Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 52

Übungsaufgaben

Aufgabe 52.1.*

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln $U(x,\epsilon)$ offen sind.

Aufgabe 52.2. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B(x,\epsilon)$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 52.3. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge M sind offen.
(2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung
$$\bigcup_{i \in I} U_i$$
offen.
(3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt
$$\bigcap_{i \in I} U_i$$
offen.

Aufgabe 52.4. Es seien L und M metrische Räume und $m \in M$. Zeige, dass die konstante Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto m,$$
stetig ist.

Aufgabe 52.5. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität
$$M \longrightarrow M,\, x \longmapsto x,$$
stetig ist.

AUFGABE 52.6. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion $T \subseteq M$ stetig ist.

AUFGABE 52.7. Sei V ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und

$$\varphi_w \colon V \longrightarrow V,\ v \longmapsto v + w,$$

die Verschiebung um den Vektor $w \in V$. Zeige, dass φ_w stetig ist.

AUFGABE 52.8. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei

$$f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in M$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle y aus einer offenen Ballumgebung von x gilt.

AUFGABE 52.9. Sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Es seien

$$f \colon [a, b] \longrightarrow M$$

und

$$g \colon [b, c] \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, dass dann die Abbildung

$$h \colon [a, c] \longrightarrow M$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

AUFGABE 52.10. Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

AUFGABE 52.11. Zeige, dass eine polynomiale Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

stetig ist.

Aufgabe 52.12. Zeige, dass eine reelle Quadrik, also eine durch ein reelles Polynom vom Grad zwei gegebene Nullstellenmenge (siehe die 43. Vorlesung), eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Wie sieht das für polynomiale Nullstellengebilde von höherem Grad aus?

Aufgabe 52.13. Es seien L, M, N metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei f stetig in $x \in L$ und es sei g stetig in $f(x) \in M$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in x ist.

Aufgabe 52.14.*

Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto |z|\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 52.15. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Zeige, dass die Folge in M genau dann im Sinne der Metrik konvergiert, wenn sie im Sinne der Topologie konvergiert.

Aufgabe 52.16. Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Zeige, dass das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

Zu einer beliebigen Menge M kann man durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y\,, \\ 1, & \text{falls } x \neq y\,, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.

Aufgabe 52.17. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $Y = \mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f\colon\ Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass f stetig ist, die Umkehrabbildung f^{-1} aber nicht.

Aufgabe 52.18.*

Zeige, dass das offene Einheitsintervall $]0,1[$ und das abgeschlossene Einheitsintervall $[0,1]$ nicht homöomorph sind.

Aufgabe 52.19. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Es sei $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein n-dimensionaler affiner Unterraum, der den Nullpunkt nicht enthält, und es sei $\tilde{H}$ der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei $U \subseteq H$ eine in $H \cong \mathbb{K}^n$ offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei V die Vereinigung aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von U. Zeige, dass der Durchschnitt von V mit $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \tilde{H}$ offen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 52.20. (2 Punkte)

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass V abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 52.21. (4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto ||\, v\, ||,$$

eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 52.22. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

stetig und additiv, d.h. es gelte $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ dann $\mathbb{R}$-linear ist.

Aufgabe 52.23. (5 Punkte)

Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?