'_2(x'_1+x'_2)+ac(x'^2_1+x'^2_2)\\&\qquad+b^2x'_1x'_2+bc(x'_1+x'_2)+c^2\}\\&=a'^2\left\{a^2\cdot\frac{c'^2}{a'^2}+ab\cdot\frac{c'}{a'}\left(-\frac{b'}{a'}\right)+ac\left(\frac{b'^2}{a'^2}-\frac{2c'}{a'}\right)\right.\\&\qquad\left.+b^2\cdot\frac{c'}{a'}+bc\left(-\frac{b'}{a'}\right)+c^2\right\}\\&=a^2c'^2-abb'c'+acb'^2-2aca'c'+b^2a'c'-bca'b'+a'^2c^2\\&=a^2c'^2-2aca'c'+a'^2c^2-bc'(ab'-a'b)+b'c(ab'-a'b)\\&=(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)\end{aligned}$$

同理得 $\qquad a^2g(x_1)g(x_2)=(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)$

故 $$\begin{aligned}R&=a'^2f(x_1)f(x_2)=a^2g(x_1)g(x_2)\\&=(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)\end{aligned}$$

§ 52. 結式之性質

當結式爲零, $f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 至少有一公根, 爲 $\qquad x=\dfrac{ac'-a'c}{a'b-ab'},$

設 R 異於零,則二方程式必無公根,惟可由 R 之號,定 x_1, x_2, x'_1, x'_2 相互間之位置,即比較方程式 $f(x)=0$ 與 $g(x)=0$ 之根也.

1. $R<0$, 則 x_1, x_2, x'_1, x'_2 均爲實數,即 $f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 各有二實根也,且此四根之位置,必犬牙交錯,爲

$$x_1<x'_1<x_2<x'_2$$

或
$$x'_1<x_1<x'_2<x_2$$

設 x'_1 爲虛根,則 x'_2 必爲交錯虛根,令

$$x'_1=p+qi, \qquad 則 \qquad x'_2=p-qi,$$

於是
$$\begin{aligned} f(x'_1)&=f(p+qi)=a(p+qi)^2+b(p+qi)+c \\ &=a\{p^2-q^2+2pqi\}+b(p+qi)+c \\ &=a(p^2-q^2)+bp+c+i(2apq+bq) \\ &=P+Qi \end{aligned}$$

中
$$P=a(p^2-q^2)+bp+c, \qquad Q=2apq+bq$$

同理得
$$f(x'_2)=P-Qi$$

$$\therefore \quad R=a'^2f(x'_1)f(x'_2)=a'^2(P+Qi)(P-Qi)=a'^2(P^2+Q^2)>0$$

是與原設相刺謬矣,故 x'_1, x'_2 不能爲虛數,同理 x_1, x_2 亦不能爲虛數,

又 $f(x'_1)f(x'_2)<0$ 表明 $f(x)=0$ 有根介於 x'_1 及 x'_2 之間,即

$$x'_1<x_1<x'_2 \qquad 或 \qquad x'_1<x_2<x'_2$$

同理 $g(x_1)g(x_2)<0$, 表明 $g(x)=0$ 有根介於 x_1 及 x_2 之間,故有

$$x'_1<x_1<x'_2<x_2 \qquad 或 \qquad x_1<x'_1<x_2<x'_2$$

當 $\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x'_1+x'_2}{2}=-\frac{b}{2a}+\frac{b'}{2a'}<0$, 則 $x_1<x'_1<x_2<x'_2$

當 $\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x'_1+x'_2}{2}=-\frac{b}{2a}+\frac{b'}{2a'}>0$, 則 $x'_1<x_1<x'_2<x_2$.

2. $R>0$, 則 x_1, x_2, x'_1, x'_2 可爲虛數, 設判定式 b^2-4ac 及 $b'^2-4a'c'$ 均爲正, $f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 各有二實根, 且 $g(x)=0$ 之二根, 均在 $f(x)=0$ 之二根之間, 或均在其外, 故必居下列四式之一:

(a) $x'_1<x_1<x_2<x'_2$ (c) $x_1<x_2<x'_1<x'_2$

(b) $x_1<x'_1<x'_2<x_2$ (d) $x'_1<x'_2<x_1<x_2$

(1) $a'[g(x_1)+g(x_2)]<0$, 則 $a'g(x_1)<0$, $a'g(x_2)<0$, 其四根之位置如(a)式, 即 $x'_1<x_1<x_2<x'_2$.

(2) $a[f(x'_1)+f(x'_2)]<0$, 則 $af(x'_1)<0$, $af(x'_2)<0$, 其四根之位置如(b)式, 即 $x_1<x'_1<x'_2<x_2$.

(3) $-\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}<0$, 即 $x_1+x_2-(x'_1+x'_2)<0$, 則四根之位置如(c)式, 即 $x_1<x_2<x'_1<x'_2$.

(4) $-\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}>0$, 即 $x_1+x_2-(x'_1+x'_2)>0$, 則四根之位置如(d)式, 即 $x'_1<x'_2<x_1<x_2$.

註:
$$a'[g(x_1)+g(x_2)]=a'[a'(x_1^2+x_2^2)+b'(x_1+x_2)+c']$$
$$=a'\left[a'\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)+b'\left(-\frac{b}{a}\right)+c'\right]$$
$$=a'\left[a'\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)-\frac{b'b}{a}+c'\right]$$

同理 $$a[f(x_1)+f(x_2)]=a\left[a\left(\frac{b'^2-2a'c'}{a'^2}\right)-\frac{bb'}{a'}+c\right]$$

例：試比較下二方程式之根

$$f(x)=x^2-3x+\lambda=0$$

及 $$g(x)=x^2-4x+3(\lambda-1)=0$$

$$R=(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$
$$=\{3(\lambda-1)-\lambda\}^2-\{-4-(-3)\}\{-3\cdot3(\lambda-1)-(-4)\lambda\}$$
$$=(2\lambda-3)^2-5\lambda+9=4\lambda^2-17\lambda+18=4(\lambda^2-\tfrac{17}{4}\lambda+\tfrac{9}{2})$$
$$=4(\lambda-2)(\lambda-\tfrac{9}{4})$$
$$\delta=b^2-4ac=9-4\lambda$$
$$\delta'=\left(\frac{b'}{2}\right)^2-a'c'=4-3(\lambda-1)=7-3\lambda$$

故欲 $f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 均有實根，λ 須 $<\frac{9}{4}$.

1. $\lambda<2$，則 $R>0$，$f(x)=0$ 之二根 x_1, x_2 均介於 $g(x)=0$ 之二根之間，或均在其外，

但 $$a'[g(x_1)+g(x_2)]=x_1{}^2+x_2{}^2-4(x_1+x_2)+6(\lambda-1)$$
$$=9-2\lambda-12+6\lambda-6=4\lambda-9<0$$

故 $$x'_1<x_1<x_2<x'_2$$

2. $2<\lambda<\frac{9}{4}$，則 $R<0$，故 x_1, x_2, x'_1, x'_2 均爲實根，且犬牙相錯，

又 $3-4=-1<0$， 故 $x_1<x'_1<x_2<x'_2$

3. $\lambda=2$，則 $R=0$，$f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 二方程式以

$$x=\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}=\frac{3(\lambda-1)-\lambda}{-3-(-4)}=2\lambda-3=2\times2-3=1$$

爲其公根，其他一根爲

$$x_2=3-1=2 \qquad \text{及} \qquad x'_2=4-1=3$$

故 $x_1=x'_1=1<x_2=2<x'_2=3.$

4. $\lambda=\frac{9}{4}$，則 $R=0$，$f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 有公根爲

$$x=2\lambda-3=2\times\frac{9}{4}-3=\frac{3}{2}$$

他一根各爲 $x_2=\frac{3}{2}$ 及 $x'_2=4-\frac{3}{2}=\frac{}{2}$

故 $x_1=x_2=x'_1=\frac{3}{2}<x'_2=\frac{5}{2}.$

乃將上得結果，列表如下：

λ	R	δ	δ'	$a'[g(x_1)+g(x_2)]$	$-\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}$	結論
$-\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$		$x'_1<x_1<x_2<x'_2$
2	0	$+$	$+$			$x'_1=x_1=1<x_2=2<x'_2=3$
	$-$	$+$	$+$		$-$	$x_1<x'_1<x_2<x'_2$
$\frac{9}{4}$	0	0	$+$			$x_1=x'_1=x_2=\frac{3}{2}<x'_2=\frac{5}{2}$
	$+$	$-$	$+$			$f(x)=0$ 無實根
$\frac{7}{3}$	$+$	$-$	0			$f(x)=0$ 無實根
$+\infty$	$+$	$-$	$-$			$f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 均無實根

第 十 章

§53. 特別高次方程式 論方程式之得分解為一次式或二次式之因子者:

設 $f(x)=0$ 可分得為 $A, B, C,\cdots\cdots$ 諸因子, $A, B, C,\cdots\cdots$ 等均為 x 之一次式或二次式, 即

$$f(x)=A\cdot B\cdot C\cdots\cdots=0$$

則 $$A=0,\ B=0,\ C=0,\ \cdots\cdots$$

之根, 卽為 $f(x)=0$ 之根.

例 1: 試解 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$

$$\begin{aligned}x^4-x^3-5x^2-7x+12&=x^3(x-1)-5x(x-1)-12(x-1)\\&=(x-1)\{x^3-5x-12\}=(x-1)\{x^3-3x^2+3x^2-9x+4x-12\}\\&=(x-1)\{x^2(x-3)+3x(x-3)+4(x-3)\}\\&=(x-1)(x-3)(x^2+3x+4)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x-1=0,&\quad 得\quad x=1,\\ x-3=0,&\quad 得\quad x=3,\\ x^2+3x+4=0,&\quad 得\quad x=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}.\end{aligned}$$

例 2: 試解 $6x^3-11x^2+8x-2=0$

$$\begin{aligned}6x^3-11x^2+8x-2&=6x^3-3x^2-8x^2+4x+4x-2\\&=3x^2(2x-1)-4x(2x-1)+2(2x-1)\\&=(2x-1)\{3x^2-4x+2\}=0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad 2x-1=0, \quad 得 \quad x=\tfrac{1}{2}$$

$$3x^2-4x+2=0, \quad 得 \quad x=\frac{2\pm i\sqrt{2}}{2}.$$

§ 54. 論方程式之形爲 $au^2+bu+c=0$, u 爲 x 之倚數, 卽 $u=f(x)$ 者:

設 u_1, u_2 爲 $au^2+bu+c=0$ 之二根, 則

$$u=u_1 \qquad u=u_2$$

卽 $\quad f(x)-u_1=0 \quad$ 及 $\quad f(x)-u_2=0$

之根, 卽爲原方程式之根.

