贈閱

第一卷

第七期

第七期目錄

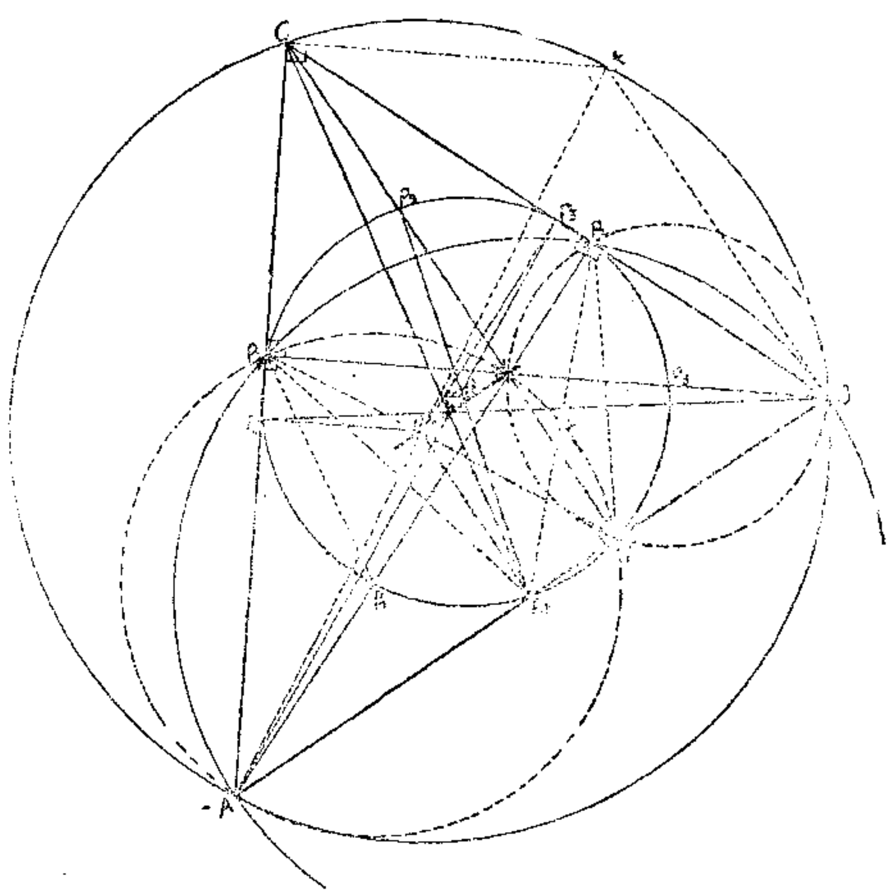
調和四心線

徐　　燮

定義* 外切圓心，重心，九點圓心，垂心同列於一直線上且成調列點經過此四點之綫謂之調和四心線.

此爲我在東大附中時所研究的問題，當時興趣甚濃，至今猶未稍忘此綫雖即 Euler 之線但仍有一述之值價.——作者識.

三角形各邊中垂綫之交點 O 曰外心，三中綫之交點 G 曰重心，各頂至對邊三垂綫之交點 H 曰垂心；普通幾何教本中已熟見之矣.茲將九點圓稍加說明：九點圓爲經過 P_i ($i=1, 2, \cdots\cdots 9$) 九點之圓，P_1, P_2, P_3, 爲垂綫之脚；P_4, P_5, P_6 爲中線之底；P_7, P_8, P_9 爲各頂與垂心之中點.



證法* 先作經過 P_1, P_2, P_3 之圓，次證 P_j ($j=4, 5\cdots\cdots 9$) 六點亦在此圓上.

(圖示)

*證法頗多，今姑述其一.

$$\widehat{P_2P_4P_3} = \overset{P_4}{\widehat{P_2P_3}}※$$

$$= 2\,\widehat{P_2BP_3}$$

$$= 2\,\widehat{P_2AP_3}$$

$$= 2\,\widehat{P_2BP_3} + \widehat{P_2AP_3}\,; \qquad (\widehat{P_2BP_3} = \widehat{P_2AP_3})$$

但 $$\widehat{P_2BP_3} = \tfrac{1}{2}\,\overset{P_8}{\widehat{P_2H}} = \widehat{P_2P_1H}\,,$$

$$\widehat{P_2AP_3} = \tfrac{1}{2}\,\overset{P_7}{\widehat{HP_3}} = \widehat{HP_1P_3}\,;$$

故 $$\widehat{P_2P_4P_3} = \widehat{P_2P_1H} + \widehat{HP_1P_3}$$

$$= \widehat{P_2P_1P_3}$$

故 P_4 在所作之圓周上；同理，P_5 P_6 亦然.

$$\widehat{P_2P_7P_3} \equiv \widehat{HP_7P_3} = \overset{P_7}{\widehat{HP_3}} = 2\,\widehat{HP_1P_3}$$

又 $$\widehat{P_2P_1H} = \widehat{HP_1P_3} \qquad (\widehat{P_2BP_3} = \widehat{P_2AP_3})$$

∴ $$\widehat{P_2P_7P_3} = 2\,\widehat{HP_1P_3}$$

$$= \widehat{HP_1P_3} + \widehat{P_2P_1H}$$

$$= \widehat{P_2P_1P_3}$$

故 P_7 在所作之圓周上，同理 P_8, P_9 亦然故 $P_i\ (i=1,2\cdots\cdots9)$ 九點均在一圓周上．今再證明調和四心綫之定理如下：

在 $\triangle ABK$ 內，P_4, O (兩圓心)爲 AB, AK 兩隣邊之中點故

※ $\overset{P_i}{\widehat{P_jP_k}}$ 表示 $\odot P_i$ 上 $\widehat{P_jP_k}$ 所對圓心角之度 degree 數.

$$P_4O \mathbin{/\!/} BK$$
$$= \tfrac{1}{2} BK$$

但 KBHC 爲平行四邊形(兩對對邊各垂直於一線)故

$$P_4O \doteq HP_9 \qquad (HP_9 = \tfrac{1}{2}BK = \tfrac{1}{2}GC)$$

故　P_4HP_9O 亦爲平行四邊形

兩對角線 OH, P_4P_9 互爲平分；而 P_4P_9 爲九點圓之一直徑 $(\widehat{P_9P_1P_4} = 90°)$，故其心 N 當爲 OH 之中點.

在　$\triangle GOP_4$ 與 $\triangle GHC$ 內

$$\frac{P_4O}{HC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P_4G}{GC} = \frac{1}{2}$$

$$\widehat{GP_4O} = \widehat{GCH}$$

$$\therefore \quad \triangle GP_4O \backsim GCH$$

$$\therefore \quad \widehat{P_4GO} = \widehat{CGH}$$

$\therefore$　O, G, H 三點可聯成一直線

N 在 OH 上，今 G 亦在 OH 上，故 O, G, N, H 同在一直線上，

$$\because \quad \frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{GH}} = \frac{\overrightarrow{P_4G}}{\overrightarrow{GC}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH}} = \frac{1}{1+2},$$

設　$\overrightarrow{OG} = u$

則　$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} = 3u$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \frac{3u}{2}$$

$$\overrightarrow{NG} = -\overrightarrow{GN} = -\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OG}\right)$$

$$= -\left(\frac{3u}{2} - u\right) = -\frac{1}{2}u$$

$$(OGNH) \equiv \frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{NG}} : \frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{NH}} = \frac{u}{\frac{-u}{2}} : \frac{3u}{\frac{2}{2}u} = -1$$

即 (外心,重心,九心,垂心)$=-1$

故得

定理 三角形之外心,重心,九點圓心,垂心,同列於一直線上且成調和列點.

一九三三,五,三十·於常州

三十六點圓

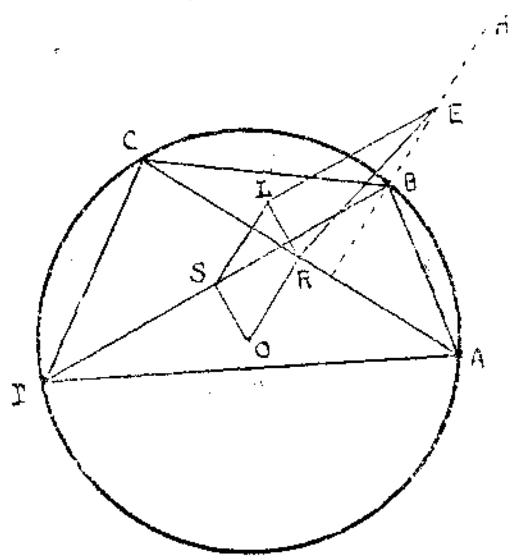
李思源

此為李思源(森林)君投稿,經編者修改後發表於此,證明本可較為簡捷,但為讀者方便起見,措詞力求淺鮮,故不覺其累贅. 編者識於此致其歉意.

引定理. 由圓內接四邊形 ABCD 兩對角綫 AC, BD 之中點 R 及 S 各向其他對角綫作垂綫,設其交點為 L,則此四邊形之四個三角形 ABC, BCD, CDA, DAB 之九點圓,皆通過 L 點.

〔證〕 設 O 為圓心,H 為 $\triangle ABC$ 之垂心,E 為 HB 之中點,

則 ER 爲 $\triangle ABC$ 九點圓之直徑。



因　HB $\underline{\parallel}$ 2OR $\underline{\parallel}$ 2LS.

故　　　　EB $\underline{\parallel}$ LS,

而　　　　EL $\parallel$ BS.

又　　　　LR $\parallel$ SO,

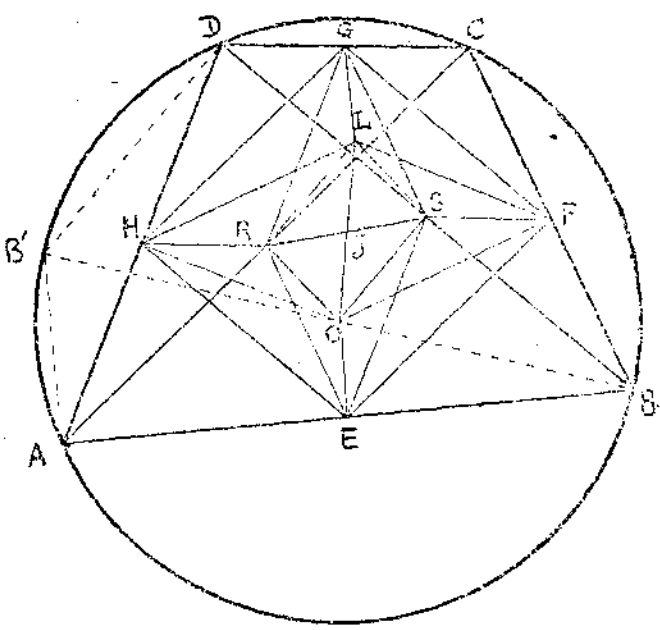
故 $\angle ELR$ 爲直角. 故以 ER 爲直徑之圓，即 $\triangle ABC$ 之九點圓，必通過 L 點.

