f	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05
w	2.843	3.012	3.293	3.856	5.545

答 $w=2.167+\dfrac{0.1689}{f}$.

6. $y=20+\sqrt{30+x^2}$ ナルトキ, x ノ 10 カラ 50 マデノ各値ニ對シ, y ヲ計算セヨ. 之ヲ方眼紙ノ上ニ描ケ. 此等ノ値ニ相當スル曲線ニ最モ近イ直線ハ如何.

答 $y=0.97x+21.5$.

7. 或ル技師ガ次ノヤウナ事ヲ欲シタ. 最大指示馬力 I ガ與ヘラレタトキ,蒸汽機關裝置ノ總價格 K,卽チ其ノ建築物,汽罐,汽管,裝具,基礎工事及ビ機關ノ價格ヲ近似的ニ容易ニ述ベタイト思ッタ. 其ノ技師ハ最近(1896年)英國ノ工業都市內及ビ市外ニ存在スル普通ノ狀態ノ下ニ於テ,優良蒸汽機關ヲ設置シタ數多ノ人々カラ實際ノ數字ヲ得タ. 其ノ概略ノ平均ヲトッテ,次ノヤウナ結果ヲ得タ.

$I=200$ ナルトキ, K ハ最高 £4600, 最低 £3800; 故ニ平均ハ £4200 デアルト考ヘラレル.

$I=30$ ナルトキ, K ハ最高 £900, 最低 £550; 故ニ平均ハ £725 デアルト考ヘラレル.

$I=120$ ナルトキ, K ハ最高 £2600, 最低 £2300; 故ニ平均ハ £2450 デアルト考ヘラレル.

之ヲ方眼紙上ニ描イテ,此等諸點ノ間ニハ鮮カニ一直線ガ横ッテキル事ヲ知リ,且ッ此ノ事カラ次式ヲ得ル.

$$K=100+20I.$$

指示馬力ガ 160 デアル蒸汽機關ノ確カラシイ價格如何.

答 £3300.

8. 次ノ數字ハ(1912年,5月)公表サレタモノデアル. 之ハ重油ヲ用ヒタディーゼル石油機關ノ檢査デアル. W ハ 1 時間ノ石油ノ重量, B ハ實馬力デアル. 滿載荷重トハ 250 實馬力ノ積リデアル. w ハ $W\div B$, 卽チ一時間實馬力ニ就イテノ石油ノ重量デアル.

荷 重	$\frac{1}{4}$ 荷 重	$\frac{1}{2}$ 荷 重	$\frac{3}{4}$ 荷 重	滿載荷重	1割過載荷重
w	0.64	0.50	0.45	0.448	0.458

此等ノ數字カラ,私ハ W ト B トノ値ヲ計算シタ.

B	275	250	187.5	125	62.5
W	126	112	84.4	62.5	40.0

方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描イテ,過載荷重ノ場合ヲ除イテハ,一直線ヲ得ルコトヲ知ッタ. 明ラカニ簡單ナ法則デ表ハシ得ナイ場合ヲ除ケバ,

$$W=17.6+0.37B,$$

ヲ得ル. 故ニ $$w=\frac{W}{B}=\frac{17.6}{B}+0.37.$$

§65. 例 題

或ル料理屋デハ,一時間ニ平均最大多數 120 人ノ普通ノ客ヲ入レル事ガ出來ル. 故ニ一日ニハ 1440人ノ客ヲ饗ブ事ガ出來ルモノトスル. 暫クシテカラ主人ハ次ノ如キ平均ノ結果ヲ觀測シタ.

日々ノ客ノ數 G	費用,家賃,地方稅,租稅,給料,衣食費 E 磅	客ノ爲ノ飲食費 F 磅	收入金 M 磅	純益 P 磅[1]
240	8	10	18	0
360	9	14.7	27	3.3

(a) 一次式ヲ取ッテ,次ノ關係式ヲ證明セヨ.

$$P=0.0275G-6.6,\quad M=0.075G,\quad F=0.039G+0.6,\quad E=6+\frac{1}{120}G.$$

(b) 一日 4 磅ノ純益ヲ得ル爲ニハ,幾人ノ客ガ來ナクテハナラヌカ.

答 386 人.

(c) 客ノ數ガ 300 人, 600 人, 900 人ナルトキノ三ツノ場合ニ於ケル客

(1) G, E, F, M 及ビ P ハ夫々客 (guest), 費用 (expense), 食物 (food), 金錢 (money), 收益 (profit) ノ頭文字デアル.

一人ニ就イテノ純益如何.　　**答** 1.32, 3.96, 4.85 片.

(*d*) 次ノ諸點ニ注意セヨ. 普通ノ客ハ 18 片ヲ支拂フモノト假定シ,客ガ特殊ナ時間ニ混雑スルカ,又ハ一日中一層客ガ一樣ニ來ルカシテモ,E, F 及ビ G ノ間ニハ上述ノ一次式ガ成立スルモノトスル. 又種々ナ時間ニ於テ,客ハ次表ノヤウニ來ルモノトシ,先ヅ第一ノ場合ニハ總テノ客ハ如何ナル時刻ニ來テモ18片支拂ヒ,第二ノ場合ニハ客ハ明記サレタ割合ニ從ツテ支拂ヲ遞減サレルモノトスル. 日々ノ利益ヲ比較セヨ.

一日中ノ時刻		9–10	10–11	11–12	12–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11
舊制度	一時間ノ客數	2	3	10	90	120	30	3	2	5	50	80	10	2	2
	各客ガ支拂フ金額	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
新制度	一時間ノ客數	40	60	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
	各客ガ支拂フ金額	12	12	14	17	18	17	16	14	16	17	18	17	16	16

二ツノ場合ニ於テ,日々ノ客ハ夫々 409 及ビ 1060 デアル. 而シテ吾々ノ公式カラ F 及ビ E ヲ計算スル事ガ出來ル. 故ニ次ノ結果ヲ得ル.

日々ノ客ノ數 G	費用 E磅	食物等ノ費用 F磅	收入 M磅	日々ノ純益 P磅
409	9.41	15.73	30.7	5.56
1,060	14.83	39.8	70.33	15.70

宿屋及ビ旅館ノ主人ガ取ツテキル制度ハ,仕事ガ暇ナ時ニハ負擔ヲ少クスル此ノ制度デアル. 電燈會社ハ直チニ此ノ制度ガ良イ制度デアル事ヲ知リ,一日ノ暇ナ時間ノ間單位ニ就イテ負擔ヲ少クシタ. 上ノ例ハ料理屋ノ主人,又ハソレト同樣ナ仕事ニ從事スル殆ンド總テノ人ニトツテ,之ガ重要デアル事ヲ示スモノデアル.

若シ學生ガ $G \div 1440$ ニ對シテ"荷重率f"ナル名稱ヲ用ヒルナラバ,其ノ人ハ補助機關手ノ言葉ヲ用ヒテキルノデアル.

第十四章　方眼紙・實驗公式

§66. 一次式ニ轉換サレル式

吾々ヲ導クヤウナ定理ガアレバ,勿論, x ト y トヲ結ブ代數的法則ヲ發見スル事ハ容易デアル. 次ハ實驗シタ數デアル.

x	1.1	1.8	2.5	2.9	3.6	4.3	4.8	5.4
y	1.91	2.13	2.42	2.65	3.09	3.66	4.09	4.73

之ヲ方眼紙上ニ描イテ,規則正シイ簡單ナ曲線ヲ得ル. 多クノ目的ニ對シテハ此ノ曲線デ十分デアル. 卽チ,之ハ實驗ヲ補正シ,挿入ヲナス事等ヲ承認シテアル. 併シ,xトyトヲ結ブ簡單ナ代數式ガ在ルカモ知レナイトキニハ,曲線ニ就イテノ吾々ノ實驗ヲ信頼シテ實際ノ代數式ヲウマク言當テ,之ヲ決定シヨウト試ミル.

色々ナ試ミヲ行ツタ後結局 y ト x^2 トノ關係ノ「グラフ」ヲ描ク事ニウマク考ヘ付イタモノトセヨ. 卽チ,或ル定理ガアツテ,之ガ y ト x^2 ノ關係ノ「グラフ」ヲ描クヤウニ吾々ニ教ヘタモノトスル. x ノ總テノ値ヲ自乘シテ,次ノ表ヲ得ル.

x^2	1.21	3.24	6.25	8.41	12.96	18.49	23.04	29.16
y	1.91	2.13	2.42	2.65	3.09	3.66	4.09	4.73

「グラフ」ヲ描イタ結果,一直線ヲ得ル事ヲ知ル. xトyトノ與ヘラレタ値ニハ明ラカニ誤ガアルカラ,黒絲ヲ張ツテ出來ルダケヨイ直線ヲ作ル. 卽チ,多分全ク正シイト思ハレル或ル二點ヲ定メル. 此ノ場合ニハ次ノ二點ヲト[illegible].

$x^2=1$ ノトキ, $y=1.9$; $x^2=25$ ノトキ, $y=4.3$.

故ニ,若シ關係式ヲ $y=a+bx^2$ トスレバ,

$$1.9=a+b,\quad 4.3=a+25b.$$

邊々相減ジテ, $2.4=24b$, 卽チ $b=0.1$. 依ツテ $1.9=a+0.1$, 卽チ $a=1.8$.

故ニ
$$y=1.8+0.1x^2.$$

ハ求メル法則デアル. 扨テ, x ノ上ノ値ヲ取ツテ y ヲ計算スレバ實驗シタ値ニ於テ確カラシイ誤差ヲ發見スル事ガ出來ル.

§67. 實驗式

曲線ニ就イテ多クノ事ヲ知ツテヰル經驗ノアル人ハ,簡單ナ法則ガ存在シテヰルニ拘ハラズ,之ヲ發見スル事ニ屢々失敗スル. 若シ,點ガ一直線上ニ近似的ニ存在シナイナラバ,私ハ時々 $y=ax^n$, 又ハ $y=ae^{bx}$ トシテ試ミル. 併シ**私ガ試ミヨウトスル式**ハ描イタ曲線ノ形狀ニ基クノデアル.

私ハ獨力デ一ツノ法則ヲ發見シタ最初ノヲ覺エテヰル. ソレハ 1875 年ノ事デアツタ*. 私ハアマリ經驗ノナイ青年デアツタ. 而モ私ハ重力ニ關スルニユートンノ法則ト同樣ニ重要デアル法則ヲ發見シタノデアツタ. 勿論,私ハ今多クノ他ノ實驗上ノ公式ガ,私ノ數字ニ全ク相等シク

* 王立學會報 1874—5, 參照.

私ハ種々ナ溫度 θ ニ於テ,硝子ノ傳導率 C ヲ綿密ニ實驗シテ,次ノ結果ヲ得タ.

溫度華氏 θ	58°	86°	148°	166°	188°	202°	210°
C	0	0.004	0.018	0.029	0.051	0.073	0.090

θ ト C トヲ坐標トシテ方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描イタ. ソシテ其等ノ間ニアル代數的法則ヲ求メル爲ニ, アラユル方法ヲ試ミタ. ソレハ,其等ノ間ニ或ル簡單ナ法則ガ存在スル事ガ,私ニハ明ラカデアツタカラデアル. 遂ニ幸ニモ $\log C$ ト θ トノ關係ヲ「グラフ」ニ描ク事ヲ考ヘツイタ. 其ノ結果, 此等ノ點ハ直線上ニ在ル事ガ解カリ,從ツテ $C=0.000124\times 1.032^{\theta}$ デアル事ガ明ラカニナツタ.

適合シタニ相違ナイ事ヲ知ツテヰル. 併シ公式ノ價値ハ,唯ソレニ數字ヲ適合セシメル事ノミナラズ,尙其ノ簡單ナ點ニ在ル. 單値函數ハ如何ナル函數デモ,項ダケヲ十分取ルトスレバ,

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\cdots\cdots,$$

ナル公式ニヨツテ表ハサレルデハナイカ*.

ニユートンノ法則ノ價値ハ,非常ニ簡單デアルニモ拘ハラズ,而モ吾々ガ其ノ法則ヲ適用ショウトスル空間,卽チ吾々ノ太陽系ニヨツテ占メラレル空間ノ總テヲ通ジテ驚ク程眞デアルヤウニ見エル事デアル. 此ノ太陽系ノ外デハ引力ノ法則ニ關シテ何事モ解カラナイ. 併シ我々ノ例ノ樂觀的方法デ,常ニソレハ眞デアルト假定スル. 是ハ恰モ,眞デアルトハ證明サレテヰナイ所ノ他ノ多クノ事ヲ,吾人ガ合理的ニ眞デアルト假定スルヤウナモノデアル. 常ニ言フヤウニ,事實吾人ハ引力ノ法則ガ,吾ガ太陽系內ニ於テ眞デアルトイフ事ヲ知ラナイ. 物體ノ重量ハソノ溫度ト關係ナイト信ジラレテヰルガ,ソレニモ拘ラズ實際ニハ,溫度ニ關係スルカモ知レナイシ,或ハ又吾人ガ重量ニハ全ク無關係デアルト假定シテキタ他ノ性質ニ依ルカモ知レナイノデアル.

吾人ガ證明ナシデ,如何ニ事物ヲ信ジテヰルカハ,驚クベキ程デアル. 併シ,吾人ガ其ノ事實ヲ知ツテヰル範圍內デ,之ヲ信ズルノニハ害ハナイ. 化學ニ就イテ,幾十萬人ノ講師ハ,聽衆ニ向ツテ,大氣ノ正確ナ組織ヲ說明シタ. 併シ後ニ,ロード・レーリーノヤウニ獨創的思想ヲ有スル一人ノ男ガヤツテ出テ,實際ニ此等ノ陳述スル所ヲ試驗シテ見,其ノ結果,ソレガ誤ツテヰルコトヲ發見スルニ至ツタ.

例題. 滑車ヲ固定シ,之ニ綱ヲ l ダケ卷ク. 〔$\frac{1}{4}$ ノ卷キトハ,一廻轉ノ四分ノ一,卽チ 90° (卽チ $\frac{\pi}{2}$「ラディアン」) ヲ意味スル.〕 又弛ンデヰル端ニハ力 M ヲ懸ケル. 張ツテヰル側ノ力 N ハ,カラ滑リヲシナイデシツカリシタ滑リヲスルノニ丁度十分デアルヤウニスル. 此ノトキ N/M ト l ト

* 王立學會ニ於テ, 嘗ツテ私ハ, 或ル數學家ガ自分デ發見シタ實驗的公式ニ就イテ話シテヰルノヲ聞イタ. ソレハ其ノ人ノ實驗ノ範圍ニ於テハ役立ツ公式デアル. 併シ, 其ノ人ハ, 恰カモ自然ニ就イテ無限ニ正確ナ法則ヲ發見シタカノ如ク彼ノ實驗ノ全ク範圍外ニアル虛ナル値ヤ, 方程式ノ奇妙ナ根ヲ實際ニ論ジテキタ. 一寸シタ常識ヲ練習スレバ, 此ノ程度ノ "外挿入" ノ誤ヲ防ギ得ルデアラウ.

ノ關係ヲ求メヨウ.

〔先ヅ $\frac{N}{M}$ ト l トヲ坐標トスル「グラフ」ヲ描ケ. 次ニ l ト $\log\frac{N}{M}$ トヲ坐標トスル「グラフ」ヲ描ケ.〕其ノ力 M ヲ 2 トスル.

卷キ l	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$
N	3.17	5.06	7.90	12.68	19.90	32.10	50.12	80.3	125.8	201.5

答 $N/M=e^{1.84l}$ (§28. 問題1, 參照).

§68. 例 題

今度ハ,諸君ニ**僥幸的推察**ノ例題ヲ示サウ. 玆ニ蒸汽機關ニ就イテ幾千百回實驗シテ得タ一組ノ結果ガアル. 〔私ハ小サイ凝結式三段膨脹蒸汽機關ニ就イテ,七個ノシツカリシタ荷物ヲ積ミ,各連續 3 時間ニ亙ル實驗カラ得タ數値ノ中,最モ都合ノヨイ一組ノ數値ヲ用ヒル.〕

指示馬力, I	36.8	31.5	26.3	21	15.8	12.6	8.4
一指示馬力ニ就イテ一時間毎ニ用ヒタ蒸氣ノ封度數, w	12.5	12.9	13.1	13.3	14.1	14.5	16.3

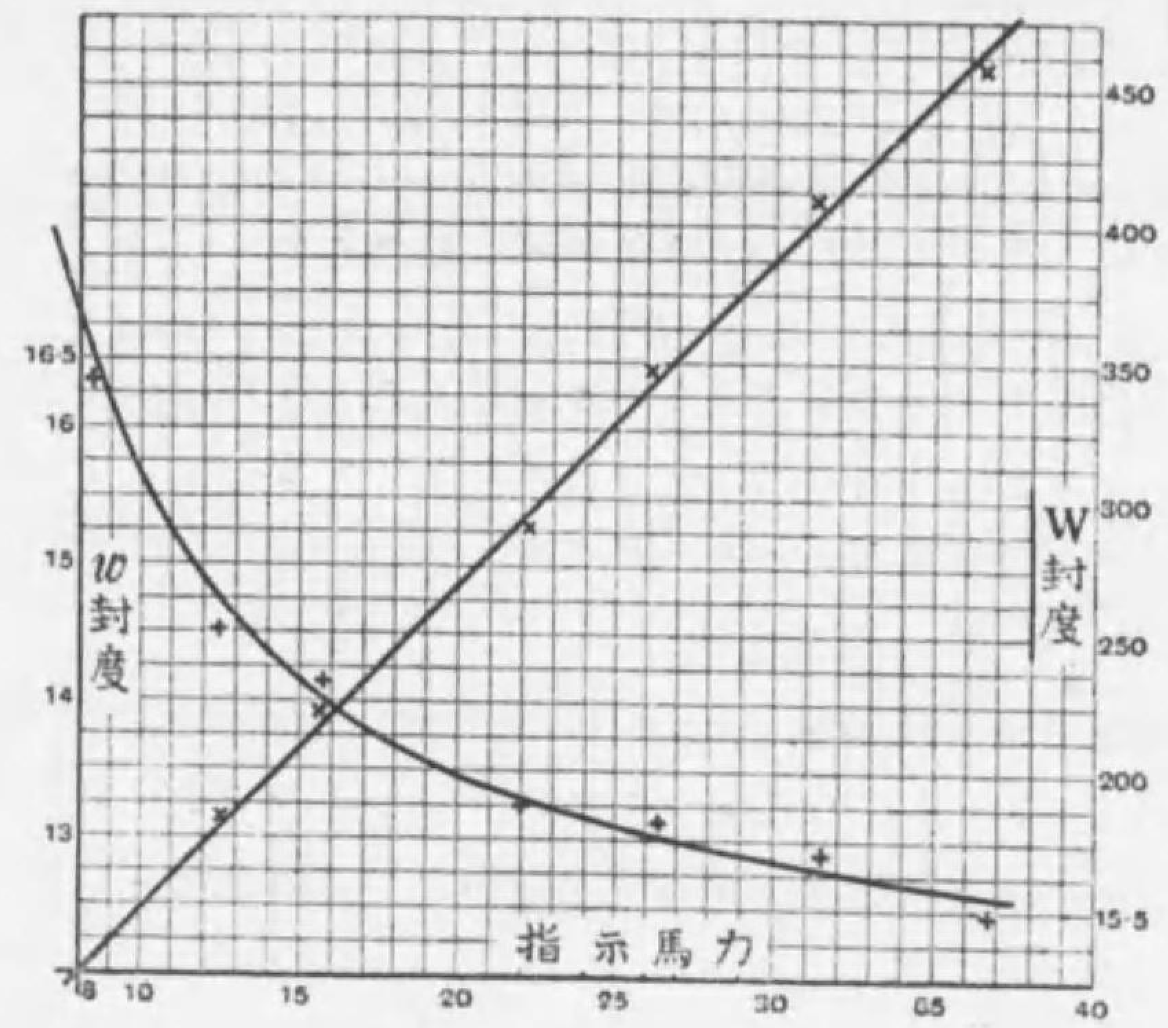
I ト w トヲ坐標トシテ方眼紙ニ「グラフ」ヲ描キ,第17圖ヲ得ル. 斯クスレバ諸君ハ私及ビ年々多クノ他ノ人々ニヨツテ得ラレタ一組ノ結果ヲ發見スルデアラウ. 兎ニ角,吾々ハ此ノ結果ヲ利用スル事ハ出來ナカツタ. 其處ニハ何等ノ簡單ナ法則モナカツタ. 併シ,ウヰランスハ, I ト w トデハナクシテ, I ト機關ニヨツテ一時間毎ニ用ヒラレタ蒸氣ノ全重量 W トヲ坐標トスル「グラフ」ヲ描ク事ヲウマク思ヒツイタ. ソコデ試ミヨ. 勿論 $I\times w$ ハ,私ガ W ト呼ブ所デアル.

I	36.8	31.5	26.3	21	15.8	12.6	8.4
W	460	406.2	344.5	279.3	222.8	182.7	137.0

第 17 圖ニヨツテ,點ガ十分ニ一直線ニ近ク存在シテキル事ヲ知ル. 故ニ

$$W=37.5+11.5\,I, \quad\cdots\cdots(1)$$

ナル非常ニ簡單ナ式ガ成立スルトイフ事ガ出來ル. 若シ W ノ代リニ Iw ヲ用ヒ,且ツ I ニテ割レバ,



第 17 圖

$$w=\frac{37.5}{I}+11.5, \quad\cdots\cdots(2)$$

ヲ得ル. 從ツテ若シ何人カガ, w ト I トデハナクテ, w ト $\frac{1}{I}$ トヲ坐標トスル「グラフ」ニ氣ガ付ケバ,彼ハ簡單ナ法則ヲ發見シタ事デアラウ.*

§69. 例 題

次ノ x ト y トノ値ガ實驗サレタ. 而シテ此等ヲ結ブ或ル簡單ナ代數式ガアルカ否カヲ見ル事ガ重要ナ事デアツタ.

---

* 注意 ウヰランス(Willans)ガ試ミタ各々ノ場合ニ於テ,彼ハ W ト I トノ間ノ一次式ヲ發見シタ. 非凝結式機關ニ於テハ, 一次式ガ當テハマル事ヲ期待スルノハ合理的デアル事ハ證明出來ル. 併シ,凝結式機關ニ於テハ, 圓筒ガ常ニ乾イテキルヤウナ裝置ヲ採用シテ, 特別ノ注意ヲ拂フノデナイナラバ,一次式ノ成立ハ眞デハナイト云フ事ガ證明出來ル. 尙又,蒸汽機關ニ於テハ, 吾々ガ蒸氣壓ヲ變化サセル事ニヨツテ調節スルトキニノミ此ノ事ハ眞デアル. 自働開閉器ガ改メラレルトハ考ヘラレナイ. 第二十七章,問題 41 及ビ 42 參照.

x	0	0.05	0.1	0.3	0.5	1.0	2.0	1.4	2.5
y	0	0.136	0.26	0.55	0.78	0.97	1.22	1.1	1.24

之ヲ方眼紙ニ描イテ見レバ,xトyトガ小ナルトキハ,大體

$$y \propto x$$

ト言フ事ガ出來ルガ,xガ漸次大トナルニ從ツテ,yハソレニ比例シテ大キクハナラナイデ,寧ロ或ル極限値ニ近ヅクヤウニ見エル事ニ氣付クデアラウ. 斯樣ナ種類ノ場合ニハ,先ヅ

$$y=\frac{ax}{1+bx},\ 即チ\ y+bxy=ax;\ 又ハ\ \frac{y}{x}+by=a,$$

ガ眞デアルカ否カヲ試ミヨ.

此ノ事ハ,y/xトyトヲ坐標トシテ方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描ケバ解ル.

此ノ場合ニハ,斯クノ如クシテ描カレタ點ハ一直線ニ非常ニ近ク存在スル事ヲ知ル. 從ツテ

$$\frac{y}{x}=-2y+3, \qquad 故ニ\ y=\frac{3x}{1+2x}.$$

§70. 例　題

次ノヤウナxトyトノ値ヲ坐標トシテ方眼紙ノ上ニ「グラフ」ヲ描ケバ,主トシテ小ナル値ニ對シテ,前節ト異ナツタ性質ノ曲線ヲ得ル.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	0	0.48	1.37	2.12	2.58	2.93	3.07

學生ハ,コレヲ「グラフ」ニ描キ,且ツ

$$y=\frac{ax^2}{1+8x^2}$$

ヲ試ミナケレバナラヌ理由ヲ考ヘヨ.

此ノ式ハ　$y+8yx^2=ax^2$,　卽チ　$\frac{y}{x^2}+8y=a$

ト書カレル.

故ニ此ノ式ハyト$\frac{y}{x^2}$トヲ坐標トシテ方眼紙ニ描ケバ,非常ニヨク解ル. 若シ,實際作圖スレバ,各點ノ間ニハ滑ラカニ一直線ガ橫ハツテヰル事ヲ

知ル. 而シテ眞ノ法則ヲ表ハス式ハ

$$y=\frac{2.2x^2}{1+0.6x^2}$$

デアル.

§71. 例　題

次ノ實驗シタ諸數ヲ考ヘヨ.

x	1.70	2.24	2.89	4.08	5.63	6.80	8.42	12.4	16.3	19.0	24.3
y	320	411	491	671	903	1050	1270	1780	2250	2520	3180

之ヲ方眼紙上ニ描イテ曲線ヲ得ル. 此ノ曲線ノ形狀ハ,私ニ次ノ事ヲ暗示スル.

　　1. $\log x$ト$\log y$トデ「グラフ」ヲ描クコト,

又ハ　2. xト$\log y$トデ「グラフ」ヲ描クコト,

又ハ　3. $\log x$トyトデ「グラフ」ヲ描クコト,

又ハ　4. 其ノ他ノ手段ヲ試ミルコト.

サテ,今ノ場合デハ,此等ノ方法ノ中,第一ノ方法デ成功スルコトガ解カルデアラウ. 斯樣ニシテ,次ノ表ヲ得ル.

$\log x$	0.2304	0.3502	0.4609	0.6107	0.7505	0.8325	0.9253	1.0934	1.2122	1.2788	1.3856
$\log y$	2.5051	2.6138	2.6911	2.8267	2.9557	3.0212	3.1038	3.2504	3.3522	3.4014	3.5024

此等ノ點ヲ打ツテ見レバ,各點ハ殆ンド一直線上ニ在ル事ガ解カル. 旣ニ述ベタ方法ニ依ツテ,最モ確カラシイ直線ハ

$$\log y-0.876\log x=2.299,\ 卽チ\ \ y=199x^{-0.876}$$

デアル事ヲ知ル.

§72 例　題

運河ノ曳船ニ於テ,或ル實驗ノ結果,右表ノヤウナ觀測ガ行ハレタ.

1 噸ニ就イテノ索引力 P 封度	1 時間ニ就イテノ速力 V 哩
0.70	1.68
1.70	2.43
2.35	3.18
3.20	3.60
3.50	4.03

次ノ形ノ關係式ガアルコトヲ證明セヨ.

$$P=0.346V^{1.69}.$$

§73. 例 題

指示馬力 I	排水量 D 噸	速力 v 節
140	1,748	7
410	1,748	10
820	1,748	13
1,500	1,748	16
442	2,030	10
351	1,400	10
294	1,000	10

或ル汽船ニ就イテ,左ノヤウナ測定ガ行ハレタ.

次ノ形ノ關係式ガアルカ否カヲ見ヨ.

$$I\propto D^{n}v^{m}.$$

答 10節ノ速力ニ對シテノ $\log I$ ト $\log D$ トヲ坐標トシテ「グラフ」ヲ描キ,又排水量1748噸ニ對シテ, $\log I$ ト $\log v$ トヲ坐標トシテ描キ,次ノ式ヲ得ル.

$$I=0.00513D^{0.595}v^{2.97}.$$

§74. 對數方眼紙

$\log x$ ト $\log y$ トヲ坐標トシテ方眼紙ニ「グラフ」ヲ描クコトハ,極メテヨク成功スルモノデアリ特ニ瓦斯及ビ蒸汽機關ノ問題ニ於テサヤウデアル. 故ニ私ノ高弟(ヒューマン氏)ハ或ル文房具商店ニ數枚ノ**對數方眼紙**ヲ作ル事ヲ教ヘタ.(1) 從ツテ人々ハ表ヲ用ヒナイデ, $\log x$ ヤ $\log y$ ヲ表ハス事ガ出來ル. ココニ一枚ノ對數方眼紙ガアル. 數字5ハ軸カラ5吋ノ距離ニ在ルノデハナク, $\log 5$ ニ比例スル距離ニ在ル事ヲ,諸君ハ知ルデアラウ.

此ノ紙ハ,式

$$yx^{n}=C$$

(1) 我ガ國デハ,東京銀座,玉屋商店デ二種ノ對數方眼紙ヲ發賣シテキル. 第一種ハ250粍ニ500粍デ,一單位250粍, 第二種ハ250粍ニ375粍,一單位125粍デアル.

ノ代リニ,最モ眞ニ近イ式ガ

$$(y+\alpha)(x+\beta)^{n}=C,^{*}$$

デアルトキニ,特ニ價値ガアル.

何トナレバ,此ノ奇妙ナ紙ニ y ト x トヲ坐標トシテ描イテ見レバ,其等ノ點ノ間ニハ直線ガ存在シナイ事ガ解カル. 然ル後,此等ノ描イタ點デハナク,此等ノ一割カ二割カ三割右,又ハ上ノ方ニ,或ハ左又ハ下ノ方ニ在ル點ヲ研究スル事ハ容易デアルカラデアル.

例題 私ハ汽力圖線ハ常ニ近似的ニ次ノ法則ニ從フヤウニ見エル事ヲ知ツテキル.

$$pv^{n}=\text{常數}.$$

瓦斯機關ノ「ダイアグラム」カラ次ノ測定ガ行ハレタ.(若シ n ヲ求メヨウトスレバ,其ノ測定ノ尺度ニハ實際ニ何等ノ影響モナイ事ヲ證明スルノハ容易デアル.) 併シ遊隙ハ正確ニハ測定シテナイ事ハ既知デアル. 故ニ v ノ總テノ値ハ,或ル常數ヲ加ヘルカ又ハ減ジナクテハナラナイ. 關係式ト遊隙ニ對スル補正トヲ求メヨ.

p	39.60	44.7	53.8	73.5	85.8	113.2	135.8	178.2
v	10.61	9.73	8.55	7.00	6.23	5.18	4.59	3.87

答 對數方眼紙ヲ用ヒテ,不正確ニ測ツタ遊隙ノ補正トシテ v ノ値カラ0.6ヲ減ジナケレバナラナイ事ヲ知ル. 實際ニ,

$$p(v-0.6)^{1.346}=\text{常數},$$

ナル關係式ガ求メラレル.

§75. 例 題

次ハワノ表ニヨル値デアツテ, p ハ飽和蒸氣ノ一平方吋ニ就イテノ壓力ヲ封度デ表ハシタ數デアル. u ハ一封度ニ就イテノ立方呎ノ數トス

* 方眼紙ヲ用ヒナイ斯クノ如キ總テノ曲線ノ研究ノ方法ニ就イテハ第十五章ヲ參照セヨ.

ル．然ルトキハ式

$$pu^n=c,\quad \text{但シ } c \text{ ハ常數} \cdots\cdots(1)$$

ハ殆ンド眞ニ近イモノデアル事ガ解カツタ．而シテ此ノ種類ノ公式ハ計算ニ用ヒルノニ非常ニ容易デアルカラ,次ノ値ノ範圍ニ於テ n ト c トノ適當ナ値ヲ求メル事ハ肝要ナ事デアル．

p	6.86	14.70	28.83	60.40	101.9	163.3	250.3
u	53.92	26.36	14.00	6.992	4.28	2.748	1.853

若シ(1)ガ眞デアルナラバ,

$$\log p+n\log u=\log c.$$

$\log p$ ト $\log u$ トヲ坐標トシテ點ヲ打テバ,其等ノ點ノ間ニハ極ク滑ラカニ一直線ガ横ツテキル事ガワカル．且ツ實際ニ,

$$\log p+1.0646\log u=2.68$$

デアル．故ニ

$$pu^{1.0646}=479.$$

§76. 問　題

例 1.　汽船ノ全重量卽チ排水量ヲ噸デ表ハシタモノハ,其ノ排水サレタ水ノ體積 V 立方呎ヲ,水ガ淡水デアルナラバ 36 デ割リ,鹹水デアルナラバ 35 デ割ツタモノデアル事ヲ證明セヨ．

次表ノ吃水 h 呎ニ於テ,或ル特殊ナ船ハ次ノ通リノ排水量(噸數)ヲ有シテキル．卽チ圖形カラ計算ニヨツテ求メタ排水量(立方呎)デアル．

吃水 h 呎	15	12	9	6.3
水線ニ於ケル長サ l 呎	300	280	270	265
水線ニ於ケル最大幅員 b 呎	36	35	32.5	27.3
排水量 V 立方呎	73440	52920	35640	20520
水線ニ於ケル排水量 T 噸	2098	1512	1018	586

此等ノ數ノ間ニ次ノ關係ガアル事ヲ證明セヨ．

$$T=44.15h^{1.42},\qquad V=1545h^{1.42}.$$

例 2.　若シ各々ノ吃水 h ニ對シテ,長サハ l デアリ,水線ニ於ケル船ノ最大幅員ハ上述ノ通リデアルナラバ,次ノ關係ガアル事ヲ證明セヨ．

$$V=0.45lbh.$$

例 3.　上式 $V=1545h^{1.42}$ ガ眞デアルトスレバ,水平線ニ於ケル船ノ水平斷面ノ面積 A 平方呎ハ dV/dh デアルカラ,(諸君ガ第十八章ヲ終ヘタ後) $A=2194h^{0.42}$ ナル事ヲ證明シ,且ツ上ノ各場合ニ就イテ A ヲ計算セヨ．

答　6840, 6230, 5520, 及ビ 4750 平方呎．

例 4.　各場合ニ於テ, $A=0.45\times1.42\,lb=0.639\,lb$ ナル事ヲ證明セヨ．

例 5.　$A\div420$ 又ハ $lb\div657$ ハ,海水ニ於ケル吃水ノ一吋ノ增減ニ對スル噸數ノ增減ヲ示ス事ヲ證明セヨ．

例 6.　或ル船渠ノ水ハ例 1 ニ於ケル除數ガ 35.5 ナル如キ水デアル．卽チ一噸ニ對シテ其ノ水ハ 35.5 立方呎アル．汽船ガ海カラ船渠ニ入ツタトキ,其ノ重量ガ 2098 噸デアルナラバ,此ノ船ノ吃水ノ增加ハ幾何デアルカ．

答　0.15 呎．

§77. 例　題

或ル研究ニ於テ,若シ $\frac{1}{u}$ ヲ p ノ一次函數トシテ表ハス事ガ出來ルナラバ,ソレハ非常ニ滿足ナ事デアル．此ノ事ハ §75 ニ與ヘラレタ數デナシ得ラレルカ否カヲ吟味セヨ．

$\frac{1}{u}$ ト p トヲ坐標トシテ方眼紙ニ描ケバ,タトヒ相違ハアツテモ,

$$\frac{1}{u}=0.0171+0.0021p$$

ナル關係式ヲ採用スルコトガ出來ル．

斯樣ナ公式ニ如何ナル値ヲ配置スベキカト云フ事ハ研究ノ性質ニヨル．私ハ斯樣ナ近似値ヲ用ヒルトキニハ,常ニ其ノ相違ノ重要性ヲ吟味スル．

§78. 問　題

例 1.　次ノ數デ「グラフ」ヲ描ケバ,規則正シイ曲線ヲ得ル．種々試ミヲヤツタ後, x ト $\log y$ トヲ坐標トシテ方眼紙上ニ點ヲウテバ一直線ヲ

得ル.[*] ソシテ次ノ關係ヲ知ル.

$$\log y=1.1955+0.0843\,x,$$

即チ　　$y=15.69\times10^{0.0843x}$, 或ハ $y=15.69e^{0.194x}$.

x	5	6.5	8	9.5	10.5	12.0	13.0	14.2
y	41.7	55.0	74.3	101.0	121	161	196	247

斯様ナ練習問題ガ澤山アルナラバ,一方ノ目盛ハ對數ニナツテキテ,他方ノ目盛ハ等分サレテキル一種ノ方眼紙[(1)]ヲ使用スレバ,明ラカニ勞力ガ節約サレル.

例 2. §45 ノ表〔t ト $\log P$ トヲ坐標トシテ作圖シタモノ〕ヲ用ヒテ,1811 年ノ國勢調査ノ結果カラ出發シタイングランド及ビウエールズ[(2)]ノ人口ハ大體次ノ法則ニ従ツテキルト言フ事ガ出來ル事ヲ證明セヨ. 但シ t ハ 1811 年以降ノ年數デアル.

$$P=10^{7.03+0.00556t},\ 即チ\ \log P=7.03+0.00556t.$$

此ノ公式カラ P ヲ計算シ,ソレト國勢調査ノ報告トノ差ヲ求メ,且ツ此ノ差異ヲ曲線ニ描ケ.[**] 1901 年ト 1911 年トニ於ケル確カラシイ人口ハ何程デアルカ.[***]

答 33.93×10^6 及ビ 38.58×10^6.

---

*　勿論吾々ヲ導クヤウナ定理ガアルナラバ,吾々ノ仕事ハ非常ニ助カル. 例ヘバ x ニ關シテ y ノ増減ノ割合ガ,y 自身ニ比例スルコトガ解カレバ, ソレハ複雜ナ面白イ關係デアリ, 且ツ $y=ae^{bx}$ ナル事ヲ知リ, 従ツテ x ト $\log y$ トヲ坐標トシテ「グラフ」ヲ描ク.

若シ $\frac{dy}{dx}$ ガ $\frac{y}{x}$ ニ比例スルコトヲ知ツテヲレバ, 吾々ハ $y=ax^b$ ヲ試ミナケレバナラナイ.

又若シ $\frac{dy}{dx}$ ガ x ニ比例スルコトヲ知ツテヲレバ, $y=a+bx^2$ ヲヤツテ見ナケレバナラナイ.

(1)　之ヲ**半對數方眼紙**トイフ. 東洋經濟新報社(東京,牛込天神町) 製ノモノガアル.

(2)　ウェールズ (Wales) ハイングランド(England) ト同ジク, 大英國ノ一區劃デアル.

例 3. 次ノ數ハ實驗室デ觀測サレタノデアル.

T	0.410	0.575	0.895	1.297	1.720	2.200	2.385
x	250	300	350	400	450	500	517

式 $T=cx^k$ ヲ考ヘルニ理由ガアツタ. ココニ c ト k トハ常數デアル. 此ノ式ガ與ヘラレタ値ノ範圍内デ眞デアルカ否カヲ調ベヨ. 若シ眞デアルナラバ,k ト c トノ適當ナ値ヲ求メヨ.　　**答** $T=4.624\times10^{-7}x^{2.473}$.

例 4. 水平面トノ差ガ H 呎デアルトキ,トムソン計量器ノ刻ミ目ヲ一秒間ニ流レ出ル水ノ量 Q 立方呎ヲ實測シタ.

H	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.4
Q	4.2	6.1	8.5	11.5	14.9	23.5

トムソンノ定理ニ依レバ,此等ノ數ハ $Q=aH^n$ ナル法則ニ從ハネバナラナイ. 之ヲ吟味シ,且ツ a ト n トノ適當ナ値ヲ求メヨ.

例 5. m 哩ノ徒歩競爭(執務シテ)ノ記録時間ヲ t 秒トスレバ次ノ通リ公表サレタ記録ガアル.

**　三種ノ問題ガアツタ事ヲ記憶セネバナラヌ.

(1) 簡單ナ公式カラ計算シタ正確ナ數ヲ方眼紙ニ作圖スル事. 此ノ場合ノ曲線ハ打ツタ各點ヲ正確ニ通ル. ソシテソレハ單純ナ曲線デアル.

(2) 實測シタ數ヲ作圖スル事. 此ノ場合ニハ實測ニ誤差ガアルカラ, 各點ノ間ヲ最モ滑ラカニ通ル單純ナ曲線ガ正シイ式ヲ提供スルモノト假定スル.

(3) 人口ノ様ニ, 正シイ數ヲ作圖スル事. 眞ノ曲線ハ作圖ニ依ル各點ヲ正確ニ通ル. 併シ此ノ際ニハ混亂ニ依リ錯雜サレテハキルガ, 其ノ中ニ單純ナ法則ガ有リ得ル. 各點ノ間ヲ滑ラカニ通ル曲線ヲ研究シテ一般ノ法則ヲ求メル. ソレヲ得テカラ, 若シ混亂シタ複雜ナ法則ガアレバ之ヲ探ス.

***　私ノ 1899 年ノ講義デ公表シタ此ノ外挿入ハ間違ツテキルコトガワカツタ. 1901 年ノイングランド及ビウエールズノ人口ハ 32.5 百萬人デ, 1911 年ニハ 36.1 百萬人デアツタ.

m	1	2	3	4	5	10	20	30	50	100
t	119	257	416	598	751	1575	3505	6479	14141	32153

此ノ場合ニ $t=am^b$ ナル式ガ存在スルカ否カヲ調ベヨ.

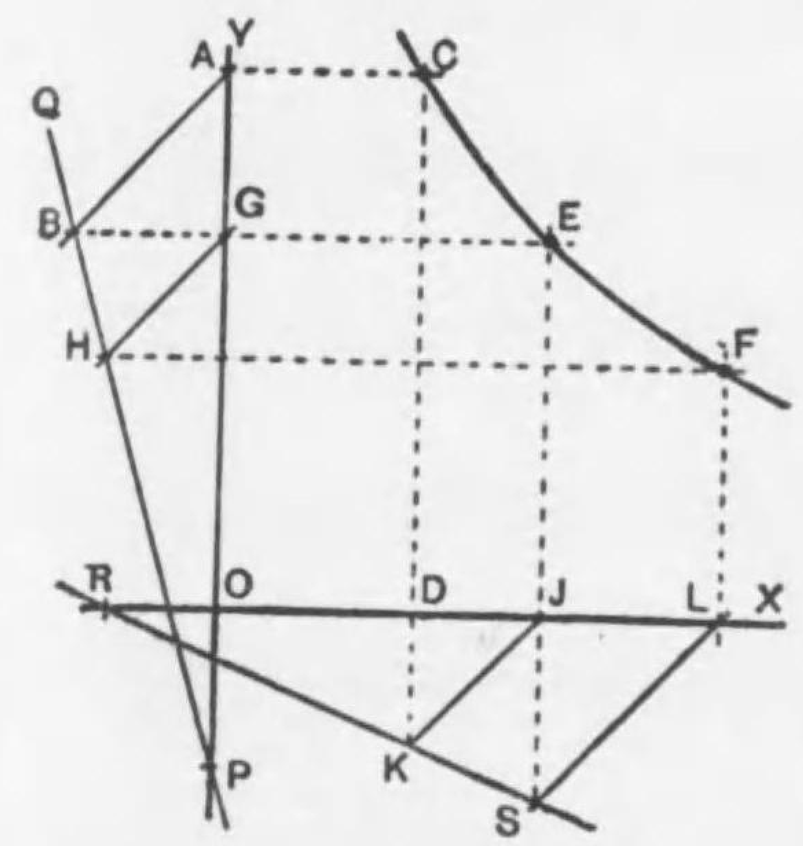
答 $t=119\,m^{1.175}$.

人間ヤ動物ノ總テノ種類ノ競爭ニ於テハ $t\propto m^{1.175}$ ナル關係ガアル事ヲ知ルノハ面白イ事デアル.

第十五章 重要ナ曲線

§79. 曲線ノ作圖

(1) 一枚ノ方眼紙ノ代リニ,丁定規ト三角定規トヲ備ヘタ製圖板ヲ使用スルカモ知レナイガ, 其ノトハキ第十四章デ述ベタ或ル曲線ノ次ノ性質ガ必要ニナル. OX ト OY(第18圖)トハ坐標軸デアル. 兩軸ニ夫々任意ノ點 R 及ビ P ヲトリ, R 及ビ P ニ於テ任意ノ二角 XRS 及ビ YPQ ヲ作ル. 任意ノ點 C ヲ取リ, C ヲ通リ水平線 CA 及ビ鉛直線 CK ヲ引ケ. 角 $BAO=45°$, 角 $KJD=45°$ ナラシメ,[*] B 及ビ J ヨリ射影シテ E ヲ求メヨ.[1] 同様ニシテ他ノ點[2]ヲ求メヨ. 點 C, E, F 等ハ一ツノ曲線



第 18 圖

$$y+a=c(x+b)^{-m},$$

ノ上ニ在ル. ココニ b ハ距離 OR デ, a ハ距離 OP デアル. 又角

---

* 角 BAO 及ビ DJK ハ 45° ニスル必要モナク, 又互ニ等シクスル必要モナイ事ハ容易ニ證明サレル. 若シ總テノ角 PAB, PGH ガ互ニ相等シク, 例ヘバ何レモ 60° デアツテ, 又總テノ角 RLS, RJK ガ互ニ相等シク, 例ヘバ何レモ 45° デアルトスレバ, 曲線ハ尙上述ノ法則ニ從フ.

(1) BG ヲ OY ニ垂直ニ立テ, SJ ヲ OX ニ垂直ニ立テ, BG ト SJ トノ交點ヲ E トスル.

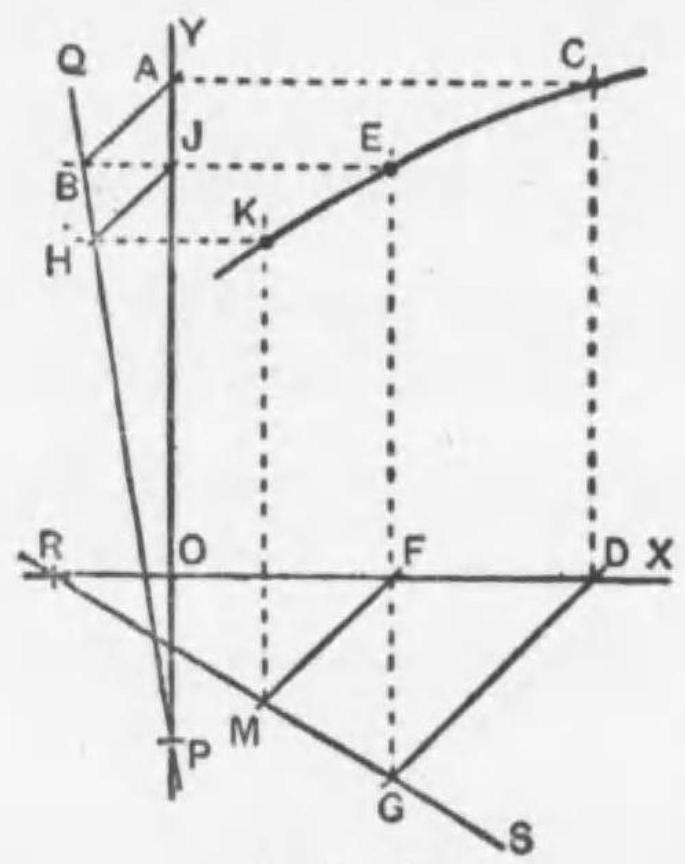
(2) 他ノ點トハ F,…… ヲ指ス. F 等ヲ求メルニハ, 他ニ全ク任意ニ C' ヲ求メテハ不可デアル. 今求メタ E ヲ前ノ C ノ如ク考ヘテ, EG ヲ水平ニ, ES ヲ鉛直ニ引キ(實際ニハ引ク要ナシ), G, S ヨリ夫々 GH, SL ヲ引キ(之ハ夫々 AB, KJ ニ平行ニ引ケバ可), HF, LF ノ交點ヲ F トスル. 以下同樣ニスル.

ハ $1+\tan QPY=(1+\tan XRS)$ デアルヤウナ角トスル.

又第19圖ニ於テ,C カラ CD 及ビ CA ヲ引ケ. 角 ODG 及ビ BAO ヲ夫々 45° ニスル. 點 E ハ G 及ビ B カラノ射影ニ依ツテ求メラレル. 點 C, E, K 等ハ總テ一ツノ曲線

$$y+a=c(x+b)^n,$$

ノ上ニ在ル.



第 19 圖

n ガ正デアルトキニハ,b ハ OR デアリ,a ハ OP デアル.

又 $1+\tan QPY=(1+\tan XRS)^n$.

サテ曲線ガ與ヘラレタトキ,ソノ曲線ガ $y=c(x+b)^n$ ノヤウナ法則ニ從フカ否カヲ見ルノハ,非常ニ容易デアル.

ソレニハ,今曲線 CEF(第18圖)ト軸 OX, OY トガ與ヘラレタモノト假定スル. OP ヲ零トセヨ. 卽チ P ノ代リニ,O カラ PQ ヲ出發サセル. CA, AB 及ビ BE ヲ前ノヤウニ引キ, E カラ J ニ射影スル. 角 OJK ヲ 45° ニシ, JK ト CD トノ交點ヲ K トスル. K ノヤウナ點ヲ他ニモ求メ,此等ノ點ガ一直線 SKR 上ニ在ルカ否カヲ見ヨ.

實際ニ於テ,a 又ハ b ノ何レカガ零デアルナラバ,問題ハ容易デアル. 然ルニ,若シ何レモ零デナイトスレバ,其ノ吟味ハ相當工夫ヲ要スル.

(2) 次ニ,今 x 及ビ y ニ就イテ觀測ヲ行ツテ,ソノ結果ガ $y=a+be^{cx}$ ニ從フカ否カヲ吟味シヨウトスルモノトスル. ソレニハ $X=e^{cx}$ ヲ計算シ,且ツ y ト X トヲ坐標トシテ作圖セヨ. ソコデ

吾々ハ $y=a+bX^c$ ヲ吟味シナケレバナラヌガ,之ハ丁度上ノ場合デ論ジタ所デアル.

$y=a+be^{x+c}$ ハ $y=a+be^{x}$ ヨリ尚一層一般ノ場合デハナイトイフ事ハ注意スベキデアラウ.

式 $y=b(e^{x}+c)^n$ ハ, $X=e^{x}$ ナルトキ, $y=b(X+c)^n$ トナルニヨリ, $y=b(e^{x}+c)^n$ ヲ吟味スル事ハ容易デアルデアラウ.

例 1. 次ノ觀測シタ量ハ式 $y=a+bx^n$ ニ從フモノト信ゼラレル. 此等ヲ方眼紙上ニ作圖セヨ. 其等ノ點ノ間ニ最モ滑ラカニ横ツテキル曲線ヲ描ケ. CEK(第19圖)ヲ其ノ曲線トスル. 此ノ場合ニハ點 R ハ O ニ在ル. 任意ノ角 XRS(XOS ニ一致スル)ヲ作レ. 曲線上ノ一點 C カラ水平ニ CA, 鉛直ニ CD ヲ引ケ. 角 $OAB=45^\circ$ 及ビ $ODG=45^\circ$ トセヨ. G カラ F 及ビ E ニ鉛直ニ射影シ, $OFM=45^\circ$ ナラシメヨ. E カラ J 及ビ B ニ水平ニ射影セヨ. $OJH=45^\circ$ トセヨ. 此ノ方法ヲ繰リ返シテ,點 $B, H,$ 等ヲ求メヨ. 若シ,此ノ式ガ眞デアルナラバ, $B, H,$ 等ハ一直線上ニナケネバナラナイ.

x	336.2	465	587.4	628	813
y	651	871	961	1011	1210

此等ノ點ノ間ニ最モ滑ラカニ横ハル直線ヲ引イテ,P ヲ求メル. 距離 OP ハ $-a$ デアル.

答 $y=210+2.21x^{0.914}$.

例 2. 瓦斯機關ノ汽力圖ニ於テ,壓力 p ト體積 v トニ就キ,次ノ測定ガ行ハレタ. 其ノ法則トイフノハ pv^n ガ一定デアルヤウニ考ヘラレル. $\log p$ ト $\log v$ トヲ坐標トシテ作圖シ,之ヲ吟味セヨ. 若シ,諸君ガ一直線ヲ發見シナイナラバ,ソレハ遊隙ノ誤ツタ測定ニ基ク所ノ v ニ一定ノ誤差ガアル事ニナル. 故ニ上ノ方法ニ依ツテ,

p	44.7	53.8	73.5	85.8	113.2	135.8
v	7.03	5.85	4.30	3.50	2.50	1.90

$$p=c(v+a)^{-n},$$

ナル式ヲ調ベヨ.

v ヲ第18圖ニ於ケル x ノ如ク水平ニ引キ,又 p ヲ鉛直ニ引ケ. O ニ於テ,點 P ヲ取リ,ソシテ示サレタヤウニ手續ヲ進メヨ.

答 S, K, 等ノヤウナ點ハ一直線上ニ在ル事ヲ知ル. 此ノ直線ヲ引ケバ,R ガ求メラレ,且ツ $OR=2.10$.

例 3. 前問ニ於テ,各々ノ v ヲ 2.10 宛増シ,之ヲ u ト名ヅケル. $\log p$ ト $\log u$ トヲ坐標トシテ方眼紙ノ上ニ作圖シ,且ツ關係式ヲ求メヨ.

答 $p(v+2.10)^{1.356}=900$.

例 4. 實驗室ニ於テ觀測シタ次ノ量ハ,次ノ式ニ從フカドウカ疑ハシイ.

$$y=a+be^{cx}.$$

x	0.5	0.7	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	3.730	3.912	4.325	4.709	5.242	5.953	6.927	8.213

先ヅ,e^x ノ各値ヲ計算シ,之ヲ X ト呼ブ. 次ニ y ト X トヲ坐標トシテ作圖シ最良ノ曲線ヲ描ケ. 第19圖ニ於ケルヤウニ手續ヲ進メテ, $OR=0$ トセヨ. OP ハ -3.2 デアル事ヲ知ル. 今私ハ曲線ニヨツテ補正サレタ y ト X トノ新ラシイ表ヲ書イテ, $\log(y+3.2)$ ト $\log X$ トヲ坐標トシテ作圖スルデアラウ. 此等ノ値ハ一直線ヲ決定シナケレバナラヌ.

答 $y=3.2+0.25\,e^{1.5x}$.

§80. 三點ヲ通ル曲線

若シモ三點ノミガ與ヘラレテ,而シテ曲線ヲ以テコレヲ結ベト言ハレタナラバ,而モソノ曲線ガ單純デナケレバナラナイト言フ事ノ外ハ其ノ性質ニ就イテ何モ知ラナイナラバ,私ハイツモ次ノ三ツノ式カラ選擇スル.

$$y=a+bx+cx^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=a+bx^n, \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$y=a+be^{cx}. \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

例題. 次ノ三點ヲ與ヘル.

x	1.5	3.5	5.0
y	6.24	16.45	27.07

(1),(2)又ハ(3)ヲ,此等三點ヲ通ル曲線ノ方程式トシ,其ノ常數ノ値ヲ求メヨ.

答 $y=1.54+2.284x+0.5643x^2, \cdots\cdots(1)$

$y=2.742+1.823x^{1.61}, \cdots\cdots(2)$

$y=-15.83+16.57e^{0.190x}, \cdots\cdots(3)$

(2)又ハ(3)ヲシテ三點ヲ通ラシメル爲ニハ,方程式ヲ解ク方眼紙ノ方法ヲ必要トスル. 例ヘバ比較的長タラシイ形ノ(3)ヲ取ル. e^x ヲ X ト名ヅケル. X_1, X_2 及ビ X_3 ヲ, x ノ三ツノ與ヘラレタ値ニ對應セシメ,又 y_1, y_2 及ビ y_3 ヲ y ノ三ツノ與ヘラレタ値トスル.

$$y_1=a+bX_1^c, \qquad y_2=a+bX_2^c, \qquad y_3=a+bX_3^c.$$

a ヲ除ク爲ニ邊々相減ジ, b ヲ除ク爲ニ之ヲ割レバ,

$$\frac{y_3-y_2}{y_2-y_1}=\frac{10.62}{10.21}=1.0402=\frac{X_3^c-X_2^c}{X_2^c-X_1^c}$$

分母ヲ拂ヒ, X_1^c デ割レバ,次式ヲ得ル.

$$e^{3.5c}-2.0402e^{2c}+1.0402=0.$$

試ミト方眼紙ノ使用トニヨツテ, $c=0.190$ ナル事ヲ知リ,而シテ $b=16.57$, $a=-15.83$ ナル事ヲ知ルハ容易デアル.

§81. 實驗式ノ使用ト其誤用

實驗ノ結果次ノ x ト y トノ對應數値ガ得ラレタ.

x	4	5	6	7	8	9	10	11
y	6.29	5.72	5.22	4.78	4.39	4.06	3.75	3.48
y'	6.28	5.66	5.15	4.72	4.35	4.05	3.78	3.55
y''	6.23	5.72	5.26	4.83	4.44	4.08	3.75	3.45

之ヲ方眼紙上ニ描キ,且ツ色々ナ方法デ吟味シテ見レバ,二ツノ實驗式,

$$y=\frac{57.12}{5.1+x}, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又ハ $$y=8.71\varepsilon^{-0.08445x},\qquad\cdots\cdots(2)$$

ノ中,實測値ヲヨリ正確ニ表ハシテキル公式ハ何レデアルカトイフコトヲ言フノハ困難デアル事ガ解カル. (1)ニヨツテ與ヘラレタ値ハ y' トシテ表記シ,(2)ニヨツテ與ヘラレタ値ハ y'' トシテ表記スル. 且ツ其ノ相違ハ兩公式ニ於テ同樣デアリ,如何ナル場合ニ於テモ其ノ相違ハ大キクナイ事ガ解カルデアラウ.

一ツノ實驗式ヲ發見シタ人ニトツテ,外挿入ノ爲ニ其ノ式ヲ用ヒル事ハ稀レデハナイ. 扨テ,若シ吾々ガ(1)又ハ(2)ヲ斯クノ如キ目的ニ用ヒルナラバ, $x=1$ 又ハ $x=20$ ニ對シテ y ヲ計算シ,答ニ於ケル相違ニ注意スル,

x	1	20
y'	9.36	2.28
y''	8.005	1.61

從ツテ,何レノ公式モ實驗ノ範圍ニ於テ,y ヲ計算スル事ニ對シテハ十分有效デアル. 又疑ヒモナク,多クノ目的ニ對シテ十分有效デアル. 併シ,外挿入ノ危險デアル事ハ明ラカデアル.

〔次ノ注意事項ハ學生ガ第十八章ニ達シタ後,ヨク諒解スル所デアラウ.〕

更ニ,(1)及ビ(2)ハ全ク異ナル法則ヲ表ハス.

(1)カラ $-\dfrac{dy}{dx}$ ハ y^2 ニ比例スル. 然ルニ(2)カラ $-\dfrac{dy}{dx}$ ハ y ニ比例スル.

故ニ,或ル人ガ自分ノ作圖シタ點ヲ滑ラカニ結ンデ,其ノ間ニ最モ滑ラカニ横ハル曲線ヲ描クキトニハ,其ノ滑ラカニスル法則ヲ知ル事ハ最モ重要デアル. 何トナレバ,若シ其ノ人ガ異ナル種類ノ曲線ヲ用ヒレバ,非常ニ異ナツタ結果ヲ得ルカラデアル. 其等ノ總テハ,或ル目的ニ對シテハ十分正確デアツテ,他ノ目的ニ對シテハ全然誤ル.

理論カラ何等ノ結論ヲ導キ出サナイトキニハ,實驗式ガ採用サレル. 而シテ其ノ公式カラ得タ推定ハ全ク誤ツテキルカモ知レナイ. 次ニ,吾々ガ其ノ事實ニ適應スル定理ヲ作ラウト欲スル假設ヲ持ツテキルナラバ,左樣スル事ハ非常ニ容易デアル事ハ屢々アル.

實驗式ガ危險デアルト言フノハ,勿論主トシテ $\dfrac{dy}{dx}$,又ハヨリ高次ノ微分係數ヲ求メル事ニ在ル.

何人モ,自分ノ觀測ヲ,曲線ヲ描イテソレニ依ツテ滑ラカニスルニハ,實際ニ實驗式ヲ用ヒルノト同樣ナ事ヲシテキル.

私ハ試ミタ事ハナイ. 併シ,§79 ニ於ケル練習問題ノ三ツノ公式(其ノ公式ハ總テ 1.5 ト 5 トノ間ノ x ノ任意ノ値ニ對シテ大方 y ノ殆ンド同ジ値ヲ,與ヘルノデアルガ)ハ 1 又ハ 10 ノヤウナ値ニ對シテハ, y ノ全ク異ナル値ヲ與ヘルト考ヘネバナラナイ.

第十六章　方眼紙·近似式·方程式

§82. 簡單ナ式ノ使用

研究ノ結果トシテ,yトxトヲ結ブ一ツノ式ヲ得タトキニハ,吾々ハ時トシテソレヲ近似的ナ**ヨリ簡單ナ式**ニヨツテ置キ代ヘヨウト試ミル.

例 1.
$$y=9.9+0.6167x+0.35x^2-\frac{1}{15}x^3. \quad \cdots\cdots(1)$$
ノ「グラフ」ヲ描ケ.

$x=0.5$ ト $x=3.0$ トノ間デ,上ノ式ニ最モ近似的ナ一次式ヲ求メヨ.

答 $y=9.7+1.14x.$ ……………(2)

勿論學生ハ自分デxノ各値ヲ取リ,各々ノ場合ニ於テyヲ計算シ,ソシテ方眼紙ノ上ニ(1)ノ「グラフ」ヲ描ク事ハ知ツテヰル.

ソレカラ其等ノ點ノ間ニ最モ滑ラカニ橫ハル直線ヲ知リ,從ツテ(2)ヲ求メル. 此ノ簡單ナ式ハ0.5ト3.0トノ範圍外ノxノ値ニ使用シテハナラナイ.

例 2. 支柱ノ理論ニ於テハ,私ハ
$$\frac{a}{1-bx} \quad ト \quad \frac{1}{\cos\sqrt{x}}$$
トガ恰カモ同ジデアルカノヤウニ使用サレ得ル爲ニ理論ヲ非常ニ簡單ニシタ. 事實,コレナクシテハ,理論ハ實際的ニ不可能デアツタノデアル.

今$\dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}$ヲyトセヨ. 0カラ0.9マデノxノ値ニ對シテyヲ計算シ,之ヲ表ニスル. yガ他ノ式,卽チ
$$y=\frac{a}{1-bx},$$
卽チ, $y-bxy=a$ デ近似的ニ表ハサレルカ否カヲ試ミナケレバナラナイ. 今若シ方眼紙上ニ點ノ坐標トシテyトxyトヲトツテ「グラフ」ヲ描クナラバ,卽チ若シxト$\dfrac{1}{y}$トヲ坐標トシテ「グラフ」ヲ描クナラバ,(近似的ニ)一直線ヲ得ナケレバナラナイ. 最良ノ直線ヲ選ビ,a, bヲ計算スル.

答 $a=1.003$, $b=0.471.$

例 3, §26ニ於テ,若シ年利率rノ複利法ニ於テ元利合計ガ元金ノ2

倍ニナル年數ヲnトスレバ,
$$n=\log 2\div\log\left(1+\frac{r}{100}\right)$$
デアル事ヲ知ツタ.

rノ種々ナ値,例ヘバ 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5ヲ取リ,各場合ニ於テnヲ計算セヨ.

次ニnトrトヲ結ブ單純ナ式ガ近似的ニ存在スルカ否カヲ見ルタメニ,他ノ場合ニ於テ試ミタヤウナ,色々ナ作圖方法ヲ試ミヨ. 若シ,諸君ガnト$\dfrac{1}{r}$トヲ坐標トシテ「グラフ」ヲ描クナラバ,其等ノ點ガ殆ンド一直線上ニ在ル事ヲ知リ,從ツテrガ5ヨリモ大デナイトキニハ,近似式
$$n=\frac{70}{r},$$
ヲ使用シ得ル事ヲ知ル. (尙又§113, 例5參照).

例 4. $y=1+\sqrt{1+x^2}$ ノ「グラフ」ヲ描ケ.

xノ如何ナル限定セル値ノ範圍ニ於テ,
$$y=1.23+0.98x$$
ヲ上式ニ等シイモノト考ヘテヨイカ.

答 $x=2$ カラ $x=10$ マデ,或ハソレ以上.

$x=2a$ ト $x=10a$ トノ間ニ於テ, $a+\sqrt{a^2+x^2}$ ヲ $1.23a+0.98x$ ニ殆ンド等シイト考ヘテ差支ヘナイ(第31頁參照)ノハ此ノ事カラ導カレル.

§83. 方程式ノ解法

x**ノ任意ノ方程式**ハ,タトヒ錯雜シテヰテモ,**解ク事ガ出來ル.**

例 1. 方程式
$$4.3x^{2.56}-5.4e^{-0.3x}+17x^{-3.4}-12=0$$
ヲ滿足スルxノ値ヲ求メヨ.

此ノ方程式ヲ解ク爲ニ,次ノ如ク置ク.
$$y=4.3x^{2.56}-5.4e^{-0.3x}+17x^{-3.4}-12.$$

xノ種々ナ値ヲ取リ,ソレニ對應スルyノ値ヲ計算シ,コレヲ坐標トシテ方眼紙ニ點ヲ打チ,其ノ「グラフ」ヲ描ケ. 此ノ「グラフ」ニヨリ$y=0$ヲ與ヘルxノ値ノ近似値ヲ得ル事ハ容易デアル.(1) $x=1.2$ヲ取ル事ニ氣付キ, $y=0.280$ナル事ヲ知ル. 次ニ $x=1.25$ ヲ試ミテ, $y=-0.140$ナル事ヲ知ル. 故ニ,xノ正シイ値ハ此ノ兩者ノ間デアル. 此等ノ點ヲ大キイ目盛

デ作圖シテ直線デ結ビ,$x=1.23$ ハ大體ニ正シイ事ヲ知リ,又實驗上此ノ値ハ總テノ實際ノ目的ニ對シテ十分ニ正シイ事ヲ知ル. 1.231 ト 1.229 トヲ試ミ,此ツソノ結果ヲ更ニ大ナル目盛デ「グラフ」ニ描イテ,一層接近シタ近似値サヘモ得ル事ガ出來ル. 而シテ,事實,斯樣ナ方程式ヲ解クニ要スル正確サト云フモノハ際限ガナイ. 併シソレハ計算ニ用ヒル表ニ正確サガ缺ケテキル事ニ依ル. (絕對ニ正確ナ表ガアルモノナラバ解モ正確デアル.)

若シ y ヲ零ナラシメル x ノ値ガ數個アルナラバ,勿論其等モ亦答デアル. 方程式ヲ滿足スル x ノ各々ノ値ヲ方程式ノ**根**ト言フ.

例 2. 方程式 $x^2-5.11x+5.709=0$ ハ他ノ方法デ容易ニ解ク事ガ出來ル.(2) 併シ學生ハ之ヲ方眼紙ヲ用ヒル方法ノ練習ノ一例トシテ解カネバナラナイ.

$y=x^2-5.11x+5.709$ トシ, x ノ次ノ各値ヲ取リ, y ノ値ヲ計算シタ.

x	0	1	1.5	2.0	2.5	3	3.5	4	5
y	5.709	1.599	0.294	−0.511	−0.816	−0.621	0.074	1.269	5.159

OX ト OY トヲ軸トシ,此等ノ値ヲ坐標トシテ方眼紙上ニ作圖スレバ,一ツノ曲線ヲ得ル.

此ノ曲線ハ二點 P, Q ニ於テ OX ヲ截ル. 從ツテ此ノ方程式ニハ二根 OP, OQ ガアル事ニ注意セヨ.(3)

---

(1) 一般ニ一元方程式　$f(x)=0$　ヲ「グラフ」デ解クニハ,

之ヲ
$$\begin{cases} y=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

ノ二ツニ分解シ, (1) ノ「グラフ」ヲ描ク. 之ガ x 軸ヲ截ル點, 卽チ (2) ト交ル點ノ橫坐標ハ求メル根デアル.

(2) 之ハ一元二次方程式デアルカラ,根ノ公式ヲ用ヒテ何程デモ正確ナ値ヲ求メルコトガ出來ル.

(3) ココニ示シテアルノハ基礎的模式的ノ方法デアルガ,實際ニハ與方程式ヲ
$$\begin{cases} y=x^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y-5.11x+5.709=0\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

ニ分解シ, (1) ノ曲線(標準拋物線デアツテ,直チニ描ケルシ,其ノ定規ヲ作ツテオイテモヨイ) ヲ作リ,之ト (2) ノ直線トノ交點ノ橫坐標ヲ讀メバヨイ.

前問ノヤウニ, $x=1.64$ 又ハ 1.66 及ビ $x=3.45$ 又ハ 3.47 ニ近迫シタ近似値ヲトリ,二ツノ根ハ 1.65 及ビ 3.46 デアル事ヲ知ル. 普通ノ方法デ方程式ヲ解イテ(第五章參照),此等ト同ジ値ヲ求メ得ル.