例 1: 試解 $3x^4+10x^2-8=0$

令 $\quad X=x^2$, 則

$$3x^4+10x^2-8=3X^2+10X-8=(3X=2)(X+4)=0$$

$$\therefore \quad X_1=x^2=\tfrac{2}{3} \quad 得 \quad x=\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

$$X_2=x^2=-4 \quad 得 \quad x=\pm 2i.$$

例 2: 試解 $(x-a)(x-3a)(x+2a)(x+4a)=11a^4$

遷項 $\quad (x-a)(x-3a)(x+2a)(x+4a)-11a^4$

$$=(x-a)(x+2a)(x-3a)(x+4a)-11a^4$$

$$=\{x^2+ax-2a^2\}\{x^2+ax-12a^2\}-11a^4$$

$$=(x^2+ax)^2-14a^2(x^2+ax)+24a^4-11a^4$$

$$=(x^2+ax)^2-14a^2(x^2+ax)+13a^4=0$$

令 $\quad u=x^2+ax$, 則

$$(x^2+ax)^2-14a^2(x^2+ax)+13a^4=u^2-14a^2u+13a^4$$

$$=(u-13a^2)(u-a^2)=0$$

$\therefore\quad u-13a^2=0,\quad$ 卽 $\quad x^2+ax-13a^2=0,$

解之,得 $$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+52a^2}}{2}=a\left\{\frac{-1\pm\sqrt{53}}{2}\right\}$$

$u-a^2=0,\quad$ 卽 $\quad x^2+ax-a^2=0$

解之,得 $$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=a\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$$

例 3: 試解 $x^4+10x^3+31x^2+30x+5=0$

$$x^4+10x^3+31x^2+30x+5$$
$$=x^4+10x^3+25x^2+6x^2+30x+5$$
$$=(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)+5=0$$

令 $\quad u=x^2+5x,$ 則

$$(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)+5=u^2+6u+5=(u+5)(u+1)=0$$

$\therefore\quad u+5=0,\quad$ 卽 $\quad x^2+5x+5=0$

解之,得 $$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-20}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$

$u+1=0,\quad$ 卽 $\quad x^2+5x+1=0$

解之,得 $$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

例 4: 試解 $\quad 8\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)+3\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x}\right)-11=0$

令 $\quad u=\frac{x^2+2x}{x^2-1}\quad$ 則 $\quad \frac{1}{u}=\frac{x^2-1}{x^2+2x}$

$$\therefore\quad 8\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)+3\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x}\right)-11=8u+\frac{3}{u}-11=0$$

卽 $\quad 8u^2-11u+3=(8u-3)(u-1)=0$

$$\therefore \quad 8u-3=0, \quad 即 \quad 8\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)-3=0, 或 \ 5x^2+16x+3=0$$

解之,得 $\qquad x=-\frac{1}{5}, \qquad x=-3$

$$u-1=0, \quad 即 \quad \frac{x^2+2x}{x^2-1}-1=0, 或 \ 2x+1=0$$

解之,得 $\qquad x=-\frac{1}{2}$.

§ 55. 轉式 有方程式$f(x)=0$,以$\frac{1}{x}$代x,去其分母後,其式不變者,曰轉式 Reciprocal Equation,依x之昇指數列之,則首末二項及凡距首末二項等遠之項係數必各相同,或等量而異號,如

$$3x^4+4x^3+5x^2+4x+3=0$$

及

$$x^7-2x^6+3x^5-5x^4+5x^3-3x^2+2x-1=0$$

皆爲轉式,凡轉式之爲三,四,五次者,皆爲可解.

1. 四次轉式. 設有四次轉式

$$f(x)=ax^4\pm bx^3\pm cx^2\pm bx+a=0$$

集係數相同之各項,且以x^2遍除之,得

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\pm b\left(x+\frac{1}{x}\right)\pm c=0$$

令 $\quad x+\frac{1}{x}=u \quad$ 則 $\quad x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=u^2-2$

於是 $\quad au^2\pm bu-2a\pm c=0$

$$\therefore \quad u_1=x+\frac{1}{x}=\frac{\mp b+\sqrt{b^2+8a^2\mp 4ac}}{2} \qquad (1)$$

$$u_2=x+\frac{1}{x}=\frac{\mp b-\sqrt{b^2+8a^2\mp 4ac}}{2} \qquad (2)$$

由(1),(2)二式,可得$f(x)=0$之四根矣.

2. 三次及五次轉式. 凡奇次轉式必有一根爲 $+1$ 或 -1,

因 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\pm a_1x\pm a_0$$
$$=a_0(x^n\pm1)+a_1x(x^{n-2}\pm1)+a_2x^2(x^{n-4}\pm1)+\cdots\cdots=0$$

n 爲奇數, 則 $n-2$, $n-4\cdots\cdots$ 皆爲奇數, $x^n\pm1$, $x^{n-2}\pm1$, $x^{n-4}\pm1,\cdots\cdots$ 各可爲 $x\pm1$ 除盡, 卽 $x\pm1$ 可除盡全式, 且其商方程式 Depressed Equation 亦爲轉式.

三次, 五次轉式之商方程式, 各爲二次, 四次轉式, 故得如上法解之矣.

例: 試解 $6x^5+11x^4-33x^3-33x^2+11x+6=0$

$$6x^5+11x^4-33x^3-33x^2+11x+6$$
$$=6(x^5+1)+11x(x^3+1)-33x^2(x+1)$$
$$=(x+1)\{6(x^4-x^3+x^2-x+1)+11x(x^2-x+1)-33x^2\}$$
$$=(x+1)\{6x^4+5x^3-38x^2+5x+6\}=0$$

$\therefore$ $x+1=0$ 得 $x=-1$

$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$, 卽 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$

令 $$x+\frac{1}{x}=u$$

則 $$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=6u^2+5u-50=0$$

卽 $$\left(u-\frac{5}{2}\right)\left(u+\frac{10}{3}\right)=0$$

$\therefore$ $$u-\frac{5}{2}=x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=0$$

即 $$2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)=0$$

故 $$x=\tfrac{1}{2},\qquad x=2$$

或 $$u+\frac{10}{3}=x+\frac{1}{x}+\frac{10}{3}=0$$

即 $$3x^2+10x+3=(3x+1)(x+3)=0$$

故 $$x=\frac{-1}{3},\qquad x=-3,$$

§56. 二項方程式

方程式之僅有二項如 $x^n+A=0$ 者曰二項方程式 Binomial Equation.

設 A 為正，則可令 $A=a^n$；A 為負，則令 $-A=a^n$，故上式恆可書為

$$x^n\pm a^n=0$$

是式常可分括為一次式或二次式及一轉式之二因子，故可以前法解之.

例：試解 $$x^5-32=0$$

$$x^5-32=x^5-2^5=(x-2)\{x^4+2x^3+2^2x^2+2^3x+2^4\}=0$$

$$\therefore\quad x^4+2x^3+2^2x^2+2^3x+2^4=0,\quad \text{或}\quad x-2=0$$

如前法解之得

$$x_1=\frac{-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{2},\qquad x_2=\frac{-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{2}$$

及 $$x=2$$

為上式之五根.

§57. 無理方程式

含一帶根數者：置帶根數於方程式之一端，則有

$$P(x)=\sqrt{Q(x)}\tag{1}$$

P,Q 各爲 x 之多項式，平方之得

$$P^2(x)=Q(x) \tag{2}$$

(1)式之所表示者爲 $\quad |P(x)|=|\sqrt{Q(x)}|$

$$Q(x)>0$$

及 $\quad P(x)>0$

而(2)式之所表示者爲 $\quad |P(x)|=|\sqrt{Q(x)}|$

及 $\quad Q(x)>0$

故(2)式非(1)式之同解式，其同解式實爲下聯立式

$$\text{I.}\quad \begin{cases} P^2(x)=Q(x) \\ P(x)>0 \end{cases}$$

設 P,Q 各爲 x 之一次及二次式，卽

$$P(x)=\alpha x+\beta$$

$$Q(x)=ax^2+bx+c$$

則 I 式爲 $\quad f(x)=ax^2+bx+c-(\alpha x+\beta)^2=0$

$$\alpha x+\beta>0$$

視 $\quad f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=Q\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{a\beta^2-2b\alpha\beta+c\alpha^2}{\alpha^2}$

之號，卽可依 § 16 例解 3 之法，以求得原方程式之二根，一根，或無根也.

例 1: 試解方程式.

$$2x-1=\sqrt{x^2-3x+6}$$

平方之，得 $\quad (2x-1)^2=x^2-3x+6$

卽 $\quad f(x)=(2x-1)^2-(x^2-3x+6)=0$

又 $\quad 2x-1>0$

但 $f(\frac{1}{2})=-(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+6)=-4\frac{3}{4}<0$, 又 x^2 之係數爲 $2^2-1=3>0$, 故 $\frac{1}{2}$ 介於 $f(x)=0$ 之二根之間, 其較大根卽爲原方程之解.

$$f(x)=3x^2-x-5=0$$

$$\therefore \qquad x=\frac{1+\sqrt{61}}{6}$$

例 2: 試解 $x-\lambda=\sqrt{\lambda x^2-\lambda x+\lambda^2-1}$

自乘, 得 $$(x-\lambda)^2=\lambda x^2-\lambda x+\lambda^2-1$$

卽 $$f(x)=(\lambda-1)x^2+\lambda x-1=0$$

又 $$x>\lambda$$

以 λ 代 $f(x)$ 之 x 得

$$g(\lambda)=\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

因 $\lambda^2+\lambda+1$ 無實根, 而恆爲正, 故 $g(\lambda)$ 恆與 $(\lambda-1)$ 同號, 卽恆與 $f(x)$ 之 x^2 之係數同號, 是 λ 不能介於 $f(x)=0$ 之二根 x_1, x_2 之間, 其二根 x_1, x_2 均大於 λ, 卽

$$\lambda<x_1<x_2$$

之情形爲 $$-\frac{b}{2a}>\lambda \qquad 及 \qquad b^2-4ac>0$$

卽 $$-\frac{\lambda}{2(\lambda-1)}>\lambda$$

或 $$\frac{\lambda}{2(\lambda-1)}(2\lambda-2+1)=\frac{\lambda(2\lambda-1)}{2(\lambda-1)}<0$$

$$\therefore \qquad \lambda<0, \quad 或 \quad \tfrac{1}{2}<\lambda<1, \qquad (1)$$

又 $$b^2-4ac=\lambda^2+4(\lambda-1)=\lambda^2+4\lambda-4>0$$

$$\therefore \qquad \lambda<-2-2\sqrt{2}, \quad 或 \quad \lambda>-2+2\sqrt{2} \qquad (2)$$

由(1)(2)得 $\lambda<-2-2\sqrt{2}$

或 $-2+2\sqrt{2}<\lambda<1$

則原方程式有二根爲 $\dfrac{-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+4\lambda-4}}{2(\lambda-1)}$

若λ不在上二間隔內,則原方程式無根.

§ 58. 含二帶根數者: 分置帶根數有理數於方程式之二端,則有

$$\pm\sqrt{P}\pm\sqrt{Q}=R$$

P, Q, R均爲x之多項式,於研究普通式前,請先言特例

$$\sqrt{P}\pm\sqrt{Q}=0$$

$\sqrt{P}+\sqrt{Q}=0$於P, Q同時爲零外無他根,若$\sqrt{P}-\sqrt{Q}=0$,即

$$\sqrt{P}=\sqrt{Q} \qquad (1)$$

其所表示者爲 $P=Q$

及 $P>0$

$Q>0$

乃將(1)式平方之,得 $P=Q \qquad (2)$

無復$P>0, Q>0$之制限矣故非(1)式之同解式,其同解式爲

$$P=Q>0$$

即 II. $\begin{cases}P=Q\\P>0\end{cases}$

例: 試解 $\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{x-1}$

平方之, $x^2-3x+1=x-1$

即 $$f(x)=x^2-4x+2=0$$

又 $$x-1>0$$

即 $$x>1$$

但 $$f(1)=1-4+2=-1<0$$

故1介於$f(x)=0$之二根之間,其較大根

$$2+\sqrt{2}$$

為原方程式之解.

