64

3

國民政府教育部審定

復興高級中學教科書

三角學

李蕃編著

商務印書館發行

序

我國向所通行之三角學教科書,大多迻譯東鄰,材料既感不足,條理亦欠顯明,求一適合於高中程度者,渺不可得;教授者每以是採用英文原本.但東西各國之學制不同,詳略取捨,自難苟且,而國人講學,仰藉他國文字,尤屬不便.李君銳夫,有鑒於斯,當其肄業於中央大學時,以其研究高深學理之餘,具改進中等教育之志,以事纂述,欲謀中學與大學程度之溝通.卒業後,任教中學,成績昭然.近以所著高中平面三角學一稿見示,屬爲校閱;余觀其內函富麗,程序井然,深合國內高級中學之用,且第九,第十兩章,尤可供大學一年級之參考.故疾促其付梓,以應國人.并望李君本斯志,更從事於幾何代數等之纂述,庶乎國人講學,不必仰藉外國文字,而讀者亦易收指臂之效也.是爲序.

段子燮序於中大算學系.

編輯大意

是書乃依照教育部所頒布之高中三角課程標準,更參考 Hobsen, Loney, Todhunter, Rothrock, Granville, Wentworth-Smith, Ferval, Commissaire 諸書而編述,期爲現代高中之教科書.

普通三角教科書咸將銳角函數及任意角函數分別敍述,殊非得策;蓋此易使讀者分銳角函數及任意角函數爲二物.本書力矯此弊,所有定理與公式之證明,不分銳角與任意角,使讀者有普遍之觀念.

普通三角教科書多列入對數一章,亦非作者所敢贊同;蓋對數非三角學之範圍,惟在解三角形時,應用之以簡其運算耳,故本書不另設一章,而僅在第三章中稍加復習.再本書爲讀者便於進習高深數學計,特將三角之應用於代數,在第十章中述其略焉.

本書未付梓前,曾在高級中學印爲講義,試教數次,結果頗爲圓滿.所有習題,選擇至爲嚴密,并經演算,以

爲校對.我師段調元張益光二教授亦曾細爲校閱,深表謝忱,近復蒙商務印書館諸編輯先生來函指正,尤所感激,尙望海內學者,不吝賜教爲幸.

作者識.

目　錄

第三章 直角三角形之解法 對數…33

第四章 三角分析……44

第五章 三角形邊與角之函數之關係……57

第十章 棣美弗定理及三角級數 ……124

第十一章 三角函數造表法 表之精確度 …… 137

附錄

三角學

第一章

角之量法

§1 **三角學** 三角學英文爲 Trigonometry 源於希臘文τριγανον(三角形)及μετρον(量)二字,蓋量三角形之意也;換言之,卽在研究三角形之邊與角之關係耳.但時在今日,其範圍大加擴充,所有關係於角之代數研究亦所屬焉.

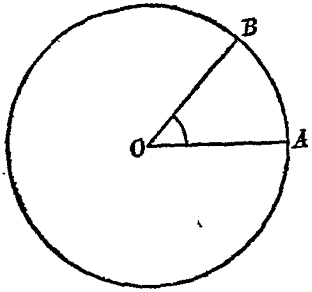
§2. **角之單位** 三角學之研究旣在角,故量角不能不有單位.量角之單位有三:卽六十分制 (sexagesimal system),百分制 (centisimal system) 及弳制 (circular system).玆分述之如次:

I. 六十分制 六十分制以度 (degree) 爲單位,一度等於圓周三百六十分之一之弧所張之圓心角,一度六十分,一分六十秒.此蓋昔日巴比侖 (Babylon) 之天文學家取一年爲三百六十日之意也.表度,分,秒之符

號爲°,′,″;例如三度十五分十七秒書爲$3°15'17''$.

II. **百分制** 百分制一名爲法國制(French system),分一直角爲一百級 (grade),每級一百分,每分一百秒.級,分,秒之符號爲 g,‵,‶;例如二十五級十八分五秒書爲$25^g 18‵ 5‶$.百分制爲用未廣.

III. **弳制** 弳制一名弧度法 (Circular Measure),以弳(radian)爲單位,一弳等於與半徑等長之弧或此弧所函之圓心角.如圖設AB弧之長等於半徑AO,則



$$\angle AOB = 1\text{弳}$$

弳制雖實行未久,然今日之高等數學中,類皆用之.

§3. **各單位之關係** 設R爲圓之半徑,π爲圓周率,卽3.14159265……則由幾何學圓周$=2\pi R$,復依弳之定義,圓周之長爲2π弳,但圓周又爲三百六十度,故

$$2\pi\text{弳} = 360°$$

卽

$$1\text{弳} = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.1416} = 57°2957,$$

$$1\text{度} = \frac{\pi\text{弳}}{180} = \frac{3.1416\text{弳}}{180} = 0.01745329\text{弳}$$

由此得下列之關係:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ 弳}=57.2957\text{ 度}\\ 1\text{ 度}=0.01745329\text{ 弳}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

讀者尙須明下列之記法：

$360^\circ=2\pi$ 弳, $60^\circ=\frac{\pi}{3}$ 弳,

$270^\circ=\frac{3\pi}{2}$ 弳, $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ 弳,

$180^\circ=\pi$ 弳, $30^\circ=\frac{\pi}{6}$ 弳,

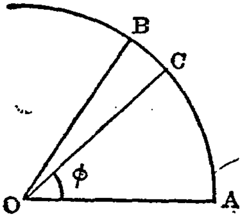
$90^\circ=\frac{\pi}{2}$ 弳, $15^\circ=\frac{\pi}{12}$ 弳.

玆更進而求以上三種單位之關係,以便互相推算.設有一角,以度計之爲 D, 以級計之爲 G, 以弳計之爲 R. 因一直角爲 90°, 則 $\frac{D}{90}$ 表此角與直角之比；一直角又爲 100^g, 則 $\frac{G}{100}$ 亦表此角與直角之比；但 $\frac{\pi}{2}$ 表直角以弳爲單位,故此角與直角之比爲 $\frac{R}{\frac{\pi}{2}}$, 即 $\frac{2R}{\pi}$,

以上三比之值應相等,故得公式

$$\frac{D}{90}=\frac{G}{100}=\frac{2R}{\pi}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

§4. **弧之長** 設 ϕ 爲一角, 以 AO 爲半徑作一圓,



作 $\angle AOB$ 使等於一弳. r 表半徑之長, R 表 AC 弧之長; 則因圓心角之大小與其所對之弧成正比,故

$$\frac{\phi}{\angle AOB}=\frac{R}{r}.$$

若 ϕ 以弳爲單位,則 AOB 爲單位角,故

$$\phi=\frac{R}{r}$$

故

$$R=r\phi\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故任何弧之長等於其半徑乘其所張之角,但此角係以弳爲單位.

習 題

1. 試化 12°, 56°, 43° 15′ 8″, 22°. 9 爲弳及級.

2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{18}$, $2n\pi$, 各爲若干度.

3. 試化弳 2.588, 1.85, 0.4 爲度及級.

4. 設有一圓, 其半徑爲 4 英尺, 問其圓心角爲 80° 所對之弧之長爲若干? 答: 5.6 英尺.

5. 已知地球與太陽之距離爲 92,897,000 英里, 太陽之視直徑爲 32′ 4″, 求太陽之直徑. 答: 866, 500 英里.

〔註〕 日月星辰, 總稱天體 (celestial body), 我人觀察天體時, 若恰

有二視線與天體相切,且與天體中心共一平面,則此二視線所成之角曰天體之視直徑 (apparent diameter).

6. 已知月球公轉地球一次所需之時間爲27.4日,問月球每日之角速度爲若干弳?

答: 約0.22685弳.

7. 設有三角 A, B, C. 已知 A 超過於 B 者 $\frac{\pi}{10}$ 弳, B 與 C 之和爲30級, A 與 B 之和爲36度, 問 A, B, C 三角各若干度?

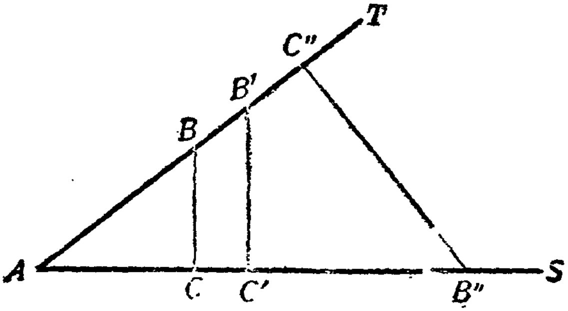
答: 27°, 9°, 18°.

8. 試證等於半徑之弧所張之圓心角爲常數

第二章

三角函數及其基本性質

§1. 銳角之三角函數 設 SAT 爲一銳角，在 AT 上取任意點 B, B'，作 AS 上之垂線 $BC, B'C'$；再在 AS 上取任意點 B''，作 AT 上之垂線 $B''C''$. 於是三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$ 爲相似，蓋 A 角爲公共且各有一角爲直角也. 相似三角形之邊之比爲相等 卽



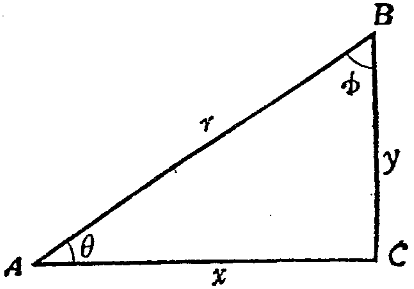
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B''C''}{AC''}$$

此三式之分子分母各相易,其比亦等.

由此得知一角之二邊任意延長,其所成直角三角形之邊之比爲不變;反之,若角變動,則各邊之比亦隨之以變,故各邊之比爲角之函數(Function)也.因比之數有六,故一角之函數爲數有六.



設 ABC 爲一直角三角形,其三邊之長爲 r, y, x, 則我人命

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{y}{r}\\ \cos\theta&=\frac{x}{r}\\ \tan\theta&=\frac{y}{x}\\ \cot\theta&=\frac{x}{y}\\ \sec\theta&=\frac{r}{x}\\ \csc\theta&=\frac{r}{y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

此六比之值謂之三角函數 (trigonometric functions).

$\sin\theta$ 讀爲 θ 之正弦 (sine),

$\cos\theta$ 讀爲 θ 之餘弦 (cosine),

$\tan\theta$ 讀爲 θ 之正切 (tangent),

$\cot\theta$ 讀爲 θ 之餘切 (cotangent),

$\sec\theta$ 讀爲 θ 之正割 (secant),

$\csc\theta$ 讀爲 θ 之餘割 (cosecant).

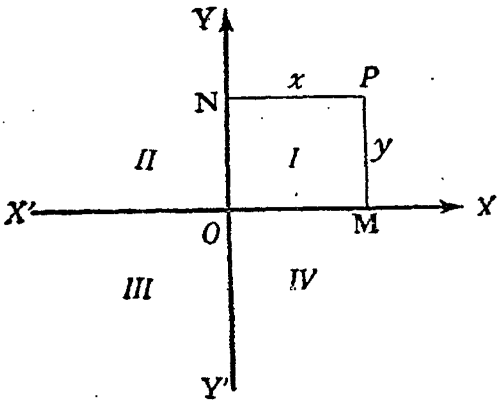
此外尙有二函數,亦隨角以變,卽

$$\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta$$

$$\operatorname{covers}\theta=1-\sin\theta$$

前者讀爲 θ 之正矢 (versed sine), 後者讀爲 θ 之餘矢 (coversed sine).

§2. **坐標** 設 $X'X$ 爲一水平直線, $Y'Y$ 爲在 O 點垂直於 $X'X$ 之直線;於是在此 $X'X$, $Y'Y$ 平面上任何點之位置可由其與 $X'X$ 及 $Y'Y$ 二垂線之距離及方向以定之. P 點與 $X'X$ 之距離 $PM(=y)$ 曰此點之縱坐標 (ordinate), P 點與 $Y'Y$ 之距離 $PN(=x)$ 曰此點之橫坐標 (abscissa), 合縱橫二坐標曰 P 點之坐標 (coördinates). $X'X$ 及 $Y'Y$ 二正交直線曰坐標軸 (axes

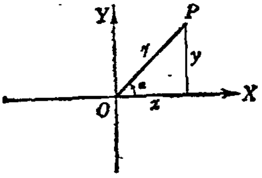


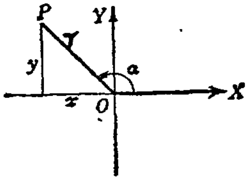
of coördinates), $X'X$ 曰 X 軸, $Y'Y$ 曰 Y 軸. O 點曰原點 (origin).

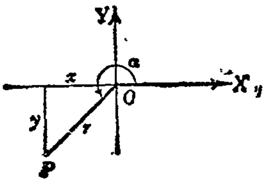
縱坐標在 $X'X$ 之上爲正,在 $X'X$ 之下爲負;橫坐標在 $Y'Y$ 之右爲正,在 $Y'Y$ 之左爲負.

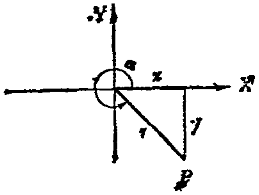
坐標軸分全平面爲四象限 (quadrants), 圖中 I 爲第一象限, II 爲第二象限, III 爲第三象限, IV 爲第四象限.

§3. 任意角之三角函數　若 θ 大於一直角,則其









函數之定義, 可應用坐標軸將銳角之三角函數定義擴充而得.

角之形成,可視爲由一動線,以其一端爲中心,依逆時針或順時針之方向旋轉而成. 此動線之最初位置曰始線 (initial line), 其最終位置曰終線 (terminal line). 由是始線及終線爲角之兩邊,而動線繞以旋轉之中心點爲角頂. 如圖,以始線OX爲X軸,過角頂O作X軸之垂線爲Y軸.當動線由OX之位置旋轉至OP之位置時,OP爲XOP角之終線.

角之在何象限,視終線在何象限而定. 終線在第一象限,此角在第一象限;終線在第二象限,則此角亦在第二象限;餘類推.

設在終線上取任一點P,以y爲P點之縱坐標,x爲P點之橫坐標;並以α表$\angle XOP$. r表P點與原點之距離;則任意角之三角函數定義如下:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{y}{r}\\
\cos\alpha &= \frac{x}{r}\\
\tan\alpha &= \frac{y}{x}\\
\cot\alpha &= \frac{x}{y}\\
\sec\alpha &= \frac{r}{x}\\
\csc\alpha &= \frac{r}{y}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

(A),(B) 均可得下列之關係

$$\left.\begin{aligned}\sin a\csc a=1\\ \cos a\sec a=1\\ \tan a\cot a=1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

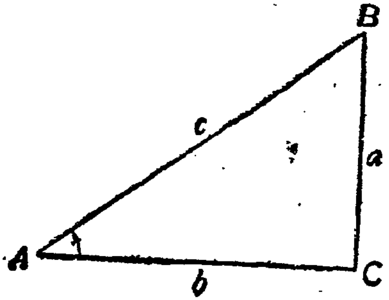
因坐標軸正負關係及r恆爲正,三角函數之値在四象限中有正負之不同,茲列表如次,讀者須熟記之.

象限	$\sin a$	$\cos a$	$\tan a$	$\cot a$	$\sec a$	$\csc a$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

例一. 如下圖,設C角爲直角且已知A角之對邊$a=3$,隣邊$b=4$,求A角之諸函數.

解.　$c-\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$,

因在第一象限中,故取正號.



$\sin A=\frac{3}{5}$,　$\cot A=\frac{4}{3}$,

$\cos A=\frac{4}{5}$,　$\sec A=\frac{5}{4}$,

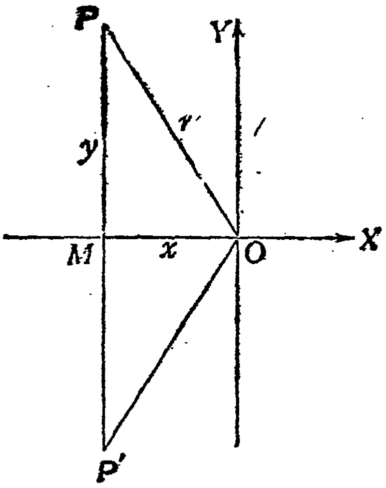
$\tan A=\frac{3}{4}$,　$\operatorname{css} A=\frac{5}{3}$.

例二．已知 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$，求其餘諸函數．

解． 如圖，因 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$，

則
$$\frac{x}{r}=-\frac{1}{3},$$

而
$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}=\pm\sqrt{(3)^2-(-1)^2}=\pm\sqrt{9-1}$$
$$=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$$



在此有二解，蓋 y 可爲 $+2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$ 也．由是 θ 角可在第二及第三象限．

i. 設 θ 在第二象限，即 $\pi>\theta>\frac{\pi}{2}$，則

$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{3},$$

$$\tan\theta=-2\sqrt{2}\qquad\cot\theta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sec\theta=-3\qquad\csc\theta=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

ii. 設 θ 在第三象限，即 $\frac{3\pi}{2}>\theta>\pi$，則

$$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3},\qquad\cos\theta=-\frac{1}{3},$$

$$\tan\theta=2\sqrt{2},\qquad \cot\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\sec\theta=-3,\qquad \csc\theta=-\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

習　題

1. 下列諸角在何象限?

i. $130°$.　ii. $286°$.　iii. $412°$.　iv. $540°$.

v $2360°$.　vi. $\frac{12\pi}{5}$.　vii. $\frac{105\pi}{12}$.　viii. $\frac{29\pi}{12}$.

ix. $910°$.　x. $8267°$.

2. 設A, B, C爲一直角三角形之頂點,C爲直角,a, b, c爲三對邊,求A角之諸函數,已知

i. $a=5, b=6$.　ii. $b=3, c=4$.

iii. $a=-2, c=8$.　iv. $a=p, b=q$.

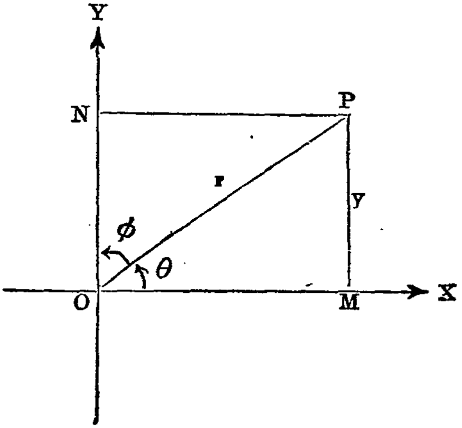
v. $a=m+n, b=\sqrt{m^2+n^2}$.

3. 求a角之諸函數,已知

i. $\sin a=\frac{1}{2}$.　ii. $\tan a=-7$.

iii. $\sec a=-4$.

iv. $\csc a=-\sqrt{3}$.



§4. 餘角函數 設θ與ϕ互爲餘角,即$\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$; 命$MP$爲$y$, OM爲x, OP爲r, 則NP亦等於x, ON亦等於y. 故

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{y}{r}=\cos\phi\\ \cos\theta&=\frac{x}{r}=\sin\phi\\ \tan\theta&=\frac{y}{x}=\cot\phi\\ \cot\theta&=\frac{x}{y}=\tan\phi\\ \sec\theta&=\frac{r}{x}=\csc\phi\\ \csc\theta&=\frac{r}{y}=\sec\phi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

餘弦，餘切，餘割與正弦，正切，正割互爲餘函數(co-function)，由是得一定理如次：

定理 <u>一銳角之函數等於其餘角之餘函數.</u>

因 $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$，即 $\phi=\frac{\pi}{2}-\theta$，代入(2)式，得公式：

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \cos\theta&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \tan\theta&=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \cot\theta&=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \sec\theta&=\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \csc\theta&=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

§5. 特別角函數

I. 45°之函數　因 $\angle CAB=\angle ABC=45^\circ$, 故 $BC=AC$.

因 $a^2+b^2=c^2$, 即 $2a^2=c^2$.

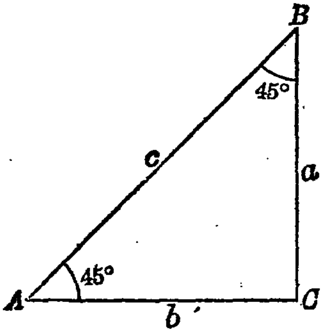
故　$a=b=\frac{c}{2}\sqrt{2}$.

由是得

$$\sin 45^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=\cos 45^\circ;$$

$$\tan 45^\circ=1=\cot 45^\circ,$$

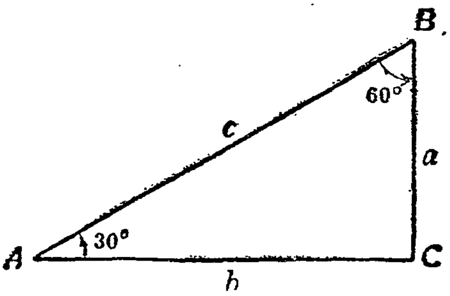
$$\sec 45^\circ=\sqrt{2}=\csc 45^\circ.$$



II. 30°及60°之函數

設 $\angle ABC=60^\circ$, $\angle CAB=30^\circ$,

則　$a=\frac{c}{2}$, $b=\sqrt{c^2-\frac{c^2}{4}}=\frac{c}{2}\sqrt{3}.$



由是　$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}=\cot 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ=\sqrt{3}=\tan 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}=\csc 60^\circ$$

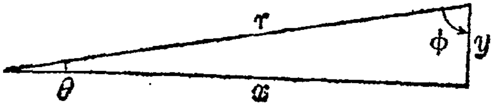
$$\csc 30^\circ=2=\sec 60^\circ$$

III.　<u>0° 及 90° 之函數</u>　0° 及 90°之三角函數可用求極限值 (limiting value) 法求之.

若變數 x 經過種種不同諸值而與常數 a 之差, 比任何假定之正數皆小, 則謂 a 爲變數 x 之極限 (limit) 或極限值.此可以 $\lim x \rightarrow a$ 或 $\lim x=a$ 之記號記之.

若函數 $f(x)$ 之自變數 x 經過諸值而以 a 爲其極限時, 卽 $\lim x \rightarrow a$, 而同時函數 $f(x)$ 亦經過諸值以 A 爲極限, 卽 $\lim f(x)=A$ 則以符號 $\lim\limits_{x\rightarrow a} f(x)=A$ 記之.