三次方程式デモ解ク事ノ出來ル進ンダ學生ハ幾人キルカ. 實際ノ問題ニ於テハ,任意ノ方程式ヲ何デモ解カネバナラナイ. 而シテ今ヤ吾々ハ,欲スルママノ正確サデ之ヲナス方法ヲ知ツタノデアル.

例 3.
$$5.3e^{0.104x}\sin^2 0.8x+0.78x^{1.52}\cos x-2.126=0$$
ヲ滿足スル x ノ値ヲ求メヨ.

$0.8x$ ハ「ラディアン」ヲ表ハシテキテ,之ニ 57.296 ヲ乘ジテ度ニ直サナケレバナラヌ事ヲ,學生ハ記憶セネバナラヌ.　**答** $x=0.74$.

例 4.
$$\tan x=2.46x$$
ヲ滿足スル x ノ値ヲ求メヨ. 今
$$y=\tan x-2.46x,$$
トシ,手當リ次第ニ x ノ數個ノ値ヲ取リ,時々方眼紙ニ訴ヘテ見テ,速カニ近似値ヲ得ル事ガ出來ル. 勿論, x「ラディアン」ノ角ハ $57.296x$ 度デアル.

x	y
1	−0.903
1.5	+大
1.3	0.4038
1.2	−0.381
1.25	−0.066
1.26	+0.015

左ノ表ノ水平線ハ,推察ニ於テ自分ヲ助ケル爲ニ,私ガ方眼紙ニ訴ヘタ所ノ計算ノ場所ヲ示シテキル.　**答** $x=1.258$.

例 5. 各々ノ場合ニ於テ,次ノ方程式ヲ滿足スル x ノ値ヲ求メヨ.

$2x^{2.5}-5x-8=0,$　**答** $x=2.55$.

$x^2-10\log_{10}x-3=0,$　**答** $x=2.7$.

$x^3-2x^2-400=0.$　**答** $x=8.10$.

例 6. 方程式 $x^3-15x^2+61x-75=0$ ヲ滿足スル x ノ三ツノ値ヲ求メヨ.　**答** 3, 2.822, 9.178.

例 7. 次ノ方程式ヲ解ケ.
$$\frac{1}{5}\sqrt{x}+\log_{10}x=0.8558.\qquad \textbf{答}\ x=3.162.$$

例 8.
$$\sin 2x+5\sin x+3x=1.38,$$
ヲ滿足スル x ノ値ヲ(「ラディアン」デ)求メヨ.　**答** $x=0.1386$.

例 9. 第十五章ニ於テ,他ノ問題ヲ解ク爲ニ,吾々ハ

$$e^{3.5c}-2.0402e^{2c}+1.0402=0$$

ナル方程式ヲ滿足スル c ノ値ヲ求メナケレバナラナカツタ. c ヲ求メヨ.

答 $c=0.190.$

第十七章 極大及極小

§84. 極大及極小ノ問題

例 1. 10 ヲ二部分ニ分チ,其ノ積ヲ極大[1]ナラシメヨ.

解 一部分ヲ x トスレバ,他ノ部分ハ $10-x$ デアル. 其ノ積ヲ y トスレバ,

$$y=x(10-x),\quad 即チ\ y=10x-x^2.$$

x ニ種々ナ値ヲ入レテ,之ニ對應スル y ノ値ヲ計算シ,之ヲ方眼紙上ニ「グラフ」ニ描ケバ,y ノ極大値ハ明ラカニ $x=5$ ノトキニ與ヘラレル.

例 2. 一數ト其ノ逆數トノ和ガ極小トナルノハ,如何ナルトキカ.[2]

解 其ノ數ヲ x トシ,

$$y=x+\frac{1}{x}.$$

ガ極大トナルトキヲ考ヘル. x ニ次ノ各値ヲ入レ,各々ノ場合ニ於テ,之ニ對應スル y ヲ求メル.

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	2
y	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{12}$	2	$2\frac{1}{12}$	$2\frac{1}{2}$

「グラフ」ヲ描イタ結果,$x=1$ ガ答デアル事ガ解カル.

例 3. 小包郵便デ送リ得ル最大ノ圓壔形荷物ハ如何. 但シ郵便規則デハ長サト周トノ和ガ6呎ヨリ大キクテハナラヌトイフ.

解 今圓斷面ノ半徑ヲ x トスレバ,其ノ長サハ $6-2\pi x$ デアル. 從ツテ其ノ體積ハ,

$$v=\pi x^2(6-2\pi x).$$

x ノ如何ナル値ガ v ヲ極大ナラシメルカ. $x=0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8$ 等ヲ取

(1) カヤウナ簡單ナ式ニ於テハ極大或ハ極小ハ一ツシカナイノデ, 從ツテ極大•極小ハ卽チ最大・最小トナル. 卽チ實際問題トシテノ最大•最小ヲ求メル問題ニ適ヘル解ヲ得ル.

(2) 此等ノ問題ハ第二十二章ニ於テ,微分學ノ應用トシテ, 再ビ一般的ニ取扱ハレル.

ツテ,各々ノ場合ニ於ケル v ヲ計算シ,之ヲ方眼紙上ニ「グラフ」ニ描イテ, $x=0.636$ 呎デアル事ヲ知ル.

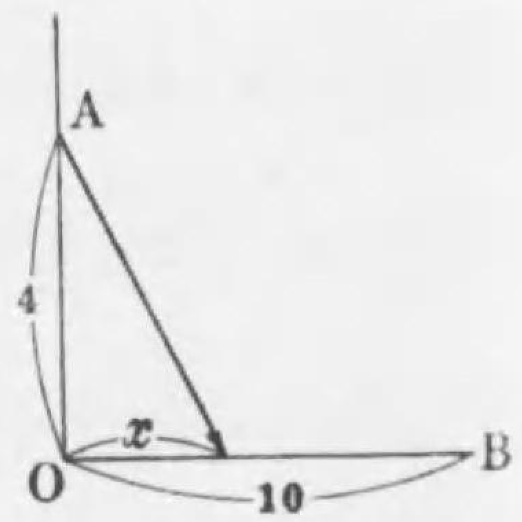
例 4. 10 ヲ二部分ニ分チ,其ノ一部分ノ自乘ノ 3 倍ト他ノ部分ノ自乘ノ 4 倍トノ和ガ極小デアルヤウニセヨ.

解 一部分ヲ x トスレバ,他ノ部分ハ $10-x$ デアル.

$$y=3x^2+4(10-x)^2.$$

ガ極小トナルトキヲ求メル. 計算シ,「グラフ」ヲ描イテ,其ノ結果トシテ $x=5.71$ ヲ得ル. 從ツテ他ノ部分ハ 4.29 デアル事ヲ知ル.

例 5. 或ル人ガ海上ノ一點 A ニ居ル. A カラ直線ヲナス海岸ノ最モ近イ點 C マデハ 4 哩離レテヰル. 今其ノ人ハ此ノ最近點カラ海岸ニ沿ウテ 10 哩離レタ地點 B ニ行カウト思ツタ. 極小ノ時間デ B ニ到著スル爲ニ彼ガ上陸スベキ點 D ヲ求メヨ. 但シ彼ハ一時間ニ 3 哩漕ギ,又一時間ニ 4 哩歩ムモノトシ,一ツノ場合デ舟ヲ棄テテ上陸スルト全ク同樣ニ,他ノ場所ニ於テモ上陸スル事ガ出來ルモノトスル.



〔補〕 第 19 圖

解 ココニ $AC=4$, $CB=10$ デアル. 今 $CD=x$ トスレバ,

$$AD=\sqrt{16+x^2} \quad 及ビ \quad DB=10-x.$$

デアル. 故ニ總時間ハ

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{16+x^2}+\frac{1}{4}(10-x).$$

デアル. x ノ種々ナ値ニ對シテ, y ヲ計算セヨ. 之ヲ「グラフ」ニ描イテ $x=4.535$ 哩ハ極小ノ時間ヲ與ヘル事ヲ知ル.

例 6. 與長ノ角梁ノ强度ハ,或ル特殊ナ方法デ荷重シ,且ツ支持スルトキニハ,其ノ截斷面ノ幅ト其ノ厚サノ自乘トノ積ニ比例スル. 若シ,或ル圓壔形ノ材木ガアツテ,其ノ直徑ガ 15 吋アルナラバ,ソレカラ切取ラレル最大强度ノ梁ノ大サヲ求メヨ.

解 其ノ幅ヲ x トスル. 其ノ圓ニ內接スル矩形ヲ描ケバ,其ノ一邊ノ長サハ $\sqrt{225-x^2}$ デアルコトハ解カルデアラウ. 故ニ其ノ强度ハ,次式ノ y ガ極大デアルトキニ極大デアル.

$$y=x(225-x^2),\ 卽チ\ y=225x-x^3.$$

x ノ種々ナ値ニ對シテ y ヲ計算シ,之ヲ「グラフ」ニ描ケバ,其ノ强度ハ幅 x ガ 8.66 吋デ,厚サガ 12.25 吋デアルトキ極大デアル事ガ解カル.

例 7. 與長ノ角梁ノ剛度ハ,或ル特殊ナ方法デ荷重シ,且ツ支持スルトキニハ,其ノ截斷面ノ幅ト厚サノ三乘トノ積ニ比例スル. 若シ,或ル圓壔形ノ材木ガアツテ,其ノ直徑ガ 15 吋デアルナラバ,ソレカラ切取ラレル最大剛度ノ梁ノ大サヲ求メヨ.

解 厚サヲ x トスレバ,其ノ幅ハ $\sqrt{225-x^2}$ デアル. 今

$$y=x^3\sqrt{225-x^2}$$

ガ極大デアルコトヲ欲スルノデアル. x ノ種々ナ値ニ對シテ y ヲ計算シ,之ヲ「グラフ」ニ描ケバ,其ノ剛度ハ厚サ x ガ 13 吋デ,幅ガ 7.5 吋デアルトキニ極大デアルコトヲ知ル. 此ノ結果ト例 6 ノ結果トノ差違ヲ觀察セヨ.

例 8. 或ル汽船ガ x 節ノ速力デ航海スルトキニ,賃銀,船價ノ下落,資本金ノ利息,糧食,石炭等ノ費用ノ總額ガ一時間ニ $4+0.001x^3$ 磅デアルトイフ. 1000 浬ノ航海ニ於テ,總費用ヲ極小ニスル爲ニハ何程ノ速力ヲ出スベキカ.

解 ココニ其ノ時間數ハ $\frac{1000}{x}$ デアル. 故ニ其ノ總費用ハ

$$\frac{1000}{x}(4+0.001x^3),\quad 卽チ\quad 1000\left(\frac{4}{x}+0.001x^2\right).$$

デアル. 今 $$y=\frac{4}{x}+0.001x^2$$

トオキ, x ノ種々ナ値ニ對シ, y ヲ計算シ,「グラフ」ヲ描ケ.

答 12.60 節.

例 9. 或ル河流ノ水ノ速力 v ハ毎時 4 哩デアツテ,流レニ遡行スル汽船ノ水ニ對スル相對的速力ヲ x トシ,又石炭ヲ合メテノ汽船ノ一時間ニ就イテノ總費用ガ

$$0.5+0.0003x^3$$

デアルナラバ, 100 哩ノ航行ノ費用ヲ極小ニスル爲ニハ,速力 x ヲ如何ニスベキカ.

解 汽船ノ岸ニ對スル相對的速力ハ $x-v$ デアツテ,航行ノ時間ハ $\frac{100}{x-v}$ 時デアル. 故ニ航行ノ費用ハ

$$\frac{100(0.5+0.0003x^3)}{x-v},\ 即チ\ \frac{100(0.5+0.0003x^3)}{x-4}$$

デアル．今

$$y=\frac{0.5+0.0003x^3}{x-4}.$$

トオキ，x ノ種々ナ値ニ對シテ y ヲ計算シ，「グラフ」ヲ描ケバ，最良ノ x ハ約 8.5 デアル事ヲ知ル．即チ，汽船ノ岸ニ對スル相對的速力ハ毎時 4.5 哩デアル．

此ノ種々ノ練習問題ハ，一般ニ代數的ニ解ク事ガ出來ル．（第二十二章參照）．併シ，此ノ「グラフ」ニ依ル解法モ亦常ニ賴ミトスベキ方法デアル．ソレハ吾々ニ最良ノ速度ガ固守サレナイトキノ餘分ノ損失ガ何デアルカヲ教ヘ，又多クノ場合餘分ナ損失ハ餘リ大キクハナイトイフ事ヲ教ヘテ呉ル．

例 10. 海底電信「ケーブル」ニ於テ，銅線ノ直徑ヲ d トシ，ペルシャ「ゴム」ノ被覆ノ直徑ヲ D トスレバ，發信信號ヲ讀取リ得ル距離ハ

$$y=d^2\log\frac{D}{d},$$

ガ大キクナルト共ニ大キクナル．D ヲ 10 トシ，d ノ種々ナ値ニ對シテ y ヲ計算シ，之ヲ方眼紙上ニ描ケ．d ノ如何ナル値ガ最モヨロシイカ．此ノトキ，常用對數ヲ用ヒル事ガ出來ル事ハ十分明ラカデアル．

答 $d=6.065$.

第十八章　微積分ノ概念

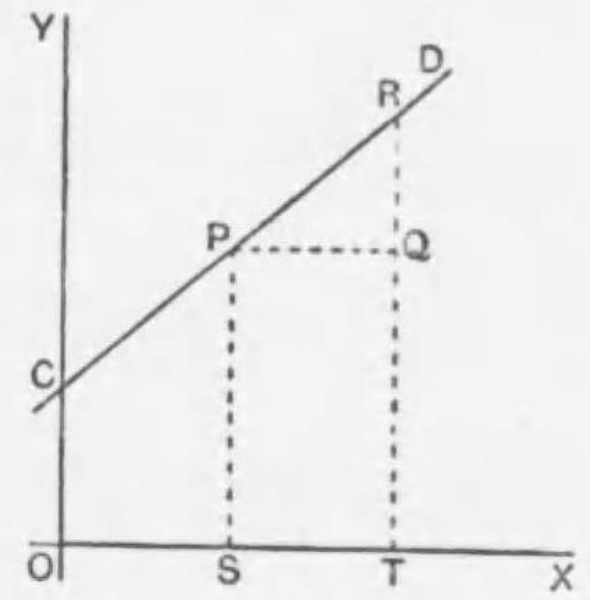
§85. 直線ノ勾配

§60 ニ於テ，$y=a+bx$ ハ直線デアル事ヲ知ツタ．

b ヲ此ノ直線ノ**勾配**ト言フ．若シ，x ガ 1 ダケ增セバ，y ハ b ダケ增ス事ヲ知ツタ．

CD ヲ直線トスル．距離 OC ハ a ヲ表ハス．P 及ビ R ハ直線上ノ二點デアル．而シテ，若シ PQ ガ 1 デアルナラバ，QR ハ b デアル．b ハ水平ノ長サ 1 ニ對スル上昇デアル．

吾々ガ，道ガ $\frac{1}{21}$ 上ル，又ハ 20 ニ對シテ 1 上ルト言フトキニハ，坂道ニ沿ウテ 20 呎行ク間ニ 1 呎上ル事ヲ意味スル事[(1)]ヲ注意セヨ．故ニ $\frac{1}{20}$ ハ水平線ニ對スル道ノ傾キノ角ノ正弦デアル．今ココデ言フ勾配ハソレト異ナル．ソレハ角 RPQ ノ正切デアルカラデアル[(2)]．［正弦トカ，正切トカノ言葉ノ意味ニ關シテハ §34 ヲ參照セヨ．］x ノ値ニ從屬スル値ヲ有スル一數 y ヲ求メレバ，y ノ增加ノ x ノ增加ニ對スル相對的割合ハ一



第 20 圖

(1) 此ノ道路ノ傾斜ハ分子ヲ 1 ニシタ分數デ表ハスノガ普通デ，從ツテ其ノ大小ハ分母ノ大小ニ反對スル．併シ，此ノ記載法ハ計算ニ不便デアルノデ，我ガ國ノ鐵道ハ此ノ數年來分母ヲ常ニ 1000 ニシタ分數ヲ用ヒ，分子ノ大小ヲ以テ勾配ノ大小ヲ比較スル．故ニ鐵道省ノ舊制度デハ分母ノミヲ言ツテキタガ，新制度デハ分子ノミヲイフ慣デアル．

(2) 道路ノ傾斜ヲ言フニモ，勾配ハ正切デアルベキ筈デアル．併シ，小ナル角ニ就イテハ其ノ正切ハ正弦ニ近似的ニ等シイ（88 頁脚註(1)又ハ第 9 圖參照）．而モ道路ノ傾斜デハ水平距離ハ測リ難イノデ正弦ヲ用ヒルニ過ギナイ．

定デアツテ,ソレハ實ニb,即チ直線ノ勾配デアル事ヲ觀ル. 此ノ割合ヲ表ハス記號ハ$\frac{dy}{dx}$デアル.(1) 之ハ一ツノ記號デアツテ,$\frac{d\times y}{d\times x}$ヲ意味スルノデハナイ事ニ注意セヨ.

又「$y=a+bx$ デアルナラバ$\frac{dy}{dx}=b$ デアル」トイフ事,及ビ「$\frac{dy}{dx}=b$ デアルナラバ,$y=A+bx$ デナケレバナラナイ」トイフ事ハ,之ヲ思ヒ出スヤウニ努メヨ. ココニ,A ハ或ル常數デアル.

例題. $4x+3y=7$ デアルトキ, $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ.

ココニ, $y=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}x$ デアルカラ,從ツテ $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{3}$.

サテ,若シ或ル道路ガ全ク一定ノ勾配デアルナラバ,此ノ勾配ヲ測ル事ハ容易デアル. 例ヘバ道路ガ水平ニ10呎ノ長サニ對シテ1呎上ル,或ハ20呎ニ對シテハ2呎,30呎ニ對シテハ3呎上ルモノトスルナラバ,$\frac{dy}{dx}$ハ 0.1 デアル. 併シ,若シ道路ノ勾配ガ連續的ニ變リ,而カモ吾々ガ或ル特殊ナ場所ニ於ケル勾配ヲ知ラウト思ヘバ,實際ニ若干ノ非常ニ小サイ距離ヲトツテ,其等ノ平均ノ勾配ヲ測ルノミデアル.

§86. 曲線ノ勾配

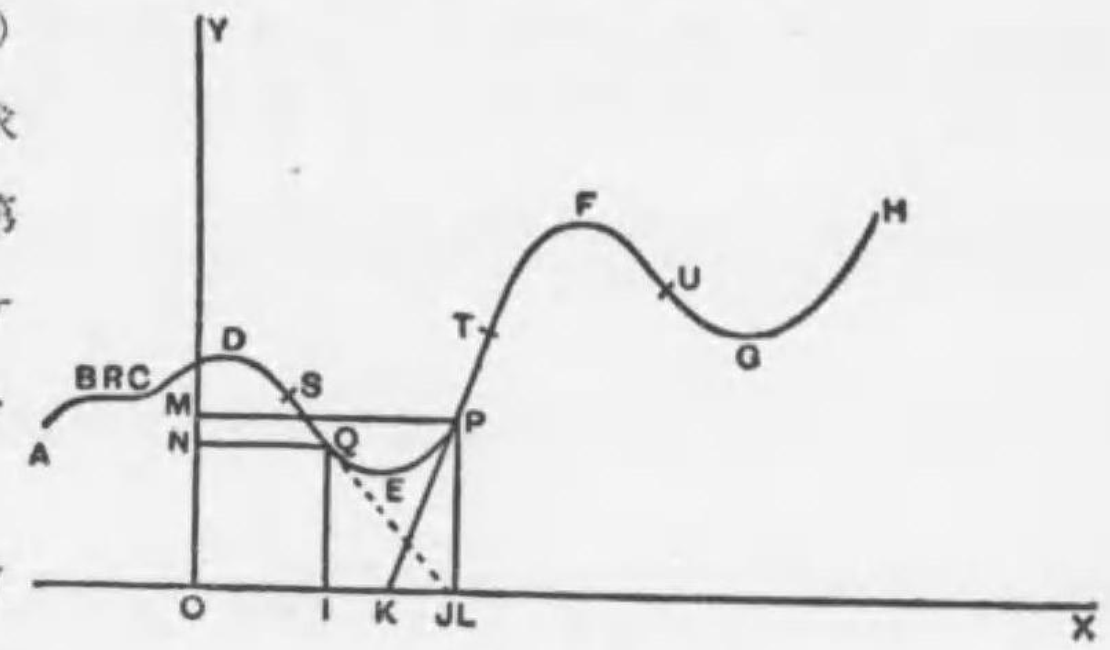
第21圖ノ曲線ニ於テ, AB, CD, EF, GH ノ各部分ニ於テハ正ナル勾配(x ガ増ストキニ y モ増ス)ガアル. 又 DE 及ビ FG ナル部分ニ於テハ負ナル勾配(x ガ増ストキニ y ガ減ズル)ガアル. D 及ビ F ニ於テハ勾配ハ零デアル. ココデyハ極大値ニ達スルト言フ. 又 E 及ビ G ニ於テモ零デアル. ココデyハ極小値ニ達スルト言フ. 又Rニ於テモ零デアルガ,併シ此ノ點ハ極大デモ極小デモナイ.(2) 一點ニ於ケル曲線ノ勾配ハ其ノ點ニ於ケル曲線ノ切

(1) カヤウナ場合ニ d, 或ハ次ニ出ルヤウニギリシヤ文字ノ d 即チ δ 等ヲ用ヒルノハ「微分」(differential)ノ頭文字ニ依ツタモノデアル.

(2) R ハ反曲點(point of inflexion)ノ一種デアル.

線ノ勾配デアルト言フ事ハ明ラカデナケレバナラヌ.

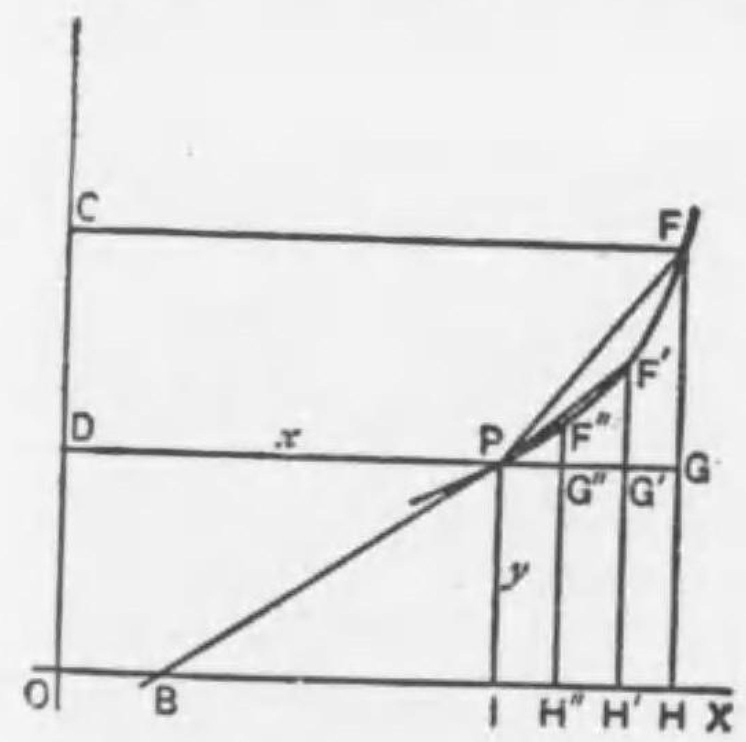
今點 P(第21圖)ニ於ケル勾配ヲ求メヨウトスル. 第22圖ヲ,點 P ニ於ケル曲線ノ廓大圖ト考ヘヨ.



第 21 圖

若シPD即チOIヲxトシ,PIヲyトスレバ,他ノ一點 F ニ於テハ FC 即チ OH ヲ $x+\delta x$ トシ, FH ヲ $y+\delta y$ トスル. 學生ハ δx ハ x ノ僅カナ増加ヲ示ス新ラシイ一種ノ記號デアル事ヲ注意シナケレバナラナイ. 之ハ量 δ ト量 x トノ積ヲ意味スルノデハナイ. カクスレバ PG ハ δx デアリ, FG ハ δy デアル. 從ツテ$\frac{FG}{PG}$, 即チ$\frac{\delta y}{\delta x}$ハ P カラ F マデノ平均ノ勾配デアツテ,之ハ實際ニ $\tan FPG$ デアル.

次ニ, F ヲ P ニ近ヅケテコレヲ F' トシ,更ニ近ヅケテ F'' トセヨ. 各々ノ場合ニ於テ,平均ノ勾配ハ水平線ト FP 又ハ $F'P$ 又ハ $F''P$ トニヨツテ作ラレル角ノ正切デアル. 併シ,δy 及ビ δx ガ限リナク次第ニ小サクナルト考ヘラレルマデハ,$\frac{\delta y}{\delta x}$ ヲ P ニ於ケル實際ノ勾配ト呼ブ事ハ出來ナイ.



第 22 圖

F ト P, 或ハ F' ト P, 或ハ F''

トPトヲ直線デ結ベ．直線 PF 又ハ PF' 又ハ PF'' ハ，F 又ハ F' 又ハ F'' ガ P ニ漸次接近スルニ從ツテ，P ニ於ケル切線ニ次第ニ近ヅク．δx ガ漸次小サクナツテ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ガ極限値ニ到著シタトキニハ，此ノ極限値ヲ $\frac{dy}{dx}$ ナル記號デ表ハシテ區別シ，P ニ於ケル曲線ノ切線ヲ PB トスレバ，此ノ極限値ハ明ラカニ $\tan PBX$ デアル．

如何ナル人デモ，任意ノ曲線ニ與ヘラレタ點ニ於テ極メテ正確ニ切線ヲ引ク事ハ不可能デアル．併シ，若シ出來レバ，其ノ人ハ其ノ點ニ於ケル $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メル事ハ容易デアラウ．(tangent ト言フ言葉ヲ二ツノ異ナル事ニ使用スル事ハ不本意デアル．[1]) $\frac{dy}{dx}$ ハ曲線ノ切線ガ水平線トナス角ノ正切デアル．

第21圖ニ於テ，P ニ於ケル勾配ハ $\tan PKX$ デアリ，從ツテ正デアル．Q ニ於ケル勾配ハ $\tan QJX$ デアリ，從ツテ鈍角ノ正切デアルカラ負デアル．

第21圖ニ於テ，若シ $PL=y$ ガ，例ヘバ**人口**デアリ；$OL=x$ ガ或ル日附カラ後ノ期間ヲ意味スルナラバ，P ニ於ケル勾配 $\frac{dy}{dx}$ ハ年々ノ人口增加ノ割合デアル．此ノ割合ガ $\tan PKL$，卽チ勾配ニヨツテ表ハサレテキル所ノ目盛ハ，容易ニ求メラレル．何トナレバ，其ノ割合ハ次ノ通リデアルカラデアル．

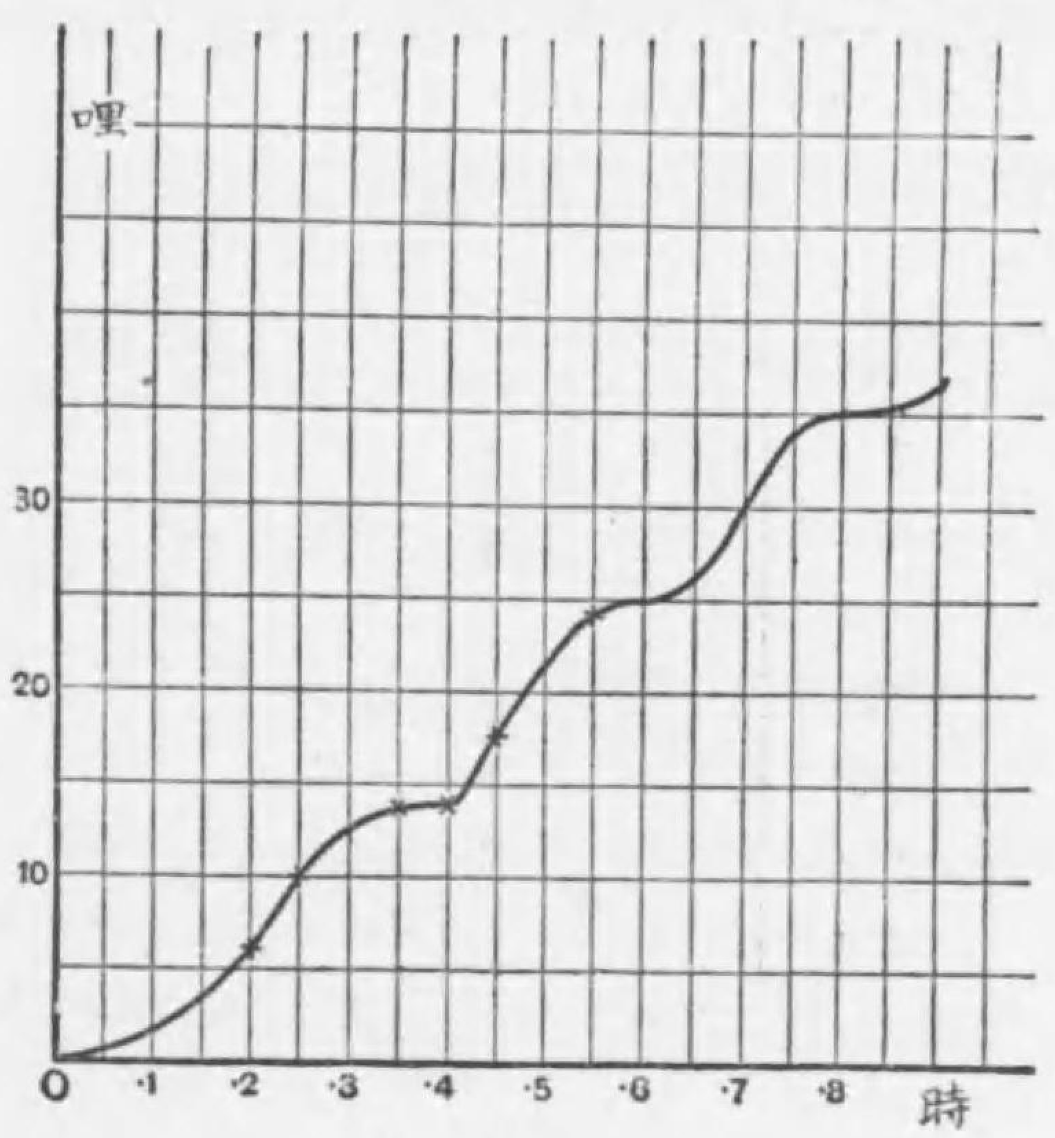
$$\frac{PL\text{ ニヨツテ表ハサレタ人口}}{KL\text{ ニヨツテ表ハサレタ期間}}.$$

§ 87. 列車運行ノ問題

ユーストンヲ發シタ汽車ガ t 時間後ニ s 哩ノ距離ノ地點ニ到著シタトスレバ，其ノ運動ヲ如何ニ研究スベキデアルカ．若シ，ブラッドショーノ鐵道案内者ガ，若干ノ停車場ニ到著スル時刻ノミデハナク，例ヘバロンドントノーサムプトントノ間ノ50箇所ニ到著スル時刻ヲ知ラセタトスルナラバ，其ノ記錄ハ何カ次ノヤウナモノデアラウ．唯學生ハ此ノ上一層多クノ記入ヲ想像スルカモ知レナイガ，半哩毎ノ記入ヲシテモ此ノ如キモノデアルデアラウ．

[1] 原語デハ切線モ正切モ共ニ tangent ナル語ヲ用ヒルカラ，本節ノヤウニ兩語ヲ同時ニ用ヒネバナラヌ際ニハ困ルノデアルガ，邦語ニハ此ノ事ハナイカラ，此ノ一文ハ邦文ノ本書ニハ不用ナ事デアル．

時　刻	ユーストンヲ去ツテカラノ時間 t 時間	ユーストンカラノ距離 s 哩
時分	時	哩
10.20	0	0
10.32	0.2	6
10.35	0.25	10
10.40	0.33	14
10.44	0.40	14
10.47	0.45	18
10.53	0.55	24
等	等	等



第 23 圖

s ト t トヲ第 23 圖ノヤウニ方眼紙上ニ「グラフ」ニ描ケバ,此ノ曲線ノ勾配ハ到ル所汽車ノ速サヲ表ハシテキル事ハ明ラカデアル. ユーストンヲ出テカラ速サガ如何ニ早クナツテキルカヲ見ヨ. 途ニ $s=5$ 哩カラ $s=11$ 哩マデハ,速サハ殆ンド一定デアルガ,後減ジテ $s=14$ 哩ニ於テハ零トナル. 實際,汽車ハ停ツタ. ソレカラ再ビ速力ガ増シテ,後ハ増減ガアツテ途ニ $s=24$ ニ於テ一哩ノ徐行ガアルノヲ見ル.

若シ,汽車ガ歸ツテクルト考ヘ,之ヲ描キ出スナラバ,勿論速度ガ負デアルカラ,勾配ハ負デアル.

例 1. 若シ s ト t トノ「グラフ」ヲ注意深ク作圖スルナラバ,各點ニ於テ細心ノ注意ヲ以テ引ク事ガ出來ル切線ノ勾配ハ速サヲ示ス. 併シ,切線ヲ正確ニ引ク事ハ容易デハナイ. 次ノ方法ハ一層ヨイノデアル. 先ヅ,注意深ク點ヲ打テ. 次ニ作圖サレタ點ヲ通ル曲線ヲ描ケ. t ノ等距離ノ値ニ對スル s ノ値ヲ表記セヨ. ココニ特殊ナ場合ガアル. 新ラシイ機構學ニ於テハ,總テノ點ニ於テ其ノ加速度ガ如何程デアルカヲ知ル事ハ或ル目的ニ對シテ必要デアツタ. 一ツノ骨組ヲ描キ,0 トシテトツタ時刻カラ時間ヲ置イテ點ノ位置ヲ印ヅケタ. 此ノ表ニ於テ,私ハ測定ノ基點カラノ各瞬間ニ於ケル點ノ位置ヲ與ヘ,コレヲ s 呎ト呼ブ.

t 秒	s 呎	速度:毎秒 v 呎,即チ $\delta s/\delta t$	加速度:秒秒呎,即チ $\delta v/\delta t$
0.06	0.0880		
		14.74	
0.07	0.2354		—125
		13.49	
0.08	0.3703		—127
		12.22	
0.09	0.4925		—127
		10.95	
0.10	0.6020		—129
		9.66	
0.11	0.6986		—131
		8.35	
0.12	0.7821		—131
		7.04	
0.13	0.8525		

若シ 200 封度ノ或ル物體ガカヤウナ運動ヲスルナラバ,此ノ運動ヲ持續スル爲ニハ,各瞬間ニ於テ如何ナル力ガ之ニ働カネバナラナイカ.

機械師ノ單位ニヨレバ,コノ質量ハ $200 \div 32.2$, 即チ 6.2 デアル.

6.2 ニ加速度 127 ヲ乘ジテ,求メル力ハ 787 封度デアル事ヲ知ル.

上ノ表ニ於テ,例ヘバ,毎秒 14.74 呎ノ速度ヲ求メルトキニハ,之ハ $t=0.06$ カラ $t=0.07$ マデノ平均速度デアル事ヲ記憶セヨ. 私ハ,ソレハ $t=0.065$ ニ於ケル實際ノ速度デアル事ヲ假定シタ. 併シ之ハ,一般ニ,近似的ニ正シイト言ヒ得ルノミデアル. 私ハ此ノ假定ガ,多クノ實際上ノ目的ニ對シテハ十分正確デアル事ヲ知ツテキル. 更ニヨイ近似値ヲ得ル面倒ナ方法ガアルコトハ明ラカデアル.

併シ,私ハ或ル特殊ナ瞬間ニ於ケル速度ヲモツト注意深ク考察シナケレバナラナイ. 從ツテ次ノ問題ヲ考ヘル.

§ 88. 極限ノ思想

例題. ユーストンヲ去ツタ汽車ノ運動ハ,

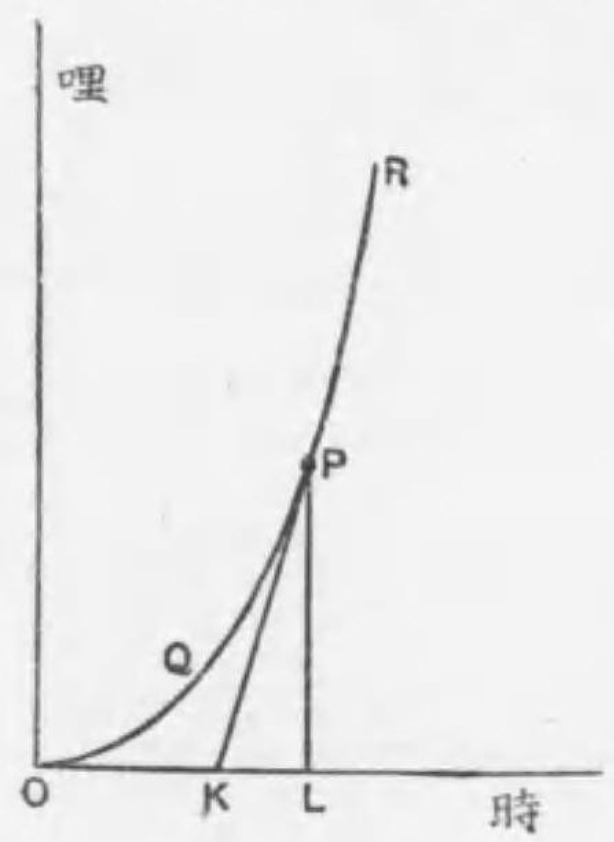
$$s=300t^2$$

ノヤウデアル. 但シ s ハユーストンカラノ哩數デアリ,t ハ同地ヲ去ツテカラノ時間數デアル.

0.1 時間ノ終リニ於テ,汽車ノ速度毎時 v 哩ヲ求メヨ.

$t=0.01$, 0.02 等ヲトツテ,各場合ニ於ケル s ヲ計算セヨ.

解 方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描イテ,曲線 $OQPR$ ヲ得ル (第 24 圖). P ニ於テ $t=0.1$ 時間,$s=3$ 哩トスル. P ニ於テ切線 PK ヲ引ケバ,時間ノ目盛ニ於テ, KL ハ 0.05 時間ヲ表ハシ,距離ノ目盛ニ於テ, PL ハ 3 哩デアル事ヲ知ル. 故ニ P ニ於ケル勾配ハ



第 24 圖

$\dfrac{3\text{ 哩}}{0.05(\text{時間})}$, 即チ毎時間 60 哩デアル事ヲ表ハス.

實際ノ事柄トシテ,之ハ正シイ答デアル. 併シ,私ハ切線ヲ引ク事ニ依ツテ之ヲ得タノデハナイ. 誰デモ完全ニ正シイ答ヲ得ルヤウナ切線ヲ引ク事ハ出來ナイ. 私ハ次ノ方法デ答ヲ得タ.

次ノ各時間ニ對シテ s ヲ計算シタ.

δt ハ 0.1 時間ヲ超過スル時間デアリ, δs ハ 3 哩ヲ超過スル距離デアル. $\dfrac{\delta s}{\delta t}$

ハ時間 δt ノ間ノ平均速度デアリ,距離 δs ハ此ノ時間内ニ通過シタ距離デアル.

t	s	δt	δs	$\frac{\delta s}{\delta t}$
0.1	3			
0.11	3.63	0.01	0.63	63
0.101	3.0603	0.001	0.0603	60.3
0.1001	3.006003	0.0001	0.006003	60.03

δt ヲ漸次小サク取レバ,0.1 時間ニ於ケル實際ノ速度ニ漸次接近スル.

此ノ事ヲ全ク確カニスル爲ニ,其ノ課程ヲ代數的ニ行ヘ.

時間 t ニ於ケル s ヲ計算セヨ. 次ニ新ラシイ時間 $t+\delta t$ ニ對シテ $s+\delta s$ ヲ計算セヨ.

$s=300t^2$ 及ビ $s+\delta s=300(t+\delta t)^2$, 　卽チ $s+\delta s=300\{t^2+2t\cdot\delta t+(\delta t)^2\}$

ナル關係ガアリ,邊々相減ジテ次式ヲ得ル.

$$\delta s=600t\cdot\delta t+300(\delta t)^2.$$

次ニ δt デ割ツテ,平均ノ速度ヲ得ル.

$$\frac{\delta s}{\delta t}=600t+300\cdot\delta t.$$

コレハ δt ノ任意ノ値ニ對シテ確カニ眞デアル事ヲ注意シテモラヒタイ. サテ,今ヤ重大ナ考ヘニ達シタ. ソレハ δt ガ漸次小サクナルニ從ツテ,300 δt ノ項ハ限リナク小サクナルニヨリ,$\frac{\delta s}{\delta t}$ ハ漸次 $600t$ ニ近ヅク.

吾人ノ限ラレタ觀念及ビ能力デハ,無限トイフ事ヲ理解スル事ハ出來ナイ. 併シ數學的ノ目的ニ對シテハ,吾々ガ或ル事物ガ「無限ニ大デアル」ト言フトキニハ,其ノ事物ガ「限リナク大キクナル」トイフ事ヲ意味スル.

又吾々ガ,或ル事物ガ「限リナク小サクナル」ト言フトキニハ,ソレガ「0トナル」事ヲ意味スル. 卽チ零ヲ表ハス. 故ニ極限ニ於テ $\frac{\delta s}{\delta t}$ ハ眞ニ $600t$ デアル. δt ガ漸次小サクナルトキ,$\frac{\delta s}{\delta t}$ ノ極限値ヲ $\frac{ds}{dt}$ ト呼ブ. 卽チ t ガ增加スルトキノ s ノ變化ノ割合デアツ

テ,換言スレバ t ニ關スル s ノ**微分係數**デアリ,之ヲ時間 t ニ於ケル速度ト呼ブ. 吾々ガ實際ノ速度 $\frac{ds}{dt}$ ニ就イテ話スカ,又ハ

時間 t ニ於ケル實際ノ速度ハ $\frac{ds}{dt}=600t$ デアル.

ト言フ述ベ方ヲナスノハ, δt ガ限リ無ク小サクナツタトキニ於テノミデアル.

此ノ公式ニヨツテ,任意ノ時刻ニ於ケル速度ヲ知ル事ガ出來ル. t ガ 0.1 ナルトキハ,速度ハ 600×0.1, 卽チ一時間 60 哩デアル.

今ヤ,極限値ノ觀念ヲ得ル事ニハ何等ノ大キイ困難モナイ事ハ確カデアル. 或ル人々ハ,吾々ガ近似的ニノミ眞デアル事項ニ就イテ述ベテヰルノデアルト考ヘテヰル. ソレハ屢〻彼等ノ先生ガ,"300 δt ハ小デアルカラ棄テヨ" トカ,又ハ"dt ヲ無限ニ小サイ時間數トセヨ" ナドト言フカラデアル. 而モソノ人々ハ之ニヨツテアルモノヲ割ラウトスル.

此ノヤウナ人々ハ常識ヲ得ル事ガ不可能デアル.

今一ツノ困難ハ"$\delta t=0$ ナラシメバ,$\frac{\delta s}{\delta t}$ 又ハ $\frac{ds}{dt}$ ハカクカクニナル" ト言フ人々ニヨツテ持込マレル. 眞ノ述ベ方ハ"δt ガ限リナク小サクナルニ從ツテ,$\frac{\delta s}{\delta t}$ ハ漸次有限ノ値 $600t$ ニ近ヅク" ト言フノデアル. 而シテ,旣ニ私ガ言ツテヰルヤウニ,總テノ人ハ每日ノ生活ニ重要ナ極限ノ觀念ヲ用ヒテヰル.

學生ハ δt ガ漸次小サクナルニ從ツテ,$\frac{\delta s}{\delta t}$ ノ極限値ニ就イテノ此ノ觀念ニ多大ノ注意ヲ拂ハネバナラナイ. 勿論 δs モ亦漸次小サクナル.

彼ハ"δs ヲ 0 ナラシメ,又 δt ヲ 0 ナラシメヨ" ト言ツテハナラナイ. 何トナレバ,0 デ 0 ヲ割ル事ハ何事ヲモ意味シナイカラデアル. 彼ガ速度ト言ツテヰル所ノモノヲ注意深ク考察セヨ. 若シ,

或ル物體ガ1秒間1呎ノ間ヲ一樣ニ動クナラバ, 0.001秒間ニ 0.001呎ノ間ヲ動キ,又1秒ノ百萬分ノ一ノ間ニ1呎ノ百萬分ノ一ノ間ヲ動ク. 時間ト距離トノ比ハ速度デアル. 而シテ若シ速度ガ變ルナラバ,任意ノ瞬間ニ於ケル速度ハ吾々ガ記載サレ得ル限リノ非常ニ短イ距離ト非常ニ短イ時間トヲ測ルトキニ於テノミ求メル事ガ出來ル.

常識ヲ持ツタ明白ナ人ハ,此ノ觀念ヲ得ルノニ何等ノ困難ヲモ感ジナイ. 二千年ノ昔,大人モ小サイ子供モ,兎ガ競走シテ龜ニ勝ツト言フ事ヲ諒解スルノニ何等ノ困難モ感ジナカツタデアラウ. カヤウナ事ニ困難ヲ感ズルノハ數學的哲學者デアル. 近頃,彼等ハ斯クノ如キ微積分ノ基本概念ハ數學者ニヨツテノミ理解サレ得ルト言フ. 此ノ事ハ,若シ此等ノ哲學者ガ彼等ノ總テノ訓練ガ青年ニハ不適當デアルトイフノデ,青年ノ教育ヲ委セラレナイナラバ,問題デハナイノデアル. 彼等ガ$\frac{\delta s}{\delta t}$ノ極限値ノ本質的概念ヲ說明ショウトスルトキニナルト,彼等ハ愚カナ事ヲ言フノデアル.

§89. 二次式ノ微分

此ノ觀念ヲ別ノ形式デ說明ショウ. y ト x トガ,何デアラウト

$$y=ax^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル式ニヨツテ結バレタ任意ノ數デアルトセヨ.

x ノ特殊ナ値ヲトツテ, y ヲ計算セヨ. 次ニ x ノ新ラシイ値,例ヘバ $x+\delta x$ ヲトツテ,新ラシイ y, 例ヘバ $y+\delta y$ ヲ計算セヨ.

$$y+\delta y=a(x+\delta x)^2$$

卽チ

$$y+\delta y=a\{x^2+2x\cdot\delta x+(\delta x)^2\}. \cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) カラ (1) ヲ減ジテ,

$$\delta y=2ax\cdot\delta x+a\cdot(\delta x)^2;$$

δx デ割ツテ,

$$\frac{\delta y}{\delta x}=2ax+a\cdot\delta x. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

サテ,(3) ハ δx ノ任意ノ値ニ對シテ眞デアル. 之ハ x ニ關スル y ノ增加ノ平均ノ割合デアル. 併シ

$$\frac{dy}{dx}=2ax, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ト言フノハ, δx ヲ限リナク小サクシタトキダケデアツテ, x ニ關スル y ノ增加ノ眞ノ割合ハ, x ノ任意ノ値ニ對シテ知ラレル.

§90. 三次式ノ微分

同樣ニ,若シ

$$y=ax^3, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナラバ,

$$y+\delta y=a(x+\delta x)^3,$$

卽チ

$$y+\delta y=a\{x^3+3x^2\cdot\delta x+3x\cdot(\delta x)^2+(\delta x)^3\}. \cdots\cdots(2)$$

(2) カラ (1) ヲ減ジテ, δx デ割レバ,

$$\frac{\delta y}{\delta x}=3ax^2+3ax\cdot\delta x+a(\delta x)^2.$$

今, δx ヲ限リナク小サクシテ,新ラシイ記號ヲ用ヒルト,

$$\frac{dy}{dx}=3ax^2.$$

§91. 高次式ノ微分

私ノ推定ニヨレバ,諸君ニ今少シノ代數的知識ガアレバ,

$$y=ax^n \text{ナルトキハ}, \quad \frac{dy}{dx}=nax^{n-1}$$

デアル事ハ容易ニ證明サレルデアラウ. 但シ a, n ハ正又ハ負ノ任意ノ數トスル. (§ 95 參照).

此ノ法則ハ,私ガ既ニ述ベタ他ノ場合ヲモ包含スル. 實際,若シ

$$y=a+bx+cx^2+\cdots\cdots\cdots+mx^n, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナラバ,

$$\frac{dy}{dx}=0+b+2cx+\cdots\cdots+nmx^{n-1}. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

若シ, y ガ x ノ函數トシテ與ヘラレルナラバ, $\frac{dy}{dx}$ ヲ發見シタトキニ**微分シタ**ト言フノデアル.

§92. 微分係數

上ノ若干ノ例題ニ於テ,y ヲ x ノ函數トシテ與ヘテ,$\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨウトシタ．此ノ法則ハ方眼紙ニ「グラフ」ヲ描クコトヲ要求スルドンナ法則ヨリモ,非常ニ容易ニ適用サレル．$\frac{dy}{dx}$ ハ時々曲線ノ勾配,即チ曲線ノ切線ガ x 軸トナス角ノ正切ト呼バレル．又之ハ時々"x ニ關スル y ノ**微分係數**"又ハ"x ニ關スル y ノ增加ノ割合"トモ言フ．

§93. 積　分

時々吾々ハ**積分スル**事ヲ要求サレル．即チ $\frac{dy}{dx}$ ガ與ヘラレテキルトキニ y ヲ求メル事ヲ要求サレル．

上ノ例ニテ,(2)ヲ與ヘテ(1)ヲ求メヨウトスルノデアル．

a ノ積分ハ ax デアリ,βx ノ積分ハ $\frac{1}{2}\beta x^2$, γx^2 ノ積分ハ $\frac{1}{3}\gamma x^3$ デアル．一般ニ,ax^m ノ積分ハ m ノ任意ノ値ニ對シテ $\frac{a}{m+1}x^{m+1}$ デアル.*

積分スルトキニハ常數ヲ附加スル．ソレハ任意ノ常數デヨイ．何トナレバ常數ノ微分係數ハ0デアルカラデアル．

例 1.　次式ヲ微分セヨ．

$$y=4+3x+0.7x^2+2.15x^3+15x^{20}+12x^{-1}+24x^{-3.04}+2x^{0.786}.$$

答　$$\frac{dy}{dx}=0+3+1.4x+6.45x^2+300x^{19}-12x^{-2}-72.96x^{-4.04}+1.572x^{-0.214}.$$

例 2.　次式ヲ積分セヨ．

$$3.056+2x+15x^2+12x^{15}+1.5x^{-2}+17x^{-0.46}+2x^{4.567}.$$

答　$$C+3.056x+x^2+5x^3+\frac{3}{4}x^{16}-1.5x^{-1}+17.8x^{0.954}+0.3592x^{5.567}.$$

記號 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ $\frac{dy}{dx}$ ノ微分係數ヲ意味スル．$\frac{d^2y}{dx^2}$ ノ微分係數ハ $\frac{d^3y}{dx^3}$ デ表ハサレル．

* 此ノ法則ハ $m=-1$ ノトキニハ成立シナイ．ax^{-1} ノ積分ハ $a\log_e x$ デアル．§95 參照．

第十九章　公式及證明

§94. 微積分ノ重要公式

x^n ヲ微分及ビ積分スル方法ヲ知ツタ學生ハ,工學ニ關スル多クノ實際問題ニ,微積分學ヲ利用スルコトガ出來ル．通常ノ學生ハアラユル種類ノ巧妙ナ式ヲ微分シタリ,積分シタリスルニ數箇月ヲ費シ,而モ後ニナツテ此等ノ式ヲ殆ンド實用ニ供シナイ．x^n ノ外ニ,ココニ他ノ二三ノ式ヲ與ヘルガ,此等ノ式モ掲ゲルダケノ價値ガアルデアラウ．

y	$\frac{dy}{dx}$	u	u ノ積分, 之ヲ $\int u\cdot dx$ ト書ク.
常數 a	0	0	任意常數 a
ax	a	b	bx
ax^2	$2ax$	bx	$\frac{1}{2}bx^2$
ax^n	nax^{n-1}	bx^m (1)	$\frac{b}{m+1}x^{m+1}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\log x$ (2)
$\log(x+a)$	$\frac{1}{x+a}$	$\frac{1}{x+a}$	$\log(x+a)$
be^{ax}	abe^{ax}	be^{ax}	$\frac{b}{a}e^{ax}$
$A\sin(ax+b)$	$aA\cos(ax+b)$	$B\cos(ax+b)$	$\frac{B}{a}\sin(ax+b)$
$A\cos(ax+b)$	$-aA\sin(ax+b)$	$B\sin(ax+b)$	$-\frac{B}{a}\cos(ax+b)$

今後ハ, $\log x$ ハ常ニ x ノ自然對數ヲ意味スルモノトスル．從ツテ,常用對數ハ $\log_{10}x$ ト書ク．

(1) m ハ -1 ニ等シクナイモノトスル．

(2) 嚴格ニ言ヘバ, $\log x$ デハナク, $\log|x|$ トスベキデアル．即チ x ノ絕對値ノ對數ヲ取ルベキデアル．

x, y, u ヨリ外ノ任意ノ文字モ使用スル.

§95. 公式ノ證明

此ノ際證明ヲ與ヘルコトノ出來ル唯一ツノ公式ヲ次ニ掲ゲル.

1. 若シ $y=x^n$

ナラバ $y+\partial y=(x+\partial x)^n$.

二項定理ニ依ツテ,(§28,問題5參照)

$$y+\partial y=x^n+n\cdot\partial x\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(\partial x)^2x^{n-2}+\cdots,$$

邊々相減ジテ

$$\partial y=n\cdot\partial x\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(\partial x)^2\cdot x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

故ニ $$\frac{\partial y}{\partial x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\partial x\cdot x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

ソコデ ∂x ヲ次第ニ限リナク小サクスレバ, ∂x ヤ$(\partial x)^2$,或ハソレ以上 ∂x ノ高次ノモノヲ有スル項ハ零トナル. 故ニ

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

2. $y=e^x$.

指數定理[1]ヲ用ヒナイデ,コノ函數ノ微分ヲ求メル種々ノ證明ヲ試ミタガ,思フヤウニ行カナカツタカラ,ココニハ指數定理ノ最モ簡單ナ形(§28,問題6參照).

$$y=e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

ヲ用ヒテ證明シヨウ.

之ヲ項毎ニ微分シテ,

$$\frac{dy}{dx}=0+1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots=e^x=y,$$

デアルコトヲ知ル.

(1) 指數定理ノ證明ハ後ニ §139 デ與ヘルコトニスル.

同様ナ方法デ,若シ $y=e^{ax}$

デアルナラバ, $\frac{dy}{dx}=ae^{ax}$.

3. 若シ $y=\log x$

ナラバ, $x=e^y$,

依ツテ $\frac{dx}{dy}=e^y=x$,

從ツテ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$.

4. 若シ $y=\sin x$

デアルナラバ, $y+\partial y=\sin(x+\partial x)$,

$$\partial y=\sin(x+\partial x)-\sin x.$$

初等三角法デ,之ハ次ノヤウニナルコトガ解ル.(§28,問題3參照).

$$\partial y=2\cos\left(x+\frac{1}{2}\partial x\right)\sin\frac{1}{2}\partial x.$$

故ニ $$\frac{\partial y}{\partial x}=\cos\left(x+\frac{1}{2}\partial x\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\partial x}{\frac{1}{2}\partial x}.$$

小ナル角 α ヲ描キ,又 $\sin\alpha$ ヤ α ノ事[1]ヲ思ヒ起セバ,次ノ事ハ直グニ解ル. α ガ次第ニ小トナレバ, $\sin\alpha\div\alpha$ ハ次第ニ 1 ニ接近スル. 故ニ極限ニ於テハ, $\sin\frac{1}{2}\partial x\div\frac{1}{2}\partial x$ ハ 1 トナツテ,

$$\frac{dy}{dx}=\cos x.$$

同様ナ方法デ $y=\cos x$

ナラバ, $\frac{dy}{dx}=-\sin x$.

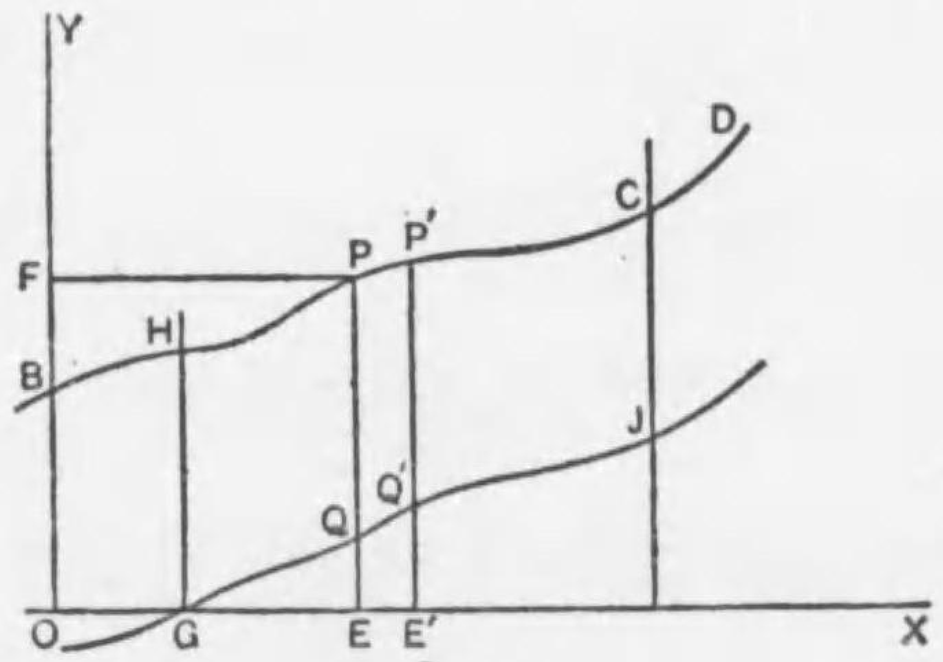
此等ノ法則ノ擴張ニ就イテハ,第三十二章ヲ參照セヨ. 出版ニ際シテ此ノ講義ノ數程ノ下拵ヘヲシタトキニ,1及ビ2ニ對シテ新ラシイ容易ナ證明ヲ發見シタ. 之ハ第三十二章デ與ヘル事トスル.

(1) 88頁脚註(1)參照.

第二十章　微積分學

§96. 積分ノ應用

今積分ガ如何ニ有用デアルカトイフ例ヲ示サウ．



第　25　圖

BPCD ヲ任意ノ曲線トスル．點 *P* ニ於テ，*FP* 卽チ *OE* ヲ x トシ，*PE* ヲ y トスル．

曲線 *GQJ* ノ縦線 *QE* ヲ以テ *HPEG* ノ面積 *A* ヲ表ハスモノトスル．面積ヲ算ヘル出發線トシテノ縦線ヲ任意ノ場所 *HG* ニトル．*OE′* ヲ $x+\partial x$ トシ，從ツテ $EE'=\partial x$ トスル．

サテ　　*QE* 卽チ *A* ハ面積 *HPEG* ヲ表ハシ，

Q′E′ 卽チ $A+\partial A$ ハ面積 *HP′E′G* ヲ表ハス．

故ニ ∂A ハ面積 *PP′E′E* デアル．

併シ，∂x ガ漸次小サクナルニ從ツテ，

$$\partial A=PE\times\partial x=y\cdot\partial x,$$

ハ益々眞デアル事ヲ知ル．故ニ

$$\frac{dA}{dx}=y. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

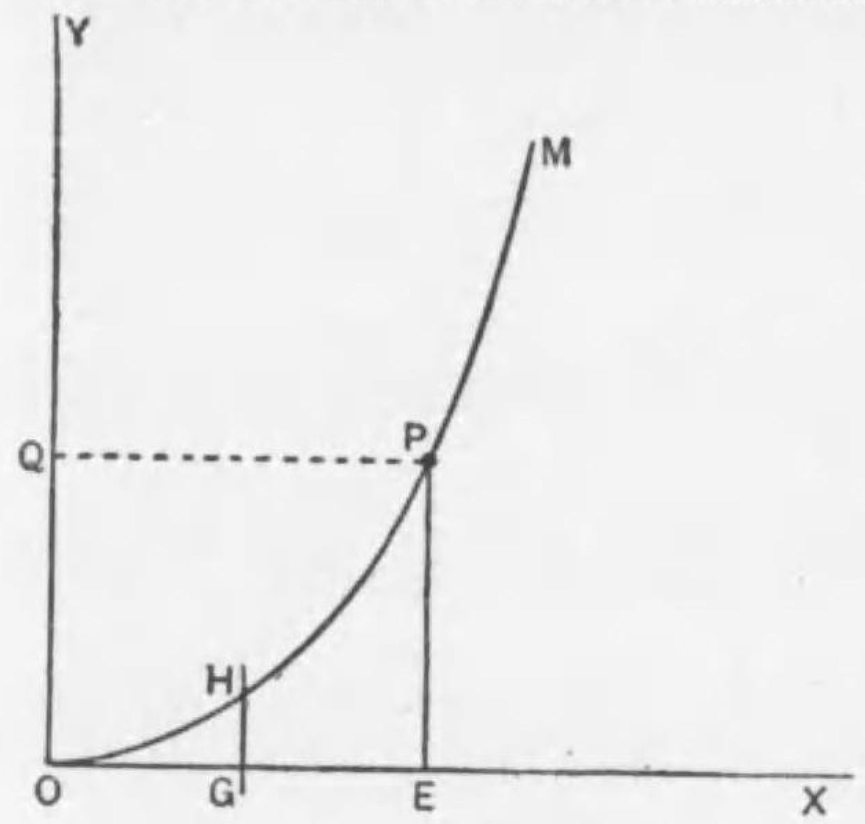
卽チ，曲線ノ縦線ハ，其ノ面積ノ微分係數デアル．換言スレバ，曲線ノ面積 *A* ハ曲線ノ縦線 y ノ積分デアル．

§97. 拋物線ノ面積

OPM ヲ曲線 $y=ax^2$ トスル（第26圖）．此ノ曲線ハ拋物線トシテ知ラレテキル．之ヲ積分シテ，

$$A=\frac{a}{3}x^3+C.$$

但シ，*C* ハ或ル未知ノ常數デアツテ，面積ヲ算ヘル基準ニヨツテ定マル．



第　26　圖

カクテ，若シ $x=0$ カラ面積ヲ算ヘル，卽チ $x=0$ ナルトキ $A=0$ トスレバ，$C=0$ デアル．從ツテ $A=\frac{a}{3}x^3$ トナル．

コレハ x ノ任意ノ値ニ到ルマデノ曲線ノ面積ヲ與ヘル公式デアル．

次ニ，縦線 *HG* ト *PE* トノ間ノ面積ヲ求メヨウ．

或ル縦線カラ *PE* マデノ面積 $A=\frac{a}{3}OE^3+C.$

同ジ縦線カラ *HG* マデノ面積 $A=\frac{a}{3}OG^3+C.$

故ニ　　　求メル面積 $=\frac{a}{3}(OE^3-OG^3).$

今上ノ面積ヲ a ノ代リニ，*PE* 等ノ項デ表ハサウトスル．

$y=ax^2$ デアリ，故ニ $PE=a\times OE^2$，卽チ $a=PE/OE^2$ デアルカラ，上ノ公式ニ於テ a ヲ置キカヘル事ガ出來ル．

卽チ，　$$POE\ ノ面積=\frac{a}{3}OE^3=\frac{1}{3}\frac{PE}{OE^2}\times OE^3=\frac{1}{3}PE\cdot OE,$$

$$=矩形\ QPEO\ ノ面積ノ\ \frac{1}{3}.$$

§51 ノ脚註ニアルシムプソンノ法則ノ證明ハ，學生ニトツテハ好箇ノ練習問題デアル．

§98. 速度ト加速度

方眼紙ヲ用ヒルトキニ，面積ヲ計算スル際ノ如ク，他ノ多クノ事物ガ正確ニ加ヘ合ハサレル事ヲ知ツタ．之ト同ジク，若シ直線軸ヲ有スル或ル物體ノ一端カラ x ノ距離ニアル截斷面ノ面積ヲ y

トシ,又 x ト y トノ關係式ガ與ヘラレルナラバ,x ニ關スル y ノ積分ハ其ノ體積デアル. 尙又 xy ノ積分ヲ體積デ割レバ,其ノ重心ノ x 坐標ガ解ル.

例題. 或ル物體ノ一秒每ノ速度ノ變化ノ割合,卽チ加速度 $\frac{dv}{dt}$ ヲ常數 a 秒々呎デアルトスル. t ニ關スル此ノ積分ハ速度 v デアル. 故ニ之ハ

$$v=at+c. \cdots\cdots(1)$$

但シ, c ハ或ル常數デアル. $t=0$ ナルトキ v ガ v_0 デアルナラバ, c ハ v_0 デアル. 倂シ, v ハ $\frac{ds}{dt}$ デアル. 故ニ再ビ積分シテ,

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0, \cdots\cdots(2)$$

何トナレバ,積分シタトキニハ常數ヲ附加スル. 而シテコノ常數ハ,$t=0$ ナルトキ,測定ノ基點カラノ物體ノ距離 s_0 デナケレバナラナイ事ヲ知ル.

ニュートンハ速度ニ對シテ記號 $\dot{s}$ ヲ用ヒタ. 吾々ハコレヲ用ヒルカ又ハ $\frac{ds}{dt}$ ヲ用ヒル. ニュートンハ又加速度ニ對シテハ $\ddot{s}$ 又ハ $\dot{v}$ ヲ用ヒタ. 吾々ハ $\frac{d^2s}{dt^2}$ 又ハ $\frac{dv}{dt}$ ヲ用ヒル.

若シ,(2) ヲ微分スレバ (1) ヲ得ル. (1) ヲ微分スレバ,結局加速度$=a$ ト言フモトノ敍述ニ歸著スル.

§99. 積分ノ記號・例證

x 及ビ y ノ次ノ値ヲ與ヘテ,$\partial y/\partial x$ ヲ求メヨ.

又 $y.\partial x$ ノ値ヲ求メ,且ツ之ヲ加ヘテ曲線 y ノ面積 A ヲ計算セヨ.

學生ハ $\frac{\partial y}{\partial x}$ ハ各區間ニ於ケル平均ノ割合デアルト言フ事ヲ注意シナケレバナラナイ. 彼ハ此ノ値ヲ割合トスルヤウナ x ノ正確ナ値ヲ知ラナイ. 若シ表ノ數カラ,x ノ任意ノ値ニ對シテ,極メテ正確ニ $\frac{dy}{dx}$ ヲ知ラウト欲スルナラバ, §100 ニアルヤウナ或ル

x	y	$\frac{\partial y}{\partial x}$	$y\cdot\partial x$	A 又ハ $\Sigma y\partial x$
0	0			0.00000
		1.736	0.00868	
0.1	0.1736			0.00868
		1.684	0.02578	
0.2	0.3420			0.03446
		1.580	0.04210	
0.3	0.5000			0.07656
		1.428	0.05714	
0.4	0.6428			0.13370
		1.232	0.07044	
0.5	0.7660			0.20414
		1.000	0.08160	
0.6	0.8660			0.28574
		0.737	0.09028	
0.7	0.9397			0.37602
		0.451	0.09622	
0.8	0.9848			0.47224

法則ヲ使ハネバナラナイ.

$y.\partial x$ ヲ計算スルニ當ツテ,私ガ其ノ區間ニ於ケル y ノ平均ノ値ヲ用ヒル事ヲ注意セヨ. $y.\partial x$ ハ第 25 圖ノ $EPP'E'$ ノヤウナ細長片ノ面積デアツテ,$\Sigma y.\partial x$ ハ細長片ノ面積ノ總和ヲ意味スル. ココニギリシヤ文字 s 卽チ「シグマ」Σ ハ"同様ナ總テノ項ノ和"ヲ表ハスニ用ヒラレル. 吾々ガ或ル面積ヲ正確ニ知ルトキ,卽チ無限ニ狹イ細長片ヲ無限ニ多ク集メルトキニハ,Σ ノ代リニ英文字 s[1] ノ長文字卽チ $\int$ ヲ用ヒル.

吾々ガ y ノ積分ヲ表ハストキニ,記號 $\int$ ヲ用ヒルノミデナク,dx ヲモ用ヒル. 卽チ,$\int y.dx$ ヲ用ヒル事ヲ注意スルノハ最モ重要ナコトデアル.

記號 $\int_a^b y.dx$ ハ"y ヲ縱坐標トシタ曲線ノ $x=a$ カラ $x=b$ マデノ面積" ヲ意味スル. 之ヲ求メル方法ハ旣ニ知ツテヰル所デアル. 卽チ,此ノ記號ハ"y ノ一般積分ヲ求メ,ソレニ $x=b$ ヲ代入シ,ソレカラ $x=a$ ヲ代入シタモノヲ減ゼヨ" トイフノト同ジ事デアル. 之ハ §97 ニ依ツテ明ラカナ所デアル.