§ 59. 試取 $$\pm\sqrt{P}\pm\sqrt{Q}=R \tag{1}$$

平方之,得 $$P+Q\pm2\sqrt{PQ}=R^2 \tag{2}$$

即 $$\pm2\sqrt{PQ}=R^2-P-Q \tag{2}$$

再自乘,得 $$4PQ=(R^2-P-Q)^2 \tag{3}$$

故任取(1)式之一式,化為有理後,均得(3)式,即(3)式非(1)式中各式之同解式,惟(1)式中各式所同表示之

$$P>0, \quad 及 \quad Q>0$$

(3)式亦表示之,以 $$4PQ=(R^2-P-Q)^2$$

右端為完全平方,故 $$PQ>0$$

(3)式又可書為 $$4PQ=R^4-2R^2(P+Q)+(P+Q)^2$$

即 $$2R^2(P+Q)=R^4+(P-Q)^2$$

$$\therefore \quad P+Q=\frac{R^4+(P-Q)^2}{2R^2}>0$$

故 $P>0, \quad Q>0$

欲得(1)式中各式同解式,則必於(3)式而加以種種之制限,求之於下,試取(1)式之

$$\sqrt{P}+\sqrt{Q}=R$$

$$-\sqrt{P}-\sqrt{Q}=R \tag{4}$$

其所表示者為 $P>0$

$$Q>0$$

及 $R\gtrless 0$

(2)為 $$+2\sqrt{PQ}=R^2-P-Q \tag{2}$$

其所表示者僅為 $P>0$, $Q>0$, 及 $R^2-P-Q>0$, 故必加以

$$R\gtrless 0$$

始為(4)式之同解,(3)式為

$$4PQ=(R^2-P-Q)^2$$

其所表示者僅為 $P>0$ 及 $Q>0$, 故必加以

$$R^2-P-Q>0$$

始為(2)′式之同解式.

故(4)式之同解式為

III. $$\begin{cases} 4PQ=(R^2-P-Q)^2 \\ R^2-P-Q>0 \\ R\gtrless 0 \end{cases}$$

復取(1)式之 $$\sqrt{P}-\sqrt{Q}=R$$

$$-\sqrt{P}+\sqrt{Q}=R \tag{5}$$

其所表示者爲$P>0, Q>0$, 及$(\sqrt{P}-\sqrt{Q})$與R同號或異號, 卽

$$P>0$$

$$Q>0$$

及 $$R(P-Q)\gtreqless 0$$

因 $$(\sqrt{P}-\sqrt{Q})(\sqrt{P}+\sqrt{Q})=P-Q$$

但 $\sqrt{P}+\sqrt{Q}>0$, 故 $(\sqrt{P}-\sqrt{Q})$與$P-Q$同號也

(2) 式爲 $$-2\sqrt{PQ}=R^2-P-Q \qquad (2)''$$

其所表示者爲$P>0, Q>0$, 及$R^2-P-Q<0$, 故必加以

$$R(P-Q)\gtreqless 0$$

始爲 (5) 式之同解式.

(3) 式爲 $$4PQ=(R^2-P-Q)^2$$

其所表示者僅爲$P>0$, 及$Q>0$, 故必加以

$$R^2-P-Q<0$$

始爲 (2)″式之同解式.

故 (5) 式之同解式爲

$$\text{IV.}\qquad \begin{cases} 4PQ=(R^2-P-Q)^2 \\ R^2-P-Q<0 \\ R(P-Q)\gtreqless 0 \end{cases}$$

§ 60. 設P, Q爲x之一次式, R爲常數, 卽

$$P=mx+p$$

$$Q=m'x+p'$$

$$R=a$$

則 (a) $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=a$

(b) $\sqrt{P}-\sqrt{Q}=a$

(c) $-\sqrt{P}+\sqrt{Q}=a$

(d) $-\sqrt{P}-\sqrt{Q}=a$

之同解式各爲

$$\text{III}' \quad \begin{cases} 4PQ=(a^2-P-Q)^2 \\ a^2-P-Q>0 \\ a>0 \end{cases}$$

$$\text{IV}' \quad \begin{cases} 4PQ=(a^2-P-Q)^2 \\ a^2-P-Q<0 \\ a(P-Q)>0 \end{cases}$$

$$\text{IV}'' \quad \begin{cases} 4PQ=(a^2-P-Q)^2 \\ a^2-P-Q<0 \\ a(P-Q)<0 \end{cases}$$

$$\text{III}'' \quad \begin{cases} 4PQ=(a^2-P-Q)^2 \\ a^2-P-Q>0 \\ a<0 \end{cases}$$

皆爲二次式與一次式之聯立式，而易解矣.

例 1: 試解 $\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}=1$

平方之得 $x-1+2-x-2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1$

即 $\sqrt{(x-1)(2-x)}=0$

再平方之得 $(x-1)(2-x)=0$

但 $(x-1)-(2-x)>0$

即 $x>\frac{3}{2}$

故僅 $x=2$ 爲原方程式之解.

例 2：試解 $\sqrt{x-m}-\sqrt{2x-1}=2$

原式可書爲 $\sqrt{x-m}=2+\sqrt{2x-1}$

平方之，得其同解式

$$x-m=4+2x-1+4\sqrt{2x-1}$$

即 $$-x-m-3=4\sqrt{2x-1}$$

再平方之，得 $f(x)=(x+m+3)^2-16(2x-1)=0$

又 $$-x-m-3>0$$

即 $$x<-m-3$$

但 $$f(-m-3)=-16(-2m-7)=16(2m+7)$$

1. $m<-\frac{7}{2}$，則 $f(-m-3)<0$

$$f(x)=x^2+2x(m-13)+(m+3)^2+16=0$$

有二實根 x_1、x_2 爲 $13-m\pm4\sqrt{9-2m}$

且 $$x_1<-m-3<x_2$$

故 $$x_1=13-m-4\sqrt{9-2m}$$

爲原方程式之根.

2. $-\frac{7}{2}<m<\frac{9}{2}$，則 $f(x)=0$ 有二實根 x_1, x_2，$f(-m-3)>0$，故 $-m-3$ 不介於 x_1 及 x_2 之間，

但 $$-\frac{b}{2a}-(-m-3)=-(m-13)+m+3=16>0$$

則 $$-m-3<x_1<x_2$$

故 x_1, x_2 均非原方程式之根.

§ 61. 無理方程式之普通解法，旣如上所述，惟往往有得以簡便之法出之者，略舉數例於下.

(a) <u>方程式含一帶根數,且對此帶根數,而爲二次式者,</u>得解之如次,

例: 試解 $2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}-5=0$

$$2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}-5$$

$$=2(x^2-3x-1)-5\sqrt{x^2-3x-1}-3=0$$

即 $$\{2\sqrt{x^2-3x-1}+1\}\{\sqrt{x^2-3x-1}-3\}=0$$

$$\therefore \quad \sqrt{x^2-3x-1}=-\tfrac{1}{2} \qquad (1)$$

$$\sqrt{x^2-3x-1}=3 \qquad (2)$$

式(1)爲不合理,以左端爲正,右端爲負,决不能相等也,平方(2)式得 $x^2-3x-1=9$

即 $$x^2-3x-10=(x+2)(x-5)=0$$

$$\therefore \quad x=-2, \qquad x=5.$$

(b) <u>方程式之兩端得均成正方者,或一端爲正方,而他端爲常數者,</u>解之如次

例: 試解 $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$

原式可書爲 $3x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9$

即 $$\{\sqrt{3x^2+x}+x\}^2=3^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{3x^2+x}+x=3 \qquad (1)$$

$$\sqrt{3x^2+x}+x=-3 \qquad (2)$$

(1)式之同解式爲

$$3x^2+x=(3-x)^2$$

即 $$f(x)=2x^2+7x-9=0$$

及 $$3-x>0$$

即 $$x<3$$

但 $$f(3)=2\cdot3^2+3\times7-9=30>0$$

$$-\frac{b}{2a}-3=-\frac{7}{2\cdot2}-3<0$$

故 $f(x)=2x^2+7x-9=0$ 之二根,均小於3,解之得

$$x=1,\quad x=-\tfrac{9}{2}$$

為 (1) 式之根.

(2) 式之同解式為

$$3x^2+x=(3+x)^2$$

即 $$g(x)=2x^2-5x-9=0$$

及 $$-3-x>0$$

即 $$x<-3$$

但 $$g(-3)=2(-3)^2+15-9=18+15-9=24>0$$

$$-\frac{b}{2a}-(-3)=\frac{5}{4}+3>0$$

故 $g(x)=0$ 之二根均大於 -3,而 (2) 式無根,

故原方程式之根為 $-\frac{9}{2}$ 及 1.

(c) 凡方程式之形為 $\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{ax^2+b'x+c'}=d$ 者得解之如次.

例: 試解 $$\sqrt{x^2+2x-2}+\sqrt{x^2+3}=3$$

原式為 $$\sqrt{x^2+2x-2}+\sqrt{x^2+3}=3 \qquad (1)$$

二根下數之差為 $$x^2+2x-2-(x^2+3)=2x-5 \qquad (2)$$

以(1)除(2),得 $\sqrt{x^2+2x-2}-\sqrt{x^2+3}=\dfrac{2x-5}{3}$ (3)

(1)(3)相加,得 $2\sqrt{x^2+2x-2}=2\left(\dfrac{x+2}{3}\right)$ (4)

(4)式之同解式爲 $x^2+2x-2=\dfrac{x^2+4x+4}{9}$

即 $f(x)=8x^2+14x-22=2(4x^2+7x-11)=0$

及 $x+2>0$

即 $x>-2$

$$f(-2)=2\{4\times 4-2\times 7-11\}=2\{-9\}=-18<0$$

故 -2 介於 $f(x)=4x^2+7x-11=0$ 之二根之間,其較大根

$$x=\frac{-7+\sqrt{49+176}}{8}=\frac{-7+15}{8}=1$$

爲原方程式之解.

§62. 二次聯立方程式例解

例 1 試解 $\begin{cases} y=ax+b & (1)\\ xy=-c & (2)\end{cases}$

以(1)式 y 之值,代入(2)式得

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (3)$$

爲 x 之二次方程式,解之得

及 $x=x_1$ $\therefore\ y_1=ax_1+b$

$x=x_2$ $\therefore\ y_2=ax_2+b$

若 $x_1=x_2$,則 $y_1=y_2$,爲雙解式,若 x_1, x_2 爲虛數,則 y_1, y_2 亦爲虛數,即(1)(2)爲無解式.