如圖所示,若 θ 趨於零度,則 ϕ 趨於九十度,而 y 趨於零, x 趨於 r, 故



$$\sin 0^\circ=\lim_{y\rightarrow 0}\frac{y}{r}=0=\cos 90^\circ,\quad \cos 0^\circ=\lim_{x\rightarrow r}\frac{x}{r}=1=\sin 90^\circ,$$

$$\tan 0^\circ=\lim_{y\rightarrow 0}\frac{y}{x}=0=\cot 90^\circ,\quad \cot 0^\circ=\lim_{y\rightarrow 0}\frac{x}{y}=\infty=\tan 90^\circ,$$

$$\sec 0^\circ=\lim_{x\rightarrow r}\frac{r}{x}=1=\csc 90^\circ,\quad \csc 0^\circ=\lim_{y\rightarrow 0}\frac{r}{y}=\infty=\sec 90^\circ.$$

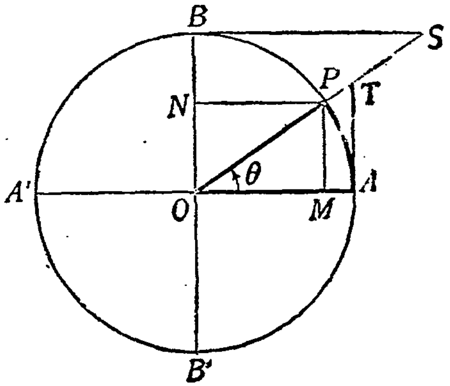
$0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$; 諸角之函數, 時有應用, 讀者須加記憶; 其他諸角之三角函數, 可於三角函數表中檢之, 如 $\sin 10°$ 在表中檢得爲 0.1736. 讀者至此, 須熟知三角函數表之檢法.

茲將以上之結果列表以明之如次:

$\theta=$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\csc\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

§6　三角函數之線表示法　作一圓使其半徑爲單位長, 則此圓謂之單位圓 (unit circle).

過圓心 O 作互相垂直之二線 OA 及 OB. 設 P 爲圓周上之任一點, 連結 OP 并延長之, 再作 MP, AT 垂直於 OA, BS 及 NP 垂直於 OB, 則由圖



$$\sin\theta=\frac{MP}{OP},\qquad \cot\theta=\frac{BS}{OB},$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP},\qquad \sec\theta=\frac{OT}{OA},$$

$$\tan\theta=\frac{AT}{OA},\qquad \csc\theta=\frac{OS}{OB}.$$

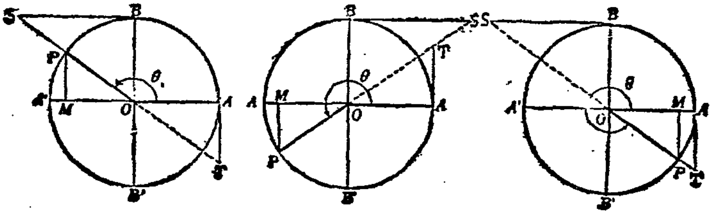
因 OP, OA, OB 皆爲單位圓之半徑,故亦爲單位長,即

$$OP=OA=OB=1,$$

故得三角函數之另一表示法如次:

$$\left.\begin{array}{r}\sin\theta=MP\\ \cos\theta=OM\\ \tan\theta=AT\\ \cot\theta=BS\\ \sec\theta=OT\\ \csc\theta=OS\\ \text{vers}\,\theta=1-OM=MA\\ \text{covers}\,\theta=1-MP=NB\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

設 θ 大於 $\frac{\pi}{2}$ 而在第二,第三,第四,三象限,則其函數以下圖諸線表之:



以上 $MP, OM, AT, BS, OT, OS, MA, NB$ 八線代表八三角函數,故三角函數又可以線表之,此即昔日所謂"八線"也.凡此八線,皆自單位圓中導出;故三角函數又謂之圓函數 (circular function).

由上圖得知

正弦及正切在 OA 之上爲正,在 OA 之下爲負;

餘弦及餘切在 OB 之右爲正,在 OB 之左爲負;

正割及餘割順 OP 方向者爲正,而在其向後延長線上者爲負.

§7. 函數之變值 由§6諸圖,若 θ 角自零變至 2π,則各函數因之而有增減,茲分別研究之如次:

I. 正弦

第一象限	自0增至1,
第二象限	自1減至0,
第三象限	自0減至 −1,
第四象限	自 −1增至0,

II. 餘弦

第一象限	自1減至0,
第二象限	自0減至 −1,
第三象限	自 −1增至0,

第四象限	自0增至1,

III. 正切

第一象限	自0增至∞,
第二象限	自−∞增至0,
第三象限	自0增至∞,
第四象限	自−∞增至0,

IV. 餘切

第一象限	自∞減至0,
第二象限	自0減至−∞,
第三象限	自∞減至0,
第四象限	自0減至−∞,

V. 正割

第一象限	自1增至∞,
第二象限	自−∞增至−1,
第三象限	自−1減至−∞,
第四象限	自∞減至1,

VI. 餘割

第一象限	自∞減至1,
第二象限	自1增至∞,
第三象限	自−∞增至−1,
第四象限	自−1減至−∞,

由以上所研究之結果,得下列重要之斷語:

I. 正弦與餘弦之值惟能在 +1 及 −1 之間;

II. 正切與餘切可爲任何之值;

III. 正割及餘割可爲大於 +1 及小於 −1 之任何值;

玆更歸納之而得下表:

$\theta =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	∓ 0	$+1$	± 0	-1	∓ 0
$\cos\theta$	$+1$	± 0	-1	∓ 0	$+1$
$\tan\theta$	∓ 0	$\pm\infty$	∓ 0	$\pm\infty$	∓ 0
$\cot\theta$	$\mp\infty$	± 0	$\mp\infty$	± 0	$\mp\infty$
$\sec\theta$	$+1$	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$	$+1$
$\csc\theta$	$\mp\infty$	$+1$	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$

表中 ± 或 ∓ 之符號乃表示所至此值之方向,如 $\cos\frac{\pi}{2}$ 爲 ± 0,乃表示 $\frac{\pi}{2}$ 之餘弦係由 + (第一象限) 變爲 − (第二象限) 也.

習　題

1. 下列諸角之函數之符號爲若何?

i. 330°,　ii. 257°,　iii. 400°,

iv. 612°,　v. 5866°?

2. 在0°與3600°間,正弦之絕對值爲$\frac{3}{5}$者有若干角?又若干爲正,若干爲負?

答: 40角, 20正, 20負.

3. 試證

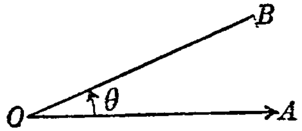
i. $\sin 90^\circ+\sec 180^\circ=0$.

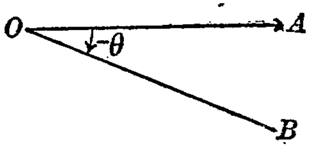
ii. $\tan 180^\circ+\cos 0^\circ=1$.

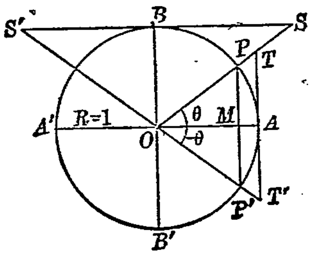
iii. $a\cot 90^\circ+b\sin 90^\circ+c\sec 180^\circ=b-c$,

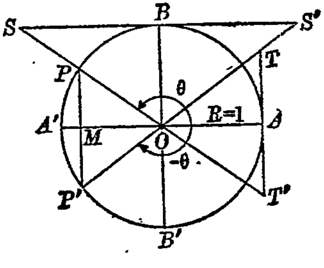
iv. $(a^2+b^2)\cos 2\pi+2ab\sec\pi=(a-b)^2$.

§8. 負角之函數 本書至此所論之角,皆爲正角;但角有正負之分.如下圖,命OA爲始線,若OB取逆時針之方向繞O點而旋轉,則所得之角爲正;反之,若OB取順時針之方向而旋轉,則所得之角爲負.









角既有正負之不同,茲研究負角之函數沿用本章§3之定義,試觀以上二圖中諸線之正負關係,得知

$$MP=-MP', \qquad OT=OT',$$
$$OM=OM, \qquad BS=-BS'$$
$$AT=-AT' \qquad OS=-OS'$$

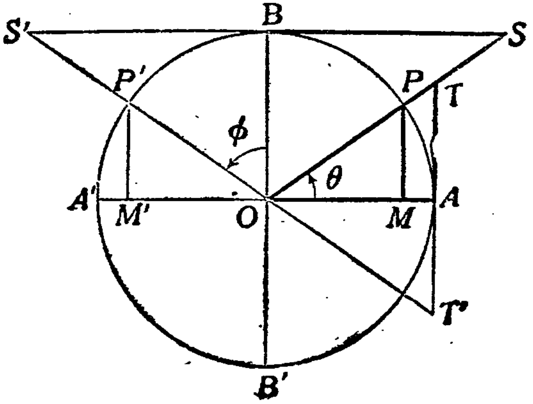
由三角函數之線表示法,得知

$$\sin\theta=-\sin(-\theta), \qquad \cot\theta=-\cot(-\theta),$$
$$\cos\theta=\cos(-\theta), \qquad \sec\theta=\sec(-\theta),$$
$$\tan\theta=-\tan(-\theta), \qquad \csc\theta=-\csc(-\theta).$$

故得公式如次:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(-\theta)=-\sin\theta \\ \cos(-\theta)=\ \ \cos\theta \\ \tan(-\theta)=-\tan\theta \\ \cot(-\theta)=-\cot\theta \\ \sec(-\theta)=\ \ \sec\theta \\ \csc(-\theta)=-\csc\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

§9. 化第二象限之函數爲第一象限之函數.



設 $\angle AOP'=\pi-\theta$,爲在第二象限. O 爲單位圓.命 $\angle BOP'$ 爲 ϕ,作 $\angle AOP=\theta$.則由函數之線表示,注意諸線之正負及其關係,得

$$\sin(\pi-\theta)=M'P'=MP,$$

$$\cos(\pi-\theta)=OM'=-OM,$$

$$\tan(\pi-\theta)=AT'=-AT,$$

$$\cot(\pi-6)=BS'=-BS.$$

故得公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\pi-\theta)&=\sin\theta\\ \cos(\pi-\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(\pi-\theta)&=-\tan\theta\\ \cot(\pi-\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

又因 $\phi+\theta=\frac{\pi}{2}$,而 $\pi-\theta=\frac{\pi}{2}+\phi$,故又得公式

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)&=\cos\phi\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)&=-\sin\phi\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)&=-\cot\phi\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)&=-\tan\phi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

附注 上列諸公式用弳表示,取其簡便,其實際應用以度爲宜,下同此.

例 1. $\sin 153^\circ = \sin(180^\circ - 27^\circ) = \sin 27^\circ$.

2. $\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ$.

3. $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$.

4. $\cot 150^\circ = \cot(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ$.

§10. 化第三象限之函數爲第一象限之函數.

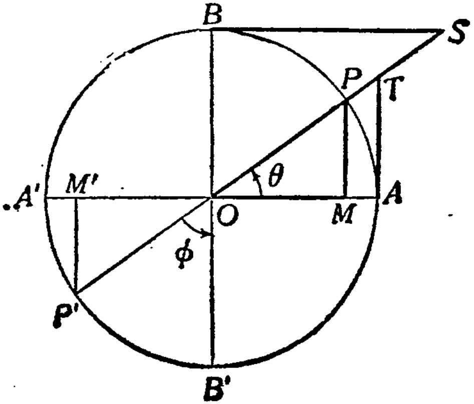
設 $\angle AOP' = \pi + \theta$ 爲在第三象限,命 $\angle B'OP' = \phi$,則

$$\sin(\pi+\theta) = M'P' = -MP,$$

$$\cos(\pi+\theta) = OM' = -OM,$$

$$\tan(\pi+\theta) = AT$$

$$\cot(\pi+\theta) = BS$$



故得公式：

$$\left.\begin{aligned} \sin(\pi+\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(\pi+\theta) &= -\cos\theta \\ \tan(\pi+\theta) &= \quad\tan\theta \\ \cot(\pi+\theta) &= \quad\cot\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

因 $\angle AOP' = \frac{3\pi}{2}-\phi$, 而 $\pi+\theta=\frac{3\pi}{2}-\phi$, 故又得公式

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\phi\right) &= -\cos\phi \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\phi\right) &= -\sin\phi \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\phi\right) &= \quad\cot\phi \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2}-\phi\right) &= \quad\tan\phi \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

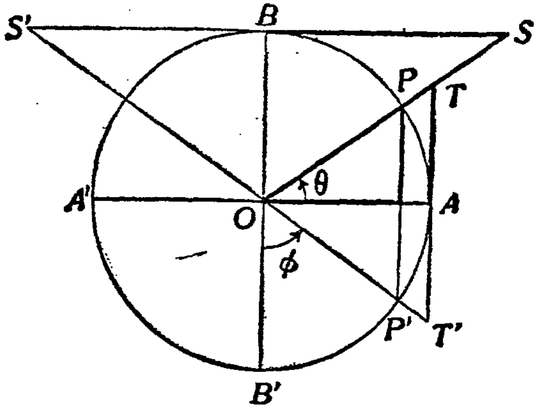
例 1. $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ+30^\circ) = -\sin 30^\circ$.

2. $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ+45^\circ) = -\cos 45^\circ$.

3. $\tan 225^\circ = \tan(270^\circ-45^\circ) = \quad\cot 45^\circ$.

4. $\cot 208^\circ = \cot(270^\circ-62^\circ) = \quad\tan 62^\circ$.

§11 化第四象限之函數爲第一象限之函數.



設 $\angle AOP'=2\pi-\theta$ 爲在第四象限，同前由線之關係，得公式：

$$\left.\begin{aligned}\sin(2\pi-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(2\pi-\theta)&=\quad\cos\theta\\ \tan(2\pi-\theta)&=-\tan\theta\\ \cot(2\pi-\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

因 $\angle AOP'=\frac{3\pi}{2}+\phi$，而 $2\pi-\theta=\frac{3\pi}{2}+\phi$，故

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\phi\right)&=-\cos\phi\\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\phi\right)&=\quad\sin\phi\\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\phi\right)&=-\cot\phi\\ \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\phi\right)&=-\tan\phi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

例 1. $\sin 320^\circ=\sin(360^\circ-40^\circ)=-\sin 40^\circ$.

2. $\tan 285^\circ=\tan(360^\circ-75^\circ)=-\tan 75^\circ$.

3. $\sec 335^\circ=\sec(270^\circ+65^\circ)=\csc 65^\circ$.

4. $\sin 282^\circ=\sin(270^\circ+12^\circ)=-\cos 12^\circ$.

由以上之結果,歸納之得下列之定則.

定則:

1. 若角爲$\pi\pm\theta$,或$2\pi\pm\theta$,則其函數之絕對值等於θ之同函數.

2. 若角爲$\frac{\pi}{2}\pm\theta$,或$\frac{3\pi}{2}\pm\theta$,則其函數之絕對值等於θ之餘函數.

3. 所得結果函數之符號,皆等於原角原函數所在之象限之符號.

〔註〕本章公式(3),(5),(6),(7),(8),(9),(10)雖皆由假定$\theta<\frac{\pi}{2}$,$\phi<\frac{\pi}{2}$而推得,但除去此條件.諸公式仍然成立.

習題

1. 試化下列諸函數爲第一象限之函數:

$\sin 186^\circ$

$\cot 216^\circ$

$\sin 128^\circ 3' 25''$.

$\cos\frac{19\pi}{4}$.

$\cos 327^\circ$.

$\sec 245^\circ$.

$\cot 262^\circ 8' 19''$.

$\sin\frac{16\pi}{5}$.

$\tan 172^\circ$.

$\csc 354^\circ$.

$\tan 348^\circ 18' 54''$.

$\cot\frac{11\pi}{6}$.

$\sec\frac{17\pi}{9}$. $\cos\frac{2\pi}{4}$. $\cos\frac{23\pi}{9}$

2. 試求下列諸函數之值：

$\sin(-60°)$. $\sec(-150°)$. $\cos(-225°)$.

$\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$. $\cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$. $\csc\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$.

3. 設 A, B, C 爲一三角形之內角，求證

i. $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$ ii. $\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A+C}{2}$.

iii. $\tan A=-\tan(B+C)$. iv. $\cot A=-\cot(B+C)$.

v. $\sin A=-\sin(2A+B+C)$.

vi. $\cos A=-\cos(2A+B+C)$.

vii. $\sin A=-\cos(\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)$.

viii. $\sin(\frac{1}{2}A+B)=\cos(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C)$.

4. 試求下列之值：

i. $\frac{\cos(90°+\theta)}{\sin(-\theta)}+\frac{\tan(-\theta)}{\tan(180°+\theta)}$.

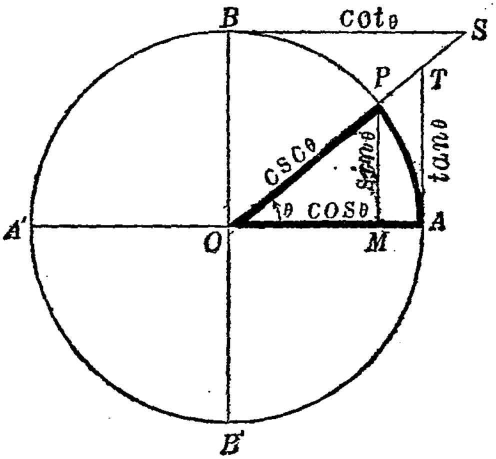
ii. $\frac{\sin(180°-x)}{\cos(90°+x)}-\frac{\tan(180°+y)}{\cot(90°+y)}$.

§12. **函數之基本關係** 在三角形 POM 中，PMO 爲直角，故

$$\overline{MP}^2+\overline{OM}^2=\overline{OP}^2$$

設 O 爲單位圓，則 $OP=1$，即

$$\overline{MP}^2+\overline{OM}^2=1.$$



由定義

$$MP = \sin\theta,$$

$$OM = \cos\theta;$$

故得公式如次:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

在同三角形中,

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM}, \qquad \cot\theta = \frac{OM}{MP};$$

即

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

在三角形 TOA 中,

$$\overline{OA}^2 + \overline{AT}^2 = \overline{OT}^2,$$

因　$OA=1, AT=\tan\theta, OT=\sec\theta$,故

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta.\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

在三角形 SBO 中,

$$\overline{OB}^2+\overline{BS}^2=\overline{OS}^2,$$

因　$OB=1, BS=\cot\theta, OS=\csc\theta$, 故

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta.\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

公式(11)至(15)中之 θ 角,初不限於銳角,任爲何値,皆所適合也.讀者自行證之,以資練習.此五公式係由八線之定義導出,但亦可由三角函數之定義直接以推出之.

應用公式(1),(11),(12),(13),(14),(15),我人可證明一部分三角恆等式兩端之相等.玆設例以明之.

例一. 試證 $\cos A\csc A\tan A=1$.

解. $$\cos A\csc A\tan A=\cos A\frac{1}{\sin A}\,\frac{\sin A}{\cos A}$$
$$=1.\qquad Q.E.D.$$

例二. 試證 $\cos^4x-\sin^4x=2\cos^2x-1$.

解. $$\cos^4x-\sin^4x=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)$$
$$=\cos^2x-\sin^2x\qquad 由(11),$$
$$=\cos^2x-(1-\cos^2x)\qquad 由(11),$$
$$=2\cos^2x-1.\qquad Q.E.D.$$

此式亦可證右端等於左端

$$2\cos^2 x-1=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x \qquad \text{由 (11),}$$

$$=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$$=\cos^4 x-\sin^4 x \qquad Q.E.D.$$

習 題

試證下列諸恆等式:

1. $\cos x\tan x=\sin x$.

2. $\csc^2 x-\cot^2 x=1$.

3. $(1-\sin^2\theta)\tan^2\theta=\sin^2\theta$.

4. $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta=\tan^2\theta$.

5. $(1-\sin^2\theta)\csc^2\theta=\cot^2\theta$.

6. $(\sec^2\theta-1)(\csc^2\theta-1)=1$.

7. $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$.

8. $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$.

9. $(\csc^2\alpha-1)\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$.

10. $\sec^2\phi-\sec\phi\sin^2\phi=1$.

11. $\sec^2\phi+\csc^2\phi=\sec^2\phi\csc^2\phi$.

12. $\sin\phi\cot\phi+\cos\phi\tan\phi=\cos\phi+\sin\phi$.

13. $\sin^2 B+\tan^2 B=\sec^2 B-\cos^2 B$.

14. $\sin^4 B+\cos^4 B=1-2\sin^2 B\cos^2 B$.

15. $\sec^4 B-\tan^4 B=1+2\tan^2 B$.

16. $\sec^2 A\csc^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2$.

17. $\sin A(\sec A+\csc A)-\cos A(\sec A-\csc A)=\sec A\csc A$.

18. $\sec A(\sin A-\cos A)+\csc A(\sin A+\cos A)=\sec A\csc A$.

19. $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta=\tan\theta+\cot\theta$.

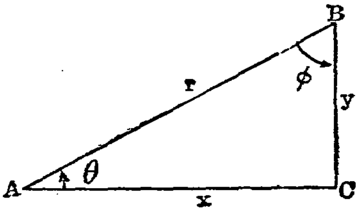
20. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$.

第三章

直角三角形之解法　對數

直角三角形，設有二邊或一邊及一銳角爲已知，則其餘未知之部分，可直接解得之．但如能應用對數，則其計算更爲便利．故本章先將直角三角形之普通解法設例以明之，次再論應用對數之解法焉．

§1. 直角三角形之不用對數解法　設 ABC 爲一直角三角形，$\angle ACB$ 爲直角，則由定義



$$\frac{y}{r}=\sin\theta,\ \frac{x}{r}=\cos\theta$$

得公式

$$y=r\sin\theta \cdots\cdots(1)$$

$$x=r\cos\theta \cdots\cdots(2)$$

由畢達哥拉斯定理 (Pythagorean theorem) 得

$$r^2=x^2+y^2 \cdots\cdots(3)$$

因三角形三內角之和爲180°，則

$$\phi+\theta=90^\circ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

故直角三角形之一邊及其餘一部爲已知，則其餘各部可由上述公式以求之.