次ニ,學生ハ代數的記號ニ驚カナイヤウニシナケレバナラナイ. 記號

(1) 此等ノ場合ニ s 或ハ Σ ヲ用ヒルノハ「加ヘ合ス」(sum up) ノ頭文字ヲトツタモノデアル.

トイフモノハ,諸君ニ何ヲナスベキカトイフ事ヲ正確ニ物語ル最モ簡單ナ方法デアル. 之ハ,此ノ家ニハ獰猛ナ犬ガキル,此ノ家ニハ慈悲深イ婦人ガキルトイフ事ヲ農家ノ門ニ暗號文字デ書イテ行ク浮浪者[1]ノ其ノ記號ヨリモモツト容易ニ諒解サレルノガ常デアル. 私ガ今茲用ヒタ所ノ斯樣ナ子供ラシイ記號ニ習熟スル事ハ最モ容易ナ事デアルト思ハレル. 而モ普通ノ學生ハ此等ノ記號ヲ嫌ヒ,決シテ之ヲ諒解シヨウト試ミナイ. 何トナレバ彼ハ此等ノモノハ諒解シ得ナイモノデアルト思ヒ込ンデキルカラデアル.

例題. 拋物線 $y=0.1x^{\frac{1}{2}}$ ヲ x 軸ノ周リニ廻轉シテ廻轉拋物線體ヲ作ル. 學生ハ此ノ曲線ヲ作圖シ,且ツ曲面ノ形ヲ研究セヨ.

解 ココニ,x ニ於ケル截斷面ノ面積ハ πy^2 デアル. 又距離 dx ヲ距テタ二ツノ截斷面ノ間ノ薄片ノ體積ハ,別々ニ $\pi y^2 \cdot dx$ デアリ,從ツテ此ノ積分ハソノ體積デアル. 故ニ $x=a$ ト $x=b$ トニ於ケル截斷面ノ間ノ體積ハ,

$$\pi\int_a^b y^2 \cdot dx,\ 即チ\ \frac{\pi}{100}\int_a^b x\cdot dx,\ 即チ\ \frac{\pi}{100}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b,$$

$$即チ\ \frac{\pi}{100}\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2\right),\ 即チ\ \frac{\pi}{200}(b^2-a^2).$$

若シ, $a=0$, 即チ $x=0$ カラ $x=b$ マデノ體積(之ヲ V デ表ハス)ヲ求メヨウトスルナラバ,其ノ答ハ $\frac{\pi}{200}b^2$ デアル.

注意. 若シ $y=0.1x^{\frac{1}{2}}$ ノ代リニ $y=mx^{\frac{1}{2}}$ デアルナラバ, V ハ $\frac{1}{2}\pi m^2b^2$ デアルデアラウ. 若シ y_1 ガ $x=b$ ナル點ニ於ケル曲線ノ縱坐標デアルナラバ, $V=\frac{1}{2}\pi y_1{}^2 b$ デアル事ハ容易ニ證明セラレル. 併シ, $\pi y_1{}^2$ ハ終端ノ截斷面ノ面積デアル. 又若シ,圓壔,拋物線體及ビ圓錐ノ底面ガ同ジ圓デ且ツ同ジ高サヲ有スルナラバ,其等ノ體積ハ1ト $\frac{1}{2}$ ト $\frac{1}{3}$ トニ比例スル事ヲ知ル.

例證. 學生ハ次ノヤウナ若干ノ例證ヲナセ.

1. $y=\sin x$ ナルトキ, $\frac{dy}{dx}=\cos x$ ナル事ヲ例證スルコト.

(1) 後ニ又乞食ニ行クノニ,獰猛ナ犬ノキル家ヲ避ケ, 慈悲深イ婦人ノ家ヲ訪問スル爲ニ浮浪者ニノミワカルヤウナ象形的記號ヲ書イテ行ツタ昔ノ物語ニ依ル.

角ノ度數	「ラディアン」デ表ハシタ角 x	$y=\sin x$	δy	$\frac{\delta y}{\delta x}$	$\frac{\delta y}{\delta x}$ ノ平均	$\cos x$
40	0.6981	0.6427876	0.0132714	0.7583		
41	0.7156	0.6560590	0.0130716	0.7512	0.7547	0.7547
42	0.7330	0.6691306				

2. $y=\cos x$ ナルトキ, $\frac{dy}{dx}=-\sin x$ ナル事ヲ例證スルコト.

角ノ度數	「ラディアン」デ表ハシタ角 x	$y=\cos x$	$-\delta y$	$\frac{\delta y}{\delta x}$	$\frac{\delta y}{\delta x}$ ノ平均	$\sin x$
20	0.3491	0.9396926	0.0061122	−0.3513		
21	0.3665	0.9335804	0.0063965	−0.3656	−0.3584	0.3584
22	0.3840	0.9271839				

3. $y=\log x$ ナルトキ, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ ナル事ヲ例證スルコト.

x	$y=\log x$	δy	$\frac{\delta y}{\delta x}$	$\frac{1}{x}$
2.13	0.7561	0.0047	0.47	
2.14	0.7608	0.0047	0.47	0.47
2.15	0.7655			

此ノ例證ハ僅カニ四桁ノ對數ヲ用ヒル代リニ,七桁ノ對數ヲ用ヒレバ,一層面白イデアラウ.

$\log x$ ハ x ノ自然對數デアル事ヲ忘レテハナラヌ.

4 $y=e^x$ ナルトキ, $\frac{dy}{dx}=e^x$ ナル事ヲ例證スルコト.

x	$y=e^x$	$\frac{\delta y}{\delta x}$	$\frac{\delta y}{\delta x}$ ノ平均
2.000	7.3889	7.3	
2.001	7.3962	7.5	7.4
2.002	7.4037		

5. ココニ雙曲線 $y=\frac{100}{x}$ ガアル. $x=10$ ニ於ケル縱坐標カラ x ノヨリ大ナル値ニ對スル任意ノ縱坐標ニ到ルマデノ面積ヲ求メヨ. 又任意ノ點ニ於ケル $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ. 左ノヤウニ表ニセヨ. 10カラ11マデノ間隔 $\delta x=1$ ニ對スル $y.\delta x$ ヲ得ルタメニ,y ノ平均値卽チ9.546ヲ用ヒタ事ニ注意セヨ.

x	y	$\frac{\delta y}{\delta x}$	$y\cdot\delta x$	面積卽チ $\Sigma y\cdot\delta x$
10	10			0
		−0.909	9.546	
11	9.091			9.546
		−0.758	8.712	
12	8.333			18.258
		−0.641	8.013	
13	7.692			26.271
		−0.549	7.418	
14	7.143			33.689
		−0.476	6.905	
15	6.667			40.594
		−0.417	6.458	
16	6.250			47.052
		−0.368	6.066	
17	5.882			53.118
		−0.326	5.719	
18	5.556			58.837
		−0.293	5.409	
19	5.263			64.246
		−0.263	5.132	
20	5.000			69.378

眞ノ答ハ

$\frac{dy}{dx}=-\frac{100}{x^2}$, 卽チ $-\frac{y}{x}$ デアル.

又面積 $=100\log_e\frac{x}{10}$ デアル. 故ニ表ニヨル答ハ立派ニ正シイ事ヲ知ル.

問 題

1. 次ノ各數ハ,或ル滑走機ガ t 秒間ニ行ツタ點マデヲ,或ル點カラ其ノ道ニ沿ウテ測ツタ距離 (x 呎) デアル. 種々ナ時間ニ於ケル速度ト加速度トヲ求メ,且ツ x, v 卽チ $\frac{dx}{dt}$, 及ビ $\frac{dv}{dt}$ 卽チ加速度ガ t ト如何ナル關係ニアルカヲ示ス三ツノ曲線ヲ描ケ.

t	x	v	加速度
0.0	1.000		
0.05		17.36	
0.1	2.736		−5.2
0.15		16.84	
0.2	4.420		−10.4
0.25		15.80	
0.3	6.000		−15.2
0.35		14.28	
0.4	7.428		−19.6
0.45		12.32	
0.5	8.660		−23.2
0.55		10.00	
0.6	9.660		−26.3
0.65		7.37	
0.7	10.397		−28.6
0.75		4.51	
0.8	10.848		−29.9
0.85		1.52	
0.9	11.000		−30.4
0.95		−1.52	
1.0	10.848		−29.9
1.05		−4.51	
1.1	10.397		

若シ,或ル滑走機ノ重サガ161封度デアルナラバ, $t=0.5$ デアルトキ,ソレニ働ク力ヲ求メヨ.

答 $\frac{161}{32.2}\times 23.2$, 卽チ116封度ノ妨害力.

2. 表記法ニヨツテ,x ト y トノ次ノ値ガ與ヘラレテキルトキ,$y.\delta x$ ト $A=\int y.dx$ トノ値ノ表ヲ近似的ニ與ヘヨ. x ガ0ナルトキ A ヲ0トスル. y ト x トヲ坐標トシテ方眼紙ニ「グラフ」ヲ描ケ. 又 A ト x トヲ坐標トシテ描ケ.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	1.5663	1.6774	1.8002	1.9391	2.1000	2.2918	2.5281
$y.\delta x$	0.16219	0.17388	0.18697	0.20196	0.21959	0.24100	
A	0	0.16219	0.33607	0.52304	0.72500	0.94459	1.18559

3. 次ノ數ハ,或ル汽車ガ出發點ヲ發シテカラ t 時間後ノ時速 v 哩デアル. 各時間ノ間ニ於テ,コノ汽車ガ通過シタ距離 $v.\delta t$ ヲ求メヨ. 又表記セラレタ各時間ニ於ケル出發點カラノ距離 x ヲ求メヨ.

t	v	$v.\delta t$	x
0	0		0
		0.048	
0.04	2.4		0.048
		0.142	
0.08	4.7		0.190
		0.238	
0.12	7.2		0.428
		0.336	
0.16	9.6		0.764
		0.432	
0.20	12.0		1.196
		0.526	
0.24	14.3		1.722
		0.624	
0.28	16.9		2.346
		0.716	
0.32	18.9		3.062
		0.792	
0.36	20.7		3.854
		0.858	
0.40	22.2		4.712
		0.912	
0.44	23.4		5.624
		0.954	
0.48	24.3		6.578
		0.984	
0.52	24.9		7.562

カクテ,例ヘバ, $t=0.12$ ニ於テ, x ハ0.428哩デアル. 0.04時間ノ次ノ間隔ニ於テ,汽車ハ0.336哩ヲ行ク. 故ニ $t=0.16$ ニ於テハ距離 $0.428+0.336$, 卽チ $x=0.764$ ニ在ル.

4. 曲線 $y=bx^{2.5}$ ハ點 $(x=5, y=4)$ ヲ通ル. b ヲ求メヨ.

答 $4=b\times 5^{2.5}$ デアルカラ,

$b=0.07155.$

又0ト $x=5$ ニ於ケル縱坐標トノ間ノ曲線ノ面積ヲ求メヨ.

答 $\int_0^5 bx^{2.5}.dx=\frac{b}{3.5}[x^{3.5}]_0^5$

$=5.715.$

5. 或ル容器ノ形ガ圓錐臺ノヤウデアル. 底面ノ圓ノ直徑ハ10吋,頂ノ圓ノ直徑ハ5吋,鉛直ノ高サハ8吋デアル. 若シxガ下底カラ液面マデノ高サデアルナラバ,液面ノ直徑ヲxデ表ハセ. 又其ノ面積Aヲ表ハシ,液ノ體積Vヲ方立吋デ表ハセ.

答 $d=10-\frac{5}{8}x$; $A=\frac{\pi}{4}\left(100-\frac{25}{2}x+\frac{25}{64}x^2\right)$; $V=78.54x-4.9085x^2+0.1023x^3$.

6. 曲線 $y=ax^n$ ニ於テ, $x=2$ ナルトキ $y=2.34$ デアリ, $x=5$ ナルトキ $y=20.62$ デアルナラバ,a ト n トヲ求メヨ.　　答 $a=0.4511$, $n=2.3745$.

コノ曲線ヲx軸ノ周リニ廻轉シテ廻轉曲面ヲ作レ. x ト $x+\delta x$ トニ於ケル斷面ノ間ニ薄片ノ體積ヲ求メヨ. 又 $x=2$ ト $x=5$ トニ於ケル兩斷面ノ間ノ體積ヲ求メヨ.　　答 $\pi a^2x^{2n}\cdot\delta x$ 及ビ 1156.

7. 曲線 $y=a+bx^{\frac{3}{2}}$ ニ於テ, $x=1$ ナラバ $y=1.61$, 又 $x=4$ ナラバ $y=5.32$ デアル. a ト b トヲ求メヨ.

コノ曲線ヲx軸ノ周リニ廻轉シ, $x=1$ ト $x=4$ トニ於ケル二斷面ノ間ノ此ノ廻轉曲面ニヨツテ包マレル體積ヲ求メヨ.

答 $a=1.08$, $b=0.53$, 體積 111.85.

8. 若シ $y=0.1x^2$ デアルナラバ, $\frac{dy}{dx}=0.2x$, 且ツ $A=\int y\,.\,dx=\frac{1}{30}x^3$ デアル. 但シ, $x=0$ ナルトキ $A=0$ トスル. y ノ次ノ値ヲ表記セヨ. $\frac{dy}{dx}$, $y\,.\,\delta x$ 及ビ

x	y	$\frac{\delta y}{\delta x}$	yノ平均値	$y\,.\,\delta x$	A	眞ノA
−0.2	0.004	−0.03				
−0.1	0.001	−0.01				
0	0.000	0.01	0.0005	0.00005	0	0
0.1	0.001	0.03	0.0025	0.00025	0.00005	0.000033
0.2	0.004	0.05	0.0065	0.00065	0.00030	0.000267
0.3	0.009	0.07	0.0125	0.00125	0.00095	0.000900
0.4	0.016	0.09	0.0205	0.00205	0.00220	0.00213
0.5	0.025	0.11	0.0305	0.00305	0.00425	0.00417
0.6	0.036	0.13	0.0425	0.00425	0.00730	0.00720
0.7	0.049	0.15	0.0565	0.00565	0.01155	0.01143
0.8	0.064	0.17	0.0725	0.00725	0.01720	0.017067
0.9	0.081	0.19	0.0905	0.00905	0.02445	0.02430
1.0	0.100				0.03350	0.03333

Aヲ近似的ニ表記セヨ. y, $\frac{dy}{dx}$ 及ビ A ガxト如何ナル關係ニ在ルカ,三ツノ曲線ヲ描イテ示セ. 正シイ公式ニ照ラシテ,各自ノ數ヲ驗セ.

學生ハ彼ノ$\frac{\delta y}{\delta x}$ガ眞ノ$\frac{dy}{dx}$デアル事ヲ知デアラウ. 併シ彼ノ表ニヨル$A$ノ値ニハ僅少ノ誤差ガアル.

9. 曲線 $y=x^3$ ニ對シテ, $x=0$ カラ $x=1$ マデ上ノ表記ノ過程ヲ反覆セヨ.

$\frac{dy}{dx}=3x^2$ デアリ, $A=\frac{1}{4}x^4$ デアル事ヲ知ル. $\frac{dy}{dx}$ 及ビ A ノ表記ニヨル値ニハ僅少ノ誤差ガアル.

t	c	$\frac{\delta c}{\delta t}$	v
0	0	9950	100
0.0001	0.995	9850	100
0.0002	1.980		
0.0010	9.516	9010	100
0.0011	10.417	8900	100
0.0012	11.307		
0.0100	63.211	3660	100
0.0101	63.577	3630	100
0.0102	63.940		

10. 電壓ガvデアルトキ, 抵抗r「オーム」ニシテ感應係數l「ヘンリー」ナル或ル電線ヲ,t秒間ニ流レル電力ヲc「アンペア」トスル. $r=1$, $l=0.01$ デアツテ, tノ次ノ値ニ對シテcハ既知デアル.

表記ノ數カラ$\frac{\delta c}{\delta t}$ヲ求メ,且ツ次式ヲ計算セヨ.

$$v=rc+l\frac{dc}{dt}. \qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

此ノ問題ニ於テハ,vハ常數デアル事ヲ知ル.

11. 若シ

$$v=a\sin pt, \qquad\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナラバ, $c=\frac{a}{\sqrt{r^2+l^2p^2}}\sin(pt-e)$. ココニ $\tan e=\frac{lp}{r}$ デアル事ハ既知デアル. (§117 參照).

今 $a=200$, $p=30\pi$, $r=1$, $l=0.01$ トスル. 次ノ各tノ値ニ對シテcヲ計算シ,且ツ表記セヨ. 表記シタ數ニヨツテ$\frac{dc}{dt}$ヲ求メ,且ツ前問ノ(1)カラv

ヲ計算セヨ. 次ニ(2)カラ v ノ眞ノ値ヲ求メ,各自ノ答ト比較セヨ.

	c	$\frac{\partial c}{\partial t}$	v	眞ノ v
0.0150	88.96			
		10800	197.5	
0.0151	90.04			197.8
		10800	198.6	
0.0152	91.12			

12. 重サ W 封度ノ物體ヲ,螺旋形「ゼンマイ」ノ端ニ吊ルス. ソノ「ゼンマイ」ノ剛度ハ1封度ノ張力ニ對シテ h 呎伸ビルノデアル. ソレガ振動シ, t 秒後ニ,ソノ物體ハ中央ノ位置カラ s 呎ニ在ル. 若シ $g=32.2$ ナラバ,

$$\frac{W}{g}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{s}{h}=0, \quad 即チ \quad \frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{Wh}s=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

デアル.

此ノ方程式ノ解(§121參照)ハ, n^2 ガ g/Wh デアルナラバ,

$$s=A\sin(nt+e), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

デアル. A 及ビ e ハ任意ノ値ヲトルモノトスル.

$h=0.01$, $W=64.4$, $A=1$, $e=0$ トスル. t ノ次ノ各値ニ對シテ s ヲ計算セヨ. 又表記シタ數値ニヨツテ, $\frac{d^2s}{dt^2}$ ヲ求メ,コレガ(1)ヲ滿足スルカ否カヲ試ミヨ. 角 nt ハ「ラディアン」デアル事ヲ忘レテハナラヌ. 若シ(1)ニ於ケル項ノ和ガ零デナイナラバ,ソレヲ「誤差」ト言フ.

t	s	$v=\frac{\partial s}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{d^2s}{dt^2}$	誤差
0.070	0.47500939			
		6.21044		
0.071	0.48121983		−23.96	+0.10
		6.18648		
0.072	0.48740631			
0.140	0.83599796			
		3.85945		
0.141	0.83985741		−42.33	−0.34
		3.81712		
0.142	0.84367453			

學生ハ,七桁ノ表ヲ以テシテモ尚眞ノ法則ヲ十分正確ニ例證スル事ハ

出來ナイ事ヲ知ツタデアラウ.

此ノヤウナ問題ハ煩雜デアルガ,併シ多クノ有用ナ事項ヲ敎ヘルモノデアル.

§100. 表ノ法

y ト x トノ表ニヨツテ,一層正確ニ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メル事.

今 y ハ x ノ等シイ間隔ノ値ニ對シテ表記セラレテキルモノトスル. 一例ヲ採ツテ考ヘヨウ.

x	y	δy		
90	1463			
		302		
95	1765		49	
		351		8
100	2116		57	
		408		5
105	2524		62	
		470		8
110	2994		70	
		540		8
115	3534		78	
		618		
120	4152			

吾々ハ左ニ示シタヤウニ次々ノ差ヲ表記スル. 今 $x=105$ ニ對スル $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨウトスル.

ココデ408ノ五分ノ一ハ明ラカニアマリ小デアリ, 470ノ五分ノ一ハアマリ大デアル. 其ノ平均ハ何レモ通常正シクハナイ. 今ココデ證明ハシナイガ, (ソレハ蒸氣ニ關スル拙著ノ240頁ニ證明シテアル). テーラーノ定理[1]カラ導キ出シタ法則ガアツテ,此ノ法則ヲ斯樣ナ場合ニ用ヒル.[2] x ノ差ヲ h トスル(此ノ場合ハ5). 太文字ニ注意セヨ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}(408+470)-\frac{1}{10}(70-57)+\frac{1}{60}(8+8)\right\},$$

此ノ場合ニハ $\frac{dy}{dx}=87.59$.

特殊ナ場合ニ於テ,若シ適當ナ實驗式ヲ知ツテキルナラバ,僅カ二ツノ項カラデモ $\frac{dy}{dx}$ ヲ極メテ正確ニ求メル事ガ出來ル. 例ヘバ,全然確カデハナイガ,可成リ確實ニ蒸氣ノ壓力ト溫度トノ關係式ハ,

(1) §142參照.

(2) 斯樣ナ法則ノ詳論ニ就イテハ,「ザンデン, 實用解析學」(小倉, 近藤兩氏共譯), 117, 130頁等ヲ見ヨ.

$$\theta=a+bp^{0.2},$$

$$\frac{d\theta}{dp}=0.2bp^{-0.8}$$

デアル事ヲ知ツテキル.

故ニ b ダケヲ知ル必要ガアル.

今 $p=2524$ ノトキ, θ ハ 105; $p=2994$ ノトキ, θ ハ 110 デアル事ハ解カツテキルモノトシ,カクテ θ ガ 105 ノトキ, $\frac{dp}{d\theta}$ ヲ求メヨウトスル.

$$105=a+b\,2524^{0.2},$$

$$110=a+b\,2994^{0.2},$$

$$5=b(2994^{0.2}-2524^{0.2})=0.1665\,b,\ 卽チ\ b=30.003,$$

$$\frac{d\theta}{dp}=0.2\times 30.003\times 2524^{-0.8}\quad 卽チ\quad \frac{dp}{d\theta}=87.7.$$

第二十一章　說明題

§101. 微分記號

吾々ガ x 及ビ y ナル文字ヲ使用スルトキハ,曲線ニ就イテ一般ニ論ズルトキデアル. 卽チ, $\frac{dy}{dx}$ ハ任意ノ點ニ於ケル曲線ノ勾配デアリ (卽チ,曲線ノ切線ガ x 軸トナス角ノ正切), 又 y ノ積分(之ヲ $\int y.dx$ ナル記號デ表ハス) ハ曲線ノ面積デアル. 併シ, x 及ビ y ハ何カ物理的ノ量デアルカモ知レナイシ,又其ノ他ノ文字ヲ用ヒルカモ知レナイト言フ事ヲ銘記スベキデアル.

例ヘバ,若シ或ル物體ガ時間 t ニ通過シタ空間ノ距離ヲ s トスレバ, $\frac{ds}{dt}$ ハ其ノ物體ノ速度デアル. 又 $\frac{dv}{dt}$ ハ物體ノ加速度ト呼バレル. 其ノ他種々ナ記號ガ使用サレル.

空間ノ距離ヲ s トシ,時間ヲ t トスル.

速度ヲ v, 或ハ $\frac{ds}{dt}$ トスル. ニユートンハ記號 $\dot{s}$ ヲ用ヒタ.

加速度ヲ $\frac{dv}{dt}$, 或ハ $\frac{d^2s}{dt^2}$ トスル. ニユートンハ記號 $\ddot{s}$ 或ハ $\dot{v}$ ヲ用ヒタ.

加速度ノ變化ノ割合ハ $\frac{d^3s}{dt^3}$ トナルデアラウ.

$\frac{d^2s}{dt^2}$ ハ一ツノ記號デアル事ニ注意セヨ. 卽チ之ハ $\frac{d^2\times s}{d\times t^2}$ ノヤウナ代數式トシテ取扱フベキモノデハナイ, 此ノ記號ハ單ニ, s ヲ t ニ關シテ二回微分シタ事ヲ示スニ過ギナイ.

x ヤ y ノ外ノ文字ヲ用ヒル面白イ例トシテ,運動スル小物體ニ蓄ヘラレタ**運動ノ「エネルギー」**ヲ考ヘテ見ヨウ. 此ノ物體ノ質量ヲ m, 速度ヲ v トシ,又時間 δt ニ僅カナ距離 δs ヲ行クモノトシ, 其ノ間之ニ働ク力 F ニヨツテ速度 δv ヲ得ルモノトスル. 物體ガ得タ「エネルギー」δE ハ $F.\delta s$ デアツテ,之ガ距離 δs 間ニ働ク力 F ニヨツテナサレタ仕事デアル. 然ルニ, F ハ加速度ニ m ヲ掛ケタモノデ,卽チ $F=m\frac{\delta v}{\delta t}$ デアリ,又 $\delta s=v.\delta t$ デアル. 從ツテ

$$\partial E=F.\partial s=m\frac{\partial v}{\partial t}v.\partial t=mv.\partial v,\ 卽チ\quad \frac{\partial E}{\partial v}=mv.$$

併シ,此ノ事ハ ∂s, ∂t 等ヲ限リナク小サクシタトキニノミ,全ク眞デアル. 故ニ

$$\frac{dE}{dv}=mv.$$

卽チ言葉デ云ヘバ,「v ニ關スル E ノ微分係數ハ mv デアル」. 故ニ,若シ v ニ關シテ積分スレバ,

$$E=\frac{1}{2}mv^2+c.$$

但シ,c ハ或ル常數デアル. $v=0$ ナルトキ, $E=0$ デアルカラ, $c=0$ デナケレバナラナイ. 故ニ次ノ關係式ヲ得ル.

$$E=\frac{1}{2}mv^2.$$

x 及ビ y ノ外ノ文字ヲ用ヒテ微分及ビ積分ヲ練習セヨ. 此ノ場合ニハ,$\frac{dE}{dv}$ ハ前ノ $\frac{dy}{dx}$ ノ事デアル. 若シ,$\frac{dy}{dx}=mx$ ナル關係ガアツタナラバ $y=\frac{1}{2}mx^2+c$ デアル事ハ一層容易ニ知ラレル事デアラウ. 併シ,諸君ハ x トカ y トカノ文字ニ拘泥シテハナラナイ.

§102. オームノ法則

若シ,學生ガ**電氣**ニ就イテ何カ知ツテヰルナラバ,彼ヲシテ改善サレタオーム[1]ノ法則[2]

$$v=rc+l\frac{dc}{dt},$$

ヲ普通ノ言葉デ言ハシテ見ヨ.

r (オーム)及ビ l(ヘンリー)ハ既知ノ常數デアル事ニ注意セヨ. 從ツテ, c 及ビ $\frac{dc}{dt}$ ガ時間 t ノ既知ノ不定函數デアルナラバ,電壓 v

(1) Georg Simon Ohm (1787—1854), 獨逸ノ物理學者.

(2) 實驗ノ結果ニ依レバ, 導體ヲ流レル電流ノ强サ i ハ, 其ノ兩端ニ於ケル電位差 V ニ比例シ, 抵抗 R ニ反比例スル. 卽チ i ヲ「アムペア」デ, V ヲ「ボルト」デ, R ヲ「オーム」デ測レバ, $i=\frac{V}{R}$. 之ガモトノオームノ法則 (Ohm's law) デアル.

ハ求メル事ガ出來ル.「感應係數」l ハ,電流ガ 1 秒ニ 1「アンペア」ノ割合デ增加スルトキ,「ボルト」ニ於ケル逆電動力ト考ヘラレル.

§103. 積分問題

例 1. 次ノ積分ヲ求メヨ. 答ニハ常數ヲ省ク.

$\int x^2.\,dx.$ 答 $\frac{1}{3}x^3.$ $\int\sqrt[3]{v^2}.\,dv$, 又ハ $\int v^{\frac{2}{3}}.\,dv.$ 答 $\frac{3}{5}v^{\frac{5}{3}}.$

$\int v^2.\,dv.$ 答 $\frac{1}{3}v^3.$ $\int t^{-\frac{1}{2}}.\,dt.$ 答 $2t^{\frac{1}{2}}.$

$\int v^{-s}.dv.$ 答 $\frac{1}{1-s}v^{1-s}.$ $\int\frac{dv}{v+a}.$ 答 $\log(v+a).$

例 2. 氷ト水,又ハ水ト蒸氣トヲ同ジ溫度デ一緖ニスルナラバ,**熱力學**ニ於テ,次ノ關係ガ證明セラレル.

若シ, s_2 ガ高溫狀態ニ於ケル材料 1 封度ノ體積ヲ立方呎デ表ハシタモノデアリ, s_1 ガ低溫狀態ニ於ケル材料 1 封度ノ體積デアルナラバ,

$$l=t(s_2-s_1)\frac{dp}{dt}$$

デアル. 但シ, t ハ絕對溫度 (卽チ $t=273+\theta°C$) デアリ, l ハ呎封度ニ於ケル材料 1 封度ノ比熱デアリ, p ハ 1 平方呎ニ就イテノ壓力ヲ封度デ表ハシタモノデアル.

(i) 氷ト水.

氷ト水トノ混合ニ於テハ, $s_1=0.01747$, $s_2=0.01602$, $t=273$ ($0°C$ ニ對應スル), $p=2116$ 平方呎封度及ビ $l=79\times1400$ デアル. 故ニ

$$\frac{dp}{dt}=\frac{79\times1400}{273(0.01602-0.01747)}=-279400.$$

故ニ,氷ノ融解溫度ハ壓力ガ增加スルニ從ツテ減ズル. 卽チ,壓力ハ氷ノ融解點ヲ下ゲル. 換言スレバ,壓力ハ氷ガ融ケル方ニ導ク. $\frac{dp}{dt}$ ノ定量的意味ヲ考察セヨ. 融解點ハ 279400 平方呎封度,卽チ 132 氣壓ノ增加ニ對シテ 1 度ノ割合デ低下スル.

(ii) 水ト蒸氣.

任意ノ溫度ニ於テ,水蒸氣 1 封度ノ體積ヲ s_2 立方呎デ正確ニ測定スル實驗ハ不可能ノヤウニ見エル. 水ニ對スル s_1 ハ既知デアル. レニヨーノ實驗ニ依リ次ノ表ヲ有スルモノトシテ,數個ノ溫度ニ於テ,上ノ公式カラ, s_2-s_1 ヲ計算セヨ. 數字ヲミレバ自ラ解カルデアラウ. 私ノ計算ハ

$105°C$ = 對スルモノデアル.

$\theta°C$	t 絕對溫度	吸封度ヲ單位トスル壓力	$\frac{\partial p}{\partial t}$	假定シタ $\frac{dp}{dt}$	l 吸封度	s_2-s_1
100	373	2116.4				
105	378	2524	81.5 94	87.8	742500	22.38
110	383	2994				

今, $105°C$ = 對スル$\frac{dp}{dt}$ノ値ハ 81.5 ト 94 トノ和ノ半分デアルト假定シテキル. 何トナレバ, §100 ノ方法ニヨツタリ,又ハ曲線ヲ描イタリシテ,其ノ値ヲ一層正確ニ求メル事ハ,私ノ現在ノ目的ニ對シテハ價値ガナイカラデアル.

$$s_2-s_1=742500\div(378\times87.8)=22.26.$$

今,冷水ニ對スル s_1 ハ 0.016 デアル. 而シテ之ハ曖昧ニ對スル何等カノ修正ヲナスベキ價値ハナイ. 故ニ, $s_2=22.4$ トスル. 之ハ私ノ現在ノ目的ニ對スル正シイ答ニ十分近イ値デアル.

例 3. 點 (x, y) ニ於ケル任意ノ曲線ノ**曲率半徑** r ハ

$$r=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \Big/ \frac{d^2y}{dx^2}$$

デアル.[1]

(1) 拋物線 $y=ax^2$ ノ頂點,即チ $x=0$ ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ.

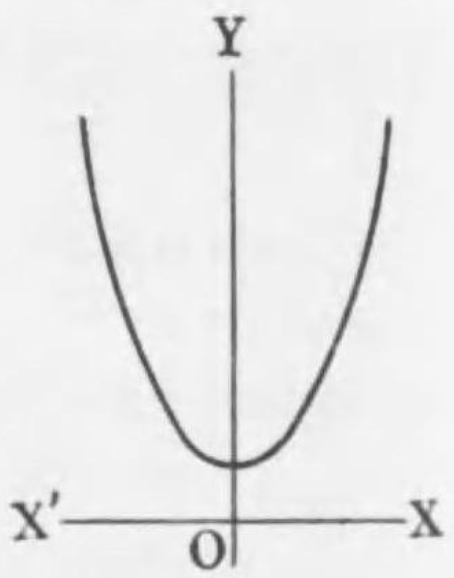
今, $\frac{dy}{dx}=2ax$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2a$. 故ニ, $x=0$ ニ於テ, $\frac{dy}{dx}=0$.

故ニ $r=\frac{1}{2a}$.

(2) 次ノ「カテナリー」[2]ノ曲率半徑ヲ求メヨ.

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right). \qquad \text{答} \quad r=\frac{1}{c}y^2.$$

頂點ニ於テハ, $x=0$, $y=c$. 故ニ, $r=c$.



〔補〕第 20 圖

例 4. 一端ヲ固定シ,他ノ端ニ重サ W ヲ荷重シタ長サ l ナル一樣ナ梁ノ中心線ヲ考ヘヨ. 今固定端カラ截斷面マデノ距離ヲ x トスル. 荷重シナイトキノ直線ノ形カラ此ノ中心線ノ彎曲ヲ y トスレバ,

$$y=\frac{W}{EI}\left(\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{6}x^3\right).$$

ナル關係ノアル事ハ既知デアル.

(1) $x=0$ ニ於ケル曲率如何.

今 $\frac{dy}{dx}=\frac{W}{EI}\left(lx-\frac{1}{2}x^2\right)$, 之ハ $x=0$ ニ於テ 0 デアル.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{W}{EI}(l-x)$, 之ハ $x=0$ ニ於テ $\frac{Wl}{EI}$ デアル.

故ニ,曲率ハ $\frac{Wl}{EI}$ デアル.

(2) $x=\frac{1}{2}l$ ニ於ケル曲率ヲ求メヨ. 答 $\frac{Wl}{2EI}$.

(3) $x=l$ ニ於ケル曲率ヲ求メヨ. 答 0.

梁ニ於ケル總テノ實用的場合デハ, $\frac{dy}{dx}$ ハ 1 ニ比シテ無視スルニ足ルダケ小デアル. 故ニ私ハ(2)及ビ(3)ニ於テ之ヲ 0 トオイタノデアル.

(1) コノ公式ノ證明ニ就イテハ, 普通ノ微分學書ヲ見ヨ.

(2) 「カテナリー」(catenary)ハ鎖線トモ譯サレル. 鎖, 綱等ノ長サノ割ニ相當一樣ニ重サノアルモノヲ引キ張ツタトキ作ル形デアル. (〔補〕第 20 圖).

第二十二章　極大及極小

§104. 微分法ニ依ル極大及極小ノ求メ方

學生ハ今ヤ,§84ニ於テ取扱ツタ問題ヲ正確ニ解クコトノ容易デアル事ヲ知ルデアラウ.

§84ノ(1);　一數 n ヲ二部分ニ分チ,其ノ積ヲ極大ナラシメヨ.

解　一部分ヲ x トスレバ,他ノ部分ハ $n-x$ デアル. 其ノ積ヲ y トスレバ,

$$y=x(n-x),\quad 即チ\quad y=nx-x^2.$$

サテ,極大或ハ極小ノ點ニ於テハ曲線ノ勾配,即チ $\frac{dy}{dx}$ ハ 0 デアル. 然ルニ,

$$\frac{dy}{dx}=n-2x.$$

故ニ之ヲ 0 ニ等シイト置ケバ,

$$n-2x=0,\qquad 2x=n,\qquad 故ニ\qquad x=\frac{n}{2}.$$

即チ所要ノ答ヲ得タノデアル.

此ノ方法ニ於テハ,求メ得タモノガ極大デアルカ,ソレトモ極小デアルカヲ判別スル事ノ出來ナイノハ事實デアル. 併シ,他ノ方法デ之ヲ求メル際ノヤウニ大キイ困難ハ少シモナイ. 其ノ判別ニ就イテノ代數的方法ハココニ述ベナイコトニスル.

§84ノ(2);　一數ト其ノ逆數トノ和ガ極小トナルノハ,如何ナルトキカ. 即チ,x ヲ其ノ數トスレバ,

$$y=x+x^{-1}.$$

ガ極小トナルノハ,イツデアルカ.

答　$\frac{dy}{dx}=0$ ナルトキ,即チ $1-x^{-2}=0$, 即チ $x^2-1=0$ (1) ノトキデアル.

故ニ　$x=1.$

(1) 之ヨリ $x=1$ ノ外ニ $x=-1$ ヲ得ル. 之ハ極大トナル場合ノ答デアル.

§84ノ(3);　半徑 x ナル圓壔形小包ノ體積 v ハ $\frac{dv}{dx}$ ガ 0 ナルトキ,極大デアル. 今

$$v=6\pi x^2-2\pi^2x^3,^{(1)}\quad 從ツテ\quad \frac{dv}{dx}=12\pi x-6\pi^2x^2$$

デアル. 之ヲ 0 ニ等シイト置イテ $6\pi x$ デ割レバ, $2-\pi x=0$, 即チ $x=\frac{2}{\pi}$ ヲ得ル. 之レ方眼紙ヲ用ヒテ得タ結果デアル.

§84ノ(4);　n ヲ二部分ニ分チ,其ノ一部分ノ自乘ノ a 倍ト他ノ部分ノ自乘ノ b 倍トノ和ガ極小デアルヤウニセヨ.

解　前ノヤウニシテ

$$y=ax^2+b(n-x)^2,$$

即チ　$y=ax^2+bn^2-2bnx+bx^2$,　即チ　$y=(a+b)x^2+bn^2-2bnx.$

故ニ　$$\frac{dy}{dx}=2(a+b)x-2bn.$$

之ヲ 0 ニ等シイト置ケバ所要ノ答ヲ得ル.

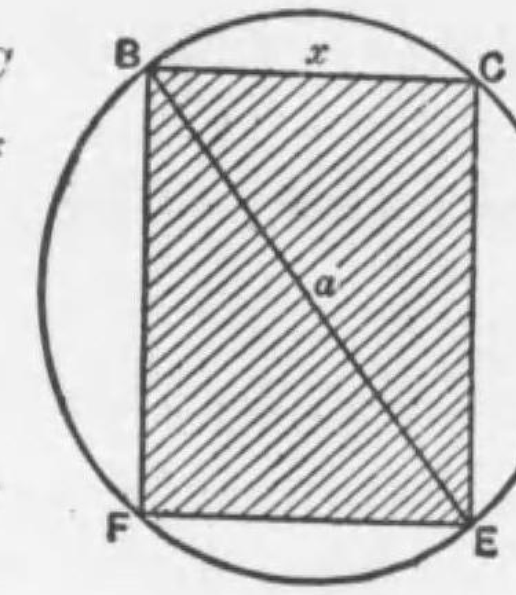
$$x=\frac{bn}{a+b}.$$

§84ノ(6);　與長ノ角梁ノ強度ハ,或ル特殊ナ方法デ荷重シ,且ツ支持スルトキニハ,其ノ截斷面ノ幅ト其ノ厚サノ自乘ノ積ニ比例スル. 若シ或ル圓壔形ノ材木ガアツテ,其ノ直徑ガ a デアルナラバ,ソレカラ切取ラレル最大強度ノ梁ノ大サヲ求メヨ.

解　第27圖ニ於テ,矩形 $BCEF$ ノ幅 BC ヲ x トシ, BE ヲ a トスル. サウスレバ CE ハ $\sqrt{a^2-x^2}$ デアル. 今梁ノ強度ハ $y=BC\times CE^2$ ニ依ル. 之ハ

$$y=x(a^2-x^2),\quad 即チ\quad y=a^2x-x^3$$

デアル. y ガ極大ニナルノハイツデアルカ.



第 27 圖

$$\frac{dy}{dx}=a^2-3x^2.$$

之ヲ 0 ニ等シイト置イテ,

$$3x^2=a^2,\qquad 即チ\quad x=\frac{a}{\sqrt{3}},^{(2)}\qquad 即チ\ 0.5774a.$$

(1) 長サト周トノ和ガ 6 呎ヨリ大キクテハナラヌノデ, $v=\pi x^2(6-2\pi x)$ トナル.

(2) 此ノ外ニ $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ ヲ得テ,之ハ y ノ極小ヲ與ヘルガ,題意ニハ無關係デアル.

ヲ得ル.

§ 84 ノ (7); 與長ノ角梁ノ剛度ハ,或ル特殊ナ方法デ荷重シ,且ツ支持スルトキニハ,其ノ截斷面ノ幅ト厚サノ三乘トノ積ニ比例スル. 若シ,或ル圓壔形ノ材木ガアツテ,其ノ直徑ガ a デアルナラバ,ソレカラ切取ラレル最大剛度ノ梁ノ大サヲ求メヨ.

解　$z=x^6(a^2-x^2)$, 卽チ $z=a^2x^6-x^8$.

之ガ極大トナル事ヲ欲スル.

$$\frac{dz}{dx}=6a^2x^5-8x^7,$$

之ヲ 0 ニ等シイト置キ,且ツ x^5 デ割レバ $x^2=\frac{3}{4}a^2$.

卽チ厚サ $x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$[(1)] 及ビ幅 $=\frac{1}{2}a$ デアル事ヲ知ル.

此等ノ値ハ最大剛度ノ梁ヲ與ヘル.

勿論此等ノ總テノ場合ニ於テ,微分法ハ吾々ニ正確ナ答ヲ與ヘル. 併シ,前述ノ方眼紙ノ方法モソレ自身價値ヲ有スル.

例題. ココニ二ツノ部分カラナル機械ガアルモノトシ,各部分ノ重サヲ x 及ビ y トスル. 今コノ機械ノ費用ハ磅デ,

$$c=10x+3y$$

デアルトスル. 又機械ノ力ハ xy ニ比例スルモノトスル.

若シ,費用ガ一定デアルナラバ,力ヲ極大ナラシメル x 及ビ y ヲ求メヨ.

解　ココニ, $y=\frac{1}{3}(c-10x)$, 故ニ $p=xy$ トスレバ,

$$p=x\times\frac{1}{3}(c-10x)=\frac{c}{3}x-\frac{10}{3}x^2. \qquad \frac{dp}{dx}=\frac{c}{3}-\frac{20}{3}x.$$

今コレヲ 0 ニ等シイトスレバ, $10x=\frac{1}{2}c$. コレヨリ $3y=\frac{1}{2}c$ ヲ得ル. 卽チ二ツノ部分ノ費用ハ等シクナケレバナラナイ.

サテ,之ハ實際ノ機械,例ヘバ發電機デアルトシ, x ハ發電子ノ部分ノ重量デアリ, y ハ其ノ他ノ部分ノ重量デアルトシ,又 10 及ビ 3 ナル數ハ實際ノ工場ノ實驗ニ基イタモノト想像セヨ. 總テノモノガ明ラカニ c ニ比例スルカラ, $c=3$ トセヨ. 然ルトキハ　$p=x-\frac{10}{3}x^2$.

(1) 此ノ場合ニモ亦 $-\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ ヲ得ルシ,又 x^5 デ割ルトキ $x=0$ ヲ棄テテキル. 此等ハ題意ニハ無關係デアル.

次ニ x ト p トヲ坐標トシテ方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描ケ. $x=0.15$ ガ極大ノ力ヲ與ヘルト求メタ事ハテツキリ眞デアル.

x	p
0.10	0.0667
0.12	0.072
0.13	0.07367
0.14	0.07467
0.15	0.075
0.16	0.07467
0.17	0.07367
0.18	0.072

併シ,若シコノ正確ニシテ最良ナ x ノ値ガ用ヒラレナイトモ,其ノ力ハ極大ヨリモ甚ダ小サクハナイト云フ事ハ觀察サレルデアラウ. 事實,方眼紙ハココデ最良ト考ヘラレタ x ノ値ト非常ニ離レタ値デアツテモ,アマリ心配シナイデヨイト云フコトヲ告ゲテクレル. ナル程,私ハ最良ノ答ヲ暗示スルタメニ微分法ヲ用ヒルト云フカモ知レナイ. 併シ,私ハ尙實際上ノ問題ニ於テハ方眼紙ノ方法モ使用スル.

問　題

1.　$ax-bx^2$ ガ極大トナルノハイツカ.　　**答** $x=a/2b$.

2.　$ax-bx^3$ ガ極大トナルノハイツカ.　　**答** $x=\sqrt{a/3b}$.

3.　圓壔形ノ(蓋ノナイ)水槽ノ容積ガ一定デアルナラバ,其ノ表面積[(1)]ガ極小トナルノハイツカ.

解　其ノ半徑ヲ x トシ,長サヲ y トスレバ,容積ハ πx^2y デアツテ,之ヲ

$$\pi x^2y=a \quad \cdots\cdots(1)$$

ト置ク. 表面積ハ

$$\pi x^2+2\pi xy \quad \cdots\cdots(2)$$

デアル. (1)カラ, $y=\frac{a}{\pi x^2}$. コレヲ(2)ニ代入シテ,

$$\pi x^2+\frac{2a}{x},$$

ヲ極小ナラシメネバナラヌ事ヲ知ル.

故ニ

$$2\pi x-\frac{2a}{x^2}=0, \quad 卽チ \quad x^3=a/\pi.$$

$$x^3=\frac{\pi x^2y}{\pi}, \quad 卽チ \quad x=y.$$

卽チ,底ノ半徑ハ其ノ水槽ノ高サニ等シイ.

4.　前問ノ水槽ノ上底ト下底トヲ密閉スル. 其ノ容積一定ナルトキ

(1) 表面積, 半徑, 長サ等ハ總テ水槽ノ內法ニ就イテ言ツテキルモノトスル. 尤モ用材ノ厚サガ水槽ノ大サニ比シ無視サレルモノトスレバ, 外側ニ就イテ考ヘ且ツ容積モ體積トシテヨロシイ.

表面積ガ極小トナルベキ條件ヲ求メヨ. 其ノ答ハ水槽ノ直徑ガ其ノ高サニ等シイコトデアル.

5. 或ル汽船ガ v 節デ航行スルトキ,給料,船價ノ下落,資本金ノ利子,糧食及ビ石炭ナドノ費用ノ總和ガ毎時間 $a+bv^3$ 磅デアル. m 哩ノ航海ニ對シテ,總費用ヲ最小ニスルタメニハ速度ヲ如何ニスベキカ. コノ場合,所要ノ時間ハ m/v デアル. 從ツテ總費用ハ $m(a+bv^3)/v$ デアル. 故ニ,$av^{-1}+bv^2$ ヲ極小ナラシメヨウトスル. 即チ

$$-av^{-2}+2bv=0.$$

故ニ,最良ノ速度ハ $v=\sqrt[3]{a/2b}$ デアル.

學生ハ,今求メタ速度ヲ持ツテキル或ル貨物船ノ眞ノ値トシテ $a=4$, $b=0.001$ ヲ取ツテヨロシイ.

6. n ノ二ツノ因數ノ各々ノ自乘ノ和ガ極小デアル. 其ノ因數ヲ求メヨ. x ヲソノ一ツトスレバ,他ノ因數ハ n/x デアリ,從ツテ $y=x^2+\frac{n^2}{x^2}$ ガ極小デアル筈デアル. $\frac{dy}{dx}=2x-\frac{2n^2}{x^3}$. 而シテ之ハ $x^4=n^2$, 即チ $x=\sqrt{n}$ ナルトキ 0 デアル.

7. 容器ノ孔カラ噴出スル瓦斯ガアル. 器内デハ壓力 p_1 ニシテ,外部ノ氣壓ハ p_0 ナルトキ,一秒間ニ噴出スル瓦斯ノ重量ハ, p_0/p_1 ヲ x トシ,或ル既知ノ常數ヲ γ トスレバ,

$$\frac{1}{\gamma}\sqrt{1-x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

ニ比例スル. コノ値ガ極大トナルハイツカ.

即チ, $x^{\frac{2}{\gamma}}-x^{1+\frac{1}{\gamma}}$ ガ極大トナルハイツカ.

コレヲ x ニ關シテ微分シテ, 0 ニ等シイト置ケバ,

$$x=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

空氣ノ場合ニ於テ $\gamma=1.41$, 故ニ $p_0=0.527p_1$. 即チ,外部ノ壓力ガ内部ノ壓力ノ半分ヨリ少シ大キイトキニ一秒間ニ孔カラ噴出スル量ガ極大デアル. 濕ツテキルカ,又ハ乾イテキル蒸氣ノ場合ニハ, $\gamma=1.13$ デアル所ノ完全氣體デアルト假定シテヨイ. 此ノ場合ノ答ハ $p_0=0.578p_1$ デアル.

8. 或ル假想蒸汽機關ノ汽力圖ニ依レバ,蒸氣1立方呎ニ就イテナサレタ仕事ハ

$$w=144p_1(1+\log r)-144p_3r,$$

デアル. 但シ, p_1 ト p_3 トハ蒸氣ノ始壓及ビ背壓デアツテ, r ハ遮汽ノ割合デアル.(即チ,遮汽トハ $\frac{1}{r}$ 番目ノ衝ニ於テナサレル.).

$\log r$ ノ對數ハ自然對數デアル. p_1 ト p_3 トガ一定デアルトキ, w ヲ極大ナラシメル r ノ値ヲ求メヨ.

$$\frac{dw}{dr}=144\frac{p_1}{r}-144p_3.$$

之ヲ 0 ニ等シイト置ケバ,求メル r ハ p_1/p_3 デアル事ガ解ル.

1 平方吋ニ就キ $p_1=100$ 封度トシテ,次ノ場合ニ於テ最良ノ r ノ値ヲ求メヨ.

(a) 凝汽機關デ, $p_3=2$ トスル. 求メル r ハ 50 デアル. 衝ノ $\frac{1}{50}$ ニ於テ遮汽スレバ,蒸氣 1 立方呎ニ就キ最モ良イ指示「エネルギー」ヲ與ヘル.

(b) $p_3=10+2$, 10 ハ機關ノ摩擦ヲ示ス. 最良ノ r ノ値ハ $100\div12$, 即チ $8\frac{1}{3}$ デアル. 即チ,衝ノ $\frac{3}{25}$ ニ於テ遮汽スレバ,蒸氣1立方呎ニ就キ「シャフト」ノ最良ノ「エネルギー」ヲ與ヘル.

(c) 非凝汽機關デ, $p_3=17$ トスル. 最良ノ r ノ値ハ $100\div17$, 即チ衝ノ 0.17 ニ於テ遮汽スレバ,蒸氣 1 立方呎ニ就イテノ極大ノ指示「エネルギー」ヲ與ヘル.

(d) $p_3=17+8$, 8 ハ機關ノ摩擦ヲ表ハス. 最良ノ r ノ値ハ $100\div25$, 即チ 4 デアル. 故ニ衝ノ $\frac{1}{4}$ ニ於テ遮汽スレバ,蒸氣 1 立方呎ニ就キ,「シャフト」ノ最良ノ「エネルギー」ヲ與ヘル.

9. 或ル電導體ヲ使ヒ續ケテ生ズル浪費ヲ,次ノヤウニ擧ゲル事ガ出來ル.

(1) 電氣抵抗ノ損失. 電流ガ導體ヲ往復スルノニ, 1 哩ニ就イテ抵抗ヲ r トシ,電流ヲ C「アムペア」トスレバ, C^2r「ワット」ノ値.

(2) 導體ノ費用ノ利子及ビ其ノ價格ノ下落ニ基ク損失. 毎年ノ損失總額ハ

$$y=C^2r+\frac{a^2}{r}+b,$$

ニ比例スルコトハ容易ニ證明サレル. 但シ a 及ビ b ハ,銅價,「ケーブル」製造費及ビ其ノ施設費,又ハ電氣「エネルギー」ノ價ナドニ基ク常數デアル. a ハ 17 ト 40 トノ間ニトルコトガ出來ル. y ヲ極小ナラシメル爲ニハ,

$$\frac{dy}{dr}=C^2-a^2r^{-2}=0,\ \text{卽チ}\ Cr=a.$$

故ニ若シ $a=25$ デアルナラバ, $r=\frac{25}{C}$.

銅線ノ截斷面ガ a 平方吋デアルナラバ, r ノ近似値ハ $0.04/a$ デアル. 從ツテ $0.04aC=25$, 卽チ $aC=625$.

此ノ事ハ銅 1 平方吋ニ就イテ 625「アムペア」ヲ有スルトキ最モ經濟的デアルコトヲ意味スル.

10. $$4x^3+3x^2-168x+10,$$

ヲ極小ナラシメル x ノ正ノ値ヲ求メヨ. **答** $x=3.5$

11. $$3\sin x+2\cos x,$$

ヲ極大ナラシメル x ノ値ヲ

(1) 微分法ニ依リ, (2) 方眼紙ヲ用ヒテ, (3) 幾何學的方法ニ依ツテ求メヨ. **答** 0.9826, 卽チ 56°.3

第二十三章 曲線

§105 曲線ノ勾配ト切線及法線

新ラシイ曲線ノ方程式ガ與ヘラレルトキニハ,實際家ハ方眼紙上ニ其ノ「グラフ」ヲ描キ得ル自分ノ力ヲ,大ニ頼ミニシナケレバナラナイ. 若シ吾々ガ $\frac{dy}{dx}$ 卽チ勾配ヲ,到ル所ニ求メルナラバ,之ニ依ツテ屢々多大ノ知識ヲ得ル.

曲線上ノ一點ヲ (x_1, y_1) トシ,此ノ點ニ於ケル**切線**ノ方程式ヲ求メヨウトスルナラバ,單ニ (x_1, y_1) ヲ通リ此ノ點ニ於ケル曲線ノ勾配ト同ジ勾配ヲ有スル直線ヲ求メサヘスレバヨイ. **法線**ハ點 (x_1, y_1) ヲ通リ,且ツ此ノ點ニ於ケル曲線ノ勾配ノ逆數ヲ負トスル値ヲ其ノ勾配トスル直線デアル.

例 1. 拋物線 $y=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ ノ上ノ一點ヲ $x=4$, $y=3$ トスル.〔之ガ實際ニ曲線上ノ點デアルカ否カヲ驗セ.〕此ノ點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 此ノ點ニ於ケル勾配ハ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ニ $x=4$ ヲ代入シタ値 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$, 卽チ $\frac{3}{8}$ デアル. 故ニ求メル切線ハ

$$y=a+\frac{3}{8}x$$

デアル. a ヲ求メルタメニ, $x=4$, $y=3$ ナル點ガ切線上ノ點デアルカラシテ,コノ値ヲ代入シテ, $3=a+\frac{3}{8}\times 4$ ヲ得ル. 從ツテ $a=1\frac{1}{2}$ デアリ,求メル切線ハ

$$y=1\frac{1}{2}+\frac{3}{8}x.$$

例 2. 曲線 $y=2+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{5}}$ ノ上ノ一點ヲ $x=32$, $y=3$ トスル. 此ノ點ニ於ケル法線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 コノ點ニ於ケル曲線ノ勾配ハ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{10}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{160}$ デアリ,從ツテ法線ノ勾配ハコノ逆數ノ負,卽チ -160 デアル.

故ニ求メル法線ハ $y=a-160x$ デアル. 而シテコレハ點 $x=32$, $y=3$ ヲ通ルカラ, $3=a-160\times 32$.

故ニ $a=5123$ デアリ,法線ハ $y=5123-160x$ トナル.

例 3. 曲線 $y=ax^{-n}$ ニ於テ,勾配ガ b デアルヤウナ點ヲ求メヨ.

解 $\dfrac{dy}{dx}=-nax^{-n-1}$ デアルカラ,カヤウナ點ノ x ハ $-nax^{-n-1}=b$ ヲ滿足スル. 故ニコレニヨツテ x ヲ知リ,次ニ曲線ノ方程式ニヨツテ y ヲ知ル.

§106 切線及法線ノ方程式ノ求メ方

若シ (x_1, y_1) ガ直線上ノ一點デアリ,且ツ此ノ直線ノ勾配ガ b デアルナラバ,コノ直線ノ方程式ハ最モ速カニ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=b,$$

ト書カレルト言フコトハ容易ニ知ラレル所デ,且ツ記憶スルノニ都合ガヨイ.

故ニ曲線上ノ點 (x_1, y_1) ニ於ケル曲線ノ切線ノ方程式ハ,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{dy}{dx}\text{(其ノ點ニ於ケル)}$$

デアリ,法線ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=-\frac{dy}{dx}\text{(其ノ點ニ於ケル)}$$

デアル.

例 1. 曲線 $x^m y^n=a$ 上ノ點 (x_1, y_1) ニ於ケル曲線ノ切線ト法線トヲ求メヨ.

答 切線ハ $\dfrac{m}{x_1}x+\dfrac{n}{y_1}y=m+n$; 法線ハ $\dfrac{n}{y_1}(x-x_1)-\dfrac{m}{x_1}(y-y_1)=0$.

例 2. $x=a$ ニ於ケル拋物線 $y^2=4ax$ ノ切線及ビ法線ヲ求メヨ.

答 $y=a+x$, $y=3a-x$.

例 3. 曲線 $y=a+bx+cx^2+ex^3$ ノ上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル曲線ノ切線ヲ求メヨ.

答 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=b+2cx_1+3ex_1^2$.

§107. 切線影及法線影

P (第28圖) ハ曲線 BPC 上ノ一點デアツテ,コレヲ通ツテ切線 PA 及ビ法線 PD ヲ引ク. OX 及ビ OY ヲ軸トスル. $OR=x$, $RP=y$, $\tan PAX=\dfrac{dy}{dx}$; 此ノトキ距離 AR ヲ**切線影**ト言フ. 之ハ $y\div\dfrac{dy}{dx}$ デアルコトヲ證明セヨ.

距離 RD ハ**法線影**ト呼バレル. 之ハ明ラカニ $y\dfrac{dy}{dx}$ デアル.

問 題

1. 拋物線 $y=mx^2$ ノ切線影及ビ法線影ノ長サヲ求メヨ.

$\dfrac{dy}{dx}=2mx$, 故ニ

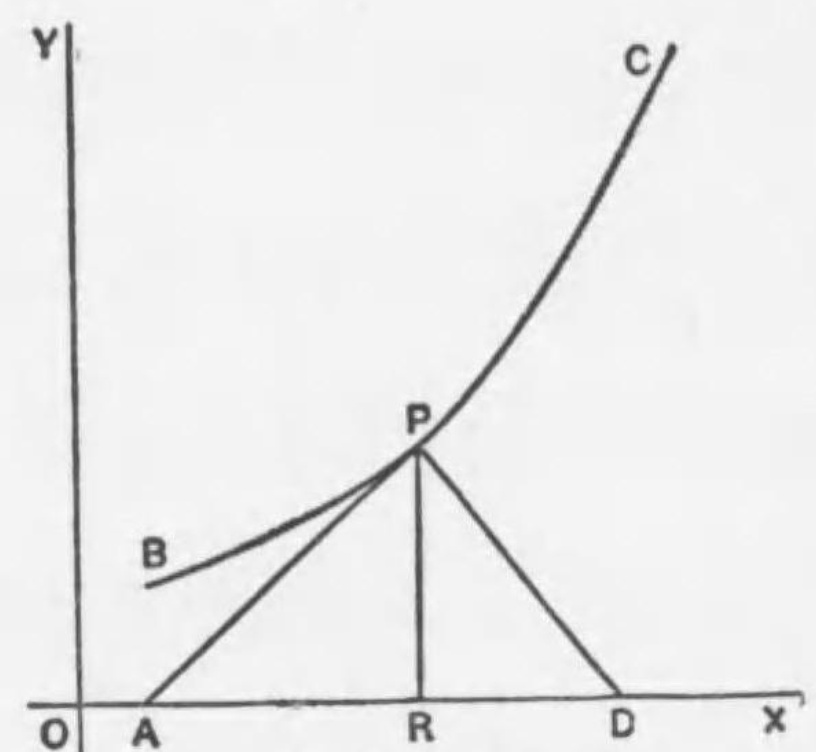
切線影 $=mx^2\div 2mx$, 即チ $\dfrac{1}{2}x$.

法線影 $=y\times 2mx$, 即チ $2m^2x^3$.

2. $y=mx^n$ ノ切線影ノ長サヲ求メヨ.

$\dfrac{dy}{dx}=mnx^{n-1}$, 故ニ

切線影 $=mx^n\div mnx^{n-1}=\dfrac{x}{n}$.



第 28 圖

3. 法線影ノ長サガ一定デアル曲線ヲ求メヨ. 即チ

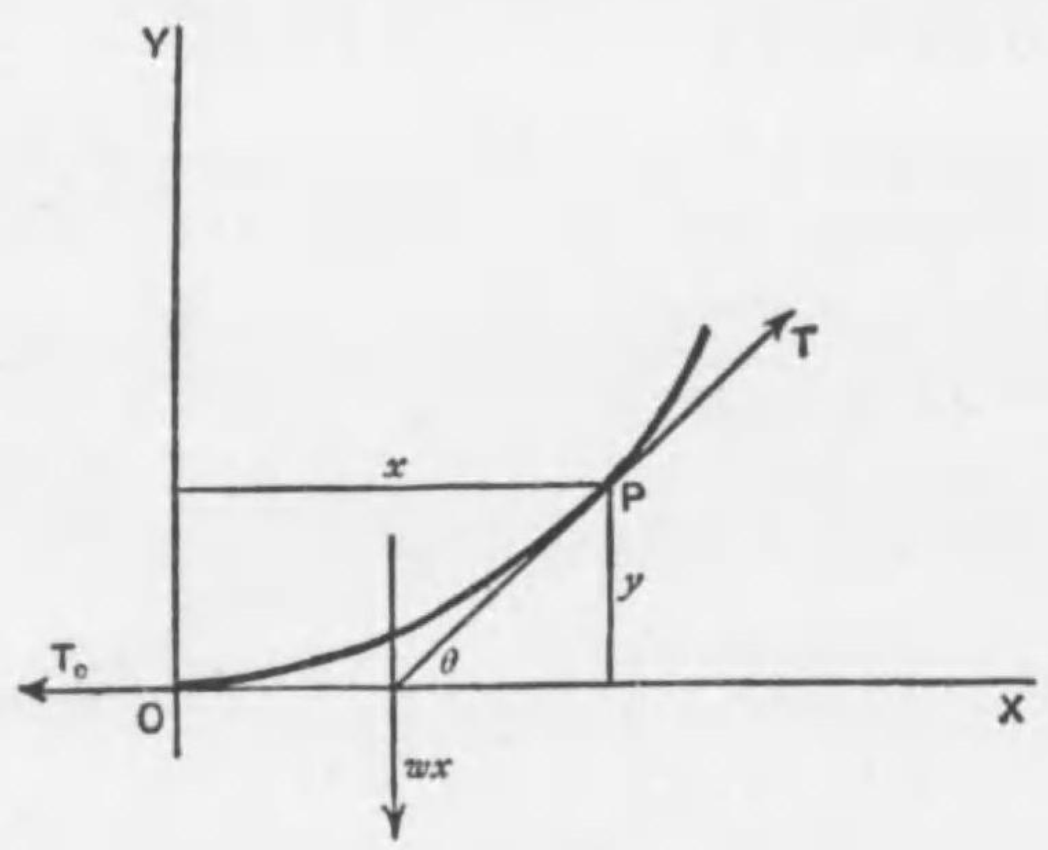
$$y\frac{dy}{dx}=a,\qquad \text{又ハ}\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{a}y.$$

y ニ關スル y ノ積分ハ $\dfrac{1}{2}y^2$ デアル. 故ニ $x=\dfrac{1}{2a}y^2+$常數 b, トナル. コレハ, b ニ任意ノ値ヲ與ヘレバ,一ツノ曲線ノ方程式トナル. ソレハ明ラカニ一群ノ拋物線ノ中ノ或ル一ツデアル.

第二十四章　說明題

§108. 說明題

(1) **吊リ橋**ノ鎖ハ派出シタ棒ヲ用ヒテ荷[1]ヲ支ヘル．其等ノ荷重ハ大體相等シク,且ツ等距離ニ置イテアル．今鎖ガ連續的ニ荷重サレ,其ノ荷重ハ水平ノ長サノ一單位毎ニ w デアルモノトスル．極メテ平ラカデ一樣ナ任意ノ鎖,卽チ電信線等殆ンドコノ狀態ニ在ル．コノ場合,鎖ノ形ハ如何デアルカ．O ヲ最低點トセヨ．OX ハ O ニ於ケル鎖ノ切線デアッテ,O ニ於テハ水平デアル．OY ハ鉛直デアル．P ヲ鎖ノ上ノ任意ノ點トシテ,ソノ坐標ヲ (x,y) トスル．OP ナル部分ノ平衡ヲ考ヘヨ．OP ハ,O ニ於ケル水平張力 T_0 ト,P ニ於ケル切線ノ方向ノ力 T ト,OP ニ鉛直ニ働ク合成重力 wx トノ三ツノ力ノ作用ニヨツテ平衡ヲ保ツ．吾人ハ剛體ニ働ク力ノ法則ヲ用ヒル．剛體トハソレニ力ガ働イテモ其ノ形ヲ毫モ變ジナイ物體デアル．



第　29　圖

三角形ヲ描イテ,其ノ三邊ヲ上ノ三力ニ夫々平行ナラシメルト此等ノ邊ハ其等ノ力ヲ同ジ尺度デ表ハス．若シ,θ ガ T ノ水平線ニ對スル傾斜デアルナラバ,(第30圖參照)

(1) 主トシテ橋ヲ作ツテキル材料ノ重ミヲイフ．

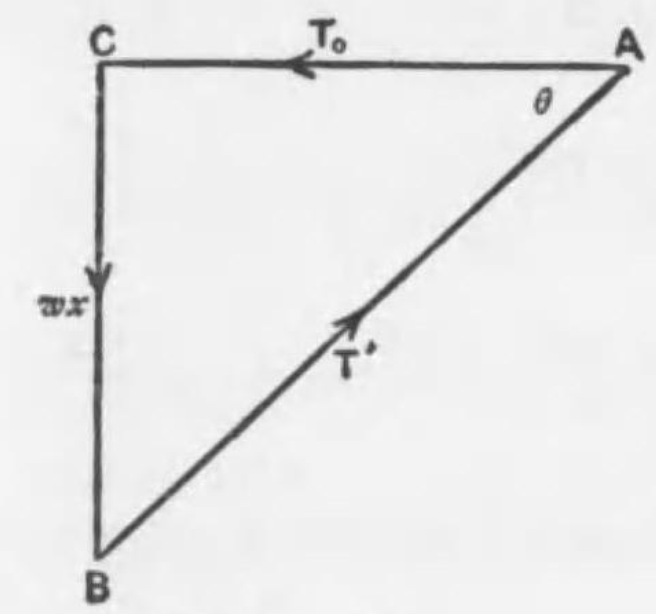
$$\frac{T_0}{T}=\cos\theta, \qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\frac{wx}{T_0}=\tan\theta. \qquad\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ　$\tan\theta=\frac{dy}{dx}$,　故ニ　$\frac{dy}{dx}=\frac{w}{T_0}x.$ $\cdots\cdots\cdots(3)$

故ニ,積分シテ　$y=\frac{1}{2}\frac{w}{T_0}x^2+$常數.