特例：1. 試解 $\begin{cases}x+y=a\\ xy=b\end{cases}$

則 x, y 爲方程式 $$X^2-aX+b=0$$

之根，故 $$x=X_1,\qquad x=X_2,$$
$$y=X_2,\qquad y=X_1,$$

特例：2. 試解 $\begin{cases}x-y=a\\ xy=b\end{cases}$

令 $-y=z$，則原式變爲

$$\begin{cases}x+z=a\\ xz=-b\end{cases}$$

x, z 爲方程式 $$X^2-aX-b=0$$

之根，故 $$x=X_1,\qquad x=X_2,$$
$$y=-z=-X_2,\qquad y=-z=-X_1,$$

例 2：試解 $$\begin{cases}y=ax+b & (1)\\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 & (2)\end{cases}$$

以 (1) 式 y 之值代入 (2) 式得

$$(x-\alpha)^2+\{ax+(b-\beta)\}^2-R^2=0$$

爲 x 之二次方程式，解之得

$$x=x_1,\qquad x=x_2,$$
$$y=ax_1+b,\qquad y=ax_2+b,$$

特例：1. 試解 $$\begin{cases}x+y=a & (1)\\ x^2+y^2=b^2 & (2)\end{cases}$$

(2) 式可書爲 $$(x+y)^2-2xy=b^2$$

故原式之同解式爲 $$\begin{cases}x+y=a\\ xy=\dfrac{a^2-b^2}{2}\end{cases}$$

於是 x, y 爲方程式

$$X^2-aX+\frac{a^2-b^2}{2}=0$$

即 $$2X^2-2aX+a^2-b^2=0$$

之根，解之得 $x=X_1,\qquad x=X_2,$

$y=X_2,\qquad y=X_1,$

特例：2. 試解 $\begin{cases}x-y=a\\x^2+y^2=b^2\end{cases}$

其同解式爲 $\begin{cases}x-y=a\\(x-y)^2+2xy=b^2=a^2+2xy\end{cases}$

即 $\begin{cases}x-y=a\\xy=\dfrac{b^2-a^2}{2}\end{cases}$

故 x, $-y$ 爲方程式 $$X^2-aX+\frac{a^2-b^2}{2}=0$$

之根，解之得 $x=X_1,\qquad x=X_2,$

$y=-X_2,\qquad y=-X_1,$

例 3：試解 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2 & (1)\\ xy=b^2 & (2)\end{cases}$

以 2 乘 (2) 式，而與 (1) 式相加減得

$$(x+y)^2=a^2+2b>0$$

及 $$(x-y)^2=a^2-2b>0$$

即 $$x+y=\pm\sqrt{a^2+2b}$$

及 $$x-y=\pm\sqrt{a^2-2b}$$

故 $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}[\pm\sqrt{a^2+2b}\pm\sqrt{a^2-2b}]\\y=\frac{1}{2}[\pm\sqrt{a^2+2b}\mp\sqrt{a^2-2b}]\end{array}\right\}a^2>+2b>-a^2$

例4: 試解 $\begin{cases} a\,x^2+b\,xy+c\,y^2+d\ =0 & (1) \\ a'x^2+b'xy+b'y^2+d'=0 & (2) \end{cases}$

令 $y=vx$ 代入 (1), (2) 得

$$(a+bv+cv^2)x^2+d=0$$

即 $$x^2=\frac{-d}{a+bv+cv^2} \tag{3}$$

及 $$(a'+b'v+c'v^2)x^2+d'=0$$

即 $$x^2=\frac{-d'}{a'+b'v+c'v^2} \tag{4}$$

∴ $$\frac{-d}{a+bv+cv^2}=\frac{-d'}{a'+b'v+c'v^2}$$

即 $$(cd'-dc')v^2+(bd'-db')v+(ad'-da')=0$$

解之得 v_1 及 v_2, 以之代入 (3) 式, 得

$$x^2=-\frac{d}{a+bv_1+cv_1^{\ 2}}$$

及 $$x^2=-\frac{d}{a+bv_2+cv_2^{\ 2}}$$

故 $$x=\pm\sqrt{\frac{-d}{a+bv_1+cv_1^{\ 2}}}$$

$$y=\pm v_1\sqrt{\frac{-d}{a+bv_1+cv_1^{\ 2}}};$$

及 $$x=\pm\sqrt{\frac{-d}{a+bv_2+cv_2^{\ 2}}}$$

$$y=\pm v_2\sqrt{\frac{-d}{a+bv_2+cv_2^{\ 2}}};$$

例5: 試解聯立式

$$\begin{cases} x\ +y\ =a & (1) \\ x^4+y^4=b^2 & (2) \end{cases}$$

令 $u+v=x$, $u-v=y$, 則原式爲

$$u+v+u-v=a$$

即 $$u=\frac{a}{2} \tag{3}$$

及 $$(u+v)^4+(u-v)^4=2(u^4+6u^2v^2+v^4)=b^2$$

即 $$u^4+6u^2v^2+v^4=\frac{b^2}{2} \tag{4}$$

$\therefore$ $$v^4+6\times\frac{a^2}{4}v^2+\frac{a^4}{16}=\frac{b^2}{2}$$

即 $$16v^4+24a^2v^2+a^4-8b^2=0 \tag{5}$$

令 $V=v^2$, 則 (5) 式爲

$$16V^2+24a^2V+a^4-8b^2=0$$

解之得 $$V=V_1, \qquad V=V_2,$$

於是 $$v^2=V_1, \qquad v^2=V_2,$$

即 $$v=\pm\sqrt{V_1}, \qquad v=\pm\sqrt{V_2},$$

故 $$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{V_1}, \qquad y=\frac{a}{2}\mp\sqrt{V_1};$$

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{V_2}, \qquad y=\frac{a}{2}\mp\sqrt{V_2};$$

例 6: 試解 $$\begin{cases} x^3=ax+by & (1) \\ y^3=ay+bx & (2) \end{cases}$$

(1) (2) 相加得 $$x^3+y^3=(a+b)(x+y)$$

即 $$(x+y)\{x^2-xy+y^2-(a+b)\}=0 \tag{3}$$

(1) (2) 相減得 $$x^3-y^3=(a-b)(x-y)$$

即 $$(x-y)\{x^2+xy+y^2-(a-b)\}=0 \tag{4}$$

(3)式之同解式爲 $$x+y=0 \tag{5}$$

及 $$x^2-xy+y^2-(a+b)=0 \tag{6}$$

(4)式之同解式爲 $$x-y=0 \tag{7}$$

及 $$x^2+xy+y^2-(a-b)=0 \tag{8}$$

故取(5)與(7) $$\begin{cases} x+y-0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

(5)與(8) $$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2-(a-b)=0 \end{cases}$$

(6)與(7) $$\begin{cases} x^2-xy+y^2-(a+b)=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

及(6)與(8) $$\begin{cases} x^2-xy+y^2-(a+b)=0 \\ x^2+xy+y^2-(a-b)=0 \end{cases}$$

各組聯立式解之,卽得原立式之根矣.

例7: 試解 $$\begin{cases} x^2+x=y^3+y & (1) \\ x^3+x^2=y^4+y & (2) \end{cases}$$

原式可書爲 $$x(x+1)=y(y^2+1) \tag{1'}$$

及 $$x^2(x+1)=y(y^3+1) \tag{2'}$$

故 $$x=0, \quad y=0;$$

又 $x+1=0,\ \ y=0;$ 卽 $x=-1,\ \ y=0;$

(1)′(2)′相除,得 $$x=\frac{y^3+1}{y^2+1} \tag{3}$$

(1)′式又可書

$$y(y^2+1)^3=x(x+1)(y^2+1)^2=(y^3+1)(x+1)(y^2+1) \tag{4}$$

又(1)(2)相加,得 $$y^3+y^2+2=\frac{x}{y}(x+1)^2 \tag{5}$$

由(1)′及(5)式,得 $$y^3+y^2+2=(x+1)(y^2+1)$$

再由(4)及(6)式得 $y(y^2+1)^3=(y^3+1)(y^3+y^2+2)$

即 $$(y^5-1)(y^2-y+2)=0$$

$\therefore$ $$y^2-y+2=0$$

解之得 $$y=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$$

由(3) $$x=\frac{y^3+1}{y^2+1}=\frac{y^3+1-(y^2-y+2)}{y^2+1}=\frac{y^3-y^2+y-1}{y^2+1}$$

$$=y-1=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}-1=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$$

或 $y^5-1=0$

令其五根爲 $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, 則 $\omega^5=1$,

故 $$y=\omega,\ x=\frac{1+\omega^3}{1+\omega^2};\ y=\omega^2,\ x=\frac{1+\omega}{1+\omega^4};\ y=\omega^3,\ x=\frac{1+\omega^4}{1+\omega};$$

$$y=\omega^4,\ x=\frac{1+\omega^2}{1+\omega^3};\ y=\omega^5=1,\ x=\frac{1+1}{1+1}=1;$$

例 8: 試解聯立式

$$\begin{cases} yz-x^2=a & (1)\\ zx-y^2=b & (2)\\ xy-z^2=c & (3)\end{cases}$$

平方(1)式得 $$y^2z^2+x^4-2x^2yz=a^2 \tag{4}$$

(2)(3)相乘得 $$y^2z^2-xz^3-xy^3+x^2yz=bc \tag{5}$$

(4)(5)相減得 $$x\{x^3+y^3+z^3-3xyz\}=a^2-bc$$

即 $$(x^2+xy+xz)\{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\}=a^2-bc$$

但由(1)式 $$x^2=yz-a$$

由(1)(2)(3)三式 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=-(a+b+c)$

故 $$xy+yz+zx=\frac{bc+ca+ab}{a+b+c} \tag{6}$$

又 $$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

$$=-(a+b+c)+3\left(\frac{bc+ca+ab}{a+b+c}\right)$$

$$=\frac{bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2}{a+b+c}=-\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a+b+c)^2} \tag{7}$$

由 (1) (6) 得 $$x(x+y+z)=-\frac{a^2-bc}{a+b+c} \tag{8}$$

再由 (7) (8) 二式得 $$x=\pm\frac{a^2-bc}{\sqrt{3abc-a^3-b^3-c^3}}$$

同理得 $$y=\pm\frac{b^2-ac}{\sqrt{3abc-a^3-b^3-c^3}}$$

$$z=\pm\frac{c^2-ab}{\sqrt{3abc-a^3-b^3-c^3}}$$

例 9： 試解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c & (1)\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3 & (2)\\ yz+zx+xy=bc+ca+ab & (3)\end{cases}$$

由現察易知 $x=a,\quad y=b,\quad z=c,$

爲上聯立式之解，或令

$$x=ax_1,\quad y=by_1,\quad z=cz_1,$$

則原式爲

$$\mathrm{I}\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1=a+b+c\\ x_1+y_1+z_1=3\\ bcy_1z_1+caz_1x_1+abx_1y_1=bc+ca+ab\end{cases}$$

尤易見其根為 $$x_1=y_1=z_1=1$$

即 $$x=a,\qquad y=b,\qquad z=c,$$

原式又可書為

$$\mathrm{II}\quad\begin{cases} x-a+y-b+z-c=0 \\ \dfrac{x-a}{a}+\dfrac{y-b}{b}+\dfrac{z-c}{c}=0 \\ bc\left(\dfrac{y-b}{b}\right)\left(\dfrac{z-c}{c}\right)+ca\left(\dfrac{z-c}{c}\right)\left(\dfrac{x-a}{a}\right)+ab\left(\dfrac{x-a}{a}\right)\left(\dfrac{y-b}{b}\right) \\ \qquad+a(b+c)\left(\dfrac{x-a}{a}\right)+b(c+a)\left(\dfrac{y-b}{b}\right)+c(a+b)\left(\dfrac{z-c}{c}\right)=0 \end{cases}$$

令 $$x_2=\frac{x-a}{a},\qquad y_2=\frac{y-b}{b},\qquad z_2=\frac{z-c}{c}$$

則II式變為

$$\mathrm{II}'\quad\begin{cases} ax_2+by_2+cz_2=0 & (4) \\ x_2+y_2+z_2=0 & (5) \\ a(b+c)x_2+b(c+a)y_2+c(a+b)z_2+bcy_2z_2+caz_2x_2 & \\ \qquad+abx_2y_2=0 & (6) \end{cases}$$

