

Körper- und Galoistheorie**Arbeitsblatt 1****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 1.1. Löse die quadratische Gleichung $4x^2 + 5x + 2 = 0$ über $\mathbb{Z}/(7)$.

AUFGABE 1.2. Bestätige folgende Aussagen.

- (1) Die dritten Einheitswurzeln in \mathbb{C} sind 1 , $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $\eta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- (2) Es ist $\epsilon^2 = \eta$ und $\eta^2 = \epsilon$.
- (3) Es ist $1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$.
- (4) Es ist $\epsilon + \epsilon^2 = -1$.

AUFGABE 1.3. Eliminiere in der kubischen Gleichung

$$x^3 + 6x^2 - 5x - 2 = 0$$

den quadratischen Term.

AUFGABE 1.4.*

Eliminiere in der kubischen Gleichung

$$x^3 + 2x^2 - 2 = 0$$

den quadratischen Term.

AUFGABE 1.5. Finde die Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 3X^2 + 7X - 21$$

ohne die Formeln von Cardano.

AUFGABE 1.6.*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

2

AUFGABE 1.7. Finde die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x^3 + px = 0$$

($p \in \mathbb{C}$) direkt und mit Hilfe der Formel von Cardano.

AUFGABE 1.8.*

Zeige, dass

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 2X^2 - 2$$

ist.

AUFGABE 1.9.*

Bestimme eine reelle Lösung der Gleichung

$$z^3 - \frac{4}{3}z - \frac{38}{27} = 0$$

mit der Cardanoschen Formel.

AUFGABE 1.10. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - x + 5 = 0$$

mit der Cardanoschen Formel.

AUFGABE 1.11. Bestimme die komplexen Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 1.12. Löse die biquadratische Gleichung $x^4 + 7x^2 - 11 = 0$ über \mathbb{R} .

AUFGABE 1.13.*

Es sei

$$P = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + 1.$$

- (1) Bestimme die kleinste positive Nullstelle von P .
- (2) Besteht ein Zusammenhang zwischen dieser Nullstelle und $\frac{\pi}{2}$?

AUFGABE 1.14. Es sei p eine Primzahl. Zeige unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl \sqrt{p} irrational ist.

AUFGABE 1.15. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

AUFGABE 1.16. Es sei $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ eine kubische Gleichung mit $a_i \in \mathbb{Q}$. Eliminiere den linearen Term. Ist dies stets über \mathbb{Q} möglich?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 1.17. (4 Punkte)

Es sei

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

eine polynomiale Gleichung mit $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Zeige, dass es eine äquivalente polynomiale Gleichung der Form

$$x^n + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$$

gibt.

AUFGABE 1.18. (6 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$$

mit der Cardanoschen Formel.

AUFGABE 1.19. (5 Punkte)

Bestimme die Lösungen der polynomialen Gleichung

$$x^6 - 4x^2 + 7 = 0.$$

AUFGABE 1.20. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

In der nächsten Aufgabe soll über dem Körper $L = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ aus Beispiel 1.7 gerechnet werden.

AUFGABE 1.21. (4 Punkte)

Führe in $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}])[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 3X^3 - (2 + \sqrt{3})X^2 + 5\sqrt{3}X + 1 + 2\sqrt{3}$ und $T = \sqrt{3}X^2 - X + 2 + 7\sqrt{3}$ durch.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5