Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 27

Aufgabe 27.1. Was hat eine Entfaltung mit einer „Funktionenschar“ zu tun?

Aufgabe 27.2. Bestimme die Rechtsäquivalenzklassen in der Entfaltung $tx^n + (1-t)x^m$ mit $1 = n < m$.

Aufgabe 27.3.*

Wir betrachten Polynome $x^4 + ux^2 + vx$ mit Parametern $u, v \in \mathbb{C}$. Finde eine algebraische Bedingung an die Parameter u, v, die beschreibt, dass das Polynom einen ausgearteten kritischen Punkt besitzt.

Aufgabe 27.4. Es sei $f(x) = x^n$ mit $n \geq 1$. Wir betrachten die Entfaltung $x^n + w_{n-1}x^{n-1} + w_{n-2}x^{n-2} + \cdots + w_1x + w_0$ mit dem Deformationsparameter $(w_{n-1}, \ldots, w_0) \in \mathbb{C}^n$. Zeige, dass man den Term $w_{n-1}x^{n-1}$ „wegtransformieren“ kann, dass es also eine Transformation (einen Koordinatenwechsel) derart gibt, dass man in der transformierten Situation ohne diesen Term auskommt, aber nach wie vor jede deformierte Funktion f_w vorkommt.

Was hat diese Beobachtung mit dem Jacobiideal und der Standardentfaltung zu tun?

Aufgabe 27.5. Es sei $E(x, u, v) = x(x-u)(x-v)$, was wir als Entfaltung von x^3 auffassen.

(1) Bestimme abhängig von $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ die Milnorzahl von $f_{(u,v)} = E(-, u, v)$ im Nullpunkt $x = 0$.
(2) Welche Funktionen $f_{(u,v)}$ sind rechtsäquivalent zueinander?
(3) Skizziere die Situation im (reellen) Parameterraum.

Aufgabe 27.6. Untersuche die Funktion $XY - T$ als Entfaltung von XY. Welche deformierten Funktionen sind untereinander rechtsäquivalent?

Aufgabe 27.7.*

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und

$$F\colon V \longrightarrow V$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Es sei $C = C^\infty(V, \mathbb{R})$ die Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen von V nach $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\delta = \delta_F\colon C \longrightarrow C,\ g \longmapsto \delta(g),$$

mit

$$(\delta(g))(P) = \left(D_{F(P)}g\right)(P)\,.$$

Man erhält also aus der Funktion g die neue Funktion $\delta(g)$, indem man an einem Punkt $P \in V$ die Richtungsableitung der Funktion g in Richtung $F(P)$ berechnet. Zeige, dass für $g \in C$ folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es ist $\delta(g) = 0$.
(2) Das Bild einer jeden Lösung zur Differentialgleichung $y' = F(y)$ liegt in einer Faser von g.

Aufgabe 27.8. Sei $b \geq 3$. Zeige, dass $X^3 + Y^b$ zu $X^3 + Y^b + X^4$ rechtsäquivalent ist.

Aufgabe 27.9. Wir betrachten $f = X^4 + Y^7$. Für welche der folgenden h kann man mit Hilfe von Lemma 27.9 darauf schließen, dass f und $f + h$ rechtsäquivalent sind?

(1)
$$h = X^4Y^7,$$
(2)
$$h = X^2Y^8,$$
(3)
$$h = 5X^6 - X^4Y^5 - Y^{17},$$
(4)
$$h = X^5 + Y^8.$$
Ist f rechtsäquivalent zu $X^4 + Y^7 + X^5 + Y^8$?

Abbildungsverzeichnis