由(4)(5)二式解之得

$$\frac{y_2}{x_2}=\frac{c-a}{b-c},\qquad \frac{z_2}{x_2}=\frac{a-b}{b-c}$$

即 $$\frac{x_2}{b-c}=\frac{y_2}{c-a}=\frac{z_2}{a-b}=k$$

則 $$x_2=k(b-c),\qquad y_2=k(c-a),\qquad z_2=k(a-b)$$

以之代入(6)式得

$$\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}k+\{bc(c-a)(a-b)$$
$$+ca(a-b)(b-c)+ab(b-c)(c-a)\}k^2=0$$

即 $$k[-(a-b)(a-c)(b-c)+\{abc(a+b+c)-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2\}k]=0$$

故 $k=0$

或 $k=\dfrac{(a-b)(a-c)(b-c)}{abc(a+b+c)-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}$

當 $k=0$, 則 $x=a$, $y=b$, $z=c$,

當 $k=A=\dfrac{(a-b)(a-c)(b-c)}{abc(a+b+c)-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}$

則 $x=a\{1+A(b-c)\}$, $y=b\{1+A(c-a)\}$, $z=c\{1+A(a-b)\}$

例 10: 試解聯立方程式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y+z=1 & (1)\\ x+\dfrac{1}{y}+z=1 & (2)\\ x+y+\dfrac{1}{z}=1 & (3)\end{cases}$$

(1) (2), (2) (3), (3) (1) 各相減得

$$x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y}=z-\frac{1}{z}=2k$$

於是 $x^2-2kx-1=0$

解之得 $x=k\pm\sqrt{1+k^2}$

同理得 $y=k\pm\sqrt{1+k^2}$

$z=k\pm\sqrt{1+k^2}$

各以 $x=y=z=k+\sqrt{1+k^2}$; $x=y=z=k-\sqrt{1+k^2}$;
$x=y=k+\sqrt{1+k^2}$, $z=k-\sqrt{1+k^2}$; 及 $x=y=k-\sqrt{1+k^2}$,
$z=k+\sqrt{1+k^2}$ 代入 (1) 式得

$$3\sqrt{1+k^2}=1-k \tag{4}$$

$$-3\sqrt{1+k^2}=1-k \tag{5}$$

及
$$\sqrt{1+k^2}=1-k \tag{6}$$

$$-\sqrt{1+k^2}=1-k \tag{7}$$

取 (4) (5) 二式 $\pm 3\sqrt{1+k^2}=1-k$

平方之得
$$9(1+k^2)=(1-k)^2$$

即
$$8k^2+2k+8=2(4k^2+k+4)=0$$

解之得
$$k=\frac{-1\pm 3\sqrt{7}\,i}{8}$$

於是
$$x=y=z=\frac{1+\sqrt{7}\,i}{4}$$

或
$$x=y=z=\frac{1-\sqrt{7}\,i}{4}$$

均爲虛根,

取 (6) (7) 二式 $\pm\sqrt{1+k^2}=1-k$

平方之得
$$1+k^2=(1-k)^2$$

即
$$k=0$$

但 (6) 式之同解式爲
$$k=0$$
$$1-k>0$$
$$\therefore \quad k=0$$

於是
$$x=y=1, \qquad z=-1$$
$$x=z=1, \qquad y=-1$$
或
$$y=z=1, \qquad x=-1$$

(7) 式之同解式爲
$$k=0$$
$$1-k<0$$

二式不能同時成立,即(7)式無解. 故原聯立式之解爲

$$x=y=1, \qquad z=-1,$$

$$x=z=1, \qquad y=-1,$$

$$y=z=1, \qquad x=-1$$

及

$$x=y=z=\tfrac{1}{4}(1\pm\sqrt{7}\,i)$$

第十一章

§63. 關於二次方程之問題.

例 1: 已知 A, B, C, D 爲在一軸上之四點，且有 $AB=BC=CD=a$，試於軸上求 M 點俾

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2=k^2$$

取 A 爲原點，　　$\overline{AM}=x$

則　　$\overline{MB}=\overline{AB}-\overline{AM}=a-x$

$$\overline{MC}=\overline{AC}-\overline{AM}=2a-x$$

$$\overline{MD}=\overline{AD}-\overline{AM}=3a-x$$

於是　　$x^2+(a-x)^2+(2a-x)^2+(3a-x)^2=k^2$

即　　$f(x)=4x^2-12ax+14a^2-k^2=0$

其判定式爲　　$\delta'=9a^2-(14a^2-k^2)=k^2-5a^2$

故必 $k^2\geqslant 5a^2$，$f(x)=0$ 始有實根，乃定其所在間隔如次：

$$f(0)=14a^2-k^2$$

$$f(a)=6a^2-k^2$$

$$f(2a)=6a^2-k^2$$

$$f(3a)=14a^2-k^2$$

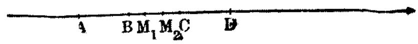
1. $5a^2<k^2<6a^2$, 則

$$\delta'>0, \quad f(a)>0, \quad f(2a)>0$$

又 $$\frac{12a}{8}-a>0, \quad \frac{12a}{8}-2a<0,$$

故 $$a<x_1<x_2<2a$$

卽可有 M_1, M_2 二點在 B, C 之間

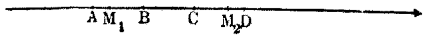


2. $6a^2<k^2<14a^2$, 則 $\delta_1>0$,

$$f(0)>0, \quad f(a)<0, \quad f(2a)<0, \quad f(3a)>0$$

故 $0<x_1<a$, $2a<x_2<3a$,

卽可用 M_1, M_2 二點 各在 A, B 及 C, D 之間



3. $14a^2<k^2$,

則 $\delta_1>0$, $4f(0)<0$, $4f(3a)<0$,

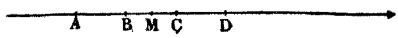
故 $x_1<0$, $x_2>3a$,

卽可有 M_1, M_2 二點,一在 A 之左,一在 D 之右.

4. $k^2=5a^2$,

則 $\delta_1=0$, $f(x)=0$, 有雙根

$$x_1=x_2=\frac{3a}{2}$$



此時 M 爲 BC 之中點,

5. $k^2=6a^2$,

則 $f(a)=0$, $f(2a)=0$

故 B, C 卽爲所求之點,

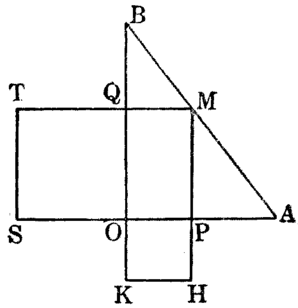
6. $$k^2=14a^2$$

則 $$f(0)=0,\qquad f(3a)=0$$

故 A, D 卽爲所求之點.

7. $k^2<5a^2$, 則 $\delta_1<0$, 本題無解.

例2: 已與直角三角形 AOB, M 爲其斜邊 AB 上之一點, 自 M 作 MP, MQ 各正交於 OA, OB. 於 OP, OQ 上各作正方 $OPHK$ 及 $OSTQ$. 試定 M 俾形 $MPHKOSTQ$ 之面積等於與數 m^2, 並討論之.



令 $OA=a$, $OB=b$, $OP=x$,

則 $$MP=\frac{b(a-x)}{a}$$

於是 $m^2=\overline{MP}^2+\overline{OP}^2=\overline{MP}\cdot\overline{OP}$

$$=\frac{b^2(a-x)^2}{a^2}+x^2+\frac{bx(a-x)}{a}$$

卽 $f(x)=(a^2-ab+b^2)x^2-ab(2b-a)x+a^2(b^2-m^2)=0$

解之得 $$x=\frac{ab(2b-a)\pm\sqrt{a^2[4(a^2-ab+b^2)m^2-3a^2b^2]}}{2(a^2-ab+b^2)}$$

x 爲實根之情形爲

$$m^2\geqq\frac{3a^2b^2}{4(a^2-ab+b^2)}$$

但 M 在 AB 線上, 故 x 必介於 0 及 a 之間, 方爲合理, 乃設 $a<b$ 討論之如下.

$$f(0)=a^2(b^2-m^2)$$

$$f(a)=a^2(a^2-m^2)$$

1. 設 $f(0)f(a)<0$ 卽 $a^2<m^2<b^2$, 則本題僅有一解.

2. 設 $f(0)>0$, $f(a)>0$, 卽 $m^2<a^2<b^2$, 欲 $f(x)=0$ 之二根介於 0 及 a 之間, 則必

$$0<\frac{ab(2b-a)}{2(a^2-ab+b^2)} \qquad (1)$$

及

$$\frac{ab(2b-a)}{2(a^2-ab+b^2)}<a \qquad (2)$$

(1) 式因 $a<b$ 恆爲能合, 由 (2) 式得

$$2a-b>0$$

卽

$$a>\frac{b}{2}$$

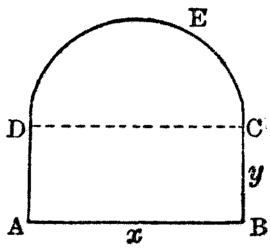
故

$$a>\frac{b}{2}$$

$$\frac{3a^2b^2}{4(a^2-ab+b^2)}\leqslant m^2>a^2$$

爲本題有二解之情形.

例 3: 已與長方形 $A\,B\,C\,D$, 以 $D\,C$ 爲徑, 向外方作半圓 $D\,E\,C$, 試定長方形之長闊, 俾形 $A\,B\,C\,E\,D$ 之周等於 p, 面積等於 k^2, 若爲正方形則 p, k 間應有何關係, 并討論之



令 $AB=x$, $BC=y$,

則 $x+2y+\frac{1}{2}\pi x=p$

卽 $(\pi+2)x+4y=2p \qquad (1)$

$$xy+\tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=k^2$$

卽

$$8xy+\pi x^2=8k^2 \qquad (2)$$

由(1)式得 $$y=\frac{2p-(\pi+2)x}{4} \tag{3}$$

以之代入(2)式得

$$2x\{2p-(\pi+2)x\}+\pi x^2=8k^2$$

即 $$f(x)=(\pi+4)x^2-4px+8k^2=0 \tag{4}$$

本題之解須爲正實數,卽必(4)式x之正實根,且使(3)式y之值亦爲正者,故必

$$\delta'=4p^2-8k^2(\pi+4)\geqslant 0$$

即 $$p\geqslant k\sqrt{2(\pi+4)}$$

苟此情形已合,則(4)式之二根,均爲正實數,以其和其積均爲正數故也.