例一. 已知 $\theta=69^\circ54'$, $r=68$; 求 x, y, ϕ.

解. $\phi=90^\circ-\theta=20^\circ6'$,

$$y=r\sin\theta=68\times0.9391=63.859.$$

$$x=r\cos\theta=68\times0.3437=23.372.$$

例二. 已知 $y=3$, $x=4$; 求 θ, ϕ, r.

解. $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{3}{5}=0.6$$

$$\therefore\quad \theta=36^\circ52'.$$

$$\phi=90^\circ-\theta=53^\circ8'.$$

習題

1. 已知 $y=20$, $x=8$; 求 θ, ϕ, r.

答: $\theta=68^\circ12'$, $\phi=21^\circ48'$, $r=21.5$

2. 已知 $y=10$, $r=50$;求 θ, ϕ, x.

答: $\theta=11^\circ32'$, $\phi=78^\circ28'$, $x=49$.

3. 已知 $x=240$, $r=400$; 求 θ, ϕ; y.

答: $\theta=53^\circ8'$, $\phi=36^\circ52'$, $y=320$.

4. 已知 $\theta=4°35'$, $y=637$; 求 ϕ, x, r.

答： $\phi=85°25'$ $x=7946$, $r=7971.5$.

5. 已知 $\theta=81°30'$, $r=42$; 求 ϕ, y, x.

答： $\phi=8°30'$, $x=41.5$, $y=6.2$.

6. 已知 $\theta=60°$, $x=4$; 求 ϕ, r, y. 答： $\phi=30°$, $r=8$, $y=6.9282$.

7. 已知 $\phi=47°$, $r=250$; 求 θ, y, x,

答： $\theta=43°$, $y=170.5$, $x=182.8$.

8. 已知 $\phi=68°50'$, $y=729.3$; 求 θ, x, r.

答： $\theta=21°10'$, $x=1884$, $r=2020$.

9. 已知 $\phi=43.8°$, $x=50.94$; 求 θ, y, r.

答： $\theta=46.2°$, $y=53.13$, $r=73.6$.

10. 已知 $y=101$, $x=116$; 求 θ, ϕ, r.

答： $\theta=41°3'$, $\phi=48°57'$, $r=153.8$.

§2. 對數 讀者在代數學中曾知何謂對數及其性質.此處將應用對數以解直角三角形,故先將對數之性質略事一述,以資溫習.

對數定義 設 $a^x=N$, 則 x 謂之 N 以 a 爲底之對數 (logarithm), 以下式表之:

$$x=\log_a N$$

普通以 $a=10$ 爲底者曰常用對數 (common logarithm) 而以 e 卽 2.71828…………爲底者曰自然對數 (natural logarithm) 本章所應用者,概爲常用對數.

對數之性質 由指數定則可推得對數之性質如下；至其證明，讀者當於代數學中求之.

$$\text{I.}\quad \log_a(N\times M)=\log_a N+\log_a M$$

$$\text{II.}\quad \log_a\left(\frac{N}{M}\right)=\log_a N-\log_a M$$

$$\text{III.}\quad \log_a(M^p)=p\log_a M$$

對數之首尾 對數之整數部曰首數(characteristic)，小數部曰尾數(mantissa)，對數之尾數常爲正；例如

$$\log 0.2=-0.6990$$

普通書爲

$$\log 0.2=\bar{1}.3010$$

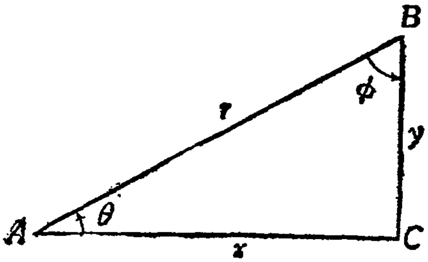
此處$\bar{1}.3010$卽表$0.3010-1=-0.6990$之意也.

某數對數之尾數，可於對數表中檢之；而其首數，則由觀察而得. 例如某數之整數爲一位，則其對數之首數爲0，二位者爲1，三位者爲2，餘類推；例如213之對數首數爲2，蓋因$3>\log 213>2$. 設某數小於1，則無整數而爲小數，如此則小數點後無0者其對數之首數爲-1，有一0者爲-2，有二0者爲-3餘類推；例如$\log 0.5$之首數爲-1，$\log 0.008$之首數爲-3.

對數表與三角函數對數表 某數之對數之尾數有對數表足以檢查，例如求log587在表中檢得爲0.7686因587爲三位數，故其首數爲2，卽$\log 587=2.7686$.

數學家爲便於應用計，特將三角函數之對數製表以便檢查，名曰三角函數之對數表．又因欲免首數爲負起見，用時常有以10加於其上，而更於對數後附以-10者．例如 $\log\sin 37°48'$ 在表中檢得爲 $\bar{1}.7874$，用時當作 $9.7874-10$.

§3. 直角三角形之對數解法 應用對數以解直角三角形，易乘除爲加減，在計算上每較便利．茲分四種論之：



I. 已知斜邊及一銳角；

II. 已知斜邊及其餘一邊；

III. 已知一邊及一銳角；

IV. 已知二邊．

[I] 已知斜邊及一銳角．

設 r 及 θ 爲已知，則

(i) $$\phi=90°-\theta \quad\cdots\cdots(5)$$

(ii) $$\frac{y}{r}=\sin\theta, \text{即 } y=r\sin\theta$$

$$\therefore\ \log y=\log r+\log\sin\theta \quad\cdots\cdots(6)$$

(iii) $$\frac{x}{r}=\cos\theta,\ 即\ x=r\cos\theta$$

$$\therefore\quad \log x=\log r+\log\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

故由(5),(6),(7)三式即可求得ϕ及x, y之值.

例. 已知$\theta=34^\circ 28'$, $r=18.75$; 求ϕ, y, x.

解. 由(5), $\phi=90^\circ-\theta=55^\circ 32'$

由(6), $\log y=\log 18.75+\log\sin 34^\circ 28'$

$$=1.2730+9.7528-10$$

$$=1.0258$$

$$\therefore\quad y=10.61$$

由(7), $\log x=\log 18.75+\log\cos 34^\circ 28'$

$$=1.2730+9.9162-10$$

$$=1.1892$$

$$\therefore\quad x=15.46$$

[II] 已知斜邊及其餘一邊

設r及y爲已知,則

i. $$\sin\theta=\frac{y}{r}$$

$$\therefore\quad \log\sin\theta=\log y-\log r \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

ii. $$\phi=90^\circ-\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

iii. $$x=r\cos\theta$$

$$\therefore\quad \log x=\log r+\log\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

故由(8),(9),(10)三式卽可求得θ,ϕ及x之値.

例. 已知$r=9.35$. $y=8.49$; 求θ, ϕ, 及x.

解. 由(8), $\log\sin\theta=\log 8.49-\log 9.35$

$$=0.9289-0.9708$$

$$=-0.0419=9.9581-10$$

$$\therefore\quad \theta=65°14'.$$

由(9), $\phi=90°-65°14'=24°46'$.

由(10), $\log x=\log 9.35+\log\cos 65°14'$

$$=0.9708+9.6221-10$$

$$=0.5929$$

$$\therefore\quad x=3.92$$

[III] 已知一邊及一銳角.

設y及θ爲已知,則

i. $$\phi=90°-\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

ii. $$\frac{y}{r}=\sin\theta,\ 卽\ r=\frac{y}{\sin\theta}.$$

$$\therefore\quad \log r=\log y-\log\sin\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

iii. $$\frac{y}{x}=\tan\theta,\ 卽\ x=\frac{y}{\tan\theta}.$$

$$\therefore\quad \log x=\log y-\log\tan\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

故由(11),(12),(13)三式卽可求得ϕ及r,x之値.

例. 已知 $\theta=37°56'$, $y=4$; 求 ϕ, x, r.

解. 由 (11) $\phi=90°-37°56'=52°4'$

由 (12), $\log r=\log 4-\log\sin 37°56'$

$=0.6021-(9.7887-10)$

$=0.8134$

∴ $r=6.51$

由 (13), $\log x=\log 4-\log\tan 37°56'$

$=0.6021-9.8918-10$

$=0.7103$

∴ $y=5.13$

[IV] 已知二邊

設 x 及 y 爲已知, 則

i. $\tan\theta=\frac{y}{x}$

∴ $\log\tan\theta=\log y-\log x$ ……………………(14)

ii. $\phi=90°-\theta$ ……………………………………(15)

iii. $\frac{y}{r}=\sin\theta$, 卽 $r=\frac{y}{\sin\theta}$

∴ $\log r=\log y-\log\sin\theta$ ……………………(16)

故由 (14), (15), (16) 三式卽可求得 θ, ϕ, 及 r 之值.

例. 已知 $x=6$, $y=5$; 求 θ, ϕ, r.

解. 由 (14), $\log\tan\theta=\log 5-\log 6.$

$$=0.6990-0.7782$$

$$=-0.0792$$

$$=9.9208-10$$

$$\therefore\quad \theta=39°48'$$

由 (15), $\phi=90°-39°48'=50°12'.$

由 (16), $\log r=\log 5-\log\sin 39°48'$

$$=0.6990-(9.8063-10)$$

$$=0.8927$$

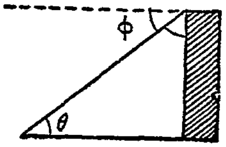
$$\therefore\quad r=7.81$$

習題

1. 將§1諸習題應用對數解之.

2. 一人在離塔脚二百尺處, 仰觀塔頂之仰角爲60°, 試求塔之高. 答: 346尺.

〔註〕. 仰望之視線與目之水平線所成之角曰仰角(angle of elevation), 俯視之視線與目之水平線所成之角曰俯角 angle of depression). 如圖θ曰仰角, ϕ曰俯角.



3. 一山高283尺,其在地上之影爲100尺,求此時太陽之仰角. 答: 70°32′.

4. 已知太陽之仰角爲65°, 問一高爲128.67尺之屋在地上之影長若干? 答: 60尺.

5. 在河岸上取相距240尺之二處A, B, 在A之對岸取一點C; 從B點測得$\angle ABC$爲65°, 問河寬若干? 答: 514.68尺.

6. 鳶繩30丈,其與地所成之角爲53°6′;求此鳶離地若干丈?

答: 24丈.

7. 圓內一弦長100尺,其所對之圓心角爲18′,求此圓之半徑.

答: 319.69尺.

8. 設有一圓其直徑爲43.3尺,問長爲41.36尺之弦所對之圓心角若干?

答: 145°34′.

9. 一人在120尺高之塔頂,遙望遠處地上一物之俯角爲27°43′,問此物與塔脚之距離爲若干?又與塔頂之距離爲若干?

答: 228尺, 258尺.

10. 屋高50尺,上立一旗桿,一人在地上仰觀屋頂及桿頂之仰角爲30°及45°.問旗桿之高爲若干?

答: 36.602尺.

11. 在A處仰觀塔頂之仰角爲36°.前進75尺,其仰角變爲42°,求塔高.

答: 282.16尺.

12 在山頂俯察二石像之俯角一爲5°,一爲15°,已知二石像之距離爲一英里;求山之高.

答: 685.9尺.

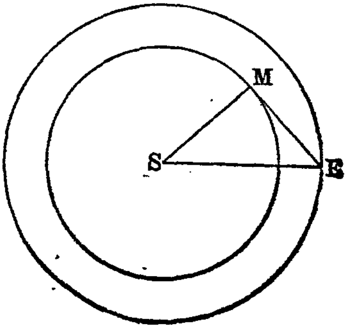
13. 二塔相並而立,一人在離二塔脚相等之處仰望二塔頂點之仰角爲40°與60°,求二塔之高之比.

答: 8391:17321.

14. 在地球上觀察金星與太陽所成最大之角爲47°30′,問金星與太陽之距離爲地球與太陽之距離之若干倍?

答: 0.7373倍.

〔註〕設E爲地球,M爲金星,S爲太陽,當$\angle SEM$爲最大時,$\angle SME$爲直角.



15. 已知地球與月球之距離爲

238862 英里, 我人仰觀月球之視半徑爲 31′5.2″; 求月球之半徑.

答: 2160 英里.

16. 在高山上遠望海面最遠一點之俯角爲 θ, 已知山高爲 h, 試證

$$地球半徑=\frac{h}{\sec\theta-1}$$

17. B, C 爲地面上之二點, 其距離爲 a. A 爲空中流星之發光處. 在 B 點仰觀流星之仰角爲 θ, 在 C 點之仰角爲 ϕ, 設 h 爲流星之高, 試證

$$h=\frac{a\tan\theta\tan\phi}{\tan\theta+\tan\phi}.$$

18. 一氣球垂直上升之速率爲每分鐘 704 尺, 當時有東風, 其速率爲每小時 24 英里, 問氣球上升之方向與地面成若干度之角? 又遇風後其速率變爲若干?　答: 18°26′, 每時 2226 尺.

19. 正十邊形之一邊爲 10 寸, 求其內切圓及外接圓之半徑.

答: 15.39 寸, 16.18 寸.

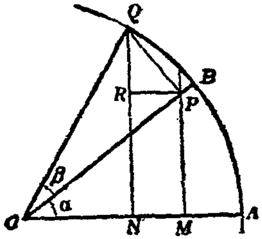
20. 設 R 爲一圓之半徑, 試證內切正 n 邊形之一邊爲 $2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, 而其外接正 n 邊形之一邊爲 $2R\tan\frac{180^\circ}{n}$.

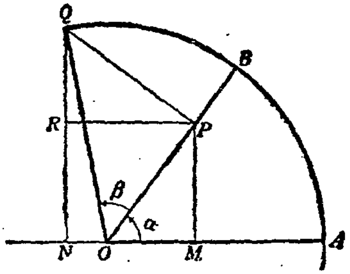
第四章

三角分析

§1. 二角之和之函數

I. 二角之和之正弦與餘弦





在單位圓之圓心 O 上作 α, β 二角, 作 QN 垂直於 OA, QP 垂直於 OB, PM 垂直於 OA, 及 PR 垂直於 QN. 由圖

$$\angle AOQ = \alpha + \beta, \ \angle RQP = \alpha,$$

$$QP = \sin\beta, \qquad OP = \cos\beta.$$

在上列二圖中, α, β 俱爲正銳角, 第一圖 $\alpha+\beta$ 小於 $\frac{\pi}{2}$, 第二圖 $\alpha+\beta$ 大於 $\frac{\pi}{2}$, 但在任何圖中,

$$\sin(\alpha+\beta)=QN=PM+QR \cdots\cdots (a)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=ON=OM-PR \cdots\cdots (b)$$

但 $$PM=OP\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta,$$

$$QR=QP\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta,$$

代入(*a*)式則得二角之和之正弦公式:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots (1)$$

再 $$OM=OP\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta,$$

$$PR=QP\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta,$$

代入(*b*)式得二角之和之餘弦公式:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \cdots\cdots (2)$$

(1), (2) 二式皆自 $\alpha+\beta<\pi$ 導出;其實 $\alpha+\beta$ 可爲任何之值,讀者自行證之.

II. **二角之和之正切與餘切**　既得二角之和之正弦與餘弦之公式,則二角之和之正切與餘切可由分析法導出之.

因 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

以 $\cos\alpha\cos\beta$ 除分子分母之各項而簡化之,則得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因 $$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

以 $\sin\alpha\sin\beta$ 除分子分母之各項而簡化之,則得

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

§2. 二角之差之函數

因 $$\sin(-\theta)=-\sin\theta\quad\cos(-\theta)=\cos\theta,$$

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta,\ \cot(-\theta)=-\cot\theta.$$

由此易 β 爲 $-\beta$, 則上列二角之和之三角函數公式變爲二角之差之三角函數公式如次:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{-\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha-\cot\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

公式 (1)—(8) 可合書如下,以便記憶:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\pm\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}.$$

例. 求 $\sin 75^\circ$ 之值.

解. $$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

習 題

1. 應用上列公式求下列諸函數之值:

i. $\cos 75^\circ$.

ii. $\tan 75^\circ$.

iii. $\sin 15^\circ$.

iv. $\cos 15^\circ$.

v. $\cot 75^\circ$.

vi. $\cot 15^\circ$.

vii. $\sin 90^\circ$.

viii. $\cos 90^\circ$.

ix. $\tan 90^\circ$.

x. $\cot 90^\circ$.

2. 試證 $\sin(45^\circ+\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)$.

3. 試證 $\cos(60^\circ+\theta)=\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2}$.

4. 試證 $\tan(45^\circ+\theta)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$.

5. 試證 $\cot(\theta-45^\circ)=\frac{1+\cot\theta}{1-\cot\theta}$.

6. 試證 $\frac{\sqrt{3}}{5}\sin\phi-\frac{1}{2}\cos\phi=\sin(\phi-30^\circ)$.

7. 試證 $\frac{1}{2}\cos\phi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi=\cos(60°-\phi)$.

8. 試證 $\tan(60°-x)=\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}$.

9. 試證 $\cot(x+30°)=\frac{\sqrt{3}\cot x-1}{\cot x+\sqrt{3}}$.

10. 試證 $\sin(B+45°)+\sin(B-45°)-\sqrt{2}\sin B=0$.

11. 試證 $\cos(30°+B)-\cos(30°-B)+\sin B=0$.

12. 試證 $\tan(B\pm45°)+\cot(B\mp45°)=0$.

13. 試證 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha$

$+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

14. 試證 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$-\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma-\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta$

15. 試證 $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}$.

16. 試證 $\cot(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}$.

17. 試證 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$.

18. 試證 $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$.

19. 試由§1之二圖直接證明公式(3)—(8).

20. 試求二角之和之正割及餘割之公式.

§3. 倍角之函數 由公式(1)—(8), 若命 $\beta=\alpha$, 則得倍角之重要公式.

命 $\beta=\alpha$, 代入(1)式,

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha$$

故　$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

命 $\beta=\alpha$ 代入 (2) 式,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= 1-2\sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha - 1.\end{aligned}$$

故　$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

命 $\beta=\alpha$ 代入 (3) 式,

$$\tan(\alpha+\alpha) = \tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},$$

故　$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

再命 $\beta=\alpha$ 代入 (4) 式,得

$$\cot(\alpha+\alpha) = \cot 2\alpha = \frac{\cot\alpha\cot\alpha-1}{\cot\alpha+\cot\alpha} = \frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}.$$

故　$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

由前節之理,我人可化 nx 之函數爲 x 之函數;例如

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

命 $\beta=2\alpha$, 則

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(\alpha+2\alpha)\\ &= \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha\end{aligned}$$

$$=\sin\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha$$

$$=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha$$

$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

習 題

1. 已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, 求 $\cos 2\theta$.

2. 已知 $\sin\theta=\frac{1}{4}$, 求 $\sin 2\theta$, $\tan 2\theta$.

3. 已知 $\cos\theta=\frac{5}{8}$, 求 $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$.

4. 試證 $1\pm\sin 2\phi=(\sin\phi\pm\cos\phi)^2$.

5. 試證 $\cos 2\phi=\cos^4\phi-\sin^4\phi$.

6. 試證 $\tan\phi+\cot\phi=2\csc 2\phi$.

7. 試證 $\cot\phi-\tan\phi=2\cot 2\phi$.

8. 試證 $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)=2\tan 2A$.

9. 試證 $3\sin A-\sin 3A=2\sin A(1-\cos 2A)$.

10. 求證 $\sin 4\alpha=8\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin\alpha$.

11. 求證 $\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$.

12. 求證 $\sin 6\alpha=32\cos^5\alpha\sin\alpha-32\cos^3\alpha\sin\alpha+6\cos\alpha\sin\alpha$.

13. 求證 $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

14. 求證 $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$.

15. 求證 $\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$.

16. 求證 $\cos 6\alpha=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1$.

17. 求證 $\tan 3\alpha=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$.

18. 求證 $\tan 4\alpha=\frac{4\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-6\tan^2\alpha+\tan^4\alpha}$.

§4 半角之函數

I. 化一角之函數爲其半角之函數

i. 因 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, 命 $\alpha=\frac{x}{2}$, 則

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

ii. 因 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, 命 $\alpha=\frac{x}{2}$, 則

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

iii. 因 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$, 命 $\alpha=\frac{x}{2}$ 則

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

iv. 因 $\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$, 命 $\alpha=\frac{x}{2}$, 則

$$\cot x=\frac{\cot^2\frac{x}{2}-1}{2\cot\frac{x}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

II. 化半角函數爲其角之餘弦

因 $$\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1 \quad\cdots\cdots(a)$$

及 $$\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x \quad\cdots\cdots(b)$$

(a), (b) 二式相減,則得

$$2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$$

即 $$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad\cdots\cdots(17)$$

(a), (b) 二式相加,則得

$$2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$$

即 $$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad\cdots\cdots(18)$$

(17) (18) 二式相除,則得

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\cot\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad\cdots\cdots(20)$$

§5. 函數之和與積 由公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

相加及相減得

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta),\cdots\cdots(21)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta),\cdots\cdots(22)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta),\cdots\cdots(23)$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta).\cdots\cdots(24)$$

命 $\alpha+\beta=X,\quad \alpha-\beta=Y,$ 則

$$\alpha=\frac{X+Y}{2},\ \beta=\frac{X-Y}{2}$$

代入前式得

$$\sin X+\sin Y=\ 2\sin\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\sin X-\sin Y=\ 2\cos\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

$$\cos X+\cos Y=\ 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$\cos X+\cos Y=\ 2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

習　題

1. 試證 $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

2. 試證 $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}$.

3. 試證 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)=\sec x+\tan x$,

4. 試證 $\tan\dfrac{x}{4}=\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{1+\cos\dfrac{x}{2}}$.

5. 試證 $\cot\dfrac{x}{4}=\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{1-\cos\dfrac{x}{2}}$.

6. 試證 $\sin\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{\text{vers } x}{2}}$.

7. 試證 $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$.

8. 試證 $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{1+\sin x}$.

9. 試證 $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{1-\sin x}$.