同理，$\triangle BCD$, $\triangle CDA$，$\triangle DAB$ 之九點圓亦皆通過 L 點. (証訖)

定理. 圓內接四邊形 A B C D 各邊之中點爲 E, F, G, H, 其對角綫 AC, BD 之中點爲 R, S; 圓心爲 O, 自 R, S 各向其他對角線作垂線，設其交點爲 L; 則各四邊形 E F S O, F G R O, G H O S, H E O R, E F L R, F G L S, G H R L, H E S L 中各三角形之九點圓心與各三角形 A B C, B C D, C D A, D A B 之重心，共三十六點，同在一圓周上.

〔証〕 設 J 爲 RS, OL 之交點，則亦必爲 EG, FH 中點(參看本刊第三期16頁逆定理之証).

今就四邊形 E F S O 觀之. 此四邊形顯然爲圓內接四邊形，因若聯 O B 交圓於 B', 則四邊形 EFSO 與 ACDB' 相似，B 爲相似中心，相似比爲 1:2.



故若以 OB 之中點爲心，OB 爲直徑作圓，即爲 EFSO 之外接圓。

次自對角線 ES 之中點，向他一對角綫 FO 作垂線，則此線必與 BC 平行，卽與 SG 平行。

就 △ESG 觀之，此垂線既與其底 SG 平行，而又通過一邊 ES 之中點，自必亦通過 EG 之中點，換言之，卽通過 J 點。

若自 FO 之中點向 ES 作垂線，則此垂線亦必通過 J 點。此因 ES∥AD⊥OH，故該垂線與 OH 平行，即與 FL 平行。就 △OFL 言之，過 FO 之中點而平行於 FL 之線，必通過 OL 之中點，即 J 點也。

由是觀之，J 點之於四邊形 EFSO，與引定理中 L 點之於四邊形 ABCD，有同樣之關係，故 EFSO 之四個三角形，其九點圓必皆通過 J 點。

同理，四邊形 FGRO，GHOS，HEOR 之各三角形，其九點圓亦皆通過 J 點。

次再就四邊形 EFLR 觀之，極易知其爲圓內接四邊形，蓋其外接圓即 △ABC 之九點圓也。

如前證法，知 J 點與此四邊形之關係，適同引定理中 L 點與

ABCD 四邊形之關係，故 $\triangle EFL$, $\triangle FLR$, $\triangle LRE$, $\triangle REF$ 之九點圓皆通過 J 點。

同理四邊形 FGLS, GHRL, HESL 中各三角形之九點圓心亦皆通過 J 點.

此三十二個九點圓，皆不相重合，極易推知. 又前四個四邊形外接圓之直徑，即 OB, OC, OD, OA, 故其半徑概爲 O 圓半徑之半；至於後四個四邊形之外接圓，旣爲 ABCD 中四三角形之九點圓，則其半徑當然亦爲 O 圓半徑之半。 此八個外接圓半徑旣皆相等，則所云三十二個九點圓之半徑，自亦必等(均爲 O 圓半徑之四分之一)。故此三十二個圓心，均在以 J 爲中心，以 O 圓半徑四分之一爲半徑之圓上。

最後設 $\triangle ABC$ 之重心爲 G'，九點圓心爲 N，則 G' 在 O, N 之中間。今 J 爲 OL 之中點，故 $JG'=\frac{1}{2}LN$，而 LN 爲九點圓之半徑，依上所述，等於 O 圓半徑之半，因之 JG' 等於 O 圓半徑之四分之一，而 G' 在上節所云之圓周上.

同理 $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ 之重心亦然。

故此三十六點共在一圓周上.

(證訖)

方程式之代數的解法

蔡疇農

中等程度之代數，以解方程式爲核心． 方程式的解法可分兩大類；一是只求出一整數和幾位小數，來表根的值；如忽拿氏法，牛頓氏法，都屬此類；謂之數値的解法． 另一則係以係數經某數種運算後，來表根的值；如解二次，三次的文字方程式，均係用此法；謂之代數的解法． 前者的算法；現在已經十分完滿了；任何次的方程式，求根至任何位小數，均屬可能；如 DeMorgan 氏盛稱用忽拿氏法 (Horner's method) 解方程式 $x^3-2x=5$，有至小數150位之多者．但本題之範圍屬後者，今分爲八欵討論之．

I．一次方程式．一次方程式之形式最簡，最易於求其解．

凡一次方程式均可化爲

$$ax+b=0$$

之形． 移項再以 a 除兩節，立得其解爲

$$x=-b/a$$

此中 a，與 b，可爲任何數；但 a 不得爲絕對的零． a 若爲極限的零，則 x 爲無窮大；若 a 爲無窮大，則 x 爲極限的零．

II．二次方程式．凡二次方程式均可化爲

$$ax^2+bx+c=0$$

之形，此中 a 不得爲絕對的零；移項再以 $4a$ 乘之得

$$4a^2x^2+4abx=-4ac,$$

加 b^2 於兩節再開平方得

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

移項再以 $2a$ 除之,得其解爲:

$$x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a.$$

此中 x 之值,視 b^2-4ac 之爲正,零,或負而爲實,有理,或虛. 故 b^2-4ac 謂之此方程式之判別式.

III. 三次方程式之解法A. 凡三次方程式均可化爲

$$X^3+aX^2+bX+c=o$$

之形. 作另一新三次方程式,其每根均爲此方程式之相當根加以 $a/3$;故有新方程式:

$$(x-a/3)^3+a(x-a/3)^2+b(x-a/3)+c=o,$$

因此式之左節在展開後,x^2 項之係數爲零;故所作之新方程式可寫作

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

之形. 若能解新方程式,則在其每根內各減 $a/3$,即得原方程式之根. 故能解(1),則能解一切之三次方程式. 今則研究(1)之解法.

在(1)中,令

$$x=y+z. \tag{2}$$

代(2)入(1),

$$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0. \tag{3}$$

因此刻 y 與 z 爲只受一個條件所限制之任意二量(其和爲 x).

故吾人可更加一條件限制之,以決定其値. 設更令

$$3yz+p=0, \tag{4}$$

代(4)入(3)

$$y^3+z^3+q=0; \tag{5}$$

由(5)有 $$y^3+z^3=-q,\tag{6}$$

由(4)有 $$y^3z^3=-p^3/27;\tag{7}$$

由(6)與(7)可知 y^3 與 z^3 爲二次方程式

$$u^2+qu-p^3/27=0\tag{8}$$

之根。解(8),而以A,與B,表所得之二根,則

$$y^3=A=-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27},\quad z^3=B=-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}.\tag{9}$$

由(9)得 y 與 z 之諸值爲

$$y=\sqrt[3]{A},\quad \omega\sqrt[3]{A},\quad \omega^2\sqrt[3]{A};\tag{10}$$

$$z=\sqrt[3]{B},\quad \omega\sqrt[3]{B},\quad \omega^2\sqrt[3]{B}.\tag{11}$$

但由(4), $yz=-p/3$, 不爲虛數,故在(10)與(11)中, y 與 z 之值之能合此條件者僅爲:

$$\begin{cases}y=\sqrt[3]{A}\\ z=\sqrt[3]{B}\end{cases},\quad \begin{cases}y=\omega\sqrt[3]{A}\\ z=\omega^2\sqrt[3]{B}\end{cases},\quad \begin{cases}y=\omega^2\sqrt[3]{A}\\ z=\omega\sqrt[3]{B}\end{cases}.$$

代此諸雙數入(2),得(1)之三根爲:

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\quad x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\quad x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B};$$

此中 $A=-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27},\qquad B=-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}.$

此法本係 Tartaglia 氏所創, Cardan 氏發表於其所著之"Ars Magna"上. 故後世多稱爲 Cardan 氏解法.

根之討論. x_1, x_2, x_3, 之性質,顯然,視 $q^2/4+p^3/27$ 之値而決定.

(一). 若 $q^2/4+p^3/27>0$, 則 y^3 與 z^3 均爲實數; 令 y 與 z 各表其算術立方根,則三根爲:

$$x_1=y+z,\qquad x_2=\omega y+\omega^2 z,\qquad x_3=\omega^2 y+\omega z.$$

若 ω 以及 ω^2 之値代入此三式，則三根爲：

$$x_1=y+z,\qquad x_2=-(y+z)/2+(y-z)\sqrt{-3}/2,$$
$$x_3=-(y+z)/2-(y-z)\sqrt{-3}/2;$$

其中一爲實數，二爲虛數。

(二)。 若 $q^2/4+p^3/27=0$，則 $y^3=z^3$；故 $y=z$（y 與 z 各爲 y^3 及 z^3 之算術立方根），而三根爲：

$$x_1=2y,\qquad x_2=y(\omega+\omega^2),\qquad x_3=y(\omega^2+\omega);$$

或 $$x_1=2y,\qquad x_2=-y,\qquad x_3=-y;$$

均爲實數。

(三)。若 $q^2/4+p^3/27<0$，則 y^3 及 z^3 各爲 $a+ib$ 及 $a-ib$ 形之複式． 而此二量之立方根必各爲 $m+in$ 及 $m-in$ 形之二複式；則三根爲：

$$x_1=(m+in)+(m-in),\qquad 或\ 2m;$$
$$x_2=(m+in)\omega+(m-in)\omega^2,\ 或 -m-n\sqrt{3};$$
$$x_3=(m+in)\omega^2+(m-in)\omega,\ 或 -m+n\sqrt{3};$$

均爲實數． 但在代數學中，複式開立方不能純用代數法． 由是吾人不能由 y^3 及 z^3 之値求 x_1, x_2，及 x_3，之値；在此場合，謂之不能化 (Irreducible case)．故不得不利用三角法以求之．

y^3 及 z^3 既各爲 $a+ib$ 及 $a-ib$ 形之複式，則方程式之根必爲：

$$x=(a+ib)^{\frac{1}{3}}+(a-ib)^{\frac{1}{3}}.$$

將此二虛數變爲極式(polar form)，則

$$x=\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^{\frac{1}{3}}+\left[r(\cos\theta-i\sin\theta)\right]^{\frac{1}{3}}$$

但由 DeMoivre 氏定理，

$$\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^{\frac{1}{3}}=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),\ r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right)$$

或 $$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right);$$

其中 $r^{\frac{1}{3}}$ 爲 r 之算術立方根. 同理，

$$\left[r(\cos\theta-i\sin\theta)\right]^{\frac{1}{3}}=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right),\ r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}-i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right)$$

或 $$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}-i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right).$$

以此二者中，相當之二式相加；得 x 之値. 故

$$x_1=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},$$

$$x_2=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},$$

$$x_3=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}.$$

Ⅳ. 三次方程式之解法B. 凡三次方程式均可化爲

$$x^3+3ax-2b=0$$

之形. 令 $x=(a-y^2)/y$，則此方程式變爲

$$y^6+2by^3-a^3=0$$

此爲 y^3 之二次方程式，解之可得 y 之値，則 x 之亦可知矣.

此法爲 Vieta 氏法.