欲y爲正,則必 $$2p\geqslant(\pi+2)x$$

即 $$x\leqslant\frac{2p}{\pi+2}$$

$$f\left(\frac{2k}{\pi+2}\right)=\frac{4(\pi+4)p^2}{(\pi+2)^2}-\frac{8p^2}{\pi+2}+8k^2=8k^2-\frac{4\pi p^2}{(\pi+2)^2}$$

1. 若 $\frac{4\pi p^2}{(\pi+2)^2}<8k^2$ 卽 $p<k(\pi+2)\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, 則 $f\left(\frac{2p}{\pi+2}\right)>0$,

又 $$\frac{2p}{\pi+4}<\frac{2p}{\pi+2}$$

故 $$x_1<x_2<\frac{2p}{\pi+2}$$

此時本題有二解爲

$$x=x_1,\qquad y=y_1=\frac{2p-(\pi+2)x_1}{4};$$

及 $$x=x_2,\qquad y=y_2=\frac{2p-(\pi+2)x_2}{4};$$

2\. 若 $$p>k(\pi+2)\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ 則\ f\left(\frac{2p}{\pi+2}\right)<0,$$

故 $$x_1<\frac{2p}{\pi+2}<x_2$$

此時本題僅有一解爲

$$x=x_1,\qquad y=y_1=\frac{2p-(\pi+2)x_1}{4};$$

3\. 若 $$p=k(\pi+2)\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ 則\ f\left(\frac{2p}{\pi+2}\right)=0$$

$$\therefore\qquad x_2=\frac{2p}{\pi+2}$$

$$x_1=\frac{4p}{\pi+4}-\frac{2p}{\pi+2}=\frac{2\pi p}{(\pi+4)(\pi+2)}<\frac{2p}{\pi+2}$$

此時本題有二解爲

$$x=\frac{2p}{\pi+2},\qquad y=0;$$

及 $$x=\frac{2\pi p}{(\pi+4)(\pi+2)},\qquad y=\frac{2p}{\pi+4};$$

當 $x=\frac{2p}{\pi+2}$, $y=0$ 原式僅爲半圓 CED.

設 $y=x$, 則由 (3) 式得

$$x=\frac{2p}{\pi+6}$$

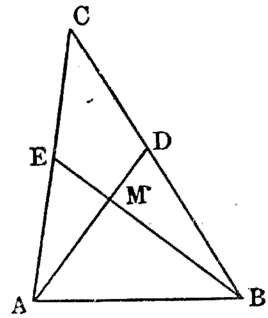
以之代入 (4) 式得

$$\frac{4(\pi+4)p^2}{(\pi+6)^2}-\frac{8p^2}{\pi+6}+8k^2=0$$

即 $$p^2(\pi+8)=2k^2(\pi+6)^2$$

此卽 $ABCD$ 爲正方形之情形.

例 4: 已與三角形 ABC 之周爲 $2p$, $\overline{AC}\cdot\overline{BC}=m^2$, 互相正交之二中線 AD, BE 之長各爲 β,γ, 試求三邊之長, 并討論之.



令 $BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c,$

則
$$a+b+c=2p \qquad (1)$$
$$ba=m^2 \qquad (2)$$

又
$$AM=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}\beta$$
$$BM=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}\gamma$$
$$c^2=AM^2+BM^2=\frac{4}{9}(\beta^2+\gamma^2)$$

但
$$a^2+c^2=2\gamma^2+\frac{b^2}{2}$$
$$b^2+c^2=2\beta^2+\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \qquad 2c^2+\frac{a^2+b^2}{2}=2(\beta^2+\gamma^2)$$

於是
$$9\frac{c^2}{2}=2c^2+\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (3)$$

a, b, c 三邊須合下列幾何情形:

$$a>0,\quad b>0,\quad c>0,\quad |b-a|<c<a+b.$$

令 $a+b=x$, 則 (1) (2) (3) 三式爲

$$c+x=2p \qquad (4)$$
$$ba=m^2 \qquad (5)$$
$$5c^2=a^2+b^2=x^2-2m^2 \qquad (6)$$

由(4)式得 $$c=2p-x \tag{7}$$

以之代入(6)式得 $$5(2p-x)^2=x^2-2m^2 \tag{8}$$

由(8)可得x，由(7)可得c；a, b實爲下方程式之根

$$X^2+xX+m^2=0 \tag{9}$$

因 $c>0$, $\therefore\ x<2p$

又 $c<a+b$, $\therefore\ x>p$

(9)式之二根，須均爲正實數，卽

$$x>0$$

$$x^2-4m^2>0$$

$$\therefore\ x>2m>0$$

又由$c>|b-a|$得 $$c^2>(b-a)^2=(b+a)^2-4ab$$

卽 $$(2p-x)^2>x^2-4m^2$$

$$\therefore\ x<\frac{m^2+p^2}{p}$$

故欲(8)式所得x之根，爲本題之解，須合五不等式，卽大於

$$0,\quad p,\quad 2m,$$

而小於 $$2p,\quad \frac{p^2+m^2}{p},$$

但 $$\frac{p^2+m^2}{p}-2p=\frac{m^2-p^2}{p}=\frac{(m-p)(m+p)}{p}$$

1. $m<\frac{p}{2}$, 則 $p>2m$

$$\frac{p^2+m^2}{p}<2p$$

故必 $$p<x<\frac{p^2+m^2}{p}$$

2. $$\frac{p}{2}<m<p, \quad 則 \quad 2m>p$$

$$\frac{p^2+m^2}{p}<2p$$

故必 $$2m<x<\frac{p^2+m^2}{p}$$

3. $$p<m, \quad 則 \quad 2m>p$$

$$2p<\frac{p^2+m^2}{p}$$

故必 $$2m<x<2p$$

但此爲不可能者.

(8)式又可書爲

$$f(x)=2x^2-10px+10p^2+m^2=0 \qquad (8)'$$

於是 $$f(p)=2p^2+m^2>0$$

$$f(2m)=9m^2-20pm+10p^2$$

$$p^2f\left(\frac{p^2+m^2}{p}\right)=2p^4-5p^2m^2+2m^4=(m^2-2p^2)(2m^2-p^2)$$

令 $\frac{m}{p}\lambda$,將上 1, 2 情形討論之如次

1. $\frac{m}{p}=\lambda<\frac{1}{2}$,

但 $(\lambda^2-2)(2\lambda^2-1)=(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})(\sqrt{2}\lambda-1)(\sqrt{2}\lambda+1)$

之四根 $\pm\sqrt{2}$ 及 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 無一介於 0 及 $\frac{1}{2}$ 之間者, $p^2f\left(\frac{p^2+m^2}{p}\right)$ 當 λ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 間隔內不變號,而恆爲正,以 $\lambda=0$ 時其值爲正故也,此時 $f(x)=0$ 不能有根介於 p 及 $\frac{p^2+m^2}{p}$ 之間,即本題無解.

2. $\frac{1}{2}<\lambda<1$，則 $f(2m)=9m^2-20pm+10p^2=0$

即 $$\varphi(\lambda)=9\lambda^2-20\lambda+10=0$$

$$\varphi(\tfrac{1}{2})=\tfrac{9}{4}-10+10=\tfrac{9}{4}>0$$

$$\varphi(1)=9-20+10=-1<0$$

故 $\varphi(\lambda)=0$ 有一根爲 λ'，且 $\frac{1}{2}<\lambda'<1$，

又 $\varphi(\frac{1}{2}\sqrt{2})=\frac{9}{2}-10\sqrt{2}+10=14.5-14.14>0$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}<\tfrac{1}{2}\sqrt{2}<\lambda'<1$$

故當 $\frac{1}{2}\sqrt{2}<\lambda<\lambda'$，即 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,p<m<p\cdot\frac{10-\sqrt{10}}{9}$

$$\underset{+}{(9\lambda^2-10\lambda+10)}\,\underset{-}{(\lambda^2-2)}\,\underset{+}{(2\lambda^2-1)}<0$$

或 $$f(2m)f\left(\frac{p^2+m^2}{p}\right)<0$$

$f(x)=0$ 有一根介於 $2m$ 及 $\frac{p^2+m^2}{p}$ 之間，即爲本題之解.

又因 $\quad f(2m)>0 \qquad f\left(\frac{p^2+m^2}{p}\right)<0$

可知本題之解爲 (8)′ 式之較小根

$$x_1=\frac{5p-\sqrt{5p^2-2m^2}}{2}$$

於是由 (7), (9) 各得

$$c=2p-x_1,\qquad a=\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-4m^2}}{2},\qquad b=\frac{x_1-\sqrt{x_1^2-4m^2}}{2};$$

或 $$c=2p-x_1,\qquad a=\frac{x_1-\sqrt{x_1^2-4m^2}}{2},\qquad b=\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-4m^2}}{2};$$

例 5. 試解方程式

$$\sqrt{\sin^2 x-\lambda\sin x}=1-\lambda\sin x$$

x 介於 0 及 $\frac{\pi}{2}$ 之間.

令 $\qquad y=\sin x$

則 $\qquad 0<y<1 \qquad (1)$

原式為 $\qquad \sqrt{y^2-\lambda y}=1-\lambda y$

平方之得 $\qquad f(y)=(1-\lambda^2)y^2+\lambda y-1=0 \qquad (2)$

又 $\qquad 1-\lambda y>0 \qquad (3)$

(1)(2)(3)為原方程式之同解式. 乃將(1)(3)二式,併合之如次.

1. $\lambda>0$, 則由(3)式得

$$y<\frac{1}{\lambda}$$

若 $0<\lambda<1$, 則 $\frac{1}{\lambda}>1$, $\therefore$ $0<y<1$,

若 $\lambda>1$, 則 $\frac{1}{\lambda}<1$, $\therefore$ $0<y<\frac{1}{\lambda}$.

2. $\lambda<0$ 則由(3)式得

$$y>\frac{1}{\lambda}$$

此式於 $y>0$ 時恆為能合,故仍有(1)式

$$0<y<1$$

綜1,2所言,得

$$\lambda<1, \qquad 0<y<1,$$

$$\lambda>1, \qquad 0<y<\frac{1}{\lambda},$$

乃分討論之如次.

1. $\lambda<1$, 則 $f(0)=-1$

$$f(1)=\lambda-\lambda^2=\lambda(1-\lambda)$$

$$a=1-\lambda^2=(1-\lambda)(1+\lambda)$$

若 $f(0)f(1)=-\lambda(1-\lambda)<0$, 卽 $-\lambda<0$, 或 $\lambda>0$, 則 $f(y)=0$ 有一根介於 0 及 1 之間, 而爲本題之解.

欲 $f(x)=0$ 之二根均介於 0 及 1 之間, 則必有

$$af(0)=-(1-\lambda)(1+\lambda)>0 \qquad \text{卽} \qquad \lambda<-1$$

及 $$-\frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)}>0, \qquad \text{卽} \qquad -1<\lambda<0$$

但此二情形不能同時盡合, 故 $f(x)=0$ 不能有二根介於 0 及 1 之間.

2. $\lambda>1$, 則 $f(0)<0$

$$a=1-\lambda^2<0$$

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}<0$$

欲 $f(y)=0$ 之二根, 均介於 0 及 $\frac{1}{\lambda}$ 之間, 則必

$$\delta=b^2-4ac=\lambda^2+4-4\lambda^2=4-3\lambda^2>0$$

及 $$0<\frac{-\lambda}{2(1-\lambda^2)}<\frac{1}{\lambda}$$

由 $$\frac{-\lambda}{2(1-\lambda^2)}<\frac{1}{\lambda}$$

得 $$\lambda^2>2$$

與 $\lambda^2<\frac{3}{4}$ 不能同時存在, 故 $f(y)=0$ 無二根介於 0 及 $\frac{1}{\lambda}$ 之間.

故當 $0<\lambda<1$, 本題有一解.

習　題

1. 試解 x^4+1 成兩二次因子，其係數皆為實數者，並推廣於 ax^4+bx^2+c 式.