10. 試求下列諸式之值.

i. $\sin 12^\circ+\sin 82^\circ$.　　ii. $\sin 75^\circ-\sin 25^\circ$.

iii. $\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$.　　iv. $\cos 22^\circ-\cos 60^\circ$.

v. $\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{6}$.　　vi. $\cos\dfrac{\pi}{8}-\cos\dfrac{\pi}{3}$.

vii. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)-\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.　　viii. $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(-\dfrac{6\pi}{4}\right)$.

11. 試證 $\tan X+\tan Y=\dfrac{\sin(X+Y)}{\cos X\cos Y}$.

12. 試證 $\tan X-\tan Y=\dfrac{\sin(X-Y)}{\cos X\cos Y}$.

13. 試證 $\frac{\sin X+\sin Y}{\sin X-\sin Y}=\frac{\tan\frac{X+Y}{2}}{\tan\frac{X-Y}{2}}.$

14. 試證 $\frac{\cos X+\cos Y}{\cos X-\cos Y}=-\cot\frac{X+Y}{2}\cot\frac{X-Y}{2}.$

15. 試證 $\frac{\sin X+\sin Y}{\cos X+\cos Y}=\tan\frac{X+Y}{2}.$

16. 試證 $\frac{\sin X-\sin Y}{\cos Y-\cos X}=\cot\frac{X+Y}{2}.$

17. 試證 $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$

18. 試證 $\cot\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}.$

19. 試證 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{2}{\sin 2\theta}.$

20. 試證 $\tan\theta-\cot\theta=-2\cot 2\theta.$

21. 試證 $\frac{\tan\theta\pm\tan\phi}{\cot\theta\pm\cot\phi}=\pm\tan\theta\tan\phi.$

22. 試證 $1+\tan\theta\tan 2\theta=\tan 2\theta\cot\theta-1.$

23. 試證 $(\cos\theta+\cos\phi)^2+(\sin\theta+\sin\phi)^2=2+2\cos(\theta-\phi).$

24. 試證 $(\sin\theta+\cos\phi)^2+(\sin\phi+\cos\theta)^2=2+2\sin(\theta+\phi).$

25. 設 α, β, γ 爲一三角形之內角，試證

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

26. 設 α, β, γ 爲一三角形之內角，試證

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

27. 設 α, β, γ 爲一三角形之內角，試證

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

28. 設 α, β, γ 爲一三角形之內角，試證

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1=0.$$

29. 設 α, β, γ 爲一三角形之內角,試證

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2.$$

30. 設 α, β, γ 爲一三角形之內角,試證

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1.$$

31. 試證 $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\csc A.$

32. 試證 $\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B=\sin^2 A.$

33. 試證 $\sin^2(A-B)+\sin^2 B+2\sin(A-B)\sin B\cos A=\sin^2 A.$

34. 試證 $\dfrac{\sin A}{\sin(A-B)\sin(A-C)}$

$$+\frac{\sin B}{\sin(B-C)\sin(B-A)}+\frac{\sin C}{\sin(C-A)\sin(C-B)}=0.$$

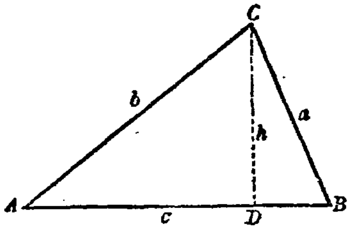
35. 試證 $\sin A\sin B\sin(B-\mathrm{A})+\sin B\sin C\sin(C-B)$

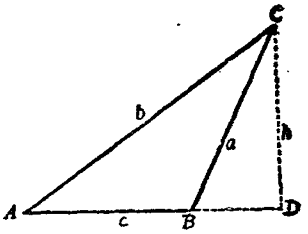
$$+\sin C\sin A\sin(A-C)+\sin(B-A)\sin(C-B)\sin(A-C)=0.$$

第五章

三角形邊與角之函數之關係

§1. 正弦定律





設 ABC 爲一三角形,以 A, B, C 表其頂角,自 C 點作對邊之垂直線 CD; 於是在任一圖中

$$\frac{h}{b}=\sin A,$$

及
$$\frac{h}{a}=\sin B.$$

[因在第二圖中 $\frac{h}{a}=\sin(\pi-B)=\sin B$]

二式相除得

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$$

即
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

同理由A, B作對邊之垂直線,則有

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin C},\text{即}\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

及
$$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C},\text{即}\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

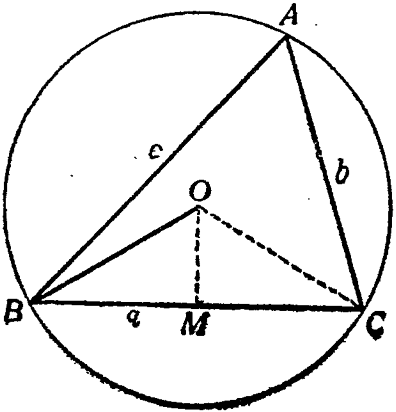
由(a), (b), (c)三式得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此即正弦定律(Law of sines)或以文字表之如次:

在任何三角形中,各邊與其對角之正弦之比相等.

上述之正弦定律,又有其簡單之幾何意義設過三角形之三頂點作一圓,其圓心為O,其半徑為R,作OM垂直於BC;於是由幾何學定理圓周角等於同弧之圓心角之半,則



$$\angle BOM=\angle A$$

故
$$BM=R\sin\angle BOM$$
$$=R\sin A.$$

因
$$BM=\frac{a}{2},$$

故　$a=2R\sin A.$

同理可證得　$b=2R\sin B.$

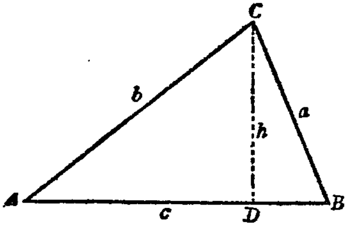
$c=2R\sin C.$

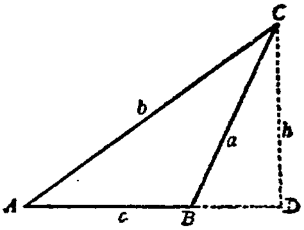
由(1)式之關係得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

故任何三角形之一邊與其對角正弦之比等於其外切圓之直徑.

§2. 餘弦定律





設 ABC 爲一三角形; A, B, C 爲三頂角, a, b, c 爲三邊, 自 C 作對邊垂直線 CD, 其長爲 h; 則

$$a^2=h^2+\overline{BD}^2$$

在第一圖　$BD=c-AD \cdots\cdots\cdots\cdots (a)$

在第二圖　$BD=AD-c \cdots\cdots\cdots\cdots (b)$

$(a), (b)$ 二式之兩端各平方之,皆得

$$\overline{BD}^2=\overline{AD}^2-2cAD+c^2,$$

故 $$a^2=h^2+\overline{AD}^2+c^2-2c\cdot AD$$

但 $$h^2+\overline{AD}^2=b^2$$

而 $$AD=b\cos A$$

故得公式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

同理自A, C二點作對邊之垂直線可證得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(3), (4), (5) 三式謂之餘弦定律 (Law of cosines); 或可以文字述之如次:

在任何三角形中,任何邊之平方等於其他二邊平方之和,減去此二邊與其夾角之餘弦之相乘積之二倍.

由 (3), (4), (5) 三式移項,則得下列求角之公式

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

§3. 正切定律 由正弦定律

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

得
$$a=2R\sin A,$$
$$b=2R\sin B.$$

二式相加及相減,再以二函數之差與和之公式化之,得

$$a+b=2R(\sin A+\sin B)=4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$a-b=2R(\sin A-\sin B)=4R\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

相除得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}\quad\cdots\cdots(7)$$

同理可證得

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}\quad\cdots\cdots(8)$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}\quad\cdots\cdots(9)$$

(7), (8), (9) 三式謂之正切定律(Law of tangents). 又可以文字述之如次:

在任何三角形中二邊之和與差之比等於其對角之和與差之半之正切之比.

§4. 半角定律　設s爲三角形三邊之和之半, 卽

$$2s=a+b+c \cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

兩端各減去 $2c$，得

$$2(s-c)=a+b-c \cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

同樣將 (a) 式之兩端減去 $2b$ 及 $2a$，得

$$2(s-b)=a+c-b \cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$2(s-a)=b+c-a \cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

由第四章，§4, (17), (18) 二式，

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots(f)$$

由餘弦定律

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

代入 (e) 式，得

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$=\frac{2(s-c)2(s-b)}{2bc} \qquad \text{由 } (b),\ (c)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{故} & \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\[2ex]
\text{同理可得} & \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\[2ex]
\text{及} & \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

再由 (*f*) 式有

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{2s\cdot 2(s-a)}{2bc}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{故} & \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} \\[2ex]
\text{同理可得} & \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}} \\[2ex]
\text{及} & \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

因 $$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-a)}{(s-a)}}$$

$$=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

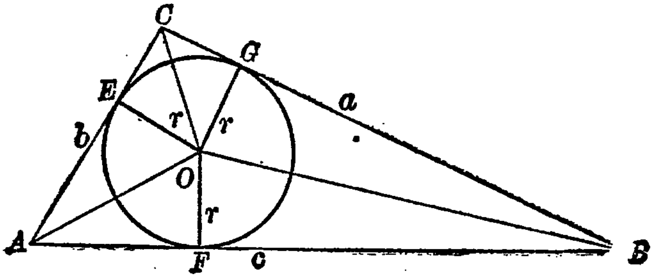
命 $$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(g)$$

於是得

同樣 $$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\frac{r}{s-a}\\ \tan\frac{B}{2}&=\frac{r}{s-b}\\ \tan\frac{C}{2}&=\frac{r}{s-c}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(10), (11), (12) 三組公式謂之半角定律 (law of half-angle)·

附註 (g)式之r卽三角形內切圓之半徑;蓋因



$$\angle FAO=\tfrac{1}{2}\angle A,$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{FO}{AF}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(h)$$

又因s爲三邊之和之半，卽

$$2s=AF+FB+BG+GC+CE+EA$$

但　$$FB=BG,\ CE=GC,\ EA=AF,$$

故　$$2s=2AF+2BG+2GC$$

卽　$$s=AF+(BG+GC)$$

卽　$$s=AF+a,$$

卽　$$AF=s-a$$

代入(h)式，得

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{OF}{s-a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

比較(i)及(12)二式，得知

$$FO=r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

FO爲三角形ABC內切圓之半徑，故r卽爲內切圓之半徑。

習　題

1. 試證 $\dfrac{\sin A+2\sin B}{\sin C}=\dfrac{a+2b}{c}$.

2. 試證 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}$.

3. 試由餘弦定律證明畢達哥拉斯定理(Pythagorean Theorem).

4. 試證 $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

5. 設 $b>a$, 則正切定理如何?

6. 試證 $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$.

7. 試證 $a^2+b^2+c^2=2(ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B)$.

8. 試證 $\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{a}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{b}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{c}=\frac{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{4ac}$.

9. 試證 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\cot\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}(A+B)}$.

10. 試證 $\left[\frac{2(a^2-b^2)}{\cos 2B-\cos 2A}\right]^{\frac{3}{2}}=\frac{abc}{\sin A\sin B\sin C}$.

11. 試證 $a\cos\frac{1}{2}(B-C)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$.

12. 試證 $a\sin\frac{1}{2}(B-C)=(b-c)\cos\frac{A}{2}$.

13. 設 a, b, c 爲三角形之三邊, 而其對角爲 $2\phi, 3\phi, 4\phi$;

試證 $\tan^2\phi=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2-1$.

14. 設 D 爲直角三角形 ABC 之 BC 邊中點, 試證

$$\frac{1}{\tan\angle BAD}-\frac{1}{\tan B}=\frac{2}{\tan A}.$$

15. 如前題, 設 a, b, c 爲其三對邊, 試證

$$\tan\angle ADB=\frac{2bc\sin A}{b^2-c^2}.$$

16. 設一三角形之角之餘切成等差級數, 則其邊之平方亦成差級數, 試證之.

第六章

斜三角形之解法

直角三角形之解法，已於第三章詳之；讀者既習三角形邊與角之函數之關係，則可進而解斜三角形．斜三角形之解法，普通分爲四種如下：

I. 已知三角形之一邊及二角；

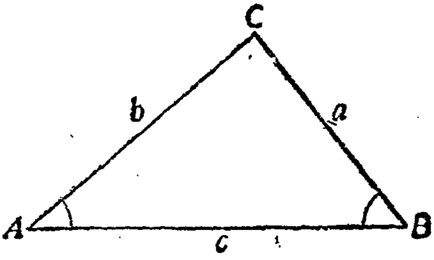
II. 已知三角形之二邊及一對角；

III. 已知三角形之二邊及其夾角；

IV. 已知三角形之三邊．

§1. 已知三角形之一邊及二角

設三角形 ABC 中，a，A，及 B 爲已知；求 C，b，c．



i. 因三角形三內角之和爲 π，故

$$C=\pi-(A+B)\cdots\cdots(1)$$

ii. 由正弦定律

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A},$$

即
$$b=\frac{a\sin B}{\sin B};$$

兩旁取對數,

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2$$

由此可求得 b 之値.

iii. 再由正弦定律,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

即
$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

兩旁取對數,

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由此可以求得 c 值.

例一. 已知 $a=500$, $A=10°12'$, $B=46°36'$; 求 C,b,c.

解. 由(1)式, $C=180°-(10°12'+46°36')=123°12'$.

由 (2) 式, $\log b=\log 500-\log\sin 10°12'+\log\sin 46°36'$

$$=2.6990-(9.2482-10)+(9.8613-10)$$

$$=3.3121.$$

$$\therefore\quad b=2051.5.$$

由 (3) 式, $\log c=\log 500+\log\sin 123°12'-\log\sin 10°12'$

$$=\log 500+\log\cos 33^\circ 12'-\log\sin 10^\circ 12'$$

$$=2.6990+(9.9226-10)-(9.2482-10)$$

$$=3.3734.$$

$$\therefore\quad c=2363.$$

例二.　已知 $a=55,\ A=41^\circ 13'2'',\ B=71^\circ 19'5''$. 求 $C,\ b,\ c$.

解.　由(1)式, $C=180^\circ-(41^\circ 13'2''+71^\circ 19'5'')$

$$=67^\circ 27'53''.$$

由 (2) 式, $\log b=\log 55+\log\sin 71^\circ 19'5''-\log\sin 41^\circ 13'22''$,

$$=1.7404+9.9765-10-(9.8189-10)$$

$$=1.8981.$$

$$\therefore\quad b=79.09.$$

由 (3) 式, $\log c=\log 55+\log\sin 67^\circ 27'53''-\log\sin 41^\circ 13'22''$.

$$=1.7404+(9.9655-10)-(9.8189-10)$$

$$=1.8870.$$

$$\therefore\quad c=77.08$$

§2　已知三角形之二邊及一對角

設三角形 ABC 中 $a,\ b$, 及 A 爲已知; 求 $B,\ C,\ c$,

i.　因 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$, 即 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$;

$$\therefore\quad \log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ii.　$C=\pi-(A+B)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

iii. 因 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$, 即 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$;

$$\therefore \quad \log c=\log a+\log \sin C-\log \sin A \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

由此B, C及c之值俱可求得;但在此我人須加討論:

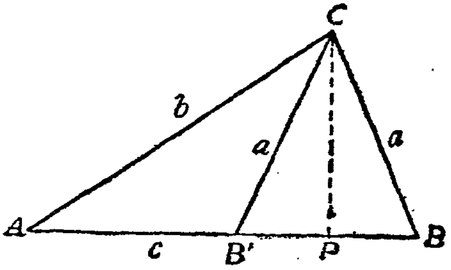
I. 若$a>b$, 則$A>B$, 而B必爲銳角;故在此僅有一三角形.

II. 若$a=b$, 則$A=B$;在此亦僅能有一三角形,而此三角形爲二等邊三角形.

III. 若$a<b$, 則$A<B$, 而A必爲銳角;於是如$a>CP$, 則三角形ABC及$AB'C$皆合於所設之條件.由圖

$$CP=b\sin A;$$

故由a與CP之關係,可分爲三層述之.



a. $a>b\sin A$, 在此B及B'互成補角,而

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

即
$$\sin B=\frac{b\sin A}{a},$$

$$\sin B'=\sin(\pi-B)=\sin B,$$

故三角形ABC及$AB'C$皆所適合.

β. $a=b\sin A$, 在此 $\sin B=1$, 即 $B=\frac{\pi}{2}$, 於是此三角形成爲直角三角形 ACP.

γ. $a<b\sin A$, 在此 $a<CP$, 故不能有三角形.

例一. 已知 $a=840$, $b=485$, $A=21°31'$; 求 B, C, c.

解. 在此 $a>b$, 故知僅有一三角形.

由 (4) 式, $\log\sin B=\log 485+\log\sin 21°31'-\log 840$.

$$=2.6857+(9.5644-10)-2.9243$$

$$=-0.6742$$

$$=9.3258-10$$

$$\therefore\quad B=12°13'25''.$$

由 (5) 式, $C=180°-(21°31'+12°13'25'')$

$$=146°15'35''.$$

由 (6) 式, $\log c=\log 840+\log\sin 146°15'35''$

$$-\log\sin 21°31'$$

$$=\log 840+\log\sin 33°44'25''-\log\sin 21°31'$$

$$=2.9243+(9.7446-10)-(9.5644-10)$$

$$=3.1045$$

$$\therefore\quad c=1272.$$

例二. 已知 $a=25$, $b=25$ $A=50°$; 求 B, C, c.

解. 在此 $a=b$, 則此三角形爲二等邊三角形;故知

$$B=A=50^\circ.$$

由 (5) 式, $C=180^\circ-100^\circ=80^\circ$

由 (6) 式, $\log c=\log 25+\log\sin 80^\circ-\log\sin 50^\circ$

$$=1.3979+9.9934-10-(9.8843-10)$$

$$=1.5070$$

$$\therefore\quad c=32.14.$$

例三. 已知 $a=70, b=75, A=60^\circ$; 求 B, C, c.

解. 在此 $a<b$, 而 $b\sin A=75\times 0.8660=64.9500$, 即 $a>b\sin A$; 故此題有二解, 卽有二三角形適合於所設條件.

由 (4) 式, $\log\sin B=\log 64.95-\log 70$

$$=1.8126-1.8451$$

$$=-0.0325$$

$$=9.9675-10$$

$$\therefore\quad B=68^\circ 6', 或 111^\circ 54'.$$

取 $B=68^\circ 6'$,

由 (5) 式, $C=180^\circ-(60^\circ+68^\circ 6')=51^\circ 54'$,

由 (6) 式, $\log c=\log 70+\log\sin 51^\circ 54'-\log\sin 60^\circ$,

$$=1.8451+(9.8959-10)-(9.9375-10)$$

$$=1.8035.$$

$$\therefore\quad c=63.6.$$

取 $B=111^\circ 54'$,

由(5)式，$$C=180^\circ-(60^\circ+111^\circ 54)=8^\circ 6'.$$

由(6)式，
$$\begin{aligned}\log c&=\log 70+\log\sin 8^\circ 6'-\log\sin 60^\circ\\&=1.8451+(9.1489-10)-(9.9375-10)\\&=1.0565.\end{aligned}$$
$$\therefore\quad c=11.39.$$

例四. 已知 $a=50$, $b=100$, $A=30^\circ$; 求 B, C, c.

解. 在此 $a<b$, 而 $b\sin A=100\times\frac{1}{2}=50$, 即 $a=b\sin A$; 故此題僅有一解,即此三角形爲一直角三角形,而 $B=90^\circ$. 由是

$$\begin{aligned}C&=90^\circ-A=60^\circ,\\c&=b\cos A,\\\log c&=\log b+\log\cos A\\&=\log 100+\log\cos 30^\circ\\&=2+9.9375-10\\&=1.9375.\end{aligned}$$
$$\therefore\quad c=86.6.$$

例五. 已知 $a=42$, $b=100$, $A=30^\circ$; 求 B, C, c.

解. 在此 $a<b$, 而 $b\sin A=100\times\frac{1}{2}=50$, 即 $a<b\sin A$; 故此題爲無解, 即不能有三角形.

§3. 已知三角形之二邊及其夾角

設三角形 ABC 中, a, b, 及 C 爲已知; 求 A, B, c.

由正切定律，

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)},$$

即 $$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\tan\tfrac{1}{2}(A+B);$$

但 $$A+B+C=\pi,$$

即 $$\tfrac{1}{2}(A+B)=\tfrac{1}{2}(\pi-C)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

代入上式，得

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\tan\tfrac{1}{2}(\pi-C)$$

$$=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\ \log\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\log(a-b)-\log(a+b)+\log\cot\frac{C}{2}\cdots(8)$$

由 (7), (8) 二式，$(A+B)$ 及 $(A-B)$ 之值爲已知. 故

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B),$$

$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B).$$

既知三角形之二邊 a, b; 則 c 可由 (6) 式求之. 應用餘弦定律，亦可求得同樣之結果. 其法先由公式

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$

求得 c 之值，再由正弦定律以求其餘二角. 玆設二例以明之.

例一. 已知 $a=872.5$, $b=632.7$, $C=80^\circ$; 求 A, B, c.

解. 應用正切定律,

$$a+b=1505.2,$$

$$a-b=239.8.$$

由 (7) 式,

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=\tfrac{1}{2}(180^\circ-80^\circ)=50^\circ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

由 (8) 式,

$$\begin{aligned}\log\tan\tfrac{1}{2}(A-B)&=\log 239.8-\log 1505.2+\log\cot 40^\circ\\&=2.3799-3.1776+10.0762-10\\&=9.2785-10.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}(A-B)=10^\circ 45'. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

由 (i), (ii) 二式解得

$$A=60^\circ 45',$$

$$B=39^\circ 15'.$$

再由 (6) 式,

$$\begin{aligned}\log c&=\log 872.5+\log\sin 80^\circ-\log\sin 60^\circ 45',\\&=2.9408+(9.9934-10)-(9.9408-10)\\&=2.9934.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad c=985.$$

例二. 已知 $a=4$, $b=6$. $C=60^\circ$; 求 A, B, c.