Ⅴ. 四次方程式之解法A. 凡四次方程式，均可寫作

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0 \tag{I}$$

之形，與三次方程式同，由此方程式可另作一新方程式

$$x^4+ax^2+bx+c=0,$$

解之以求原方程式之根；故吾人但解此式，即可解一切之四次方程式。加 $ux^2+u^2/4$ 於(1)之左節，再自其中減去之，得：

$$x^4+ux^2+u^2/4-ux^2-u^2/4+ax^2+bx+c=0,$$

或 $$(x^2+u/2)^2-\left[(u-a)x^2-bx+(u^2/4-c)\right]=0. \qquad (2)$$

此式當爲平方差時方易解；由是令第二項爲平方式，故有：

$$b^2-4(u-a)(u^2/4-c)=0,$$

卽是 $$u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0. \qquad (3)$$

解此三次方程式，以定 u 之値，俾原方程式爲平方差。設 u_1 爲(3)之三根之一之値。以 u_1 代 u 入(2)，則下列兩二次方程式爲(2)之同解式：

$$x^2+\sqrt{u_1-a}\ x+\left[u_1/2-b/2\sqrt{u_1-a}\right],$$

$$x^2-\sqrt{u_1-a}\ x+\left[u_1/2+b/2\sqrt{u_1-a}\right].$$

解此兩二次方程式，得(2)之根，亦即(1)之根。

此法爲 Ferrari 氏法。

VI. 四次方程式之解法B. 凡四次方程式均可化爲

$$x^4+px^2+rx+s=0$$

之形。設 $x^4+px^2+rx+s=(x^2+kx+L)(x^2-kx+m)$；

較比其兩節中 x 之同次羃之係數；得：

$$L+m-k^2=p,\quad k(m-L)=r,\quad 及\ Lm=s.$$

由此三個等式之前兩個有：

$$2m=k^2+p+r/k,\quad 及\ 2L=k^2+p-r/k;$$

代入第三個，得

$$(k^3+pk+r)(k^3+pk-r)=4sk^2,$$

或 $$k^6+2pk^4+(p^2-4s)k^2-r^2=0.$$

此爲 k^2 之三次方程式，解之可得 k 之値；由是 L 與 m 者均可決定，而原四次方程式則可由解其同解式

$$x^2+kx+L=0, \quad 及\ x^2-kx+m=0,$$

而得其解矣.

此法爲 Descartes 氏法.

方程式之高於四次者，以類此之初淺方法，均不能解；此事 Abel 氏於1824年嘗証明之. Hermite 氏於1858年求得一法；利用一種函數，謂之橢圓函數者，以解五次普遍方程式. 近世疇人已證明任何次之一般方程式，均可以其係數表其根；其法須利用一種函數，謂之 Fuchsian 者. 在此爲顧及「中等算學」四字之範圍起見，均不詳論之. 惟高於四次之方程式，在特殊場合，亦有可用初淺之法以解之者，如一切之二項方程式，及九次以內之反商方程式恒可解.

VIII. 二項方程式. 凡二項方程式均可寫作

$$x^n-r=0 \tag{1}$$

之形. 顯然 r 之 n 個 n 次根卽此方程式之 n 個根. 故欲解此式，但求 r 之 n 個 n 次根即可. 因

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

之 n 個値爲在 $$\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

中,命$\sqrt[n]{r}$爲r之算術的n次根;k爲0,1,2,⋯,n−1等n數,所得之n個値. 又因在(1)中,r爲實,故$\theta=0$;由是(1)之根爲在

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]$$

中,命$\sqrt[n]{r}$爲r之算術的n次根;k爲0,1,2,⋯,n−1等n數所得之n個値.

Ⅷ. 反商方程式. 凡奇次反商方程式均含有一根+1,或−1;故解奇次反商方程式,可移去其因式x−1,或x+1;而解所餘之偶次反商方程式. 由是一切之反商方程式均可寫作

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0=0 \qquad (1)$$

之形. 以x^m除之,而集合同係數之諸項得:

$$a_0(x^m+1/x^m)+a_1(x^{m-1}+1/x^{m-1})+\cdots+a_m=0 \qquad (2)$$

令$z=x+1/x$, 則吾人可將第一個括弧化爲z之m次式,第二個化爲m−1次式,餘仿此;由是將原方程式化爲z之m次方程式,其法如下:

因 $$x^{p+1}+1/x^{p+1}=(x^p+1/x^p)(x+1/x)-(x^{p-1}+1/x^{p-1});$$

在此中依次令p=1,2,3,⋯;有:

$$x^2+1/x^2=z^2-2,$$

$$x^3+1/x^3=z^3-3z,$$

$$x^4+1/x^4=z^4-4z^2+2,$$

$$\cdots;$$

如此漸次化下去,終可將(2)中之第一個括弧化爲z之m次式,原方程式化爲z之m次方程式. 解所化得之方程式即可得原方

程式之根．設 m 爲4，或小於4；則原方程式爲8次之反商方程式，或低於8次者；可由解所化得之4次方程式，或低於4次者，以求其根．但9次反商方程式含有根 $+1$，或 -1，故在其中移去因式 $x-1$，或 $x+1$，所餘者爲8次反商方程式，亦可解．由是反商方程式之可解者至9次爲止；至於10次，或10次以上者，則不可解矣．

方程式之能有代數的解法者，不過如是數種而已．此外之方程式，均須用數値法解之．使作者他日有暇，當更撰文專論方程式之數値解法，以饗閱者．

不等式淺說（續）

蕭文燦

III 誘導定理

定理8． 若 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$ 皆爲正，則

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots\cdots(1+a_{n-1})(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

若 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots a_n$ 皆爲正且小於1則

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots\cdots(1-a_n)>1-a_1-a_2-\cdots\cdots-a_n.$$

（證明）$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots\cdots(1+a_n)$

$$=1+\Sigma a_1+\Sigma a_1a_2+\Sigma a_1a_2a_3+\cdots\cdots+a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n-1}a_n ※$$

$$>1+\Sigma a_1.$$

故 $$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots\cdots(1+a_n)>1+\Sigma a_1.$$

※ Σa_1 乃表 $a_1, a_2, \cdots a_n$ n個文字之總和．Σa_1a_2 乃表 $a_1, a_2, \cdots a_n$ n個文字中每取兩個之積總和，餘類推．

至於後一部分,可証如次:

$$1-a_1=1-a_1.$$

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-a_1-a_2+a_1a_2>1-a_1-a_2.$$

因 $1-a_3>0$, 所以

$$\begin{aligned}(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)&>(1-a_3)(1-a_1-a_2)\\&>1-a_1-a_2-a_3+a_3(a_1+a_2)\\&>1-a_1-a_2-a_3.\end{aligned}$$

又 $1-a_4>0$; 所以

$$\begin{aligned}(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)&>(1-a_4)(1-a_1-a_2-a_3)\\&>1-a_1-a_2-a_3-a_4(a_1+a_2+a_3)\\&>1-a_1-a_2-a_3-a_4,\end{aligned}$$

由此類推,即得

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-a_1-a_2-a_3-\cdots\cdots-a_n.$$

定理 9. n 個正數之等差中數,不小於其等比中數.*

本定理乃不等式最重要之定理,極大極小之問題之解法,多根據於此. 其証明方法甚多,今舉數証於次,以見一般.

(証) 假定本定理對 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之 n 個正數爲眞,卽假定

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\not<\sqrt[n]{a_1\ a_2\cdots\cdots a_n}$$

則 $$a_1+a_2+\cdots+a_n\not< n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

今兩邊各加 a_{n+1} 則

---

* $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 稱爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ n 個數之等差中數 (arithmetical mean 亦稱相加平均或算術平均). $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 稱爲 $a_1, a_2, \cdots a_n$ n 個數之等比中數(geometrical mean 亦稱相乘平均或幾何平均).

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}\nless n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+a_{n+1}$$

故只須証明 $n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+a_{n+1}\nless(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}$

即可．依定理6，p 不在 o 與 1 間，則

$$px^{p-1}(x-y)>x^p-y^p.$$

今令 $x=\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$，$y=1$，$p=n+1$，

則 $(n+1)\left(\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left\{\left(\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right\}>\left\{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right\}^{\frac{1}{n}}-1.$

但因 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$，所以

$$n\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n}}+1>(n+1)\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

故 $$n\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^n}\right)^{\frac{1}{n}}+1>(n+1)\left(\frac{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}{a_{n+1}^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

兩邊以 a_{n+1} 乘之，即得

$$n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}+a_{n+1}>(n+1)(a_1a_2\cdots\cdots a_na_{n+1})^{\frac{1}{n}}.$$

若 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n+1}$ 之時，則

$$n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}+a_{n+1}=(n+1)(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})^{\frac{1}{n+1}},$$

故 $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\geqq(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

然於 $n=2$ 時

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqq\sqrt{a_1a_2},$$

已於第I章証明爲眞故 $n=3,4,5,\cdots$ 時爲眞，因而知 n 爲一般値時亦眞．

（証二）令 $\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=A$，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G$．

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有其最大數(假使爲a_1),有其最小數(假設爲a_n),今以其等差中數$\frac{a_1+a_n}{2}$與$\frac{a_1+a_n}{2}$各代之,則A之値不變.但因$\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2>a_1a_n$,故G之值增大.

在此新式中之最大數與最小數又各以其等差中數代之,則A不變而G又增大.如斯繼續置換,A終不變,而G繼續增大.最後不相等之$a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$悉變爲相等之a,而A與G始相等.可見$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$不相等時之A,悉大於G,而諸a_n相等時,A始等於G也.

即
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

(証三)令 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$, $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G$.

選出$a_1,a_2,\cdots,a_n$中之最大數,設爲a_1,最小數設爲a_2,則

$$a_1a_2=kG$$

中之k,可以求得.然因G之値在a_1與a_2之間,故k亦不得不然.而比例式

$$a_1:G=k:a_2$$

四項中,最大項與最小項之和,比其他二項之和大,容易証明,卽

$$a_1+a_2>G+k.$$

今$a_1,a_2,\cdots a_n$中之a_1與a_2以G與k代之,則G値不變而A値變小.

次將$k,a_3,\cdots\cdots,a_n$ $n-1$個數中之最大數與最小數,亦以同法所得之L與G代之,則A減小而G不變.如斯繼續推行,則最終a_1,

$a_2, \cdots a_n$ 悉變爲 G，而此時之 A 爲 $\frac{G+\cdots+G}{n}$，即等於 G．換言之，A 既經減小之後，乃等於 G，則不經減小之前，必大於 G 明矣．故定理云云．

本定理之應用，以極大極小爲最著．蓋由第二証法，易知次之定理爲眞：

1．若 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 皆爲正數，而 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 之和常等於定數 k 則乘積 $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 於 $a_1=a_2=\cdots\cdots a_n$ 時爲極大，且其極大值爲 $(k/n)^n$．

例1． 周圍一定之矩形，其面積最大之時爲何？

（解） 設定周 $=2p$，矩形之兩邊爲 a,b．因

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab},$$

而 $a+b=p$， 故 $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geqq ab.$

即矩形之面積 ab，不能大於 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$，即 $\frac{p^2}{4}$，而此時 $a=b$．故有定周圍面積最大之矩形爲正方形．

由第三証法易知次之定理爲眞．

II 若 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 爲正數，而乘積 $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 常等於定數 k，則其和 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 於 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ 時爲最小且其最小值爲 $nk^{\frac{1}{n}}$．

例 2 有定面積之矩形，其周圍最小之時爲何？

解 設定面積爲 k^2，則因

$$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}, \qquad \text{而} ab=k^2,$$

即 $a=b=k$ 時,其周圍爲最小,其時爲正方形.