第　30　圖

サテ,x ガ 0 ナルトキ,y ハ 0 デアル事ヲ知ル．故ニ常數ハ 0 デアル．故ニ曲線ノ方程式ハ

$$y=\frac{1}{2}\frac{w}{T_0}x^2, \qquad\cdots\cdots\cdots(4)$$

デアッテ,コレハ卽チ拋物線デアル．此等ノ叙述カラ,總テノ種類ノ計算ガ容易ニナサレル．

(2) 體積 v,壓力 p ナル流體ガ體積 v_1 カラ體積 v_2 マデ膨脹スルトキニナス仕事ハ,

$$w=\int_{v_1}^{v_2}p\cdot dv. \qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

デアル．若シ,p ガ v ノ函數トシテ與ヘラレルナラバ,w ヲ計算スルコトハ容易デアル．

(a) $p=cv^{-n}$ トスレバ,コノ一般積分ハ $\frac{c}{1-n}v^{1-n}$ デアル．§90 ノ說明題ニ從ッテ,其ノ答ハ明ラカニ

$$\frac{c}{1-n}(v_2{}^{1-n}-v_1{}^{1-n}).$$

デアル．

(b) コノ方法ハ,$n=1$ ナルトキ,卽チ $pv=c$ ナルトキニハ駄目デアル．cv^{-1} ノ一般積分ハ,$c\log v$ デアル．故ニコノ場合ニハ,答ハ $c(\log v_2-\log v_1)$,卽チ $c\log\frac{v_2}{v_1}$ デアル．

(3) 曲線 $y=ax^n$ ヲ x ノ軸ノ周リニ廻轉スル．$x=0$ ト $x=b$ トニ於ケル兩截斷面ノ間ノ此ノ廻轉曲面體ノ體積ヲ求メヨ．

解　厚サ dx ナル薄片ノ體積ハ明ラカ＝ $\pi y^2 \cdot dx$ デアル．故＝求メル答ハ　$\pi\int_0^b a^2x^{2n} \cdot dx$, 卽チ $\dfrac{\pi a^2}{2n+1}b^{2n+1}$ デアル．

(4) 完全氣體(此ノ氣體ノ法則ハ, p ヲ壓力, v ヲ體積, t ヲ絕體溫度及ビ R ヲ常數トスレバ, $pv=Rt$ デアル.)ガ何等カノ方法デ其ノ體積及ビ壓力ヲ變ズルナラバ,單位體積ノ變化＝ツイテ受容レル熱ノ割合,卽チ $\dfrac{dH}{dv}$ ハ,

$$\frac{dH}{dv}=\frac{1}{\gamma-1}\left\{v\frac{dp}{dv}+\gamma p\right\},$$

デアル．ココ＝ γ ハ二ツノ重要ナ比熱ノ割合デアル．私ハ常＝熱ヲ仕事ノ單位デ表ハス．

(a) 氣體ガ pv^n＝常數 c, ナル法則＝從ツテ膨脹スルトキ, $\dfrac{dH}{dv}$ ヲ求メヨ．

答　$\dfrac{dH}{dv}=\dfrac{\gamma-n}{\gamma-1}p.$

(b) 氣體ガ斷熱膨脹ヲスルトキ $\left(卽チ\dfrac{dH}{dv}=0\right)$, n ヲ求メヨ．

答　$n=\gamma$；卽チ氣體ノ斷熱膨脹ノ法則ハ pv^γ＝常數,デアル．γ ハ空氣＝對シテ 1.41 デアリ,又瓦斯機關或ハ石油機關ノ圓筒內部ノ瓦斯＝對シテハ 1.37 デアル．

(c) $n=1$ ナルトキ, $\dfrac{dH}{dv}$ ヲ求メヨ．　**答**　$\dfrac{dH}{dv}=p.$

(d) n ガ γ ヨリ大ナルトキハ,此ノ瓦斯ハソレカラ取リ上ゲラレル所ノ熱ヲ有シテキル．

(5) 或ル瓦斯機關ノ汽力圖＝於テ,ココ＝壓力ノ讀ミ p 及ビ體積ノ讀ミ v ガアル．熱ノ吸收ノ割合ハ,(若シ此ノ瓦斯ガ外的原因＝依ツテ熱ヲ吸收シ,而モソレ自身ノ化學的變化カラハ熱ヲ受ケナイトスレバ,)

$$h=\frac{dH}{dv}=p+\frac{1}{\gamma-1}\left(p+v\frac{dp}{dv}\right),\qquad 但シ\ \gamma=1.4$$

デアル．$\dfrac{dH}{dv}$ ヲ求メヨ．

解　之ヲ h トスル．p ト v トヲ坐標トシテ「グラフ」ヲ描ケ．又 h ト v トノ「グラフ」ヲ描ケ．多分諸君ハ, p ヨリモ非常＝小サイ目盛＝シテ h ヲトル方ガ宜シイデアラウ．

v	p	$\dfrac{\delta p}{\delta v}$	$v\dfrac{dp}{dv}$	h 卽チ $\dfrac{dH}{dv}$
2.0	84.5			
		255	523	1644
2.1	110			
		660	1419	4048
2.2	176			
		390	878	2877
2.3	215			
		160	376	1721
2.4	231			
		40	98	1060
2.5	235			
		−90	−229	232
2.6	226			
		−130	−345	−94
2.7	213			
		−110	−303	−31
2.8	202			
		−100	−285	−23
2.9	192			
		−90	−266	−8
3.0	183			
		−80	−244	+16
3.1	175			
		−80	−252	−31
3.2	167			
		−80	−260	−80
3.3	159			
		−70	−235	−42
3.4	152			
		−60	−207	+4
3.5	146			
		−60	−213	−32
3.6	140			

第二十五章　說明題・梁ト支柱

§109. 滑ラカナ曲線ノ勾配

圓ノ曲率ハ共ノ半徑ノ逆數デアリ,又任意ノ點ニ於ケル任意ノ曲線ノ曲率ハ,此ノ點ニ於テ曲線ト最モヨク一致スル圓ノ曲率デアル. 曲線ノ曲率ハ又,"單位ノ長サニツイテノ曲線ノ方向ノ角變化(「ラディアン」ヲ單位トスル)"デアルトモ言ハレル.

今極メテ平ラカナ,到ル所極ク僅カナ勾配$\left(\text{卽チ}\dfrac{dy}{dx}\right)$ヲ有スル曲線ヲ描ケ. 一點 P カラ他ノ一點 Q マデ行ク間ニ於ケル$\dfrac{dy}{dx}$ノ變化ハ,殆ンド正確ニ角ノ變化ニ等シイ事ヲ觀測セヨ.
$\left[\dfrac{dy}{dx}\right.$ノ變化ハ,實際ニ角ノ正切ノ變化デアル. 併シ,角ガ非常ニ小サイトキニハ,角ト共ノ正弦ト共ノ正切トハ總テ相等シイ(1)$\left.\right]$. 故ニ P カラ Q マデノ$\dfrac{dy}{dx}$ノ增加ヲ曲線 PQ ノ長サデ割ツタ商ハ, P カラ Q マデノ平均ノ曲率デアル. 而シテ PQ ガ段々小ニナルニ從ツテ,Pニ於ケル曲率ニ漸次近イモノヲ得ル. 併シ今曲線ハ極メテ平ラカデアルカラ,弧 PQ ノ長サハ實際ニ δx デアツテ,從ツテ δx ガ漸次小サクナルニ從ツテ,$\dfrac{dy}{dx}$ ノ變化ヲ δx デ割ツタモノハ, x ニ關スル$\dfrac{dy}{dx}$ノ變化ノ割合デアル. 之ヲ表ハスニハ記號$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ヲ用ヒル. 故ニ梁又ハ支柱ノ中心線ノヤウナ極ク平ラカナ曲線ノ曲率トシテ $\pm\dfrac{d^2y}{dx^2}$ヲトル.(2)

梁又ハ支柱ノ任意ノ截斷面ニ於ケル曲率ハ,共ノ物質ニ對スルヤングノ彈性率ヲ E トシ,共ノ截斷面ノ中軸ニ關スル慣性能率ヲ

(1) 88 頁脚註 (1) 及ビ138頁脚註 (1) 參照.

(2) 梁モ支柱モ共ニ桿デアル點ハ同一デアルガ, 梁ハ水平ニ置カレ, 之ニ垂直ノ方向ニ力ガ作用シ, 支柱ハ鉛直ニ立テラレ, 共ノ方向ニ力ガ作用スル.

I トスレバ,共ノ點ニ於ケル彎曲能率 M ヲ EI デ割ツタモノデアル. 此ノ事ハ力學ニ關スル著書中ニ證明シテアル所デアル.

例 1. 一端固定他端荷重ノ長サ l ナル一樣ナ梁ガアル. 今梁ノ固定端カラ或ル截斷面マデノ距離ヲ x トシ,荷重ヲ W トスレバ,曲能率 M ハ $W(l-x)$ デアル. 但シ, l ハ梁ノ全長デアル. 而シテ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{M}{EI}$ ハ, $\dfrac{EI}{W}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=l-x$ ト書ケル. 之ヲ積分スレバ, E 及ビ I ハ常數デアルカラ,

$$\frac{EI}{W}\cdot\frac{dy}{dx}=lx-\frac{1}{2}x^2+c.$$

此ノ式ニ依ツテ, 任意ノ點ニ於ケル勾配ヲ計算スル事ガ出來ル. 併シ c ノ値ヲ決定スルタメニ,或ル一個所ニ於ケル勾配ヲ知ル必要ガアル. サテ,$\dfrac{dy}{dx}$ ハ固定端ニ於テハ 0 デアル. 卽チ其ノ點ハ $x=0$ デアルカラ,結局 $c=0$ デアル. 再ビ積分シテ,

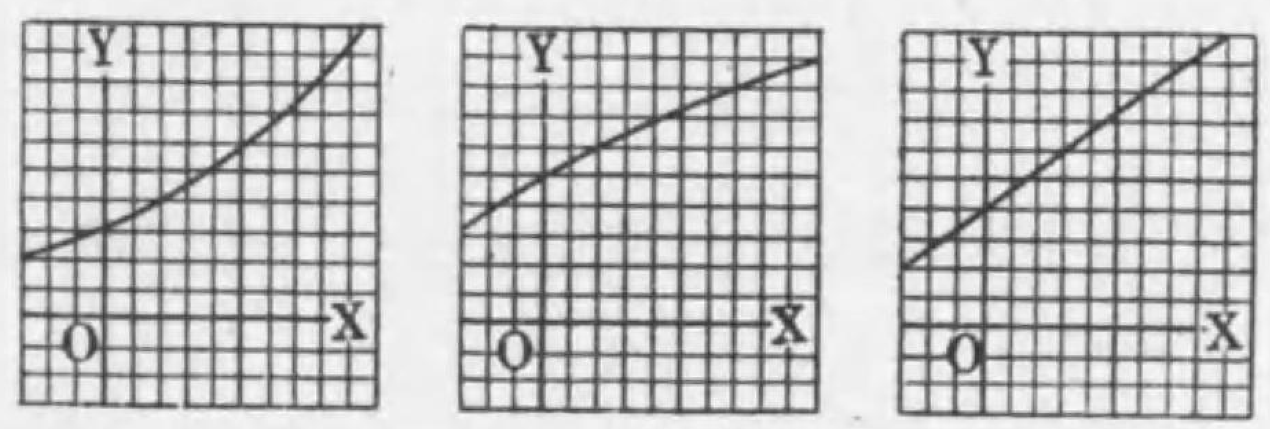
$$\frac{EI}{W}y=\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{6}x^3+C.$$

C ヲ求メルタメニ, $x=0$ ナルトキ, $y=0$ ナルコトヲ知ル. 故ニ $C=0$ デアル.

故ニ此ノ梁ノ形ハ次ノヤウデアルコトヲ知ル.

(3) 此ノ複號ハ,$\dfrac{dy}{dx}$ガ次第ニ大トナルトキ正ヲトリ, 次第ニ小トナルトキ負ヲトル. 但シモトノ函數 y ソノモノノ變化ノ增減ニハ無關係デアル. 例ヘバ二國共人口(y)ハ年々增加シテキテモ,增加率ソノモノ$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ガ增大スル國ノ$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ハ正デアリ(甲),同ジク人口ハ增加シテキテモ,增加率ソノモノガ減少スル國ノ$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ハ負デアル(乙). 而シテ,人口ハ增加シテキテモソノ增加率ノ一定シテヰル國ノ$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ハ 0 デアル(丙).

甲　乙　丙



〔補〕 第 21 圖

$$y=\frac{W}{EI}\left(\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{6}x^3\right).$$

吾々ハ通常xガlナルトキyノ値ヲ知ラウトスル. 之ハ梁ノ彎曲デアツテ,Dト呼バレル. 卽チ

$$D=\frac{Wl^3}{3EI}$$

例 2. 長サlナル梁ノ中央ニ荷Wヲ載セ,兩端ヲ支持スル. 若シコノ荷重シタ梁ノ一半ガ其ノ周圍ニ「セメント」ノ鑄造ヲ施サレ,從ツテ摘マヌヤウニ支持サレテキルナラバ,他ノ半分ハ長サガ$\frac{1}{2}l$デアツテ一端ガ固定サレ,他端ニ$\frac{1}{2}W$ノ荷ガ載セラレタ梁ニ過ギナイ. 故ニ上ノ結果ニヨレバ,其ノ彎曲ハ $D=\frac{\frac{1}{2}W\left(\frac{1}{2}l\right)^3}{3EI}$, 卽チ$\frac{Wl^3}{48\cdot EI}$デアル事ヲ觀察セヨ.

此ノ公式ニ關スル諸問題ハ § 28 ノ問題 14 ニ與ヘラレタ所デアル. 此等ノ問題ヲ再ビ參照スルガヨイ.

§ 110. 支柱ニ關スルオイレルノ理論

第 31 圖

等質ノ物質カラナル完全ナ角壔デアル支柱ヲトリ,ソレ自身ノ重量ヲ無視シ,其ノ各截斷面ノ端ニ於ケル截斷面ノ中心ヲ通ル合成力 F ヲ考ヘル. PQR(第 31 圖)ヲ彎曲シタ支柱ノ中心線トスル. $AB=y$ ハ $OA=x$ ナル點 A ニ於ケル彎曲デアルトスル. $OP=OR=l$ トスル. y ハ何處デモ支柱ノ長サlニ比シテ小ナルモノト考ヘル. Fy ハ B ニ於ケル彎曲能率デアリ,$\frac{Fy}{EI}$ハ其ノ點ニ於ケル曲率デアル. 但シ,Eハ此ノ物質ニ對スルヤングノ彈性率デアリ,Iハ其ノ截斷面ノ中心ヲ通ル直線ニ關スル截斷面ノ最小ノ慣性能率デアル. 故ニ次ノ事ハ容易ニ解ル.

$$\frac{Fy}{EI}=-\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad \cdots\cdots(1)$$

卽チ
$$\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0. \quad 但シ\ n^2=\frac{F}{EI}.$$

常數aノ値ガ如何デアツテモ,

$$y=a\cos nx. \qquad \cdots\cdots(2)$$

ガ(1)ヲ滿足スル事ヲ知ル. $x=0$ デアルト, $y=a$ デアルカ

ラ,aノ意味ハ知レテキル. 卽チ支柱ノ中點ニ於ケル彎曲 OQ デアル. 又 $x=l$ ノトキ,$y=0$ デアル. 故ニ

$$a\cos nl=0. \qquad \cdots\cdots(3)$$

サテ,此ノ式ハ如何ナル場合ニ眞デアリ得ルカ. ソレハ$a=0$デアルカ,或ハ $\cos nl=0$ デアルカ何レカデナケレバナラヌ. 併シ若シaガ或ル値ヲ有スル爲ニ彎曲ガ起ルナラバ, $\cos nl$ ハ 0 デナケレバナラヌ. 卽チ角 nl ハ $\frac{\pi}{2}$デナケレバナラナイ. 卽チ

$$l\sqrt{\frac{F}{EI}}=\frac{\pi}{2}, \qquad 故ニ \qquad F=\frac{EI\pi^2}{4l^2}.$$

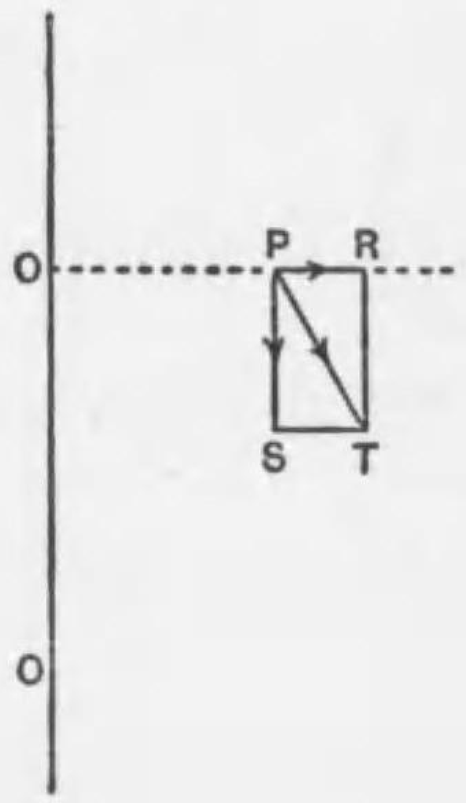
ハ彎曲ヲ生ズル荷重デアル. 之ニ依リ,極メテ些細ナ彎曲モ極メテ大キナ彎曲モ等シクヨク生ズルコトガ解ル.

以上述ベタ支柱ノ理論ニ於テ,私ハ此ノ理論ガ實驗ト十分ヨク一致シナイ理由ヲ述ベタ. 之ハ實驗上ノ支柱ハ,オイレルノ理論ニ假定シテキルヤウナ完全ナ角壔デモナケレバ,又完全ニ荷重シテモナイカラデアル.

第二十六章　說明題:流體

§111. 力線及水準面

角速度每秒 α「ラディアン」デ軸ノ周リヲ固體ノヤウニ廻轉スル一團ノ流體ヲ考ヘヨ. OO ヲ其ノ軸トシ, P ヲ重サ w 封度ノ流體ノ微少量トスル. $OP=x$ トセヨ.



第 32 圖

遠心力ハ質量 $\frac{w}{g}$ ニ α^2x ヲ乘ジタ積ニ等シイ. 遠心力ヲ或ル尺度デ表ハシ,之ヲ PR トシ,重サ w ヲ同ジ尺度デ表ハシ,之ヲ PS トスレバ, PT デ表ハサレル合成力ハ容易ニ求メラレルシ,又 PT ガ水平線トナス角 $\angle RPT$ モ求メラレル.

カクテ

$$\tan RPT = w \div \frac{w}{g}\alpha^2 x,$$

卽チ

$$= g \div \alpha^2 x.$$

ハ w ニ無關係デアルカラ,從ツテ此ノ結果ヲ非等質ノ流體ニ適用スルコトガ出來ル. 今,基準水平線ヨリ上方ノ點 P ニ到ル距離ヲ y トシ, P ヲ通リ PT ヲ (P ニ於ケル) 切線トスルヤウナ曲線ヲ想像シヨウ. 若シ,此ノ曲線ノ各點ニ於ケル其ノ方向 (卽チ其ノ點ニ於ケル切線ノ方向) ガ合成力ノ方向ヲ表ハシ,且ツカヤウナ曲線ガ描カレルナラバ,其ノ勾配 $\frac{dy}{dx}$ ハ明ラカニ $-g\div\alpha^2x$ デアル.

之ヲ積分スレバ

$$y = -\frac{g}{\alpha^2}\log x + 常數. \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

トナル. 此ノ常數ハ, y ヲ測ツタ基デアル基準水平線ニ依ツテ定

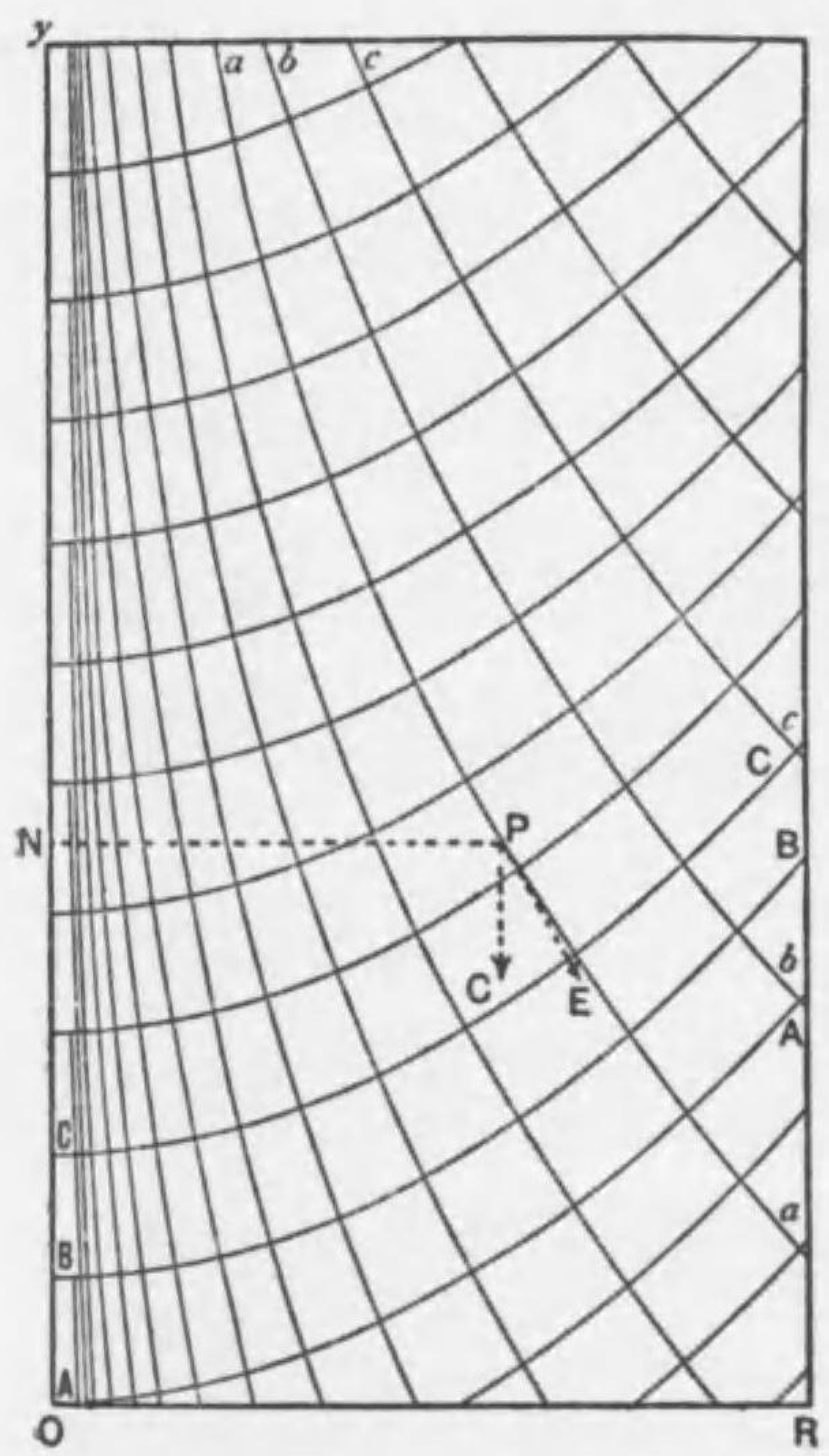
マルモノデアル. 此ノ曲線ヲ**力線**トイフ. 任意ノ場所ニ於ケル力線ノ方向ハ,其ノ場所ニ於ケル總合成力ノ方向ヲ表ハス. 之ハ對數曲線デアル.

水準面. 點 P ニ於ケル其ノ曲線ノ法線ガ PT デアルヤウナ曲線ガアルナラバ,其ノ勾配ガ正デアルコトハ明ラカデアル. 又事實

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha^2}{g}x,$$

故ニ此ノ曲線ハ

$$y = \frac{\alpha}{2g}x^2 + 常數. \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$



第 33 圖

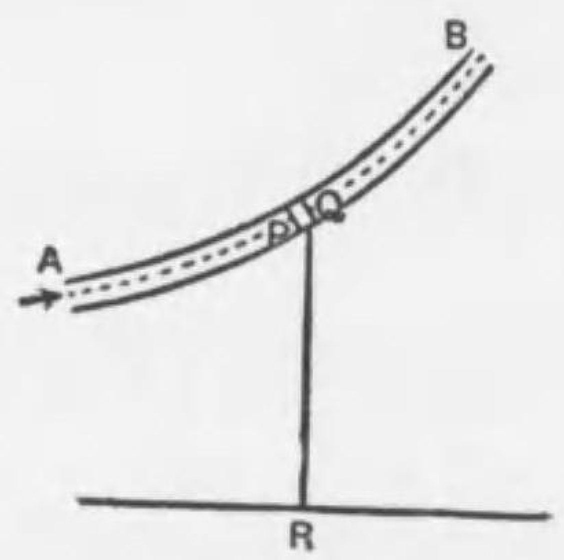
デアツテ,其ノ常數ハ y ヲ測ツタ基デアル基準水平線ニ依ツテ定マル. 之ハ拋物線デアル. 若シ,之ガ其ノ軸ノ周リニ廻轉スレバ,廻轉拋物線體ヲ得ル. 面上ノ任意ノ點ニ於テ,其ノ角ガ微少量ニ働ク合成力ニ其ノ面ガ直角デアルトキハ,其ノ面ヲ**水準面**トイフ. 此ノ場合ニ於テハ,水準面ハ廻轉拋物線體デアルコトガ解ル. 其等ハ屢々等「**ポテンシャル**」面トモ呼バレル. カヤウナ面上ニ於テハ,壓力ハ到ル所一定デアル事及ビ之ハ等質ノ面デアル事ハ容易ニ證明サレル.

從ツテ,若シ水銀,石油,水及ビ空氣ヲ廻轉器ニ入レルナラバ,其等ノ分離シタ面ハ廻轉拋物線體デアル.

學生ハ力線ノ一ツヲ描カネバナラナイ.（例ヘバ $a=8$, $g=32.2$ トセヨ）. ソシテ薄イ亞鉛板デ, OO ヲ他ノ端トシテ,其ノ形ヲ切リ拔イテ見ナケレバナラナイ. OO ニ沿ウテ滑ラスコトニヨツテ,多クノ力線ヲ描クコトガ出來ル. サテ,拋物線ノ一ツニ對スル型ヲ切リ拔キ,（其ノ常數ヲ0トセヨ.）ソレデ多クノ水準面ヲ描ケ. コノ二組ノ曲線ハ到ル所ニ於テ互ニ直角ニ交ル. 第33圖ハカクシテ得ラレル結果ノ一種ヲ示スモノデアル.

§112. 流體ノ運動

AB ヲ紙ノ平面ニ鉛直ナ**流管**トシ,コノ管ニ沿ウテ長サ ∂s ヲ距テタ點 P ト Q トニ於ケル兩截斷面ノ間ニ在ツテ,且ツ其ノ截斷面ガ a 平方呎ナル流體ニ作用スル力ヲ考ヘヨ. ココニ a 及ビ ∂s ハ極限ニ於テハ無限小ト考ヘラレル. P ニ於テ1平方呎ノ壓力ハ p 封度,速度ハ v 秒呎トシ,且ツ P ハ或ル基準水平面 R カラ鉛直ノ高サ h ノ所ニアルトスル. Q ニ於テハ此等ノ値ハ夫々 $p+\partial p$, $v+\partial v$, $h+\partial h$ トシ,コノ液ノ重サヲ1立方呎ニツキ w 封度トスル. 流レニ沿ウテ PQ ノ流レヲ促ス力,卽チ PQ ニ於テ流レノ方向ニ平行ナ力ヲ求メヨウ.



第 34 圖

pa ハ一端 P ニ於テ運動ノ方向ニ働ク. 又 $(p+\partial p)a$ ハ Q ニ於テ運動ヲ阻止スルヤウニ働ク. P ト Q トノ間ノ部分ノ重サハ $a\cdot\partial s\cdot w$ デアツテ,恰カモ斜面ニ於ケル如ク,其ノ反對方向ニ働ク力ノ分力ハ次ノヤウデアル.

$$重サ\times\frac{平面ノ高サ}{平面ノ長サ},\ 卽チ\quad a\cdot\partial s\cdot w\frac{\partial h}{\partial s}.$$

故ニ P カラ Q ノ方ヘ運動ヲ促進スル力ハ

$$pa-(p+\partial p)a-a\cdot\partial s\cdot w\frac{\partial h}{\partial s}$$

デアル. 然ルニ質量ハ $a\cdot\partial s\frac{w}{g}$ デアリ,又 $\frac{dv}{dt}$ ハ其ノ加速度デアルカラ,單ニコノ力ヲ $\frac{a\cdot\partial s\cdot w}{g}\cdot\frac{dv}{dt}$ ニ等シイト置ケバヨイ. 故ニ, a デ割ツテ

$$-\partial p-w\cdot\partial h=\frac{\partial s\cdot w}{g}\,\frac{dv}{dt}$$

ヲ得ル. 今若シ,或ル微少量ガ P カラ Q マデ行クニ要スル時間ヲ ∂t トスレバ, $v=\frac{\partial s}{\partial t}$ ハ ∂s ガ段々短カクナルニ從ツテ,漸次正確ニナルコトヲ知ツテヰル. 尙又加速度ハ益々 $\frac{\partial v}{\partial t}$ ニ近ヅク. 故ニ若シ ∂s ガ非常ニ小ナラバ,

$$\partial s.\frac{dv}{dt}=\frac{\partial s}{\partial t}\partial v=v\cdot\partial v,$$

故ニ

$$\frac{v}{g}dv+\frac{dp}{w}+dh=0.\quad\cdots\cdots(1)$$

ナル關係ヲ得ル. 之ハ流體ノ運動ニ關スル基本ノ方程式デアル. コレヲ積分シテ,

$$\frac{v^2}{2g}+\int\frac{dp}{w}+h=常數.\quad\cdots\cdots(2)$$

w ガ變ズルカモ知レナイカラ, $\frac{dp}{w}$ ノ積分ノ符號ヲ殘シテ置ク.

液體ニ於テハ w ハ常數デアリ,氣體ニ於テハ壓力ガ僅カシカ變ジナイトキニハ（通風ノ問題ニ於ケルヤウニ）,

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{w}+h=常數.\quad\cdots\cdots(3)$$

例 1. 氣體ノ場合ニ於テ式 (2) ハ如何ニナルカヲ見ヨ. 但シコノ場合ニハ斷熱法則ガ行ハレルモノトスル. 卽チ $w=cp^{\frac{1}{\gamma}}$ トスル. h ヲ無視セヨ.

答 若シ $s=1-\frac{1}{\gamma}$ ナラバ, $\frac{v^2}{2g}+\frac{1}{cs}p^{s}=常數.$

故ニ,若シ氣體ガ $v=0$, $p=p_1$ ナル器カラ $p=p_0$, $v=v_0$ ナル場所ニ流レルナラバ,次ノ關係ヲ得ル,

$$0+\frac{1}{cs}p_1' = \frac{v_0^2}{2g}+\frac{1}{cs}p_0'\text{, 即チ } v_0^2=\frac{2g}{cs}(p_1'-p_0').$$

例 2. 或ル水鉢ノ中ノ水ノ各微少量ガ殆ンド圓ヲ描キナガラ中央ニ於ケル穴ノ方ヘ極ク徐々ニ流レル．從ツテ速度 v ハ中心軸カラノ距離 x ニ反比例スルモノトスル．$v=a/x$ トセヨ．但シ a ハ或ル常數デアル．カクスレバ式(3)ハ

$$h+\frac{a^2}{2gx^2}+\frac{p}{w}=\text{常數},$$

トナル．今水ノ表面ニ於テ,p ハ一定デアル．何トナレバ,ソレハ大氣ノ壓力デアルカラデアル．故ニ表面デハ,

$$h=c-\frac{a^2}{2gx^2}.$$

此ノ式ハ其ノ曲面ノ形ヲ與ヘル．c 及ビ a ヲ任意ノ値（例ヘバ $c=1$, $a=0.8$, $g=32$）トスレバ,x ノ任意ノ値(例ヘバ $x=0.05$ カラ $x=5$ マデ）ニ對シテ h ヲ計算スルコトハ容易デアル．從ツテ曲線ヲ作圖スルコトモ容易デアル．コノ曲線ヲ軸ノ周リニ廻轉セシメルト,上ノ曲面ノ形ヲ得ル．而シテ,之ハ廻轉曲面デアル．$c-h$ ハ明ラカニ $x=\infty$ ニ於ケル水平面ノ下方ニ在ル任意ノ點ノ深サデアル．

例 3. 水平面ヲ螺旋形ニ流レル水ハ $v=a/x$ ナル法則ニ從フ．但シ x ハ中心點カラノ距離デアル．然ラバ

$$p=c-\frac{wa^2}{2gx^2}$$

ヲ證明セヨ．

一例トシテ, $c=10000$, $w=62.3$, $g=32.2$, $a=70$ トセヨ．且ツ $x=1$ カラ $x=2$ マデノ間ニ於ケル p ノ變化ヲ示ス曲線ヲ描ケ．

第二十七章　複利法則

§113. 複利法則ト其實例

若シ　$y=be^{ax}$, ……………………(1)

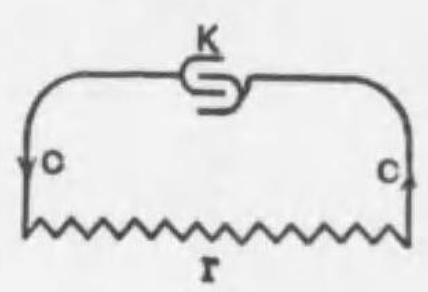
デアルナラバ,　$\dfrac{dy}{dx}=abe^{ax}$, ……………………(2)

即チ　$\dfrac{dy}{dx}=ay.$ ……………………(3)

函數ノ增加ノ割合ガ其ノ函數ノ値自身ニ比例スルヤウナ x ノ函數ガ此處ニアル．苟シクモ式(3)ヲヨク見ルナラバ,之ハ式(1)ト同一デアルトイフ事ガ出來ル．茲ニ b ハ如何ナル常數デアッテモヨイ．即チカヤウナ常數ヲ普通**任意常數**トイフ.[1]

自然界ニハ此ノ性質ヲ有スル現象ガ澤山アル．ソレヲ表ハスケルヴィン卿ノ述べ方ハ“此等ノ自然現象ハ複利法ニ從フ”トイフノデアッタ．b ハ x ガ 0 ノトキノ y ノ値デアルコトハ明ラカデアル．

例 1. **蓄電器.** 電氣容量 k「ファラッド」ナル蓄電器ガ大ナル抵抗 r「オーム」ヲ通ツテ放電シテキル．若シ,任意ノ時刻 t ニ於ケル蓄電器ノ錫箔ノ間ノ電位差ヲ v「ボルト」トスレバ,蓄電器ノ電氣量ハ $Q=kv$ デアル．蓄電器カラ流レル電流ハ v/r デアッテ,之ハ又1秒間ノ Q ノ減少ノ割合デアルカラシテ,



〔補〕第 22 圖

$$-\frac{dQ}{dt}\text{, 又ハ }\quad -k\frac{dv}{dt},$$

從ツテ　$-k\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{v}{r}$,　$\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{kr}v.$

之ハ上ニ與ヘラレタ(3)ノ形デアル．但シ v ハモトノ y デアリ, t ハモ

[1] 任意常數ニ對シテ 3, $\frac{1}{2}$ 等ノ數ヤ π, e 等ノ如ク一定ノ値ヲトル常數ヲ**絕對常數**トイフ.

トノ x, $-\frac{1}{kr}$ ハ a デアル.

故ニ　$v=be^{-\frac{t}{kr}}$,　故ニ　$\log b-\log v=\frac{t}{kr}$

デアルトイフ事ガ出來ル.

此ノ知識ハ電線又ハ蓄電器ノ漏電抵抗ノ量ヲ測ル方法ヲ與ヘルモノデアル. 蓄電器ガ間斷ナク其ノ荷電ヲ失ヒツツアルトキニ,若シ時刻 t_1 ニ於ケル v_1 ヲ測リ,又時刻 t_2 ニ於ケル v_2 ヲ測ルナラバ,

$$kr(\log b-\log v_1)=t_1,\qquad kr(\log b-\log v_2)=t_2.$$

逐々相減ジテ,　$kr(\log v_1-\log v_2)=t_2-t_1.$

故ニ　$r=\frac{t_2-t_1}{k(\log v_1-\log v_2)}.$

此等ハ自然對數デアル. 若シ常用對數ヲ用ヒレバ,

$$r=0.4343\frac{t_2-t_1}{k}\Big/\log_{10}\frac{v_1}{v_2}.$$

今 2「ミクロファラッド」(卽チ 2×10^{-6}「ファラッド」) ナル蓄電器ガ放電シテヰルト考ヘヨ. v ハ 10「ボルト」デアッテ, 20 秒ノ後ニハ v ハ 8.2「ボルト」デアルコトガ解カッテヰル. 其ノ漏電抵抗ヲ求メヨ.

ココニ　$t_2-t_1=20,\ k=2\times10^{-6}.$

故ニ　$r=\frac{0.4343\times20}{2\times10^{-6}(\log 10-\log 8.2)}=50.4\times10^6$「オーム」

例 2.　ニュートンノ冷却法則. 總テノ部分ノ溫度ガ v ナル物體(物體ヲ圍ム溫度ヲ超エテ) ガ v ニ比例スル割合デ熱ヲ失フモノト想像セヨ. 卽チ,

$$\frac{dv}{dt}=-av$$

トセヨ. 但シ t ハ時間デアル. 然ルトキハ,

$$v=be^{-at},$$

卽チ　$\log b-\log v=at.$

カクテ,時刻 t_1 ニ於ケル溫度ヲ v_1 トシ, t_2 ニ於テハ v_2 トスレバ,

$$\log v_1-\log v_2=a(t_2-t_1),$$

從ツテ a ハ　$\log\frac{v_1}{v_2}\div(t_2-t_1)$

ニ等シイカラ,實驗的ニ測ルコトガ出來ル.

例 3. 或ル棒(尖キノ細クナッタ曲ッタ綱,又ハ鐵ノ「ポンプ」ノ棒ノヤウナモノ,併シソレハ敎會ニ於ケル「ランプ」ノ重サヲ支持スルタメニ石デ作ラレタ束ネタ棒ノヤウナモノデモヨイ) ガ,ソレ自身ノ重量デ漸次尖キガ細クナリ,從ツテソレハソノ到ル所デ正確ニ 1 平方吋ニツイテ同ジ張力 f 封度ヲ持ツヤウニナル. 若シ,其ノ下端カラノ鉛直ノ距離 x ニ於ケル截斷面ノ面積ヲ y トシ,又其ノ下端カラノ距離 $x+\delta x$ ニ於ケル截斷面ノ面積ヲ $y+\delta y$ トスルナラバ, $f\cdot\delta y$ ハ,明ラカニ x ト $x+\delta x$ トノ間ノ小ナル部分ノ目方ニ等シイ. 此ノ部分ノ體積ハ $y\cdot\delta x$ デアル. 若シ,單位體積ノ重量ヲ w トスレバ, $f\cdot\delta y=w\cdot y\cdot\delta x$, 又ハ寧ロ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{w}{f}\cdot y.\quad 故ニ,前ノヤウニシテ,\quad y=be^{\frac{w}{f}x}.$$

若シ $x=0$ ナルトキ,底ニ於テ吊ラレテヰル重サ W ヲ支持スルタメニ丁度十分ナ截斷面 $y=y_0$ デアルナラバ,(明ラカニ $fy_0=W$), $y_0=b$ デアル. 何トナレバ, $e^0=1$ デアルカラデアル.

棒ノ截斷面ガ變ズルニ從ツテ,之ヲ規定スル法則ガアルガ,併シココデソレ以上ノコトヲ述ベル必要ハナイ.

例 4.　氣壓. 基準水平面カラ高サ h 呎ナル場所ニ於テ,大氣壓ヲ 1 平方呎ニツキ p 封度トシ, $h+\delta h$ ニ於テハ,壓力ハ $p+\delta p$ トセヨ. (δp ハ見エル通リ,負デアル). h ニ於ケル壓力ハ,體積 δh 立方呎ヲ充シテヰル空氣ノ重サニヨッテ, $h+\delta h$ ニ於ケル壓力ヨリモ實際ニ大デアル. 若シ,空氣 1 立方呎ノ重サヲ w 封度トスレバ, $-\delta p=w\cdot\delta h$. 併シ, $w=cp$. 但シ c ハ,溫度ガ一定デアルトキ,或ル常數デアル. 從ツテ, $-\delta p=c\cdot p\cdot\delta h$. 又ハ寧ロ

$$\frac{dp}{dh}=-c\cdot p.\qquad\cdots\cdots(1)$$

故ニ,前ノヤウニシテ,複利法ヲ得ル. 而シテ昇ルニ從ッテ壓力ノ減少ノ割合ハ壓力ソレ自身ニ比例スル. 故ニ $p=be^{-ch}$, 但シ, b ハ或ル常數デアル. 若シ, $h=0$ ナルトキ(例ヘバ海面) $p=p_0$ デアルナラバ,コノ法則ハ

$$p=p_0e^{-ch}.$$

c ニ對シテハ,之ハ w_0/p_0 デアル. 但シ w_0 ハ壓力 p_0 ニ於ケル空氣 1 立方呎ノ重サデアル. 若シ, t ガ一定ナル(絕對)溫度デアリ,又 w_0 ガ $0°C$, 卽チ絕對溫度 $273°$ ニ於ケル空氣 1 立方呎ノ重サデアルナラバ, c ハ $\frac{w_0}{p_0}\frac{273}{t}$ デアル.

併シ,溫度ガ一定デアルト考ヘルノハ不合理デアル. 次ノ假定ハ一層眞ニ近イモノデアル.

若シ, w ガ斷熱法則ニ從ヒ,從ツテ $pw^{-\gamma}$ ガ一定デアルナラバ,(γ ハ空氣ニ對シテハ 1.4 デアル), (1) ハ

$$-\delta p = cp^{\frac{1}{\gamma}}\delta h, \quad \text{又ハ} \quad -p^{-\frac{1}{\gamma}}dp = c \cdot dh.$$

トナル. コレヲ積分シテ, $-\frac{\gamma}{\gamma-1}p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = ch + C$ ヲ得ル.

若シ $h=0$ ナルトキ, $p=p_0$ ナラバ, C ヲ求メルコトガ出來ル. 卽チ

$$p^\alpha = p_0^\alpha - \alpha ch,$$

ヲ得ル. (但シ $\frac{\gamma-1}{\gamma}$ ヲ α トスル). コレ大氣ニ於ケル上層ノ壓力減少ニ對スル最モ普通ナ正シイ法則デアル.

斷熱法則ガアリ,且ツ又 $p=Rtw$ デアルトキニハ,絕對溫度ハ p^α ニ比例シ,從ツテ (3) ハ

$$t = t_0 - \frac{\alpha h}{R}.$$

トナル事ヲ觀察セヨ.

卽チ,溫度ノ減少ノ割合ハ,カヤウナ質量ノ空氣中ニ在テハ一呎上昇每ニ一定デアル.

例 5. 複利. 100 磅ヲ年利率 3 分デ貸セバ,其ノ年ノ終リニハ 103 磅トナル. 第二年ノ間ノ利子ハ增加シタ元金ニ就イテ計算サレルノデ,第二年ニハ利子ハ增大シ,且ツ之ハ年每ニ大キクナル. 實際ニ,年々ノ元金ノ增加ハ元金ノ額ニ比例スル.

コレハ利子ノ元金繰入ガ 12 ケ月每ニ行ハレルノデアル. 併シ,ソレハ 6 箇月每,又ハ 3 箇月每,又ハ一週間每,又ハ一日每,又ハ一秒每ニ行ハレルカモ知レナイ. 併シ,自然界ノ進ミハ通常コレヨリモ尙連續的デアル.

今年利率 r「パーセント」ノ割合デ連續的ニ元金ニ繰入レラレル(年每ニ急ニ繰入レラレルノデハナイ) 複利ヲ考ヘテ見ヨウ. t 年ノ終リニ於ケル元金ヲ P トスル. 期間 δt ニ對スル δP ハ

$$\frac{r}{100}P \cdot \delta t, \ \text{卽チ} \ \frac{dP}{dt} = \frac{r}{100}P \ \text{デアル. 故ニ} \ P = P_0 e^{\frac{rt}{100}}.$$

年利 r% ナル複利ニ於テ元利合計ガ元金ノ 2 倍トナルハ何時カ. 題意ニヨツテ

$$\frac{rt}{100} = \log_e 2, \ \text{卽チ} \ rt = 69.31, \ \text{故ニ} \ t = \frac{69.31}{r}.$$

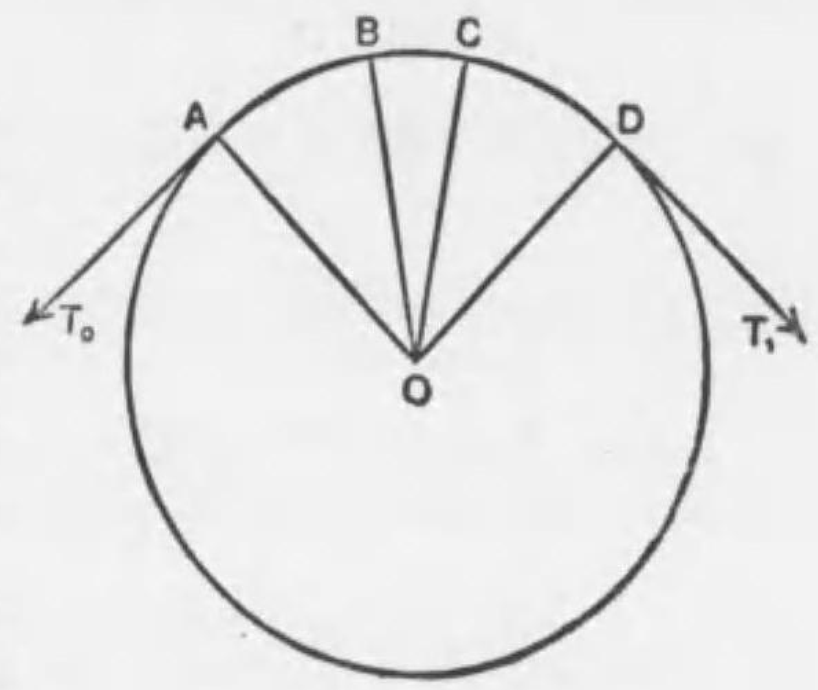
學生ハ §26 ヤ §82 ノ問題 3 ナドヲ參照スル事ガ有益デアラウ.

100 磅ノ元金ハ年利 5% ニテ 20 年ノ後ニハ如何ナル額ニ達スルカ.

先ヅ上ノ公式ニヨツテ計算セヨ. 次ニ利子ヲ一年每ニ元金ニ繰入レル所ノ §26 ノ公式ニヨツテ計算シ,カクテ兩者ノ結果ヲ比較セヨ.

上ノ公式ニヨル結果ハ 271.8 磅デアリ,今一ツノ結果ハ 265.3 磅デアル.

例 6. 滑車ノ「ベルト」ノ滑リ. 學生ガコノ滑リノ現象ニ關スル實驗ヲ行フニ當ツテハ,滑リガ起ツタトキニ,ソレガヨク見エルヤウニ滑車ヲ固定セシメネバナラナイ.



第 35 圖

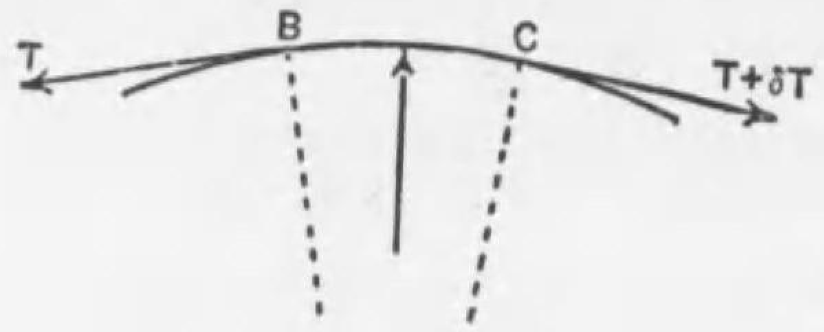
D ニ於ケル「ベルト」ノ牽力ハ T_1 デアツテ,コレハ A ニ於ケル牽力 T_0 ニ打チ勝ツバカリデナク,尙「ベルト」ト滑車トノ間ノ摩擦ニ勝ツ. B(第 35 圖)ニ於ケル「ベルト」ノ張力 T_0 ト角 AOB(コレヲ θ トスル) トヲ考ヘヨ. 又 C ニ於ケル $T+\delta T$ ト角 AOC(コレヲ $\theta+\delta\theta$ トスル) トヲ考ヘヨ.

$\delta\theta$ ハ極メテ小サイガ, 第 36 圖デハ BC ヲ大キク,擴大シテ示シテアル. 滑車ノ緣ニ對シテ「ベルト」BC ノ小ナル部分ヲ壓スル力ヲ計算スルニ當リ, BC ノ長サガ漸次小サクナルト考ヘルト,其ノ合成壓力ハ $T \cdot \delta\theta$* デアリ,從ツテ $\mu \cdot T \cdot \delta\theta$ ハ其ノ摩擦力デアルコトヲ知ル. 但シ μ ハ摩擦係數デアル. δT ガ打チ勝ツコトヲ要求セラレルノハコノ力デアル. $\mu \cdot T \cdot \delta\theta$ ガ正確ニ δT ニ等シイトキ,滑リハ將ニ始マルノデアル. ソノトキ $\mu \cdot T \cdot \delta\theta = \delta T$,

* 二ツノ等シイ力 T ガ互ニ小ナル角 $\delta\theta$ ヲナストキニ, 其等ノ平衡卽チ合力ヲ求メヨ. 此等ノ三力ハ第 37 圖ノヤウニ二等邊三角形ノ邊ニ平行デアル. 但シ $FD=DE$ ハ T ヲ表ハス. 又 $FDE=\delta\theta$ 及ビ EF ハ其ノ平衡ヲ示ス. サテ, $\delta\theta$

第 37 圖

ガ小サクナルニ從ツテ, $EF \div DE$ ハ益々 $\delta\theta$ ニ接近スル. 從ツテ平衡ガ漸次 $T \cdot \delta\theta$ ニ近ヅクコトハ明ラカデアル.



第 36 圖

即チ $\frac{dT}{d\theta}=\mu T$ デアル．コレ複利法デアル．故ニ $T=be^{\mu\theta}$．今コレニ $\theta=0$ ノトキ $T=T_0$，；及ビ $\theta=AOD(=\theta_1)$ ノトキ $T=T_1$ ヲ代入スレバ，$T_1=T_0e^{\mu\theta_1}$ ヲ得ル．

滑車ノ「ベルト」ニヨツテ與ヘラレル馬力 H ヲ計算スルニ當リ，$H=(T_1-T_0)V\div 33,000$ デアルコトヲ記憶シナケレバナラナイ．但シ T_1 及ビ T_0 ハ封度ヲ單位トシ，V ハ「ベルト」ノ速度デアツテ,分呎ヲ單位トスル．次ニ,「ベルト」ガチギレルカ否カハ T_1 ニ某ク．此等ノ考ヘカラ川帶裝置ニ關スルヨク知ラレテキル法則ヲ得ル．(§ 28 及ビ § 67 參照)．

複利法ニ就イテノ其ノ他ノ例題ニ對シテハ,學生ハ微積分ニ關スル私ノ著書[1]ヲ參照サレタイ．方程式(3)ハ若干ノ重要ナ陳述ノ中デノ最モ簡單ナモノデアツテ,コレハ § 134 ニ於テ再ビ說キ及ボス．

途中デハアルガ,學生ハ次ノ二問ヲ考ヘテ見ヨ．

例 7. 方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}-n^2y=0$ ハ，$y=Ae^{nx}+Be^{-nx}$ ニヨツテ滿足サレルコトヲ證明セヨ．但シ A 及ビ B ハ任意常數デアル．

例 8. 若シ i ガ $\sqrt{-1}$ ヲ表ハシ,[2]又 i ガ或ル代數的ノ量ノヤウニ取扱ハレ,從ツテ $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$ 等デアルナラバ,方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0 \qquad ハ, \qquad y=Me^{inx}+Ne^{-inx}$$

ニヨツテ滿足サレル．

M ト N トガ其等自身虛數 i ヲ含ムナラバ,コノ答ハ明ラカニ

$$y=A\sin nx+B\cos nx$$

ニ等シイト言フコトハ後ニ解カルデアラウ．但シ A 及ビ B ハ常數デアル．學生ハコレガ答デアルカ否カヲ試ミナケレバナラナイ．又之ハ

$$y=a\sin(nx+b)$$

ニ等シイコトヲ吟味シナケレバナラナイ．但シ a 及ビ b ハ任意常數デアル．

(1) Perry, Calculus for Engineers, 1897. London.

(2) 虛量 i ニ關シテハ § 119 及ビ第三十三章ニ詳說スル．

一般ノ問題

次ノ諸問題ハ**第一章カラ第二十七章マデノ重要ナ事項**ニ關シテキル．此等ハ實際ニ私ガ古イ試驗問題紙ニ書イタ問題デアル．

1. 紅玉ノ價ハ其ノ重サノ 1.5 乘ニ比例スル．若シ,一ツノ紅玉ガ他ノ紅玉ト全ク同ジ形[1]デアツテ,唯其ノ縱,橫,高サガ各々 2.20 倍デアルナラバ,其ノ價ハ幾倍デアルカ． **答** 34.73 倍

2. 現在ヨリ一ケ年ノ後ニ第一回ノ支拂ヲ受ケ,現在ヨリ第 n 年ノ終リニ最後ノ支拂ヲ受ケルベキ年 a 磅ノ年金ハ,現價ガ次ノヤウデアル．

$$P=a\frac{100}{r}\left\{1-\left(1-\frac{r}{100}\right)^{-n}\right\}.$$

年利率 3% 及ビ 5% デ 30 年間ニ支拂ハレルベキ 1 磅ノ年金ノ現價ヲ求メヨ． **答** 3% デ 19.57 磅, 5% デ 15.38 磅

年利率 4% デ 20 年間ニ支拂ハレルベキ或ル年金ノ現價ガ 2000 磅デアル．其ノ年金ヲ求メヨ． **答** 148.8 磅

年利率 $4\frac{1}{2}$% デ,65 磅ノ年金ノ現價ガ 630 磅デアルトイフ．其ノ年金ノ支拂年數如何． **答** 13 年．

3. 100 磅ノ金子ヲ年利率 4% ノ複利デ 20 年間貸シタ．次ノ各場合ノ利息ヲ求メヨ．

(1) 利息ヲ一年毎ニ元金ニ繰入レル．(2) 半年毎ノ複利．(3) 一箇月毎ノ複利．(4) 連續的複利．

答 (1) 219.11 磅，(2) 220.8 磅，(3) 222.25 磅．(4) 222.56 磅．

4. 或ル保險會社ガ年ニ a 磅ノ終身年金ニ對シテ即時支拂 P 磅ヲ要求スル(第一回支拂ハ現在ヨリ一年後)．若シ或ル人ガ今後 n 年間生キルモノトシ,又金利ガ年々 r% デアルナラバ,

$$P=\frac{100a}{r}\left\{1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}\right\}.$$

若シ a ガ 1 デアリ，r ガ 3% デアルナラバ,次ノ場合ニ於ケル P ヲ求メヨ．

(1) 著者ノ用ヒタ此ノ言葉ハ相似形ヲ意味シテキテ，合同ノ事デハナイ．

年齢	生命ノ豫期年數: n (男)	答 : P (男)	生命ノ豫期年數: n (女)	答 : P (女)
5	50.87	25.89	53.08	26.36
15	43.41	24.05	45.63	24.65
25	35.68	21.68	37·98	22.45
35	28.64	19.00	30.90	19.92
45	22.07	15.93	24.06	16.95
55	15.95	12.50	17.33	13.33

$a=1$ デアツテ, P ガ次ノ値ヲ有スルトキ, r ヲ求メヨ.

年齢	5	25	45
P (男)	25.95	21.6458	16.4958
答 r	2.992	3.025	2.682

借家期間ガ n 年間繼續スル或ル家屋ニ,總額 P ナル金額ヲ費シタ. 其ノ金利ヲ年 r % トシ,借家賃ニ等額 a ヲ附加シヨウトスル. a ノ額如何. 上ノ公式ハ此ノ場合ニモ眞デアル.

次ノ各場合ニ於ケル a ヲ求メヨ.

(1) $P=1200,\ r=5,\ n=21.$ 　　答 $a=93.57.$

(2) $P=1500,\ r=4\frac{1}{4},\ n=20.$ 　　答 $a=115.3.$

次ノ各場合ニ於ケル n ヲ求メヨ.

$P=1200,\ r=5,\ a=90.$ 　　答 $n=22.5.$

死ンダトキニ拂ハレルベキ金額 A ニ對シテ契約スルタメニ,直チニ拂フベキ第一回ノ拂込金 a ヲ保險料トスレバ,

$$A=\frac{100a}{r}\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1}\right\},$$

但シ,文字 r 及ビ n ハ前述ノ通リデアル. $a=1,\ r=3$ ナラバ, 次ノ場合ニ於ケル A ノ値如何.

現在ノ年齢	生命ノ豫期年數: n (男)	答 : A
5	50.87	112.57
25	35.68	60.27
45	22.07	29.90

或ル保險會社ニ於テ, $A=100$ 磅, n ト a トハ次ノ値デアルトキ, r ノ値ヲ求メヨ.

年齢	n	a	答: r
21	38.64	2.1542	1.013
30	32.10	2.5875	1.26
40	25.30	3.3125	1.54

5. 金額 A ヲ支給セネバナラナイ. 之ハ今後 n 年ニ拂ハレルベキモノデアル. 年金 a ガ規則正シク支拂ハレ,第一回ノ支拂ハ現在カラ一年後デアル.

$$A=\frac{100a}{r}\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}-1\right\}.$$

$A=100,\ r=3.5$ ナルトキ,次ノ場合ニ於ケル a ヲ求メヨ.

n	5	20	40
答: a	18.72	3.55	1.189

私ハ總テノ保險會社ハ實際金ノ借用人デアリ,從ツテ利率 r ハ低イト想像スル. 若シ此等ノ會社ガ今 P 圓ヲ拂ツタナラバ,毎年 a 圓宛 20 年間ニ拂ヒ戻シテ貰フタメニ高イ利率 r ヲ課スルデアラウ.

6. 若シ

$$A=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

デアツテ,又 $r=3\frac{1}{2}$ ノトキ, $A=3P$ ナラバ, n ハ如何. 　　答 32.02.

7. 或ル三角形ノ二邊ヲ測ツテミタラ 32.5 ニ 24.2 アルコトヲ知ツタ. 其ノ夾角ガ 57° アルトキハ,此ノ三角形ノ面積ヲ求メヨ. 諸君ガ用ヒタ法則ヲ證明セヨ. 若シ各邊ノ眞ノ長サガ 32.6 及ビ 24.1 ナラバ,答ニ於ケル誤差ノ百分率ヲ求メヨ.

答 329.8, 0.12 %

8. 三角形 ABC ニ於テ, C ハ直角, AB ハ 14.85 吋, AC ハ 8.32 吋アル. 表ヲ用ヒテ角 A ノ度數ヲ計算セヨ. 　　答 55°55′.

9. ABC ハ三角形デアル. 角 A ハ 37° アリ,角 C ハ 90°,邊 AC ハ 5.32 吋アル. 其ノ他ノ邊,角 B 及ビ三角形ノ面積ヲ求メヨ.

答 4.009吋, 6.662吋, 53°, 10.66 平方吋.

10. 三角形 ABC ニ於テ,角 C ハ 53°, 邊 AC 及ビ AB ハ夫々 0.523 哩及ビ 0.942 哩アル. 紙上ニ實際ノ作圖ヲスルカ,又ハ計算ニヨツテ,邊 CB ノ長サヲ哩デ,三角形ノ面積ヲ平方哩デ求メヨ.

答 1.159 哩, 0.2420 平方哩.

11. 三角形 ABC ニ於テ, AD ハ BC ニ下シタ垂線デアツテ, AB ハ 3.25 呎, 角 B ハ 55° アル. AD ノ長サヲ求メヨ. 若シ BC ガ 4.67 呎アルナラバ三角形ノ面積ハ如何.

尚又 BD, DC, AC ヲ求メヨ. 諸君ガ求メタ答ハ有効數字三桁ダケハ正シクナケレバナラナイ.

答 2.66 呎, 6.21 平方呎, DB=1.86呎, DC=2.81呎, AC=3.87呎.

12. 銅ノ管(1 立方吋ノ重サ 0.32 封度)ガアツテ, 其ノ長サハ 12 呎アリ, 内側ノ直徑ハ 3 吋アル. 又其ノ重サハ 100 封度デアル. 外側ノ直徑及ビ外側ノ曲面積ヲ求メヨ. 答 3.43 吋, 1552 平方吋.

13. 鑄鐵ノ球殼ノ内側ノ直徑ハ其ノ外側ノ直徑ノ 0.57 倍デアル. 重量ガ 60 封度デアルトキ, 内, 外ノ直徑ヲ求メヨ. 但シ, 鑄鐵 1 立方吋ノ重サヲ 0.26 封度トセヨ.

若シソノ外徑ガ 1 % 小サクナツテ而モ内徑ガ變ジナイナラバ, 重サノ減少ノ百分率ハ如何. 答 8.148 吋, 4.644 吋, 3.64 %.

14. 或ル環ノ直截面ガ楕圓デアツテ, 其ノ楕圓ノ兩軸ハ 2 吋及ビ $1\frac{1}{2}$ 吋アル. 此ノ直截面ノ中央ハ環ノ軸カラ 3 吋ニ在ル. 環ノ體積ヲ求メヨ.

任意ノ環ノ體積ヲ求メルニ當ツテ用ヒル法則ヲ證明セヨ.

答 44.43 立方吋.

15. y ノ平方ト x トノ積ヲ z ノ立方カラ減ジ, 其ノ結果ノ立方根ヲ求メテ, ソレヲ自乘セヨ. 最後ノ結果ヲ x, y, z ノ和ニテ割レ. 之ヲ總テ代數的ニ書キ下セ. 答 $\dfrac{(z^3-xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x+y+z}$.

16.
$$\frac{x-13}{x^2-2x-15},$$
ヲ簡單ナ分數ノ和トシテ表ハセ. 答 $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x-5}$.

又此ノ式ヲ積分スレバ如何. 答 $\log(x+3)^2/(x-5)$.

17. 二數ノ和ハ 76 デアツテ, 其ノ差ハ大ナル數ノ三分ノ一ニ等シイ. 二數ヲ求メヨ. 答 45.6, 30.4.

18. t 秒間ニ物體ガ通過スル距離ヲ s 呎トスレバ, t ト s トノ關係ハ $s=10t^2$ デアルトスル. $t=2$ ナルトキ s ヲ求メヨ. 又 $t=2.01$ ナルトキ及ビ

$t=2.001$ ナルトキ夫々ノ s ヲ求メヨ. $t=2$ 以後ノ短イ時間ニ於ケル平均速度ヲ求メヨ. 時間ガ漸次短クナルニ從ツテ, 此ノ平均速度ノ近迫スル値ヲ求メヨ. 答 40 呎, 40.401 呎, 40.04001 呎, 40.1呎; 40.01 秒呎, 40 秒呎.

19. 或ル汽船ニ於テ, 1 時間ニ消費セラレル石炭ノ噸數ハ, 速度ヲ v トシ, 節(即チ毎時 1 浬)ヲ速度ノ單位トスレバ, $0.3+0.001v^3$ デ表ハサレルコトハ既ニ知ラレテヰル. 1000 浬ノ航海ニ於テ, v ノ種々ナ値ニ對スル時間ト石炭ノ消費總額トヲ表ハス表ヲ作レ. 若シ, 船員ノ給料ヤ船ノ價格ノ利子等ガ毎時間石炭ノ 1 噸ノ値デ表ハサレルナラバ, v ノ各値ニ對シテ, 石炭ノ噸數ノ値ニ換算サレタ總費用ヲ表記シ, 且ツ之ヲ方眼紙上ニ描ケ. 大體 v ガ如何ナル値ヲトルトキ最モ經濟的デアルカ. 其ノ v ヲ求メヨ. 答 v ハ $8\frac{1}{2}$ ト $8\frac{3}{4}$ トノ間.

20. 次ノ事ヲ代數的ニ書ケ. x ノ三乘ノ平方根ノ 2 倍ニ y ノ平方ト z ノ立方根トノ積ヲ加ヘ, 其ノ結果ヲ x ト y ノ平方根トノ和ニテ割レ. 之ニ 4 ヲ加ヘ全體ヲ平方ニ開ケ. 答 $\left\{\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}+y^2z^{\frac{1}{3}}}{x+y^{\frac{1}{2}}}+4\right\}^{\frac{1}{2}}$.

21.
$$\frac{3x-2}{x^2-3x-4}$$
ヲ二ツノ簡單ナ分數ノ和トシテ表ハセ. 答 $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{1}{x+1}$.

22. 二量ガアル. 第一數ノ 4 倍ニ 2 ヲ加ヘ, 尚第二數ノ半分ヲ加ヘルト, 其ノ和ハ 17.3 トナル. 又第二數ノ 3 倍ヲ第一數ノ 2 倍カラ引ケバ, 其ノ差ハ 1.2 デアルトイフ. 二數ヲ求メヨ. 答 3.229, 1.753.

23. 二數 a, b ガアル. a ノ平方ニ a, b 各々ノ平方ノ和ヲ掛ケ, コレニ 3 ヲ加ヘヨ. 其ノ結果ノ立方根ヲ a ト b ノ平方根トノ積ニテ割レ. コレヲ代數的ニ書ケ. 答 $\dfrac{\sqrt[3]{a^2(a^2+b^2)+3}}{a\sqrt{b}}$

24. $\dfrac{1}{x^2-7x+12}$ ヲ二ツノ簡單ナ分數トシテ表ハシ, 且ツ積分セヨ.

答 $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-3}$, $\log\dfrac{x-4}{x-3}$.

25. 1 時間 6 哩ノ割合デ漕グコトガ出來ル船員ガ, 一ツノ河ヲ上ルニ要スル時間ハ下ルニ要スル時間ノ 2 倍デアルコトヲ知ツタ. 河ノ流レノ速サハ如何. 答 毎時 2 哩.

26. 或ル種類ノ「タービン」ニ於テ, 瀧ノ力ヲ P トシ, 瀧ノ高サヲ H トシ,

廻轉ノ割合ヲnトスレバ,總テノ大サノ或ル特殊ナ種類ノ「タービン」ニ對シテハ,

$$n \propto H^{1.25}P^{-0.5}$$

デアルコトガ知ラレテキル.

或ル特殊ナ製作者ノ表ニ於テ,私ハ無心ニ,瀧ノ高サ6呎,馬力100,其ノ廻轉數一分間50回ナル「タービン」ヲ取ル. コノ方法デ私ハ表ノ他ノ總テノ「タービン」ニ對スルnヲ計算スルコトガ出來ルコトヲ知ツタ. 20呎,75馬力ノ瀧ニ對スルnヲ求メヨ. 答 260.

27. Hガ $D^{\frac{2}{3}}v^3$ ニ比例スル場合ニ, $H=620$ ノトキ $D=1810$, $v=10$ ナラバ, $D=2100$, $v=13$ ノトキ Hヲ求メヨ. 答 1503.

28. $y=ax^{\frac{1}{2}}+bxz^2$ ニ於テ, $x=4$, $z=2$ ナルトキ $y=62.3$, 又 $x=1$, $z=1.46$ ナルトキ $y=187.2$ デアルナラバ, a, b ハ如何. 又 $x=9$, $z=0.5$ ナルトキ y ノ値ヲ求メヨ. 答 $a=243.9$, $b=-26.59$, $y=671.9$.

29. $z=ax-by^2x^{\frac{1}{2}}$ トスル. $x=1$, $y=2$ ナルトキ $z=1.32$, 又 $x=4$, $y=1$ ナルトキ $z=8.58$ ナラバ, a, b ハ如何. 又 $x=2$, $y=0$ ナルトキ, zヲ求メヨ.

答 $a=2.2$, $b=0.11$, $z=4.4$.

30. 鑄鐵ノ「フライホヰール」ノ車輪(1立方吋ガ0.26封度)ノ重サガ13,700封度アル. コノ車輪ノ截斷面ハ矩形デアツテ,放射狀ノ方向ノ厚サハx,他ノ方向ノ厚サハ$1.6x$デアリ,車輪ノ內半徑ハ$14x$デアル. 各々ノ實際ノ大サヲ求メヨ.

答 放射方向ノ厚サ7.124吋, 他ノ方向11.4吋, 內半徑99.7吋.

31. 銅線ノ電氣抵抗ハ其ノ長サヲ截斷面積デ割ツタモノニ比例スル. 一ツノ長サニ於ケルスベテノ截斷面ガ圓デアル一封度ノ針金ノ抵抗ハ,コノ針金ノ直徑ノ四乘ニ逆比例スルコトヲ證明セヨ.

32. 長サ4.32吋ナル中空圓壔ガアル. 其ノ內,外ノ直徑ハ夫々1.724吋, 3.150吋デアル. 其ノ體積及ビ其ノ二ツノ曲面ノ面積ノ和ヲ求メヨ.

答 23.58立方吋. 66.16平方吋.

33. 圓形ノ錨環ノ體積930立方吋,面積620平方吋アル. 其ノ大サヲ求メヨ. 答 截斷面ノ半徑3吋, 環ノ平均半徑5.2吋.

34. 或ル環ノ平均半徑ハ2呎アル. 其ノ截斷面ハ楕圓デアツテ,楕圓ノ兩軸ハ夫々0.8及ビ0.5呎アル. 環ノ體積ヲ求メヨ.

答 3.948立方呎.

35 平面閉曲線ヲ,各々ノ長サ1吋ナル24ノ部分ニ分ケ,次々ノ部分ノ中點ハコノ平面上ノ一直線カラ次ノヤウナ距離(吋ニテ) x ニ在ル.

10, 10.5, 10.91, 11.24, 11.49, 11.67, 12.57, 11.67, 11.49, 11.24, 10.91, 10.5

10, 10.5, 10.91, 11.24, 11.49, 11.67, 12.57, 11.67, 11.49, 11.24, 10.91, 10.5

曲線ヲ,コノ直線ヲ軸トシテ廻轉セシメルト,一ツノ環ヲ得ル. コノ環ノ面積ノ近似値ヲ求メヨ. 答 1687平方吋.