解. 此題應用餘弦定律解之較爲便利.由餘弦定律,

$$c=\sqrt{16+36-48\times\cos 60^\circ}$$

$$=\sqrt{16+36-24}=\sqrt{28}=5.2915.$$

再

$$\sin A=\frac{a\sin C}{c},$$

$$\therefore\quad \log\sin A=\log a+\log\sin C-\log c$$

$$=\log 4+\log\sin 60^\circ-\log 5.2915$$

$$=0.6021+9.9375-10-0.7236.$$

$$=9.8160-10$$

$$\therefore\quad A=40^\circ 53' 24''$$

由此

$$B=180^\circ-(40^\circ 53' 24''+60^\circ)=79^\circ 6' 36''$$

§4 已知三角形之三邊

已知三角形 ABC 之三邊 a, b, c; 則其三角 A, B, C 可由第五章公式(6)

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

而直接以a, b, c之值代入求之.但用半角定律,亦可得同樣之結果.茲設二例以明之.

例一. 已知$a=2, b=3, c=4$;試應用第五章公式(6)以求A, B, C三角.

解.
$$\cos A=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{7}{8}=0.8750.$$
$$\therefore\quad A=28°57'.$$
$$\cos B=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot2\cdot4}=\frac{11}{16}=0.6875.$$
$$\therefore\quad B=46°34'.$$
$$\cos C=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=-\frac{1}{4}=-0.2500.$$
$$\therefore\quad C=104°29'.$$

例二. 已知$a=4, b=7, c=10$;試應用半角定律以求A, B, C三角.

解.
$$s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)=10.5;$$
$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

兩旁取對數,
$$\log r=\tfrac{1}{2}[\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)-\log s]$$
$$=\tfrac{1}{2}[\log 6.5+\log 3.5+\log 0.5-\log 10.5]$$

$$=\tfrac{1}{2}[0.8129+0.5441+9.6990-10-1.0212]$$

$$=0.0174$$

$$\therefore\quad r=1.0408.$$

代入半角定律公式,

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}=\frac{1.0408}{6.5}=0.1601;$$

$$\therefore\quad \frac{A}{2}=9^\circ 6',$$

即 $$A=18^\circ 12',$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b}=\frac{1.0408}{3.5}=0.2974,$$

$$\therefore\quad \frac{B}{2}=16^\circ 33' 36'',$$

即 $$B=33^\circ 7' 12'',$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}=\frac{1.0408}{0.5}=2.0316,$$

$$\therefore\quad \frac{C}{2}=64^\circ 20' 24'',$$

即 $$C=128^\circ 40' 48''.$$

習 題

1. 已知 $A=65^\circ$, $B=40^\circ$, $a=50$; 求 C, b, c.

答: $C=75^\circ$, $b=35.46$, $c=53.29$.

2. 已知 $a=767$, $b=242$. $A=36^\circ 53' 2''$; 求 B, C, c.

答: $B=10^\circ 54' 58''$, $C=132^\circ 12'$, $c=946.7$.

3. 已知　$a=556,\ b=678.4,\ A=31^\circ10'30''$；求 $B,\ C,\ c$.

答：$\begin{cases} B_1=39^\circ10'12'' \\ C_1=109^\circ39'18'' \\ c_1=1011.5 \end{cases}$　$\begin{cases} B_2=140^\circ49'48'' \\ C_2=7^\circ59'42'' \\ c_2=149.39. \end{cases}$

4. 已知　$a=84\ b=134,\ A=52^\circ$；求 $B,\ C,\ c$.　　答：此題無解.

5. 已知　$a=748,\ b=375,\ C=63^\circ35'30''$；求 $A,\ B,\ c$.

答：$A=86^\circ23'9'',\ B=30^\circ1'21'',\ c=671.27.$

6. 已知　$a=111,\ b=145,\ c=40$；求 $A,\ B,\ C$.

答：$\begin{cases} A=27^\circ20'32'' \\ B=143^\circ7'48'' \\ C=9^\circ31'40''. \end{cases}$

7. 已知　$a=70,\ b=35,\ C=36^\circ52'12''$；求 $A,\ B$.

答：$A=116^\circ33'54'',\ B=26^\circ33'54''.$

8. 已知　$a=804,\ A=99^\circ55',\ B=45^\circ1'$；求 $C,\ b,\ c$.

答：$C=35^\circ4',\ b=577.31,\ c=468.93$

9. 已知　$a=148.3,\ A=37^\circ24',\ C=76^\circ48'30''$；求 $B,\ b,\ c$.

答：$B=65^\circ47'30'',\ b=222.695,\ c=237.72.$

10. 已知　$b=1436.7,\ c=1141.2,\ A=42^\circ14'35''$；求 $B,\ C,\ a$.

答：$B=85^\circ24'22'',\ C=52^\circ21'2'',\ a=969.$

11. 已知　$a=65.43,\ b=58.26,\ c=49.35$；求 $A,\ B,\ C$.

答：$\begin{cases} A=74^\circ22'36'', \\ B=59^\circ2'20'', \\ C=46^\circ35'2''. \end{cases}$

12. 已知　$B=49^\circ,\ C=63^\circ,\ b=36.3$；求 $A,\ a,\ c$.

答：$A=68^\circ,\ a=44.6,\ b=42.85.$

13. 已知 $a=3.471$, $b=2.689$, $A=21^\circ$;求 B, C, c.

答: $B=16^\circ7'12''$, $C=142^\circ52'48''$, $c=5.846$.

14. 已知 $a=3.21$, $b=2.65$, $B=31^\circ$; A, C, c.

答: $\begin{cases} A_1=38^\circ36' \\ C_1=110^\circ24' \\ c_1=4.82 \end{cases}$ $\begin{cases} A_2=141^\circ24' \\ C_2=7^\circ36' \\ c_2=0.6805 \end{cases}$

15. 已知 $a=748$, $b=375$, $C=63^\circ35'30''$; A, B, c.

答: $A=86^\circ23'9''$, $B=30^\circ1'21''$, $c=671.27$.

16. 已知 $a=47.99$, $b=33.14$, $C=175^\circ19'10''$: 求 A, B, c.

答: $A=2^\circ46'8''$, $B=1^\circ54'42''$, $c=81.066$.

17. 已知 $a=13$, $b=14$, $c=15$; 求 A, B, C.

答: $A=53^\circ7'12''$, $B=59^\circ28'48''$, $C=67^\circ22'43''$

18. 已知 $a=123$, $c=321$, $B=29^\circ16'$; 求 A,C, b.

答: $A=15^\circ42'56''.5$, $C=135^\circ1'3''.5$, $b=221.992$.

19. 已知 $a=7$, $b=8$. $c=9$; 求 A, B, C.

答: $A=48^\circ11'23''$, $B=58^\circ24'43''$, $C=73^\circ23'54''$.

20. 已知 $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{\sqrt{8}-1}{2\sqrt{2}}$, $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 求 A, B, C.

答: $A=105^\circ$, $B=15^\circ$, $C=60^\circ$.

21. 已知三角形之三邊爲 34, 40, 66; 求證其最大之角爲 $126^\circ1'20''$.

22. 已知三角形二邊 a, b 之比爲 9:7; 其夾角爲 $64^\circ12'$; 求其他二角.

23. 已知 $a^2=b^2+c^2$; 求證 a 邊所對之角爲 $\frac{\pi}{2}$.

24. 已知三角形之三邊爲 x^2+x+1, $2x+1$, 及 x^2-1; 求證其最大角爲 120°.

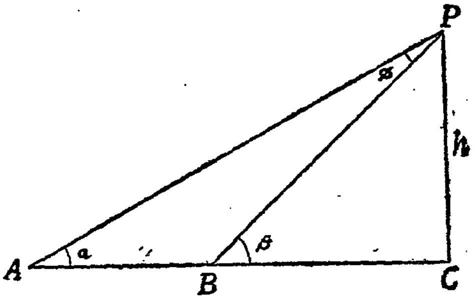
25. 已知三角形之底,高及二底角之差(此二底角假設皆爲銳角),問如何可以解此三角形?

26. 已知三角形之三頂角至對邊之垂線,問如何可以解此三角形?

§5. 高及距離

[I] 物體在水平線上之高度之求法

設P爲水平線上物體之最高點,C爲其在水平線上之射影,PC爲物體之高,命爲h;若B,C爲不可直達之二點時,則h可用下述之法以求之.



在水平線上取相距爲a之A,B二點.測得在A,B二處對P點之仰角爲α,β.由圖

$$a=AC-BC,$$

$$\phi=\beta-\alpha.$$

由正弦定律,

$$\frac{BP}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\phi},$$

即
$$BP=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)};$$

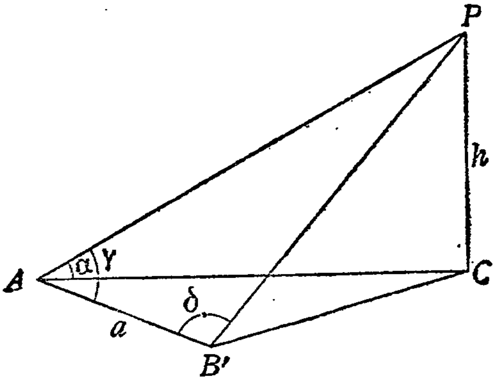
但 $$h=PC=BP\sin\beta,$$

故 $$h=a\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},$$

即 $$\log h=\log a+\log\sin\alpha+\log\sin\beta-\log\sin(\beta-\alpha)\cdots\cdots\cdots(9)$$

設A, B, C三點不能居同一直線上,而B點之位置在B',則求h之法與上述稍異.

在A點測得$\angle PAC=\alpha$, $\angle PAB'=\gamma$, 又在B'點測得$\angle PB'A=\delta$,則



$$\frac{AP}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin(\gamma+\delta)},$$

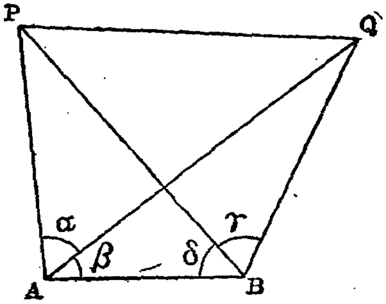
即 $$A\Gamma=\frac{a\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)},$$

但 $$h=PC=AP\sin\alpha,$$

故 $$h=a\frac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)},$$

即 $$\log h=\log a+\log\sin\alpha+\log\sin\delta-\log\sin(\gamma+\delta)\cdots\cdot(10)$$

[II] 不能互視之二物體之距離之求法



設PQ爲不能互視之二物體，求其中之距離d.

取距離爲a之A, B二點，使在A及B二點皆同時可見P, Q二點.測得$\angle PAQ = \alpha$, $\angle QAB = \beta$, $\angle PBQ = \gamma$, $\angle PBA = \delta$，則在三角形ABP，及ABQ中，

$$AP = \frac{a \sin \delta}{\sin(\alpha + \beta + \delta)}$$

$$AQ = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$$

由是AP及AQ可用下列二對數式求之:

$$\log AP = \log a + \log \sin \delta - \log \sin(\alpha + \beta + \delta) \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\log AQ = \log a + \log \sin(\gamma + \delta) - \log \sin(\beta + \gamma + \delta) \quad \cdots\cdots(12)$$

在三角形PAQ中，既知AP, AQ及其夾角α，則由

$$\log \tan \tfrac{1}{2}(\angle APQ - \angle AQP) = \log(AQ - AP) - \log(AQ + AP) + \log \cot \frac{\alpha}{2} \quad \cdots\cdots(13)$$

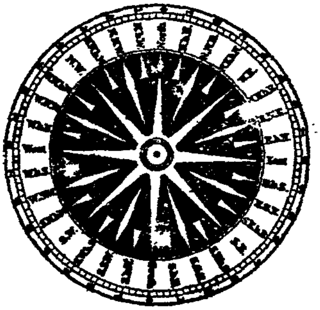
及

$$\angle APQ + \angle AQP = \pi - \alpha \quad \cdots\cdots(14)$$

可以求得$\angle APQ$及$\angle AQP$之值.再由下式以求d.

$$\log d = \log AP + \log \sin \alpha - \log \sin \angle AQP \quad \cdots\cdots(15)$$

§6. 航海 航海用羅盤針以定方向,羅盤針分東南西北爲三十二分,如在南與東之中,分爲東微南($E\ by\ S$)東南東(ESE),南東東($S\ E\ by\ E$)南東(SE),南東南($S\ E\ by\ S$),南南東(SSE),南微東($S\ by\ E$),南西,北西,北東之間,亦同樣分之.



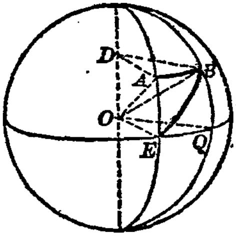
如一點距東30°,距北60°,則記爲"東30°北","或北60°東".

因地球之半徑甚大,地面可視爲平面,一船依東西之方向而航行,其所經之距離謂之橫距(Departure),圖中AB爲橫距;A,B二處之緯度爲相等.因

$$\frac{AB}{EQ}=\frac{DA}{OE}=\frac{DA}{OA}=\cos\angle OAD=\cos\angle AOE,$$

故 $$AB=EQ\cdot\cos\angle AOE,$$

卽 $$EQ=\frac{AB}{\cos\angle AOE}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$



卽A,B二處經度之差等於橫距與緯度之餘弦之比.此處EQ之單位爲分,AB之單位爲浬(knot),卽緯度一分之弧之長.

若取EB之方向,航行自E至B,E爲任意點,則

$$AB = EB \sin \angle AEB, \cdots\cdots (17)$$

$$EA = EB \cos \angle AEB. \cdots\cdots (18)$$

在此公式,EB之距離不能過大,否則差誤甚大.

例一. 一船自北緯25°20′,西經36°10′向西行140浬,求到達點之經度.

解. 由(16)式,

$$經度之差 = \frac{140}{\cos 25°20'} = 154.9' = 2°34.9'.$$

故到達點之經度爲西38°44.9′(=36°10′+2°34.9′).

例二. 一船自南緯8°45′取北36°東之方向行345浬,求到達點之緯度及橫距.

解. 由(17)式,

$$橫距 = 345 \cdot \sin 36° = 202.8 浬.$$

$$緯度之差 = 345 \cdot \cos 36° = 4°39.1'.$$

故到達點之緯度爲南4°5.9′(=8°45′−4°39.1′).

習　題

1. A與B爲在同一水平線上之二點,在此二點仰見一塔之仰角爲23°及39°.已知A,B之距離爲50尺,試求此塔之高及與B點之距離.　答: 高44.6尺,距離55.1尺.

2. 在A處仰見一山頂P之仰角爲30°,在距A點2150尺處取一點B,測得$\angle PAB = 71°$,$\angle PBA = 62°$;試求此山之高.　答: 1298尺.

3. A, B 二處隔以一山，在山麓取一點 C，測得 CA 之距離爲 97 丈；CB 之距離爲 119 丈，$\angle ACB$ 爲 $91°24'$；求 AB 二處之距離.

答： 155.35 丈.

4. 設有 A, B, C 三處，在 A 處測得 $\angle BAC = 80°$，在 B 處測得 $\angle ABC = 60°45'2''$. 已知 AB 之距離爲 632.7 尺；求 BC 及 AC 之距離.

答： $AC = 872.5$ 尺，$BC = 984.83$ 尺.

5. 在船面上遠望一山頂之仰角爲 $46°$，自桅頂仰望此山頂之仰角爲 $44°$. 已知桅高 120 尺，船面距水面 15 尺，問此山之高如何?

答： 1795 尺.

6. 一人在塔頂仰察一山巔之仰角爲 α，俯望此山麓之俯角爲 β，塔與山之距離爲 a，設 h 爲此山之高，求證

$$h = a(\tan\alpha + \tan\beta) = a\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

7. 氣球上升，二人在其南北測得其仰角爲 $64°15'$ 及 $48°20'$. 已知二人之距離爲 400 尺，求氣球之高. 答： 291.49 尺.

8. A, B, C 三人立於三處；A, B 之距離爲 71.2 尺，B, C 之距離爲 23.9 尺，C, A 之距離爲 60.1 尺. 設 C 在 A 之正北，問 B 在 A 之何方?

答： 北偏東或西 $23°52'$.

9. 甲乙二人同時乘汽車，甲向東行每小時速率 7.5 里，乙向東南行每小時速率十里. 問經過一小時又三十分鐘後，甲乙二人之距離如何? 答： 10.6 里.

10. 二塔同高，一人在二塔脚所連成之直線上仰觀近塔之仰角爲 $60°$. 在與此直線成垂直之方向行 80 尺，則仰見二塔之仰角爲 $45°$ 及 $30°$，求塔之高及其相距.

答： 高 $40\sqrt{6}$ 尺，相距 $40[\sqrt{14}+\sqrt{2}]$ 尺.

11. 二屋相距三十尺，在此屋之窗孔中窺他屋之屋頂與屋基

適成九十度之角，又窺他屋頂之仰角爲六十度. 求他屋之高.

答: $40\sqrt{3}$ 尺.

12. 一人在西北向之直路上行走，見 A, B 兩塔在北 20° 東與之成一直線，而 A 塔較近. 前行 4 里後，則 A 塔在東 22° 南，B 塔在東 26° 北，問 A, B 兩塔相距若干?　答: 3.88 里.

13. 當上弦時，在地球上仰視太陽與月球所成之角爲 88°42′. 問地日之距爲地月之距之若干倍?　答: 44 倍.

14. 一船由西而東，望見周圍三里內皆有暗礁之某島在東 21° 北. 前行五里，則此島在東 42° 北. 問若航路不變，續向東行，有無危險?　答: 無危險.

15. 山坡上一塔 CD，在 A 處視之，其仰角爲 51° 在 A, D 所連成之直線上 B 處視之，其仰角爲 72°. 已知山坡之斜度爲 20°，A, B 之距離爲 52 尺，問塔高如何?　答: 62.67 尺.

16. 一人在塔之南 A 點仰視此塔頂之仰角爲 30°，在 A 點之西 a 尺，仰觀此塔頂之仰角爲 18°. 試證塔之高爲 $\dfrac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$ 尺.

17. 山巔一塔，一人在距山底中心 a 尺處仰測塔頂之仰角爲 θ；其人在距塔底中心 b 尺處再測塔頂之仰角亦爲 θ；設 h 爲山高；求證

$$h=(a-b)\tan\theta$$

18. 空中一氣球，在其北 A 處仰觀此氣球之角爲 α，同時在 A 之東 B 處之仰角爲 β，設 h 爲氣球之高 a 爲 A, B 之距離；試證

$$h=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}.$$

19. 在河之兩岸取相對之二點 A, B. 自 A 沿河岸行至 C 處，測得 $\angle ACB$ 爲 α，再向前行至 D 處，測得 $\angle ADB$ 爲 $\frac{\alpha}{3}$，已知 AC 爲 a，CD 爲 b，問河寬若干?　答: $(a+b)\left[\dfrac{b-2a}{2a+3b}\right]^{\frac{1}{2}}$.

20. 一塔略向北斜,在塔南距塔脚 b, a 二處對塔頂之仰角爲 α 及 β. 設 θ 爲倍斜塔與地面所交之角, h 爲塔垂直之高試證

$$\tan\theta=\frac{b-a}{b\cot\alpha-a\cot\beta},$$

$$h=\frac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}.$$

21. 氣球上升,在氣球之垂直面與地平面之交線上取 A, B, C 三點. 在 B 點之仰角爲二倍於在 A 點之仰角,而在 C 點之仰角爲三倍於在 A 點之仰角. 已知 $AB=a$, $BC=b$, 設 h 爲此氣球之高;求證

$$h=\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}.$$

22. 距山麓 a 處有一屋,一人在山坡上適能見此屋之他方之一井. 已知井與屋之距離爲 b, 山坡之斜度爲 α, 設人與山麓之距離爲 c, 屋高爲 h; 試證

$$h=\frac{bc\sin\alpha}{a+b+c\cos\alpha},$$

23. 沿地面一直線上豎立相距各一英里之 A, B, C, 三電桿,各桿之長相等. 設以繩繫 A, C 二桿之頂,則此繩與 B 桿相交於離桿頂八英寸之處. 試證地球之半徑約爲4000英里.

24. 二人在地面同經度之二處,同時測得月球與天頂所成之角爲 θ_1 及 θ_2, 已知此二處之緯度及地球之半徑. 試以式表地球與月球之距離.

25. 在正午時,太陽之高度爲 α. 一人仰見在其南 a 處之天頂有一圓形雲隙,此圓形雲隙之視徑爲 2θ; 而此圓形雲隙在地面上所成之影之視徑爲 2ϕ. 設 x 爲此雲之高,試證

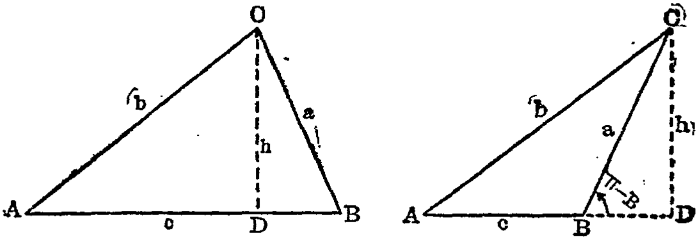
$$x^2(\cot^2\alpha\tan^2\phi-\tan^2\theta)-2a\,x\cot\alpha\tan^2\phi$$
$$+a^2(\tan^2\phi-\tan^2\theta)=0.$$

第七章

三角形之性質

§1. 三角形之面積 設三角形之二邊與夾角,或二角與一邊,或三邊爲已知,則此三角形之面積可以求之.茲分三類述之.

[I] 已知三角形之二邊與夾角求面積.



設Δ爲三角形ABC之面積,則由幾何學

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\, ch,$$

但

$$h = a \sin B;$$

故 / 同樣

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}\, ac \sin B,\\ \Delta &= \tfrac{1}{2}\, ab \sin C,\\ \Delta &= \tfrac{1}{2}\, bc \sin A.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

例. 已知$a=8, c=5, B=60^\circ$; 求此三角形之面積.

解. 應用公式(1),

$$\Delta=\frac{1}{2}\times 8\times 5\times \sin 60^\circ=17.32.$$

[II] 已知三角形之二角與一邊求面積.

因$A+B+C=\pi$, 故如已知其二角, 第三角卽可求得. 茲設B, C及a爲已知, 則由正弦定律.

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A};$$

代入(1)式,得 $$\Delta=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}a\frac{a\sin C}{\sin A}\sin B,$$

卽 $$\Delta=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A},$$

同樣 $$\left.\begin{aligned}\Delta&=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B},\\ \Delta&=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

例. 已知$a=17, B=48^\circ, C=52^\circ$; 求此三角形之面積.