定理 10. $a_1, a_2, \cdots a_n$ 爲 n 個正數, $p_1, p_2, \cdots p_n$ 爲 n 個正有理數,則

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n} \not< \left(a_1^{p_1}\, a_2^{p_2}\, a_3^{p_3} \cdots\cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots p_n}}$$

(証明) 將 $p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots p_n$ 通分,設各爲

$$\frac{m_1}{d},\ \frac{m_2}{d},\ \frac{m_n}{d},\cdots\cdots\cdots,\frac{m_n}{d};$$

其中 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$, d 皆爲正整數。故所設之不等式成爲

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots\cdots+m_na_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n} \not< \left(a_1^{m_1}\, a_2^{m_2} \cdots\cdots a_n^{m_n}\right)^{\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_n}}.$$

故只須証明 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 皆爲正整數時即足矣。 然此乃定理 9 之特殊情形。 何以言之?蓋即 $(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)$ 個正整數之內,其中有 p_1 個皆等於 a_1, p_2 個皆等於 $a_2, \cdots\cdots, p_n$ 個皆等於 a_n 是也.

故本定理爲眞.

定理 11. n 個正數之調和中數*不大於其等比中數.

(証明) 設 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$, n 個正數之等比中數以 G 表之,則

$$G=\sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots\cdots a_n}.$$

設 H 爲調和中數則依其定義

$$\frac{1}{H}\left(=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)/n;$$

* n 個數之逆數之等差中數之逆數,即稱爲調和中數(Harmonic mean),設 H 爲調和中數,則 $\frac{1}{H}=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_2}\right)/n$.

而 $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, ……, $\frac{1}{a_n}$ 之等比中數,爲$\frac{1}{G}$. 故依定理9.

$$\frac{1}{H} \geqq \frac{1}{G}.$$

故 $$G \geqq H.$$

設等差中數以 A 表之,則依定理9,易見

$$A \geqq G \geqq H.$$

定理 12. $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$; $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 皆爲正數,則於 $m<o$ 或 $m>1$ 時

$$\frac{p_1a_1^m+p_2a_2^m+\cdots\cdots+p_na_n^m}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n} \not< \left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}\right)^m \qquad (1)$$

於 $0<m<1$ 時

$$\frac{p_1a_1^m+p_2a_2^m+\cdots\cdots+p_na_n^m}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n} \not> \left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}\right)^m. \qquad (2)$$

(証明) 設令 $\frac{p_1}{\Sigma p_n}=\lambda_1$, $\frac{p_2}{\Sigma p_n}=\lambda_2$, ……, $\frac{p_{n-1}}{\Sigma p_n}=\lambda_{n-1}$, $\frac{p_n}{\Sigma p_n}=\lambda_n$;

及 $\frac{a_1}{\Sigma\lambda_na_n}=x_1$, $\frac{a_2}{\Sigma\lambda_na_n}=x_2$, ……, $\frac{a_{n-1}}{\Sigma\lambda_na_n}=x_{n-1}$, $\frac{a_n}{\Sigma\lambda_na_n}=x_n$,

則 $$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=1, \qquad (3)$$

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3+\cdots+\lambda_nx_n=1.$$

今 (1),(2) 之兩邊以

$$\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^m$$

除之,則將

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1x_1^m+\lambda_2x_2^m+\cdots+\lambda_nx_n^m \not< 1 \\ \lambda_1x_1^m+\lambda_2x_2^m+\cdots+\lambda_nx_n^m \not> 1\end{array}\right\} \qquad (5)$$

即 $\Sigma\lambda_n x_n^m \nless 1 \quad (m<0, m>1),$

$\Sigma\lambda_n x_n^m \ngtr 1 \quad (0<m<1).$

由定理 5，於 $m<0,\ m>1$，時，

$$x_1^m-1\nless m(x_1-1),$$
$$x_2^m-1\nless m(x_2-1),$$
$$x_3^m-1\nless m(x_3-1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$x_n^m-1\nless m(x_n-1),$$

諸不等式成立，今分別以 $\lambda_1, \lambda_2\cdots, +\lambda_n$ 乘而加之(因皆爲正)

即得
$$\Sigma\lambda_n(x_n^m-1)\nless\Sigma\lambda_n m(x_n-1)$$
$$\nless m\{\Sigma\lambda_n x_n-\Sigma\lambda_n\}$$
$$\nless m(1-1) \quad [\because(3)與(4)]$$

故 $\Sigma\lambda_n x_n^m\nless 1.$

同樣可証於 $0<m<1$ 時，

$$\Sigma\lambda_n x_n^m\ngtr 1;$$

故本定理成立.

若 $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n$ 時，可得其特殊情形之定理，即

$$\frac{a_1^m+a_n^m+a_{r3}^m+\cdots+a^m}{n}\nless\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a^n}{n}\right)^m (m<0, m>1),$$

$$\frac{a_1^m+a_2{}^m\cdots+a_n^m}{n}\ngtr\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m \quad (0<m<1).$$

(完)

塔他格利亞

(Tartaglia 1500—1559 A. D.)

瘦　桐

塔他格利亞是十六世紀意大利的一個大算學家，1500年生於Brescia, 1579年12月14日死于Venice. 他的眞名叫做Niccola fontana, 這"塔他格利亞"是他的綽號,原文乃"口吃者"(Stammerer)的意思.

1512年法軍攻陷Brescia城，許多的居民都逃入寺院中避難,然終爲殘酷的士兵所虐殺,塔他格利亞的父親,身爲郵差，竟難倖免. 比時他不過十二歲，當衆演說止暴，致觸法軍怒,也被刺傷. 他的頭部受傷三處,齒腭全被割破,丢在那裏等死. 他的母親到寺院裡尋找着他，仆臥地上，一息待斃,設法把他背了出去,用口去舐吮他的創痕,居然也就慢慢地醫治好了. 可是他因爲上腭受傷太重的緣故，以致終身說起話來，總是急急結結的，所以得着這口吃的綽號.

塔他格利亞天資穎悟，他的母親頗器重他，盡出所有的錢，給他讀書習字. 但因爲太窮,只能供給他十五天的學費,連紙張都買不起,常常拿別人的墓碑作爲石板來演算學;而他並不以此自障,卒崛起爲當代著名代數大家,歷任Verona, Vicenza, Brescia, Venice等處的算學講師.

塔他格利亞最大的發明,就是三次方程式的解法,使他著名

於時的，也就在此。約當1535年他正在 Venice 做算學教授的時候，有一個也負盛名的算學家名叫斐阿利 (Antonio del fiori)，要和他比賽算學．雙方約定各出賭品若干，請一個人作中証，彼此交換 30 個問題，限定 30 日交卷．誰的問題解得多，就算勝利．

斐阿利曾經從他的師傅弗羅 (Scipione ferro, 1525 年死于 Bologna.) 學得某一種特別的三次方程式的解法，——但不過是塔他格利亞的一個特例——此解法當時在歐洲尚不知道，大抵是弗羅從亞剌伯算學書上所發見，轉而傳授給斐阿利的。塔他格利亞深知他的敵人所恃的利器，不過如斯而已，預料他的敵人所設的問題，無非是些三次方程式的求解．

到了比賽的那一天，果然不出所料，他所得到的盡都是三次方程式的問題．他不要兩個鐘頭，全把牠化做 $x^3+px=q$ 的形式，一一解答出來；而他的對方關於他所設的問題，却一個也解不出．於是塔他格利亞遂大獲全勝，並特賦一詩以爲紀念．

塔他格利亞雖發明了三次方程式的解法，但秘而不宣，尚未發表．其時另有一個算學家名叫迦丹 (Cardan)，聽說塔斐兩氏比賽算學的故事，一再向他央求傳授他所發明的解法。塔他格利亞起初無論如何總不肯答應，後來被迦丹苦苦的糾纏不過，由迦丹先發誓永不洩露秘密，也就允許一一告訴他了。誰知不久，這位不顧信義的迦丹，竟違背誓約，發表在他的著述上．塔他格利亞因此氣憤成病，不到幾年就死去了．這實在是算學歷史上一件不平的事！

初等算學教授法(續)

DAVID EUGENE. SMITH 原著

道彌譯述

5,負數 負數爲學習代數過程中之第一難關. 究以何時引入負數爲宜,各說紛紜不一. 有以爲須最先引入爲代數之基本概念者,有以爲須將正數之四則敎畢後,再將負數之四則,重敎一次者,此與上說適得其反. 敎者各行其是,而效果則瑕瑜互見. 如前所云,有以爲"$-a$"必讀爲"負a",而不能讀爲"減a",以免"減"字一字兩用,易生紛亂. 但又有(大多數作家均如此)以爲"減"字之雙關意義,已爲一般所承認,正可不必白費氣力以分別之也. 由此種意見之分歧,可知負數之何時引入與如何引入,實爲無關重要之問題.

余任課堂上講授負數時,未覺有何困難,據多次試驗之結果,每喜採用下法:先授以簡易函數之求值法,俾於代數之初步,得實踐之機會. 再以簡易方程式以引起學生之興趣,幷包括如 $\sqrt{x}+2=8$ 及 $\sqrt{x+1}=3$ 等等之形式,於是說明除算術中普通所用之數外,有另一種數之必要,遂推至負數及零矣.

負數之初步解釋,當然不能爲充分科學的,敎師於此,勢必充分利用圖解及學生習見之事物. 如零度下二度及紀元前五十年之記法,南北緯度東西經度之符號,舉凡此等事實,皆可以引起一種數之記法,此種數恰與通常數(正數)分居於零點之兩側. 至於舉實例時,則全在乎敎師及學生之靈巧. 如氣球空時及有氣體時之重量;一人之本金 \$5000後虧折 \$3000,\$5000,或 6000;十磅重之木塊與上升力二十磅之氣球相合之重量,並以見"十磅減二十磅",確有其事.

如是開端,則在一直線上之正負數表示法,當非難事. 此後再敎以科學化之說法,如在方程式 $x+3=1$ 之解法中,可以顯明負數之需要. 再敎以負數及絕對值之定義,因以完成關於負數之初等理論.