36. 或ル角壔ノ截斷面ガ50.32平方吋アル. ココニコノ截斷面ト20°ノ角ヲナス截斷面ガアル. 其ノ面積如何. 又コレニ使用シタ法則ヲ證明セヨ. 答 53.56平方吋.

37. 地球ヲ球デアルト假定セヨ. 其ノ圓周ガ360×60浬[1]デアルナラバ,56°ノ緯度圓ノ圓周ノ長サハ如何. 緯度1°ニツイテノ長サ如何. 若シ小サイ地圖ガ,東西南北ノ距離ガ同ジ尺度デアルヤウニ,コノ緯度ノ上ニ描カレ,又緯度ノ1°(勿論ソレハ60浬デアル)ガ10吋デ表ハサレルナラバ,經度1°ヲ表ハス距離ハ如何. 答 12,080哩, 33.55, 5.592吋

38. 次ノ表ハ一人ノ女子(1890年1月生レ)ノ發育狀體ト一人ノ男子(1894年3月生レ)ノ發育狀態トヲ示ス. コノ記錄ヲ「グラフ」ニ表ハセ. 身長ハ4箇月毎ニ測ラレタモノデアル.

吋ニ於ケル身長表

年	1900	1901			1902			1903
月	9月	1月	5月	9月	1月	5月	9月	1月
A	54.75	55.55	56.5	57.95	59.2	60.2	60.9	61.3
B	48.25	49.0	49.75	50.6	51.5	52.3	53.1	53.9

表ノ全期間ニ於ケルAトBトノ生長ノ一年間ノ平均ノ割合ヲ吋デ求メヨ. 他ノ4箇月ノ終リニ於ケルAトBトノ確カラシイ高サヲ求

(1) 浬ハ本來カクシテ定義ヅケラレタモノデアル. 卽チ,地球表面上1分ニ對スル弧ノ長サヲ1浬トスルカラ1度ハ60浬トナリ,全圓周ハ360×60浬トナル.

メヨ．此ノ期間ヲ通ジテ總テノ時ニ於ケル A ノ成長ノ割合ヲ示ス「グラフ」ヲ描ケ．大體如何ナル年齢ニ於テ A ノ成長ハ最モ速ヤカデアルカ．又彼ノ女ノ成長ノ最モ早イ割合ヲ求メヨ．

答 2.8, 2.4, $11\frac{1}{2}$年，一年 = 4.2 吋.

39. 一年間ノ總テノ月ガ同ジ長サ(各々 30.44日)デアルト假定シタ場所ニ於テ,各月ニ於ケル同ジ時ノ日ノ長サ(日出カラ日沒マデノ時間數)ヲ調ツテ,次ノ表ヲ得タ.

11月	12月	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月
8.35	7.78	8.35	9.87	12	14.11	15.65	16.22	15.65

7.78 時間ナル最短ノ日カラ 16.22 時間ナル最長ノ日マデノ日ノ長サノ增加ノ平均(一日ニツイテ一時間ノ小數一位マデ)ヲ求メヨ．日ノ長サノ增加ノ最モ速カナノハイツカ．又其ノ値如何.

答 0.046, 3 月，一日 = 0.072 時間.

40. $pv^n=a$ トスル．$v=1$ ノトキ $p=100$ ナラバ, a ヲ求メヨ．　答 100.

今 $pv^n=100$ トスル．ココニ二三ノ重要ナ問題ガアル．其ノ或ルモノニ於テハ, $n=0.8$, 他ノモノデハ $n=0.9$, 順次カクノ如クスル．v ガ次ノ值ヲ有スルトキ,各場合ニ於ケル p ノ值ヲ求メヨ.

v ノ與ヘラレタ值	答 $n=0.9$ ノトキ, p ノ值	$n=1$ ノトキ, p ノ值	$n=1.13$ ノトキ, p ノ值
1	100	100	100
1.5	69.4	66.7	63.2
2	53.6	50	45.7
2.5	43.8	40	35.5
3	37.2	33.3	28.9
3.5	32.4	28.6	24.3
4	28.7	25	20.9

學生ハ三ツノ曲線ヲ一枚ノ方眼紙ニ描イテ,此等ノ結果ヲ示サネバナ

ラナイ.

41. $p_e=p_1\frac{1+\log_e r}{r}-p_3$ トスル．$r=3$, $p_3=17$ ナルトキ,次ノ各場合ニ於ケル p_e ヲ求メヨ.

p_1	u	答 p_e	P	W	W'
200	2.273	122.82	140.8	9241	11320
170	2.649	101.80	116.7	7929	9716
140	3.177	80.86	92.7	6610	8100
110	3.984	59.89	68.66	5272	6462
80	5.370	38.92	44.64	3911	4793
50	8.340	17.95	20.59	2519	3085

$$P=\frac{Ap_e Rn}{33000}.$$

若シ $A=210$, $R=1.2$, $n=150$ ナラバ, p_1 ノ各々ノ與ヘラレタ值ニ對シテ P ヲ計算セヨ.

若シ $V=\frac{A}{144}\times\frac{4Rn}{r}\times 60$ ナラバ, $V=21000$ デアルコトヲ證明セヨ.

若シ W ガ V/u デアルナラバ,各々ノ場合ニ於ケル W ヲ求メヨ．但シ u ハ上ニ表記セラレタ各值ヲ有スル.

P ト W トノ值ヲ坐標トシテ方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描ケ．而シテ兩者ノ間ニ

$$W=a+bP$$

ナル關係ガアルカドウカヲ吟味セヨ．又 a,b ヲ求メヨ.

答 $a=1400$, $b=56$.

42. 若シ $W'=(1+y)W$ 及ビ $y=10\frac{1+r}{\sqrt{An}}$ デアルナラバ,前問ノ各場合ニ於テ W' ヲ求メヨ．サテ, W' ト P トヲ坐標トシテ前ノヤウニ一枚ノ方眼紙上ニ描ケ．而シテ兩者ノ間ニ

$$P=0.0144W'-24$$

ナル關係ガアルカドウカヲ吟味セヨ.

問題 41 及ビ 42 ニ於テ, p_1 ト p_3 トハ圓筒内ノ蒸氣ノ始壓及ビ背壓デ

アリ,p_e ハ有效壓力デアル. 衡ノ $1/r$ 番目デ遮汽スル. P ハ馬力, W 封度ハ毎時間ノ指示蒸氣, W' ハ毎時間ノ實際ノ蒸氣デアル.

43. $x=\tan\theta\div\tan(\theta+\phi)$, 但シ ϕ ハ常ニ $10°$ トスル. θ ガ $30°, 40°, 50°, 60°$ ナルトキ, x ヲ求メヨ. 且ツ x ト θ トノ値ヲ坐標トシテ方眼紙ニ「グラフ」ヲ描ケ. x ノ最大値ヲ與ヘルヤウナ θ ノ大體ノ値ヲ求メヨ. 答 $40°$.

44. 音響ノ速度ヨリ大ナル速サニテ,重サ w 封度,直徑 d 吋ナル普通ノ形ノ物ヲ投ジタトキ,其ノ運動ニ對スル空氣抵抗ハ,速度ガ v_1 秒呎カラ v 秒呎ニ減ジタトキニ,時間ヲ t 秒トシ,通過ノ水平距離ヲ x 呎トスレバ,

$$t=7000\frac{w}{d^2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v_1}\right),\quad x=7000\frac{w}{d^2}\log_e\frac{v_1}{v}$$

ナル關係ガアル. 直徑 3 吋,重サ 12 封度ノ投射體ニ對シ, v_1 ガ 2000 デアッテ, v ガ 1900, 1800, 1700, 1600 等ヨリ 1000 ニ到ルマデノ各値ニ對シテ x ト t トヲ求メ,コレヲ表記セヨ. t ノ此等ノ各値ニ對シテ $y=2000\alpha t-16.1t^2$ ヲ求メヨ. x ト y トヲ用ヒテ,(1)初メノ傾キ α ガ 0.12 ナルトキ,(2) α ガ水平線ニ對シテ 0.06「ラディアン」ナルトキノ投射體ノ彈道ノ「グラフ」ヲ描ケ. 鉛直ノ方向ヲ大ニスルノガヨイ.* 諸君ハ v, t, x 及ビ y ヲ表記シタ. 今 x' ノ値ヲ表記セヨ. ココニ $x'=2000t$. x' ト y トヲ坐標トシテ其ノ「グラフ」ヲ描ケ. コレハ投射體ノ拋物線的通路ヲ與ヘル,但シ空氣抵抗ハナイモノトスル. 空氣抵抗ノ影響ハ二ツノ場合ニ於テ注意深ク留意セラレネバナラナイ.

45. 私ノ一人ノ學生デ,大學ニ往復スル途上屢々時間ト距離トヲ記錄シタ者ガアル. ココニ其ノ學生ノ觀測シタモノノ寫シガ一枚アル. 各時刻ニ於ケル其ノ汽車ノ平均速度ヲ求メヨ.

距離		時刻	哩 $-\delta s$	秒 δt	速度(時哩) $-\frac{\delta s}{\delta t}$
	哩	時 分 秒			
グレヴセンド 中央驛	22.21	6 59 24			
			0.21	60	12.6
	22	7 00 24			
			0.50	81	22.2
	$21\frac{1}{2}$	1 45			
			1.00	116	31
	$20\frac{1}{2}$	3 41			
			0·50	52	34.5

* 二ツノ場合ニ於ケル銃口速度ハ 2014.4 及ビ 2003·6 デアル. コノ銃口速度ノ水平分力ハ兩者ニ於テ 2000 デアル.

ノースフリート	20	7 4 33			
			0.50	46	39.1
	$19\frac{1}{2}$	5 19			
			0.50	48	37.5
	19	6 07			
			0.50	40	45
	$18\frac{1}{2}$	6 47			
			0.50	36	50
グリーンハイス	18	7 23			
			0.75	52	51.9
	$17\frac{1}{4}$	8 15			
			0.25	19	47.3
	17	8 34			
			0.50	41	43.9
	$16\frac{1}{2}$	9 15			
			0.50	44	40.9
	16	9 59			
			0.70	73	34.5
ダートフォード	15.3 著	11 12			
			0.00	103	00.0
	15.3 發	12 55			
			0.05	42	4.3
	$15\frac{1}{4}$	13 37			
			0.25	49	18.4
	15	14 26			
			0.25	36	25
	$14\frac{3}{4}$	15 02			
			0.25	29	31
	$14\frac{1}{2}$	15 31			
			0.50	49	36.8
	14	16 20			
			1.0	83	43.3
	13	17 43			
			1.0	86	41.8
ベックリ	12	19 09			
			1.0	97	37.1
	11	20 46			
			1.0	94	38.3
シッドカップ	10	22 20			
			1.0	84	42.9
	9	23 44			
			1.0	76	47.4
	8	25 00			
			1·0	70	51·5
	7	26 10			
			0·50	38	47.4
	$6\frac{1}{2}$	26 48			
			0.75	149	18.1
	$5\frac{3}{4}$	29 17			
			0.15	49	11.0
	5.6	30 06			

46. 夏期學校ノ學生ガ,或ル機械ノ大サ等ヲ與ヘラレタ. 其ノ學生ハ骨組圖ヲ描キ, t 秒間ニ於ケル滑子ノ位置ヲ次ノ通リ知ッタ. (其ノ距離トイフノハ,其ノ直線路上ニ於ケル一點カラノ距離ヲ呎デ表ハシタモノ

デアル.) 週期ハ2.4秒デアル. 其ノ速度及ビ加速度ヲ求メヨ.

時間, t 秒	其ノ直線路上ノ一點カラ滑子マデノ距離, x 呎	$\frac{\delta x}{\delta t}=v$	$\frac{\delta v}{\delta t}$,即チ a
0	5.96	−10.7	
0.1	4.89	−10.9	−2
0.2	3.80	−9.5	14
0.3	2.85	−7.6	19
0.4	2.09	−5.1	25
0.5	1.58	−3.2	19
0.6	1.26	−0.8	24
0.7	1.18	1.2	20
0.8	1.30	1.6	4
0.9	1.46	4.6	30
1.0	1.92	5.2	6
1.1	2.44	6.3	11
1.2	3.07	7.2	9
1.3	3.79	8.4	12
1.4	4.63	8.6	2
1.5	5.49	8.5	−1
1.6	6.34	7.8	−7
1.7	7.12	6.3	−15
1.8	7.75	4.1	−22
1.9	8.16	1.7	−24
2.0	8.33	−1.7	−34
2.1	8.16	−4.8	−31
2.2	7.68	−7.2	−24
2.3	6.96	−10.0	−28
2.4	5.96		

x ヲ横坐標トシ, v 及ビ a ヲ縦坐標トシテ「グラフ」ヲ描ケ. 次ニ t ヲ横坐標トシテ同ジ事ヲナセ.

47. 一年間ノ純益即チ年收 100 磅アル借地ノ現價ハ次ノ通リデアル. 但シ利子ハ年利 4 分トシテ計算スルモノトスル.

經過年數	5	10	15	20	25	30
現價	445	811	1112	1359	1562	1729

方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描ケ. 年數ガ 13 ノトキ,現價如何. 答 992 磅.

48. 或ル年齢ノ人ニ拂ハレルベキ 100 磅ノ年金ノ現價ヲ,或ル保險會社ノ廣告ヨリ引用スル.

年金受領者ノ年齢	20	30	40	50	60	70
現在支拂ハレルベキ額	2279	2045	1789	1500	1148	797

方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描イテ,現在55歳ノ人ニ對スル年金 100 磅ニ對シテ拂ハレルベキ額ヲ求メヨ. 答 1334 磅.

49. 平方根ヲ求メルコトニヨツテ,順次

$$10^{0.5},\ 10^{0.25},\ 10^{0.125},\ 10^{0.0625},\ 10^{0.03125},\ 10^{0.015625}$$

ノ値ヲ知ル. 此等ノ結果ヲ掛ケ合ハセテ次ノ諸數ヲ求メルコトガ出來ル.

眞數	10ヲ底トスル對數
5.8294	0.765625
6.0429	0.781250
6.2643	0.796875

方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描イテ 5.83, 6.00, 6.25 ノ對數ヲ有效數字四桁マデ正シク求メヨ.

50. 5000人ノ軍隊ハ之ヲ支持スルタメニ,一年ニ國費 800,000 磅ヲ要スル. 10,000 人ノ軍隊ハ之ヲ支持スルタメニ 1 年ニ 1,300,000 磅ヲ要スル. 8000人ノ軍隊ノ一年間ノ費用ハ幾何デアルカ. 與ヘラレタ數字ニ一致スル最モ簡單ナ法則ヲ用ヒヨ. 方眼紙ヲ使用スルト否トハ諸君ノ自由デアル. 答 1.1×10^6 磅.

51. 或ル試驗官ガ答案ヲ採點シタ. 最高點ハ 185 デアリ,最低點ハ 42

デアル. 彼ハコノ最高點ヲ 250 トシ,最低點ヲ 100 トスルヤウナ一次法則ニ基イテ此ノ總テノ點數ヲ換算シヨウト思ツタ. 彼ガ取ルベキ方法ヲ示シ,且ツ既ニ答案ニハ 60, 100, 150 ナル點數ガツケテアルトキ,此等ハ換算後如何ニナルカ. 方眼紙ヲ用ヒルカ,又ハ單ニ代數學ヲ用ヒルカハ諸君ノ自由デアル. 答 118.9, 160.8, 213.3.

52. 海水ニ於テ,吃水ガ次ノ通リデアルト,或ル特殊ナ汽船ハ次ノヤウナ排水量ヲ有スル.

吃水, h 呎	15	12	9	6.3
排水量, T 噸	2098	1512	1018	586

吃水ガ 11 呎及ビ 13 呎ナルトキノ排水量ハ夫々幾何デアルラシイカ.

答 1350, 1700噸.

53. 次ノ三問題ヲ,各々ノ場合ニ於テ,恰カモ其ノ一ヲ與ヘラレタカノヤウニシテ計算シ,且ツ各場合ニ於テ諸君ノ智識ガ許ス範圍デ最モ簡單ナ假定ヲ作レ.

(*a*) 生徒 100 人ノ學校ヲ支持スルタメニ要スル一年間ノ總費用ハ 2100 磅デアル. 生徒 175 人ノトキノ費用ハ如何.

(*b*) 費用ハ生徒 100 人デハ 2100 磅, 200 人デハ 3050 磅デアル. 175 人ニ對シテハ費用ハ幾何デアルカ.

(*c*) 三ツノ場合ノ費用ハ次ノヤウニ既知デアル.

生徒 100 人デハ 2100 磅, 150人 デハ 2650 磅, 200人 デハ 3050 磅デアル. 175 人ニ對スル費用ハ何程ラシイカ.

若シ諸君ガ方眼紙ノ方法ヲ用ヒレバ,此ノ三ツノ解ヲ總ベテ同時ニ示スコトガ出來ル. 答 (*a*) 3675 磅, (*b*) 2812.5 磅, (*c*) 2860 磅.

54. 次ノ數ハ,或ル物體ノ其ノ直線軸ニ直角ナ截斷面ノ面積デアル.

面積, A 平方吋	250	292	310	273	215	180	135	120
一端カラノ距離, x 吋	0	22	41	70	84	102	130	145

$x=0$ カラ $x=145$ マデノ全體積如何.

$x=70$ ニ於テ,截斷面ノ薄片ガ,小ナル厚サ δx ト體積 δv トヲ有スルトキ, $\frac{\delta v}{\delta x}$ ヲ求メヨ. 答 33,420 立方吋, 273 平方吋.

55. 貯水池ガアル. 底ノ最低點カラ水ノ表面マデノ高サハ h 呎デアツテ,其ノ面ニ於ケル面積ハ A 平方呎デアル.

貯水池ガ種々ナ深サニナルトキ,ソレニ應ズル面積ヲ測リ,ソレハ次ノ通リデアルコトガ解カツタ.

h ノ値	0	13	23	33	47	62	78	91	104	120
A ノ値	0	21000	27500	33600	39200	44700	50400	54700	60800	69300

h ガ 113 カラ 65 マデ變ズルトキ,コノ貯水池カラ流レ出ル水ハ幾立方呎デアルカ. 答 2.635×10^6 立方呎.

56. x ト y トノ次ノ値ニヨツテ描カレル一ツノ曲線ガアル.

x (呎)	3	3.5	4.2	4.8
y (吋)	10.1	12.2	13.1	11.9

コノ曲線ヲ x 軸ノ周リニ廻轉セシメルト,一ツノ廻轉曲面ヲ得ル. コノ曲面ニヨツテ包マレ,且ツ $x=3$ ト $x=4.8$ トニ於ケル兩斷面ノ間ノ體積如何. 答 6 立方呎.

57. 殖民地ニ 40 歳カラ 60 歳マデ住ンデ居ツタ人ニ對スルニュージーランドノ恩給法ハ次ノ通リデアル.

個人收入 I ガ一年ニ 34 磅ヲ越エナイナラバ,恩給 P ハ一年ニ 18 磅デアル. 個人收入ガ 34 磅以上 52 磅以下デアルナラバ,恩給ハ總收入ガ丁度 52 磅ニナルヤウニ定メル. 個人收入ガ 52 磅又ハソレ以上デアルナラバ,恩給ハナイ.

任意ノ收入 I ニ對スル恩給 P ノ値ト,又總收入ノ値トヲ方眼紙ニ示セ. 若シ或ル人ノ個人收入ガ,例ヘバ 50 磅デアルナラバ,彼ガ恩給ヲ請求スル前ニ,其ノ收入金額ノドレダケヲ他ニ贈與スルヤウニ勸誘スルガヨイカ. 若シ,コノ恩給ガ次ノ規則ニ依ツテ制限サレルナラバ,其ノ總收入額ヲ同ジ紙ノ上ニ示セ. $P=18-\frac{9}{26}I$. 答 16 磅以下ノ或ル金額.

58. $x=\frac{a}{b-y}+cy-\frac{a}{b}$ ニ於テ, y ハ正ニシテ, b ヨリ大デナイトスル. $b=10$ 及ビ $c=1$ ナルトキ, x ト y トノ關係ヲ示ス曲線ヲ描ケ.

(1) $a=5$, (2) $a=1$, (3) $a=0.1$, (4) $a=0.01$ デアルトキ, y ト x トノ値ヲ

表記シタ後,同ジ紙ニ此等ノ曲線ヲ描ケ.

59. $$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$ トスル.

次ノxノ値ニ對シテyヲ計算シ,且ツ此處ニ示シタヤウニ表記セヨ.

xノ與ヘラレタ値												
0	0.5 又ハ −0.5	1.0 又ハ −1.0	1.5 又ハ −1.5	2.0 又ハ −2.0	2.5 又ハ −2.5	3 又ハ −3	3.5 又ハ −3.5	4 又ハ −4	4.5 又ハ −4.5	5 又ハ −5	5ヨリ大,又ハ−5ヨリ小ナル任意ノ數
答;yノ値											
±4	±3.98	±3.92	±3.816	±3.665	±3.464	±3.2	±2.856	±2.4	±1.743	0	虚數

xトyトヲ坐標トシテ,方眼紙上ニ「グラフ」ヲ描ケ.

60. 二量,之ヲxトyト言ハウ,—ノ對應スル數値ヲ測ッテ,次ノ表ヲ得タ.

x	0.5	1.7	3.0	4.7	5.7	7.1	8.7	9.9	10.6	11.8
y	148	186	265	326	388	436	529	562	611	652

ココニ,此等ノ量ノ間ニ

$$y=a+bx$$

ナル關係式ガアルコトハ,既ニ知ラレテキル. 併シ,此ノ觀測シタ値ニハ僅カノ違ガアル. 上ノ値ヲ方眼紙上ニ描ケ. aトbトノ最モ確カラシイ値ヲ求メ,且ツ $x=8.7$ ノトキyノ觀測値ニ於テ確カニアルラシイ誤差ヲ求メヨ.　　答 $a=119$, $b=45.7$, 2.4%.

61. 或ル價格表デ,異ナル馬力ヲ有スル或ル型ノ蒸氣發電機ニ就イテ,次ノヤウナ價ヲ知ッタ. 此ノ價格表ハ如何ナル法則ニ基イテ作ラレタノデアルカ. 400「キロワット」ノ發電機ノ價格ハ表デハ何程デアルカ.

「キロワット」, K	價格, P 磅
200	2,800
600	7,160
1,000	11,520

答 $P=10.9K+620$;
$K=400$ ノトキ 4980 磅.

62. 次ノ量ハpv^n=常數ノヤウナ或ル法則ニ從ッテキル. 果シテサウデアルカ否カヲ吟味セヨ. nノ最モ確カラシイ値ヲ求メヨ. 答 $n=0.86$.

v	1	2	3	4	5
p	205	114	80	63	52

63. 次ノ表ハ二ツノ量xトyトノ對應數値ヲ與ヘル.

y	10.16	12.26	14.70	20.80	24.54	28.83
x	37.36	31.34	26.43	19.08	16.33	14.04

xトyトハ $yx^n=c$ ナル形ノ式ニヨッテ結バレテキルカドウカヲ吟味セヨ. 又若シサウデアルナラバ,nトcトノ値ヲ出來ルダケ近似的ニ決定セヨ.

$y=17.53$ ノトキノxノ値ヲ求メヨ.　　答 $yx^{1.08}=501$, 22.4.

64. 次ノ觀測シタ量ハ

$$y=ae^{bx}$$

ノヤウナ或ル法則ニ從フモノト考ヘラレル. 但シ,ソレニハ觀測ニヨル確カラシイ誤差ハアルモノトスル. 果シテサウデアルカ否カヲ吟味シ,且ツaトbトノ最モ確カラシイ値ヲ求メヨ.

x	2.30	3.10	4.00	4.92	5.91	7.20
y	33.0	39.1	50.3	67.9	8.56	125.0

答 $y=18e^{0.56x}$.

65. 或ル電氣事業ニ於テ,新ラシイ設備ガ適當ニ附加セラレタ場合,百萬「ペンス」ヲ單位トスル一年間ノ仕事ノ費用ヲWトシ,又一年間ノ總費用ヲTトシ,百萬ヲ單位トスル賣ラレタ電氣單位

U	W	T
0.3	0.47	0.78
1.2	1.03	1.64
2.3	1.70	2.73
3.4	2.32	3.77

ノ數ヲ U トスレバ,前頁ノ下ノ表ノヤウナ結果ガ求メラレタ.

U ト T 及ビ U ト W トノ各關係式ヲ近似的ニ求メヨ. 尙又 U ガ 5 トナツタトキ, W ト T トノ確カラシイ各値ヲ求メヨ. 但シコノ場合モ同ジ適當ナ處理ガシテアルモノトスル.

答 $T=0.95U+0.525$, $W=0.6U+0.28$; $U=5$ ノトキ, $T=5.25$, $W=3.28$.

66. ココニ一ツノ函數ガアル.

$$y=5\log_{10}x+6\sin\frac{1}{10}x+0.084(x-3.5)^2.$$

$x=3$ ト $x=6$ トノ間ニ在ツテ,且ツソレト値ガ 2% 以上異ナラナイ所ノ x ノモツト簡單ナ函數ヲ求メヨ. 角 $\frac{1}{10}x$ ハ「ラディアン」デアルコトヲ記憶セヨ.

答 $y=1.22x+0.49$.

67. 方程式　$0.5x^{15}-12\log_{10}x+2\sin 2x=0.921$

ヲ滿足スル x ノ値ヲ,有效數字三桁マデ正シク求メヨ.

$\sin 2x$ ニ於テ,角ハ「ラディアン」デアルコトヲ注意セヨ.　答 1.22.

68. 或ル國ノ人口ハ, 1820 年ニハ 4.35×10^6, 1860 年ニハ, 7.5×10^6, 1890 年ニハ 11.26×10^6 デアツタ. コノ人口ハ增加ノ複利法ニ從フカ否カヲ吟味セヨ. 1910 年ニ於ケル人口ハ如何程デアツタラシイカ.

答 14.78×10^6.

69. 方程式　$2x^2-10\log_{10}x-3.25=0$

ヲ滿足スル x ノ値ヲ,有效數字三桁マデ正シク求メヨ.　答 1.645

70. p_3/p_1 ヲ y トスル. $p_3=20$ デアルトシテ, p_1 ノ次ノ各値ニ對スル y ヲ求メヨ. 各場合ニ於テ方程式

$$y=\frac{1}{x}-0.23\log_{10}x$$

ヲ滿足スル x ノ値ヲ求メヨ.

p_1	200	150	100	70	50
答; y	0.10	0.1333	0.20	0.2837	0.40
答; x	4.135	3.763	3.172	2.60	2.110

71. p_1 ノ値ハココニ與ヘラレタ通リデアル. 若シ $p_3=10$ デアルナラ

バ,各々ノ場合ニ於テ,方程式

$$\frac{p_3}{p_1}=\frac{1}{x}-\frac{1.25\log_{10}x}{\sqrt{p_1}-1.2}$$

ヲ滿足スル x ノ値ヲ求メヨ.

p_1	200	150	100	70	50
答; x	7.46	6.35	5.02	4.03	3.24

72. 方程式　$9x^3-41x^{0.8}+0.5e^{2x}-92=0$

ヲ滿足スル x ノ値ヲ有效數字三桁マデ正確ニ求メヨ.　答 2.35.

73. $y=\frac{1}{2}x^2-3x+2$ トスル. x ニ或ル値ヲ與ヘ, y ヲ計算シ,且ツコレヲ方眼紙上ニ描キ, x ト y トノ間ノ關係ノ性質ヲ示セ. $y=0$ ナルトキ x ハ如何.

答 $x=5.236$, 0.764.

74. p ト u トノ次ノ値ガ觀測サレタ. p ト u トヲ結ブ法則ハ,

$$pu^a=b$$

ノヤウデアルト考ヘラレル. 果シテサウデアルカ否カヲ試ミ,又ソレガ大體眞デアルナラバ, a ト b トノ最モ適當ナ値ヲ求メヨ.

p	10.16	20.80	60.4	101.9	163.3	225.9	305.5
u	37.36	19.08	7.009	4.290	2.756	2.031	1.529

答 $pu^{1.0646}=479$.

75. オーデル氏ハ次ノ速度 n (一分間ノ廻轉數) ニテ廻轉スル直徑 d 吋ナル紙製ノ圓盤ヲ支ヘルタメニ要スル捻力 c (封度吋) ヲ測量シタ.

但シ　$d=22$ 吋トスル.

c	0.33	0.56	0.875	1.29	1.76	2.4
n	400	500	600	700	800	900

$\log c$ ト $\log n$ トヲ坐標トシテ方眼紙ニ「グラフ」ヲ描ケ. 又

$$c\propto n^m$$

ナルヤウナ法則ガアルカドウカヲ見ヨ.　答 $m=2.5$.

76. 次ノ場合ニ於テ,同樣ノコトヲナセ.

圓盤ノ直徑=27 吋.

c	0.41	0.575	0.895	1.297	1.72	2.2	2.385
n	250	300	350	400	450	500	517

二ツノ組ニ對スル平均ノ**答**　$m=2.5.$

77. 次ノ測量ハ1分間ニ1000回廻轉スル直徑 d ナル紙製ノ圓盤ヲ支持スルタメニ要スル力 P (ワット)ニ就イテナサレタモノデアル.

d	15.04	21.82	26.83	36	47.1
P	0.398	3.162	12.59	50	154.9

$P \propto d^s$ ナルコトヲ證明シ,且ツ s ヲ求メヨ.　**答**　$s=5.5.$

78. 或ル商會デハ,其ノ過去ノ經驗ト研究トカラ一週間ノ費用(磅)ハ

$$120+3.2x+\frac{C}{x+5}+0.01C$$

デアル事ガヨク諒解サレタ. ココニ x ハコノ商會デ使用シテヰル馬ノ數デアリ, C ハ普通ノ一期ノ賣上高デアル.

若シ C ガ 2150 磅デアルナラバ, x ノ種々ナ値ニ對シテ一週ノ費用ハ如何程デアルカ. 又方眼紙ニ「グラフ」ヲ描イテ,費用ヲ最小ナラシメル馬ノ數ヲ求メヨ.　**答**　21頭.

79. 或ル數ニ,其ノ逆數ノ 2.25 倍ヲ加ヘヨ. 如何ナル數ニ對シテコノ和ガ極小トナルカ. 方眼紙ヲ用ヒルカ,ソレトモ計算ニヨルカハ諸君ノ自由デアル.　**答**　1.5.

80. t 秒間ノ終リニ於テ,或ル物體ガ其ノ出發點カラ測ツテ距離 s 呎ヲ通過シタコトガ觀測セラレタ. 若シ

$$s=25+150t-5t^2$$

デアルナラバ,時間 t ニ於ケル速度ハ如何.　**答**　$150-10t.$

コレヲ補正スルタメニ,採用スル法則ヲ證明セヨ. 若シ s ト t トノ對應數値ヲ坐標トシテ方眼紙ニ「グラフ」ヲ描ケバ,何ガ其ノ速度ヲ示スカ. 又其ノ理由如何.

81. $y=a+bx^n$ ハ次ノ三點ヲ通ル曲線ノ方程式デアル.

$x=0,\ y=1.24;$ $x=2.2,\ y=5.07;$ $x=3.5,\ y=12.64.$ a, b, n ヲ求メヨ.

又 $x=2$ ナルトキ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ.　**答**　$a=1.24,\ b=0.602,\ n=2.348$ 3.593.

C	t	計算ニ依ル V
342.0	0.00020	
358.4	0.00021	1675
374.6	0.00022	1657
390.7	0.00023	1648
406.7	0.00024	1640
422.6	0.00025	1632
438.4	0.00026	1623
454.0	0.00027	1605
469.5	0.00028	1596
484.8	0.00029	1578

82. 二ツノ量 V ト C トハ共ニ時間ニ應ジテ變ル. 若シ

$$V=RC+L\frac{dC}{dt},$$

デアツテ,且ツ $R=0.1,\ L=0.001$ ナラバ, C ノ値ガ表記ノ値デアルトキ, V ノ近似値ヲ求メヨ. コレヲ方眼紙ニ描ケ.

83. 此處ニ重サ 200 封度ナル一箇ノ機械ガアル. 呎ニ依ル次ノ s ノ値ハ,或ル計算ノ基準カラ t 秒後ニ於ケル其ノ直線通路上ノアル一點カラノ(骨組圖ニ於テ計ラレルヤウニ)其ノ重心ノ距離ヲ示スモノデアル. $t=2.05$ ニ於ケル加速度及ビソレニ此ノ加速度ヲ與ヘル力ヲ封度デ求メヨ.

s	$t.$
0.3090	2
0.4931	2.02
0.6799	2.04
0.8701	2.06
1.0643	2.08
1.2631	2.10

答　9.25秒々呎, 57.5封度.

84. 次ノ觀測シタ數ハ, $y=ax/(1+sx)$ ノヤウナ或ル式ニ從フト考ヘラレル. y/x ト y トノ値ヲ坐標トシテ方眼紙ニ「グラフ」ヲ描キ,上ノ關係ガ成立スルカ否カヲ見ヨ. 又 a ト s トノ値ヲ求メヨ.

x	0.5	1	2	0.3	1.4	2.5
y	0.78	0.97	1.22	6.55	1.1	1.24

答　$y=3x/(1+2x)$.

85.　曲線 $y=cx^{\frac{1}{2}}$ ニ於テ, $x=b$ ノトキ $y=m$ ナラバ, c ノ値如何. コノ曲線ヲ x 軸ノ周リニ廻轉セヨ. $x=a$ ト $x=b$ トノ兩截斷面ノ間ニ在ツテコノ廻轉曲面ニヨツテ包マレテキル體積ヲ求メヨ. 勿論 m, b, a ハ與ヘラレタ距離デアル.

答　$\dfrac{\pi m^2(b^2-a^2)}{2b}$.

86.　次ノ場合ニ於テ, $\int p\cdot dv$ ヲ求メヨ. 但シ $pv^s=c$(常數)トスル.

(1) $s=0.8$ ナルトキ, (2) $s=1$ ナルトキ.

答　(1) $5cv^{0.2}$, (2) $c\log_e v$.

87.　若シ $y=2.4-1.2x+0.2x^2$ デアルナラバ, $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ. 又 $x=0$ カラ $x=4$ マデニツノ曲線[(1)]ヲ描キ, y 及ビ $\dfrac{dy}{dx}$ ガ x ト如何ナル關係ニ在ルカヲ示セ.

88.　20ヲニツノ部分ニ分チ,一方ノ平方ニ他方ノ平方ノ3倍ヲ加ヘタ結果ガ極小ナルヤウニセヨ. 如何ナル方法ヲ用ヒテモヨイ. 答 15ト5.

89.　或ル電路ニ於テ,電流 C「アンペア」ハ次ノ表ニ示スヤウニ變化スル.

C	279.3	296.7	314.2	331.6	349.1	366.5	384.0
t 秒	0.1002	0.1004	0.1006	0.1008	0.1010	0.1012	0.1014

今若シ,

$$V=RC+L\frac{dC}{dt},$$

デアルナラバ, $R=0.3$, $L=8\times10^{-4}$ ノトキ, V ヲ求メヨ. 又 C ト t 及ビ V ト t ノ「グラフ」ヲ同ジ紙ニ描ケ.

---

(1) 一ツハ x ト y トヲ坐標トスル曲線デ, 一ツハ x ト $\dfrac{dy}{dx}$ トヲ坐標トスル曲線(即チ微分曲線)デアル.

答			
t	C	$L\dfrac{dC}{dt}$	V
0.1003	288.0	69.6	156.0
0.1005	305.45	70.0	161.63
0.1007	322.9	69.6	166.47
0.1009	340.35	70.0	172.10
0.1011	357.8	69.6	176.94
0.1013	375.25	70.0	182.60

90.　§108 ノ問題5ニ,瓦斯機關ノ汽力圖ニ於ケル p ト v トノ値ガ與ヘテアル. ソコデハ, γ ガ常數デアルトイフ古イ假定ガ作ラレタ. 併シ近頃ノ實驗デハ,其ノ材料ガ完全瓦斯デナイノデ, $\dfrac{1}{\gamma-1}=2+\dfrac{pv}{300}$ ヲ用ヒネバナラナイコトガ解カツテ來タ.*

此ノ新ラシイ假定ニ依ツテ,アノ問題ヲヤリ直セ. サウスレバ次ノ結果ヲ得ル.

v	2.05	2.15	2.25	2.35	2.45	2.55	2.65	2.75
h	1750	4868	39.5	2467	1426	353	−273	−103

v	2.85	2.95	3.05	3.15	3.25	3.35	3.45	3.55
h	−144	−112	−69	−137	−202	−140	−66	−115

此ノ結果ト§108ノ問題5ノ諸結果トハ,同ジ紙上ニ兩者ノ「グラフ」ヲ描イテ比較サルベキモノデアル.

---

* t ガ絕對溫度デアルナラバ, $\dfrac{1}{\gamma-1}=2+\dfrac{t}{1000}$ デアル. 上ノ場合ニ於テ, $v=2$, $p=84.5$ デアルトキハ $t=563°$ デアツタ. 從ツテ $t=3\frac{1}{3}pv$ デアル.

第二十八章　單振動

§ 114. 單弦運動

最モ簡單ナ週期的運動卽チ振動的運動ヲ**單弦運動**[1]ト言ヒ,之ヲ *S. H. M.*[2]ト略記スル. 此ノ場合ニ,時間 t ニ於ケル其ノ物體ノ平均位置カラノ變位ヲ x トスレバ,

$$x=a\sin(qt+e).\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

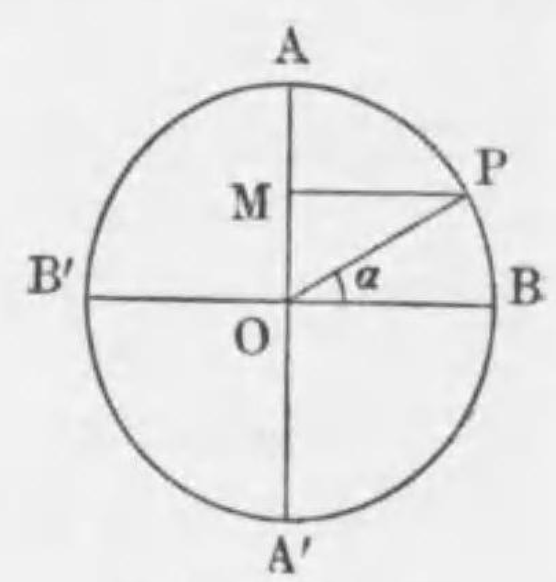
之ヲ研究スルニ際シテハ,學生ハ §34 及ビ §145 ヲ參照セヨ. 此等ノ節デハ任意ノ角ノ正弦ニ就イテ叙述シテアル. 又學生ハ長イ振子ノ球ノ往復運動,海ノ波ガ最モ簡單ナ形ヲナシテキルトキ海面ニ浮イテキル「コルク」ノ上下運動,或ハ「ゼイマイ」秤ニ懸ケラレタ分銅ノ上下運動ナドヲ注視シナケレバナラナイ.

例 1.　a ヲ 10, q ヲ例ヘバ 3π トセヨ. $e=0$, 或ハ$\frac{\pi}{6}$, 或ハ任意ノ他ノ値トシテ曲線ヲ描ケ. 私ハ屢々$\frac{\pi}{6}$ノ代リニ 30° ト書ク. 之ハ正シクハナイケレド便利デアル. x ハ a ヨリ大トナルコトモ,又 $-a$ ヨリ小トナルコトモ出來ナイコトハ解ル. 故ニ a ヲ此ノ運動ノ**振幅**ト言フ.[3] e ハ種々ナ種類ノ機械技師ガ**前進角**,又ハ**導程**,又ハ**遲滯角**ト呼ブ[4]所デアル.

角 $qt+e$ ハ「ラディアン」デ測ツタモノデアル. サテ或ル角ノ正弦ハ其ノ角ニ 2π ヲ加ヘタ角ノ正弦ト總テノ點ニ於テ同ジデアル. 從ツテ,時間

(1)　一般ニ變位 x ガ時間 t ノ正弦或ハ餘弦ニ依リ與ヘラレル運動ヲ單弦運動トイフ. 或ハ之ヲ**單振動**トモ言フ. 或ハ又等速圓運動ヲ其ノ圓ノ直徑ノ上ニ射影シタモノデアルト考ヘルモヨイ. 今半徑 a ナル圓 O ノ圓周上ヲ點 P ガ等速運動ヲナストキ, $PM\perp AA'$ ナルトキ, M ノ AA' 上ニ於ケル運動ハ卽チ單弦運動デアル. OM ハ卽チ變位 x デアル.

(2)　單弦運動 simple harmonic motion ノ頭文字ヲトツタモノデアル.



〔補〕第 23 圖

T(週期ト呼バレル)ノ經過ノ後ニ,x ノ値ガ又モトノ値ヲ繰返ストスレバ, $qT=2\pi$, 卽チ $q=\frac{2\pi}{T}$, 又ハ $q=2\pi f$ デアル. 玆ニ f ハ $\frac{1}{T}$ ヲ表ハシ,之ハ**振動數**卽チ音樂家ガ調子ト呼ブ所デアル.

例 2.　或ル振子ノ球ガ 1.5 呎ノ總振動ヲナシ,且ツ 1.6 秒間ニ此ノ振動ヲ完成スル. 若シコノ運動ガ式(1)ニヨツテ與ヘラレルナラバ, a 及ビ q ノ値如何.　**答** 明ラカニ $a=0.75$ 呎. 週期 T ハ二度振ル時間デアツテ, 卽チ $T=3.2$秒. $q=\frac{2\pi}{3.2}=1.96$.

(1)ニ於テ, $t=0$ ナルトキ, x ハ $a\sin e$ ナル値ヲ採ルコトハ明ラカデアル. 又 $x=a\sin(qt+120^\circ)$ハ明ラカニ $x=a\cos(qt+30^\circ)$ ト同ジ事デアル. 故ニ描カレタ曲線ハ普通ニ**正弦曲線**ト呼ブケレドモ,餘弦曲線ト呼ンデモ何等誤デハナイ.

學生ハ全週期ニ對スル曲線ノ總面積ハ 0 デアルコトニ氣付クデアラウ. 學生ハ單ニコノ運動ニ就イテノ數學的知識ヲ得ルノミデナク,自然界ノ研究ニ於テ必要デアル所ノ此ノ運動ニ就イテ熟知スルタメニ,之ヲ研究スルニ多大ノ時間ヲ費サネバナラナイ.

(3)　前頁脚註(1)ニ於ケル圓ノ半徑 a ガ振幅デアル.

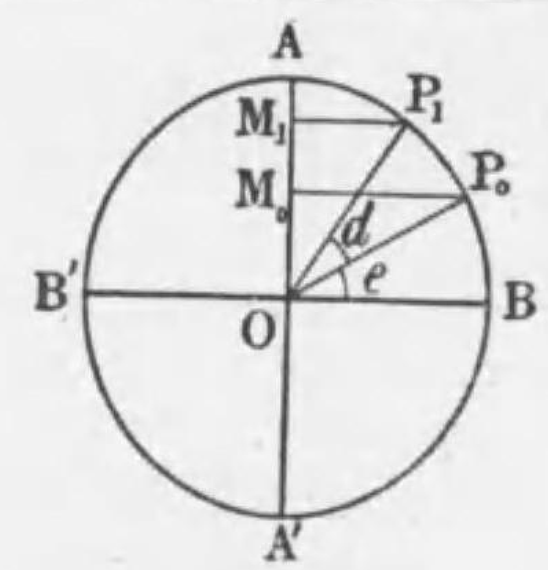
(4)　P ノ射影 M ガ圓ノ中心ヨリ動キ始メルトキヲ時間ノ基準トスレバ $e=0$ デアツテ變位 x 卽チ $OM=a\sin\alpha$. 然ルニ圓周上 P_0 ノ點, 卽チ直徑上 M_0 ヲ出發點トスレバ,

$$x=OM=a\sin(\alpha+e)$$

トナル. カク P ガ P_0 マデ前進シテキルトキ, e ヲ前進角或ハ單ニ**進ミ**トイヒ, 之ニ反シ遲レテキルトキ,e ヲ遲滯角或ハ單ニ**遲レ**トイフ. 今週期ヲ T トスレバ t ナル時刻ニ於テ, α ハ $\frac{2\pi}{T}t$ トナル. 之ニ導程ヲ加ヘルト, 結局上式ハ

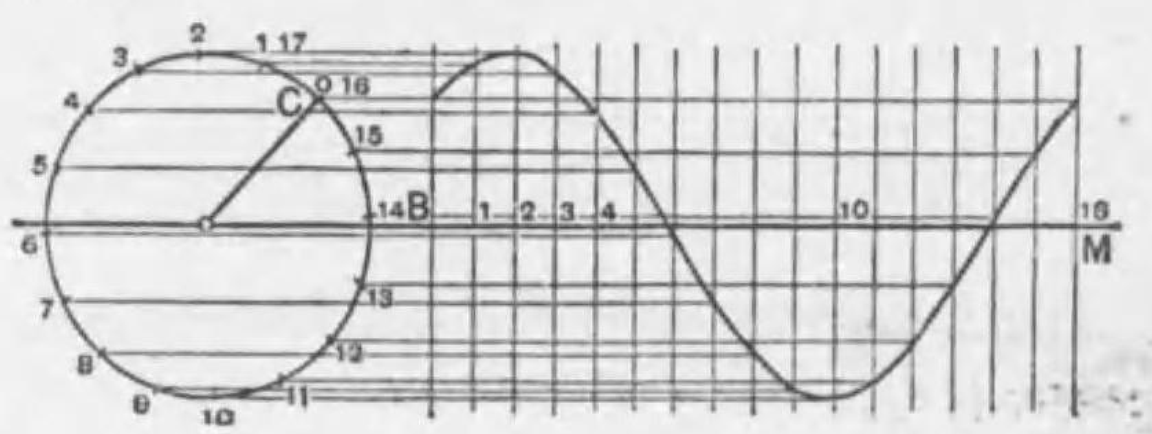
$$x=a\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+e\right).$$

トナル. 本文ニアル q ハ卽チ $\frac{2\pi}{T}$ ニ當ル. 此ノ角$\frac{2\pi}{T}t+e$ ヲ單弦運動ノ**位相**(phase) トイフ.



〔補〕第 24 圖

第38圖ハコノ曲線ノ形ヲ示ス．私ハ學生ニ次ノ方法ニヨツテコノ曲線ヲ描クヤウニ勸メル．初等三角法ノ僅カノ知識ヲ有シテヲレバ,此ノ方法ニ依ルノト,標點ヲ打ツテ「グラフ」ヲ描クノト同ジ結果ニナラネバナラヌコトガ解ル．ソレハ丁度製圖所ニ於テ螺旋曲線(螺絲ノヤウナ)ノ高度ヲ描クトキニナサレルコトト同ジデアル．



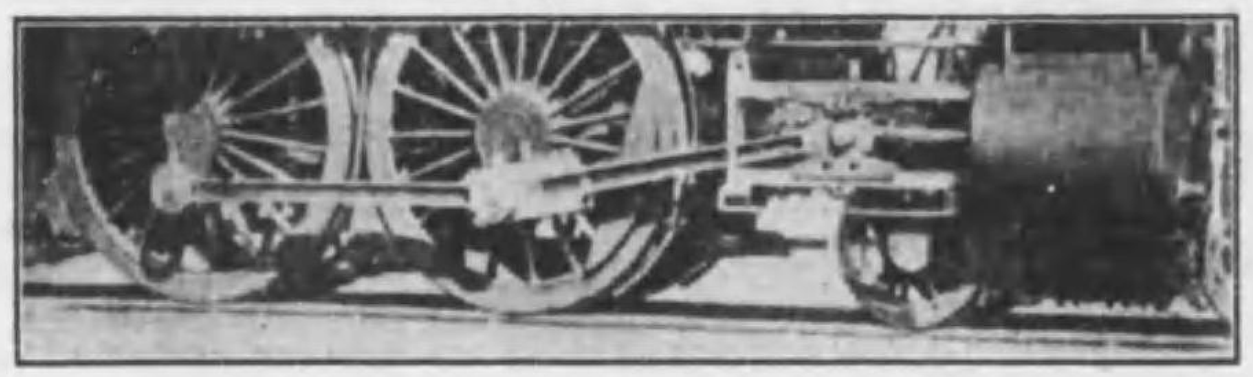
第 38 圖

一直線 OBM ヲ引キ,半徑 a ナル圓ヲ描ケ.[1] 角 BOC ヲ e ニ等シク取レ．此ノ圓周ヲ,C カラ任意ノ都合ノヨイ數ニ等分シ,(此ノ圖デハ16等分)各分點ニ 0, 1, 2, 3,等ト番號ヲ打テ,一度,二度,三度,又ハソレ以上圓周ヲ廻ルトキニハ,此等ノ點ヲ 16, 17, 18, 等．或ハ 32, 33, 34, 等ト呼ブカモ知レナイ．運動ノ週期線ヲ表ハス爲ニ,距離 BM ヲ取リ,ソレヲ圓周ヲ分ケタト同ジ數ノ部分ニ等分セヨ．此ノ點ニ 0, 1, 2, 3,等ト番號ヲ打テ．但シ B ヲ 0 トシ, M ヲ 16 トセヨ．次ニ各對應點カラ鉛直並ニ水平ニ射影セヨ.[2] カクシテ曲線上ノ點ヲ得ル．

(1) 此ノ圓ハ O ヲ中心トスル．此ノ圓ヲ**參考圓**トイフ．

(2) 圓周上ノ點ヲ水平ニ射影シ,之ニ對應スル週期線上ノ點ヲ鉛直ニ射影シテ其ノ交點ヲトル．

(3) 「クランク」(crank)ハ「曲柄」トモ譯サレル.機關車,自動機關ニ見ル所デアル．



〔補〕第 25 圖．　機關車ノ連結棒及ビ「クランク」腕ヲ示ス．

若シ OC ガ紙面ニ鉛直ナ平面ニ於テ,時計ノ針ト反對ノ方向ニ一樣ノ速サデ廻轉スル「**クランク**」[3]デアルト考ヘルナラバ,(1)ニ於ケル x ハ OM カラ上方ニ C ノ距離ヲ表ハシ, qt ハ任意ノ時刻ニ於テ「クランク」ガ始發ノ位置 OC トナス角ヲ表ハス．ココニ q ハ「クランク」ノ一秒間ノ角速度ヲ「ラディアン」デ表ハシタモノデアル．尙勿論 $2\pi/q$ ハ「クランク」ノ一廻轉ノ時間,卽チ此ノ運動ノ週期 T ヲ表ハス．x ハ無限ニ長イ連結サレタ棒ニ依ツテ作用サレル滑子ノ,其ノ中央ノ位置カラ測ツタ任意ノ瞬間ニ於ケル變位デアル．

若シ物體ガ運動(1)ヲナスナラバ,$\frac{dx}{dt}$ハ任意ノ瞬間ニ於ケル其ノ速度 v デアリ,$\frac{dv}{dt}$ 卽チ $\frac{d^2x}{dt^2}$ ハ其ノ加速度デアル．§94 ノ表ニ於テ,若シ

$$x=a\sin(qt+e), \quad\cdots\cdots(1)$$

ナラバ,
$$v=\frac{dx}{dt}=aq\cos(qt+e)=aq\sin(qt+e+90^\circ), \quad\cdots\cdots(2)$$

加速度
$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-aq^2\sin(qt+e)=aq^2\sin(qt+e+180^\circ). \quad\cdots\cdots(3)$$

此等ノ公式ノ證明ハ § 95 ニ述ベタ．併シ,學生ハ次ノヤウナ方法デ此等ヲ說明シナケレバナラナイ．

說明　$a=10$, $q=3\pi$, $e=\frac{\pi}{6}$ 卽チ 30° トセヨ．次ノヤウナ t ノ值ニ對シテ(1)カラ x ヲ計算シ,且ツコレヲ表記セヨ．次ニ各區間ニ於テ,$\frac{\delta x}{\delta t}$ 及ビ $\frac{\delta v}{\delta t}$ ヲ求メヨ．$aq\cos(qt+e)$ ヲ計算セヨ．然ラバ,コレハ v ノ眞ノ值デアル．

t	x	$v=\frac{\delta x}{\delta t}$	$\frac{\delta v}{\delta t}$	眞ノ v	眞ノ $\frac{dv}{dt}$
0.060	8.86204	43.26			
0.061	8.90530	42.48	780	42.87	791
0.062	8.94778				

又 $-aq^2\sin(qt+e)$ ヲ計算セヨ．然ラバコレハ加速度ノ眞ノ値デアル．諸君ノ表ハ十分正確デハナイ．諸君ハ近似的ニ正シイ加速度ヲ得ル爲ニ六桁マデ計算シナケレバナラナイ．

諸君ハ,眞ノ v ガ二ツノ表ニアル値ノ平均 42.875 ト著シクハ異ナラナイ事,並ビニ表ニアル加速度ハ著シクハ誤ツテキナイ事ヲ知ル．

(1)カラ出發シテ,(2)ヲ

$$\frac{dx}{dt}=aq\sin(qt+e+90^\circ),$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=aq^2\sin(qt+e+180^\circ)$$

ノヤウニ書ク事ガ出來ル．而シテコノ事實ハ十分ヨク記憶シテヨロシイ．(1)ノヤウナ函數ヲ取扱フトキニハ,微分ハ q トノ積及ビ 90° 増加シタ導程ヲ意味スル．積分ハ q ニテ除シタ商及ビ 90° 減少シタ導程ヲ意味スルモノデアル．

§115. 二ツノ「クランク」運動ノ合成

§114 カラ次ノ事ガ解ル．函數 $x=a\sin qt$ ハ,長サ a ナル「クランク」ガ一秒間ニ角速度 q ニテ廻轉シテキルトキ,之ニ依ツテ動カサレ,且ツ無限ニ長イ連結シタ棒ニ依ツテ作用サレル滑子ノ直線運動ニ類似シテキル．x ハ時間 t ニ於ケル滑子ノ行路ノ中點カラノ距離デアル．時刻ガ 0 ナルトキ, x ハ 0 デアリ, T ヲ週期トシ, f ヲ振動數[1],即チ一秒間ノ「クランク」ノ廻轉數トスルナラバ, $q=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$ デアル．

函數 $x=a\sin(qt+e)$ ハ唯「クランク」ノ位置ガ前ノヨリモ角 e「ラディアン」ダケ前進シテキル事ヲ除イテハ,前述ノ函數ト全ク同一デアル．即チ時刻 $t=0$ ニ於テ,滑子ハ其ノ中央ノ位置ヲ去ルコト $a\sin e$ ナル距離ニ在ル．

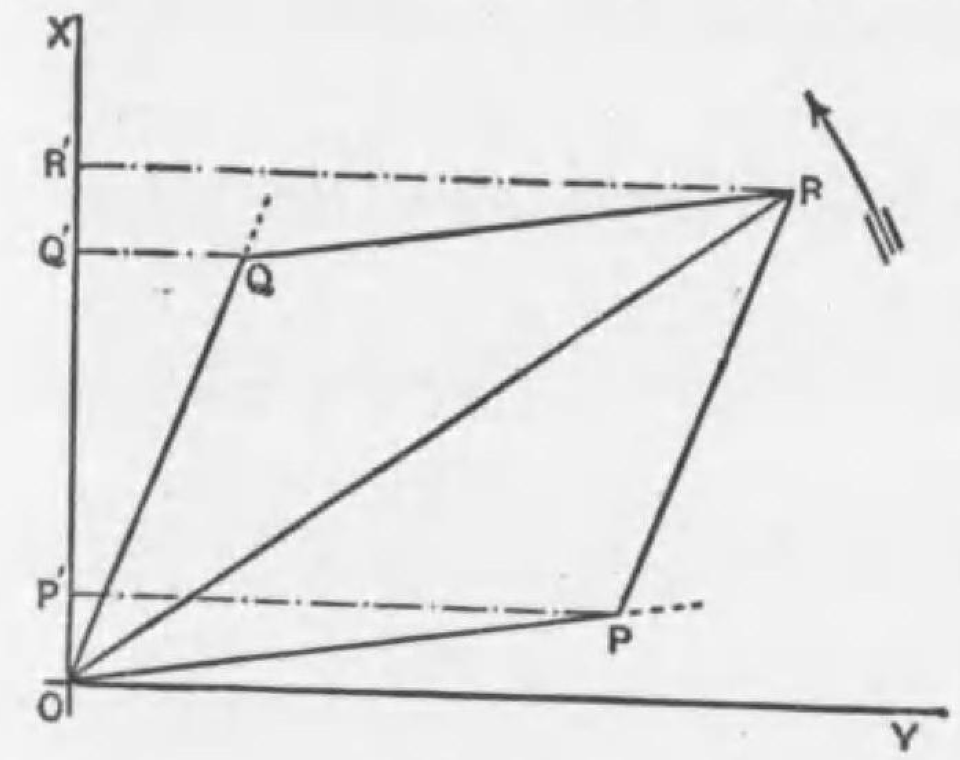
函數　　$x=a\sin(qt+e)+a'\sin(qt+e')$,

ト函數　　$X=A\sin(qt+E)$,

(1) 即チ $1/T=f$ トオクワケデアル．

トハ同ジデアル．即チ**二ツノ「クランク」運動ノ和**ハ特別ナ長サト特別ナ前進角トヲ有スル單一ノ「クランク」ニヨツテ與ヘルコトガ出來ル．之ヲ次ニ證明スル．

圖(第39圖)ニ於テ, $t=0$ ナルトキノ最初ノ二ツノ位置ヲ示セ．即チ, $YOP=e$, $OP=a$; $YOQ=e'$, $OQ=a'$ ヲ定メヨ．



第 39 圖.
各場合ニ於テ, $t=0$ ナルトキ「クランク」ノアル位置ニ描ク.

平行四邊形 $OPRQ$ ヲ完成シ,對角線 OR ヲ引ケバ,長サ $OR=A$ デ,前進角ガ $YOR=E$ ナル單一ノ「クランク」ハ, OP ト OQ トガ別々ニ與ヘル運動ノ和ヲ共ノ滑子ニ與ヘルデアラウ．今此ノ滑子ガ鉛直ノ運動ヲ有スルモノト想像セヨ．任意ノ時刻ニ於ケル OQ, OR 及ビ OP ノ相對的位置ヲ描ケ．此等ノ相對的位置ハ,角速度ガ同一デアル限リハ變化シナイ．P,R 及ビ Q ヲ OX 上ニ射影セヨ．「クランク」OP ハ此ノ瞬間ニ滑子ヲ其ノ中央位置ノ上方 OP' ニアルヤウニシ,「クランク」OQ ハ滑子ヲ其ノ中央位置ノ上方 OQ' ニアルヤウニスル．又「クランク」OR ハ此ノ瞬間ニ滑子ヲ其ノ中央位置ノ上方 OR' ニアルヤウニスル．然ラバ, OR' ハ常ニ OP' ト OQ' トノ代數和ニ等シイコトヲ觀察セヨ．

カクシテ,之ヲ"「クランク」OP ガ與ヘル S.H.M. ニ OQ ガ與ヘル S.H.M. ヲ加ヘタモノハ, OR ガ與ヘル S.H.M. ニ等シイ"ト言

フ. 同様ニシテ"OR ガ與ヘル S.H.M. カラ OP ガ與ヘル S.H.M. ヲ減ジタモノハ, OQ ガ與ヘル S.H.M. ニ等シイ."又時々"「クランク」OR ハ二ツノ「クランク」OP ト OQ トノ和デアツテ,實際「クランク」ニハ「ベクトル」ノヤウニ加法及ビ減法ガ施サレル"トイフ.[(1)]

此等ノ命題ハ,瓣ノ運動及ビ其ノ他ノ機械ヲ取扱フトキニ,非常ニ價値ガアル. 此等ハ特ニ,電氣機械技師ニトツテ極メテ重要デアル. 從ツテ圖計算ノ方法ヲ好ム多クノ實際家ハ"「クランク」OP デ電流ヲ表ハサセヨウ"トイフ. 此ノ言葉ノ意味ハ"玆ニ法則 $C=a\sin(qt+e)$ ニ從ツテ時間ニ伴ヒ變ズル電流ガアル. 其ノ量ハ「クランク」OP ニ依ツテ鉛直ニ作用サレル滑子ノ變位ニ類似シテキル. 但シ「クランク」ノ長サハ a デアリ,角速度ハ q デアル. 又 OP ハ $t=0$, 角 $YOP=e$ ナルトキノ其ノ位置デアル."

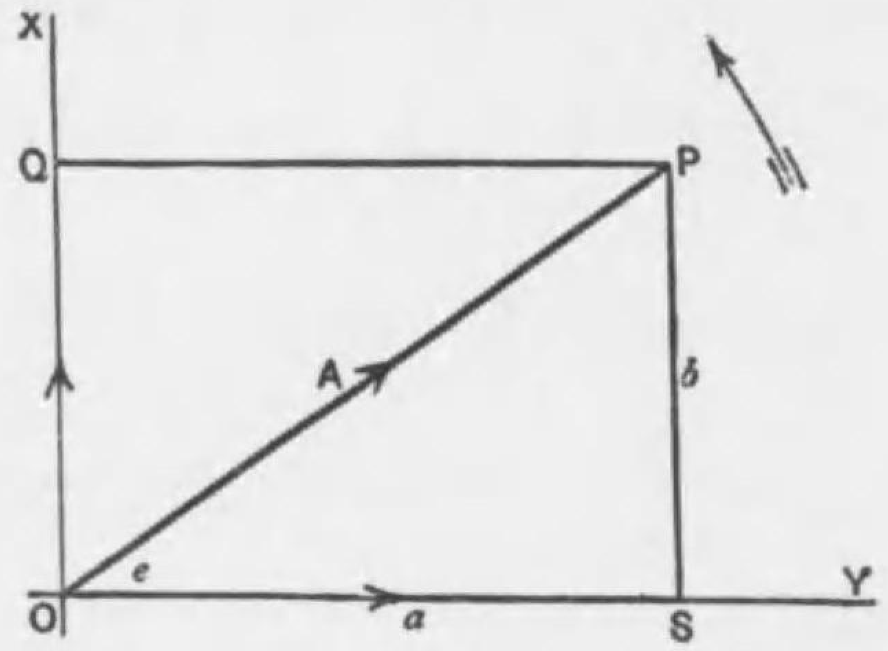
§116. 簡單ナ場合

上述ノ簡單ナ場合ハ

$$a\sin qt+b\cos qt=a\sin qt+b\sin(qt+90^\circ)=A\sin(qt+e),$$

デアル. 但シココニ, $A^2=a^2+b^2$ 及ビ $\tan e=b/a$ デアル.

第 40 圖



(1) 此ノ思想ハ「ベクトル」ノ和ノ考ヘノ基礎デアル. 此等ノ問題ハ第三十七章, 特ニ §164—§167 ニ詳説スル所ガアル.

之ハ三角法ニヨツテ容易ニ證明セラレル. 圖(第40圖)デハ

$$OS=a,\quad OQ=b$$ トスル.

「クランク」$OP=A$ ハ OS ト OQ トノ「ベクトル」ノ和デアリ, $\tan e$ 卽チ $\tan YOP$ ハ b/a デアル.

§117. 交流電氣ノ例

私ハコレマデ振動ノ運動及ビ滑子ノ運動ニ就イテ述ベタ. 併シ吾々ノ代數學ハ他ノ多クノ現象ニ應用サレルモノデアルコトヲ記憶セネバナラナイ.

最モ簡單ナ交流電氣ハ,法則 $c=c_0\sin(qt+e)$ ニ從フ. 而シテ之ハ $2\pi/q$ ニ等シイ週期 T ヲ有スル. ソレハ正ノ値 c_0 カラ負ノ値 $-c_0$ マデ行ク. 又ソレガ時間ニ應ジテ變化スル導程ハ曲線(第38圖)上ニ示サレテキル. e ハ其ノ**導程**ト呼バレ,起算スル時刻ニ依リ定マル. §116 ノ公式ノ說明トシテ,此ノ電氣ノ例ヲ,極メテ徐々ニ注意深ク追究シテ見ヨウ. 何故其ノ爲ニ全一週間ヲ掛ケナイノデアラウカ.

或ル電路ニ於テ,電壓ガ v「ボルト」,電流ガ c「アンペア」,抵抗ガ r「オーム」,感應係數ガ l「ヘンリー」デアルナラバ,時間ガ t 秒ナルトキニ,有名ナ電氣法則ガアル.

$$v=rc+l\frac{dc}{dt}. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)^*$$

學生ハ非代數的ノ言葉デコレヲ述ベネバナラナイ.

* 電路ハソレ自身デ閉ヂテキテ, v ハ其ノ電路ニ於ケル交流發電機ノ電動力デアルト想像スル事ガ出來ル. 其ノ場合ニハ, r ト l トハ發電機ノ抵抗ト感應係數トヲ包含スルデアラウ. 卽チ, 二點 A, B ヲ結ブ唯一ツノ支線ヲ持チ, 且ツ v ハ A ト B トノ間ニ幾分カ存在スル電位差デアルト想像スル事ガ出來ル. 私ハ屢々支線ヲ「電路」トシテ述ベタ. 之ハ各々ノ場合ニ於テ, 誤ノ起ルベキ機會ハ決シテナイカラデアル.

サテ,若シ $c=c_0\sin qt$ ナラバ, $\dfrac{dc}{dt}=c_0q\cos qt.$　(§94参照),

上ノ法則ニ依ツテ　$v=rc_0\sin qt+lc_0q\cos qt.$

從ツテ,　$v=c_0\sqrt{r^2+l^2q^2}\sin(qt+e).$ ………………………(2)

但シ　$\tan e=\dfrac{lq}{r}.$　トスル.

若シ, v ノ振幅ヲ v_0 トスルナラバ, $v_0=c_0\sqrt{r^2+l^2q^2}$ ナル事,及ビ v ハ角 e ダケ c ヨリ前進シテキルコトガ解ル. 即チ換言スレバ,

$$c_0=\frac{v_0}{\sqrt{r^2+l^2q^2}}$$

ナルコト,又 c ハ角 e ダケ v ニ遲レテキルトイフコトモ出來ル.

事實,若シ $v=v_0\sin qt$ デアルナラバ,

$$c=\frac{v_0}{\sqrt{r^2+l^2q^2}}\sin(qt-e)$$

デアル. 學生ハ此ノ事ヲ明瞭ニ考ヘ出サナケレバナラナイ.

此ノ叙述ハ(2)ガ眞ナルトキハ眞デアル.

吾々ガ v ト c トニ就イテ話ストキ,時間ノ初メヲ同ジウスル限リハ,任意ノ時刻ヲ初メトシテ數ヘル事ガ出來ルコトヲ記憶セヨ.

$\sqrt{r^2+l^2q^2}$ ハ電路ノ「**イムピーダンス**」[(1)]ト呼バレル.

(1) ヲ記號的ノ形 $v=\left(r+l\dfrac{d}{dt}\right)c$ ト書クコトハ屡々計算ヲ簡單ニスル. ソシテ $r+l\dfrac{d}{dt}$ ヲ c ノ**演算式**[(2)]ト呼ブ. 又 $\dfrac{d}{dt}$ ノ代リニ θ ト書ク.[(3)] 即チ　$v=(r+l\theta)c$, 或ハ　$c=v\div(r+l\theta)$

トモ書ク. 學生ハ此ノ記號的言葉ニ慣レナケレバナラナイ.

(1) 交流ノ通過ニ反對スル電路ノ或ル性質ヲ示ス量ヲ「イムピーダンス」(阻止ノ義) トイフ. 即チ抵抗 r 及ビ自己感應ヲ有スル電路ノ交流ニ對スル抵抗デアル.

(2) operator ノ譯デ働キカケル式或ハ項ヲ意味スル. 例ヘバ乘法ニ於ケル乘數, 除法ニ於ケル除數ナド皆之ニ含マレル.

(3) 之ニ依ツテ例ヘバ $(3-4\theta)t^2=3t^2-8t.$

又　$\theta t^2=2t$, $t^2=\dfrac{2t}{\theta}$. コノ最後ノ演算式ハ $\int 2t\cdot dt$ ヲ意味スル.