解. $$A=180^\circ-(48^\circ+52^\circ)=80^\circ.$$

應用公式(2), $$\Delta=\frac{17^2\sin 48^\circ\sin 52^\circ}{2\sin 80^\circ}.$$

$$\begin{aligned}\log\Delta&=2\log 17+\log\sin 48^\circ+\log\sin 52^\circ-\log 2-\log\sin 80^\circ\\&=2\times 1.2304+9.8711-10+9.8965-10-0.3010\\&\quad-(9.9934-10)\\&=1.9340\end{aligned}$$

$$\Delta=85.9$$

[III] 已知三角形之三邊求面積.

因
$$\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2};$$

而
$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}.$$

代入前式,得

$$\sin B=2\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

$$=\frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

再代入(1)式,得

$$\Delta=\frac{ac}{2}\sin B=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

故得公式

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

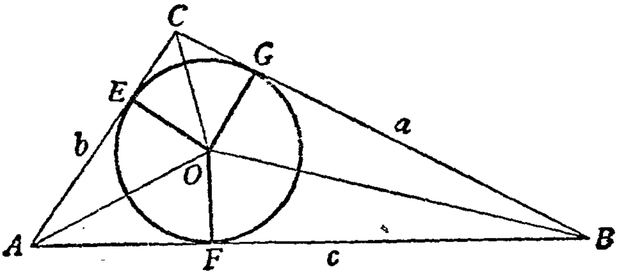
此謂之海龍公式(Heron's Formula).

例. 已知三角形之三邊爲13, 14, 15; 求其面積.

解. 代入公式(3),得

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21\times8\times7\times6}=84.$$

§2. 三角形內切圓之半徑. 設 r 爲三角形 ABC 之內切圓之半徑, Δ_1, Δ_2, Δ_3 爲三角形 AOC, BOA, COB 之面積,則



$$\Delta_1=\tfrac{1}{2}\,br,$$

$$\Delta_2=\tfrac{1}{2}\,cr,$$

$$\Delta_3=\tfrac{1}{2}\,ar.$$

但 $\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=\frac{1}{2}(a+b+c)\,r,$

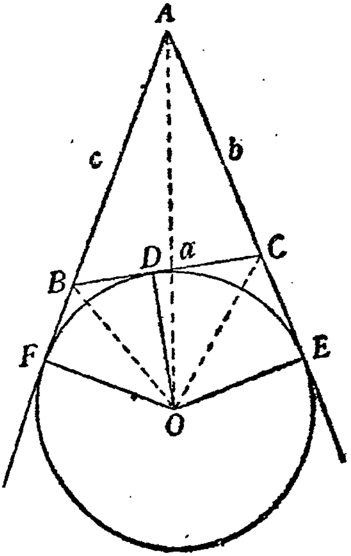
而 $s=\frac{1}{2}(a+b+c),$

故 $\Delta=sr,$

卽 $r=\dfrac{\Delta}{s}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

§3. 三角形旁切圓之半徑

設Δ爲三角形 ABC 之面積, a,b,c 爲其三對邊, O 爲旁切圓之圓心, D,E,F 爲三切點.聯接 OD, OE, OF, 則 OFB, ODB、ODC, OEC 諸角皆係直角.命 r_1 爲此旁切圓之半徑, 則就面積而言



$$四邊形\ ABOC=\triangle OAB+\triangle OAC$$

$$=\frac{c}{2}r_1+\frac{b}{2}r_1$$

又　$$四邊形\ ABOC=\triangle OBC+\triangle ABC$$

$$=\frac{a}{2}r_1+\Delta,$$

$$\therefore\quad \frac{c}{2}r_1+\frac{b}{2}r_1=\frac{a}{2}r_1+\Delta,$$

即　$$\Delta=(c+b-a)\frac{r_1}{2}=r_1(s-a),$$

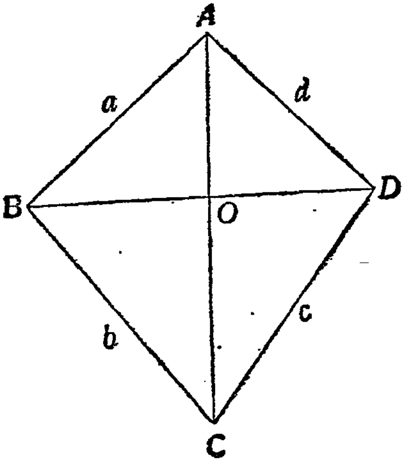
故　$$r_1=\frac{\Delta}{s-a}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

同樣設 r_2, r_3 爲切於 CA, AB 邊之旁切圓,則可證得

$$r_2=\frac{\Delta}{s-b},$$

$$r_3=\frac{\Delta}{s-c}$$

§4. 四邊形面積及圓之內切四邊形面積.



設 $ABCD$ 爲一四邊形, a, b, c, d 爲其四邊, $\angle A+\angle C=2\alpha$; 則此四邊形之面積Ω可以求得之,

在三角形 ABD 及 BCD 中,應用餘弦定律,得

$$\overline{BD}^2 = a^2+d^2-2ad\cos A = b^2+c^2-2bc\cos C,$$

移項得

$$ad\cos A - bc\cos C = \tfrac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2) \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

又面積 $\triangle ABD = \frac{1}{2}ad\sin A,$

$\triangle BCD = \frac{1}{2}bc\sin C;$

而 $\Omega = \triangle ABD + \triangle BCD,$

故 $ad\sin A + bc\sin C = 2\Omega$

平方之，再平方(A)式使相加，得

$$\begin{aligned}
&4\Omega^2 + \tfrac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2\\
&\quad= (ad\sin A + bc\sin C)^2 + (ad\cos A - bc\cos C)^2.\\
&\quad= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\,(\cos A\cos C - \sin A\sin C)\\
&\quad= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos 2a\\
&\quad= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\,(2\cos^2\alpha - 1)\\
&\quad= (ad+bc)^2 - 4abcd\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

移項，

$$\begin{aligned}
16\Omega^2 &= 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2 - 16abcd\cos^2\alpha\\
&= [2(ad+bc) + (a^2+d^2-b^2-c^2)][2(ad+bc)\\
&\qquad - (a^2+d^2-b^2-c^2)] - 16abcd\cos^2\alpha\\
&= [(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]\\
&\qquad - 16abcd\cos^2\alpha\\
&= (a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)\\
&\qquad \cdot(b+c-a+d) - 16\,abcd\cos^2\alpha.
\end{aligned}$$

設 $$s=\tfrac{1}{2}(a+b+c+d),$$

代入上式,得

$$\Omega^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

設此四邊形切於一圓內,則$2\alpha=\pi$,由是

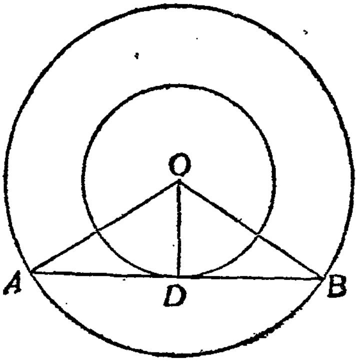
$$\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

故上式變為

$$\Omega'^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

此乃十六世紀印度數學家白拉美格樸達(Brahmagupta)所發明.

§5. 正多邊形之面積 設O為一正多邊形之內切及外接圓之圓心,r及R為其半徑,a為正多邊形之一邊,即AB之長,D為AB與內切圓之切點,則



$$\angle AOB=\frac{2\pi}{n},$$

$$\angle AOD=\frac{\pi}{n}.$$

由是,

$$a=2R\sin\frac{\pi}{n}=2r\tan\frac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

故已知a及n,則內切圓及外接圓之半徑可以求得,

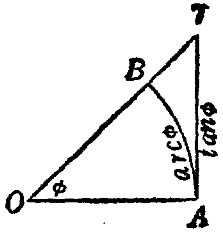
設Δ爲三角形OAB之面積, A爲正多邊形之面積, 則

$$\Delta=\tfrac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=\tfrac{1}{2}ar=r^2\tan\frac{\pi}{n}.$$

卽
$$A=\tfrac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}=nr^2\tan\frac{\pi}{n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

§6 圓之面積. 由圖, $OA=1$, $\angle AOT=\phi$, 則 $AT=\tan\phi$. 如ϕ趨近於零時, 則 $\tan\phi=\phi$;

卽
$$\lim_{\phi\to 0}\left[\frac{\tan\phi}{\phi}\right]=1,\ (第十章\ §5)$$



由§5, (9)式正多邊形之面積A爲

$$A=nr^2\tan\frac{\pi}{n},$$

卽
$$A=\pi r^2\left(\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right).$$

設n趨近於無窮大, 則此正多邊形之面積A卽爲內切於此多邊形之圓之面積; 故設C爲圓之面積, 則

$$C=\pi r^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right).$$

$$=\pi r^2\lim_{\frac{\pi}{n}\to 0}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right).$$

由 $\lim\limits_{\phi\to 0}\left[\frac{\tan\phi}{\phi}\right]=1$ 之關係,得

$$C=\pi r^2. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

習　題

試求下列各三角形之面積:

1. $a=4.8,\ c=5.3,\ B=39°27'$.　答: 8.0824.

2. $a=19.8,\ B=39°.20',\ C=88°40'$.　答: 157.63.

3. $a=15,\ b=20,\ c=25$.　答: 150.

4. $a=182,\ B=63.5°,\ C=78.4°$.　答: 23531.

5. $a=48.35,\ b=64.32,\ C=62°37'$.　答: 1380.7.

6. $a=7,\ c=5\sqrt{2},\ B=135°$.　答: $17\frac{1}{2}$.

7. $b=527.4,\ A=73°42',\ C=63°37'$.　答: 176384.

8. $a=5.3,\ b=4.8,\ c=4.6$.　答: 10.279.

9. $a=21.66,\ b=2164.5,\ C=116°30'20''$.　答: 4333600.

10. $b=149,\ A=70°42',\ B=39°18'$.　答: 15541.7.

11. $a=409,\ b=169,\ c=510$.　答: 30600.

12. $c=96.37,\ A=42°23'35'',\ B=69°52'50''$.　答: 3176.7.

13. $a=7.1,\ b=5.3,\ c=6.4$.　答: 16.307.

14. 三角形之一角爲65°,其對邊爲50,三邊之和爲128.試求其內切圓之半徑.　答: 8.92.

15. 已知三角形之三邊 a, b, c. 設 R 爲其外接圓之半徑, $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 試證

$$R=\frac{abc}{4\Delta}.$$

16. 設 a, b, c 爲一三角形之三邊, R 及 r 爲其外接圓及內切圓之半徑, 試證

$$2\,rR=\frac{abc}{a+b+c}.$$

17. 設三角形 ABC 之三邊爲 a, b, c;Δ 爲其面積; 求證

$$\Delta=\frac{2\,abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

18. 承前題,試證

$$\Delta=\tfrac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A).$$

19. 三角形之二邊一爲 3, 一爲 12, 所夾之角爲 30°. 求面積與此三角形相等之等腰直角三角形之斜邊. 答: 6.

20. 設 r 及 R 爲三角形內切圓及外接圓之半徑 r_1, r_2, r_3 爲旁切圓之半徑. 求證

i. $r_1+r_2+r_3=4\,R+r;$

ii. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R};$

iii. $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$

21. 在任何三角形中, 其內切圓之面積與此三角形之面積之比等於 π 與 $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ 之比;試證之.

22. 設 m_1, m_2, m_3 爲三角形三中線之長, 試證

$$m_1=\sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2+c^2)-\tfrac{1}{4}a^2};$$

$$m_2=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+c^2)-\tfrac{1}{4}b^2};$$

$$m_3=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\tfrac{1}{4}c^2};$$

23. 試證平分三角形三內角之三直線相交於一點.

24. 試證自三角形三頂點與對邊之中點所連成之直線, 相交於一點.

25. 試證三角形三頂點與內切圓與對邊之交點所連成之三直線,相交於一點.

26. 設 θ 爲四邊形 $ABCD$ 二對角線之交角, Ω 爲此四邊形之面積;試證

$$\Omega=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta.$$

第　八　章

反三角函數三角方程式

§1. 反三角函數　由三角函數之定義得知三角函數之值,隨角之大小而變;反之,角之大小亦隨函數之值以變,故角亦可以其一函數之值表之.例如

$$y=\sin x$$

可書　　$x=\sin^{-1}y$, 或 $x=\operatorname{arc}\sin y$.

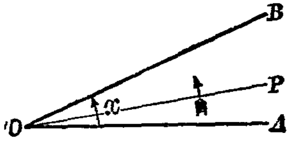
仿此,餘弦爲 y 之角以 $\cos^{-1}y$ 表之,正切爲 y 之角以 $\tan^{-1}y$ 表之,餘類推.

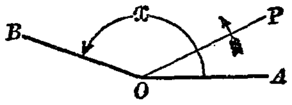
$$\sin^{-1}y,\ \cos^{-1}y,\ \tan^{-1}y,\ \cot^{-1}y,\ \sec^{-1}y,\ \csc^{-1}y.$$

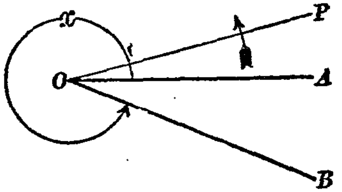
總稱爲反三角函數 (Inverse trigonometric function). 故反三角函數者實視角爲其正弦,餘弦,正切等之函數也.

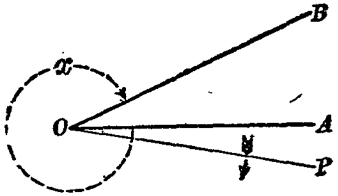
§2. 同函數值之角　如右圖,若動線 OP 與終線 OB 相合之後,仍依逆時針或順時針之方向,繼續作 0 次,1 次,2 次,3 次……以至無數次之旋轉而復與終線相合,

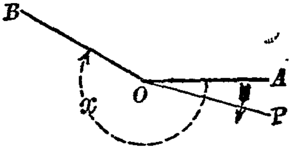
則始線與終線之位置雖無變更,因而AOB角,即x角,有一定之三角函數值;但動線所經之角實有x, $\pm 2\pi+x$, $\pm 4\pi+x$, $\pm 6\pi+x$,……之別.設以r爲0,或任何整數,此動線所經諸角,苟其始線與終線之位置不動,可以$2r\pi+x$表之;且凡此諸角,均有同一之三角函數值.故正角之三角函數僅有單值,而反三角函數則有無限之值.例如$\sin\frac{\pi}{6}$必爲$\frac{1}{2}$,但$x=\sin^{-1}\frac{1}{2}$式中之x,則$\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$……等均能適合,$\frac{\pi}{6}$特其中最小之正角之值耳.絕對值最小之角,謂之主值(Principal value). $\sin^{-1}x$, $\csc^{-1}x$, $\tan^{-1}x$,

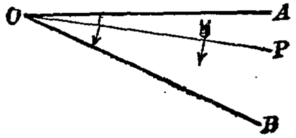












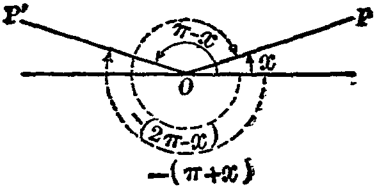
$\cot^{-1}x$之主值在$-\frac{\pi}{2}$與$\frac{\pi}{2}$之間; $\cos^{-1}x$, $\sec^{-}x$之主值在O與π之間.

下列六公式,x爲最小正角,乃表示有同一三角函數值之一切角度者,其用甚廣.玆就反正弦反餘弦,及反正切證之.設以n爲O,或任何正整數或負整數.

$$\left.\begin{aligned}\sin x&=\sin[n\pi+(-1)^n x]\\ \cos x&=\cos[2n\pi\pm x]\\ \tan x&=\tan[n\pi+x]\\ \cot x&=\cot[n\pi+x]\\ \sec x&=\sec[2n\pi\pm x]\\ \csc x&=\csc[n\pi+(-1)^n x]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

[I] $\sin x=\sin[n\pi+(-1)^n x]$

$\csc x=\csc[n\pi+(-1)^n x]$



設x爲有正弦y之最小正角,使OP及OP'爲x及$(\pi-x)$兩角之終線,則由第二章§9公式(5), $\sin(\pi-x)=\sin x$;而由本節首段所述,凡終線與OP及OP'相合之角,亦必有同一之三角函數值,此同函數值之角爲

$$2r\pi+x \text{ 及 } 2r\pi+(\pi-x),$$

或

$$2r\pi+x \text{ 及 } (2r+1)\pi-x,$$

r 爲 0 或任何整數，於是可知 π 之雙數倍數後隨者爲 $+x$，而單數倍數後隨者爲 $-x$；故設以 n 爲 0，或任何正整數或負整數，一切與 x 有同正弦之角可以公式

$$n\pi+(-1)^n x$$

表之，即

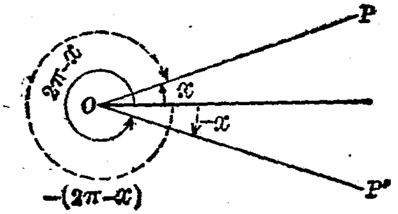
$$[n\pi+(-1)^n x]=\sin^{-1}y.$$

既 x 爲有正弦 y 之最小正角，故

$$\sin x=\sin[n\pi+(-1)^n x].$$

又因餘割爲正弦之倒數，故

$$\csc x=\csc[n\pi+(-1)^n x].$$



[II]　$\cos x=\cos[2n\pi\pm x]$

$\sec x=\sec[2n\pi\pm x]$

設 x 爲有餘弦 y 之最小正角，使 OP 及 OP' 爲 x 及 $(2\pi-x)$ 兩角之終線，則由第二章 § 11 公式 (9)，$\cos(2\pi-x)=\cos x$；而由本節首段所述，凡終線與 OP 及 OP' 相合之角，亦必有同一之三角函數值，此同函數值之角爲

$$2r\pi+x \text{ 及 } 2r\pi+(2\pi-x),$$

或
$$2r\pi+x \text{ 及 } (2r+2)\pi-x,$$

r為0或任何整數,於是可知π之倍數必為雙數,而後隨之x則可正可負;故設以n為0,或任何正整數負整數,一切與x有同餘弦之角可以公式

$$2n\pi\pm x$$

表之,即

$$[2n\pi\pm x]=\cos^{-1}y.$$

既x為有餘弦y之最小正角,故

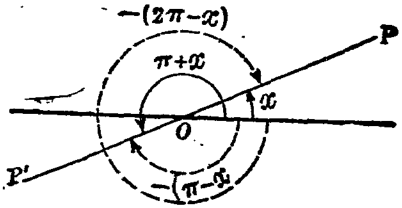
$$\cos x=\cos[2n\pi\pm x].$$

又因正割為餘弦之倒數,故

$$\sec x=\sec[2n\pi\pm x].$$

[III] $\tan x=\tan[n\pi+x]$

$\cot x=\cot[n\pi+x]$



設x為有正切y之最小正角,使OP及OP'為x及$(\pi+x)$兩角之終線,則由第二章§10公式(7),$\tan(\pi+x)=\tan x$;而由本節首段所述,凡終線與OP及OP'相合之角,亦必有同一之三角函數值.此同函數值之角為

$$2r\pi+x \text{ 及 } 2r\pi+(\pi+x),$$

或

$$2r\pi+x \text{ 及 } (2r+1)\pi+x,$$

r 爲0或任何整數，於是可知無論π之倍數爲雙數或爲單數，後隨者必爲$+x$；故設以n爲0，或任何正整數或負整數，一切與x有同正切之角可以公式

$$n\pi+x$$

求之，即

$$[n\pi+x]=\tan^{-1}y.$$

既x爲有正切y之最小正角，故

$$\tan x=\tan[n\pi+x].$$

又因餘切爲正切之倒數，故

$$\cot x=\cot[n\pi+x].$$

例一. 已知$\sin x=\frac{1}{2}$，求x之值.

解 $$x=\sin^{-1}\tfrac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}.$$

∴ $$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

例二. 已知 $\tan x=1$. 求x之值.

解. $$x=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$$

∴ $$x=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

§3. 反三角恆等式 恆等式含有反三角函數者，曰

反三角恆等式.茲證明其一二重要者如次

[註] 在恆等式中之反三角函數,如 $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ 等等,通常不指普通一般值而以主值爲限.

I. $\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}]\cdots\cdots(2)$

證. 設 $x=\sin\phi,\ y=\sin\psi$, 則

$$\phi=\sin^{-1}x,\ \psi=\sin^{-1}y,$$

$$\cos\phi=\sqrt{1-\sin^2\phi}=\sqrt{1-x^2},$$

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\sqrt{1-y^2}.$$

因 $$\sin(\phi\pm\psi)=\sin\phi\cos\psi\pm\cos\phi\sin\psi$$

$$=x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}.$$

故 $$\phi\pm\psi=\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}\pm\sqrt{1-x^2}].$$

II. $\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y$

$$=\cos^{-1}[xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

證. 設 $x=\cos\phi,\ y=\cos\psi$, 則

$$\phi=\cos^{-1}x,\ \psi=\cos^{-1}y,$$

$$\sin\phi=\sqrt{1-\cos^2\phi}=\sqrt{1-x^2},$$

$$\sin\psi=\sqrt{1-\cos^2\psi}=\sqrt{1-y^2},$$

因 $$\cos(\phi\pm\psi)=\cos\phi\cos\psi\mp\sin\phi\sin\psi$$

$$=xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

故　$$\phi\pm\psi=\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}[xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}].$$

III. $$\tan^{-1}x\pm\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left[\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

證. 設　$x=\tan\phi$, $y=\tan\psi$, 則

$$\phi=\tan^{-1}x,\ \psi=\tan^{-1}y.$$

因　$$\tan(\phi\pm\psi)=\frac{\tan\phi\pm\tan\psi}{1\mp\tan\phi\tan\psi}=\frac{x\pm y}{1\mp xy}$$

故　$$\phi\pm\psi=\tan^{-1}x\pm\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left[\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right].$$

習　題

1. 求下列諸角之值:

i. $x=\sin^{-1}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,　　答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

ii. $x=\cos^{-1}\left(\pm\frac{1}{2}\right)$,　　答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

iii. $x=\tan^{-1}(\pm\sqrt{3})$,　　答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

iv. $x=\cot^{-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,　　答: $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

2. 求下列諸函數之值:

i. $\sin(\cos^{-1}\frac{1}{2})$,　　答: $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

ii. $\cos(\tan^{-1}1)$,　　答: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

iii. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,　　答: 1.

iv. $\cot\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,　　答: $\sqrt{3}$.

v. $\cos\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,　　答: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

vi. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}+\tan^{-1}\sqrt{3}\right)$,　　答: 1.

vii. $\tan\left(\sec^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{3}-\csc^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$　　答: $\frac{-\sqrt{3}}{3}$.