然負數之講授幷非必須圖解法. 由代數立場而言,圖解法爲偏於心理的,而忽

於科學的．昔孔德有言曰："至於負數，曾引起許多誤解，或以其爲不合理，或以其爲不合用，而於其抽象意義與具體解釋之區別，雖至今日猶自混爲一談．其實就抽象方面言之，則只須代數的方法，足可成立負數之理論"．（註一）雖此說至今仍遵之，然於初學之際，便於理論方面加以詳細之討論，似尙非其時耳．

教師必須使學生明白＋－兩號，有兩個不同之用法：一爲演算符號，如10－8；一爲性質符號如－8．高西 Cauchy(註二)曰．"＋及－符號形容數量而置於其前，一如形容詞之形容名詞然"．同樣，"加"plus及"減"minus 二字亦有兩個不同之用法，如"一加量" a plus quantity 及"a加b"a plus b．固然"加a"及"加量"，不如云"正a"及"正量"，更爲正確；但理論上儘管隨意，而實際上世界之大算學家，均採用簡便句法，以後或仍繼續如先用法也。

舊教本中常有許多無用之教材，其最無聊者，爲"減一減量爲正"及"負乘負得正"之証明，蓋此等事決不能有新證法也．算學家深知－a．－b＝＋ab，實爲負數乘法定義之當然結果．若欲改此定義，則乘法之結果亦必隨之而變．但望教師能說明何以算學中 －a．－b 之定義與 ＋a．＋b 相同，而何以其他定義，則不相合？此理甚易說明，但舊式教本中所謂"証明"則不可用耳．此等"証明"中之爲人所津津樂道者，有如次述：因－b乘以a得－ab，故若乘數之符號變更，則乘積之符號亦必變更．此如可謂爲證明，是猶云因白人某甲履黑鞋，黑人某乙必履白鞋，天下寧有是理哉！

6.核算， 橫過大西洋之汽船，啟椗不久，便於 Southampton 附近觸礁，船主聲稱由於彼計算時，曾有數里之差誤．此從千累萬之損失，乘客生命之危險，只因計算時未核算之故而已．故無論任何計算，第一要義卽將演算之各步驟逐漸核對，此在學生初學代數時，卽應令其得一深入之印象．此種手續，或稱核算，或稱

（註一）見 Comte 著 The Philosophy of Mathematics, Gillespie 之英譯本 P.81 N.Y. 1851,

（註二）高西(1789－1857)生於巴黎，爲當時著作最豐之算學家．對於純粹算學及應用算學均有極大之貢獻．

檢驗.或稱證實,均無甚關係,而實際上檢查各步驟中是否錯誤,乃為極重要之事.

教師所以授學生者,須為何種核算法,勢不能盡舉. 今略及其較普通者如下:

在解方程式時,其惟一而完備之核算法,即將所得之結果,代入原方程式中.(若為應用問題,則應驗所得答解,是否合題). 無論所用為何公理,演算如何細心,若核算已對,則結果正確,否則錯誤. 克里斯推有言:"以所得變數之值代入方程式而能適合之,斯為解法之最終判定. 無論得到解答之演算如何巧妙,若核而不合,決不可謂之為解答. 反之,無論得到解答之方法如何簡易,若核算相符,即為正當之解答矣."(註一)洪閎西 Henrici 教授以不同之口吻表相同之意見曰:"解方程式,其意并不僅在求得適合其式之某數,乃遵照一種有規律的步驟,逐步推算,最後求得一數,學者若不明此義,則解方程時一切所施之化簡工作,實為無意義而單調之舉,且所求得之答數與原方程式之關係,在彼或將毫無所知也"(註二)

今以方程式 $x+2=3$為例. 設以 $x-2$乘此方程式之兩端,結果必等,故得 $x^2-4=3x-6$,即 $x^2-3x+2=0$。解之,得 $x=2$ 或1。是雖嚴格遵守公理然而 $x=2$ 并不能適合原方程式. 學生解方程式時,其能核算者,方不失為能手,至於答案,不過在特別複雜情形時一用之而已.如是則學生必能自知其結果之正確與否,或竟比教師知之更穩焉.

應用於代數演算最有效用之核算,為採取任意值之法. 無論以何值代a及b, $(a+b)^2$ 必恆等於 $a^2+2ab+b^2$。換言之,即可以任意值代 a 及 b 而觀此兩形式是否相同,例如,設 $a=2,b=3$, 則$(2+3)^2=2^2+2.2.3+3^2$,均為25,故相同. 又如有一學生以為

$$(x^2+3x-5)(x^2+2x-1)=x^4+5x^3+x^2-13x+5,$$

結果對否?今以任意值代x,設為1,則約化為

$$-1\cdot 2=-1$$

(註一)見氏所著之代數第一冊28頁。

(註二)見洪氏1883年在British Association 中 Section A 之主席演詞.

此結果確乎?當然不對,故原式有誤。1為取任意值時最便之一數,蓋因1之任何次乘方仍為1,故可免去指數之核算而減少錯誤．但若式中發現零時,則不能用,如欲核算

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1,$$

即不能用1以代x矣．不只如此,凡使式值為零之任意值,均須避免也．

另一核算法為算學家所常用者,則為利用算式之齊次性(Homogeneity)．此名詞雖冗長,其方法卻甚簡易．"雖齊次一語,當於代數之前數頁中即有定義,然學生於其意義仍毫無所知因未曾用慣也．"(註一)此法所根據之事實,即若兩整函數為齊次的,則其和,差,積及乘方,仍為齊次的。例如,a^3+ab^2 及 a^2+ab 之積為 $a^5+a^3b^2+a^4b+a^2b^3$,蓋因一個三次及一個二次之齊次函數之積,必為一個齊五次函數也．若所得結果為 $a^5+a^3b^2+a^3b+a^2b^4$,並非齊次的,則知必有錯誤． 齊次函數在算學中,佔重要之位置,故此種核算亦甚為重要也．

尚有一核算法,應用較少,但因其易於施行,亦有相當價值,是即對稱性(Symmetry)．兩函數對於某幾文字為對稱,則其積對於該文字等亦為對稱．例如,x^2-xy+y^2 及 x^2+xy+y^2 對於 x 及 y 為對稱． 因此二字之位置彼此互換,不變函數之形式．故其積可為 $x^4+x^2y^2+y^4$,但不能為 $x^4-x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$,後之一式,雖用 $x=1$ $y=1$ 任意值及齊次性核算之,均無謬誤,卻非其積,因其不對稱也．

上所述之前二法為一般所常用,後一法雖有價值,但並非必需用者．

7．析因式法。 代數中之最重要者為析因式法,前已言之．學生往往費許多時間以演算不必需之乘法,而不採用析因式之簡單形式．例如,解方程式

$$\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x-1}=x^2+4x-1$$

時,若起手即去分母,則於理論上實際上均感困難,既引入不屬於此方程式之根,又費去不必需之演算．彼應知 $x-1$ 為 $2x^3+3x^2-4x-1$ 之因式,其實會者不難,稍

(註一)Heppel,G. 在1895年 Mathematical Gazette 二月號中語．

事注意，即事半功倍矣．

現代教本對於析因式法，確已較前進步，然尚有可商榷之處． 教本中對於此法常分成各種情形論之，如 x^2+ax+b, x^2-ax+b, x^2+ax-b, 等等，如此分法，並無若何區別，且興趣為之減少． 在排列習題時，於 x^2+ax+b 之形式以後，繼以 x^2-ax+b 之形式，非無教學上之價值，但並非最好之分配，則可斷言． 殊令人想到十六世紀時，以一法解二次方程式 $x^2+px+q=0$，又一法解 $x^2-px+q=0$，又一法解 $x^2+px=q$ 等等． 如此則學生永不能得一通法以應付 x^2+ax+b 之一般形式(就中 a 及 b 可正可負)．但據良好教師之經驗，知學生對於通法，不久便能運用自如，正不必如教本反覆周詳後，方能得其訣竅． 特例固可置於通例之先，但只述特例而不提及通例，則為一大錯誤矣．

蓋析因公式，在以後用途較大者，只有數種．其最要者為：(1)含單項因式之形式 $ab+ac$；(2)x之二次三項通式 ax^2+bx+c；(3)含有二項因式 $x-a$ 之形式．對於初學者，當然仍有細分之必要．至於不屬於上三類，如

$$x^4+x^2y^2+y^4 \text{ 及 } x^3+y^3+z^3-3xyz$$

等式之因式，儘可以視為心理上之訓練，而不必再列為分類也．

x^2+bx+c 之形式，實已包含各種特例，如 $x^2+2ax+a^2$, x^2-a^2, $x^2+(a+b)x+ab$ 等，其中 a 及 b 可正可負，是皆應於通例之前述之． 此各種特例，教科書中討論甚詳，而於通例 ax^2+bx+c 反簡略之．解決通例之方法甚多，今僅述其有價值之二法如下．

第一；如

$$\begin{aligned}6x^2+17x+12&=6x^2+9x+8x+12\\&=3x(2x+3)+4(2x+3)\\&=(3x+4)(2x+3).\end{aligned}$$

此處將17分為兩部份，而使其積為6×12，其餘之工作甚易．一般言之，於 ax^2+bx+c中，分b為兩部份而使其積為ac．其理由可於下式見之，即

$$(mx+n)(m'x+n')=mm'x^2+(mn'+m'n)x+nn';$$

此處 x 之係數由mn',及m'n兩部份而成，而其積卽爲mm'.nn'.

第二，使x^2之係數成爲一平方，如

$$6x^2+17x+12=\frac{1}{6}(36x^2+17.6x+72)$$

今設 $y=6x$，則

$$\frac{1}{6}(y^2+17y+72)=\frac{1}{6}(y+9)(y+8)$$

$$=\frac{1}{6}(6x+9)(6x+8)$$

$$=(2x+3)(3x+4).$$

應採用此二法中之何者，無甚關係，其每一法之理由，亦甚明顯．但通常所用嘗試之方法，卽取 $6x^2$及12之所有因數，拆開而猜之，其不足爲訓，可以不言而喻．

含有二項因式 $x-a$ 之形式，爲初等代數中最重要者，因其在方程式論中用途極大也．析此種因式時，須利用剩除定理(Remainder Theorem)惜其每見於書末，致不能大顯其用耳．此定理謂：x 之整函數，以 $x-a$ 除之，所除之數，可以 a 代函數中之 x 而先求得之．例如，$x^4-x^3+5x^2-16x+11$ 除以 $x-1$，因 $1-1+5-16+11=0$，故知其無餘；但若除以$x-2$，則餘7，蓋因

$$2^4-2^3+5\cdot2^2-16\cdot2+11=16-8+20-32+11=7.$$

仿此，$x^{17}-y^{17}$ 可以 $x-y$ 除盡，因以 y 代 x 則

$$x^{17}-y^{17}=y^{17}-y^{17}=0.$$

但不能以 $x+y$ 卽 $x-(-y)$除盡，因以 $-y$ 代 x 則

$$x^{17}-y^{17}=(-y)^{17}-y^{17}=-y^{17}-y^{17}=-2y^{17}$$

爲剩餘．此定理之證法甚易，其在初等代數中之用處，難以估計．茲舉其證法於次，但對於初學者，不免稍嫌簡略耳．

設 $f(x)$爲被除式，$x-a$ 爲除式，q 爲商式，r 爲餘式，則

$$f(x)\equiv(x-a)q+r$$

r中不能再含有x. 此為恆等式對於x之任何值皆為真確，故於 $x=a$ 時亦然. 但若以a代x，則得

$$f(a)=r,$$

故餘式與 $f(x)$中以a代x所得結果相同.