§118. 圖解問題

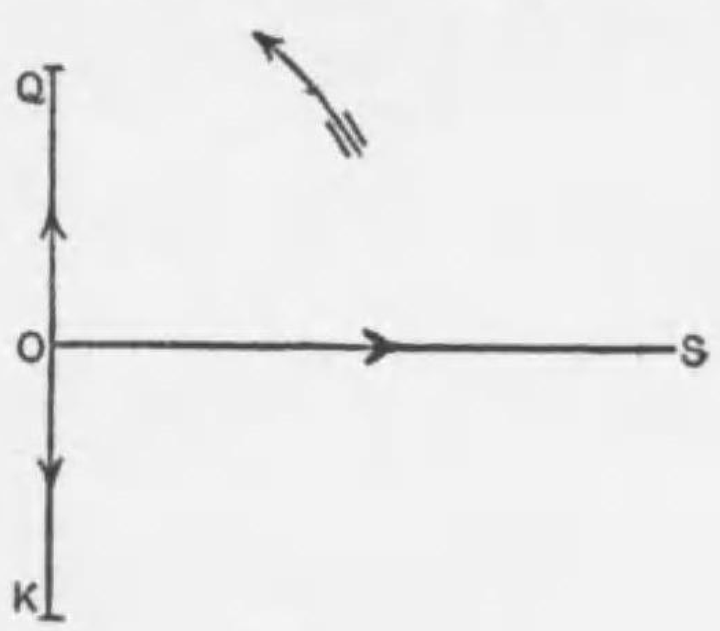
圖解問題ニ於テ,「クランク」OS (第40圖) ヲ以テ,時刻 $t=0$ ニ於ケル $rc=rc_0\sin qt$ ヲ表ハシ,又總テノ「クランク」ノ $t=0$ ニ對スル其等ノ位置ヲ描ケ. OS ノ長サハ rc_0 デアル. 故ニ

$\dfrac{dc}{dt}=c_0q\sin(qt+90°)$ デアルカラ, $l\dfrac{dc}{dt}$ ハ $lc_0q\sin(qt+90°)$

デアル. 次ニ OS ノ前進角ニ $90°$ ヲトリ,「クランク」OQ ノ長サヲ lqc_0 トセヨ.〔事實, OS ハ電流ノ r 倍デアツテ,「オーム」ノ E.M.F. ト言ウテモヨイ. 又 OQ ハ電流ノ lq 倍デアツテ,「**リアクタンス**」ノ E. M. F. ト呼ンデモヨイ.〕 此等ノ二ツノ「クランク」ノ和ハ,全電壓 OP デアル. OP ノ長サハ明ラカニ,

$\sqrt{OS^2+OQ^2}$, 即チ $c_0\sqrt{r^2+l^2q^2}$. 而シテ $\tan SOP=lq/r=\tan e.$

次ニ,若シ電路ガ單ニ「オーム」ノ抵抗 r ト感應係數 l トヲ有スルノミデナク,尙直列ニ於テ(第43圖參照),容量 k ナル蓄電器ヲモ有スルナラバ,其ノ蓄電器ハ負ナル「リアクタンス」ヲ起ストイフ事ハヨク知ラレテキル(§126及ビ127參照). 第41圖ニ於テ, $OS=rc_0$, $OQ=lqc_0$ トシ, $OK=\dfrac{c_0}{kq}$ トシ, 角 SOQ 及ビ SOK ヲ直角トシテ OK ヲ丁度 OQ ト反對ノ方向ニ來ルヤウニスル. 即チ OK ハ電流ニ $90°$ 遲レテキル「クランク」デアル. OS, OQ 及ビ OK ノ「ベクトル」ノ和ハ總 E.M.F. デアル. 實際ニ,此ノ三ツノ「クランク」ヲ加ヘテ,總 E.M.F. ヲ表ハス「クランク」ヲ得ル.



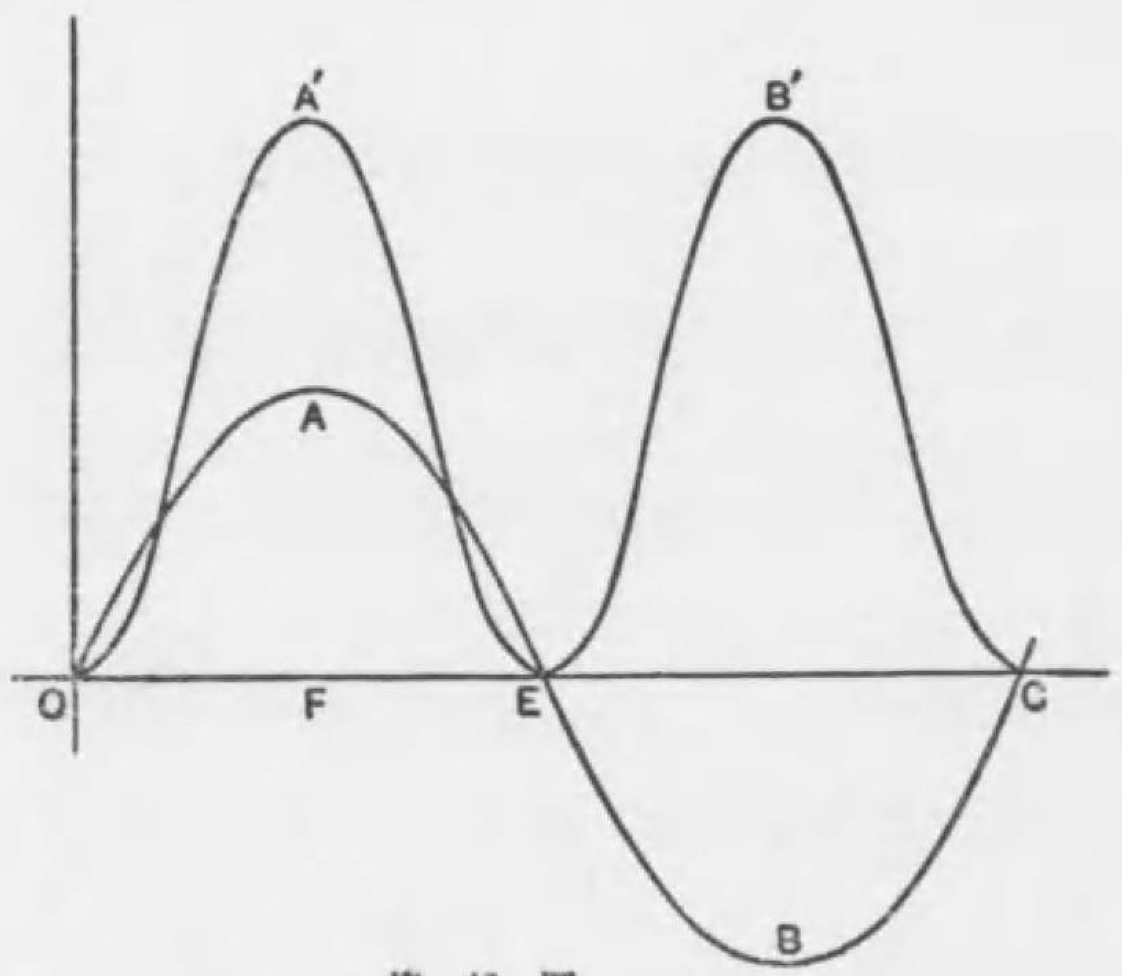
第 41 圖

此ノ種ノ問題ニ於テ, c_0 及ビ其ノ他ノ振幅ヲ使用スル. 此ノ結

果ニ於ケル「クランク」ノ長サハ電壓ノ振幅デアル．卽チ c_0 ノ代リニ**實效電流**ヲ使用スルコトガ出來,從ツテ其ノ結果ニ於ケル「クランク」ノ長サハ實効電壓デアルデアラウ．實効電流ハ 0.707 c_0 デアリ,實効電壓ハ 0.707 v_0 デアル．*

§119. 虛量ノ導入[1]

* 電流 c ハ電動力計ニヨツテ測ラレル．ソレデハ捻力又ハ偶力ハ各瞬間ニ於テ c ノ平方ニ比例スル．併シ, c ハ非常ニ早ク變化シ,從ツテ測ラレタ値ハ c^2 ノ平均ノ値デアル．又コノ機械ニ於ケル讀ミハ此ノ平方デアル．實効電力 c ト呼バレル此ノ讀ミハ "c ノ平方ノ平均値ノ平方根" デアル．



第 42 圖

吾々ハ直流ニ用ヒルカヤウナ機械ニ目盛リヲスル．若シ電流ガ抵抗 r「オーム」ノ電燈線ヲ通ルナラバ,熱ニ變ジタ電力ハ C^2r「ワツト」デアル．今, $c=c_0 \sin qt$ トシ,第 42 圖ニ於ケル曲線 $OAEBC$ ヲ以テ一週期ニ對スル c ヲ表ハシ, AF ヲ c_0 トスル．$OA'EB'C$ ヲ以テ c ノ平方ヲ表ハシ, $A'F$ ヲ c_0^2 トスル．$OA'EB'C$ (其ノ縱坐標ハ常ニ正) ノ平均ノ値ハ $\frac{1}{2}A'F$, 卽チ $\frac{1}{2}c_0^2$ デアルコトハ明ラカデアル．從ツテ之ノ平方根ハ $c/\sqrt{2}$, 卽チ 0.707 c_0 デアツテ, 之ハ吾々ガ實効電流 c ト呼ブ所デアル．

廻轉「クランク」ノ觀念ガ交流電氣ノ問題ヲ解クニ當リ面白イ圖解法ヲ產ミ出シタト丁度同樣ニ,之ハ代數的計算ヲ非常ニ簡單ニスル．蓄電器ノナイ,上ノ場合ニ於テ,二ツノ「ベクトル」[2]ヲ加ヘナケレバナラナイ．$OS=rc_0$ ノヤウニ,標準水平方向ニ於テ其等ヲ代數的ニ書ケ．lqc_0 ハ方向 OQ ニアル．第40圖ガナイナラバ,如何ニシタナラバヨイカ．太字ヲ使ツテ表ハシ,例ヘバ次ノ如クスル．

$$\mathbf{OS}+\mathbf{OQ}=\mathbf{OP}.$$

之ハ圖形ヲ持タナイトキニ,私ガ「ベクトル」ノ和ヲ書ク普通ノ方法デアル．而シテコレヲ次ノヤウナ敍述ニ直スコトガ出來ル．

$$rc_0 \sin qt + lqc_0 \cos qt = v,$$

又ハ

$$rc_0 \sin qt + lqc_0 \sin(qt+90^\circ) = v.$$

今此ノ式ノ代リニ

$$(r+lqi)c_0 \sin qt = v,$$

ト書ク．而シテ i ハ「クランク」ヲ 90° 進メル演算式デアルコトヲ知ル．カクテ,若シ i ニ此ノ意味ヲ與ヘルコトガ完全ニ代數的眞理ト一致スル事ヲ確カメ得ルナラバ,之ハモツト容易ニ書カレ,而カモ多クノ利益ガアル．"i ヲ乘ジタ「ベクトル」**A** ハ正ノ方向ニ 90° **之ヲ廻轉スル**.*" 再ビ i ヲ乘ズレバ,復一回 90° 之ヲ廻轉スル卽チ i^2**A** ハ **A** ガ 180° 廻轉シタコトヲ意味スル．サテ i^2 ハ -1 デアル．從ツテ, i^2**A** ハ −**A** デアツテ,コノ代數學ハ「ベクトル」ノ觀念ト一致スル．次ニ i^3**A** ハ −i**A** デアリ, i^4**A** ハ **A** デアル．卽チ之ヲ原位置ニ持チ來ツタノデアル．之ニ依ツテ,常ニ代數學ガコ

(1) 虛量ノ系統的研究ハ第三十三章ニアル．

(2) 「ベクトル」ノ和ニ就イテハ §165—§168 ニ於テ詳說スル．

* 角ノ增加スルトキ,正ナル方向ハ時計ノ針ノ廻ルノト反對ノ方向デアル．昨年ノ電氣學者ノ會合デ,コレヲ變更シテ時計ノ針ノ廻ル方向ヲ正ト決定シタ．併シ,私ハ世界ノ總テノ數學家ノ普通ノ規則ヲ遵守スル．

ノ「ペクトル」ノ觀念ト一致シテキルコトヲ知ル.

學生ハ,後ニ與ヘル i, 即チ $\sqrt{-1}$ ノ性質ニ關スル問題ヤ, $a+bi$ ノヤウナ式ニ關スル問題ヤ,又此等ノ式ノ複合シタ函數ニ關スル問題ナドヲ解クトキニ,此ノ考ヘ方ガ非常ニ重要デアルコトヲ知ルデアラウ.

吾々ハ實ナル量ヲ用ヒテ問題ニ實ナル結果ヲ得ルデアラウ. 併シ,此等ノ答ハ虛ナル量ノ媒介ニヨツテ得ラレルノデアル. 若シ,學生ガ非常ニ數學的デアルナラ,多分此ノ解法ガ正當デアル事ノ證明ヲ要求スルデアラウ. ソシテ私ガ與ヘルヤウナ證明デハ滿足シナイデアラウト思ハレル.(1) 併シ,或ル特別ナ場合ニ於テ,吾々ノ答ガ正シイト云フ事ヲ證明スルノハ常ニ容易デアル. 又其處ニハ唯一ツノ正シイ答ガアルノミデアル事モ容易ニ證明セラレル.

上ノ場合ニ於テ,吾々ノ記號的演算式 $r+l\frac{d}{dt}$,又ハ $r+l\theta$ ハ, $\frac{d}{dt}$ 又ハ θ ノ代リニ qi ヲ用ヒルト假定スレバ, $r+lqi$ トナル.*

サテ演算式 $a+bi$ ヲ $M\sin qt$ ニ演算スル,即チ乘ズルトキニハ, $M=\sqrt{a^2+b^2}$ ヲ乘ジテ前進角 e ヲ與ヘル. 但シ $\tan e=b/a$ トスル.

同樣ニシテ, $M\sin qt$ ヲ $a+bi$ デ割ルトキニハ,M ヲ $\sqrt{a^2+b^2}$ デ割ツテ遲滯角 e ヲ與ヘル. 但シ, $\tan e=\frac{b}{a}$.

演算式 $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ ハ明ラカニ $\sqrt{a^2+b^2}$ ヲ乘ジテハ前進角 $\tan^{-1}\frac{b}{a}$ ヲ與ヘ, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ デ割ツテハ遲滯角 $\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$ ヲ與ヘル.

實際ニ, $M\sin qt$ ト $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ トノ積ハ

$$M\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}}\sin\left(qt+\tan^{-1}\frac{b}{a}-\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

デアル.

配分サレタ容量ヲ取扱フマデニ,次ノ事ハ發見サレルデアラウ.

(1) 讀者ハ本書ニ示ス所ニ從ツテ器械的ニ計算スベキデアル. 特ニ理論ヲ求メル讀者ハ微分方程式ノ書ニ就クガヨイ.

* θ 又ハ $\frac{d}{dt}$ ノ代リニ qi ヲ用ヒルノハ, 單ニ $\sin qt$ 又ハ $\cos qt$ ノヤウナ形ノ,簡單ナ週期ノ電流又ハ時間ノ函數ヲ扱フ場合ダケデアルコトヲ銘記セヨ.

即チ,此ノ公式ニ依リ交流電氣或ハ機械組織ノ强制振動ニ關スル問題ハ殆ンド總テ解ク事ガ出來ル.

例 1. $r=1$「オーム」,感應係數 $l=0.004$ ナル「コイル」ヲ電壓 $v=141.4\sin 600t$ ナルヤウニシタ. 電流ハ如何.

解 ココニ

$$q=600\ (\text{振動數}\ \frac{600}{2\pi},\ \text{即チ1秒間約}\ 95),$$

$$c=\frac{141.4\sin 600t}{1+0.004\times 600i}.$$

分母ハ $1+2.4i$ デアル. 故ニ c 又ハ c_0 ノ振幅ハ

$$\frac{141.4}{\sqrt{1+2.4^2}},\quad \text{即チ}\quad \frac{141.4}{2.6},\ \text{即チ}\ 54.38.$$

デアル. 又若シ,遲滯角ヲ e トスレバ $\tan e=2.4$, 即チ $e=67.38$. e ヲ「ラディアン」デ表ハスコトハ更ニ正確デアル. 併シ人々ハ度ヲ用ヒル習慣ヲ持ツテキル.

カクテ答ハ, $c=54.38\sin(600t-67°.38)$ デアル.

實効電壓ハ $\frac{141.4}{\sqrt{2}}$, 即チ 0.707×141.4, 即チ 100「ボルト」.

實効電流ハ $\frac{54.38}{\sqrt{2}}$, 即チ 0.707×54.38, 即チ 38.45「アムペア」.

例 2. 或ル電路ノ一部分ガ, $r=100$「オーム」,感應係數 $l=0.09$「ヘンリー」ニシテ,容量ガ $k=0.5\times 10^{-6}$「ファラッド」デアル蓄電器(之ハ $\frac{1}{2}$「ミクロファラッド」ノ容量ト呼バレル)ヲ列ニツナギ,又其ノ兩端ノ間ニ電位差即チ電壓ガ存在スルモノトスル.(即チ換言スレバ,全電路ハ上ノヤウナ r, l 及ビ k ヲ持チ,且ツ電路ニ於ケル電動力ハ v デアル).

今 $v=14.14\sin 5000t$, 從ツテ $q=5000$ (1分間ノ振動數ハ $\frac{5000}{2\pi}$, 即チ約 800 回)デアル. 此ノ場合ノ電流ハ如何.

解 抵抗ハココデハ $r+lqi+\frac{1}{kqi}$, 即チ $r+lqi-\frac{i}{kq}$.

又ハ $100+i(450-400)$ 即チ $100+50i$ デアル.

$$c=\frac{14.14\sin 5000t}{100+50i}=\frac{14.14}{\sqrt{100^2+50^2}}\sin(5000t-e),$$

$$c=0.1264\sin(5000t-26°.57),\ \text{但シ}\ \tan e=\frac{50}{100}=0.5.$$

實効電壓ハ 10「ボルト」,實効電流ハ 0.707×0.2164, 即チ 0.0894「アムペア」デアル. 學生ハ此ノ問題ヤ又他ノ問題ヲ,尙圖解シテ解イテミネバナ

ラナイ.

例 3. $r=1000$「オーム」,感應係數ハ全ク無ク,容量ハ 0.5×10^{-6}「ファラッド」ナル蓄電器ヲ列ニツナイデキル電路ガ,$14.14\sin 5000t$ ナル電壓ヲ有スル. 其ノ電流如何.

解 ココニ抵抗ハ

$$r=\frac{i}{kq}=1000-400i,$$

デアリ,又

$$c=\frac{14.14\sin 5000t}{1000-400i}=0.01313\sin(5000t+21°.8),$$

デアル.

蓄電器ガ,丁度感應係數ガ遲滯角ヲ生ズルヤウニ,前進角ヲ如何ニシテ生ズルカニ著眼セヨ.

第二十九章 主トシテ自然振動ニ就テ

§120. 自然振動ト强制振動

此ノ章ハ初學者ニハ難解デアルヤウニ見エルデアラウシ,又或ル一部ノ人々ハ,之ハ初等ノ著書ニハ省略サレネバナラナイト考ヘルカモ知レナイ. 何トナレバ,大方ノ實際問題ニ於テ,自然振動ハ迅速ニ消失シテシマヒ,强制振動ノミヲ取扱ヘバヨイカラデアル. 併シ,之ヲ少シク學ンダ者ガ,强制振動ニ關スル研究ヲナシタ後,顧ツテ此ノ章ヲ研究スレバ,力學,電氣學,音響學及ビ光學ニ關スル非常ニ重要ナ事項ニ就イテ極メテ徹底的ナ知識ヲ收得シテキルトイフ事ヲ知ルデアラウ.

物體ガ(1)ノヤウナ運動ヲスルナラバ,$\frac{dx}{dt}$ ハ任意ノ瞬間ニ於ケル其ノ速度デアツテ,$\frac{d^2x}{dt^2}$ ハ其ノ加速度デアルトイフ事ハ繰返シテ述ベタ所デアル. カクシテ

$$\text{變位}\quad x=a\sin(qt+e),\qquad\cdots\cdots(1)$$

$$\text{速度}\quad v=\frac{dx}{dt}=aq\cos(qt+e),\qquad\cdots\cdots(2)$$

$$\text{加速度}\quad \alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-aq^2\sin(qt+e).\qquad\cdots\cdots(3)$$

ナル關係ヲ得ル. 此ノ運動ノ最モ重要ナ特質ハ,各瞬間ニ於テ,

加速度 $\alpha\propto$ 變位 x.

即チ

$$\alpha=-q^2x,\qquad\cdots\cdots(4)$$

即チ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+q^2x=0.\qquad\cdots\cdots(5)$$

若シ方程式(5)ガ與ヘラレルナラバ,a 及ビ e ガ如何ナル値デアツテモ,(1)ガ眞デアルコトハ解ル.

§121.「ゼンマイ」秤

一ツノ場合ヲ細心ニ研究シテ見ヨウ.「ゼンマイ」秤ニ W 封度

ノ錘ガ懸ケテアル. 今此ノ「ゼンマイ」ノ剛性ヲ1封度ノ力デ h 吋延長スル程度デアルトスル. 若シ此ノ物體ガ振動スルナラバ,時間 t ニ於テ,其ノ平衡ノ位置カラ x 吋下ニ在ルトキ(錘ハ上下ニ動クモノトスル), ソレヲ平衡ノ位置ニ引戻ス力ハ x/h 封度デアル. 此ノ力ハ運動ヲ妨ゲル. 而シテ之ハ物體ノ質量 W/g ニ $-\frac{d^2x}{dt^2}$ ヲ乗ジタ積ニ等シイ. 今此ノ物體ノ運動ニハ尙速度ニ比例スル摩擦ガアツテ,運動ヲ妨ゲルモノト考ヘヨ. 摩擦ヲ速度ノ b 倍デアルトスレバ,運動ヲ妨ゲル力ノ總計ハ

$$\frac{x}{h}+b\frac{dx}{dt}=-\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2},$$

卽チ
$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\frac{x}{h}=0, \quad\cdots\cdots(1)$$

卽チ
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{bg}{W}\frac{dx}{dt}+\frac{g}{Wh}x=0.$$

$\frac{bg}{W}$ ヲ $2f$ トシ, $\frac{g}{Wh}$ ヲ n^2 トセヨ. カヤウニスレバ,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2f\frac{dx}{dt}+n^2x=0. \quad\cdots\cdots(2)$$

(1)又ハ(2)ハ振動體ノ減衰運動ヲ表ハス. 此ノトキ,「ゼンマイ」自身ノ質量ハ無視シテアル.

(2)ノ解ハ,摩擦ノ多寡ニ從ツテ,種々ナ形ヲトルコトハ,後ニ§133ニ證明スル所デアル.

I. 摩擦ガナイト假定セヨ. 卽チ b(又ハ f)ヲ0トセヨ. (2)ハ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0,$$

トナリ,此ノ完全ナ解ハ, A 及ビ B ヲ任意常數トスレバ,

$$x=A\sin nt+B\cos nt. \quad\cdots\cdots(3)$$

デアル. 勿論(3)ハ

$$x=a\sin(nt+e),$$

ナル形ニ書イテモヨイ. 且ツ A 及ビ B 又ハ a 及ビ e ハ,隨意ニ

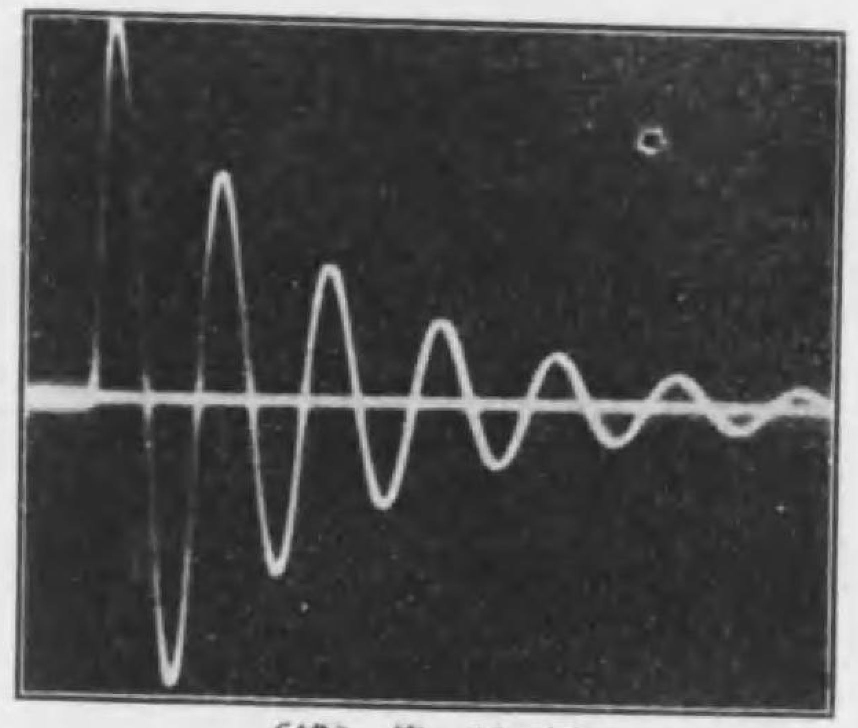
卽チ特殊ナ個々ノ問題ニ適スルヤウニ選ブコトガ出來ル. 例ヘバ $t=0$ ニ於テ,物體ハ其ノ通路ノ端卽チ $x=a$ ニ在ルト考ヘルコトガ出來,從ツテ e ハ $90°$ デアルデアラウ. 又ハ $t=0$ ニ於テ,物體ハ其ノ通路ノ中央ニアルト考ヘルコトモ出來ル. 此ノ場合ハ $e=0$ デアル. 又若シ其ノ瞬間ニ於ケル速度 v ヲ數學式デ說明スルナラバ, $a=v_0/n$ デアルコトハ明瞭デアル. 一例トシテ, $e=90°$ トセヨ. 之ハ $A=0$ トスルト同ジデアル. 實際ニ於テ,次ノヤウニトラウ.

$$x=B\cos nt. \quad\cdots\cdots(4)$$

II. f ガ或ル値ヲ有スルガ,併シ其ノ値ガ n ヨリ小サイ場合ニハ, $\sqrt{n^2-f^2}$ ヲ p トセヨ. (2)ノ解ハ

$$x=e^{-ft}(A\sin pt+B\cos pt). \quad\cdots\cdots(5)$$

デアル. (§133參照).



〔補〕第 26 圖.

蓄電器ノ放電ニ依ル減衰振動.

ココデモ亦 A 及ビ B ハ任意常數デアル. 此等ノ値ハ,任意ノ特殊ナ個々ノ問題ニ適スルヤウニ隨意ニ定メルコトガ出來ル. (4)ト比較シテ,次ノヤウニトラウ.

$$x=Be^{-ft}\cos pt. \quad\cdots\cdots(6)$$

私ハ今, f ガ n ニ等シイカ,又ハ n ヨリ大ナル場合ハ考ヘナイ. 何トナレバ,カヤウナ特別ナ減衰運動ノ場合ハ,實際問題トシテ容易ニ起ツテ來ナイシ,而モ總テノ場合ハ容易ニ解ケルカラデアル.

§122. 單振動ノ法則・例題

學生ハ一ツノ場合ヲ探ツテソレヲ注意深ク考ヘヨ.

$W=64.4$, $h=0.01$ トセヨ. 從ツテ $n^2=g/Wh=\dfrac{32.2}{64.4\times0.01}=50$, 卽チ $n=7.071$ デアル.

$B=10$ トセヨ. 從ツテ,摩擦ハナクテ

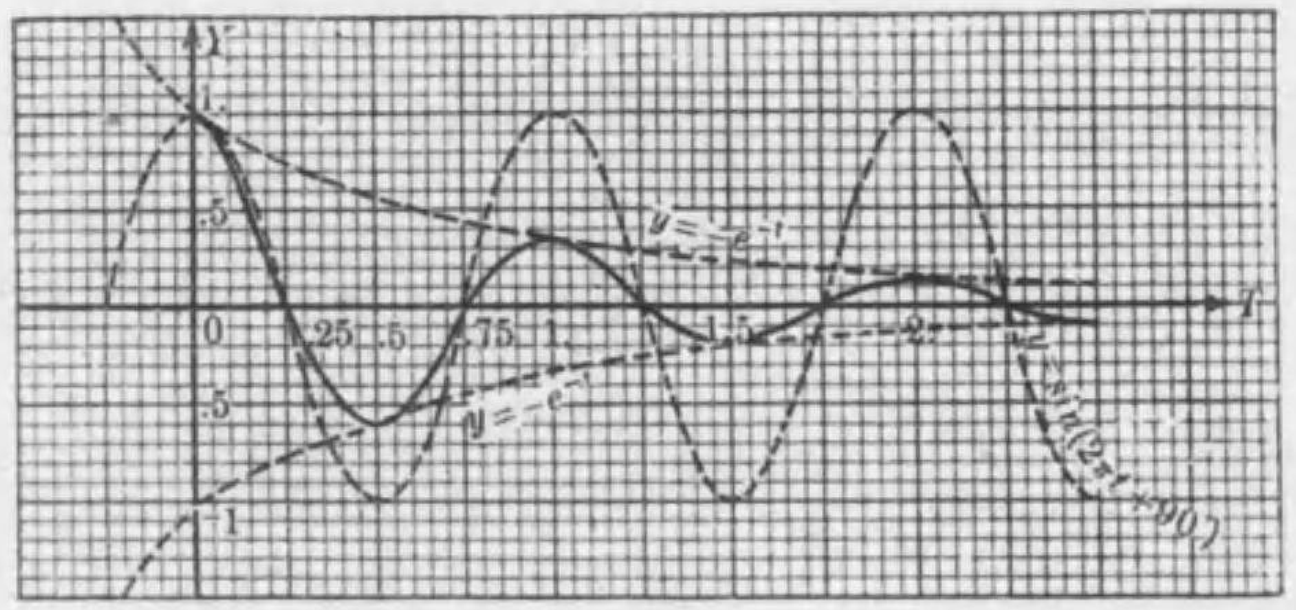
$$x=10\cos 7.071\,t. \quad\cdots\cdots(7)$$

(5)ニ於テ, $f=0.5$, $p=\sqrt{n^2-f^2}=\sqrt{49.75}=7.054$ トセヨ. 從ツテ摩擦ノアル場合ニハ

$$x=10\,e^{-0.5t}\cos 7.054\,t. \quad\cdots\cdots(8)$$

此等ノ二ツノ關係(7)ト(8)トハ,同一ノ方眼紙上ニ曲線トシテ描イテ見ネバナラヌ. 摩擦ノナイ週期 T ハ $\dfrac{2\pi}{n}$, 卽チ 0.8886 秒デアツテ,摩擦ガアルト週期ハ $\dfrac{2\pi}{p}$, 卽チ 0.8907 マデ增加スル.

摩擦ノ爲ニ, x ノ振幅ハ時間ノ經過スルニ伴ツテ減ズル. 從ツテ週期ノ終リニ於テハ振幅ハ週期ノ始メノ値ノ 0.64 ニ過ギナイ事トナル.(§28



〔補〕第 27 圖.
$y=e^{-t}$, $y=-e^{-t}$, $y=\cos 2\pi t$ ト曲線(實線) $y=e^{-t}\cos 2\pi t$ トノ比較.

ノ問題 16 參照).

減衰振動或ハ非減衰振動ヲ實驗的ニ硏究セネバナラナイ.

上ノ公式ニ於テ, x ハ角變位デアリ, W/g ハ軸ノ周リノ振動體ノ慣性能率デアル. 又引張ツタ「ゼンマイ」或ハ捩ツタ針金ノ剛性ハ,單位ノ捻力又ハ偶力ガ h「ラディアン」ナル捩リヲ生ズル程度デアル. 空氣,水或ハ油ノ中ニ在ツテ捩レタ針金及ビ捩レテキナイ針金ノ端ニ於テ振動シテキル圓盤,車輪或ハ棒ナドハ,取扱フベキ機械ノ部分ノ中極メテ優レタ部分デアル. 從ツテ此等ハ眞ノ本性ヲ示スモノデアル.

單振動ニ就イテノ基本的事實ハ,加速度ガ變位ニ比例スル點デアル.(但シ,摩擦ヲ無視スル). 負號ヲ省ケバ, q ハ $2\pi/T$ デアルカラ,任意ノ場合ニ於テ週期ヲ求メル爲ニハ

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\text{變位}}{\text{加速度}}} \quad\cdots\cdots(9)$$

トナルコトヲ知ル. 之ハ線變位及ビ線加速度デアルカモ知レナイシ,或ハ角變位及ビ角加速度デアルカモ知レナイ. 單振子,複振子,U字形ノ管ノ中ノ振動スル液柱,懷中時計ノ「テンプ」ノ運動,或ハ船ノ動搖ナドヲ硏究スルトキニハ,直チニ此ノ法則ヲ適用シテ週期ヲ計算スル. 詳細ハ拙著"應用力學", 第二十五章ヲ參照セヨ.(本節末ノ譯者ノ註ヲ參照セヨ.)[1]

例 1. 644 封度ノ物體ガ, 0.4 秒ヲ週期トスル單週期運動ヲナス. 其ノ運動ノ振幅ハ 1.5 呎(卽チ全振動ハ 3 呎)デアルトキ,物體ニ此ノ運動ヲ與ヘル力ヲ求メヨ.

解 x ヲ變位トシ, α ヲ加速度トスレバ(負號ニ關スル面倒ナ點ヲ省イテ), 公式(9)ヲ用ヒルコトガ出來ル. 卽チ

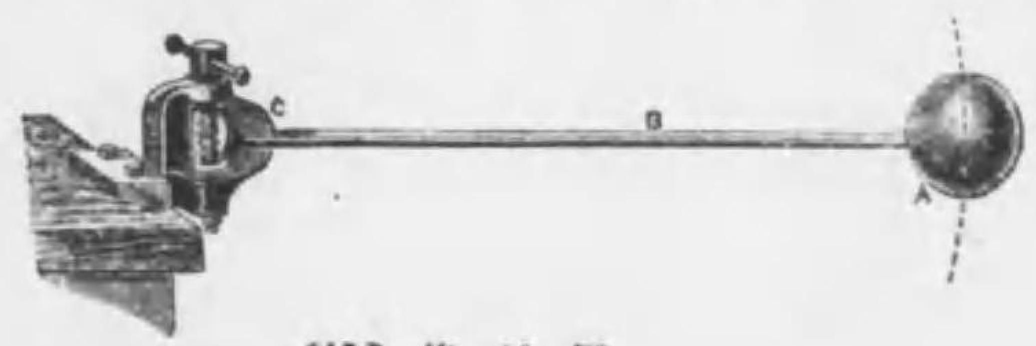
$$\alpha=\frac{4\pi^2}{0.16}x,$$

トナル. 此ノ物體ノ慣性卽チ質量ハ $644\div32.2$, 卽チ 20 デアル. 故ニ求メル力 F ハ 20α 封度デアル.

實際ニ　　$F=4935\,x.$

振動ノ端ニ於テ, F ハ $4935\times1.5=7403$ 封度デアリ,其ノ中央ニ於テ F ハ 0 デアル. 且ツ此ノ力 F ハ常ニ中央ノ點ニ向フモノデアル.

例 2. 重サ 3.22 封度ノ物體ガ鋼鐵ノ細長イ棒ノ端ニ支ヘテアル.[2](此ノ鋼鐵ノ慣性ハ省略スル.) 此ノ細長イ棒ノ剛性ハ 1 封度ノ力デ 0.1 呎物體ヲ撓マセル程度デアル. 此ノ物體ガ振動ヲ起シタナラバ,其ノ週期ハ如何.[3]



〔補〕第 28 圖

解 x 呎ヲ變位

(1) 脚註(1)ハ298頁, 299頁ニ在ル.
(2) 此ノトキ,鋼鐵ノ細長イ棒(B)ノ他ノ端 C ハ固定サレテキル事ガ必要デアル. ソシテ自由ナ端ニ物體 A ガツイテキル.
(3) 此ノ方法ニ依リヤングノ彈性率ヲ測定スルコトガ出來ル.

トスレバ,此ノ物體ニ作用スル力(封度)ハ $F=10x$ デアル. 又物體ノ慣性即チ質量ハ 3.22÷32.2, 即チ 0.1 デアリ,加速度ハ $F\div$(質量),即チ $100x$ デアル. 公式(9)ニ依ツテ次ノ結果ヲ得ル.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{x}{100x}}=\frac{2\pi}{10}=0.62832 \text{ 秒}.$$

例 3. 一秒間ニ5呎ノ速サデ上下スル炭坑ノ昇降機ニツケテアル鋼鐵ノ繩ガ,其ノ上端ニ於テ突然止マツタ. 繩自身ノ慣性ヲ無視シテ,重サ 3220 封度ナル昇降機ガ今上下ニ單振動ヲ起シテキル. 繩ノ長サ及ビ斷面ガ 6000 封度ノ力ニヨツテ1呎ノ延長ヲ生ズル程度デアルトキ,停止ニ基ク繩ノ最大附加張力ヲ求メヨ. コノ振動運動ノ振幅ハ如何. 又振動ノ週期ハ如何.

解 停止ノ瞬間ハ,私ニハ時間ガ0デアルト考ヘラレル. 此ノ後,昇降機ハ時間 t ノ間ニ x 呎ヲ下降シタ. x ヲ振動運動ノ變位トイフ. 今 $x=a\sin qt$ トスル. 速度 v ハ $aq\cos qt$ デアリ,加速度 α ハ $-aq^2\sin qt$ デアル.

(1) 公式(9)ノ適用サレル範圍ハ極メテ多イ. 最モ簡單ナノハ彈性アル針金ニ錘 A ヲ附ケ, 錘 A ヲ上下ニ振動サセルトキハ, A ノ質量ヲ M, 始メノ長サヲ l_0, 針金ノ截斷面積ヲ S, ヤングノ彈性率ヲ E トスレバ,

〔補〕第 29 圖

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l_0M}{ES}}.$$

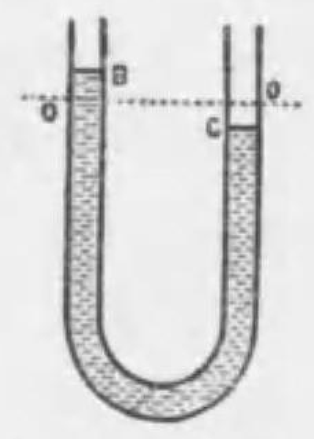
若シ § 121 ニ述ベタ「ゼンマイ」ヲ用ヒルトキハ上式ノ $\frac{ES}{l_0}$ ノ代リニ, ソノ「ゼンマイ」固有ナ數ヲオク.

單振子ノ場合ニハ, 振子ノ長サヲ l トスレバ

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

但シ, g ハ重力ニ依ル加速度デ呎封度デトレバ $T=6.2832\sqrt{l\div32.2}$ トナル.

U 字管内ノ液柱ノ振動ノ場合ニハ, 管ノ太サノ一樣ナ事ガ必要デ, 今摩擦ナク流レルモノトスレバ,



〔補〕第 30 圖

$$T=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{g}}$$

トナル. ココニ a ハ管内ノ液柱ノ長サデアツテ, g ハ重力ニ依ル加速度デアル.

慣性即チ質量ハ, 3220÷32.2=100. 此ノ質量ニ加速度ヲ乘ジタ積ハ力デアル. 從ツテ, $100\,aq^2$=最大力$=6000\,a$. 故ニ q^2 ハ 60 デアリ,$q=7.746$ トナル. 又 $T=0.8112$ 秒ヲ得ル. 最大速力ハ $aq=5$. 故ニ $a=0.6455$ 呎. 最大力$=6000\,a=3873$ 封度,デアル.

長サ l, 半徑 R ナル針金ノ一端ヲ固定シテ吊ルシ, 他端ニ棒或ハ錘ヲツケテ, 之ニ依リ此ノ針金ヲ捻ツテ放スト單振動スル. 其ノトキハ

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2lI}{\pi nR^4}}.$$

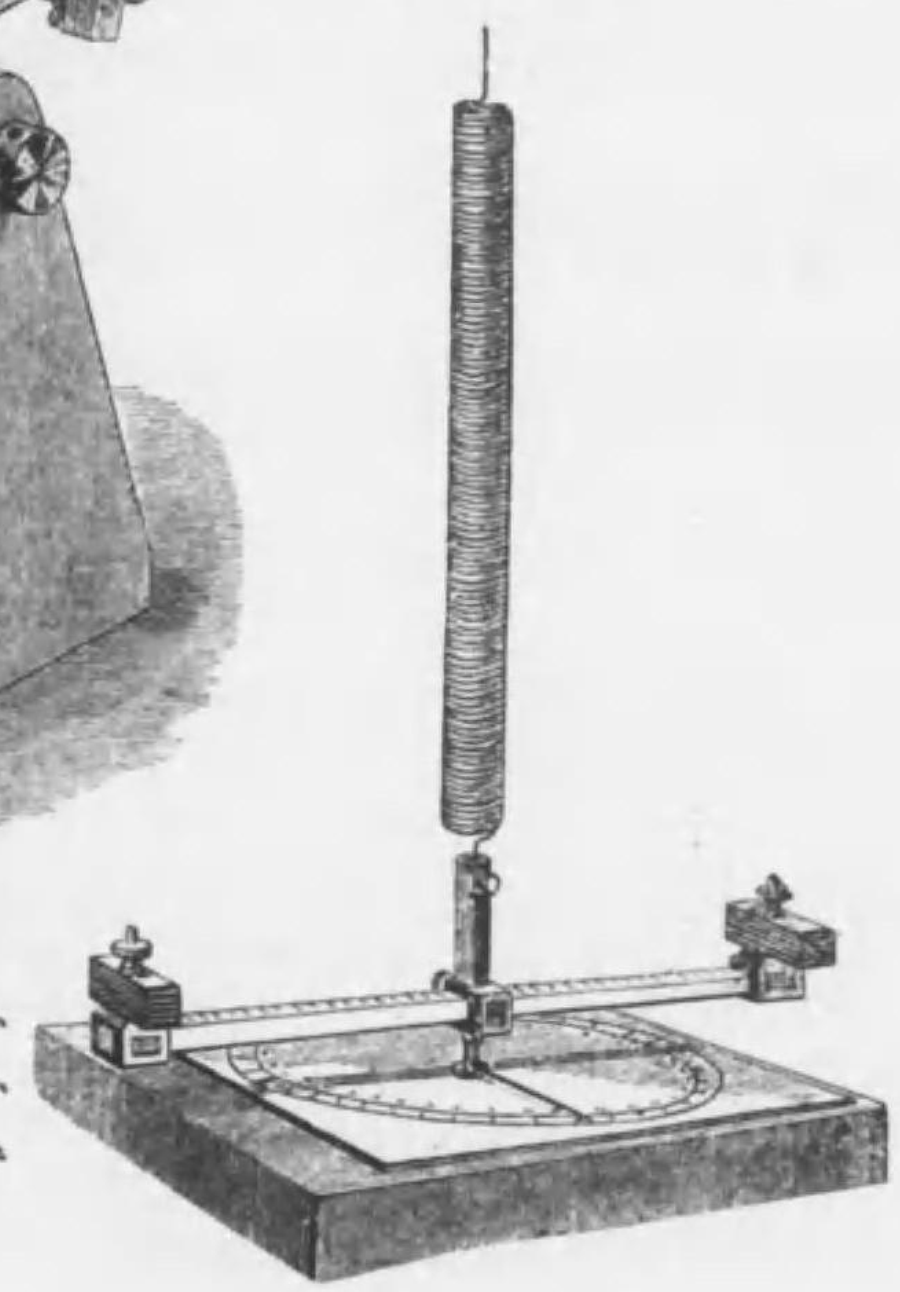
但シ, n ハ針金ノ剛性率デアリ, I ハ棒ノ慣性能率デアル. 此ノ式ハ屢々

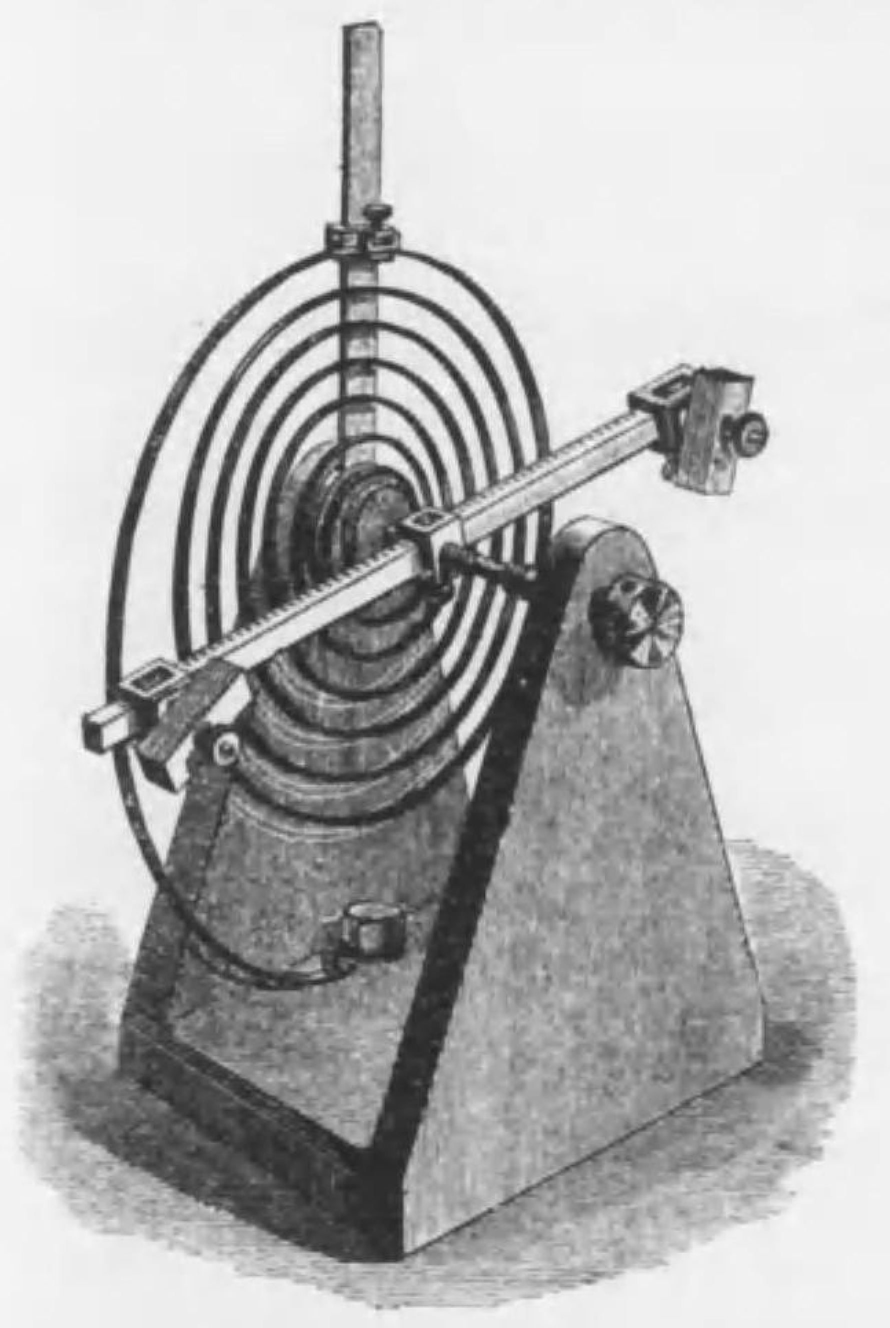
$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \text{ ト書カレル.}$$

ココニ k ハ $\frac{\pi nR^4}{2l}$ ヲ表ハス.

上記ノ振動ヲナスニ都合ヨクシタ裝置ノ一二ヲ示ス.

〔補〕第 31 圖




〔補〕第 32 圖

其ノ他錐面振子, 複振子 (或ハ物理振子), 水平振子等ニ就イテハ物理學(少シ程度ノ進ンダモノ)ニヨリ研究サレンコトヲ望ム.

§123. 强制振動

前(§121ニ於テ)ニ考ヘタ場合ニ於テ,「ゼンマイ」ノ上部ノ點又ハ支點ガ,上下ニ振動スルモノトシ,今時間 t ニ於テ,之ガ其ノ平均位置ヨリ距離 y ダケ下ニ在ルモノトスル.「ゼンマイ」ハ總テノモノガ休止シテヰタトキヨリモ $x-y$ ダケ延ビテヰル. 又物體ノ運動ヲ妨ゲル力ハ $\frac{x-y}{h}+b\frac{dx}{dt}$ デアル. 從ツテ

$$\frac{x-y}{h}+b\frac{dx}{dt}=-\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2},$$

ナル關係ヲ得ル. 故ニ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{bg}{W}\frac{dx}{dt}+\frac{g}{Wh}x=\frac{g}{Wh}y. \quad\cdots\cdots(1)$$

卽チ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2f\frac{dx}{dt}+n^2x=n^2y. \quad\cdots\cdots(2)^*$$

サテ, y ハ任意ノ週期ノ單弦運動デアルトシ, $y=a\sin qt$ トセヨ. 此ノ物體ハ此ノ週期ノ單弦運動ヲナシ,又之ト共ニ, §120–§122ニ論ジタ所ノソレ自身ノ自然振動ヲ,多分ナスデアラウト云フコトガ解ル. 併シ,又其處ニハ常ニ若干ノ摩擦ガアルカラ,自然振動ハ非常ニ速ヤカニ減衰スル. 從ツテ,之ハ短イ時間ニ對シテノミ重要デアル.〔ヨシソレガ其ノ短イ時間ニ對シテ驚ク程重要デアルニシテモ.〕從ツテ多クノ科學的問題ニ於テ,之ヲ無視スル. 從ツテ私ハ,今後,强制振動ノミヲ考ヘルコトトスル.

大方ノ音響現象ニ於テ,タトヒソコニハ自然振動ヲ速カニ破壞スベキ十分ナ減衰サセル力ガアルト假定シテモ,尙計算ヲ簡單ニシ單純ニスルタメニ f ハ0デアルト假定スル. 之ハ又光ヤ其ノ他ノ或ル科學ヲ研究スル際ニモ同樣デアル. 併シ電磁氣輻射ヤ

* 興味ヲ持ツ學生ハ,他ノ種類ノ强制振動ヲ考ヘルデアラウ. $y=0$ トセヨ. 但シ, 下ニ向フ力 $F=F_0\sin qt$ ガ物體ニ作用スルモノト假定セヨ. (2)ニ於ケル n^2y ノ代リニ n^2hF ヲ用ヒヨ. 其ノ結果ハ大體同ジデアル.

交流電氣ノ研究又ハ潮流及ビ多クノ他ノ自然現象ノ研究ニ於テハ, f ノ項ヲ計算ニ入レナケレバナラナイ.

例題. 或ル物體ガ「ゼンマイ」ニ懸ツテヰテ,摩擦ハナク,支柱 P ガ

$$y=a\sin qt,$$

ナル運動ヲ得ルトキ,其ノ强制振動ヲ求メヨ.

解 此ノ場合(2)ハ次ノヤウニナル.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=n^2a\sin qt. \quad\cdots\cdots(1)$$

$x=A\sin qt$ ハ其ノ解デアルコトガ解ルデアラウ. 之ヲ吟味セヨ.

$$\frac{dx}{dt}=Aq\cos qt, \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-Aq^2\sin qt;$$

此等ノ値ヲ(1)ニ代入スレバ,

$$-Aq^2\sin qt+n^2A\sin qt=n^2a\sin qt.$$

故ニ $A=\frac{n^2a}{n^2-q^2}$ トスレバ,吾々ノ推察ハ正シイ.

此ノ結果ヲ注意深ク硏究スルコトハ,價値ノアルコトデアル. x ハ單ニ y ニ $\frac{n^2}{n^2-q^2}$ ヲ乘ジタ積ニ過ギナイ.

n 及ビ q ハ夫々自然振動數及ビ强制振動數ニ比例スルカラ,自然振動數ニ對スル强制振動數ノ比ヲ p トシ, $a=1$ トシ, W ノ運動ノ振幅ヲ A トスレバ,次ノ關係ヲ得ル.

$$A=\frac{1}{1-p^2}.$$

p	A	p	A
0.1	1.01	1.10	−50
0.5	1.333	1.03	−16.4
0.8	2.778	1.1	−4.762
0.9	5.263	1.5	−0.8
0.95	10.26	2.0	−0.333
0.97	16.92	5.0	−0.042
0.98	25.25	10.0	−0.010
0.99	50.25		
1	∞		

强制振動數ガ自然振動數ノ小サイ分數デアルトキハ, W ノ强制振動ハ支點 P ノ運動ノ信頼スベキ正確ナ縮寫デアル點ニ著眼セヨ.「ゼンマイ」ト W トハ剛體ノヤウニ動クモノトスル.

强制振動數ガ增スト

キハ, W ノ運動ハ P ノ運動ノ正確ナ廓大デアル. 又強制振動數ガ自然振動數ト大體等シクナルニ從ツテ, W ノ運動ハ P ノ運動ノ非常ナ廓大トナル. 其處ニハ常ニ幾何カノ摩擦ガアルカラ,振動ノ振幅ハ無限大ニナルコトハ出來ナイ. 強制振動數ガ自然振動數ヨリモ大キクナルトキハ, W ハ常ニ P ヨリモ半週期後レテヰル. 卽チ P ガ其ノ通路ノ底ニ在ルトキ, W ハ其ノ通路ノ頂ニ在ル. 之ハ種々ナ面白イ物理現象ヲ說明スル. 例ヘバ古イ理論カラハ違ツテ來テヰル所ノ大洋ノ潮流ノ力學的定理ノ如キ,其ノ一例デアル.

強制振動數ガ自然振動數ノ數倍デアルトキニハ, W ノ運動ハ非常ニ小サクナリ,殆ンド休止スルニ至ル.

地震記器ヲ設計スル人ハ,他ノ總テノモノガ地震ノ間動イテヰルトキニ,動カナイ所ノ不動點ヲ發見ショウト試ミル. 上下運動ニ對シテハ,丁度今述ベタ最後ノ場合ヲ考ヘテ見ヨ. W ハ不動點ノヤウデアル.

強制振動數及ビ自然振動數ガ殆ンド等シイトキニハ,事物ノ狀態ハ音響器ニ於テ**共鳴**ガ起ルヤウナ狀態デアツテ,ソレハ吊リ橋ヤ動搖スル船ニ對シテ吾々ガ恐レヲ抱ク原因デアル. 此ノ原則ヲ實際ノ科學的問題ニ取入レル重要ナ方法ニ就イテノ問題ヲ,二十題位與ヘルコトハ容易デアラウ.

§124. 電氣振動

電氣容量 k「ファラッド」ナル蓄電器ガ,抵抗 r「オーム」,感應係數 l「ヘンリー」ナル電路デ連結サレ,蓄電器ノ兩層ノ間ニ,電位差 v「ボルト」ヲ有スルモノト想像セヨ. 蓄電器ニ於ケル電氣量 Q ハ kv デアリ,又蓄電器外ノ電流ヲ c トスレバ,

$$c=-\frac{dQ}{dt}=-k\frac{dv}{dt},$$

但シ此ノ電流ハ

$$v=rc+l\frac{dc}{dt}.$$

ナル關係ヲ滿足スル. (§117 參照).

故ニ

$$v=-rk\frac{dv}{dt}-lk\frac{d^2v}{dt^2},$$

卽チ

$$lk\frac{d^2v}{dt^2}+rk\frac{dv}{dt}+v=0. \qquad \cdots\cdots(1)$$

此ノ電路ニ於テ,交流發電機ガ作用スルトカ,或ハ他ニ蓄電器ヲ充電スル電動力 E ヲ變ズル任意ノ原因ヲ有スルト假定スレバ,上ノ v ノ代リニ $v-E$ ト書ケバヨロシイ. カクテ

$$lk\frac{d^2v}{dt^2}+rk\frac{dv}{dt}+v=E,$$

卽チ

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{r}{l}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{lk}=\frac{E}{lk}$$

ヲ得ル.

若シ $\frac{r}{l}$ ノ代リニ $2f$ ヲ, $\frac{1}{lk}$ ノ代リニ n^2 ヲ用ヒレバ,

$$\frac{d^2v}{dt^2}+2f\frac{dv}{dt}+n^2v=n^2E. \qquad \cdots\cdots(2)$$

卽チ機械的振動ノ公式ト同一ノ公式ヲ得ル.

故ニ機械的振動ト電氣振動トノ間ニハ極メテ接近シタ**類似**ガ存在スルコトヲ知ル. 次ノ點ニ著眼セヨ.

質量,卽チ慣性 $\frac{W}{g}$ ハ感應係數 l ニ對應スル.

一秒呎ニ就イテノ摩擦 b ハ抵抗 r ニ對應シ,變位 x ハ電壓 v ニ對應スル. 或ハ外見上モツト正シク言ヘバ, x ハ,電氣變位 Q, 卽チ或ル人々ガ言フヤウニ之ハ荷電デアルガ,之ヲ容量 k デ割ツタ商 v ニ對應スル.[(1)]

(1) 要スルニ前頁ニ述ベタ所ヨリ $v=\frac{Q}{k}$ トナル, 此ノ v ト x ガ對應スルトイフノデアル. 此ノ Q ハ電氣變位デアツテ,(通俗的ニハ荷電トイフ),彈性(續ク.)

「ゼンマイ」ノ下降 h ハ蓄電器ノ電氣容量 k ニ對應スル．又強制振動ノ變位 y ハ交流發電機ノ强制電動力($E.M.F.$)ニ對應スル.*

前ノヤウニシテ，$E=0$ デソレ自身勝手ニシテキル自然振動ヲ考ヘルナラバ，f ガ或ル値ヲ有シテキテ，且ツ之ガ n ヨリ小デアリ，又 $\sqrt{n^2-f^2}$ ヲ p トスレバ

$$v=E^{-ft}A\sin(pt+e), \qquad \cdots\cdots(3)$$

デアルコトヲ知ル．但シ，A 及ビ e ハ如何ナル値デアツテモヨイ．

例題． $k=10^{-8}$「ファラッド」(之ヲ「ミクロファラッド」ノ百分ノ一ト言フ.)ナル蓄電器ガ，惑應係數 $l=10^{-4}$「ヘンリー」ナル $r=1$「オーム」**ノ抵抗ヲ通ツテ「ショートサーキュット」(1)サレル．波動ノ性質如何．

解　此ノ場合 $2f=\frac{r}{l}=10^4$, $n^2=\frac{1}{10^{-4}\times10^{-8}}=10^{12}$. 從ツテ $n=10^6$ デアル．若シ r ガ0デアルナラバ，週期ハ $T=2\pi\div10^6=6.28\times10^{-6}$ 秒デアツテ，卽チ振動數ハ 1 秒間 159100 デアル．(空中ニ放射サレル波長ハ，光ノ速度 3×10^{10} 秒糎ヲ 159100 デ除シタモノデ，卽チ之ハ 190000 糎，或ハ 1.18 哩デアル.)

r ハ 0 デナイカラ，實際ニハ $f=0.5\times10^4$, $p=\sqrt{n^2-f^2}=\sqrt{10^{12}-0.25\times10^8}$

體ニ力ノ作用ヲ受ケ歪ヲ生ズルヤウニ，電氣力ノ下ニアル電媒質ノ其ノ電氣力ノ方向ニ生ズル特殊ノ歪ヲイフ．電氣變位ハ電氣力ニ比例スルモノト見做ス．

*　强制振動ガナイトキ，卽チ $E=0$ ナルトキニハ，(1)ノ代リニ

$$lk\frac{d^2Q}{dt^2}+rk\frac{dQ}{dt}+Q=0,$$

卽チ

$$lk\frac{d^2c}{dt^2}+rk\frac{dc}{dt}+c=0.$$

ト書イテモヨイ事ハ容易ニ解ル所デアル．

**無線電信ニ於テハ，抵抗ニ依ル「エネルギー」ノ損失ト同樣ニ放射ニ依ル損失ガアルコトヲ思出サネバナラナイ．併シ此ノ初歩ノ問題ニ於テハ抵抗ノ損失中ニ放射ニ依ル損失ガ含マレルモノト假定スル．

(1)　電氣量ニ比シテ抵抗ノ極メテ少イ電路ヲ電流ガ流レルヤウニスル事ヲ「ショートサーキュット」スルトイヒ，俗ニ「ショート」スルト略稱スル．例ヘバ電燈ヲ點ズベキ電流ガ電燈内ヲ通ラナイデ流レタリ，電動機ヲ動カスベキ電流ガ電動機内ニ入ラナイデ流レルノヲイフ．捷路トモ譯サレル．

デアツテ，p ハ事實 n ト同ジデアルトシテモヨイ．從ツテ振動數ハ尙1秒ニ 159100 回デアル．故ニ其ノ結果ハ，v ガ法則(3)ニ從フ．卽チ，ヨリ適切ナ形デアル次ノ形ヲトル．

$$v=v_0e^{-5000t}\cos10^6t \qquad \cdots\cdots(4)$$

但シ v_0 ハ時間ノ初メ(吾々ガ時間ノ基準トシテ選ビ0ト呼ンダ時)ニ於ケル蓄電器ノ兩終端ノ間ノ電壓デアル．又ハ

$$c=c_0e^{-5000t}\sin10^6t, \qquad \cdots\cdots(5)^*$$

ハ波ノ流レヲ考ヘルトキニハ適當ナ形デアル．

若シココニ二ツノ水槽 A, B ガアツテ，大キイ管ニヨツテ連絡セラレテキテ，且ツ A ニ於ケル水ハ B ニ於ケル水ヨリ v 呎ダケ高イトスレバ，兩者ニ連絡ガツケラレルヤ否ヤ v ハ法則(4)ニ從ヒ，管中ノ水流ハ(5)ノヤウナ法則ニ從フ．水ガ B ニ餘分ニ來レバソレハ再ビ歸リ，時間ノ經過スルニ從ツテ波ハ段々小サクナル．

電路ノ振動ノ週期ハ，r ニハ殆ンド關係ガナイ．從ツテ r ヲ無視シテ $n=\frac{2\pi}{T}$ 及ビ $n^2=\frac{1}{lk}$ デアルカラ，$T=2\pi\sqrt{lk}$, 又ハ振動數$=1\div2\pi\sqrt{lk}$ トシテモヨイ事ハ明ラカデアル．又「エーテル」ニ於ケル波長ハ $3\times10^{10}\times2\pi\sqrt{lk}$, 卽チ $18.85\times10^{10}\sqrt{lk}$ 糎，卽チ $1.17\times10^6\sqrt{lk}$ 哩デアル事モ明瞭デアル．

§125. 無線電信

機械的振動系統 P ハ，若シ其ノ振動數卽チ調子ガ 30 カラ 5000 マデノ間デアレバ，空中ニ働イテ音波ヲ送リ出ス．若シ此等ノ波ガ他ノ機械的振動系統 Q ニ作用スルナラバ，其等ハ Q ニ於テ强制振動ヲ起ス．若シ，Q ノ自然振動ガ P ノ自然振動ニ正確ニ同ジデアルナラバ，Q ノ强制振動ハ非常ニ大キクアルカモ知レナイ．時トシテ，何等ノ音樂的ノ音モ町ノ騷音ノ中デ聞エナイトキニ，人ノ部屋ノ中ノ「ピアノ」ノ絃ガ，聞エル程度ノ調子ヲ發スル事ガアル．ソレハ「ピアノ」ノ振動數ガ偶然ニモソレニ達スル或ル聞エナイ音ノ振動數ト正確ニ一致スルカラデアル．コノヤ

*　(4)ト(5)トハ時間ノ始メニ關シテ極ク僅カニ異ナル．ソレハ $c=-k\frac{dv}{dt}$ ニ等シイカラ，若シ(5)ヲ眞トスレバ容易ニ(4)ヲ求メ得ル．從ツテソコニハ正確ナ對應ガ存在スルデアラウ．併シ之ハ價値ノアルコトデアラウカ．

ウナ場合ニ於テハ,共鳴ヲ生ズルタメニハ强制的ノ感動ヲ及ボスノニ時間ヲ要スル. 實際,吾々ノ數學上ノ問題ニ於テハ,强制感動ハ無限ニ續クモノト假定スル.

同樣ニシテ,例ヘバ,1秒ニ159100回ノ自然振動數ヲ有スル(上ノ例題ニ於テ),アイルランドニ於ケル電氣振動系統 P ガ「エーテル」ヲ通ジテ波ヲ送リ出ス. 若シ,此等ノ波ガアメリカニ於ケル他ノ電氣系統 Q ニ作用スルナラバ,其等ハ Q ニ强制振動ヲ起ス. 若シ, Q ノ自然振動數ガ1秒ニ 159100 回デアルナラバ, Q ハ諸機械ニ影響スルダケ十分大ナル强制的電流ノ波ヲ得ル. カヤウニシテ,無線電信ヲ得ル. P 系統ノ蓄電器ハ規則的ニ充電シ,又既ニ述ベタ所ノ電路ヲ通ジテ火花ニヨツテ放電スル. 其ノ各火花ハ送リ出サレル波ヲ起ス. コノ波ノ振動ハ速カニ減ズル. 實際ニ,各々ノ組ハ,上ノ場合ニ於テハ,一秒ノ千分ノ一位デ無クナツテシマフ. 併シ,規則正シイ間隔ヲ置イテ,吾々ハ新ラシイ荷電ト放電トヲナス. 此等ノ消滅ト更新トニ拘ハラズ,ソコニハ私ガ既ニ述ベタ所ノ同感的作用ガアルト云フ事ハ驚クバカリ特殊ナ事デアル. 今ヤ多クノ發明家ハ現今ノ火花ニヨツテ生ズルモノヨリモ,モツト連續的ナ傳送ヲ發見ショウト試ミテヰル. カヤウナ振動ヲ起スタメニハ,突然ノ衝動ヲ必要トスル. 丁度風琴管ヲ鳴ラスタメニハ,其ノ管脣ニ對シテ空氣ノ衝動,即チ一吹キヲ必要トスルト同ジ理デアル. コノ衝動ハ總テノ週期ヲ始メルモノデアリ,此等ノ一ツニヨツテ其ノ系統ハ同時ニ起ルノデアリ,從ツテソレハ相呼應シ且ツ大キクナル. 之ハ風琴管ノ音響ト正確ニ類似シテヰル.

第三十章　强制振動

§126. 强制振動

以下本章ニ於テハ,一體系ノ自然振動ハ消滅シ,從ツテソレハ考ヘナイモノト假定ショウ.

「ゼンマイ」ニ懸ケテアル物體ニ就イテ, §121——§123 ヲ再ビ細心ニ讀ンデ見ヨ. 其ノ「ゼンマイ」ノ上方ノ支點ハ,時間 t ニ於テ,距離 y ダケ下方ニ變位スル. 今 $y=a\sin qt$ トセヨ. 方程式(2)ハ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2f\frac{dx}{dt}+n^2x=n^2a\sin qt. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

デアル. 强制振動ハ $x=A\sin(qt+e)$ ナル形デアリ,從ツテ $\frac{dx}{dt}$ ハ qix, $\frac{d^2x}{dt^2}$ ハ q^2i^2x, 即チ $-q^2x$ デアルコトハ既ニ知ツテヰル所デアル. (289—290頁ヲ見ヨ). 故ニ(1)ハ

$$(-q^2+2fqi+n^2)x=n^2a\sin qt,$$

$$x=\frac{n^2a\sin qt}{n^2-q^2+2fqi}.$$

之ハ §119 ニ依ツテ次ノ事ヲ意味シテヰル.

$$x=A\sin(qt-e),$$

但シ　$A=\dfrac{n^2a}{\sqrt{(n^2-q^2)^2+4f^2q^2}}$ 及ビ $\tan e=\dfrac{2fq}{n^2-q^2}$.

若シ § 122 ニ於テナシタヤウニ, $f/n=0.0707$ トシ, q/n ヲ p トシ,又 $a=1$ トスルナラバ,

$$A=1\div\sqrt{(1-p^2)^2+p^2/50} \quad 且ツ \quad \tan e=0.1414p/(1-p^2).$$

强制振動ノ振幅 A ト p トデ「グラフ」ヲ描ケ. 尙又 e ト p トデモ「グラフ」ヲ描ケ. 此等ノ結果ヲ § 123 ニ表記シタ結果ト比較シテ見ヨ. 但シ §123 ニ於テハ摩擦ニ依ル振動ノ減衰ハナイモノトシタ. 摩擦ノナイ場合ニハ, e ハ 0 カ又ハ 180° デアル. 若シ此等ノ結果ノ研究ニ數週間ヲ要スルナラバ,其ノ時間ハ恐ラク善用サレタト言フベキデアラウ. 學生ハ

p	A	e
0.1	1.01	0°.8
0.5	1.333	5°.4
0.8	2.655	17°.44
0.9	4.372	33°.82
0.95	6.024	54°.02
0.97	6.697	66°.7
0.98	6.934	74°.06
0.99	7.070	81°.97
1.00	7.071	90°
1.01	6.934	98°
1.03	6.331	112°.73
1.10	3.827	143°.5
1.5	0.7879	170°.37
2.0	0.3319	174°.6
5.0	0.04167	178°.32
10.0	0.0101	179°.2

一層摩擦ガアル所ノ他ノ場合ヲ解イテ見ナケレバナラナイ.

§127. 電氣振動ニ於ケル强制振動

第二十八章ノ終ニ於ケル三ツノ例題ニ於テ,私ハ電動力又ハ强制電壓ニ依ツテ,其ノ體系ニ强ヒラレタ電流ヲ研究シタ. 第二十九章ニ於テハ,自由ニ電路ヲ流レル電流ヤ,速カニ減衰スル自然ノ波動ヲ研究シタ. 今ヤ,私ハ再ビ强制振動ノ體系ニト歸ツテ來タノデアル.

