Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 21

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 21.1. Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.2. Was sind bei einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon K \longrightarrow K$$

die Eigenwerte und die Eigenvektoren von φ?

Aufgabe 21.3. Es seien

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

Endomorphismen auf einem K-Vektorraum V und es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von φ und von ψ. Zeige, dass v auch ein Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$ ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 21.4. Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Aufgabe 21.5. Zeige, dass der erste Standardvektor ein Eigenvektor zu einer jeden oberen Dreiecksmatrix ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 21.6.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige, dass ein Eigenwert zu M ein Diagonaleintrag von M sein muss.

Aufgabe 21.7. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz φ^n, $n \geq 2$, Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 21.8. Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 21.9. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

Aufgabe 21.10. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

$$U = \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich φ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U\colon U \longrightarrow U,\ v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor λ ist.

Aufgabe 21.11. Es sei $\varphi\colon V \rightarrow V$ ein Isomorphismus auf einem K-Vektorraum V mit der Umkehrabbildung φ^{-1}. Zeige, dass $a \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ ist, wenn a^{-1} ein Eigenwert von φ^{-1} ist.

Aufgabe 21.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$ ist.

Aufgabe 21.13.*

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über dem Körper K und

$$\varphi_i\colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen. Es sei $a \in K$ ein Eigenwert zu φ_k für ein bestimmtes k. Zeige, dass a auch ein Eigenwert zur Produktabbildung

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

ist.

Aufgabe 21.14. Zeige, dass $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert zu einer durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon K^2 \longrightarrow K^2$$

ist, wenn λ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^2 - (a+d)X + ad - cb$$

ist.

Der Begriff des Eigenvektors ist auch für unendlichdimensionale Vektorräume definiert und wichtig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe 21.15. Es sei V der reelle Vektorraum, der aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ besteht.

a) Zeige, dass die Ableitung $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung von V nach V ist.

b) Bestimme die Eigenwerte der Ableitung und zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.[1]

c) Bestimme zu jeder reellen Zahl die Eigenräume und deren Dimension.

Aufgabe 21.16.*

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $v \in V$ ein Eigenvektor zu φ zum Eigenwert $\lambda \in K$. Es sei

$$\varphi^*\colon V^* \longrightarrow V^*$$

[1] In diesem Zusammenhang spricht man auch von *Eigenfunktionen*.

die duale Abbildung zu φ. Wir betrachten Basen von V der Form $v, u_1, \ldots, u_r$ mit der Dualbasis $v^*, u_1^*, \ldots, u_r^*$. Man gebe Beispiele für das folgende Verhalten.

a) v^* ist Eigenvektor von φ^* zum Eigenwert λ unabhängig von $u_1, \ldots, u_r$.

b) v^* ist Eigenvektor von φ^* zum Eigenwert λ bezüglich einer Basis $v, u_1, \ldots, u_r$, aber nicht bezüglich einer Basis $v, w_1, \ldots, w_r$.

c) v^* ist bezüglich keiner Basis $v, u_1, \ldots, u_r$ ein Eigenvektor von φ^*.

Aufgabe 21.17. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $v \in V$, $v \neq 0$, ein fixierter Vektor. Zeige, dass

$$R(v) = \{\varphi \in \operatorname{End}(V) \mid v \text{ ist Eigenvektor zu } \varphi\}$$

mit der natürlichen Addition und Multiplikation von Endomorphismen ein Ring und ein Untervektorraum von $\operatorname{End}(V)$ ist. Bestimme die Dimension dieses Raumes.

Aufgabe 21.18. Es sei K ein Körper, $c \in K$ und $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein von 0 verschiedener Vektor. Erstelle ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau diejenigen $n \times n$-Matrizen sind, für die a ein Eigenvektor zum Eigenwert c ist. Was ist das Besondere an diesem Gleichungssystem und welche Dimension hat die Lösungsmenge?

Aufgabe 21.19. Es sei M eine reelle $n \times n$-Matrix. Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, die ein Eigenwert von M ist, wenn man diese als eine komplexe Matrix auffasst. Zeige, dass a schon im Reellen ein Eigenwert von M ist.

Man verallgemeinere die vorstehende Aufgabe für eine Körpererweiterung $K \subseteq L$.

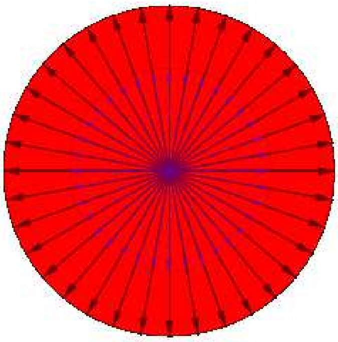
Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.20. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von φ ist.



Aufgabe 21.21. (4 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass M als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von M als komplexer Matrix.

Aufgabe 21.22. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}) .$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von a, b, c, d, wann eine solche Matrix

(1) zwei verschiedene Eigenwerte,
(2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
(3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
(4) keinen Eigenwert,

besitzt.

Aufgabe 21.23. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \mathrm{Id}_V$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.[2] Zeige, dass jeder Eigenwert λ von φ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

[2]Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussagelos.

Aufgabe 21.24. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von φ und v ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige, dass es zu einer gegebenen Basis $v, u_2, \ldots, u_n$ von V eine Basis $v, w_2, \ldots, w_n$ gibt mit $\langle v, u_j \rangle = \langle v, w_j \rangle$ und mit

$$\varphi(w_j) \in \langle u_i,\, i = 2, \ldots, n \rangle$$

für alle $j = 2, \ldots, n$.

Zeige ebenso, dass dies bei $\lambda = 0$ nicht möglich ist.

Abbildungsverzeichnis