此理論並不艱深，實用上亦頗簡易，教師欲使學生了解，當無難處.

不幸多數教本，於講授析因式法時，不憚煩勞，詳為論列，但講解即束之高閣. 承其後者，往往為最高公因式，其中應用析因式法之處，常可謂極少，因大都用輾轉相除之法也. 於最低公倍式以後，即論及分數，令學生應用所學求最高公因式之方法，以約化分數，但事實上約分數概極簡單，並不必用如輾轉相除之繁重方法. 除此之外，析因式法更無其他應用矣.

如何可以補救此弊乎？請觀算學家對於應用析因式法之意見. 析因式法有兩種用途；第一，用以解方程式，第二，用以化簡演算，如約化分數使成較易演算之形式是也. 故於析因式法後，即宜繼之以簡易方程式，至約化分式時，簡單之例，宜充分利用析因式之方法，至於輾轉互除求最高公因式之法，可留以解決較煩難之例.

應用析因式法以解方程，為事絕簡. 解方程式之意，即求一個x之值，使其左端為零. 今能使 $x-a=0$ 之x之值，當然為a. 又能使 $x^2-3x-4=0$，亦即能使 $(x-4)(x+1)=0$ 之x之值為4及-1，蓋因 $x=4$ 得 $0\times5=0$，若 $x=-1$，則 $-5\times0=0$. 仿此，能使

$$x^3-a^2x=0 \quad 即 \quad x(x+a)(x-a)=0$$

之x之值為0，$-a$，及a. 依此，方程式之根為有理數者，概可解決，故教本於此，應置入此類方程式，及一次以上方程之應用問題，如是則學生開卷，便覺興趣盎然，析因式法可得充分練習之機會，又可預為二次方程式立基礎，一舉數得，甯非至善. 學生經此訓練，在學習二次方程式時，可不必費時間於配方法以求方程式 $x^2+2x=0$，$x^2+5x+6=0$ 之解法矣！無論用何課本，若採取此法，費時極少，而獲益則良非淺鮮也.

於分數式中應用歐幾里得求最大公因式法(註一)以約化

$$\frac{x^2+7x+10}{x^2+9x+14} \quad 及 \quad \frac{x^3+6x^2+3x-10}{x^3+8x^2+5x-14}$$

等式,乃鼓勵學生置析因式之初等方法不用而白費其時間也.(註二).

8. 二次方程式. 初等代數中最後一章,常爲二次方程式,一般教本於此多注重機械的演算,如加 x 係數之半,開出平方根,遷項,‧‧‧此其規則也.至于結果之確實性反不重視.此種解法原有歷史的背景,昔時之算學家,因無更好方法,不得不如此解之,今日仍師其故智,習慣之難改,有如是者.

以言機械的運算,上法猶未見其澈底.爲實用起見,學生必須一見方程式如 $x^2+2x+3=0$ 便能寫出其根,而不須用配方法.以此爲目的,則公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$$

應熟記之如背誦乘法表然.用配方法於方程式而不加思索,則於訓練思想及實用方面兩無俾益,蓋就前者言邏輯之意義不顯,就後者言,直爲煩瑣厭惡之手續也.

處理二次方程式最好之方法,即爲析因式法.此方法既簡單又普遍(不限於二次方程式)時時練習,以迄二次方程式章止,可使析因式法,常留腦際.當學生習至二次方程式章時,已能運算一般矯揉造作之應用問題,其方程式之根,皆爲較小之整數.至根之爲較大整數者,則須用他法,配方法卽因是而生,蓋舊法解二次方程式係用幾何的方法,故有配方之名詞.用此法之結果,可以證明

若 $x^2+px+q=0$.則 $x=-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$,

解 $ax^2+bx+c=0$ 之公式,卽由是而來.此公式在代數後部中甚爲重要,學者宜多多練習,庶可運用自如.若每遇方程式,卽用配方法,實爲無聊之至,猶之令學生以

(註一)卽輾轉相除法.

(註二)"如求 G.C.M 之演算,除在考試時外,實無實用之機會".Henrici,主席演詞,見前註.

13自加三次,而不令其以3乘13也.

教本中常加述解二次方程式之另一法或二法,此適足以亂學生之心思而不能助之,其爲用僅可加增歷史的興趣,而非教學上所必要也. 但爲教師者,則須知標準解法,不只一種,茲將歷史上所有解法,略述如下:

波刺哈馬古布塔 Brahmagudta 及巴斯卡拉 Bhaskara 之方法,(註一)

設 $ax^2+bx=c$,

則 $4a^2x^2+4abx=4ac$

$\therefore\ 4a^2x^2+4abx+b^2=4ac+b^2$

$\therefore\ 2ax+b=\pm\sqrt{4ac+b^2}$

$\therefore\ x=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{4ac+b^2})$

此方法謂之印度方法,今完全以近代符號之形式寫出. 此法之優點在免除分數,直至最後一步始出現.

阿耳格瓦樂密及奥馬開哈約 Omarkhayyam 之方法. (註二)

設 $x^2-px=q$.

則因 $x^2-px+\frac{p^2}{4}=(x-\frac{p}{2})^2$,

$\therefore q+\frac{p^2}{4}=(x-\frac{p}{2})^2$,

$\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}=x-\frac{p}{2}$.

即 $x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$.

(註一)波刺哈馬古布塔爲印度人,生於598年. 巴斯卡拉,亦印度人,生於1114年,關於此方法可參看 Matthiessen 名著 Grundzuege der antiker und moderuen Algebra. P.282.

(註二)阿耳格瓦樂密,可參看本刊第一卷第五期代數之沿革一文中之第三節,奥馬開哈約爲阿刺伯人,約1045－1123,關於此方法可參看 Matthiessen 書309頁.

此方法與今日所常用者相同.

韋他 Vieta (1615)之方法(註一)

設 $$x^2+ax+b=0.$$

令 $$x=u+y,$$

則 $$u^2+(2y+a)u+(y^2+ay+b)=0.$$

因已加於 u+y 之條件只有一個,故可再加一個,卽設

$$2y+a=0.$$

則 $$y=-\frac{a}{2}.$$

卽 $$u^2-\frac{1}{4}(a^2-4b)=0.$$

故 $$x=u+y=-\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}.$$

如此則不用配方法.

葛龍諾 Grunert (1863)之方法(註二)

設 $$x^2+ax+b=0.$$

令 $$x=u+y.$$

但 $$(u+y)^2-2u(u+y)+(u^2-y^2)\equiv 0.$$

$$\therefore\ a=-2u \quad 又\ b=u^2-y^2.$$

$$\therefore\ u=-\frac{a}{2},\ 又\ y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$$

由此得 x 甚易.

費始 Fischer(1856) 之三角方法,亦爲此種解法之一.

設 $$x^2-px+q=0,\qquad 且p^2>4q.$$

令 $$x_1=p\cdot\cos^2\phi \quad 爲一根,$$

(註一)參看 Matthiessen 書中311頁.

(註二)參看 Gruneret's Archiv, Bd.40.

$$x_2 = p\cdot\sin^2\phi$$ 爲他根．

則　　$$x_1 + x_2 = p(\mathrm{cso}^2\phi + \sin^2\phi) = p,$$

$$x_1x_2 = p^2(\sin\phi\cdot\cos\phi)^2 = \frac{1}{4}p^2\sin^2 2\phi.$$

但　　$$x_1x_2 = q, \quad \therefore \sin 2\phi = \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

例如．解方程式 $x^2 - 93\cdot7062\,x + 1984.74$．

則　　$2\phi = 71°\,57'\,44''.6$　　$\therefore \phi = 35°\,58'\,52''.3$,

故　　$x_1 = 61\cdot3607$,　　$x_2 = 32\cdot3454$.

由此法可見三角法實足以帮助某種二次方程式之解法也．

解二次方程式之其他方法尙多，讀者可參看梅際生 Matthiessen 所集之解法大全．由前所舉之各種方法，已足見廢棄一般所用之成法，採用析因式法及注重公式解法，並非炫奇立異之舉，不過就手下許多可用之材料中，加以賢明之選擇而已．

（未完）

世外奇談

(續)

A Square 原著　　乙閣譯

下篇

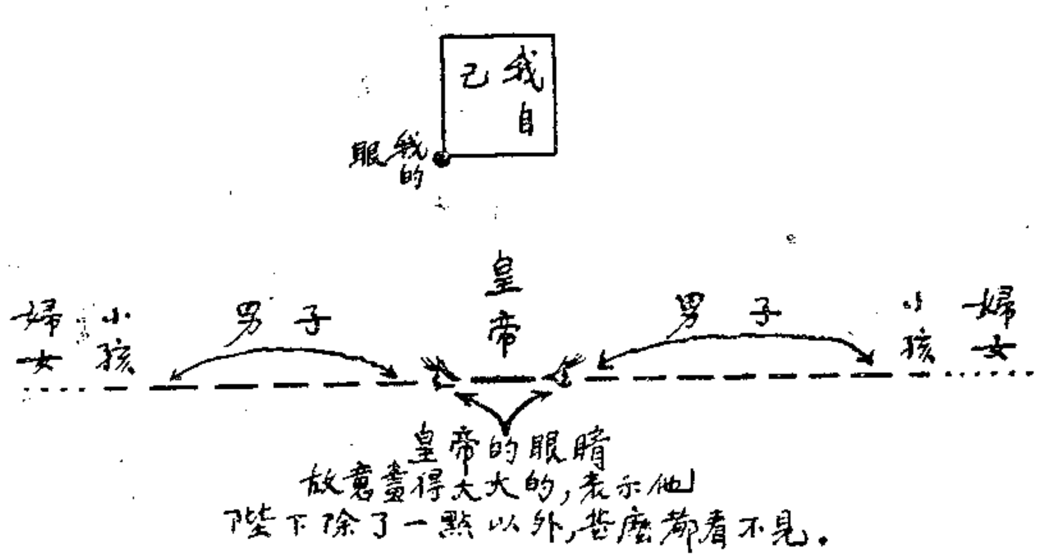
其他世界

13. 夢遊一元世界

那是我們紀元一千九百九十九年除夕前一日,也就是長期休假的第一天.玩弄了半天我那心愛的幾何遊戲,時間已是不早了,心裡還有一個問題沒有解決,我便丟下了去休息.這天晚上,做了一場大夢.

我看見許多條短短的直線(自然我總以為是婦女們)在我前面,中間夾着更小的東西,好像是光閃閃的點子一般,都在一條直線上來來往往的蠕動着,而且,據我仔細看來,動的速度是一樣的.