若シ,電氣容量 k ナル蓄電器ノ兩層ノ間ノ電壓ヲ v トスレバ,此ノ蓄電器ノ荷電 Q ハ kv デアル. 又蓄電器ヘノ電流ハ $c=k\frac{dv}{dt}$ デアル. 若シ v ガ $a\sin(qt+e)$ ナル形デアルナラバ, $\frac{dv}{dt}=qiv$ 及ビ $c=kqiv$ デアル事ヲ知ル. 今若シ R ガ或ル工案物ノ抵抗デアルナラバ,電壓 V ノ爲ニ流レル電流 C ハ $\frac{V}{R}$ デアル. 蓄電器ノ場合ニ於テハ c ハ $v\div\frac{1}{kqi}$ ニ等シイ事ヲ知ル. 從ツテ蓄電器ハ $\frac{1}{kqi}$ ナル抵抗ヲ有スルトイフ事ガ出來ル.

此ノ分母分子ニ i ヲ乘ズレバ, $i^2=-1$ デアルカラ,結局蓄電器ノ抵抗ハ $-\frac{i}{kq}$ デアル事ヲ知ル. 私ハ §118 及ビ §119 ニ於テ,既

ニ此ノ考ヘヲ用ヒタ.

抵抗 R「オーム」,感應係數 L「ヘンリー」デアツテ,且ツ K「ファラッド」ナル蓄電器ヲ直列ニツナイデキル電路ノ全抵抗ハ,

$$R+Lqi-\frac{i}{Kq},\ \text{卽チ}\ R+i\left(Lq-\frac{1}{Kq}\right)$$

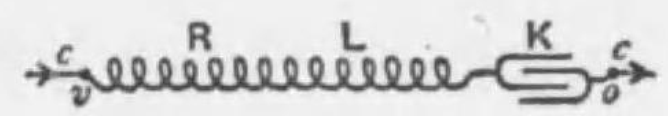
デアルト言ウテモヨイ.

i ノ項ガ 0 ナルトキハ,大キイ電流ヲ豫期シ得ル事ニ注意セヨ.

例 1. 實際ニ,此ノヤウナ電路ハ, $Lq=1/Kq$, 卽チ $LKq^2=1$ ナルトキニハ,之ハ調和シテキルト云フ. 今吾々ハソレヲ振動數 f ニ對シテ調子ヲ合ハセルヤウニショウトスルモノトスル. 從ツテ $q=2\pi f=6000$ トスル.〔之ハ約 955 ノ振動數デアルデアラウ〕. カクスレバ, $LK\times 36\times 10^6=1$.

今 $K=10^{-6}$, 卽チ 1「ミクロファラッド」トシ, $L=\frac{1}{36}$ トスル.

第43圖ハ電路ノ一部分デアツテ,其ノ兩端ニ於ケル電位差ハ v デアル



第 43 圖

モノヲ示ス. $R=100$「オーム」トセヨ. 之ハコノヤウナ電路ニ對シテハ餘程高イ値デアル. 又電壓ヲ

$$v=1414\sin qt,$$

トセヨ. カクスレバ,電流ハ $v\div$ 抵抗,卽チ

$$c=\frac{1414\sin qt}{100+i\left(\frac{q}{36}-\frac{10^6}{q}\right)}.$$

q ノ次ノ各値ニ對シテ,私ハ電流ヲ與ヘル.

若シ,私ガ一層小サイ R ヲトツタナラバ, $q=6000$ ナルトキ,電流ノ大サハ一層著シカツタ事デアラウ. 學生ハ斯樣ナ答ヲ方眼紙ニ「グラフ」トシテ描イテミテ, q ガ變ズルニ從ツテ c ノ振幅及ビ其ノ遲滯角或ハ前進角ガ如何ニ變ズルカヲ示サネバナラヌ.

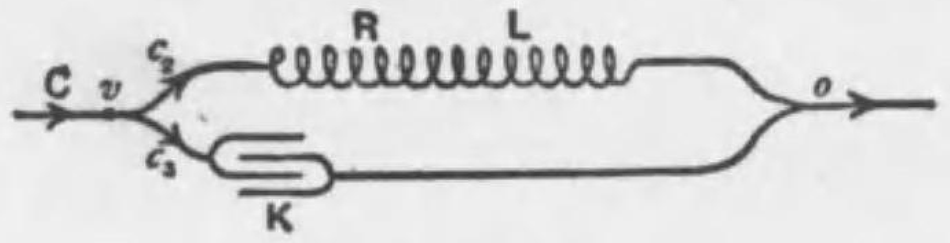
若シ,「オーム」ノ抵抗ヲトラナカツタナラバ, $q=6000$ ニ對シ,電流ハ無限大デアルデアラウ.

q	抵抗	c
3000	$100-250i$	$5.252\sin(qt+69^\circ)$
4500	$100-97i$	$10.152\sin(qt+44^\circ)$
6000	100	$14.14\ \sin qt$
7500	$100+75i$	$11.312\sin(qt-37^\circ)$
9000	$100+139i$	$8.255\sin(qt-54^\circ.5)$
10500	$100+196i$	$6.427\sin(qt-63^\circ)$

例 2.　二ツノ電路ガ並列ニ連結シテアル. 其ノ全電流ハ如何. 但シ一方ハ電流 c_2,「オーム」ノ抵抗 R「オーム」,感應係數 L ヲ有シ,他方ハ電流 c_3 ヲ有シ,單ニ容量ガ K ナル蓄電器ノアルノミデアル.(第44圖參照).

$$c_2=\frac{v}{R+Lqi},\quad c_3=Kqiv,\quad C=c_2+c_3=\frac{1-KLq^2+RKqi}{R+Lqi}v.$$

若シ $KLq^2=1$, 卽チ $q=\dfrac{1}{\sqrt{KL}}$ デアルナラバ, C ノ小サイ事ハ明ラカデアル. 又若シ q ノ此ノ値カラ離レルナラバ, C ハ大キクナル事ヲ知ル.



第 44 圖

q	C ノ振幅
3000	21.30
4000	9.00
4500	4.22
5000	0.20
5500	3.82
6000	7.33
8000	19.50
10000	30.00

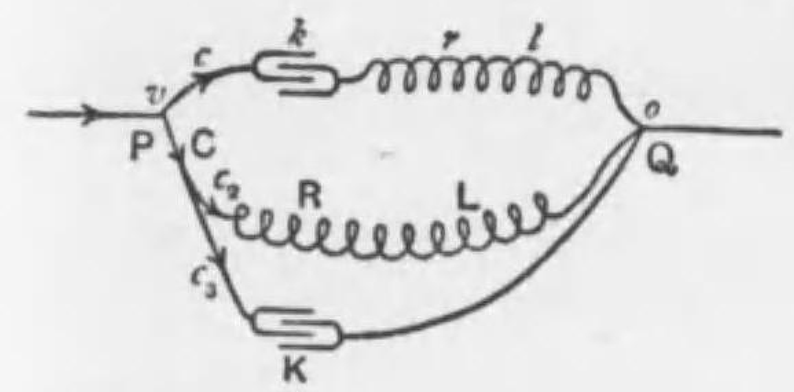
次ニ,感應係數ガ非常ニ大キイ場合ヲ採ツテ,其ノ裝置ヲ $KLq^2=1$ ニ合フヤウニシテ見ヨウ. $R=0.5$, $L=0.01$, $K=4\times10^{-6}$ トシ,從ツテ臨界ノ q ヲ 5000 トセヨ.(振動數ハ約 800). 私ハ唯 C ノ振幅ヲ與ヘヨウ. $v=1000\sin qt$.

$q=5000$ ニ對スル C ノ小ナル事ニ注意セヨ.

若シ, c_2 及ビ c_3 ヲ計算シタナラバ,其ノ兩者ハ $q=5000$ ナルトキ,大デアツタデアラウ. 其等ノ和 C ハ兩者ノ位相ガ殆ンド 180° 異ナツテキルカラ小デアル. 同

樣ニシテ二ツノ大キイ力ノ和(卽チ所謂合力)ハ,兩者ガ互ニ殆ンド反對デアルトキニハ,小サクアルカモ知レナイ.

例 3.　若シ學生ガ, q ガ變ズルニ從ツテ例 1 ノ c ヤ例 2 ノ C ガ如何ニ變ズルカヲ示ス曲線ヲ描クナラバ,此等ノ曲線ハ複合電流ヲ惹起スベキシドニー•ブロン氏ノ古イ發明ヲ敎ヘルデアラウ. コノ電流ハ多クノ單純ナル正弦曲線ノ和ヲ,ソレ自身デ割ツタモノデアル. 從ツテ殆ンドーツノ振動數デアル所ノ其ノ部分ハ,一ツノ電路ニ沿ウテ行キ,コノ複合電流ノ他ノ總テハ他ノ電路ヲ通ジテ行クデアラウ.



第 45 圖

全電流(第45圖)ヲ一點 P カラ他ノ一點 Q マデ行ク三個ノ道程卽チ電路ニ與ヘタト考ヘヨ. 但シ P ト Q トノ間ノ電壓ハ v デアルトスル. 第一電路ハ r, l, 及ビ容量 k ヲ有シ,從ツテ其ノ全抵抗ハ

$$r+i\left(lq-\frac{1}{kq}\right)$$

デアツテ,ソレヲ流レル電流ハ

$$c=\frac{V}{r+i\left(lq-\frac{1}{kq}\right)}.$$

第二電路ハ R ト L トヲ有シ,從ツテ抵抗ハ $R+Lqi$ デアツテ,電流ハ

$$c_2=\frac{V}{R+Lqi}$$

デアル. 第三電路ハ蓄電器 K ヲ有シ,其ノ電流ハ

$$c_3=KqiV$$

デアル. $c_2+c_3=C$ トスレバ,

$$C=\left(\frac{1}{R+Lqi}+Kqi\right)V.$$

故ニ

$$\frac{C}{c}=\frac{(1-KLq^2+RKqi)\left\{r+i\left(lq-\frac{1}{kq}\right)\right\}}{R+Lqi}.$$

サテ,ブロン氏ハ,q ノ特別ナ値,例ヘバ $q=5000$ ニ對シテ,C ガ非常ニ小サク,c ガ大キクアルヤウニ希望シタ. 併シ q ノ總テノ他ノ値ニ對シテハ,彼ハ C ガ大キク,c ガ小サクアルヤウニ望ンダ.

$q=5000$ ニ對シテ, $Klq^2=1=klq^2$ トシナケレバナラナイ事ハ明ラカデアル. 何トナレバ之ガ分子ヲ小ニスルカラデアル. 故ニ, $KL=kl=4\times10^{-8}$. ブロン氏ハ電路 c ニ於テ,價値アル抵抗ノ電話線ヲ得タイト思ツタカラ,彼ハ止ムナク大キイ l ト大キイ r トヲ用ヒタ. 今 $r=100$, $l=4$ トセヨ. 從ツテ $k=10^{-8}$ デアル. 併シ,彼ハ他ノ電路ニツイテ小サイ R ト L トヲトル事ガ出來タ. 從ツテ,彼ハ $R=0.5$, $L=0.01$ ヲ取ツタ. 從ツテ $K=4\times10^{-6}$ デアル. q ノ種々ナ値ニ對シテ次ノ結果ヲ計算セヨ.

q	$\frac{C}{c}$
3000	455.0
4000	81.02
4900	0.6778
5000	0.0200
5010	0.0278
6000	63.74
7000	188.1
10000	900.1

振幅以外ノモノニツイテ苦シム必要ハナイ. 若シ $q=5000$ トスレバ,c ハ C ノ 50 倍ノ大キサデアリ, $q=4000$ 又ハ 6000 トスレバ,c ハ C ノ $\frac{1}{80}$ カラ $\frac{1}{50}$ マデデアル事ハ解ル. カクシテブロン氏ノ目的ハ達セラレタ.

R ト r トガ無視シ得ル程小デアルナラバ,研究スルタメニ C/c ニ對スル非常ニ簡單ナ式ト,一層注意ヲ惹ク圖形トヲ得ル.

例 1 ノ電路(第43圖)ヲ I トシ,例 2 ノ複電路(第44圖)ヲ II トスル. ブロン氏ハ電路 II ニ依ツテ,電路 I ヲ簡單ニ分岐シタ.

§128. 電氣ニ於ケル一般法則

今迄提出シタ電氣ノ問題ハ,總テ次ノ一般法則ニ關スル例デアル. $\frac{d}{dt}$ ノ代リニ θ ヲ用ヒル.「オーム」ノ抵抗 r, 感應係數 l,電氣容量 k ナル電流ハ,抵抗 $r+l\theta+\frac{1}{k\theta}$ ヲ有スルト言フ. 電流ヲ送ル任意ノ網狀導體ニ於テ,若シ任意ノ支線ニ一定ノ電動力 E ガアルナラバ,又ハ任意ノ二點間ニ電壓 V ノ電位差ガアルナラバ,任意ノ支線ニ於ケル一定ノ電流ヲ計算スル事ガ出來ル. 但シ,E 又ハ V ハ,總

テノ支線ノ總抵抗 r_1, r_2, r_3 等ヲ含ム所ノ或ル代數式ヲ掛ケタモノデアル. 若シ E 又ハ V ガ變ジテモ,吾々ハ同ジ代數式ヲ用ヒルデアラウ. 併シ,今單ニ,「オーム」ノ抵抗例ヘバ r_3 ノ代リニ, $r_3+l_3\theta+\frac{1}{k_3\theta}$ ヲ用ヒル. 但シ r_3 ハ「オーム」ノ抵抗, l_3 ハ感應係數, k_3 ハ其ノ支線ニ於ケル電氣容量デアル.

此ノ式ガ如何ニ複雜デアツテモ,分數ヲ除イタトキ,或ハ其ノ他ノトキ,(θ ハ恰モ單ナル代數的量*トシテ取扱フ.)之ハ次ノヤウニ簡單ニナル. 卽チ,

$$\frac{a+b\theta+c\theta^2+d\theta^3+e\theta^4+f\theta^5+\cdots\cdots}{a'+b'\theta+c'\theta^2+d'\theta^3+e'\theta^4+f'\theta^5+\cdots}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ノヤウナ計算ガ,時間ノ函數デアル或ル電壓ニ就イテ完成サレネバナラヌ. 若シ,其ノ函數ガ $\sin qt$ ナル形デアルナラバ, (1)ニ於ケル θ ノ代リニ qi ヲ代入スル. カクスレバ錯雜シタ計算ハ,

$$\frac{a+bqi+cq^2i^2+dq^3i^3+eq^4i^4+fq^5i^5+\cdots\cdots}{a'+b'qi+c'q^2i^2+d'q^3i^3+e'q^4i^4+f'q^5i^5+\cdots}$$
$$=\frac{a-cq^2+eq^4+\cdots+iq(b-dq^2+fq^4-\cdots\cdots)}{a'-c'q^2+e'q^4+\cdots+iq(b'-d'q^2+f'q^4-\cdots)}$$

トナル. 之ヲ $\frac{A+Bi}{\alpha+\beta i}$ ト呼ビ,且ツ §119 ニ依ツテカヤウナ演算式ノ效果ヲ知ル.

若シ,夫々一定ノ電流 c_1, c_2 ノ流レテヰル二ツノ電路 r_1, r_2 ガ並列ニ連結シテアルナラバ,全電流 $C=c_1+c_2$ ハ,ソレ自身ヲ割リ,從ツテ

$$\frac{c_1}{C}=\frac{r_2}{r_1+r_2} \quad 及ビ \quad \frac{c_2}{C}=\frac{r_1}{r_1+r_2}$$

トナル.

尙又,並列ナル二ツノ電路ノ結合サレタ場合ニハ,

* 〔此ノ證明ハ容易デアルガ,長イモノデアル. 拙著「微積分學」[(1)] 231–234 頁ニ在ル.〕

(1) Perry, J., The calculus for engineers. 1897, London.
コノ外, 普通ノ微分方程式ノ書ニハ大抵載ツテヰル.

$$R=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$$

デアリ,從ツテ電壓ヲ V トスレバ,

$$C=\left(\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}\right)V.$$

若シ電流ガ, $\sin qt$ ナル形ノ交流デアツテモ,此等ノ式ト同ジ式ヲ用ヒル. 唯其ノ場合ニハ r_1 ト r_2 トノミガ實デハナイ. カクテ,今蓄電器ヲ用ヒナイト假定セヨ. r_1 ノ代リニ r_1+l_1qi ヲ用ヒ, r_2 ノ代リニ r_2+l_2qi ヲ用ヒテ,各公式ハ如何ニナルカヲ見ヨ. 次ニ $r_1=1$, $l_1=0.1$; $r_2=100$, $l_2=0.01$ ナルヤウナ例ヲ考ヘテ見ヨ. q ノ多クノ値ニ對シテ上ノ各公式ノ値ヲ計算セヨ. 然ラバ諸君ハ非常ニ面白イ結果ヲ知ルニ到ルデアラウ.

例題. 又ハ上ノ例2ノヤウニ進メルコトガ出來ル. 併シ,私ハ異ナル數ヲ用ヒヨウ. $v=1414\sin qt$ トシ,一ツノ電路ノ抵抗ヲ $100+qi$ (即チ $R=100$, $L=1$) トセヨ. 然ラバ $q=1000$ ニ對シテ,

$$c_2=\frac{1414\sin qt}{100+1000i}, \text{ 即チ } c_2=1.407\sin(1000t-84^\circ.283).$$

今一ツノ電路ニハ蓄電器ガアルノミデ,其ノ蓄電器ノ容量ハ 1「ミクロファラッド」即チ $K=10^{-6}$ デアルトスル. 然ラバ

$$c_3=Kqiv,$$

即チ

$$c_3=1.414\sin(1000t+90^\circ),$$

デアツテ,全電流 $C=c_2+c_3$ ハ,

$$C=0.1407\sin(1000t+5^\circ.717).$$

電流ハ小サイノニ,各支線ニハ大キイ電流ガ通ズルトイフ事ハ,初學者ニハ頭ヲ混亂サセルヤウニ變ナ事デアルカモ知レナイ. 併シ,既ニ以前述ベタヤウニ,之ハ大キナ二ツノ力ガアツテ,其ノ大サハ殆ンド等シク,併シ其ノ方向ハ殆ンド反對デアルトキ,其ノ力ノ和ニ類似スル. 上ノヤウナ場合ニハ,常ニ此ノ複合電路ハ $q=1000$ ト調和シテヰルトイフ.〔振動數ハ約160〕. 拙著「微積分學」ニ與ヘタ總テノ問題,即チ與ヘラレタ「コイル」ト蓄電器トヲ通ル交流ニツイテ作ラレル總テノ問題ハ,單ニ直流ニ關スル公式トシテ吾々ニヨク知ラレテヰル此等ノ簡單ナ公式ニ基クモノノミデアル.

§129. 相互感應

私ハココニ二ツノ電路ノ間ノ相互感應ノ影響ヲ附スレバヨイ.

若シ,ココニ電路ノ二ツノ部分 r_1 及ビ r_2 ガアツテ,兩者ノ間ノ相互感應ガ m デアルナラバ, $r_1+l_1\theta+\frac{1}{k_1\theta}$ ヲ r_1 トシ, $r_2+l_2\theta+\frac{1}{k_2\theta}$ ヲ r_2 トセヨ. 若シ各電路ニ蓄電器ガナイナラバ,其ノ $1/k\theta$ ノ項ヲ0トセヨ. v_1 ヲ第一電路ノ兩端ノ間ノ電壓トシ, v_2 ヲ第二電路ノ兩端ノ間ノ電壓トセヨ. カクスレバ,

$$\left.\begin{aligned} v_1&=r_1c_1+m\theta c_2\\ v_2&=r_2c_2+m\theta c_1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故ニ若シ, v_1 ト v_2 トガ與ヘラレルナラバ, c_1 ト c_2 トヲ計算スルコトガ出來ル. 又一層面倒ラシイ,一層奇妙ナ多クノ他ノ問題ヲヤル事ガ出來ル.

m ハ正又負ノ何レカデアル.

若シ,コノ電流ガ $\sin qt$ ナル形デアルナラバ,勿論コノ種ノ問題ニ於テ, θ ノ代リニ qi ト置ク.

普通ノ變壓器ノ例トシテ,私ハ拙著微積分學ヲ學生ニ紹介シナケレバナラナイ. 學生ハソコニ與ヘラレタ問題ノ何レデモ容易ニ解クコトガ出來ルデアラウ. ソシテ私ガソコデ, $\frac{d}{dt}$ ノ代リニ, θ ヲ使ツテヰルコトニ氣付クデアラウ. 恐ラク,私ガ本書デヤツタヤウニ, θ 又ハ $\frac{d}{dt}$ ノ代リニ,到ル所 qi ヲ使用シタ方ガヨイデアラウ. 併シ,實際ノ數値ヲ入レタ問題デハ同一デアル.

§130. 抵抗ト「イムピーダンス」

上ノ問題ニ於テ,私ガ r ト l, 又ハ r ト l ト k トヲ含ム電路ヲ有スルトキニハ,其ノ抵抗ヲ $r+lqi$ 及ビ $r+i\left(lq-\frac{1}{kq}\right)$ トシテ話ヲスル事ニ氣付クデアラウ. 或ル人々ハ之ヲ「**イムピーダンス**」ト名ヅケル. 名ガ與ヘラレル事ハ,何等ノ影響モナイ. 併シ嚴密ニ言ヘバ,「イムピーダンス」トハ $r+lqi$, 又ハ $\sqrt{r^2+l^2q^2}$ ナル振幅ノ部分デアル.

無線電信,又ハ時トシテハ電話ニ用ヒラレル變壓器ニ對シテハ,電氣機

關ニ對スルヤウニヨク知ツテキル簡單ナ法則ヲ有シナイ．何トナレバ，蓄電器ハ電路ノ中ニ在ツテ，且ツ $l_1l_2-m^2$ ト0トハ非常ニ距ツテキルカラデアル．無線電信カラ次ノ例ヲ提供スルノモヨロシイカモ知レヌ．

§131. 相己感應ノ體系

殆ンド等長ノ二ツノ振子 A ト B ガアツテ，薄イ水平ノ棒又ハ弦ニ懸ツテキルモノトスル．或ハ又其等ハ剛體ノ支柱カラ垂レテキテ，而モ互ニ力ヲ働カセルニ十分ナダケ接近サセ，「インドゴム」ノ絲ヲ用ヒルカ，絲ガナケレバ，其等ノ作ル空氣ノ流レダケニヨツテデモ互ニ影響スルヤウニ裝置スル．若シ A ガ振動シテ B ガ靜止シテヲレバ，B ハ振動ヲ始メル．其ノ振動ハ極大ニマデ達シテ，後減少スル．然ルニ A ノ振動ハ殆ンド0マデ減少シ，後再ビ增加スル．而シテコノ「エネルギー」ノ交換ハ其等ノ間ニ絕エズ行ハレル．此等ノ振子ノ任意ノ場合ニ於テ，其ノ運動ノ方程式ヲ述べ，且ツソレヲ解ク事ハ容易デアル．併シ私ハ，各々ノ代リニ二ツノ電路ニツイテノ類似ノ場合ヲ述べル事ニスル．其ノ各線ハ抵抗，感應係數及ビ容量ヲ自由ニ放任サレテキル，即チ何レニ於テモ電動力ハ供給サレテキナイモノトスル．

若シ r ガ $r+l\theta+\frac{1}{k\theta}$ ヲ表ハシ，(但シ θ ハ $\frac{d}{dt}$ トスル．) 又 m ガ相互感應デアルナラバ，二ツノ電路，及ビソレニ於ケル電流トヲ添數1ト2トニヨツテ區別スレバ，§129 ノ (1) ハ

$$r_1c_1+m\theta c_2=0=r_2c_2+m\theta c_1,$$

デアル．故ニ

$$(r_2r_1-m^2\theta^2)c_1=0, \qquad c_2=-\frac{r_1c_1}{m\theta}.$$

此等ノ方程式ヲ解クコトハ容易デアル．此等ノ式ハ，「オーム」ノ抵抗ノ項ガ常ニ感應係數ノ項ニ比シテ非常ニ小デアルカラ，ソレヲ0トスレバ簡單ニナル．故ニ，コノ振動ニ於テハ少シノ減衰モ見ナイデアラウ．其ノ結果ハ

$$(\theta^4+A\theta^2+B)c_1=0$$

ナル形デアリ，c_2 ニ對シテモ正確ニ同ジ方程式ヲ得ル．之ヲ解クニハ，後ニ示スヤウニ，先ヅ §133 ノ補助方程式(2)ハ $x^4+Ax^2+B=0$ デアルカラ，コレヨリ $x=\pm\alpha i$ 及ビ $x=\pm\beta i$ ナル形ノ根ヲ求メ得ル．從ツテ c_1 ニ對スル

答ハ

$$c_1=M_1\sin(\alpha t+e_1)+N_1\sin(\beta t+g_1),$$

デアル．但シ，M_1 及ビ N_1 ハ任意常數デアル．又

$$c_2=M_2\sin(\alpha t+e_2)+N_2\sin(\beta t+g_2).$$

實際ニ，c_1 ハ二ツノ振動數ヲ有シ，c_2 ハソレト同ジ二ツノ振動數ヲ有スル．式

$$\sqrt{\frac{k_1l_1+k_2l_2\pm\sqrt{(k_1l_1-k_2l_2)^2+4k_1k_2m^2}}{2k_1k_2(l_1l_2-m^2)}}$$

ハ正號ヲトレバ α ノ値ヲ與ヘ，負號ヲトレバ β ノ値ヲ與ヘルト云フ事ハ知ラレルデアラウ．

之ヲ種々ニ書クコトガ出來ル．$t_1=2\pi\sqrt{k_1l_1}$ ヲ第一電路ノ自然週期トシ $t_2=2\pi\sqrt{k_2l_2}$ ヲ第二電路ノ自然週期トセヨ．但シ，其等ハ互ニ全ク分離シテキルモノトスル．$\mu^2=4\pi^2m\sqrt{k_1k_2}$ トシ，$T'=\frac{2\pi}{\alpha}$ 及ビ $T''=\frac{2\pi}{\beta}$ ヲ，c_1 及ビ c_2 ニ於テ得ラレル二ツノ週期トセヨ．カクスレバ

$$\sqrt{\frac{2t_1^2t_2^2-2\mu^4}{t_1^2+t_2^2\pm\sqrt{(t_1^2-t_2^2)^2+4\mu^4}}}$$

ハ正號ヲ取レバ T' ノ値デアリ，負號ヲ取レバ T'' ノ値トナル．總テノ此等ノ問題ハ，學生ガ誰デモ獨デナシ得ル所ノ容易ナ代數學デアル．

普通ノ場合ハ，$l_1k_1=l_2k_2$ トスベキデアリ，從ツテ $t_1=t_2$ トナリ，之ヲ T トセヨ．吾々ハ今

$$T'=\sqrt{T^2+\mu^2}, \qquad T''=\sqrt{T^2-\mu^2}$$

ナル事ヲ知ル．

サテ，若シソコニ所謂弛緩聯成ガアルナラバ，即チ，若シ m^2 ガ l_1l_2 ヨリ非常ニ小サイナラバ，(又ハ多クノ磁氣漏レガアルナラバ)，μ^2 ハ T ニ比シテ小サイカラ，T' ト T'' トハ殆ンド相等シイ．

例題. $l_1=10^{-6}$「ヘンリー」，$l_2=20\times10^{-6}$，$m=10^{-7}$，$k_1=10^{-9}$「ファラッド」，$k_2=0.05\times10^{-9}$「ファラッド」トセヨ．

$$T=2\pi\sqrt{k_1l_1}=2\pi\sqrt{k_2l_2}=19.90\times10^{-8},\ \mu^2=8.83\times10^{-16};$$

$$T'=20.125\times10^{-8}\ 及ビ\ T''=19.67\times10^{-8},$$

及ビ

$$\alpha=31.23\times10^6, \qquad \beta=31.94\times10^6.$$

音樂ニ於テ，二ツノ異ナル調子(コレヲ振動數ト云フ)ノ音ガ一緒ニ響

クトキニハ,確カニ「ウナリ」ノ結果ガ現ハレル.

c_2 ニ於ケル各項ハ, $-c_2=\frac{r_1c_1}{m\alpha i}$, 又ハ $\frac{r_1c_1}{m\beta i}$ ナル關係ニヨツテ c_1 ニ於ケル相對應スル項ト連結セラレル. 此ノ場合ニハ

$$M_2=0.1736M_1 \quad 及ビ \quad N_2=0.6192N_1$$

デアル事ヲ知ル. 代數學ハ,若シコレ以上ニ進メバ面倒ニナル. 併シ,若シ,私ガ既ニ記述シタ所ノ,二ツノ振動振子ヲ見ルナラバ,コノ一般ノ結果ハ十分明ラカデアル. コノ兩振子ガ正確ニ等長デアルナラバ,コノ説明ハ極メテ完全デアル. 若シ,一方ノ振子ガ,振動ノ小ニナルトキ,全ク止ルナラバ,他方ノ振動ハモハヤ增減ヲスルコトハ長クハナイ. 此ノ事ハ瞬滅火花ノ方法ガ無線電信ニ重要デアル理由ヲ説明スルモノデアル.

第三十一章　一般ノ週期函數

§132. 週期函數ノ概念

私ハ第二十八章ニ於テ,最モ簡單ナ種類ノ週期函數ヲ考ヘタ. 時間ノ週期函數ハ,時間 T ダケ經過シタ後ニハ各事項 (其ノ函數ノ眞ノ値,其ノ增加ノ割合等)ガ再ビ同一ニナル函數デアル. カヤウナ時間 T ヲ週期トイヒ,其ノ逆數ヲ振動數トイフ. 週期函數ノ代數學的定義ハ,

$$f(t)=f(t-nT),$$

デアル. 玆ニ n ハ正又ハ負ノ整數デアル.

フーリエ[1]**ノ定理**ノ眞デアルコトハ,證明出來ル.[2] 其ノ定理ニ依レバ,全週期ガ T ナル任意ノ週期函數ヲ $f(t)$ トシ, $2\pi/T$ ヲ q トスレバ,其ノ函數ハ次ノ通リニ表ハサレル.

$$\begin{aligned} x=f(t)=A_0+A_1\sin(qt+e_1)+A_2\sin(2qt+e_2) \\ +A_3\sin(3qt+e_3)+\cdots\cdots\cdots. \quad \cdots\cdots(1) \end{aligned}$$

同様ニシテ,任意ノ風琴管又ハ「ヴァイオリン」ノ弦,或ハ其ノ他ノ樂器ノ音ハ,原音ト其ノ倍音ヨリ成ルモノデアル. §116 ヨリ,(1) ハ實際ニ,

$$\begin{aligned} f(t)=A_0+a_1\sin qt+b_1\cos qt+a_2\sin 2qt+b_2\cos 2qt \\ +a_3\sin 3qt+b_3\cos 3qt+\cdots. \quad \cdots(2) \end{aligned}$$

ト同ジデアル事ヲ知ル. 玆ニ $A_1{}^2=a_1{}^2+b_1{}^2$, $\tan e_1=\frac{b_1}{a_1}$, 等デアル.

力學又ハ電氣學ノ强制振動ニ關スル總テノ問題ニ於テ,吾々ハ時間ノ函數 $f(t)$ ニ就イテ $\frac{d}{dt}$ 即チ θ ノ函數ヲ計算シナケレバナラ

(1) Jean Baptiste Joseph Fourier (1768—1830). 佛國ノ數理物理學者デ, 熱傳導ノ研究デ著名デアル.

(2) 例ヘバ, ローレンツ微分積分學, 山田光雄氏譯, (第二版)(内田老鶴圃)參照.

ナイ. 各場合ニ於テ,之ヲ $a\sin qt$ ナル形デアルト假定シタ. 併シ,若シソレガ任意ノ週期函數デアルナラバ,何デアツテモ,之ヲ(1)ノ形デ表ハストキニハ個々ニ存在シテヰルカノヤウニ,(1)ノ各項ニ計算ヲ施ス. カクテ,完全ナ答ハ此等ノ部分的ノ答ノ和デアル.

フーリエノ展開ノ理論ニ關シテハ,學生ハ拙著微積分學ヲ參照シテ欲シイ.

彈ノ運動ノ仕事及ビ電氣ノ仕事ニ於テ, t ト $f(t)$ トヲ表ハス曲線ガ與ヘテアルトキニハ,任意ノ週期函數ヲ,(1)又ハ(2)ナル形ニ展開スル事ガ出來ル. 此ノ事ハ極メテ重要デアル. 私ハ1895年6月28日ノ「電氣技術者新聞」ニ「グラフ」ノ方法[1]ヲ述ベタ. 又1892年2月5日ノ同紙ニハ, $f(t)$ ノ等間隔ノ値ニ對スル數ノ表ガ與ヘテアルトキニ用ヒル事ガ出來ル方法[2]ヲ記述シタ. ヘンリシイ教授ノ分解器[3]ハ,把手ヲ廻ストキニ正シイ結果ヲ與ヘル機械デアル.

次ノ方法ハ表記サレタ値ヲ手ニスルトキニ,多分最モ迅速ナ方法デアルデアラウ. 表記ノ値ガ多ケレバ多イ程,益々正確ナ値ヲ得ル.

例題. ココニ x ノ24ノ等間隔ノ値ガアツテ,且ツ私ハ A_1, e_1, A_2, e_2, A_3, e_3, A_4, e_4 ヲ求メネバナラナイモノト假定スル. 角 qt ニ對シテ ϕ ナル文字ヲ使用シタ方ガヨイ. ϕ ハ明ラカニ, t ガ0カラ T マデ行クトキニ,0カラ360°, 即チ0カラ 2π マデ行ク,即チ

(1)「グラフ」ニヨル最良ノ方法ノ一ツニ就テハ,「ザンデン, 實用解析學」(小倉, 近藤兩氏譯註) 206 頁ヲ見ヨ.

(2) 計算ニヨル最良ノ方法ノ一ツニ就テハ, 上揭ノ書, 211 頁ヲ見ヨ.

(3) 一ツノ複雜ナ週期函數ヲ數多ノ簡單ナ正弦餘弦函數ニ分解スル機械デ, 式(2)ノ係數 A_0, a_1, b_1 等ヲ機械的ニ定メルモノデアル. 上揭ノ書, 330 頁ニ詳シイ說明ガアル.

全週期ヲ通過スル. 第一ニ,此ノ24ノ縱線ヲ加ヘ,コレヲ24デ割レ. カクシテ, $A_0=5$ ヲ得ル. 今各縱線カラ5ヲ引イテ,コレヲ x' トスル. 此ノ特殊ナ場合ニ於テ,私ハ四ツノ成分シカナイコトヲ知ツテヰル. 故ニ

$$x'=A_1\sin(\phi+e_1)+A_2\sin(2\phi+e_2)+A_3\sin(3\phi+e_3)+A_4\sin(4\phi+e_4).$$

今 $\phi=0$ カラ $\phi=360°$ マデヲ, x' ヲ鉛直ニ ϕ ヲ水平ニ,方眼紙ニ「グラフ」ニ描イタモノト想像ショウ. カクスレバ,若シ180°カラ360°マデノ曲線ノ一半ヲ0°カラ180°マデノ他ノ半分ノ上ニ重ネレバ,第一ト第三トノ成分ハ消去サレルデアラウ. 但シ對應縱線ハ相加ヘラレルモノトスル. 〔此ノ事ハ此等ノ成分ノ任意ノ一ツガ e ノ任意ノ値ヲ以テ別ニ描カレルナラバ,容易ニ解ル〕. 而シテ其ノ合成曲線ハ次ノ通リデアル.

$$x''=2[A_2\sin(2\phi+e_2)+A_4\sin(4\phi+e_4)].$$

同樣ニ,若シ原曲線ガ ϕ ノ軸ニ垂直ナ直線ニヨツテ三等分セラレルナラバ,且ツ其ノ三ツノ部分ガ重ネ置カレテ對應縱線ガ加ヘラレルナラバ,第二ト第四トノ成分ハ消去セラレテ,其ノ合成曲線ハ次ノヤウニナル.

$$x'''=3a_3\sin(3\phi+e_3).$$

之ヲ「グラフ」ニ依リ,又ハ解析的ニ證明スルコトハ,學生ニ取ツテ容易ナ問題デアル. 若シ困難ヲ感ズルナラバ,1896年ノ電氣技師ノ設置ニ就イテノ處置ニ關スルウェツドモーア氏ノ論文ヲ參照スルガヨイ.

次ノ表ハ,上ノ方法ガ,曲線ヲ描カナイデ如何ニシテ用ヒラレルカトイフ事ヲ示ス. 例ヘバ, A, I, J ノ行ハ重置セラレタ三ツノ等シイ部分デアリ,之ヲ加ヘルト行 K トナル. コレハ成分3ノ二倍デアツテ,此ノ場合ニハ零デアル.

表ヲ試驗シテミレバ,之ガ總テ如何ニシテ作ラレタカトイフ事ガ容易ニ解ル.

$\phi°$	縦線番號	x	A x' 即チ $x-5$	B 之ハソレ自身ノ上ニ重ネラレタA	C $A+B$	D $\frac{1}{2}C$, 即チ成分2及ビ4ノ和	E 之ハソレ自身ノ上ニ重ネラレタD	F $D+E$	G $\frac{1}{2}F$, 即チ成分4	H $D-G$, 即チ成分2
0	0	8.02	3.02	−2.02	1.00	0.50	−0.50	0.00	0.00	0.50
15	1	8.37	3.37	−2.33	1.04	0.52	−0.345	0.175	0.0875	0.4325
30	2	8.33	3.33	−2.66	0.67	0.335	−0.165	0.170	0.085	0.250
45	3	7.93	2.93	−2.93	0.00	0.00	0.00	0.00	0	0.00
60	4	7.34	2.34	−3.01	−0.67	−0.335	0.165	−0.170	−0.085	−0.250
75	5	6.71	1.71	−2.75	−1.04	−0.52	0.345	−0.175	−0.0875	−0.4325
90	6	6.13	1.13	−2.13	−1.00	−0.50	Gハ下方ニ續ク.〔右ノ行ヲ見ヨ.〕		0.00	−0.50
105	7	5.58	0.58	−1.27	−0.69	−0.345			0.0875	−0.4325
120	8	4.99	−0.01	−0.32	−0.33	−0.165			0.085	−0.250
135	9	4.38	−0.62	0.62	0.00	0.00			0.00	0.00
150	10	3.80	−1.20	1.53	0.33	0.165			−0.085	0.250
165	11	3.34	−1.66	2.35	0.69	0.345			−0.0875	0.4325
180	12	2.98	−2.02	Mハ上方ニ續ク.〔右ノ行ヲ見ヨ.〕				0.50	−2.520	
195	13	2.67	−2.33					0.52	−2.850	
210	14	2.34	−2.66					0.335	−2.995	
225	15	2.07	−2.93					0.00	−2.930	
240	16	1.99	−3.01	−0.01	3.02	0		−0.335	−2.675	
255	17	2.25	−2.75	−0.62	3.37	0		−0.52	−2.230	
270	18	2.87	−2.13	−1.20	3.33	0		−0.50	−1.630	
285	19	3.73	−1.27	−1.66	2.93	0		−0.345	−0.925	
300	20	4.68	−0.32	−2.02	2.34	0		−0.165	−0.155	
315	21	5.62	0.62	−2.33	1.71	0		0.00	0.620	
330	22	6.53	1.53	−2.66	1.13	0		0.165	1.365	
345	23	7.35	2.35	−2.93	0.58	0		0.345	2.005	
平均縦線 $=5$				重ネラレタA	重ネラレタA	$A+I+J$, 成分3ノ三倍, 之ハ0デアル.		繰リ返ヘサレタD	$A-D$, 成分1及ビ3,又ハ成分1ノミ.	
			A	I	J	K		M	N	

成分1.　行Nガ表ノ頂マデ續ケラレルト想像セヨ. 縦線0ハ2.520デアル. 0カラ第11マデヲ括メテ縦線ノ平均ハ, $22.900 \div 12 = 1.908$ デアル. 但シ總テ正トスル. 吾々ハ其ノ法則ノアルガ爲ニ, A_1ヲ求メルノニ,此ノ方法ヲ用ヒル.(§56,例2參照).

A_1ノ極大縦線$=1.908 \times \frac{\pi}{2} = 2.997$;之ヲ3トスル. e_1ヲ得ル爲ニ $\frac{\sin e_1}{\sin 90°} = \frac{2.520}{2.997} = 0.84$;故ニ $e_1 = 57°$.

成分2.　行Hノ觀察ニヨツテ,極大縦線$=0.50$, 又 $e_2 = 90°$.

成分3.　零. 行Kヲ見ヨ.

成分4.　0カラ第2マデヲ括メテ縦線ノ平均ハ $0.1725 \div 3$, 即チ 0.0575. 又 $A_4 = 0.0575 \times \pi/2 = 0.091$.

觀察ニヨツテ $e_4 = 0$.

故ニ　$$x = 5 + 3\sin(\phi + 57°) + 0.5\cos 2\phi + 0.09\sin 4\phi.$$

〔注意〕　吾々ガ正弦曲線ノ少數ノ縦線ヲ有スルトキニハ,實際ノ曲線ノ平均縦線トシテ,其等ノ平均ノ値（上ノ表デナシタト同樣ニ,其等ヲ總テ正トスル）ヲトルコトハ十分正確デハナイ. 斯樣ナ場合ニハ,私ハ此等ノ縦線ヲトツテA及ビeノ關係ヲ示ス確カラシイ曲線ヲ描カナケレバ滿足シナイ.

§133. 微分方程式

$$\frac{d^4x}{dt^4} + P\frac{d^3x}{dt^3} + Q\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + Sx = T, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ノヤウナ微分方程式ハ,若シ P, Q, R, S 及ビ T ガ t ノミノ函數又ハ常數デアルナラバ,之ヲ**一次微分方程式**ト呼ブ.

今 $T=0$ トスル. 吾々ハ "tノ或ル函數" ナル解 x ヲ求メヨウトスル. 之ヲ今 $x=f(t)$ ト書カウ. 與ヘラレタ方程式ハ**四階**デアルカラ,此ノ解ハ四ツノ任意常數ヲ含ムデアラウ.

サテ,若シ T ガ 0 デナイトキニ,吾々ガ一ツノ解ヲ解キアテテ,ソレガ $x=t$ ノ或ル他ノ函數〔之ヲ $F(t)$ ト名ヅケヨウ.〕デアル事ヲ知ツタトスレバ,(1)ノ最モ完全ナ解ハ

$$x = f(t) + F(t)$$

デアル事ヲ證明スルコトハ容易デアル.

私ハココデ P, Q, R, S ガ常數デアル場合ダケヲ考ヘルコトニスル. 第一ニ, T ヲ 0 トセヨ. $y = Me^{mt}$ ハ解デアルト假定セヨ. M

ガ如何ナル常數デアラウトモ,若シ

$$m^4+Pm^3+Qm^2+Rm+S=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

デアルナラバ上ノ解ハ成立スルコトヲ知ル. 四次ノ方程式ハ四ツノ根ヲ有スル. 方程式(2)ヲ滿足スル m ノ値ヲ $a, b, \alpha+\beta i, \alpha-\beta i$ トセヨ. 其ノ解 $x=f(t)$ ハ

$$x=Ae^{at}+Be^{bt}+Ce^{(\alpha+\beta i)t}+De^{(\alpha-\beta i)t}$$

デアル. 但シ A, B, C, D ハ任意常數デアル.

C ト D トハ實數デナク,又 $e^{\beta it}$ ハ

$$\cos\beta t+i\sin\beta t$$

ト書ケルカラ (§137參照),實際問題ニ對シテ最モ適當ナ解ハ,

$$x=Ae^{at}+Be^{bt}+e^{\alpha t}(M\cos\beta t+N\sin\beta t)$$

デアルコトハ容易ニ解ル. ココニ A, B, M 及ビ N ハ任意常數デアツテ,總テ實數デアルモノトスル.

§121 ニ於テ,私ハ二次方程式ノ解法ニ此ノ法則ヲ用ヒタ. $m=a$ ナル形ノ(2)ノ根ハ,答ニ於ケル項 Ae^{at} ヲ生ジ, $\alpha\pm\beta i$ ナル形ノ虚根ハ項

$$e^{\alpha t}(M\cos\beta t+N\sin\beta t)$$

ヲ生ズル.

尙等根ニ關スル規則ガアルガ,之ハ殆ンド必要デハナイ. 此ノ定理ハ拙著“微積分學”ニ叙述シテアル.

若シ,例ヘバ, x ガ物體ノ變位デアリ, t ガ時間デアルナラバ, $x=f(t)$ ナル解ハ,其ノ運動體系ノ自由運動或ハ自然運動ト呼バレ,又 $x=F(t)$ ナル部分ハ强制運動ト名ヅケラレル. 私ガ §120 デ述ベタヤウニ,吾々ハ屢々此ノ自然運動ヲ無視スル. 之ハ自由運動ニハ減衰スル項ガアツテ,之ガ速カニ其ノ運動ヲ消滅サセルカラデアル.

此ノ題目ニ就イテノ優秀ナ而モ容易ナ問題ハ,次ノ中ニアル.

(a)蒸氣ニ關スル私ノ著書ノ附錄ニアル所ノ“蒸汽機關ノ觀測ニ就イテノ定理”ノ中.

又(b)拙著“應用力學”ノ附錄ニ述ベテアル“重イ車輪ノアル軸又ハ車輪ノナイ軸ノ臨界速度及ビ「クランク・シヤフト」ノ臨界速度”ノ中.

若シ §121 ニ於テ,數個ノ「ゼンマイ」ト錘トノ系列ヲ考ヘルナラバ,數個ノ自然振動ノ系統ヲ得ル. 此等ノ錘ニ作用スル力ヲ變ゼシメルトキニハ,其ノ全系統ハ如何ニナルデアラウカ.(應用力學ノ附錄). 斯樣ナ系統又ハソレト等値ナ捻力系統ナドノ自然振動ヲ注視スルコトハ,非常ニ興味アルコトデアツテ,之ヲ數學的ニ研究スル事ハ容易デアル. ケルヴィン卿[1]ハ此ノ研究ヲ好ンデキタ. ソシテ彼ノ有名ナバルチモーアニ於ケル“光學”ニ關スル講義ニハ,其ノ結果ヲ澤山利用シタ. 其ノ仕事ハ容易デアツテ,從ツテソレヲココデ論述シヨウト思ツタガ,本書ガ餘リ大キクナルカラ止スコトニシタ.

(1) Lord Kelvin, 卽チ William Thomson (1824−1907). 英國ノ大物理學者. 1884 年ニバルチモーアニ於テ, 有名ナル“分子力學”並ニ“光ノ波動論”ノ講義ヲシタ.

第三十二章　法則ノ擴張

並ニ其證明

§134. 函數ノ四則ノ微分係數

§94 ニ與ヘタ二三ノ函數ノ微分ニ關スル知識ハ,機械技師ガナサネバナラナイ殆ンド總テノ數學的仕事ニ對シテ十分デアラウ. ココニ機械技師トイフハ,自然科學ノ原理ヲ應用スル人ヲ總稱スルノデアル.

少數ノ法則ヲ用ヒテ,x ノ任意ノ代數函數ヲ微分シタリ,又多クノ函數ヲ積分シタリスル事ガ出來ルヤウニナルノハ容易デアル.

學生ハ往々ニシテ,此等ノ法則ヲ獲得シサヘスレバ,ソレ以上更ニ進ンデ此ノ驚異スベキ材料ヲ學バウトシナイ. ソシテ或ル試驗ヲ通過シタ後ハ,其ノ力ヲ急ニ失ツテ了フ. 之ハ,$\frac{dy}{dx}$ ガ如何ナル事ヲ意味スルカ本當ノ事ヲ,彼等ハ知ラナイシ,從ツテ又此等ノ材料ニ何等ノ興味モ感ジナイノニ起因スル.

私ハ此ノ講義ガ,一般ニ要求サレテキル課目ニ就イテ,學生ニ或ル種ノ興味ヲ與ヘルヤウニシタイ. ト同時ニ又此等ノ學生ノ幾分ガ,一層一般ニ認メラレタ正シイ說ニ於テ,此ノ課目ヲ研究スル事ヲ熱望スル. 併シ私ハ,學生諸君ガ第一ニ拙著"微積分學"ヲ研究シタ方ガヨイト思フ.

1.　函數ノ和ノ微分係數.

$y=u+v+w$ ヲ x ノ任意ノ三ツノ函數ノ和トセヨ.

今 x ガ $x+\delta x$ トナツタ爲,其ノ結果 u ハ $u+\delta u$ ニ,v ハ $v+\delta v$ ニ,w ハ $w+\delta w$ ニナツタトセヨ. 此ノトキ,若シ y ガ $y+\delta y$ トナルナラバ,次ノ結果ヲ得ル.

$$\delta y = \delta u + \delta v + \delta w,$$

及ビ

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta x}.$$

且ツ極限ニ於テハ,　$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}.$$

私ハ §93 ニ於テ,之ヲ證明シナイデ,假定シタ. 即チ之ハ,數個ノ函數ノ和ノ微分係數ハ,各函數ノ微分係數ノ和ニ等シイトイフ事デアル.

次ノ法則ヲ知ツテヲレバ,§94 ノ表ハ大イニ擴張スル事ガ出來ル.

2.　二ツノ函數ノ積ノ微分係數.

u 及ビ v ヲ x ノ函數トシ, $y=uv$ トセヨ. x ガ $x+\delta x$ ニナルトキ,

$$y+\delta y=(u+\delta u)(v+\delta v)=uv+u.\delta v+v.\delta u+\delta u.\delta v.$$ トスル.

邊々相減ジテ　$$\delta y=u.\delta v+v.\delta u+\delta u.\delta v$$

且ツ　$$\frac{\delta y}{\delta x}=u\frac{\delta v}{\delta x}+v\frac{\delta u}{\delta x}+\delta u\frac{\delta v}{\delta x}.$$

今 δx ヲ限リナク小サクシ,從ツテ δu, δv 及ビ δy モ限リナク小ニナルト假定スレバ,(之ハ常ニ吾々ノ仕事デヤル所デアル.)其ノ結果ハ,$\frac{dv}{dx}$ ハ何デアツテモ,$\delta u\frac{\delta v}{\delta x}$ ハ極限ニ於テ 0 トナル. 故ニ,

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

學生ハ次ノヤウナ問題ヲ作ラナケレバナラナイ.

$$u=5x^3,\quad v=2x^4$$

トセヨ.　$$\frac{dv}{dx}=8x^3,\quad \frac{du}{dx}=15x^2.$$

故ニ公式ニ依リ,　$$\frac{dy}{dx}=5x^3\times 8x^3+2x^4\times 15x^2=70x^6.$$

然ルニ, $y=10x^7$ デアルカラ, $\frac{dy}{dx}=70x^6$ デアル事ヲ知ル.

3,　函數ノ商ノ微分係數.

$y=\frac{u}{v}$ トセヨ. 但シ, u 及ビ v ハ x ノ函數デアル,

然ラバ　$$y+\delta y=\frac{u+\delta u}{v+\delta v}.$$

邊々相減ジテ, $$\delta y=\frac{u+\delta u}{v+\delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v.\delta u-u.\delta v}{v^2+v.\delta v},$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{v\dfrac{\delta u}{\delta x}-u\dfrac{\delta v}{\delta x}}{v^2+v.\delta v}.$$

今δxヲ限リナク小サクスレバ,極限ニ於テ,$v.\delta v$ハ0トナル. 故ニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

トナル. 卽チ之ヲ言葉デ言ヘバ,“商ノ微分係數ハ分子ノ微分係數ニ分母ヲ乘ジ,之ヨリ分母ノ微分係數ニ分子ヲ乘ジタ積ヲ減ジタモノヲ,分母ノ自乘デ割レバヨイ.”トナル.

數個ノ說明題ハ容易ニ作ラレル. 例ヘバ,

$u=24x^7$, $v=3x^2$ トセヨ. 或ハ $u=15x^2$, $v=3x^4$.

トセヨ.

§135. 函數ノ函數ノ微分係數

若シ,yガzノ函數トシテ與ヘラレ,其ノzハxノ函數トシテ與ヘラレルナラバ,勿論yハxノ函數デアル. 斯樣ナ場合ニハ,若シxノ代リニ$x+\delta x$ヲトリ,$z+\delta z$ヲ計算シ,又此ノ同ジ$z+\delta z$ヲ以テ$y+\delta y$ヲ計算スルモノトスレバ,其ノδyハδxニ依ツタモノデアツテ,從ツテ

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta y}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}.\qquad\cdots\cdots(1)$$

今δzノヤウニ書イタ二ツノモノハ,其等ガ如何ニ小サクナツテモ同ジデアルト考ヘルト,公式(1)ハδxガ限リナク小サクナツタトキデモ眞デアルコトヲ知ル. 卽チ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.\qquad\cdots\cdots(2)$$

之ハ非常ニ重要ナ公式デアル. 學生ハ各自自分ノ方法デ,之ヲ說明シ

ナケレバナラナイ. 私ハ玆ニ三ツノ曲線ヲ描ク方法ヲ暗示シヨウ. 三ツノ曲線ハ,第一ニyヲzノ函數トシテ表ハス曲線,第二ニzヲxノ函數トシテ表ハス曲線,第三ニyヲxノ函數トシテ表ハス曲線デアル. 學生ハ,yトxトヲ表ハス曲線上ニアル點ノ勾配ハ他ノ二曲線ニ於ケル各對應點ノ勾配ノ積ニ等シイ事ヲ明ラカニ認メナケレバナラナイ.

次ノ例題ハ公式(2)ノ應用デアル.

例 1. $y=e^{ax}$トシ,之ヲ $y=e^u$, $u=ax$ ノ形ニ書ケ.

$$\frac{dy}{du}=e^u,\qquad \frac{du}{dx}=a;$$

故ニ $$\frac{dy}{dx}=e^u\times a=ae^{ax}\qquad(\text{§113 參照}).$$

例 2. $y=\log(a+bx)$, 卽チ $y=\log u$, $u=a+bx$ トセヨ.

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u},\quad \frac{du}{dx}=b;$$

故ニ $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}b=\frac{b}{a+bx}.$$

例 3. $y=\sin(ax+b)$, 卽チ $y=\sin u$, $u=ax+b$ トセヨ.

$$\frac{dy}{du}=\cos u,\quad \frac{dy}{dx}=a;$$

故ニ $$\frac{dy}{dx}=a\cos u=a\cos(ax+b).$$

同樣ニ,若シ $y=\cos(ax+b)$ デアルナラバ,

$$\frac{dy}{dx}=-a\sin(ax+b).$$

§136. 例 題

次ノ例題ハ,此等ノ級ノ如何ナル仕事ニ對シテモ必要デアルトイフノデハナイ. 併シナガラ,私ハ此等ノ例題ヲ與ヘズニハヲラレナイ.

例 1. $$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

トセヨ. 商ノ公式ニ依ツテ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

又若シ $y=\tan ax$, デアルナラバ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{\cos^2 ax}$.

例 2 $x=a\phi-a\sin\phi$, 且ツ $y=a-a\cos\phi$,

デアツテ,且ツxトyトハ「サイクロイド」[1]上ノ點ノ坐標デアルナラバ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\phi}\div\frac{dx}{d\phi}=\frac{a\sin\phi}{a-a\cos\phi}=\frac{\sin\phi}{1-\cos\phi}.$$

例 3. $y=\sin^{-1}x$ トスル. 即チ之ヲ言葉デ言ヘバ, yハ其ノ正弦ガxデアル所ノ角デアル.

故ニ $\qquad x=\sin y,\ \dfrac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$

故ニ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

同様ニ $\qquad y=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ デアルナラバ, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

若シ $\qquad y=\tan^{-1}x$ デアルナラバ, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2};$

デアル事ヲ證明セヨ.

又若シ $\qquad y=\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ デアルナラバ, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{a^2+x^2};$

デアル事ヲ證明セヨ.

例 4. $y=a^x$ トスレバ, $\log y=x\log a.$

y ニ關シテ微分スレバ,

$$\frac{1}{y}=\frac{dx}{dy}\log a,$$

$$\frac{dy}{dx}=y\log a=a^x\log a.$$

例 5. $y=\sqrt{x^2-a^2}$ トシ,之ヲ $y=u^{\frac{1}{2}},\ u=x^2-a^2$ トスレバ,

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}},\quad \frac{du}{dx}=2x,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

例 6. 積ノ例. $\qquad y=e^{ax}\sin(bx+c).$

トセヨ. $\qquad y=uv,$

トスレバ,公式ニ依ツテ,

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

ココニ, $\qquad u=e^{ax},\quad \dfrac{du}{dx}=ae^{ax},$

$$v=\sin(bx+c),\quad \frac{dv}{dx}=b\cos(bx+c).$$

[1] 66 頁及ビ 149 頁參照.

故ニ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=be^{ax}\cos(bx+c)+ae^{ax}\sin(bx+c),$

又ハ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=e^{ax}\{b\cos(bx+c)+a\sin(bx+c)\}.$

例 7. 又ハ $\qquad y=e^{ax}(A\sin bx+B\cos bx).$ $\qquad$ トセヨ.

$$\frac{dy}{dx}=e^{ax}(Ab\cos bx-Bb\sin bx)+ae^{ax}(A\sin bx+B\cos bx),$$

又ハ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=e^{ax}\{(aA-Bb)\sin bx+(Ab+aB)\cos bx\}.$

例 8. $y=e^{3x}\sin 5x$, 又ハ $e^{3x}\cos 5x$ ハ次ノ方程式ヲ滿足スル事ヲ示セ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}34y=0.$$

例 9. $x=e^{-3t}(A\sin 5t+B\cos 5t)$ ハ次ノ方程式ヲ滿足スル事ヲ示セ.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+34x=0.$$

問 題

$x=a$ カラ $x=b$ マデノyノ平均ノ値ハ,面積$\int_a^b y\cdot dx$ヲ$b-a$デ割ツタモノデアル.

極メテ初歩ノ三角法ノ公式ノ二三(§ 28 ノ問題 3 ノ公式)ノ知識ハ,此ノ頁ノ問題ヲヤルノニ必要デアル.

1. $a\cos(qt+e)$,又ハ $a\sin(qt+e)$ ノ全週期Tニ對スル平均値ハ0デアル.

2. $a\sin qt\times b\sin(qt\pm e)$ ノ全週期ニ對スル平均値ハ,$\dfrac{ab}{2}\cos e$ デアル.

3. $a\cos qt\times b\cos(qt\pm e)$ ノ全週期ニ對スル平均値ハ,$\dfrac{ab}{2}\cos e$ デアル.

4. $a\sin qt$ ノ自乘ノ全週期ニ對スル平均値ハ $\dfrac{a^2}{2}$ デアル. (§ 118 ノ脚註參照).

5. 電流 $C=a\sin qt$ ノ實效値ハCノ平方ノ平均値ノ平方根デアル. 即チ實效電流$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$, 即チ 0.707 a デアル.

斯様ニシテ,若シ $C=$ ·414 $\sin qt$ デアルナラバ,電氣技師ハ電流ガ 1000 デアルトイフ. 何トナレバ,彼ハ實効電流ヲ言フ事ニシテヰルカラデアル. 電壓ニ就イテモ同様デアル.

(實效電流)×(實效電壓)×(電流「アムペア」ト電壓「ボルト」トノ間ノ遅滯角,即チ導程ノ角ノ餘弦)=(電力「ワット」)デアルコトハ,上ノ問題(2)又ハ(3)ニ依リ言ヘル. 又 $\cos e$ ヲ**荷重率**トイフ.

§137. 二項定理ト指數定理

次ノ二節ニ於テ,本書印刷中ニ私ガ見出シタ**證明**ヲ述ベヨウト思フ.

一部ノ學生ハ,§95 ニ於テ證明ナシニ**二項定理**及ビ**指數定理**ヲ假定シタ事ヲ不服ニ思フカモ知レナイ. ソシテ著者ノ方法ニハ,一般ニ嚴正ガ缺ケテヰルト嘆クデアラウ. 併シ,初メカラ私ハ次ノ點ヲ示サネバナラナイノデアツタ. 卽チ各學生ハ,先ヅ多クノ練習問題ヲヤツテ,之ニ依リ公式ヲ熟知シナケレバナラナイ. 其ノ後學生ハ,微積分學ヲ使フコトヲ學バネバナラナイ.[1] 斯樣ニスレバ,如何ニ非數學的ナ人デモ,嚴正ナ證明ニ多分興味ヲ持ツヤウニナルデアラウ. 初步ノ學生ガ,如何ニ數學的デアリ,如何ニ賢明デアツテモ,大數學者ヲ滿足サセルヤウナ嚴正サヲ以テ證明ヲ誘導スルコトハ,決シテ出來ナイトイフ事ハ知ツテオカネバナラヌ點デアル.[2]

次ノ解法ハ,普通ニ與ヘラレル程度ニ嚴正デアル. ソレハ始メカラ微積分學ノ概念ヲ用ヒタカラ,非常ニ簡單デアル. 先ヅ §134—§135 デヤツタヤウニ,微ノ微分ニ關スル簡單ナ公式ヲ證明セヨ. マタ,若シ u ガ x ノ函數デアルナラバ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

デアルコトヲ證明セヨ.

§138. $y=x^n$ ノ微分係數ノ一般的證明

$y=x^n$ デアルトキ, $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$ ナルコトヲ證明スル事.

之ガ n ノ 2 又ハ 3 ノトキ,眞デアル事ハ直チニ(§89 ノヤウニシテ)

[1] 之ハ原著者ガ數學敎育ニ對スル理想デアツテ,一々嚴正ナ證明ヲ經ナイデハ,ヨシソノ結果ガ知レテヰテモ,其ノ定理ヲ使用シテハナラナイトスル演繹推理一點張リノ今日ノ數學敎育ヲ著者ハ排シテ"時計ノ構造ヲ知ラナクテハ,時計ヲ使用シテハナラヌトイフ事ハナイ"ト言ツテヰル所デアル. (121頁初行參照.)

[2] 之ハ敢テ初學者ヲ貶ス意味デハナク,嚴正トイフモ相對的ノモノデ, 絕對ノ嚴正ハ神ノ外ニ知ル人ノナイ事ヲ言ツタマデデアル.

證明スルコトガ出來ル. 私ハ先ヅ,n ガ任意ノ正ノ整數デアルトキニ之ガ眞デナケレバナラナイ事ヲ證明シヨウ.

(a) 此ノ公式ガ $n=r$ ノトキニ眞デアルトセヨ. 然ラバ $n=r+1$ ノトキニモ,亦之ガ眞デナケレバナラナイ事ヲ示サウ.

$$y=x^{r+1}=x\times x^r,$$

トセヨ. 積ノ公式ニ依ツテ,

$$\frac{dy}{dx}=x^r+rx^{r-1}\times x=(r+1)x^r.$$

此ノ公式ハ $r=2$ ノトキニ眞デアルカラ,之ハ $r=3$ 又ハ $r=4$ ノトキニモ眞デアリ,從ツテ r ガ任意ノ正ノ整數ノトキニ眞デナケレバナラナイ.[1]

(b) $y=x^{\frac{p}{q}}$ トセヨ. 但シ p 及ビ q ハ任意ノ正ノ整數デアル. 然ラバ $y^q=x^p$ デアリ,之ヲ

$$y^q=x^p=z,$$

トセヨ.

微分シテ, $$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=qy^{q-1}\frac{dy}{dx}=px^{p-1}$$

之ヲ簡單ニスレバ, $$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

故ニ,n ガ任意ノ正ノ整數或ハ分數ノトキニ,此ノ公式ハ眞デアルコトヲ證明シタ.

(c) $y=x^{-m}$ トセヨ. 卽チ $yx^m=1$.

此ノ積ヲ微分シテ $$\frac{dy}{dx}x^m+ymx^{m-1}=0.$$

之ヲ簡單ニスレバ $$\frac{dy}{dx}=-mx^{-m-1}.$$

卽チ,此ノ公式ハ一般ニ眞デアルコトガ證明サレタ.

§139. 指數定理ノ證明

[1] 此ノ證明法ヲ**數學的歸納法**トイフ.

次ニ,**指數**ニ關スル公式ヲ證明シ,之ニ附隨シテ a^x ヲ x ノ冪級數ニ展開スル所ノ指數定理ヲ證明ショウ. 今次ノヤウナ展開式ガアルモノトスル. 卽チ

$$y=a^x=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots\cdots, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

且ツ今, A, B 等[1]ノ値ヲ求メナケレバナラナイモノトスル. 上式ハ x ノ總テノ値ニ對シテ眞デアルカラ, $x=0$ ノトキニモ眞デアル. 從ツテ $a_0=A=1$.

$$y+\delta y=a^{x+\delta x},$$

故ニ
$$\delta y=a^{x+\delta x}-a^x=a^x(a^{\delta x}-1).$$

$a^{\delta x}$ ヲ(1)ニ依ツテ展開スレバ,

$$\delta y=a^x\{B\cdot\delta x+C\cdot(\delta x)^2+D\cdot(\delta x^3)+\cdots\cdots\}. \quad\cdots\cdots(2)$$

故ニ
$$\frac{\delta y}{\delta x}=a^x\{B+C\cdot\delta x+D\cdot(\delta x)^2+\cdots\cdots\}.$$

今 δx ヲ限リナク小サクスレバ,

$$\frac{dy}{dx}=Ba^x. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

之ヲ(1)ニ適用スレバ,

$$\frac{d}{dx}(1+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots\cdots)=B(1+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots\cdots),$$

$$B+2Cx+3Dx^2+\cdots\cdots=B+B^2x+BCx^2+BDx^3+\cdots\cdots.$$

此ノ恒等式ニ於テ,相對應スル項ヲ等シイトオイテ,

$$2C=B^2, \text{卽チ } C=\frac{1}{2}B^2;\ 3D=BC, \text{卽チ } D=\frac{1}{6}B^3.$$

故ニ
$$a^x=1+Bx+\frac{B^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{B^3x^3}{\underline{|3}}+\frac{B^4x^4}{\underline{|4}}+\cdots. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

今 $Bx=z$, 從ツテ $x=\frac{z}{B}$ トスレバ,

$$a^{\frac{z}{B}}=1+z+\frac{z^2}{\underline{|2}}+\frac{z^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$a^{\frac{1}{B}}$ ヲ e トスレバ,

(1) 此等ハ未知ノ常數デアツテ,之ヲ**未定係數**トイフ. 從ツテ此ノ如キ方法ヲ**未定係數ノ法**ト呼ブ.

$$\frac{1}{B}\log_e a=1, \text{ 卽チ } B=\log_e a.$$

B ノ此ノ値ヲ以テ, (4)ハ指數定理ノ普通ノ形デアル. 又(3)ハ, $y=a^x$ デアルナラバ,

$$\frac{dy}{dx}=a^x\log_e a$$

トナル.

卽チ若シ, $y=e^x$ デアルナラバ, $\frac{dy}{dx}=e^x$. 勿論, z ノ代リニ x ヲ用ヒレバ,(5)ハ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

之ハ證明ナシデ, §95 ニ與ヘタ級數デアル.

(6)ニ於テ, $e=1$ トスレバ, e ノ値ハ如何程デモ正確ナ値ヲ計算スルコトガ出來ル. $x=1$ トスレバ

$$e=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots.$$

指數定理〔之ハ近世ノ對數計算ノ基礎デアル.〕ノ普通ノ代數的證明[1]デ滿足スルヤウナ考ヘ深イ青年ハ未ダ見タ事ガナイ. 併シ,玆ニ用ヒタヤウナ微積分學ノ考ヘヲ用ヒル事サヘ許サレテヰタナラバ,彼青年ガ抱クヤウナ不滿足ヤ不安ナドノ普通ノ感情ハ少シモ持タナカツタデアラウ. 斯樣ナ感情ヲ起ストイフノハ,主トシテ用ヒラレタ手段ガ餘リ技巧的複雜デアツタ事ニ基クモノデアル.

§140. 對數函數ノ微分

最後ニ
$$y=\log(a+x),$$

トセヨ. 之ハ
$$a+x=e^y,$$

ト同一デアル. x ニ關シテ微分シテ,次ノ式ヲ得ル.

$$1=e^y\frac{dy}{dx}.$$

卽チ
$$1=(a+x)\frac{dy}{dx}, \text{ 又ハ } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a+x}.$$

(1) 例ヘバ,「チヤールス・スミス大代數」ニアルヤウナ.

§141. 微分ニ關スル例題

(1) $\sin x$ 及ビ $\cos x$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ.

$$\sin x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + Ix^8 + Jx^9 + \cdots\cdots,$$

ト假定セヨ, ココニ $A, B, C \cdots\cdots$ ハ未知ノ常數デアル. 之ヲ微分シテ,

$$\cos x = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + 7Hx^6 + 8Ix^7 + 9Jx^8 + \cdots\cdots$$

ヲ得ル. 更ニ之ヲ微分シテ,

$$-\sin x = 2C + 6Dx + 12Ex^2 + 20Fx^3 + 30Gx^4 + 42Hx^5 + 56Ix^6 + 72Jx^7 + \cdots\cdots.$$

此等ノ式ノ中,第一式ト第三式トニ於ケル對應スル項ヲ等シイト置キ,且ツ第三式ガ總テ負デアル事ヲ考ヘテ,

$$2C = -A,\ 6D = -B,\ 12E = -C,\ 20F = -D,$$

$$30G = -E,\ 42H = -F,\ 56I = -G,\ 72J = -H, \cdots\cdots.$$

サテ　$x=0$ ノトキ, $\sin x = 0$; 故ニ $A = 0$.