2. 已知 a, b, a', b' 合下情形

$$ab(a^2+b^2)=a'b'(a'^2+b'^2)$$

試證亦有
$$AB(A^2+B^2)=A'B'(A'^2+B'^2)$$

此中
$$A=a+b+a'+b', \qquad B=a+b-a'-b',$$
$$A'=a-b+a'-b', \qquad B'=a-b-a'+b'.$$

3. 問 λ 為何數時，下式

$$4x^3-6x+\lambda$$

以 -3 為其根？

4. 無論 x 為何數時，$\dfrac{a\,x^2+b\,x+c}{a'x^2+b'x+c'}$ 之值終不變易，則 a, b, c, a', b', c' 等應有何關係？

5. 試解方程式

(1)
$$\frac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+2}{x-2}}}=\frac{12}{12x-7}$$

(2)
$$[(a+b)x-c]^2=[(a-b)x+c]^2$$

6. 試解下方程式幷討論之.

(1) $$mx+n=px+q$$

(2) $$(\lambda-1)x+2\lambda-3=0$$

7. 試解下聯立方程式

(1) $$\begin{cases}(a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2)\\(a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2)\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4}\\[2ex]\dfrac{4x}{3}-\dfrac{2y}{5}=\dfrac{3x}{4}+\dfrac{19y}{40}\end{cases}$$

8. 試解下聯立方程式,幷討論之,

(1) $$\begin{cases}ax-by=4\\3x+5y=1\end{cases}$$ (2) $$\begin{cases}4x+7y=a\\3x+5y=b\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}x+ay=b\\ax-by=c\end{cases}$$

9. 已與纚數 Sequence

$$a+b,\ ap+bq,\ ap^2+bq^2,\ ap^3+bp^3,\ \cdots\cdots\cdots,\ ap^n+bq^n\cdots\cdots\cdots$$

試求二數 x, y 俾任一項等於$\underline{x\text{倍前一項}}$與$\underline{y\text{倍再前一項}}$之和.

10. 試解下聯立方程式

(1) $$\begin{cases}12x+7y=109\\5y-2z=11\\3z+4x=26\end{cases}$$ (2) $$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9\\[2ex]\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=5\\[2ex]\dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{z}=4\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}-x+y+z=a\\x-y+z=b\\x+y-z=c\end{cases}$$

11. 試解下聯立方程式

(1) $$\begin{cases} x+y+z+a(x+y)+a^2x=a^3 \\ x+y+z+b(x+y)+b^2x=b^3 \\ x+y+z+c(x+y)+c^2x=c^3 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=h \\ a^2x+b^2y+c^2z=h^2 \end{cases}$$

12. 試解下聯立方程式,并討論之

(1) $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \dfrac{a^2x}{a-d}+\dfrac{b^2y}{b-d}+\dfrac{c^2z}{c-d}=0 \\ \dfrac{ax}{a-d}+\dfrac{by}{b-d}+\dfrac{cz}{c-d}=d(a-b)(b-c)(c-a) \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} bz-cy=l \\ cx-az=m \\ ay-bx=n \end{cases}$$

13. 已知一三項二次式當 $x=1, 2, 3,$ 時之值爲 $0, 1,$ 及 4, 則 $x=u$ 時,其值必爲 $(u-1)^2$, 試證之.

14. 試解下聯立方程式

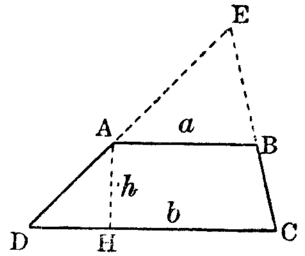
$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+ay+bz+ct=0 \\ x+a^2y+b^2z+c^2t=0 \\ x+a^3y+b^3z+c^3t=0 \end{cases}$$

15. 試解下不等式

$$\frac{7x-5}{8x+3}>4$$

16. 試解下聯立式

$$\begin{cases} 3x-y=4 \\ x+y>2 \end{cases}$$



17. $ABCD$ 爲一梯形

已與 $AB=a$, $CD=b$,

$AH=h=$ 梯形之高

試求三角形 ECD 之高，并討論之.

18. 甲乙二物體在一直線上等速運動，甲速每時 a 里，自左向右，乙速每時 b 里，自右向左，甲在 A 點前 t_0 點鐘時，乙在 A 左與 A 相距 d 里之 B 點上，求甲乙相遇之時及地.

19. 甲年 a 歲，乙年 b 歲，問若干年後或前，甲年爲乙年之 c 倍？ 并討論之.

20. 分金於若干人，第一人得 a 圓，及餘金之 $\frac{1}{n}$，第二人得 $2a$ 圓及此時餘金之 $\frac{1}{n}$，第三人得 $3a$ 圓及此時餘金之 $\frac{1}{n}$，如斯以往，人盡金額亦盡，而每人所得又各相等，試求金額，人數及每人所得.

21. 今有五元，三元，半元鈔票共百張，值百元，問各種票數幾何？

22. 今有一數，以三除之餘二，五除之餘三，七除之餘二，問此數幾何？

23. 已與 $ax^2+bx+c=0$, 若書爲 $(c+bx)+ax^2=0$, 再配方則所得之解爲 $x_1=\dfrac{2c}{\sqrt{b^2-4ac}-b}$, $x_2=\dfrac{2c}{-\sqrt{b^2-4ac}-b}$, 試證此二式與普通公式無異.

24. 試解下列諸式,並考究有無異解.

(1) $$\frac{3}{5(x^2-1)}+\frac{1}{10(x+1)}=\frac{1}{24}$$

(2) $$\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{10}{3}$$

(3) $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

25. 問 m 爲何數時,下方程式之兩根等量而異號?

$$\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1}$$

26. 試證下列方程式之根,恆爲實數.

(1) $$(a-b+c)x^2+4(a-b)x+(a-b-c)=0$$

(2) $$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$$

(3) $$\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}-1=0$$

27. 試證下二方程式之根,均爲有理數.

(1) $$(a-b+c)x^2+2cx+(b+c-a)=0$$

(2) $$abc^2x^2+(3a^2+b^2)cx-6a^2-ab+2b^2=0$$

28. 問 m 爲何數時,下方程式有雙根?

$$x^2-2x(1+3m)+7(3+2m)=0$$

29. 已與方程式

$$x^2+px+q=0 \tag{1}$$

$$y^2+\left(k+\frac{1}{k}\right)py+p^2+q\left(k-\frac{1}{k}\right)^2=0 \tag{2}$$

及 $$z^2-y_1z+q=0, \qquad z^2-y_2z+q=0 \tag{3}$$

y_1, y_2 爲 (2) 式之根,若 (1) 式之根爲實數,則其他各式,均有實根,試證之.

30. 已與三項式

$$ax^2+bx+c$$

恆可得實數 λ,俾下式

$$ax^2+bx+c+\lambda(x^2+1)$$

成一完全平方,試證明並求出之.

31. 若 $-4(c-d)^2(b+c+d-a)^2<16e<(a-b-2c)^2(a-b-2d)^2$,則方程式 $(x+a-c)(x+b+c)(x+a-d)(x+b+d)=e$ 之四根皆爲實數,試證之.

32. 已與方程式

$$(\lambda^2+\lambda-3)x^2+(\lambda^2+3\lambda+2)x-(\lambda^2-1)=0$$

當 λ 趨進於 $1, -2$, 及無窮大時,試求上式之根之限.

33. 已與方程式

$$x^2+px+q=0$$

問 p, q 爲何數時,此式之根亦恰爲 p, q?

34. 已知 $\tan\alpha$ 及 $\tan\beta$ 爲下式

$$x^2+px+q=0$$

之根,試以 p,q 表下式

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$$

35. 試定 λ,俾下方程式有雙根.

$$\frac{2A}{x+a}+\frac{\lambda}{x}+\frac{2B}{x-a}=0$$

若 λ_1, λ_2 爲所定之兩值,x_1, x_2 爲 x 之相當值,則 $\lambda_1\lambda_2=(A-B)^2$ $x_1x_2=a^2$,試證之.

36. 求下二式根之關係

$$x^2-2x\sqrt{p^2-2q}+(p^2-2q)=0 \qquad (1)$$

$$x^2+px+q=0 \qquad (2)$$

如畫一長方形,俾其長闊代表 (2) 式之二根,問 (1) 式之二根以何線代表之?

37. 若 $ax^2+bx+b=0$ 之兩根之比爲 $p:q$,則有

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$$

試證之.

38. 試證

$$\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}=\sqrt{\frac{2x^2+x+2}{2}}-\sqrt{\frac{x}{2}}$$

39. 試定 a,俾方程式

$$x^2-\tfrac{15}{4}x+a^3=0$$

之一根爲他一根之平方.

40. 已知x_1, x_2爲方程式

$$x^2+px+q=0$$

之根，α, β, γ爲三與數，若有

$$\alpha x_1{}^2+\beta x_1+\gamma=\alpha x_2{}^2+\beta x_2+\gamma$$

則p, q間應有何關係？

41. 試定λ，俾下方程式

$$x^2-(\lambda+3)x+2\lambda-1=0$$

之二根x_1, x_2合下情形

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$$

42. 已知x_1, x_2爲方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

之根，求作方程式以$lx_1{}^2+mx_1+n$及$lx_2{}^2+mx_2+n$爲根者.

43. 試作方程式以下式二根之和及較之平方爲根者，

$$2x^2+2(m+n)x+m^2+n^2=0$$

44. 試定λ: (1) 俾$(\lambda-1)x^2+2(\lambda+1)x+(\lambda-2)=0$有一雙根；

(2) 俾$2x^2+(2\lambda-1)x+(\lambda+2)=0$之根，合下情形

$$3x_1-4x_2=11$$

(3) 俾$(\lambda^2-5\lambda+3)x^2+(3\lambda-1)x+2=0$之一根爲他一根之倍，卽$x_2=2x_1$.

45. 試討論下兩式之變值

(1) $-6x^2+7x+10$

(2) $3x^2-x$

46. 問 m 在何間隔內，下二式恆為正？

(1) $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$

(2) $(4-m)x^2-3x+4+m$

47. 已知下式

$$\left(x+\frac{h}{2}\right)^2-(3x+2h)^2$$

於 $x=-\frac{11}{8}$ 時為極大，試求其值.

48. 已與方程式

$$(m-5)x^2-4mx+m-2=0$$

試定 m，俾 (1) 兩根均為實數，(2) 兩根之號相反.

49. 試討論下列方程式

(1) $(3\lambda-1)x^2-(2\lambda+1)x+\lambda=0$

(2) $(\lambda-1)x^2-2(\lambda+1)x+(\lambda-2)=0$

(3) $3x^2+(\lambda-1)x+(3\lambda+2)=0$

(4) $(\lambda+2)x^2+2(\lambda+2)x-\lambda=0$

50. 已與三項式

$$ax^2+bx+c$$

a 為已知數，試求 b 及 c 俾上式以 A 為其極大或極小值，又 $x=k$ 時，其值為 B.

特例：　$a=-3,\quad A=1,\quad B=-2,\quad k=2.$

51. 試比較 2 與下方程式之根

(1) $x^2-5x+5=0$

(2) $x^2-4x+5=0$

52. 試比較1與方程式

$$\lambda x^2-(3\lambda-1)x+3\lambda=0$$

之根.

53. 試定λ,俾方程式

$$x^2-(\lambda+3)x+2\lambda-1=0$$

之二根,均大於1.

54. 試比較0,1與方程式

$$\lambda x^2+(2\lambda-1)x-3\lambda+2=0$$

之根.

55. 試依大小次第,序列方程式

$$x^2-x-1=0$$

及
$$x^2+ax-1=0$$

之根,而討論之.

56. 試定λ,俾方程式

$$x^2-2\lambda x-(1-\lambda^2)=0$$

之二根,介於 -2 及 $+4$ 之間,即 $-2<x_1<x_2<+4$.