我之一元世界觀



一陣陣的嘈雜聲息從他們那裏發出來,祗要他們在動着,便亂七八糟的鬧個不

休;不過當他們停止運動時,便萬籟無聲了.

走近我所認爲是婦女的中間最大的一個,我先向她開言,但是沒得到回答. 我連二接三的發問,一樣沒有動靜. 我想這簡直是太不成話,眞有點惱了,便把我的口對準她的前頭,剛好攔住她的去路,大聲將我方纔所問的話,重說一遍:「女人!我且問你,你們這一大堆人聚在這裡幹什麽?爲什麽這樣吱吱喞喞的亂鬧?爲什麽單單的要在一條直路上來來往往的擺動?」

那短短的直線答道:「我不是女人,我是這世界裡的皇帝.你是何人,膽敢到我這一元世界的國度裏來胡鬧?」得到這出乎意料之外的回答,我立卽向他皇帝陛下請求寬宥,說驚擾聖躬,罪該萬死,幷告訴他說我是外界來人,懇祈他把他的王土內面的情形,敍說一番. 但是每逢我覺得有意思的地方,費了大大的事,還是不得要領;因爲這位皇上不知不覺地總以爲他所熟悉的我一定都知道,認爲我是故意裝傻子玩.經我耐心的詢問,纔明白過來下面種種的事實:

原來這位渾渾噩噩自己加封的皇帝, 相信他所稱爲帝國而且生死不離的那條直綫,便是整個的世界,乾坤宇宙,盡在其中. 因爲祇能在他的直綫裡行動觀看,他對於他那世界以外的一切,毫無意想的能力. 我第一次開口向他說話的時候,他雖然聽見我的聲音,但是和他所經驗的,情形大爲不同,所以他沒有回答.他說那時並沒有看見人,而那聲音又好像是從他的內部發出來的一樣.在我的口沒有放入他那世界以前,他並沒有看見我,只聽得在他的傍邊——可是他却以爲在他的內部或者肚裡——有些哄哄的聲音而已.卽便至今他也萬萬想不到我是從何處而來. 他的世界以外的一切,在他看起來是空的;不,因爲空的,還有空間的意思, 而他却簡直認爲是不存在.

他的臣民——那短的直綫便是男子, 點就是婦女——也是一樣地促居在他們的直綫世界內.他們眼睛所看見的祇有點,男的,女的,小孩,物件,在一元世界人類的眼裡,一概是點.要辨別男女老幼,只有從聲音方面設法. 而且每人把他在世界內的地位完全佔領了,彼此當然不能互相讓路, 所以不能從一人的這一頭跑過那一

頭去．做了鄰居，永遠是鄰居．鄰人的關係好比我們這裡夫妻的關係一樣，直到死了纔分手．

這種的生活，所見限於一點，行動限於一綫，該是多麼乏味；可是那國王却怡然自得，眞有點令我驚訝．在這種不方便的情形之下，夫妻之間，怎樣能有團聚的樂趣，這個微妙的問題，我想要問問他皇帝陛下，而又十分遲疑；後來我終於提到此事，先問他府上好．他答道：「我的太太們和小孩們都好，而且快樂．」

他這一說，我更疑惑起來了，因爲在國王的近傍，除了男子以外，並無他人；這是我剛夢見一元世界的時候就留了心的．於是我大胆的說道：「請你原諒，我還要問問，在陛下的前前後後，至少也有五六個人在那裡，旣然看不透又過不去，我眞不明白陛下何以能和皇后們皇子們接近？難道說在一元世界內，不必同居，便可結婚生子嗎？」

國王答道：「虧你問得出這樣不通的問題！如果眞像你所說那樣，這個世界的人口豈不是要滅絕嗎？不能不能！愛的結合是用不着要同居的，生男育女的大事，決不能受那『非接近不可』的限制．你不能不知道此理．不過你旣然要裝傻，我也只好把你當做一元世界內的嬰孩看待．聽着罷，婚姻的成功與否，要看聲音的稟賦如何，用聽覺的官能來決定的．

「你當然知道凡屬男子都有兩張口，發出兩樣聲音——眼睛也是兩個——一頭是低音，一頭是中音．我本不想說這種當然的事實，祇因我們談話之間，我聽不出你的中音來，纔引起我來說的．」我當時便聲明我只有一種聲音，並且不知道他陛下有兩種．國王道：「那就對了．我早就想到你不是男子，而是一個低音的女妖怪，兼之耳官沒有受過訓練的．聽我說下去吧！

「上帝的意旨，每一個男子，要娶兩房妻室——」我問：「爲什麼兩個？」他厲聲道：「你這人裝傻裝得太豈有此理！如果男子的低音中音，沒有一位女子的高音和另一位女子的次音來合奏，試問何以能够得到音律的調和？」我說：「假使有人情願只要一個妻室，或者想要三個，那便怎樣辦呢？」他說：「那是不可能的，猶之

乎二加一不能爲五，人類的眼不能看見直綫一樣.」 我本想插嘴說話，但他却滔滔不絕的接說下去：

「每一星期當中那一天，依照自然定律，我們全體人類都得要來來往往的作一種有韵調的擺動，而且動得利害，非比尋常，動的時間，大約有你從一起算到一百零一所要的那樣長久. 在這手舞足蹈的中間，約當你算到五十一的那時候，全世界的人民立時休止，每人發出他那最豐富，最圓滿而且最動聽的聲音. 所有我們全世界的婚姻，都在這一刻千金的時候擧行. 那高音低音的配合，次音中音的調和，眞是微妙之至，不怕隔山遠阻，各人對於他那命中註定的情人的聲音，一聽便知，一知便合，眞是千里姻緣，一聲定局；婚姻擧行之後，兩位妻室，一産便是三個小孩.」

「什麽！總是三個？」我說：「難道兩位太太之中，必得有一位要孿生嗎？」，

皇帝答道：「低音女怪！是的！如果生一個男孩子，不生兩個女孩子來預備着，怎樣能够維持兩性間的平衡呢？這種天經地義的事實，你還不知道嗎？」他氣得話都說不出來了，很過了一陣纔把他勸轉來，繼續談話.

「我們未婚的男子，在那求婚的合唱中，不見得每人都能立時成功，有許多人要再三的試辦，纔能尋到愛人. 聲音的調和，原不是容易的事，求婚一事，大都要經過相當長久時間. 因爲男子的聲音，有時祇能和他將來的一位太太諧合，且有一起首的時候，同兩位太太都不很相合的；或者這位太太的高音，和那位太太的次音不甚調和. 遇着這種情形，那同愛之神便設法叫這三位有情人，在每星期的合唱中，慢慢地近於和諧. 每試唱一次，各人彼此心照，自己把劣點改良，以求得到最善最美的妥協. 經過多次試驗，逐步改良，結果到了一天，在那求婚合唱聲中，這三位遠隔的有情人，忽然感覺到一種愉快的和諧，於是造物之神，又成就了一段姻緣，而一元世界又多了三位小國民了.」 (待續)

問　題　欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效．凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題．無論出題或解題，概依收到之先後，次第編彙發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露．數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登．來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰．至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好連帶寄下．　編者謹啟．

晚到之解答

18．湖北省立第二中學向仁生君

20．仝上．

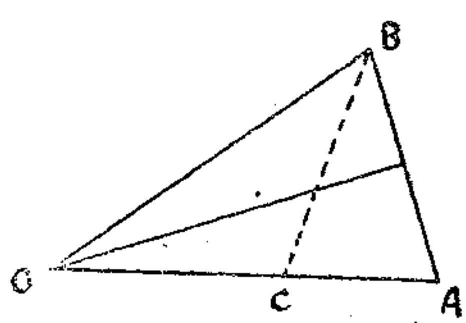
問題已解決者

22．試作一 18^0 之角．

〔解〕（湖北省立師範學校第十一班課餘學藝會）

〔作法〕作任意長線段 OA，以中末比內分之於 C，令 OC : CA = OA : OC

次作等腰三角形 AOB 令其底AB = OC，此三角形頂角 AOB 之半，即等於 18^0.



〔證〕連接 BC，就 ABC，AOB 兩三角形考之，則因 $\angle OAB$ 為共有角，即 AB : AC = OC : AC = OA : OC = AO : AB，故知此兩形相似，而 ABC 亦為等腰三角形．

$\therefore$ AB = BC = CO.

$\therefore$ $\angle BAO = \angle BCA = 2\angle AOB$,

但 $\angle BAO+\angle ABO+\angle AOB=2\angle BAO+\angle AOB=4\angle AOB+\angle AOB+=5\angle AOB=180^0$,

$$\therefore\quad \angle AOB=36^0,\quad 而\quad \tfrac{1}{2}\angle AOB=18^0. \qquad (証訖)$$

國立上海交通大學二十一年度入學試驗算學試題

(理工學院一年級用)

原題爲英文,玆譯成中文解之.———編者.

A. 平面三角

1, 試証 $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

(証) 因 $\cos^4\theta=\frac{1}{8}(\cos4\theta+4\cos2\theta+3)$;

$$\therefore\quad \cos^4\frac{\pi}{8}=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2}+4\cos\frac{\pi}{4}+3\right)=\frac{1}{8}\left(4\cos\frac{\pi}{4}+3\right),$$

$$\cos^4\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+4\cos\frac{3\pi}{4}+3\right)=\frac{1}{8}\left(-4\cos\frac{\pi}{4}+3\right),$$

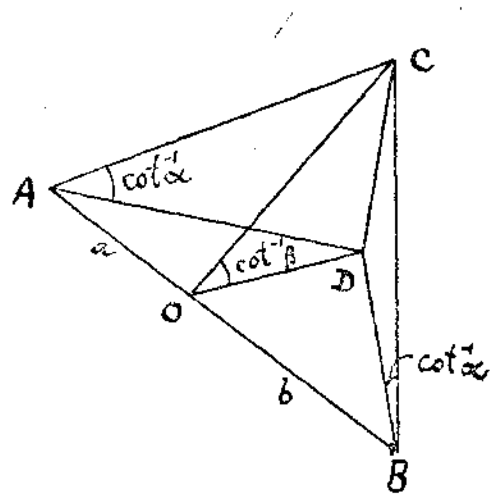
$$\cos^4\frac{5\pi}{8}=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{5\pi}{2}+4\cos\frac{5\pi}{4}+3\right)=\frac{1}{8}\left(4\cos\frac{\pi}{4}+3\right),$$

$$\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{7\pi}{2}+4\cos\frac{7\pi}{4}+3\right)=\frac{1}{8}\left(-4\cos\frac{\pi}{4}+3\right).$$

加之卽得所求之和$=\frac{1}{8}(4\times3)=\frac{3}{2}$.

2. 在同一直線上之 A, O, B 三處,同時測一氣球之高度:設 $OA=a, OB=b$; 又在 A, O, B 三點之仰角各爲 $\cot^{-1}\alpha$, $\cot^{-1}\beta$, $\cot^{-1}\alpha$; 試証此氣球之高爲 $\sqrt{\frac{ab}{\alpha^2-\beta^2}}$.