$x=0$ ノトキ, $\cos x = 1$; 故ニ $B = 1$.

$$C = 0,\ E = 0,\ G = 0,\ I = 0,\ 等;$$

從ツテ

$$D = -\frac{1}{6},\ F = \frac{1}{120},\ H = \frac{-1}{|\underline{7}},\ J = \frac{1}{|\underline{9}}\ 等.$$

故ニ次ノ展開式ヲ得ル.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{|\underline{3}} + \frac{x^5}{|\underline{5}} - \frac{x^7}{|\underline{7}} + \frac{x^9}{|\underline{9}} - \cdots\cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^4}{|\underline{4}} - \frac{x^6}{|\underline{6}} + \cdots\cdots\cdots\cdots.$$ [1]

此等ハ證明シナイデ, §28 ノ例 7 ニ與ヘタ級數デアル.

(2) $\log(1+x)$ ヲ x ノ冪ニ展開セヨ.

$$\log(1+x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \cdots\cdots.$$

(1) 此等ハ卽チ**正弦級數**, **餘弦級數**デアル. 其ノ一般項ハ夫々 $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{|\underline{2n+1}}, (-1)^n \frac{x^{2n}}{|\underline{2n}}$ デアル.

トスル. 兩邊ヲ微分シテ,

$$\frac{1}{1+x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + \cdots\cdots\cdots$$

ヲ得ル. 然ルニ單ニ左邊ノ除法ヲ行ツテ,次式ヲ得ル.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \cdots\cdots.$$

此等ノ恒等式ニ於テ,各對應項ノ係數ヲ等シイトオケバ,

$$B = 1,\ C = -\frac{1}{2},\ D = \frac{1}{3},\ E = -\frac{1}{4},\ F = \frac{1}{5},\ G = -\frac{1}{6},\ 等.$$

次ニ $x=0$ ノトキ, $\log(1+x) = \log 1 = 0$.

故ニ A ハ 0 デアル. 故ニ

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots\cdots\cdots.$$ [1]

ヲ得ル. $\log(1-x)$ ヲ展開シテ書キ下シ,邊々相減ジテ $\log\frac{1+x}{1-x}$ ヲ求メ,[2] 然ル後 x ノ代リニ $\frac{m-n}{m+n}$ ト書クカ,又ハ其ノ他ノ代入[3]ニ依リ,對數表ヲ速ク作製スルニ用ヒラレル級數ヲ得ル.[4]

他ニ尙多クノ興味アル級數ガ,上ノ方法デ求メラレル. 併シ普通ハ任意ノ函數ヲ所謂テーラーノ定理ニ依ツテ級數ニ展開スル.

(1) 此ノ展開式ハ $|x|<1$ ナル條件ヲ必要トスル. 一般項ハ $(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

(2) $$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \cdots\cdots\right].$$

(3) $x = \frac{1}{2n+1}$ トオケ. $\left[卽チ\ \frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{x}.\quad 但シ\ |n|<1\right]$.

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2\left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots\right],$$

卽チ $$\log(n+1) = \log n + 2\left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots\right].$$

之ニ依リ n ノ對數ヲ知レバ, 順次 $n+1, n+2, \cdots\cdots\cdots$ ノ對數ヲ得ル.

或ハ次ノ如クオクノモヨイ.

$$\frac{1+x}{1-x} = a.\quad 卽チ\quad x = \frac{a-1}{a+1}.$$

$$\log a = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\cdots\cdots\right],\quad a>0.$$

(4) 項數ヲ少クトツテ早ク收斂スル式デナクテハ對數表作製ノ計算ニハ用ヲナサヌ事ヲイツタノデアル.

§142 テーラーノ定理

次ニ,**テーラーノ定理**[1]ヲ證明シヨウ. ラグランジュ[2]ハコノ定理ヲ嚴密ニ證明シタ最初ノ人デアル. 併シ,今日ニ到ツテモ未ダ完全ニ嚴密ナ證明ハナイ.[3] 私ハ普通ノ嚴密デナイ證明ヲ述ベル. 無限級數ニ於ケル展開ハ,若シ其ノ級數ガ發散[4]スルナラバ,數學者ニトツテ何ノ意味モ持タナイト云フ事ヲ記憶シナケレバナラナイ. 特ニ,代數學ニ於テハ,$\sqrt{-1}$ ハ意味ヲ持タナイ. 併シ,第二十八章カラ第三十六章マデニ $\sqrt{-1}$ ハ代數學ト牴觸シナイ所ノ或ル意味ヲ與ヘルトキニハ,$\sqrt{-1}$ ハ極ク有用ナモノニナルト云フ事ヲ示シテキル. ヘヴィサイド氏ハ發散級數ヲヨク利用シタ. 彼ハソレニヨツテ,最モ困難ナ問題ヲ正シク解イタ.[5] 又彼ノ答ガ正確デアル事ハ知ラレテキル. 併シ,數學者ハヘヴィサイドノ方法ヲ輕蔑スル. 而カモ彼等數學者ノ正統ノ方法タルヤ,此等ノ問題ノ最モ初歩ノ問題ヲサヘモ解クコトガ出來ナイノデアル.[6]

「テーラーノ定理」ノ證明. 若シ $x+h$ ノ函數ヲ,h ヲ常數ト考ヘテ,x ニ關シテ微分スレバ,其ノ結果ハ x ヲ常數ト考ヘテ,h ニ關シテ微分シタ結果ト同ジデアル.

何トナレバ,$u=x+h$ トシテ,其ノ函數ヲ $f(u)$ トスレバ,

(1) 英人 Brook Taylor (1685—1731) ノ 1715 年發見スル所デアル.

(2) Joseph Louis Lagrange(1736—1813),佛國ノ大數學者.

(3) 完全トイフ言葉ノ意味ニモヨルガ,獨逸ノプリングスハイム Pringsheim ノ研究ハ,十分ニ嚴密ナモノト言ウテ宜シカラウ.

(4) 項數 n ガ限リナク大キクナルトキ,級數ノ總和 S_n ガ或ル一定ノ有限値 S ニ近迫スルトキハ,此ノ級數ハ**收斂スル**トイヒ,然ラザル場合ニハ級數ハ**發散スル**トイフ.

(5) ヘヴィサイドノ記號的方法ノ系統的研究ニ就イテハ,例ヘバ H. Jeffreys, Operational methods in mathematical physics (1927) ヲ見ヨ.

(6) 幾近ニ至ツテ漸ク或ル種類ノ問題ハ解キ得ルヤウニナツタ. 前揭書及ビ Mathematical Gazette (1928), 十月號參照.

$$\frac{d}{dx}f(u)=\frac{d}{du}f(u)\times\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}f(u),\quad 但シ\ \frac{du}{dx}=1,$$

而シテ,之ハ $\frac{d}{dh}f(u)$ ト同ジデアル. 何トナレバ,

$$\frac{d}{dh}f(u)=\frac{d}{du}f(u)\times\frac{du}{dh}=\frac{d}{du}f(u),\quad 但シ\ \frac{du}{dh}=1.$$

今 $f(x+h)$ ヲ h ノ昇冪ノ級數ニ展開シタモノトシ,之ヲ

$$f(x+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3+Eh^4+\cdots\cdots,\ \cdots\cdots(1)$$

トスル. 但シ A,B,C 等ハ x ノ函數デアツテ,h ヲ含マナイ.

$$\frac{d}{dh}f(x+h)=B+2Ch+3Dh^2+4Eh^3+\cdots\cdots,\ \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{d}{dx}f(x+h)=\frac{dA}{dx}+h\frac{dB}{dx}+h^2\frac{dC}{dx}+h^3\frac{dD}{dx}+\cdots\cdots,\ \cdots\cdots(3)$$

(2) ト (3) トハ同一デアルカラ,相對應スル項ヲ等シイト置ク事ガ出來ル. カクテ次ノ關係ヲ得ル.

$$B=\frac{dA}{dx},\quad C=\frac{1}{2}\frac{dB}{dx}=\frac{1}{\underline{|2}}\frac{d^2A}{dx^2},\quad D=\frac{1}{3}\frac{dC}{dx}=\frac{1}{\underline{|3}}\frac{d^3A}{dx^3},\quad \cdots.$$

又 (1) ニ於テ,$h=0$ トスレバ,$A=f(x)$ ヲ得ル. 今 $f(x)$ ヲ x ニ關シテ一回,二回,三回,等,微分シタ結果ヲ,$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, 等ト書ケバ,之レ即チテーラーノ定理デアツテ,次ノ通リデアル.

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x)+\frac{h^3}{\underline{|3}}f'''(x)+\cdots\cdots,\ \cdots\cdots(4)$$

次ニ $f(x)$ ヲ一回,二回,等,微分シテ後,x ノ代リニ 0 ヲ代入シタ結果ヲ $f'(0)$, $f''(0)$, 等トセヨ. 今 (4) ニ於テ,$x=0$ ヲ代入シタトスレバ,次ノ結果ヲ得ル.

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(0)+\frac{h^3}{\underline{|3}}f'''(0)+\cdots\cdots,\ \cdots\cdots(5)$$

此ノ式ニ於テハ,最早ヤ x ト呼ンダ量ニ關係シテキルモノハ何モナイ點ヲ觀察セヨ. (5) ニ於テ,h 以外ノ文字ヲ思フママニ使用シテモヨイ. 今新ラシイ文字 x ヲ h ノ代リニ使用スレバ,(5) ハ次ノヤウニナル.

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\underline{|2}}f''(0)+\frac{x^3}{\underline{|3}}f'''(0)\cdots\cdots,\ \cdots\cdots(6)$$

コレ即チ**マクローリン[1]ノ定理**デアル.

例 1. $(x+h)^n$ ヲ,テーラーノ定理ニヨツテ, h ノ羃ニ展開セヨ. 其ノ結果ヲ**二項定理**ト云フ.

例 2. $\log(x+h)$ ヲ,テーラーノ定理ニヨツテ, h ノ羃ニ展開セヨ. 其ノ結果ニ於テ, $x=1$ トセヨ. 此ノ $\log(1+h)$ ノ展開ハ §141 ニ於テ,別法デ得タ所デアル.

例 3. $\sin(x+h)$ 及ビ $\cos(x+h)$ ヲ,テーラーノ定理ニヨツテ, h ノ羃ニ展開セヨ. 其ノ結果ニ於テ, $x=0$ トセヨ. 吾々ハ既ニ此等ノ答ヲ知ツテキル. 而シテコレハ又次ノ二問題ノ答デアル.

例 4. $\sin x$ ヲ,マクローリンノ定理ニヨツテ, x ノ羃ニ展開セヨ.

例 5. $\cos x$ ヲ,マクローリンノ定理ニヨツテ, x ノ羃ニ展開セヨ.

例 6. $\sin\phi$ 及ビ $\cos\phi$ ヲ ϕ ノ羃ニ展開セヨ. 又若シ, i ヲ $\sqrt{-1}$ トスレバ, §28 ノ(6)ニヨツテ, $e^{i\phi}$ 及ビ $e^{-i\phi}$ ヲ展開シタモノハ

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi,\quad e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi.$$

デアル事ヲ證明セヨ.

例 7. 例 6 ニ於ケル各式ヲ n 乘シテ

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi,$$
$$(\cos\phi-i\sin\phi)^n=\cos n\phi-i\sin n\phi,$$

ナル事ヲ證明セヨ. コレ即チ**ドモアヴル[2]ノ定理**デアル.

三角法ノ書物ニ與ヘラレテキル此ノ定理ノ證明ハ極メテ容易デアル. ソレハ次式ヲ證明スル事ニ始マツテキル.

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)=\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi).$$

而シテ,コレハ例 6 ノ答ニヨツテ,勿論明ラカデアル.

例 8. ドモアヴルノ定理ヲ用ヒテ, 27 ノ三ツノ立方根ヲ求メヨ. 即チ換言スレバ,方程式 $x^3-27=0$ ノ三根ヲ求メヨ.

解. 根ノ一ツハ 3 デアルカラ, $x-3$ ハ x^3-27 ノ因數デナケレバナラナイ. 上ノ方程式ヲ $x-3$ デ割ツテ

(1) Colin MacLaurin (1698—1746). スコツトランドノ數學者デアル. 此ノ定理ハ 1742 年ノ發見ニ係ル.

(2) De Moivre (1667—1754); 英國ノ數學者.

$$x^2+3x+9=0$$

ヲ得ル. 此ノ二次方程式ノ根ハ

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-9}=-1.5\pm 2.6\,i$$

デアル.

併シドモアヴルノ定理デ,例ヘバ, 27 ハ,

$$27(\cos 0+i\sin 0),\text{ 又ハ } 27(\cos 2\pi+i\sin 2\pi),\text{ 又ハ } 27(\cos 4\pi+i\sin 4\pi).$$

ト書カレル. 此等ノ立方根ハ次ノ通リデアル.

$$3\cos 0,\text{ 即チ } 3;\ 3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\text{ 即チ } 3(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ),$$
$$\text{即チ } 3(-0.5+0.866\,i),\text{ 即チ } -1.5+2.6\,i;$$
$$3(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ),\text{ 即チ } 3(-0.5-0.866\,i),\text{ 即チ } -1.5-2.6\,i.$$

此等ハ唯三ツノ立方根ニ過ギナイ. 若シ 27 ヲ

$$27(\cos 6\pi+i\sin 6\pi)$$

ト書クカ,又ハモツト高イ値ヲ用ヒルトモ,此等ト同ジ結果ヲ得ル.

§143. 偏微分

是マデ吾々ハ一般ニ x ト呼ンダ所ノ一ツノ變數ノ函數ヲ研究シテ來タ. 今若シ, u ガ**二ツノ獨立變數ノ函數**,例ヘバ $u=f(x,y)$ デアルナラバ, y ヲ常數ト假定シテ $\frac{du}{dx}$ ヲ求メル事ガ出來ル. 私ハ之ヲ $\left(\frac{du}{dx}\right)$ ト書ク. 併シ偏微分デアル事ガ明ラカデアル場合ニハ單ニ $\frac{du}{dx}$ ト書ク.

例ヘバ,第三十四章熱ノ傳導ノ問題ニ於テ, v ハ深サ x ニ於ケル一點ノ時間 t ニ於ケル溫度デアル. 玆ニ v ハ x ト t トノ函數デアル.

$\frac{d^2v}{dx^2}$ ハ t ヲ常數ト假定シテ計算サレ,又 $\frac{dv}{dt}$ ハ x ヲ常數ト假定シテ計算サレル. 故ニ若シ, $v=e^{ax+bt}$ デアルナラバ,

$$\frac{dv}{dt}=be^{ax+bt},\quad \frac{d^2v}{dx^2}=a^2e^{ax+bt}.$$

吾々ノ實驗ニ於テハ,一ツノ物 u ヲシテ唯一ツノ他ノ物 x ノミ

ニ從屬セシメルヤウニスル．例ヘバ,氣體法則ノ觀測ニ於テ,氣體1封度ノ壓力ヲ p トシ,體積ヲ v トシ,溫度ヲ t (但シ $t=\theta°C+273$) トシ,又若シ t ヲ一定トスルナラバ, $p\propto\frac{1}{v}$ ナル法則ノアル事ヲ知ル．若シ v ヲ一定トシテ,溫度ヲ變ズルナラバ, $p\propto t$ ナル事ヲ知ル．幾度カ實驗ヲシタ結果, $pv=Rt$ ナル法測ハ非常ニ眞ニ近イモノデアル事ヲ知ル．但シ, R ハ既知ノ常數デアツテ,例ヘバ,若シ v ガ立方呎ヲ示シ, p ガ1平方呎ニツイテノ封度ヲ示スナラバ,空氣ニ對スル R ノ値ハ96デアル．玆ニ p, v, 又ハ t ノ三ツノ中ノ一ツハ,他ノ二ツノ函數デアル．又實際ニ如何ナル値デモ任意ノ値ヲ此等ノ二ツニ與ヘルナラバ,他ノ一ツハ求メル事ガ出來ル．即チ,

$$p=R\frac{t}{v}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

p ハ二ツノ獨立變數 t 及ビ v ノ函數デアルト云フ事ガ出來ル．(1)ニ於テ, t 及ビ v ニ如何ナル特殊ナ値ヲ與ヘテモ, p ヲ計算スル事ガ出來ル．今新ラシイ値,例ヘバ, $t+\delta t$ 及ビ $v+\delta v$ ヲ採レ．但シ, δt ト δv トハ,タトヒ此等ガ如何ナル値デアツテモ,互ニ全ク無關係デアル．カクスレバ,

$$p+\delta p=R\frac{t+\delta t}{v+\delta v},\ \text{及ビ}\ \delta p=R\frac{t+\delta t}{v+\delta v}-R\frac{t}{v}.$$

從ツテ,獨立ノ變化 δt 及ビ δv ガ解カレバ,變化 δp ハ計算シ得ル事ヲ知ル．

總テノ變化ガ限リナク小サクナルト考ヘラレルトキニ, δt ト δv ノ項デ δp ヲ表ハス容易ナ方法ヲ得ル．ソレハ

$$\delta p=\left(\frac{dp}{dt}\right)\delta t+\left(\frac{dp}{dv}\right)\delta v,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

デアル．此ノ式ノ證明ハ容易デアル．

學生ハ,此ノ事ヲ次ノヤウナ言葉デ述ベネバナラナイ．"p ニ於ケル全體ノ變化ハ二ツノ部分カラ成立ツテキル．(第一ハ)タトヒ, v ガ變化シナイデモ p ニ起ル變化デアリ,(第二ハ)タトヒ, t ガ變化シナイデモ p ニ起ル變化デアル．"

記號 $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ ハ, v ガ一定デアルトキノ t ニ對スル p ノ增加ノ割合ヲ意味シ,記號 $\left(\frac{dp}{dv}\right)$ ハ, t ガ一定デアルトキノ v ニ對スル p ノ增加ノ割合ヲ意味スル．時トシテハ此ノ**偏微分**ノ括弧ノ代リトシテ,記號 $\frac{\partial p}{\partial t}$ 及ビ $\frac{\partial p}{\partial v}$ ヲ用ヒル．[1]

次ニ學生ハ,若シ δt 及ビ δv ノ非常ニ小サイ値ニ對シテデナイナラバ,(2)ハ誤ツテキル事ヲ心得テオカネバナラナイ．

例示． 空氣1封度ヲ取レ．此ノ場合 R ハ96デアル．

$p=96\frac{t}{v}$ デアルカラ,

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{96}{v},\quad \frac{\partial p}{\partial v}=-\frac{96t}{v^2}=-\frac{p}{v}.$$

故ニ(2)ハ

$$\delta p=\frac{96}{v}\cdot\delta t-\frac{p}{v}\cdot\delta v.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

例題． $t=300$, $p=2000$, $v=14.4$ トセヨ．此等ノ値ハ $p=96\frac{t}{v}$ ナル法則ヲ滿足スル事ガ解ル．今 $t+\delta t=301$ (即チ $\delta t=1$ トセヨ.), $v+\delta v=14.5$ (即チ $\delta v=0.1$.) トセヨ. $p+\delta p=1992.82$, 即チ $\delta p=-7.18$ デアル事ハ容易ニ解ル．コレハ眞ノ答デアル．併シ(3)ヲ使ヘバ

$$\delta p=\frac{96}{14.4}\times 1-\frac{2000}{14.4}\times 0.1=-7.22$$

トナル事ヲ知ル．コレハ誤ツタ答デアル．

若シ, δt 及ビ δv ニ對シテモツト小サイ値ヲ使フナラバ,(3)ニヨツテ一層正確ニ近イ答ヲ得ル．併シ,(3)ハ δt 及ビ δv ガ限リナク小サクナルト想像スルトキニノミ正シク答ヲ與ヘルノデアル．

[1] コノ譯書デハ後ノ記號ヲ用ヒルコトニスル．

第三十三章　虚量ニ關スル問題

§144. 虚數ノ計算

次ノ問題ハ,大體第三章ノ終リニ配當スベキモノデアツテ,本書ノ初メノ部分ニ於ケル他ノ練習問題ヲ解ク學生デ,解ケナイヤウナ問題ハ殆ンドナイ. 併シ,總テノ學生ガ此等ノ問題ヲヤラネバナラヌ必要ハナイカラ,此處ニ配置スルノデアル. 此ノ種類ノ問題ヲ解クコトニ全ク熟練シ切ルノデ無クテハ,本書ノ一層進ンダ問題ニ手ヲツケテモ無效デアル.

本書ノ終リマデ,問題中ニ屢々$\sqrt{-1}$ヲ含ムガ,之ヲ常ニ i ト呼ブコトニシヨウ. 斯様ナ問題ハ普通ノ學生ガヨク等閑ニ附スル. 併シ次ノヤウナ學生ハ,例ヘバ,物體ノ振動或ハ交流電氣ノ研究ニ進ンダリ,又電話機ノ電路ノ研究ニ進ム學生ハ,此等ノ虚量ニ關スル知識ガ必要デアルコトガ解ルデアラウ. 本節ノ二三ノ問題ヲヤルニモ,學生ハ簡單ナ聯立二次方程式ヲ解クコトガ出來ナケレバナラヌガ,カヤウナ問題ハ現ニ極メテ容易ナ方法デヤルコトガ出來ルデアラウ.

例 1. 若シ, i ガ $\sqrt{-1}$ ヲ表ハスモノトスレバ,次ノ値ガ正シイコトヲ示セ.

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i,\quad i^6=i^2=-1,\quad i^7=i^3=-i,\quad i^8=1.$$

例 2. $\sqrt{17+30i}$ ノ値ヲ求メヨ.

解. 之ハ $a+bi$ ノ形ニナルトイフコトガ解ル. ソコデ a ヤ b ヲ求メナケレバナラヌ.

$$17+30i=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi.$$

實數部ハ實數部デ,虚數部ハ虚數部デ夫々等シイトオケ. 卽チ

$$a^2-b^2=17,\qquad 2ab=30.$$

之ヨリ　　$a=5.073,\qquad b=2.96$

ヲ得ル. 故ニ　　$\sqrt{17+30i}=5.073+2.96i.$

例 3. $\sqrt{i}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, 卽チ $0.707+0.707i$ デアルコトヲ示セ.

例 4. $\dfrac{1}{\sqrt{i}}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, 卽チ $0.707-0.707i$ デアルコトヲ示セ.

例 5. $\sqrt{\dfrac{5+3i}{2-5i}}$ ノ値ヲ求メヨ.

解. 之ヲ $a+bi$ トオキ, a, b ノ値ヲ求メヨ.

卽チ,カクシテ兩邊ヲ自乘スレバ,

$$\frac{5+3i}{2-5i}=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi,$$

$$5+3i=2(a^2-b^2)+10ab+\{4ab-5(a^2-b^2)\}i.$$

故ニ實數部ト虚數部トヲ夫々等シイトオキ,

$$2(a^2-b^2)+10ab=5,\quad 4ab-5(a^2-b^2)=3.$$

此等ヨリシテ $a=0.6747$, $b=0.7927$ デアルコトヲ知リ,從ツテ,答ハ

$$0.6747+0.7927i.$$

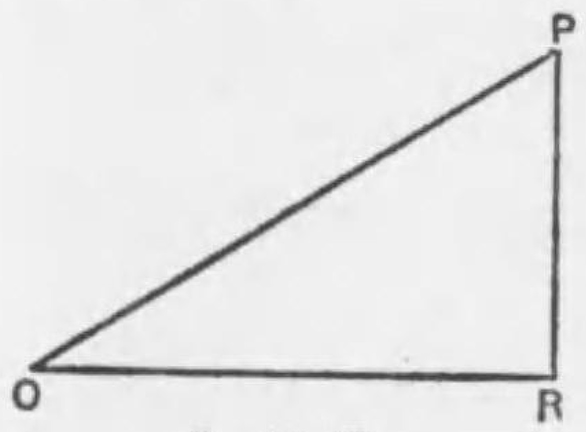
例 6. $5+4i$ ノ平方根ヲ求メヨ.　　　**答** $2.339+0.8365i.$

例 7. $-2.35+1.96i$ ノ立方根ヲ求メヨ.　　　**答** $0.9959+1.0567i.$

上ノヤウナ練習問題ハ,次ノ方法ヲ用ヒルト極メテ容易ニ出來ル.

§145. 三角函數ノ意義

任意ノ角ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲタヤスク求メルコトノ出來ル學生ニトツテハ,次ノ方法ハ容易デアル. 此等ノ術語ノ復習ヲスル爲ニ,§34 ヲ再ビ參照ショウ.



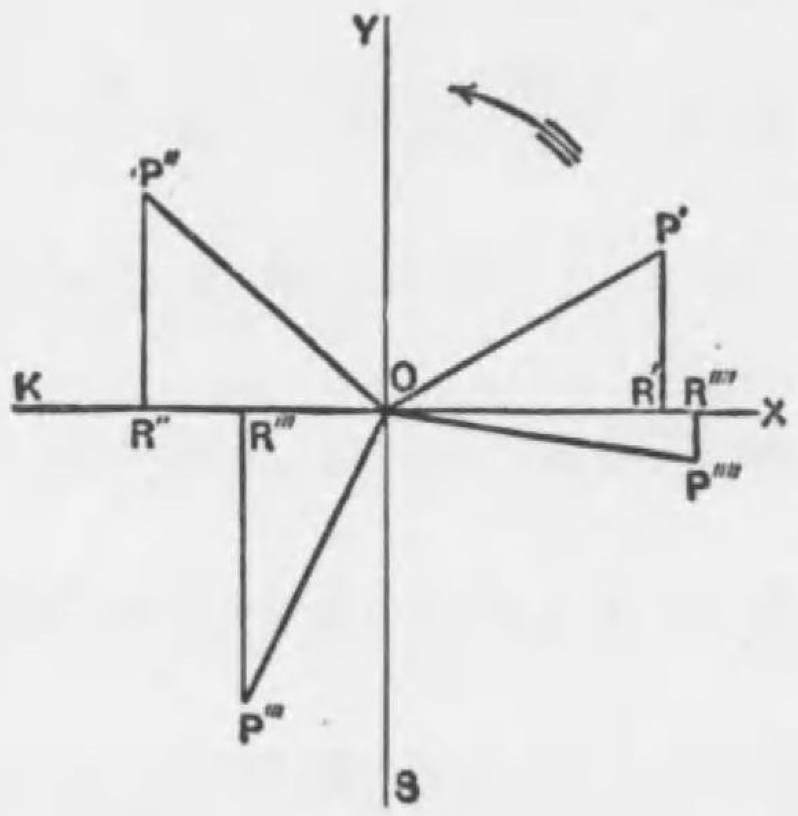
第 46 圖

第 46 圖ニ於テ, OP ノ長サヲ 1 吋トスレバ, PR ノ長サ(吋)ハ角 POR ノ正弦(sine)デアリ, OR ノ長サ(吋)ハ其ノ角ノ餘弦(cosine)デアル. PR ヲ y ト名ヅケ, OR ヲ x ト名ヅケヨウ. サウスルト, y ハ角 POR ノ正弦デアツテ, x ハ同角ノ餘弦デアル. 又 $y \div x$ ハ其ノ角ノ正切(tangent)デアル.

角ノ正弦等ノ求メ方.

互ニ直角ニ交ル二直線 XOK, YOS ヲ引ケ(第47圖).角ヲ XOP', XOP'', XOP''' 或ハ XOP'''' トセヨ.

角ハ常ニ OX カラ時計ノ針ト反對ノ方向ニ測ル. XOP' ハ第一



第 47 圖

象限ニアルトイフ．然ラバ卽チ其ノ角ハ 0° カラ 90° マデノ間ニアル．又 XOP'' ハ第二象限ニアルトイフナラバ,卽チ其ノ角ハ 90° カラ 180° マデノ間ニアル．又 XOP''' ハ第三象限ニアルトイフナラバ,卽チ其ノ角ハ 180° カラ 270° マデノ間ニアル．又 XOP'''' ハ第四象限ニアルトイフ．然ラバ卽チ其ノ角ハ 270° カラ 360° マデノ間ニアル．

何レノ場合デモ, OP', OP'', OP''' 或ハ OP'''' ハ長サヲ1吋ニスル．XOK カラノ P ノ垂直距離ヲ y ト呼バウ．卽チ之ハ其ノ角ノ正弦デアル．P ガ XOK ヨリ上ニニアルトキハ y ハ正デアツテ, P ガ XOK ヨリ下ニニアルトキハ y ハ負デアル．YOS カラノ P ノ水平距離ヲ x ト呼バウ．卽チ之ハ其ノ角ノ餘弦デアル．P ガ YOS ヨリ右ニアルトキハ x ハ正デアツテ, P ガ YOS ヨリ左ニアルトキハ x ハ負デアル．又 $y \div x$ ハ其ノ角ノ正切デアル．

學生ハ 0° カラ 360° マデノ間ノ大サヲ有スル角ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求メル練習ヲナサネバナラヌ．第一ニ,四ツノ象限ニアル角ヲ描イテ見テ,正弦等ヲ求メルガヨイ．

A ガ 90° ヨリ大デ 180° ヨリ小ナル角デアルトキ,卽チ第二象限ノ角デアルナラバ,次ノヤウニナル事ヲ記憶スルノハ大イニ助ケトナル．

$$\sin A=\sin(180^\circ-A),$$
$$\cos A=-\cos(180^\circ-A),$$
$$\tan A=-\tan(180^\circ-A).$$

故ニ
$$\sin 160^\circ=\sin 20^\circ=0.3420,$$

$$\cos 160^\circ=-\cos 20^\circ=-0.9397,$$
$$\tan 160^\circ=-\tan 20^\circ=-0.3640.$$

又,第三象限ニ於テハ,

$$\sin A=-\sin(A-180^\circ),$$
$$\cos A=-\cos(A-180^\circ),$$
$$\tan A=\tan(A-180^\circ).$$

故ニ
$$\sin 210^\circ=-\sin 30^\circ=-0.5000,$$
$$\cos 210^\circ=-\cos 30^\circ=-0.8660,$$
$$\tan 210^\circ=\tan 30^\circ=0.5774.$$

又,第四象限ニ於テハ,

$$\sin A=-\sin(360^\circ-A),$$
$$\cos A=\cos(360^\circ-A),$$
$$\tan A=-\tan(360^\circ-A).$$

故ニ
$$\sin 320^\circ=-\sin 40^\circ=-0.6428,$$
$$\cos 320^\circ=\cos 40^\circ=0.7660,$$
$$\tan 320^\circ=-\tan 40^\circ=-0.8391.$$

又,負角ニ就イテハ,次ノ事ヲ記憶セネバナラヌ．

$$\sin(-A)=-\sin A,$$
$$\cos(-A)=\cos A,$$
$$\tan(-A)=-\tan A.$$

上ノ例ノ答ヲ表示シヨウ．

角	正弦	餘弦	正切
20	0.3420	0.9397	0.3640
160	0.3420	−0.9397	−0.3640
210	−0.5000	−0.8660	0.5774
320	−0.6428	0.7660	−0.8391
− 20	−0.3420	0.9397	−0.3640
−160	−0.3420	−0.9397	0.3640
−210	0.5000	−0.8660	−0.5774
−320	0.6428	0.7660	0.8391

ソレニ對シテ助ケガナイ點ヲ心配スル．若シ學生ガ,極メテ正確ニ次

ノ問題ヲヤル爲ニハ,角ノ正弦,餘弦及ビ正切ノ値ヲ求メル練習ヲシナケレバナラヌ. 卽チ各場合ニ正負ノ符號及ビ其ノ數値ヲ完全ニ正確ニ求メラレルヤウナ練習ヲ要スル. 殊ニ正負ノ符號ニ就イテ不正確デアルト,此ノ種ノ問題ヲヤルニ失敗スル.

§146. ドモアヴルノ定理

三角法ニ於テ,次ノ證明ハ容易ニ出來ル. (§142 ノ例 6 及ビ例 7 參照).

$$r(\cos\phi+i\sin\phi) \text{ ノ } n \text{ 乘ハ } r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)$$

デアル. 但シ r ハ常ニ正デアツテ, ϕ ハ任意ノ角, n ハ任意ノ正或ハ負ノ數デアル. 勿論 ϕ ハ常ニ「ラディアン」デ表ハサレテヰルガ,併シ度デ之ヲ書クノガ便利デアルコトハ屢々見受ケル所デアル. 時間手數ヲ省ク爲,又他ノ理由ニモ依ツテ,屢々 $r(\cos\phi+i\sin\phi)$ ノ代リニ $r(\phi)$,或ハ $r[\phi]$ ト書ク. 又時ニハ r_ϕ トモ書ク.

又

$$r(\cos\phi+i\sin\phi)\times r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)=rr_1\{\cos(\phi+\phi_1)+i\sin(\phi+\phi_1)\},$$

卽チ
$$r[\phi]\times r_1[\phi_1]=rr_1[\phi+\phi_1].$$

$$r(\cos\phi+i\sin\phi)\div r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)=\frac{r}{r_1}\{\cos(\phi-\phi_1)+i\sin(\phi-\phi_1)\},$$

卽チ
$$r[\phi]\div r_1[\phi_1]=\frac{r}{r_1}[\phi-\phi_1].$$

又,總テノ計算ニ, $\cos\phi+i\sin\phi$ ノ代リニ $e^{i\phi}$ ヲ用ヒルト,前後一貫シタ答ヲ得ルコトガ知ラレテヰル.

更ニ又 $e^{-i\phi}$ ハ同様ニ, $\cos\phi-i\sin\phi$ ノ代リニ用ヒラレル.

實ニ, $r(\cos\phi+i\sin\phi)$ ハ代數的ニ $re^{i\phi}$, 或ハ $a+bi$ ト同一デアル.

$$\text{但シ}\quad r\cos\phi=a,\ r\sin\phi=b.$$

問　　題

1. $1.452[46^\circ.7]$ ヲ $a+bi$ ノ形ニ書表ハセ.

卽チ
$$1.452(\cos 46^\circ.7+i\sin 46^\circ.7),$$

卽チ,
$$1.452(0.6858+0.7278\,i),$$
卽チ,
$$0.9958+1.0567\,i.$$

2. $5+4i$ ヲ $r[\phi]$ ノ形,卽チ $r(\cos\phi+i\sin\phi)$ ノ形ニ書キ表ハセ.

ココデ, $r\cos\phi=5$, $r\sin\phi=4$. 邊々割リ算ヲシテ,
$$\tan\phi=0.8.$$
且ツ表ニ依ツテ
$$\phi=38^\circ.67.$$
又
$$r^2=5^2+4^2,\ \text{卽チ}\ r=6.403.$$
ソコデ,答ハ $6.404[38^\circ.67]$.

3. $0.9958+1.0567\,i$ ヲ平方ニ開ケ. 與ヘラレタ式ハ $1.452[46^\circ.7]$ デアルコトヲ示スノハ容易デアル. ソシテ此ノ平方根ハ $1.452^{\frac{1}{2}}[46^\circ.7\div2]$, 卽チ $1.205[23^\circ.35]$ デアツテ,之ヲ $1.107+0.4776\,i$ ノ形ニナスコトハ容易デアル.

4. $0.9958+1.0567\,i$ ヲ三乘ニ高メヨ. 最後ノ場合ノ如ク,與ヘラレタ式ヲ $1.452[46^\circ.7]$ ニ變ヘヨ. 答ハ
$$1.452^3[46^\circ.7\times3],\ \text{卽チ}\ 3.062[140^\circ],\ \text{卽チ}\ -2.35+1.96\,i.$$

5. $\sqrt{17+30\,i}$ ヲ求メヨ. ココデ, $17+30\,i$ ハ $34.48[60^\circ.45]$ ニ變形スルコトガ出來ル. ソシテ其ノ平方根ハ $5.872[30^\circ.23]$ デアツテ,之ハ次ノ形ニ變ヘルコトガ出來ル.
$$5.073+2.96\,i.$$

6. $\sqrt{i}$ ヲ求メヨ. 今 i ハ $1(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$, 卽チ $1[90^\circ]$ デアル. 其ノ平方根ハ $1[45^\circ]$, 卽チ $\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ$, 卽チ $0.707+0.707\,i$ デアル.

7. $1\div\sqrt{i}$ ヲ求メヨ. 之ハ
$$i^{-\frac{1}{2}},\ \text{卽チ}\ 1^{-\frac{1}{2}}\left[90^\circ\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right],\ \text{卽チ}\ 1[-45^\circ],$$
卽チ
$$0.707-0.707\,i.$$

8. $\sqrt{\dfrac{5+3i}{2-5i}}$ ノ値ヲ求メヨ. 與ヘラレタ分數ノ分母,分子ヲ別々ニ變形シ,
$$\frac{5+3i}{2-5i}=\frac{5.832[30^\circ.96]}{5.386[-68^\circ.18]}=1.083[99^\circ.14].$$
而シテ,此ノ平方根ハ $1.041[49^\circ.57]$, 卽チ $0.6747+0.7927\,i$.

9. $5+4i$ ノ平方根ヲ導キ出セ. 之ハ $6.403[38^\circ.67]$ ト書キ表ハスコトガ出來テ,其ノ平方根ハ $2.53[19^\circ.34]$, 卽チ
$$2.389+0.8365\,i.$$

10. $-2.35+1.96i$ ノ立方根ヲ導キ出セ. 之ハ $3.06[140^\circ]$ ノ形ニ置クコトガ出來ル. 其ノ立方根ハ $1.452[46^\circ.7]$ デアツテ,之ハ $0.9958+1.0567i$ ト變形サレル.

11. §28 ノ問題 5 ノ法則ニ從ツテ, $e^{i\phi}$ ヲ展開セヨ. ココデ, $\cos\phi$ 及ビ $\sin\phi$ ハ §28 ノ問題 6 ニ依ツテ展開出來ル.

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi=[\phi]$$

ナルコトヲ證明セヨ.

又同樣ナ方法ニ依ツテ

$$e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi=[-\phi]$$

ナルコトモ證明セヨ.

§147. 例 題

§119 ニ於ケルガ如ク, $r[\phi]$ ガ $a\sin qt$ ニ演算スルトキ,(卽チ $a\sin qt$ ニ $r[\phi]$ ヲ掛ケタトキ), 之ハ

$$ar\sin(qt+\phi)$$

ト變形スルコトガ出來ル.

例 1. $10\sin qt$ ニ $5+4i$ ヲ乘ゼヨ.

ココデ, $5+4i$ ハ $6.403[38^\circ.67]$ ト變形サレル. 卽チ答ハ

$$64.03\sin(qt+38^\circ.67).$$

之ハ §119 ノ法則ト一致スルコトヲ,學生ハ知ラネバナラヌ.

例 2. 長イ電話線ノ送話ノ端ニ於テ供給スル電流ノ電壓ガ $v_0\sin qt$ デアルトキニハ,線ニ入ル電流ハ電線一單位每ニ,

$$\sqrt{\frac{s+kqi}{r+lqi}}\,v_0\sin qt$$

デアル. 但シ, r ハ抵抗, l 感應係數, s ハ「リーカンス」デ, k ハ「パーミッタンス」卽チ電氣容量デアル.

若シ, 1哩ニ就キ, $r=6$「オーム」, $l=0.003$「ヘンリー」, $k=5\times10^{-9}$「ファラッド」(卽チ普通ノ言ヒ方デナラバ 0.005「ミクロファラッド」), $s=3\times10^{-6}$「ムオー」デアツテ, $q=6000$ ナラバ,内抵抗ハ幾何トナルカ.

答 演算式ハ $10^{-3}\sqrt{\dfrac{3+30i}{6+18i}}$ デ,之ハ $0.00126[6^\circ.35]$ デアル. ソコデ内抵抗ハ $0.00126\,v_0\sin(qt+6^\circ.35)$ デアル.

§148. 「ベクトル」ノ積

通常ノ代數的量デアルカノヤウニ, θ 或ハ $\dfrac{d}{dt}$, 或ハ之ト等シイ qi ヲ用ヒルト, $a\sin qt$ ト同樣ニ,時間ノ函數デアル量ニ演算スル式ヲ觀ルコトガ出來ル. 私ハ何處ヘデモカヤウナ二ツノ函數ノ積ノ上ニ計算ヲ施サナイ.

又 $a\sin(qt+e)$ ハ, カヤウナ函數ヲ加ヘルトキニ,「ベクトル」トシテ表ハスコトガ出來ルトイフコトヲ述ベテ來タガ,併シカヤウナ二ツノ函數ノ積ヲ,二ツノ「ベクトル」ノ積トシテハ述ベナイヤウニ注意シテ來タ. 事實“二ツノ「ベクトル」ノ積”トイフ名ハ,色々ナ意義ヲ執ラセルコトガ出來ル. 此等ノ二ツノ事項ハ「**ベクトル」代數學**ニ於テ,極メテ有用デアツテ,ソノ何レモ $a\sin(qt+e)$ ノヤウナ二ツノ代數式ノ積ニ關シテ何事ヲモナス所ハナイ. (第三十七章參照).

$a+bi$ ヤ $\alpha+\beta i$ ノヤウナ演算式ハ「ベクトル」ノヤウニシテ加ヘルコトガ出來テ,其ノ和ハ $a+\alpha+(b+\beta)i$ デアル. 或ハ又代數的ニ乘ジ合ハセルコトモ出來テ,其ノ積ハ實際ニ $a\alpha-b\beta+(a\beta+\alpha b)i$ デアル. 併シ,コノ演算式ノ積ハ「ベクトル」ノ積ト呼ブ必要ハナイ. 吾々ハ既ニ“「ベクトル」ノ積”ト呼ブ所ノ二ツノ極メテ重要ナ事項ヲ知ツテ來タ. 併シ,第三者及ビ極メテ異ナル事項ヲ同ジ名デイフノハ賢イ事デハナイ. 尤モ演算式ノ積或ハ商トイフコトハ別ニ弊害ノアルコトデハナイ.

§149. 雙曲線函數

$\cosh x$ ハ $\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ヲ意味シ,

$\sinh x$ ハ $\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ヲ意味シ,

$\tanh x$ ハ $\sinh x \div \cosh x$ [*] ヲ意味スル.

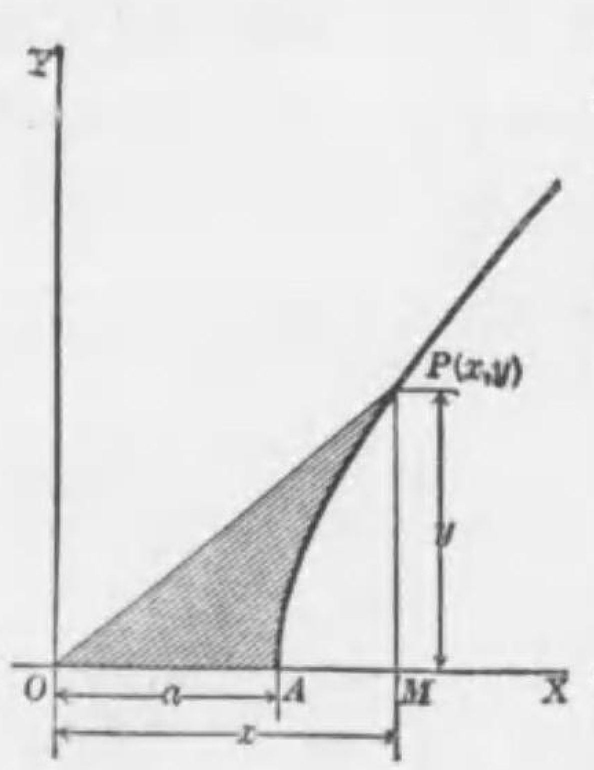
此等ハ**雙曲線函數**[(1)]ト呼バレルモノデアル. 之ハ $\sin x$, $\cos x$ 及ビ $\tan x$ ガモト圓ノ研究ニ始マツテキル爲ニ,此等ヲ圓函數ト呼ブト同ジク,上記ノ函數ハ雙曲線[(2)]ノ研究ニ基礎ヅケラレテキルカラ此ノ名ヲ得タノデアル[(3)].

---

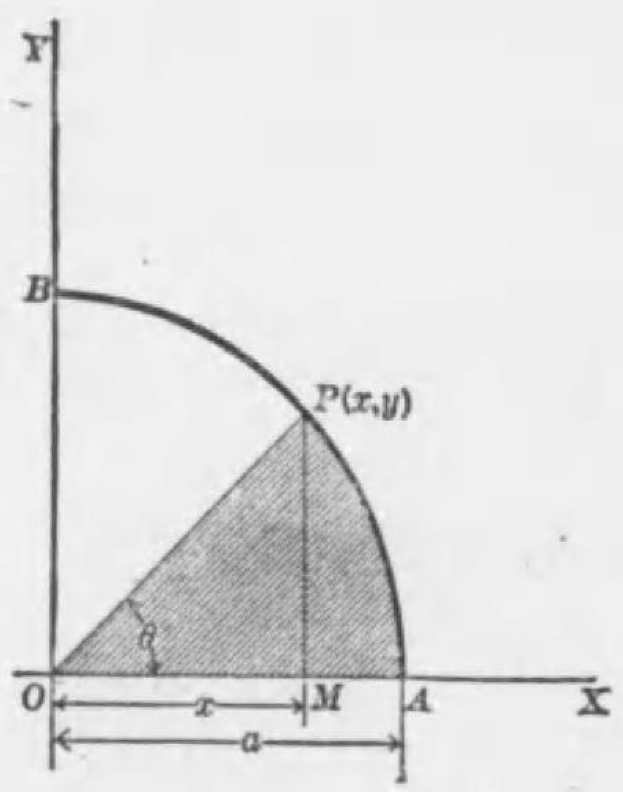
* 本書ニ於ケル練習問題ヲヤル爲ニハ,學生ハ次ノ公式ヲ知ル必要ハナイ. 併シ,此等ノ事項ヲ深究スルナラバ次ノ公式ハ必要デアル. ソシテ上ノ定義カラ此等ノ公式ヲ證明スルコトハ容易デアル.

$$\sinh(a+b)=\sinh a\,.\cosh b+\cosh a\,.\sinh b.$$
$$\cosh(a+b)=\cosh a\,.\cosh b+\sinh a\,.\sinh b.$$
$$\sinh(a-b)=\sinh a\,.\cosh b-\cosh a\,.\sinh b.$$
$$\cosh(a-b)=\cosh a\,.\cosh b-\sinh a\,.\sinh b.$$
$$\sinh 2a=2\sinh a\,.\cosh a.$$
$$\cosh 2a=\cosh^2 a+\sinh^2 a=2\cosh^2 a-1=2\sinh^2 a+1.$$
$$\cosh^2 a-\sinh^2 a=1.$$

(1) 雙曲線函數ノ記號ニ,h ノ文字ヲ入レテ $\sinh x$, $\cosh x$, 等トスルノハ,雙曲線函數 hyperbolic function ノ頭文字ニ依ルモノデ, ミンチン (George M. Minchin) ハ呼ビ聲ト一致シ而モ長クモナイトイフノデ hy $\sin x$, hy $\cos x$ 等ノ記號ヲ提唱シ(1902), 之ニ從フ人モアリ, スミス (W. B. Smith) ナドハ一層之ヲ簡單ニシテ hs x, hc x 等ト書イタ.



〔補〕第 33 圖



〔補〕第 34 圖

事項ノ歴史或ハ言葉ノ起源ヲ知ツテキル爲ニ,悲シムベキ事ハ屢々アルモノデアル. 此ノ種類ノ知識ハ,人ヲシテ之ガ唯一ノ本質的知識デアルト思ハセルニ至ル. 私ハ常ニ次ノコトヲ感ズル. 吾々ガ用ヒルアラユル常識ヤ普通語ノ起リニ一度ハ結ビツケラレネバナラヌ驚クベキ逸話ヲ忘レテ了ツテ腦裡カラ消エ去ルコトハ感謝セネバナラヌコトデアルト. ココデモ,雙曲線函數トイフヤウナ名ハ止メタイモノデアル. 此等ノ名ハ其ノ起源ヲ示ス目的ニ向ツテ役立ツタガ,今ハ禍ヲナス. 何トナレバ數師ハ,其ノ函數ノ性質ヲ雙曲線カラ導キ出スヤウニ强ヒル嫌ガアルカラデアル. 之ハ誠ニ馬鹿ラシイコトデアル. 其ノ定義ハ本書ニ上述シタ通リ[(4)]デ完全ニ容易ニ取扱フ事ガ出來ル.

---

(2) 直角雙曲線デアル.

(3) 直角雙曲線 $x^2-y^2=a^2$ 上ノ任意ノ一點ヲ $P(x,y)$ トシ, 頂點ヲ A トスルトキ, AOP ノ面積ヲ u トスレバ (補第33圖)

$$u=\text{面積 } OPM-\text{面積 } APM=\frac{1}{2}xy-\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}\cdot dx.$$

故ニ
$$u=\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}=\frac{a^2}{2}\log\frac{x+y}{a}.$$

即チ
$$\log\frac{x+y}{a}=\frac{2u}{a^2},\quad \text{故ニ}\quad \frac{x+y}{a}=e^{\frac{2u}{a^2}}.\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

又
$$x^2-y^2=a\quad\text{ナレバ}\quad \frac{x-y}{a}=e^{-\frac{2u}{a^2}}.\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ト(2)ヲ加減シテ

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2u}{a^2}}+e^{-\frac{2u}{a^2}}\right),\quad \frac{y}{a}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2u}{a^2}}-e^{-\frac{2u}{a^2}}\right);\quad \text{依ツテ}\quad \frac{y}{x}=\frac{e^{\frac{2u}{a^2}}-e^{-\frac{2u}{a^2}}}{e^{\frac{2u}{a^2}}+e^{-\frac{2u}{a^2}}}.$$

然ルニ之ト同樣ナコトヲ圓 $x^2+y^2=a^2$ ニ就イテ行ヘバ, 角 AOP ヲ θ トスルトキ, AOP ノ面積 u ハ (補第34圖)

$$u=\frac{1}{2}a^2\theta,\quad \text{即チ}\quad \theta=\frac{2u}{a^2},$$

故ニ
$$\frac{y}{a}=\sin\frac{2u}{a^2};\quad \frac{x}{a}=\cos\frac{2u}{a^2};\quad \frac{y}{x}=\tan\frac{2u}{a^2}.$$

上式ト此ノ式トノ類似點ヨリ, 圓函數ニ對シテ雙曲線函數ト名ヅケ,

$$\frac{y}{a}=\sinh\frac{2u}{a^2};\quad \frac{x}{a}=\cosh\frac{2u}{a^2};\quad \frac{y}{x}=\tanh\frac{2u}{a^2}$$

トスル.

(4) 此ノ定義ハ代數學的定義デ,之ニ對シ (本書ノヤウナ研究ニハ直接ニ不用デアルカラ) 著者ノ嫌フ圖形カラ導クモノハ幾何學的定義デアル. (以下356頁脚註ニ續ク).

雙曲線函數 (一)[5]

u.	sinh u.	cosh u.	tanh u.	u.	sinh u.	cosh u.	tanh u.
.00	.0000	1.0000	.0000	1.00	1.1752	1.5431	.7616
02	0200	1.0002	0200	1.02	1.2063	1.5669	7699
04	0400	1.0008	0400	1.04	1.2379	1.5913	7779
06	0600	1.0018	0599	1.06	1.2700	1.6164	7857
08	0801	1.0032	0798	1.08	1.3025	1.6421	7932
10	1002	1.0050	.0997	1.10	1.3356	1.6685	.8005
12	1203	1.0072	1194	1.12	1.3693	1.6956	8076
14	1405	1.0098	1391	1.14	1.4035	1.7233	8144
16	1607	1.0128	1586	1.16	1.4382	1.7517	8210
18	1810	1.0162	1781	1.18	1.4735	1.7808	8275
.20	2013	1.0201	.1974	1.20	1.5095	1.8107	.8337
22	2218	1.0243	2165	1.22	1.5460	1.8412	8397
24	2423	1.0289	2355	1.24	1.5831	1.8725	8455
26	2629	1.0340	2543	1.26	1.6209	1.9045	8511
28	2837	1.0395	2729	1.28	1.6593	1.9373	8565
.30	.3045	1.0453	.2913	1.30	1.6984	1.9709	.8617
32	3255	1.0516	3095	1.32	1.7381	2.0053	8668
34	3466	1.0584	3275	1.34	1.7786	2.0404	8717
36	3678	1.0655	3452	1.36	1.8198	2.0764	8764
38	3892	1.0731	3627	1.38	1.8617	2.1132	8810
.40	.4108	1.0811	.3799	1.40	1.9043	2.1509	.8854
42	4325	1.0895	3969	1.42	1.9477	2.1894	8896
44	4543	1.0984	4136	1.44	1.9919	2.2288	8937
46	4764	1.1077	4301	1.46	2.0369	2.2691	8977
48	4986	1.1174	4462	1.48	2.0827	2.3103	9015
.50	.5211	1.1276	.4621	1.50	2.1293	2.3524	.9051
52	5438	1.1383	4777	1.52	2.1768	2.3955	9087
54	5666	1.1494	4930	1.54	2.2251	2.4395	9121
56	5897	1.1609	5080	1.56	2.2743	2.4845	9154
58	6131	1.1730	5227	1.58	2.3245	2.5305	9186
.60	.6367	1.1855	.5370	1.60	2.3756	2.5775	9217
62	6605	1.1984	5511	1.62	2.4276	2.6255	9246
64	6846	1.2119	5649	1.64	2.4806	2.6746	9275
66	7090	1.2258	5784	1.66	2.5346	2.7247	9302
68	7336	1.2402	5915	1.68	2.5896	2.7760	9329
.70	.7586	1.2552	.6044	1.70	2.6456	2.8283	.9354
72	7838	1.2706	6169	1.72	2.7027	2.8818	9379
74	8094	1.2865	6291	1.74	2.7609	2.9364	9402
76	8353	1.3030	6411	1.76	2.8202	2.9922	9425
78	8615	1.3199	6527	1.78	2.8806	3.0492	9447
.80	.8881	1.3374	.6640	1.80	2.9422	3.1075	.9468
82	9150	1.3555	6751	1.82	3.0049	3.1669	9488
84	9423	1.3740	6858	1.84	3.0689	3.2277	9508
86	9700	1.3932	6963	1.86	3.1340	3.2897	9527
88	9981	1.4128	7064	1.88	3.2005	3.3530	9545
.90	1.0265	1.4331	.7163	1.90	3.2682	3.4177	.9562
92	1.0554	1.4539	7259	1.92	3.3372	3.4838	9579
94	1.0847	1.4753	7352	1.94	3.4075	3.5512	9595
96	1.1144	1.4973	7443	1.96	3.4792	3.6201	9611
98	1.1446	1.5199	7531	1.98	3.5523	3.6904	9626

雙曲線函數 (二)

u.	sinh u.	cosh u.	tanh u.	u	sinh u.	cosh u.	tanh u.
2.00	3.6269	3.7622	.9640	3.00	10.0179	10.0677	.99505
2.02	3.7028	3.8355	9654	3.02	10.2212	10.2700	99524
2.04	3.7803	3.9103	9667	3.04	10.4287	10.4765	99543
2.06	3.8593	3.9867	9680	3.06	10.6403	10.6872	99561
2.08	3.9398	4.0647	9693	3.08	10.8562	10.9022	99578
2.10	4.0219	4.1443	.9705	3.10	11.0765	11.1215	99594
2.12	4.1056	4.2256	9716	3.12	11.3011	11.3453	99610
2.14	4.1909	4.3085	9727	3.14	11.5303	11.5736	99626
2.16	4.2779	4.3932	9737	3.16	11.7641	11.8065	99640
2.18	4.3666	4.4797	9748	3.18	12.0026	12.0442	99654
2.20	4.4571	4.5679	.9757	3.20	12.2459	12.2866	.99668
2.22	4.5494	4.6580	9767	3.22	12.4941	12.5340	99681
2.24	4.6434	4.7499	9776	3.24	12.7473	12.7864	99693
2.26	4.7394	4.8437	9785	3.26	13.0056	13.0440	99705
2.28	4.8372	4.9395	9793	3.28	13.2691	13.3067	99717
2.30	4.9370	5.0372	.9801	3.30	13.5379	13.5748	99728
2.32	5.0387	5.1370	9809	3.32	13.8121	13.8483	99738
2.34	5.1425	5.2388	9816	3.34	14.0918	14.1273	99749
2.36	5.2483	5.3427	9823	3.36	14.3772	14.4120	99758
2.38	5.3562	5.4487	9830	3.38	14.6684	14.7024	99768
2.40	5.4662	5.5569	.9837	3.40	14.9654	14.9987	.99777
2.42	5.5785	5.6674	9843	3.42	15.2684	15.3011	99786
2.44	5.6929	5.7801	9849	3.44	15.5774	15.6095	99794
2.46	5.8097	5.8951	9855	3.46	15.8928	15.9242	99802
2.48	5.9288	6.0125	9861	3.48	16.2144	16.2453	99810
2.50	6.0502	6.1323	.9866	3.50	16.5426	16.5728	99817
2.52	6.1741	6.2545	9871	3.52	16.8774	16.9070	99824
2.54	6.3004	6.3793	9876	3.54	17.2190	17.2480	99831
2.56	6.4293	6.5066	9881	3.56	17.5674	17.5958	99838
2.58	6.5607	6.6364	9886	3.58	17.9228	17.9507	99844
2.60	6.6947	6.7690	.9890	3.60	18.2854	18.3128	99850
2.62	6.8315	6.9043	9895	3.62	18.6554	18.6822	99856
2.64	6.9709	7.0423	9899	3.64	19.0328	19.0590	99862
2.66	7.1132	7.1832	9903	3.66	19.4178	19.4435	99867
2.68	7.2583	7.3268	9906	3.68	19.8106	19.8358	99872
2.70	7.4063	7.4735	.9910	3.70	20.2113	20.2360	.99877
2.72	7.5572	7.6231	9914	3.72	20.6201	20.6443	99882
2.74	7.7112	7.7758	9917	3.74	21.0371	21.0609	99887
2.76	7.8683	7.9316	9920	3.76	21.4626	21.4859	99891
2.78	8.0285	8.0905	9923	3.78	21.8966	21.9194	99896
2.80	8.1919	8.2527	.9926	3.80	22.3394	22.3618	.99900
2.82	8.3586	8.4182	9929	3.82	22.7911	22.8131	99904
2.84	8.5287	8.5871	9932	3.84	23.2520	23.2735	99907
2.86	8.7021	8.7594	9935	3.86	23.7221	23.7432	99911
2.88	8.8791	8.9352	9937	3.88	24.2018	24.2224	99915
2.90	9.0596	9.1146	9940	3.90	24.6911	24.7113	.99918
2.92	9.2437	9.2976	9942	3.92	25.1903	25.2101	99921
2.94	9.4315	9.4844	9944	3.94	25.6996	25.7190	99924
2.96	9.6231	9.6749	9947	3.96	26.2191	26.3382	99927
2.98	9.8185	9.8693	9949	3.98	26.7492	26.7679	99930

問　題

1. $\cosh ax$ ノ微分係數ハ $a\sinh ax$ デアルコトヲ示セ.

2. $\sinh ax$ ノ微分係數ハ $a\cosh ax$ デアルコトヲ示セ.

3. $\cosh 1.013=1.5562$, $\sinh 1.013=1.1989$, $\tanh 1.013=0.77.4$ デアルコトヲ示セ.

4. a ガ極メテ小ナルトキ, $\cosh a$, $\sinh a$ 及ビ $\tanh a$ ノ値如何.

$$e^a=1+a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{6}+\cdots\cdots\cdots, \quad 及ビ \quad e^{-a}=1-a+\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{6}+\cdots\cdots\cdots$$

デアルカラ,

$$\cosh a=\frac{1}{2}(2+a^2+\cdots\cdots\cdots)=1+\frac{1}{2}a^2+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sinh a=\frac{1}{2}\left(2a+\frac{1}{3}a^2+\cdots\cdots\cdots\right)=a+\frac{1}{6}a^3+\cdots\cdots.$$ (6)

a	$\cosh a$	$\sinh a$	$\tanh a$
0	1	0	0
0.01	1	0.01	0.01
0.10	1.005	0.1002	0.09967

左ノ値ヲ有效數字四桁マデ計算セヨ.

5. a ガ 7 ヨリ大デアツテ, 且ツ四桁ノ有效數字ヲ用ヒルノミナラバ,

$$\cosh a=\sinh a=\frac{1}{2}e^a,$$

$$\tanh a=1,$$

トスルコトガ出來ルコトヲ證明セヨ.

6. x ガ $a+bi$ ナルトキ, e^x ヲ求メヨ.

〔353頁脚註(4)續キ〕雙曲線函數ハ圓函數ト同ジク六ツアリ, 前述ノ三ツノ外ニ

$$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}; \quad \operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}; \quad \operatorname{cosech} x=\frac{1}{\sinh x}$$

ガアル. 又逆函數モ六ツアツテ, $\sinh y=x$ ナラバ $y=\sinh^{-1}x$ デアル. 同樣ニ $\cosh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$ 等ガアル. 此等ヲ**逆雙曲線函數**トイフ.

(5) 問題練習ノ便宜ノ爲, 譯者ハココニ雙曲線函數表ヲ添附シテオイタ.

(6) 之ハ即チ雙曲線函數ノ展開デアツテ, 次ノヤウニナル.

$$\cosh a=1+\frac{a^2}{\underline{|2}}+\frac{a^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{a^{2n}}{\underline{|2n}}+\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sinh a=a+\frac{a^3}{\underline{|3}}+\frac{a^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{a^{2n+1}}{\underline{|2n+1}}+\cdots\cdots\cdots.$$

之ハ　$e^{a+bi}=e^a e^{bi}=e^a[b].$

デアル. 之ヲ次ノ場合ニ就イテ述ベヨ. 但シ, b ハ度デ表ハシテアル. 答ハ $\alpha+\beta i$ ノ形ニ變ヘヨ.

x	e^x
$0.01+0.01\,i$	$1.01[0°.573]=1.0099+0.0101\,i$
$0.1+0.1\,i$	$1.105[5°.73]=1.0995+0.11017\,i$
$0.3+0.3\,i$	$1.350[17°.19]=1.2898+0.3989\,i$
$0.6+0.6\,i$	$1.823[34°.38]=1.5045+1.0285\,i$
$1+i$	$2.7183[57°.30]=1.4684+2.2874\,i$
$1.5+1.5\,i$	$4.482[85°.95]=0.3169+4.4712\,i$
$2+2\,i$	$7.389[114°.60]=-3.0753+6.7188\,i$
$3+3\,i$	$20.086[171°.90]=-19.887+2.8300\,i$
$5+5\,i$	$148.41[286°.50]=42.14-142.28\,i$

7. 次ノ場合ニ於ケル e^{-x} ヲ求メヨ. 但シ $x=a+bi$,

$$e^{-x}=e^{-a}e^{-bi}=e^{-a}[-b].$$

x	e^{-x}
$0.01+0.01\,i$	$0.9901[-0°.573]=0.9900-0.0099\,i$
$0.1+0.1\,i$	$0.9053[-5°.73]=0.9008-0.09026\,i$
$0.3+0.3\,i$	$0.7407[-17°.19]=0.7077-0.2189\,i$
$0.6+0.6\,i$	$0.5486[-34°.38]=0.45275-0.30979\,i$
$1+i$	$0.3679[-57°.30]=0.19874-0.3096\,i$
$1.5+1.5\,i$	$0.2231[-85°.94]=0.01577-0.22256\,i$
$2+2\,i$	$0.1353[-114°.60]=-0.05631-0.12303\,i$
$3+3\,i$	$0.0498[-171°.90]=-0.04931-0.07016\,i$
$5+5\,i$	$0.00674[-286°.50]=0.001914+0.006462\,i$

8. 問題(6)及ビ(7)ノ答ヲ結合シテ,次ノ場合ニ於ケル x ノ値ニ對スル

$\cosh x$ 及ビ $\sinh x$ ヲ求メヨ.

z	$\cosh x$	$\sinh x$
$0.01+0.01i$	$1+0.0001i=1.0(0°)$	$0.01+0.01i=0.01414(45°)$
$0.1+0.1i$	$1.00015+0.009955i=1.0(0°.56)$	$0.09935+0.1002i=0.1411(45°.2)$
$0.3+0.3i$	$0.9988+0.09i=1.03(5°.2)$	$0.2911+0.3089i=0.4244(46°.7)$
$0.6+0.6i$	$0.9786+0.35935i=1.042(20°.2)$	$0.5259+0.6692i=0.8511(51°.8)$
$1+i$	$0.8336+0.9889i=1.293(49°.9)$	$0.6349+1.2985i=1.445(63°.9)$
$1.5+1.5i$	$0.16634+2.1243i=2.13(85°.5)$	$0.15057+2.3469i=2.352(86°.3)$
$2+2i$	$-1.5658+3.2979i=3.65(115°.4)$	$-1.5095+3.4209i=3.74(113°.8)$
$3+3i$	$-9.968+1.3799i=10.06(172°.1)$	$-9.919+1.4501i=10.02(171°.1)$
$5+5i$	$21.071-71.137i=74.19(286°.5)$	$21.069-71.143i=74.19(286°.5)$

$\cosh a$ 及ビ $\sinh a$ ノ表ハ容易ニ得ラレル. $x=a+bi$ ノトキノ $\cosh x$ 或ハ $\sinh x$ ヲ計算シヨウト欲スル學生ハ,次ノ公式ヲ求メルノガ便利デアル. 先ヅ此等ノ公式ノ正シイコトヲ證明シヨウ.

$$\cosh(a+bi)=\cosh a\cdot\cos b+i\sinh a\cdot\sin b,$$

$$\sinh(a+bi)=\sinh a\cdot\cos b+i\cosh a\cdot\sin b.$$

ケンネリ 教授ハ $x=r〔45°〕$ 即チ $a+ai$ ノ場合ノ $\cosh x$, $\sinh x$ 及ビ $\tanh x$ ノ極メテ完全ナ表ヲ作ツタ.

9. 次ノ r, l, s 及ビ k ノ値ハ,或ル種ノ海底電信及ビ電話線1哩ニ就イテノ値デアル. 毎秒約 800 ノ振動數卽チ調子ヲ有スル純粹樂音ヲヨク傳ヘル電話線ハ,又普通ノ談話ヲモヨク傳ヘルモノデアルトイフ事ハ知ラレテキル. 故ニ電話線デハ, q ガ振動數ノ 2π 倍デアルト, $q=5000$ ヲトル. 海底電信ニ於テモ亦,振動數ガ約9デアル單弦運動ガヨク傳ハルトキニハ,毎分 160 文字ノ割合デ送ル普通ノ信號通信ハ,普通ノ受信機デ最モ能率ヨク書取ル. 故ニ海底線ノ問題ニ對シテハ, $q=60$ ヲ用ヒル.

電話線ハ著シク異ナル. 故ニ實驗ノ結果ハ,通常"標準電話「ケーブル」"ト稱スル項デ,30 哩ニ就イテ與ヘラレル. 30 哩トイフノハ,普通ノ送話器及ビ受話器ヲ用ヒテ,談話ヲ發音分明ニ聞キ得ルヤウニ送話スルコトノ

	q	r オーム	l ヘンリー	k ファラッド	s ムオー	$n=h+gi$	z_0 卽チ $\frac{r}{n}$
標準「ケーブル」	5000	88	0	0.05×10^{-6}	0	$0.105+0.105i$ $=0.1483〔45°〕$	$419.1-419.1i$ $=593〔-45°〕$
裸銅線（電話線）	5000	18	0.0039	0.008×10^{-6}	10^{-6}	$0.0122+0.0302i$ $=0.0326〔67°.90〕$	$761.9-287.9i$ $=815〔-20°.67〕$
裸銅線（電話線）	5000	2.97	0.0033	0.0096×10^{-6}	10^{-6}	$0.00281+0.0282i$ $=0.0284〔84°.32〕$	$589-46.38i$ $=591〔-4°.50〕$
電話「ケーブル」	5000	12	0.0010	0.0714×10^{-6}	5×10^{-6}	$0.0382+0.0564i$ $=0.0681〔55°.9〕$	$159.6-104.8i$ $=191〔-33°.28〕$
海底電線	60	2.88	0	0.4095×10^{-6}	0	$0.005948+0.005948i$ $=0.00841〔45°〕$	$241.8-241.8i$ $=342〔-45°〕$

此等ノ線ハ後ニナレバ,此ノ順序ニ夫々 A, B, C, D 及ビ E 線ト稱スル.

§28 ノ問題 24 ノ答ノ h, g ト此ノ答ノ h, g トヲ比較シテ見ヨ.