57. 試定λ,俾方程式

$$3x^2-(\lambda-1)x+3\lambda+2=0$$

之一根小於2,他一根大於3,即 $x_1<2<3<x_2$.

58. 試解下列不等式

(1) $$\frac{2+7x-15x^2}{5-x+6x^2}>0$$

(2) $$\frac{x-1}{a-1}-\frac{3x}{5}<\frac{x^2}{2a-2}$$

(3) $$\frac{(\lambda+1)x^2+\lambda x+\lambda}{x^2+\lambda x+1}>2$$

59. 問 x 在何間隔內，下式

$$x^2-14x+50$$

之值大於5而小於26？

60. 試討論分數式

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$$

之值.

61. 試解下二組聯立式

(1) $$\begin{cases} \lambda x^2-(\lambda+1)x+3\lambda=0 \\ \lambda x-1>0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x^2+x+\lambda=0 \\ x^3+\lambda x+2>0 \end{cases}$$

62. 試定 a，俾下二方程式

$$x^2+ax+1=0$$

$$x^2+x+a=0$$

有一公根.

63. 已與方程式

$$x^2+p_1x+q_1=0$$

$$x^2+p_2x+q_2=0$$

及 $$x^2+p_3x+q_3=0$$

試定 $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ 俾上任二式有一公根，但無一根爲三式所公有者.

64. 試求方程式

$$f(x)=ax^2+bx+c=0$$

及 $$g(x)=b'x+c'=0$$

之結式,並討論之.

65. 試比較下二方程式之根

$$\begin{cases} f(x)=x^2-2x+\lambda-1 &=0 \\ g(x)=x^2+\ x+3-2\lambda &=0 \end{cases}$$

66. 試將方程式

$$x^2+px+q=0$$

及 $$x^4-x^2+1=0$$

之 x 消去之.

67. 試求下二次式

$$f(x, y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

得分解為兩一次因子之情形.

68. 已與 $$f(x)=x^2+\lambda x+1=0$$

$$g(x)=x^2+\mu=0$$

α 爲 $f(x)=0$ 之一根, α' 爲 $g(x)=0$ 之一根,

(a) 如 $\alpha=3\alpha'$

試證助變量 λ, μ 當合下情形

$$(9\mu-1)^2+9\mu\lambda^2=0$$

特例: $\mu=-\frac{1}{3}$, 問 $\lambda=?$ 幷直接證之.

(b) 如 $2\alpha-\alpha'=1$

試證 λ, μ 當合下情形

$$(\mu-3)^2+4(\lambda+1)(\lambda\mu+\lambda+4)=0$$

特例: $\lambda=2$, 問 $\mu=?$ 並直接證之.

69. 試解方程式

(1) $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0$

(2) $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5)=385$

(3) $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$

70. 已知 $\tan A=a$, 試求 $\tan\frac{A}{4}$ 之值.

註: $$\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

71. 試解方程式

(1) $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\dfrac{4x^2+6x-1}{x^2+3x+1}-2=0$

(2) $ax^4+bx^3+cx^2+bkx+ak^2=0$

72. 試解方程式

(1) $(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}=5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$

(2) $8+9\sqrt{(3x-1)(x-2)}=3x^2-7x$

(3) $\sqrt{x^2+ax-1}-\sqrt{x^2+bx-1}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

73. 試解方程式

(1) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{x-c}$

(2) $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{c+x}+\sqrt{d+x}$

(3) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=b$

74. 試求　(1)　$P<\sqrt{Q}$

及　(2)　$P>\sqrt{Q}$

之同解式.

75. 試解下不等無理式

(1) $x<\sqrt{x}$

(2) $\sqrt{x-1}>\lambda-x$

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-m}>2$

76. 試解下方程式

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-\lambda}=1$

(2) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-\lambda}=1$

77. 試解下列聯立方程式

(1) $\begin{cases} 6x^2-xy-2y^2=56 \\ 5x^2-xy-y^2=49 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=21 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} xy^2+x^2y=a^3 \\ x^3+y^3=b^3 \end{cases}$

78. 試解聯立方程式

$$\begin{cases} f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ g(x,y)=a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

并討論之.

79. 試解聯立方程式

(1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^3+y^3+z^3=35 \\ xyz=6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=2a \\ (z+x)(x+y+z)=2b \\ (x+y)(x+y+z)=2c \end{cases}$

$$(3)\quad \begin{cases} (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 \\ x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \end{cases}$$

80. 試求 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 爲完全平方之情形.

81. 已與半圓 $AMNB$ 中, $AB=2R=$ 直徑, 試在圓周上取點 M, 俾有
$$\overline{AM}^2+\overline{MN}^2=k^2$$
MN 與 AB 平行, k 爲與數.

82. 試自定點 P 引定圓 O 之割線 PAB, 交圓於 A, B 二點, 俾三角形 OAB 之面積等於與數 m^2, 并討論之.

83. OA, OB 爲互相正交之二直線, $OA=a$, $OB=b$, 試於 OB 上取 C 點, 連 AC 線, 乃以 AC 爲徑作半圓周 AMC, 俾
$$AMC+BC=l$$
l 爲與長.

84. 已知 A, B, C, D, E 爲成等比級數之五數, $A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E=b^5$, $A+B+C+D+E=5a$ 問 A, B, C, D, E 各等於若干?

85. 已知直角三角形之周爲 $2p$, 面積爲 m^2, 試求其三邊.

雜　　題

1. 已與x, y之連立方程式

$$\begin{cases} ax-6y=5a-3 \\ 2x+(a-7)y=-7a+29 \end{cases}$$

試定a,俾 (1) 上方程式爲無解,

(2) 上方程式有無窮解,

(3) x, y之解相等.

2. 試求下聯立方程式

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$

不但以$x=y=z=0$爲根之情形.

3. 試解下列各組聯立方程式

(1) $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=1 \\ a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} ax+by+cz=a \\ bx+cy+az=b \\ cx+ay+bz=c \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ bx+cy+az=bc+ca+ab \\ cx+ay+bz=bc+ca+ab \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} ax+by+cz=a+b+c \\ a^2x+b^2y+c^2z=(a+b+c)^2 \\ bcx+cay+abz=0 \end{cases}$$

4. 已知方程式

$$x^3+bx+cx+d=0$$

之三根爲 $-2, 1,$ 及 3, 試求 b, c, d.

5. 試解方程式

$$(1)\qquad (a-b)^2x^2+2(a^2+b^2)x+(a+b)^2=0$$

$$(2)\qquad (a^2-4b^2)x^2+2(a^3+2b^3)x+a^4-b^4=0$$

6. 如令

$$x_1=\sqrt{2}$$

$$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2}}}}$$

試求 x_n 當 $n\sim\infty$ 時之限.

7. 試求 $(a+bx)^2+(a'+b'x)^2$ 爲完全平方之情形, 若 $(a+bx)^2+(a'+b'x)^2$ 及 $(a+cx)^2+(a'+c'x)^2$ 各爲完全平方, 則 $(b+cx)^2+(b'+c'x)^2$ 亦爲完全平方, 試證之.

8. 已與方程式

$$ax^2+2bx+c=0$$

及
$$(a+c)(ax^2+2bx+c)=2(ac-b^2)(x^2+1)$$

中, 任一式有兩實根且不相等者, 則他式無實根, 試證之.

9. 已與
$$f(x)=ax^2+2bx+c=0$$
$$g(x)=Ax^2+2Bx+C=0$$
若 x_1, x_2 爲 $f(x)=0$ 之根, $x_1+\alpha, x_2+\alpha$ 爲 $g(x)=0$ 之根, 則有
$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2}$$
試證之.

10. 試定 m, 俾方程式
$$x^4-(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$$
之四根成等差級數, 並求出之.

11. 已與方程式
$$x^2-\lambda x+2\lambda-\mu=0$$
x_1, x_2 爲其二根, 且 $x_2>x_1$, 若有
$$x_1x_2=2x_2-x_1$$
則助變量 λ 及 μ 間應有何關係?

12. 設 x_0 爲方程式
$$ax^2+bx+c=0$$
之根, 試作二次方程式以
$$y_0=\frac{\alpha x_0+\beta}{\gamma x_0+\delta}$$
爲根者.

特例:

1. $y_0=x_0+m$
2. $y_0=mx_0$
3. $y_0=\dfrac{1}{x_0}$

13. 問 m 在何間隔內，下二式恆爲負？

(1) $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3$

(2) $mx^2+(m-1)x+m-1$

14. 已與 $ax+by+cz=d$，試求 $x^2+y^2+z^2$ 之極小值.

15. α, β 均爲助變量，試討論下方程式

$$\alpha x^2-(2\alpha+\beta)x+\alpha+2\beta=0$$

16. h 爲已知數，問 k 爲何數時，下不等式

$$\frac{(h+1)x^2+hx+h}{x^2+x+1}>k$$

恆能成立？

17. 試解下列各組聯立式

(1) $$\begin{cases}\lambda x^2+\lambda x+1=0\\ x^2-\lambda x-1>0\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}mx^2-2mx+3m-1=0\\ (x-1)(mx-1)>0\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}(\lambda+1)x^2+(3\lambda+1)x-\lambda-1=0\\ x>1\\ x>\dfrac{1}{\lambda+1}\end{cases}$$

18. α, β 均爲助變量，試比較 -1 與下方程式之根

$$f(x)=\alpha x^2-(2\alpha+\beta)x+\alpha+2\beta=0$$

19. 試解聯立式

$$\begin{cases}f(x)=x^2-3x+\lambda>0\\ g(x)=x^2-4x+3(\lambda-1)<0\end{cases}$$

20. 於λ變時，試依大小次第，排例下二式之根

$$f(x)=(\lambda-1)x^2-2x-\lambda=0$$

$$g(x)=x^2-\lambda x-2=0$$

問λ為何數時，此二式能有公根？

21. 已與 $f(x, y)=ax^2+2hxy+by^2$

及 $g(x, y)=a'x^2+2h'xy+b'y^2$

試求上二式各為 $y-mx$ 及 $my+x$ 除盡之情形.

22. 已與 $f(x)=x^2+px+q=0$

$$g(x)=x^2+p'x+q'=0$$

若二方程式有一公根，則必為

$$\frac{pq'-p'q}{q-q'} \quad 或 \quad \frac{q-q'}{p'-p}$$

試證之.

23. 試解方程式

(1) $$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$$

(2) $$\sqrt[3]{1+x^3+\sqrt{x(1+x)}}=1+x$$

(3) $$(x+a)^2+4(x+a)\sqrt{x}=a^2-4a\sqrt{x}$$

24. 試解方程式

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{a'x+b'}=m$$

并討論之.

25. 試討論方程式

$$(\lambda+1)x^4-2\lambda x^2+2(1-\lambda)=0$$

26. 試解聯立方程式

(1)
$$\begin{cases} \dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{2a}{x} \\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=\dfrac{2b}{y} \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2c}{z} \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} (a+1)x+y+z=yz+zx+xy \\ x+(b+1)y+z=yz+zx+xy \\ x+y+(c+1)z=yz+zx+xy \end{cases}$$

27. x, y, z 各不相等,則

$$y^2+z^2+\lambda yz=z^2+x^2+\lambda zx=x^2+y^2+\lambda xy$$

各等於 $\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$,試證之.

28. 有一五位被除數,商數較除數大16,除數較餘數大55,試求此最小之被除數.