3. 試證 $\sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\right]+\sin^{-1}\left[\frac{12}{13}\right]=\sin^{-1}\left[\frac{63}{65}\right].$

4. 試證 $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}.$

5. 試證 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$

6. 試證 $\sin^{-1}(3x-4x^3)=3\sin^{-1}x.$

7. 試證 $\cos^{-1}(4x^3-3x)=3\cos^{-1}x.$

8. 試證 $\tan^{-1}\frac{p}{q}-\tan^{-1}\frac{p-q}{p+q}=\frac{\pi}{4}.$

9. 試證 $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$

10. 試證 $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2x)+\tan^{-1}(\cot x)+\tan^{-1}(\cot^3 x)=0^\circ.$

§4 三角方程式 方程式含有未知角之函數者,曰三角方程式(Trigonometric equation). 如

$$2\sin x=1,$$

$$2\sin^2 x+3\cos x=0,$$

$$\cos 2x\sec x+\sec x+1=0,$$

等皆三角方程式也.

求未知角之諸值使適合於一三角方程式者,曰解三角方程式. 解三角方程式無一定之方法,茲舉數例以示之.

例一. 試解 $\tan^2 x+3=2\sec^2 x.$

解. $\tan^2 x+3=2(1+\tan^2 x),$

3. 試證 $\sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\right]+\sin^{-1}\left[\frac{12}{13}\right]=\sin^{-1}\left[\frac{63}{65}\right]$.

4. 試證 $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$.

5. 試證 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

6. 試證 $\sin^{-1}(3x-4x^3)=3\sin^{-1}x$.

7. 試證 $\cos^{-1}(4x^3-3x)=3\cos^{-1}x$.

8. 試證 $\tan^{-1}\frac{p}{q}-\tan^{-1}\frac{p-q}{p+q}=\frac{\pi}{4}$.

9. 試證 $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

10. 試證 $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2x)+\tan^{-1}(\cot x)+\tan^{-1}(\cot^3 x)=0°$.

§4 三角方程式 方程式含有未知角之函數者，曰三角方程式(Trigonometric equation). 如

$$2\sin x=1,$$

$$2\sin^2 x+3\cos x=0,$$

$$\cos 2x\sec x+\sec x+1=0,$$

等皆三角方程式也.

求未知角之諸值使適合於一三角方程式者，曰解三角方程式. 解三角方程式無一定之方法，茲舉數例以示之.

例一. 試解 $\tan^2 x+3=2\sec^2 x$.

解. $\tan^2 x+3=2(1+\tan^2 x)$,

由此
$$\cos x=0,$$
$$x=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

又
$$\cos\frac{x}{2}=0,\quad \frac{x}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$
$$x=(2n+1)\pi.$$

再
$$\sin\frac{3x}{2}=\cos\frac{3x}{2},$$

卽
$$\tan\frac{3x}{2}=1=\tan\frac{\pi}{4},$$

得
$$\frac{3x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{4},$$

卽
$$x=2n\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}.$$

例四　試解　$\tan(x+\phi)=a\tan x.$

解. 原式移項
$$\frac{\tan(x+\phi)}{\tan x}=a,$$

則
$$\frac{\tan(x+\phi)+\tan x}{\tan x}=\frac{a+1}{1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$
$$\frac{\tan(x+\phi)-\tan x}{\tan x}=\frac{a-1}{1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

〔註〕 ϕ爲已知角.

(a))b) 二式相除,得
$$\frac{\tan(x+\phi)+\tan x}{\cos(x+\phi)-\tan x}=\frac{a+1}{a-1}.$$

但 $\tan(x+\phi)+\tan x=\dfrac{\sin(x+\phi)}{\cos(x+\phi)}+\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$=\frac{\sin(x+\phi)\cos x+\cos(x+\phi)\sin x}{\cos\ (x+\phi)\cos x}$$

$$=\frac{\sin(2x+\phi)}{\cos(x+\phi)\cos x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$\tan(x+\phi)-\tan x=\frac{\sin(x+\phi)}{\cos(x+\phi)}-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin(x+\phi)\cos x-\cos(x+\phi)\sin x}{\cos(x+\phi)\cos x}$$

$$=\frac{\sin\phi}{\cos(x+\phi)\cos x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

(c)(d) 二式之結果代入上式得

$$\frac{\sin(2x+\phi)}{\sin\phi}=\frac{a+1}{a-1}$$

即
$$\sin(2x+\phi)=\frac{a+1}{a-1}\sin\phi.$$

得
$$x=\tfrac{1}{2}\left[\sin^{-1}\left\{\frac{a+1}{a-1}\sin\phi\right\}-\phi\right].$$

故得原式之解為

$$x=n\pi+(-1)^n\tfrac{1}{2}\left[\sin^{-1}\left\{\frac{a+1}{a-1}\sin\phi\right\}-\phi\right].$$

例五　試解 $a\cos x+b\sin x=c$, 並討論之.

解. 原式左端為

$$a\left(\cos x+\frac{b}{a}\sin x\right).$$

命 ϕ 為在 $-\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{\pi}{2}$ 中之一角, 而 $\tan\phi=\frac{b}{a}$, 則得

$$a\left(\cos x+\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\sin x\right),$$

即
$$a\left(\frac{\cos x\cos\phi+\sin x\sin\phi}{\cos\phi}\right),$$

即
$$\frac{a\cos(x-\phi)}{\cos\phi},$$

代入原式得　$\cos(x-\phi)=\frac{c}{a}\cos\phi.$

i. 若 $\left|\frac{c}{a}\cos\phi\right|>1$, 則此方程式爲無解.

ii. 若 $\left|\frac{c}{a}\cos\phi\right|<1$, 則必有一 α 角在第一象限,其關係爲

$$\cos\alpha=\frac{c}{a}\cos\phi.$$

於是
$$\cos(x-\phi)=\cos\alpha$$

故
$$x-\phi=2n\pi\pm\alpha$$
$$x=\phi+2n\pi\pm\alpha.$$

iii. 若 $\frac{c}{a}\cos\phi=1$, 即 $\cos(x-\phi)=1$, 得

$$x=\phi+2n\pi.$$

iv. 若 $\frac{c}{a}\cos\phi=-1$, 即 $\cos(x-\phi)=-1$, 得

$$x=\phi+\pi+2n\pi.$$

因 $\left|\frac{c}{a}\cos\phi\right|$ 既不能大於 1, 則

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\phi\leqslant 1,$$

又因 $$\cos^2\phi=\frac{1}{1+\tan^2\phi}$$ [讀者自證之]

原設 $\tan\phi=\frac{b}{a}$, 則 $\cos^2\phi=\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2}{a^2+b^2}$.

代入上不等式得

$$\frac{c^2}{a^2+b^2}\leqslant 1,$$

即 $$c^2\leqslant a^2+b^2.$$

故原式有解之條件為

$$c^2\leqslant a^2+b^2.$$

習　題

試解下列方方程式：

1. $\sin^2x=1$	$x=n\pi\pm\frac{\pi}{2}$.
2. $\cos^2x-\sin^2x=\frac{1}{2}$	$x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.
3. $2\sin x\sin 3x=1$	$x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. 或 $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$
4. $\tan^2x+\cot^2x=2$	$x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.
5. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$	$x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$.
6. $\csc x+\cot x=\sqrt{3}$	$x=2n\pi+\frac{\pi}{3}$.
7. $\sin^2x-\cos^2x=m$	$x=\sin^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{m+1}{2}}\right)$.

8. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$ $\qquad$ $x=2n\pi+\frac{2\pi}{3}$, 或 $2n\pi$.

9. $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

10. $\tan x=\frac{\tan x-2}{\tan x+2}$ $\qquad$ $x=\tan^{-1}\left(\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}\right)$.

11. $\sin 4\theta+\sin\theta=0$ $\qquad$ $\theta=2n\pi$ 或 $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

12. $\sin 2\theta+\cos 2\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ $\qquad$ $\theta=2n\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, 或 $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

13. $\tan\theta+\tan 2\theta=\tan 3\theta$ $\qquad$ $\theta=n\pi$, 或 $n\theta\pm\frac{\pi}{3}$.

14. $\tan\theta+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2$ $\qquad$ $\theta=\frac{1}{2}\left[n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right]$.

15. $2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta=3$ $\qquad$ $\theta=n\pi+\frac{\pi}{3}$.

16. $\sin^2 2\theta-\sin^2\theta=\sin^2\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{10}$, 或 $n\pi\pm\frac{3\pi}{10}$.

17. $2\sin 3\omega=3\cos\omega+\cos 3\omega$ $\qquad$ $\omega=n\pi+\tan^{-1}(-2)$, 或 $n\pi+\frac{\pi}{4}$.

18. $(1-\tan\omega)(1+\sin 2\omega)=1+\tan\omega$ $\qquad$ $\omega=n\pi$, 或 $n\pi+\frac{3\pi}{4}$.

19. $1+\cos\omega+\cos 2\omega+\cos 3\omega=0$

$\omega=(2n+1)\pi$, $(2n'+1)\frac{\pi}{2}$, 或 $(2n''+1)\frac{\pi}{3}$.

20. $\sin 9\omega+\sin 5\omega+2\sin^2\omega=1$ $\qquad$ $\omega=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, 或 $\frac{1}{7}\left(n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right)$.

21. $(\cot\phi-\tan\phi)^2(2-\sqrt{3})=4(2+\sqrt{3}$ $\phi=\frac{1}{2}\left(n\pi\pm\frac{\pi}{12}\right)$.

22. $\cos\phi+\cos 2\phi=1$ $\qquad$ $\phi=2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$.

23. $4\sin\phi\sin(\phi-a)=2\cos a-1$ $\qquad$ $\phi=\frac{1}{2}\left(a+2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)$.

24. $\sin\phi\tan\frac{\phi}{2}=\cos\phi$　　$\phi=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

25. $\sin a+\sin(\phi-a)+\sin(2\phi+a)=\sin(\phi+a)+\sin(2\phi-a)$

$\phi=2n\pi\pm\frac{\pi}{5}$, 解 $2n\pi\pm\frac{3\pi}{5}$.

26. $\cos m\psi+\cos(m-2)\psi=\cos\psi$　　$\psi=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 或 $\frac{1}{m-1}\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)$.

27. $(\sqrt{2}+1)\sin^2\psi+(\sqrt{2}-1)\cos^2\psi+\sin 2\psi=\sqrt{2}$

$\psi=n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$.

28. $\sin\psi-\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\psi=2n\pi+\frac{5\pi}{12}$, 或 $(2n+1)\pi+\frac{\pi}{12}$.

29. $1+\sin\psi+\sin 2\psi-\sin 3\psi=\cos\psi-\cos 2\psi+\cos 3\psi$

$\psi=2n\frac{\pi}{3}$, 或 $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

30. $3\tan\psi\tan 3\psi+1=0$　　$\psi=n\pi\pm\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

31. $\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$　　$x=(12n-1)\pi$, 或 $(12n+7)\pi$,

32. $\tan x+\cos x=\sec x-\sin x$　　$x=2n\pi$, 或 $(2n+1)\pi$

33. $3\tan^2x-16\sin^2x+3=0$　　$x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, 或 $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

34. $\tan(x-a)\cos 2x-\frac{1}{3}=\sin 2x$　　$x=n\pi-\tan^{-1}\left[\frac{3\tan a+1}{\tan a+3}\right]$

35. $4[\sec x+\tan x(8\sin x-9)]+\sin 2x(9-2\sin x)=0$

$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $2n\pi+\frac{\pi}{6}$, $(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}$.

試解下列諸式並討論之.

36. $(3-5\lambda)\cos x-2(2-3\lambda)\sin x+2-\lambda=0$.

37. $(\sin a+\sin b)\cos x-(\cos a+\cos b)\sin x=m.$

38. $\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x=m.$

39. $\tan^2 x=\lambda\tan(x+a)\tan(x-a).$

40. $\lambda\cos^2 x+(2\lambda^2-\lambda+1)\sin x-3\lambda+1=0.$

§5. 聯立三角方程式 解聯立三角方程式之方法與解聯立代數方程式同,茲設例如次:

例一. 試解
$$\gamma\cos\phi=a,$$
$$\gamma\sin\phi=b,$$

解.
$$\frac{\gamma\cos\phi}{\gamma\sin\phi}=\frac{a}{b}=\cot\phi$$
$$\therefore\quad \phi=\cot^{-1}\frac{a}{b}.$$

又
$$\gamma^2\cos^2\phi+\gamma^2\sin^2\phi=a^2+b^2$$

卽
$$\gamma^2=a^2+b^2$$
$$\therefore\quad \gamma=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

例二. 試解
$$\sin x+\sin y=a,$$
$$\cos x+\cos y=b.$$

解. 由公式
$$2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)=a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)=b.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

相除得
$$\tan\tfrac{1}{2}(x+y)=\frac{a}{b}$$

故
$$x+y=2\tan^{-1}\frac{a}{b}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

由 (a), (b) 二式

$$a^2+b^2=4\cos^2\tfrac{1}{2}(x-y)[\sin^2\tfrac{1}{2}(x+y)+\cos^2\tfrac{1}{2}(x+y)]$$

即
$$\cos\tfrac{1}{2}(x-y)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

故
$$x-y=2\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

由 (c), (d) 二式解得

$$x=\tan^{-1}\frac{a}{b}+\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$y=\tan^{-1}\frac{a}{b}-\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

例三. 試解
$$\gamma\sin\theta\cos\phi=a\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$
$$\gamma\sin\theta\sin\phi=b\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$
$$\gamma\cos\theta=c\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

解. (a), (b) 二式相除得

$$\tan\phi=\frac{b}{a}$$

$$\therefore\quad \phi=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

(a), (b), (c) 三式平方相加,得

$$a^2+b^2+c^2=\gamma^2[\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\cos^2\theta]=\gamma^2$$

$$\gamma=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

由 (c) 式
$$\theta=\cos^{-1}\frac{c}{\gamma}=\cos^{-1}\left[\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right].$$

習 題

試解下列聯立方程式:

1. $\sin^2x+\sin^2y=a$

   $\cos^2x-\cos^2y=b$

   $$\begin{cases}x=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\pm\sqrt{\dfrac{a-b}{2}},\\ y=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\pm\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}.\end{cases}$$

2. $\sin^2\theta+2\cos\theta=2$

   $\cos\theta-\cos^2\theta=0$

   $$\theta=2n\pi$$

3. $\sin^2\omega+a=m$

   $\cos^2\omega+a=n$

   $$\begin{cases}\omega=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\pm\sqrt{\dfrac{m-n+1}{2}},\\ a=\dfrac{m+n-1}{2}\end{cases}$$

4. $\sin\phi+\sin\psi=\sin\alpha$

   $\cos\phi+\cos\psi=1+\cos\alpha$

   $$\begin{cases}\phi=2n\pi+\alpha\\ \psi=2n'\pi\end{cases}\qquad\begin{cases}\phi=2n\pi\\ \psi=2n'\pi+\alpha.\end{cases}$$

5. $\cos x\sin y=-\frac{1}{2}$

   $\sin x+\cos y=0$

   $$\begin{cases}x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\\ y=2n\pi\pm\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

6. $\tan x+\tan y=1$

   $\cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   $$\begin{cases}x=n\pi+\dfrac{\pi}{4}\\ y=n'\pi\end{cases}\qquad\begin{cases}x=n'\pi\\ y=n'\pi+\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

7. $\dfrac{x+y}{1-xy}=1$

   $\dfrac{(1-x^2)(1-y^2)+4xy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{2}$

   $$\begin{cases}x=\tan\dfrac{5\pi}{24}\\ y=\tan\dfrac{\pi}{24}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\cot\dfrac{5\pi}{24}\\ y=-\cot\dfrac{\pi}{24}.\end{cases}$$

8. $\sin x+\sin y=1$

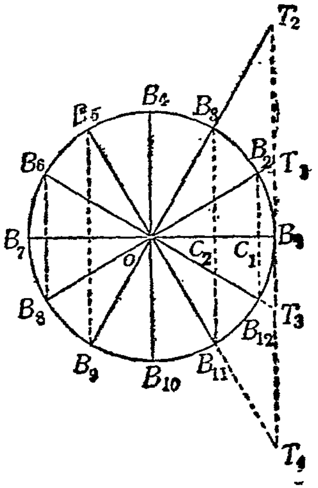
   $\cos x\cos y=-\frac{3}{4}$

   $$\begin{cases}x=2n\pi+\dfrac{5\pi}{6}\\ y=2n'\pi+\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ y=2k'\pi+\dfrac{5\pi}{6}.\end{cases}$$

第九章

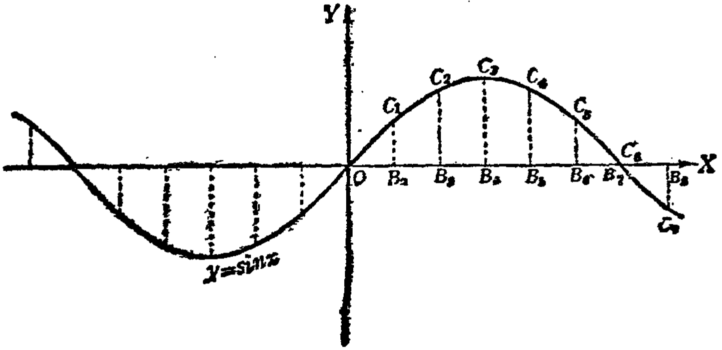
三角函數之圖解

§1. 應用單位圓 設 O 爲單位圓,取圓周上之等分點 B_1 B_2……;聯結 OB_1, OB_2, OB_3,…… 諸半徑,並作 C_1B_2, C_2B_3……諸垂直線.由 B_1 作切線,使與 OB_2, OB_3,……,諸半徑之延長線交於 T_1, T_2, T_3,……諸點.再在一平面上作 OX 及 OY 互相垂直之二軸,在 OX 上取 B_2, B_3 諸點,使其距離等於圓周上諸等弧之長,則諸三角函數可以曲線表其變跡:



I. 正弦曲線 在 OX 軸上經過 B_1, B_2 諸點作平行於 OY 軸之 C_1B_2, C_2B_3,……諸線,使其長等於單位圓上之 C_1B_2, C_2B_3……諸線.因在單位圓上之 C_1B_2, C_2B_3……

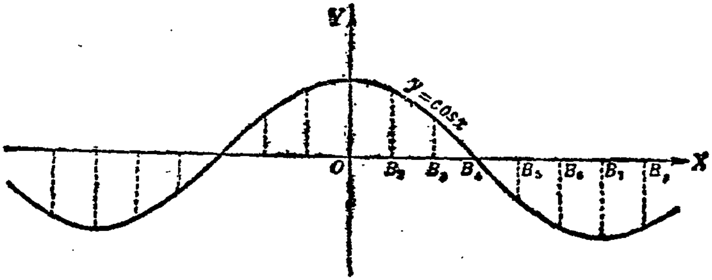
諸線,係代表 $\angle B_1OB_2$, $\angle B_1OB_3$……諸角之正弦;由是平面上 C_1, C_2, C_3……諸點,皆適合於自 O 至 $2n\pi$ 之角之正弦之值;換言之,卽爲 $y=\sin x$ 相當於 x 自 O 變至 $2n\pi$ 時 y 之值,故聯結 O, C_1, C_2……諸點之曲線卽爲正弦曲線(Sine curve),因正弦之值在第三,第四二象限爲負,自



O 起每經 2π 周而復始,是以正弦曲線往返於 OX 軸之上下而兩端延至無窮,有如波浪之進行,故正弦曲線又名曰波形曲線(Wave curve). 2π 謂之周期(Period),曲線之極大極小值謂之幅(Amplitude).

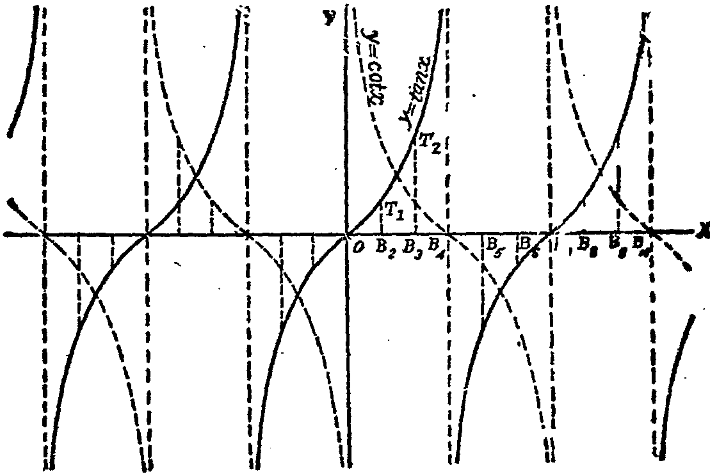
II. 餘弦曲線 在 OX 軸上 B_2, B_3,……諸點作垂直線使其長等於單位圓中 OB_1, OC_1, OC_2……諸線,則聯結諸線之端亦得一曲線.因單位圓中 OB_1, OC_1, OC_2……諸線,卽代表 $y=\cos x$, 相當於 x 自 O 變至 $2n\pi$ 時之餘弦,故此曲線卽爲餘弦曲線(Cosine curve).餘弦曲線亦爲

波形曲線;讀者由圖當知其與正弦曲線相差爲 $\frac{\pi}{2}$.