(解)如圖設 c 爲氣球, CD 爲其高。



則因 $\frac{AD}{CD}=\cot CAD=\alpha$, ∴ $AD=\alpha\cdot CD$

又 $\frac{BD}{CD}=\cot CBD=\alpha$, ∴ $BD=\alpha\cdot CD$,

故 $\triangle ADB$ 為二等邊三角形，而 $\angle DAB=\angle DBA$,

再 $\frac{OD}{CD}=\cot COD=\beta$, ∴ $OD=\beta\cdot CD$,

於 $\triangle AOD$, $\triangle BOD$ 中應用餘弦定律，得

$$\cos DAO=\frac{AD^2+AO^2-OD^2}{2AD\cdot AO}=\frac{a^2\cdot CD^2+a^2-\beta^2\cdot CD^2}{2\alpha\cdot CD\cdot a},$$

$$\cos DBO=\frac{BD^2+BO^2-OD^2}{2BD\cdot BO}=\frac{\alpha^2\cdot CD^2+b^2-\beta^2\cdot CD^2}{2\alpha\cdot CD\cdot b}.$$

因 $\angle DAO=\angle DBO$，令此兩式相等而化簡之，即得

$$CD=\sqrt{\frac{ab}{\alpha^2-\beta^2}}.$$

B, 平面及立體解析幾何.

3. 拋物線之弦，其兩端之切線，交於二等分該弦之直徑上，試証之.

（證） 設拋物線之方程式為 $y^2=2px$，所設弦之方程式為 $y=mx+b$，則二等分此弦之直徑，其方程式為 $y=p/m$,

令 $P(x_1, y_1)$ 為所設兩切線之交點，則所設弦為 P 對于拋物線之極線，故此弦之方程式又可書為 $y_1y=p(x+x_1)$.

將此式與原設弦之方程式比較，得 $x_1=b/m$, $y_1=p/m$，故知 P 點在二等分該弦之直徑上.

4. 應用直角坐標，求等邊雙曲線（Equilateral hyperbola）之切線與自其中心向此切線所作垂線兩者交點之軌跡之方程式、將此方程式變為極坐標而討論之，并作軌跡之圖.

（解）　設等邊雙曲線之方程式爲 $x^2-y^2=a^2$，切點爲(x_1, y_1)，則切線方程式

$$x_1x-y_1y=a^2,$$

自中心（卽原點）向此切線所作垂線之方程式爲

$$y_1x+x_1y=0.$$

解此二式，得其交點之坐標爲　$x=\dfrac{a^2x_1}{x_1^2+y_1^2}$,　$y=\dfrac{-a^2y_1}{x_1^2+y_1^2}$

但 (x_1, y_1) 爲雙曲線上之點，故　$x_1^2-y_1^2=a^2$.

由此諸式得　$x^2+y^2=\dfrac{a^4(x_1^2+y_1^2)}{(x_1^2+y_1^2)^2}=\dfrac{a^4}{x_1^2+y_1^2}$ ……………………(1)

又　　$x^2-y^2=\dfrac{a(x_1^2-y_1^2)^4}{(x_1^2+y_1^2)^2}=\dfrac{a^6}{(x_1^2+y_1^2)^2}$ ……………………(2)

由(1),(2)消去 $x_1^2+y_1^2$，卽得所求之軌跡方程爲

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

次將此式變爲極坐標，得 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$，是名雙紐線(Lemniscate)，圖及討論從略，可參看 Smith-Gale-Neelley 之 New Analytic Geometry, 151 頁.

5,　有圓錐曲線，通過 A(2,0), B(0,2), C(4,2), D(2,4), E(0,0) 五點，試求其方程式，幷計算其不變式(Invariants)之值，以定其名稱及性質.

（解）　此題之解法有多種，茲舉其最簡便者於次.

AB 之方程式爲 $x+y-2=0$,　CD 之方程式爲 $x+y-6=0$,

AD 之方程式爲 $x-2=0$,　BC 之方程式爲 $y-2=0$.

凡通過 A, B, C, D 四點之圓錐曲線，其方程式可書如次之形狀：

$$(x+y-2)(x+y-6)+k(x-2)(y-2)=0,$$

式中 k 爲參數 (Parameter). 但所求之圓錐曲線，尙須通過 E(0,0) 點，故上式中之常數項應爲零，因之得 $12+4k=0$，而 $k=-3$. 所求之方程式乃爲

$$x^2-xy+y^2-2x-2y=0,$$

此中 $a=b=1$, $c=0$, $f=g=-1$, $h=-\frac{1}{2}$，故不變式

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2\neq 0$$

又 $$ab-h^2>0,$$

故此圓錐曲綫爲一橢圓，略作草圖，卽可見其對於 $x=y$ 直綫爲對稱，長徑在此綫上，中心之坐標爲(2,2)等等.

6，說明次列各平面彼此相互之位置，如有交點，幷求其坐標.

(a) $21x-7y+35z=8$， $3x-y+5z=0$， $2y-10z-6x=4$.

此三平面顯然互相平行，且無重合者，故其交綫爲無窮遠綫.

(b) $2x+4y+2z=3$， $3x+3y+z=0$， $3x-6y-5z=8$.

因 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0$，而 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & -6 & -5 \end{vmatrix}\neq 0$，故此三平面之交點在無窮遠處，卽三平面成三角稜柱形也. 其兩兩相交所得三綫之方向餘弦之比俱爲 $1:-2:3$.

(c) $2x+y-2z=11$， $x+2y-z=7$， $x-y+z=0$.

此三平面相交於一點，其坐標爲$(3,1,-2)$.

(d) $6x-9y+12z=9$， $2x-3y+4z=3$， $6y-4x-8z+6=0$.

此三平面顯然合而爲一，因三式形異而實同也.

(e) $x+y+z=2$. $3x-y-5z=4$， $x-y-3z=1$.

第一式加第三式之二倍，卽得第二式，故此三平面共綫.

7. 次列各方程式所表軌跡，試舉其名，且略示其圖形.

(解)（圖從略）

(a) $(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2+(z+\gamma)^2=r^2$,

此爲球形，球心在$(\alpha,-\beta,-\gamma)$點，半徑爲 r.

(b) $y^2=4ax$. 此爲拋物柱體，

(c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$此爲單葉雙曲面.

(d)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,此為橢圓柱體.

(e)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-2z$. 此為橢圓拋物面.

C,　高等代數

1. (a)　定 a 及 b 之值,令 $3x^3+ax^2+x+b=0$ 有一個三重根,並求其根之值.

(b)　若 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根,為其又一根之倒數,則其係數間之關係如何?

(解)(a)　設 α 為所求之三重根,則

$$x^3+\frac{a}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{b}{3}\equiv(x-\alpha)^3$$

為恒等式.故得 $-3\alpha=\dfrac{a}{3}$,　　$3\alpha^2=\dfrac{1}{3}$,　　$-\alpha^3=\dfrac{b}{3}$.

因之　　$\alpha=\pm\dfrac{1}{3}$ 為三重根,而 $a=\pm3$,　$b=\pm\dfrac{1}{9}$.

(b)　因三根之積應等於 $-r$,今既一根為他根之倒數,則其第三根必為 $-r$,由是以 $-r$ 代方程式中之 x,必能適合,故得所求關係為

$$-r^3+pr^2-qr+r=0,$$

但 $r\neq0$,　　　$\therefore\quad r^2-pr+q=1$

為所求之關係.

2. (a)　試証 $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}=x^3(x+10)$;

(b)　求 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 之值.

(解) (a) 原式 $=\begin{vmatrix} 1+x & -2x & -3x & -4x \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$ (自二,三,四行各減第一行之二,三,四倍.)

$$=x^3\begin{vmatrix} x+10 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (將二,三,四行之 x 括出後,自一行減去二,三,四行之和.)

$$=x^3(x+10)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^3(x+10).$$

(b) 原式 $=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 11 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -4 & 7 \end{vmatrix}$ (自一,三兩行中各減去第二行)

$=0$ (第一行與第三行成比例).

3, A, B, C 三人打賭,將四白球及八黑球置於囊中,議定誰先攫得一白球者為勝. 設彼等依 A, B, C 之次序取球,且取後仍返置囊中,試求各人取得白球之機會. 又若每次取出之球,不返置囊中,則各人之機會又將如何?

〔解〕 在第一種情形之下,A 取得白球之機會為 $4/12=1/3$. B 之機會為 A 之機會之 $\frac{2}{3}$, 因 A 失敗後,B 始有機會之可能,而 A 失敗之機會為 $2/3$ 也. 同理 C 之機會為 B 之機會之 $2/3$, 故若設 x 為 A 之總機會,則

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{4}{6}x=1.$$

解之得 A 機會為 $\frac{9}{19}$, 因之 B 之機會為 $\frac{6}{19}$, C 之機會為 $\frac{4}{19}$.

在第二種情形之下,計算較為複雜,詳舉如下:

A 第一次取得白之機會為 $\frac{1}{3}$.

A 失敗後 B 取得白球之機會為 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{11}$, 因此時僅餘十一球(下做此).

A，B失敗 C成功之機會爲 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{28}{165}$．

三人第一次均失敗後 A 二次之機會 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{56}{495}$．

如此下推，B 二次成功之機會爲 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{7}{99}$．

C 二次成功之機會爲 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{99}$．

三人二次均失敗後 A 三次之機會爲 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{99}$．

B 三次成功之機會爲 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{495}$．

C 三次成功之機會爲 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{495}$．

此時囊中只餘兩個白球，故勝負已決．將上之結果加之得

$$A\text{ 之機會}=\frac{1}{3}+\frac{56}{465}+\frac{2}{99}=\frac{231}{495}=\frac{7}{15}.$$

$$B\text{ 之機會}=\frac{8}{33}+\frac{7}{99}+\frac{4}{495}=\frac{159}{495}=\frac{53}{165}.$$

$$C\text{ 之機會}=\frac{28}{165}+\frac{4}{99}+\frac{1}{495}=\frac{105}{495}=\frac{7}{33}.$$

4．將 $x^6+1=0$ 之根，用三角式寫出之．

$$x^6=-1=\cos\pi+i\sin\pi=\cos(2n+1)\pi+i\sin(2n+1)\pi.$$

$$\therefore\quad x=\cos\frac{2n+1}{6}\pi+i\sin\frac{2n+1}{6}\pi,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

5，次之循環連級數（Recurring series）試求其第 n 項及前 n 項之和：

$$2+x+5x^2+7x^3+17x^4+\cdots\cdots$$

〔解〕 先求得其 scale of relation 爲 $1-x-2x^2$，次設此級數之總和爲 S，

則 $$S=\frac{2-x}{1-x-2x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-2x}=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}x^{n-1}+\sum_1^\infty 2^{n-1}x^{n-1}$$

故其第 n 項爲 $\left[(-1)^{n-1}+2^{n-1}\right]x^{n-1}$，而前 n 項之和爲 $\frac{1-(-1)^n x^n}{1+x}+\frac{1-2^n x^n}{1-2x}$。