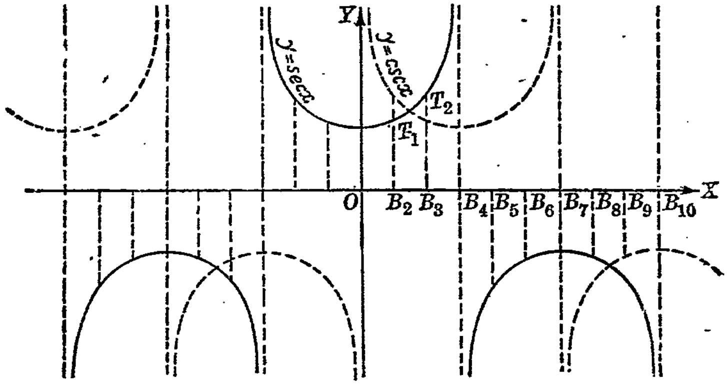
III. **正切曲線** 再因 $B_1T_1, B_1T_2,$……諸線之長卽代表 $y=\tan x$, 相當於 x 自 O 變至 $2n\pi$ 時之正切,故若在坐標軸之 B_2, B_3……諸點作垂直線 B_2T_1, B_3T_2……等,使其長等於單位圓上之 B_1T_1, B_1T_2……諸線,則聯此 O, T_1, T_2……諸點所成之曲線, 卽爲正切曲線 (tangent curve).

若將正切曲線向右移動 $\frac{\pi}{2}$, 並繞 OY 軸旋轉 π, 則得



餘切曲線.

IV. 正割曲線 單位圓中之 OB_1, OT_1, OT_2……諸線乃代表 $y=\sec x$, 相當於 x 自 O 變至 $2n\pi$ 時, y 之值故經坐標軸上之 O, B_2, B_3……諸點作垂直線,使其長爲 OB_1, OT_1, OT_2,……則聯結 B_1, T_1, T_2,……諸點得正割曲線 (secant curve). 至於餘割曲線, 亦與正割曲線相差 $\frac{\pi}{2}$.



§2 應用分析法 應用分析方法亦可繪出諸函數之曲線. 例如求 $y=\sin x$ 之曲線,先作下列之討論:

i 當 $x=0, y=0$; 故原點適合於此方程式,卽曲線經過原點.

ii $x=\sin^{-1}y$, 當 $y=0$, $x=\sin^{-1}0=n\pi$, 故曲線之兩端與 OX 軸相交於無限點,而每相鄰二點之距離爲 π.

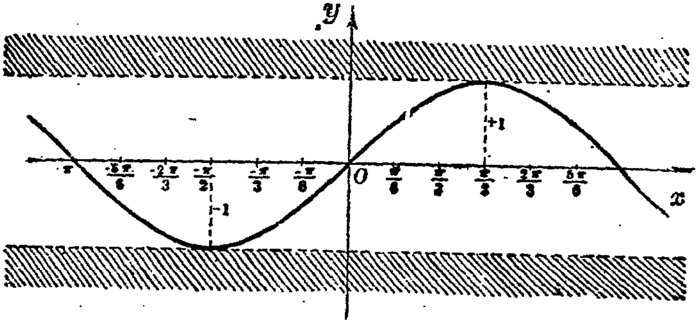
iii. 因正弦之值不能超過於 +1 及 −1, 卽 $-1<y<1$, 故曲線不能超過於 $y=1$ 及 $y=-1$ 之二線之外.

iv. 再求得下表,

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y	0	↘	-0.5	↘	-0.86	↘	-1	↗	-0.86	↗	-0.5	↗	0	↗	0.5	↗	0.86	↗	1	↘	0.86	↘	0.5	↘	0

由此表得知曲線在$\frac{\pi}{2}$爲極大,在$-\frac{\pi}{2}$爲極小,

根據以上之討論,可繪圖如次:



讀者試應用分析法以求其他諸函數之曲線.

習 題

試繪下列諸方程式之曲線:

1. $y=\sin 2x$.

2. $y=2\cos x$.

3. $y=\cot\frac{x}{2}$.

4. $y=3\sin\frac{\pi x}{5}$.

5. $y=2\tan\frac{\pi x}{3}$.

6. $y=\sin x+3$.

7. $y=1-\tan x$.

8. $y=2\csc x-1$.

9. $y=\sin x+\cos x$.

10. $y=\frac{x}{3}+\cos x$.

11. $y=e^{-x}\sin x$.

12. $y=2\sec^2 x-7\sec x+3$.

第十章

棣美弗定理及三角級數

§ 1. 複數 讀者曾習代數學,得知方程式

$$x^2-6x+25=0$$

之根爲

$$x_1=3+4\sqrt{-1},$$

$$x_2=3-4\sqrt{-1}.$$

此二根皆可分爲二部,其一爲實數部,其他爲含有$\sqrt{-1}$部,此謂之複數(Complex number);凡數含有以$\sqrt{-1}$爲因數者曰虛數(Imaginary number).雖虛數僅爲一種不可計算之符號,然在近代數學中,至爲重要.

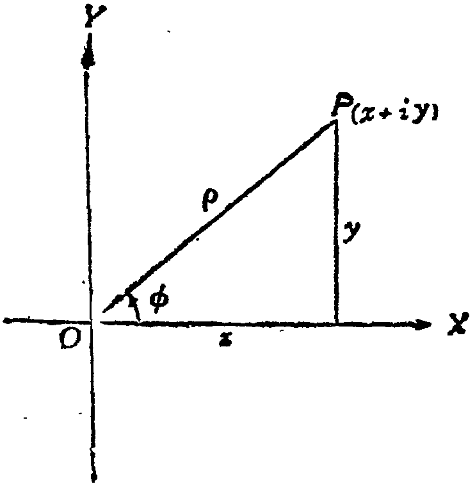
$\sqrt{-1}$普通以i代之;i有下列之性質:

$$i^2=-1,\qquad i^3=-i,\qquad i^4=1,\qquad i^5=i,\cdots\cdots$$

即 $$i^{4k}=1,\qquad i^{4k+1}=i,\qquad i^{4k+2}=-1,\qquad i^{4k+3}=-i.$$

設x, y爲二實數,則複數$x+iy$可以平面上之一點表之;即以OX爲實數軸,OY爲虛數軸,則一點$P(x, y)$即表$x+iy$.

§2. 複數之三角表示法 設以P點表一複數$x+iy$, 則ϕ曰此複數之幅(Amplitude),ρ曰此複數之模(Modulus). 由圖,我人可得下列之關係:



$$x=\rho\cos\phi$$

$$y=\rho\sin\phi$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{y}{x},$$

$$\sin\phi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos\phi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由此則得

$$x+iy=\rho(\cos\phi+i\sin\phi) \text{ ……………………(1)}$$

故我人得下列之定理:

複數等於其模與$\cos\phi+i\sin\phi$之相乘積,此處ϕ即其幅.

由此一方程式之根,可以三角函數表之.

例. 試以三角函數表方程式$z^2-z+1=0$之根

解. 由原式解得

$$z_1=\tfrac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2=\tfrac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

在此 $$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}}=1$$

$$z_1\text{ 之幅}=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\div\tfrac{1}{2}\right)=\tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

$$z_2\text{ 之幅}=\tan^{-1}\left(-\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3},$$

故 $$z_1=\tfrac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$z_2=\tfrac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}.$$

習 題

試以三角函數表下列諸方程式之根:

1. $z^2+1=0$. 2. $z^2+2z+3=0$.

3. $z^2-2z+2=0$. 4. $z^2-\sqrt{3}z+1=0$.

§3. 棣美弗定理 1725年英國數學家棣美弗(De Moivre)研究複數,發明重要定理,後人卽命其名曰棣美弗定理(De Moivre's Theorem).

棣美弗定理　$\cos\phi+i\sin\phi$ 之 n 次方等於原式以 n 倍 ϕ，此處 n 可爲任何整數或分數，苟以式表之，卽

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

證. 因　$z=x+iy=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$

將兩端平方之，並命 $i^2=-1$，得

$$z^2=\rho^2(\cos\phi+i\sin\phi)^2=\rho^2(\cos^2\phi-\sin^2\phi+2i\sin\phi\cos\phi)$$

卽　$$z^2=\rho^2(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)$$

再　$$z^3=\rho^3[\cos 2\phi\cos\phi-\sin 2\phi\sin\phi+i(\sin 2\phi\cos\phi+\cos 2\phi\sin\phi)]$$

卽　$$z^3=\rho^3(\cos 3\phi+i\sin 3\phi)$$

此定理當 n 爲 1, 2, 3 時俱已眞確. 用數學歸納法 (mathematical induction)，假定當 n 爲 $n-1$ 時已證實，而觀其當 n 爲 n 時能否成立可矣；蓋設能成立，當 n 爲 4 及 5，推而至於 n 皆能成立.

茲假定 n 爲 $n-1$ 時能成立，卽

$$z^{n-1}=\rho^{n-1}[\cos(n-1)\phi+i\sin(n-1)\phi]$$

若 $n-1$ 增 1，卽 n，則

$$z^n=\rho^n[\cos(n-1)\phi\cos\phi-\sin(n-1)\phi\sin\phi+i\sin(n-1)\phi\cos\phi+i\cos(n-1)\phi\sin\phi]$$

卽　$$z^n=\rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi).$$

故以上當 n 爲 $n-1$ 時之推論爲眞確

$$z^n=\rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)$$

設 $\rho=1$, 則 $$z^n=(\cos n\phi+i\sin n\phi).$$

故當 n 爲任何正整數時,均能成立.

其次設 n 爲任何負整數,命 $n=-m$, 則

$$\begin{aligned}(\cos\phi+i\sin\phi)^n&=(\cos\phi+i\sin\phi)^{-m}\\&=\frac{1}{(\cos\phi+i\sin\phi)^m}\\&=\frac{1}{\cos m\phi+i\sin m\phi}\\&=\frac{1}{\cos m\phi+i\sin m\phi}\cdot\frac{\cos m\phi-i\sin m\phi}{\cos m\phi-i\sin m\phi}\\&=\frac{\cos m\phi-i\sin m\phi}{\cos^2 m\phi+\sin^2 m\phi}\\&=\cos m\phi-i\sin m\phi\\&=\cos(-m\phi)+i\sin(-m\phi)\\&=\cos n\phi+i\sin n\phi\end{aligned}$$

故 n 亦可爲任何負整數.

再 n 爲任何整數,因

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$$

則 $$\cos\phi+i\sin\phi=(\cos n\phi+i\sin n\phi)^{\frac{1}{n}}$$

設 n 爲分數,命 $n=\frac{p}{q}$, 於是

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=(\cos\phi+i\sin\phi)^{\frac{p}{q}}=(\cos p\phi+i\sin p\phi)^{\frac{1}{q}}$$

由本節如前之證明得知n爲分數時亦能成立.

由是棣美弗定理已經完全證明.

應用棣美弗定理可求複數之乘方,玆設一例如次:

例. 已知$z=3+4i$,求z^3

解. $z=3+4i=5(\cos\phi+i\sin\phi),\ \phi=\tan^{-1}\frac{4}{3}=53^\circ 8'.$

$$z^2=(3+4i)^2=25(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)$$

$$z^3=(3+4i)^3=125(\cos 3\phi+i\sin 3\phi).$$

§4. 棣美弗定理之擴充　因$z=\cos\phi+i\sin\phi,\ \rho=1,$ 苟將ϕ增加$2k\pi$,則其值仍不變,卽

$$z=\cos\phi+i\sin\phi=\cos(\phi+2k\pi)+i\sin(\phi+2k\pi)$$

故得

$$z^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此處$k=0,1,2,3,\cdots\cdots n-1.$

應用(3)式卽可求複數之方根.

例一. 求1之立方根,卽$\sqrt[3]{1}$.

解. 因　$1=\cos\phi+i\sin\phi,\ \phi=0$

於是

$$1^{\frac{1}{3}}=(\cos\phi+i\sin\phi)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

當$k=0$,則　$1^{\frac{1}{3}}=\cos 0+i\sin 0=1.$

當$k=1$,則　$1^{\frac{1}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$

當 $k=2$, 則 $1^{\frac{1}{3}}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$

故1之立方根爲

$$1,\quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

例二. 求1之n方根, 卽$1^{\frac{1}{n}}$.

解. 因 $1^{\frac{1}{n}}=(\cos\phi+i\sin\phi)^{\frac{1}{n}},\ \phi=0$

$$=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

設 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\cdots\omega_{n-1}$ 爲1之n方根, 則

$$\omega_0=1$$

$$\omega_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\omega_2=\cos 2\cdot\frac{2\pi}{n}+i\sin 2\cdot\frac{2\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_{n-1}=\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}+i\sin(n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

此處ω_1謂之原根 (primitive root), 蓋有下列之關係:

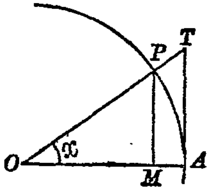
$$\omega_2=\omega_1^2,\ \omega_3=\omega_1^3, \cdots\cdots\omega_{n-1}=\omega_1^{n-1},\ \omega_0=\omega_1^n.$$

習題

1. 設 $z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, 求 z^4, z^8.
2. 設 $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, 求 z^5, z^{10}.
3. 設 $z=-1-i$, 求 z^6; z^{12}.
4. 求 -8 之立方根.
5, 求1之四方根.
6. 求 $1+i$ 之立方根.

§5. $\sin x\to x$, $\tan x\to x$.

[I]　$\sin x\to x$:



設 O 爲一單位圓, x 爲小於 $\frac{\pi}{2}$ 之正角,則 $PM=\sin x$, $PA=x$ 徑, $TA=\tan x$. 由幾何學之定理觀之,

$$PM<PA<TA,$$

卽

$$\sin x<x<\tan x$$

以 $\sin x$ 除全式,

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

因

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

故得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

[II]　$\tan x\to x$:

因

$$\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$\therefore$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

故若當 x 角爲甚小時, $\sin x$ 及 $\tan x$ 卽可以 x 代之. 注意此處 x 爲以徑爲單位.

§6. $\sin n\phi$ 與 $\cos n\phi$ 之展開

由棣美弗定理

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi.$$

由二項定理

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots$$

以展開之,得

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos^n\phi+n\cos^{n-1}\phi(i\sin\phi)$$
$$+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cos^{n-2}\phi(i\sin\phi)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cos^{n-3}\phi(i\sin\phi)^3$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cos^{n-4}\phi(i\sin\phi)^4$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因 $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$,……, 代入上式並整理之,得

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos^n\phi-\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cos^{n-2}\phi\sin^2\phi$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cos^{n-4}\phi\sin^4\phi+\cdots$$
$$+i\Big[n\cos^{n-1}\phi\sin\phi$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cos^{n-3}\phi\sin^3\phi+\cdots\cdots\Big]$$
$$=\cos n\phi+i\sin n\phi.$$

因二複數苟相等，則兩端之實數部與虛數部各相等，故

$$\cos n\phi=\cos^n\phi-\frac{r(n-1)}{\underline{|2}}\cos^{n-2}\phi\sin^2\phi$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cos^{n-4}\phi\sin^4\phi$$
$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

$$\sin n\phi=n\cos^{n-1}\phi\sin\phi-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cos^{n-3}\phi\sin^3\phi$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\underline{|5}}\cos^{n-5}\phi\sin^5\phi$$
$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

習　題

應用(4)，(5)，二式，命 $n=2,\ 3,\ 4$，證明下列諸式：

1. $\cos 2\phi=\cos^2\phi-\sin^2\phi$.
2. $\cos 3\phi=\cos^3\phi-3\cos\phi\sin^2\phi$.
3. $\cos 4\phi=\cos^4\phi-6\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi$.
4. $\sin 2\phi=2\cos\phi\sin\phi$.
5. $\sin 3\phi=3\cos^2\phi\sin\phi-\sin^3\phi$.
6. $\sin 4\phi=4\cos^3\phi\sin\phi-4\cos\phi\sin^3\phi$.

§ 7. 三角級數　茲進而求三角級數，以弧表三角函數。

在(4)式中命 $n\phi=\theta$ 即 $n=\frac{\theta}{\phi}$，得

$$\cos\theta=\cos^n\phi-\frac{\frac{\theta}{\phi}\left(\frac{\theta}{\phi}-1\right)}{\underline{\lfloor 2}}\cos^{n-2}\phi\sin^2\phi$$

$$+\frac{\frac{\theta}{\phi}\left(\frac{\theta}{\phi}-1\right)\left(\frac{\theta}{\phi}-2\right)\left(\frac{\theta}{\phi}-3\right)}{\underline{\lfloor 4}}\cos^{n-4}\phi\sin^4\phi-\cdots\cdots$$

$$=\cos^n\phi-\frac{6(\theta-\phi)}{\underline{\lfloor 2}}\cos^{n-2}\phi\left(\frac{\sin\phi}{\phi}\right)^2$$

$$+\frac{\theta(\theta-\phi)(\theta-2\phi)(\theta-3\phi)}{\underline{\lfloor 4}}\cos^{n-4}\phi\left(\frac{\sin\phi}{\phi}\right)^4-\cdots\cdots$$

設 ϕ 趨近於零，而 θ 不變，則 n 爲無窮大，因

$$\lim_{\phi\to 0}\left[\frac{\sin\phi}{\phi}\right]=1,$$

及
$$\lim_{\phi\to 0}\cos\phi=1.$$

代入上式，則得

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{\underline{\lfloor 2}}+\frac{\theta^4}{\underline{\lfloor 4}}-\frac{\theta^6}{\underline{\lfloor 6}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

同樣再以 $n=\frac{\theta}{\phi}$ 代入(5)式，得

$$\sin\theta=\frac{\theta}{\phi}\cos^{n-1}\phi\sin\phi-\frac{\frac{\theta}{\phi}\left(\frac{\theta}{\phi}-1\right)\left(\frac{\theta}{\phi}-2\right)}{\underline{\lfloor 3}}\cos^{n-3}\phi\sin^3\phi$$

$$+\frac{\frac{\theta}{\phi}\left(\frac{\theta}{\phi}-1\right)\left(\frac{\theta}{\phi}-2\right)\left(\frac{\theta}{\phi}-3\right)\left(\frac{\theta}{\phi}-4\right)}{\underline{|5}}\cos^{n-5}\phi\sin^5\phi-\cdots\cdots$$

$$=\theta\cos^{n-1}\phi\left(\frac{\sin\phi}{\phi}\right)-\frac{\theta(\theta-\phi)(\theta-2\phi)}{\underline{|3}}\cos^{n-3}\phi\left(\frac{\sin\phi}{\phi}\right)^3$$

$$+\frac{\theta(\theta-\phi)(\theta-2\phi)(\theta-3\phi)(\theta-4\phi)}{\underline{|5}}\cos^{n-5}\phi\left(\frac{\sin\phi}{\phi}\right)^5$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

命ϕ趨近於零,則得

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\frac{\theta^5}{\underline{|5}}-\frac{\theta^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

既知正弦與餘弦級數,則可由相除而得正切級數

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\theta-\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\frac{\theta^5}{\underline{|5}}-\cdots\cdot}{1-\frac{\theta^2}{\underline{|2}}+\frac{\theta^4}{\underline{|4}}-\cdots\cdot}$$

$$=\left(\theta-\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\frac{\theta^5}{\underline{|5}}-\cdots\cdot\right)\cdot\left[1-\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^4}{24}+\cdots\cdot\right)\right]^{-1}$$

$$=\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^5}{120}-\cdots\cdot\right)\left[1+\left(\frac{\theta^3}{2}-\frac{\theta^4}{24}+\cdots\cdot\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\theta^3}{2}-\frac{\theta^4}{24}+\cdots\cdot\right)^2+\cdots\cdot\right]\text{(用二項定理展開)}$$

$$=\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^5}{120}-\cdots\cdot\right)\left(1+\frac{\theta^2}{2}+\frac{5\theta^4}{24}+\cdots\cdot\right)$$

$$=\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{2\theta^5}{15}+\cdots\cdots$$

故得 $$\tan\theta=\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{2\theta^5}{15}+\frac{17\theta^7}{315}+\cdots\cdots, \quad\cdots\cdots(8)$$

同理可得餘切級數如下:

$$\cot\theta=\frac{1}{\theta}-\frac{\theta}{3}-\frac{\theta^3}{45}-\frac{2\theta^5}{945}-\cdots\cdots, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

以上正弦及餘弦級數爲任何值時皆爲收斂. θ 係用弳爲單位.

[註] 設有無窮級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+\cdots\cdots$ 至無窮,其首 n 項之和 S_n 於 n 無限增大時趨近於一極限值 S,即

$$\lim_{x\to\infty} S_n=S,$$

則此級數爲收斂 (Convergent).

習 題

1. 試證 $\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta+2\alpha)+\cdots\cdots$ 之 n 項之和爲

$$\sin\left[\theta+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right]\sin\frac{n\alpha}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}.$$

2. 試證 $\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta+2\alpha)+\cdots\cdots$ 之 n 項之和爲

$$\cos\left[\theta+(n-1)\frac{\alpha}{2}\right]\sin\frac{n\alpha}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}.$$

3. 試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{nx}=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots=e^x.$

4. 在 e^x 中,命 $x=i\theta$,求證 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. 此謂之歐拉公式 (Euler's Formula).

5. 因 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$,求證

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}.$$

6. 由歐拉公式,試求 i^i 及 $\sqrt[i]{i}$,並證 $\sqrt[i]{i}=\frac{1}{i^i}$.

7. 由 $i\tan\theta=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$,試證

$$\theta=\tan\theta-\tfrac{1}{3}\tan^3\theta+\tfrac{1}{5}\tan^5\theta-\cdots\cdots.$$

第十一章

三角函數造表法 表之精確度

§1. 緒論 特別角0°, 30°, 45°, 60°, 90°等函數之值;可直接由作圖求得,已詳第二章.此外若干特殊角之函數,亦可直接化得;例如求sin 18°, cos 18°, sin 36°, cos 36°. 設 $\theta=18°$, 則 $2\theta=36°, 3\theta=54°$, 因 $2\theta+3\theta=90°$, 並

$$\sin 2\theta=\cos 3\theta,$$

兩旁展開,得

$$2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta.$$

以 $\cos\theta$ 遍除之,得

$$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3=1-4\sin^2\theta.$$

卽
$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0.$$

故
$$\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

但 sin 18° 爲正,故得

$$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

由是，

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

因 $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ,$

故 $$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

凡 3°, 6°, 9°, 12°,……等角之函數之值皆可直接由函數之關係推得.

讀者由第十章三角函數之級數，若先將角由度化爲弳，則任何角之函數之值，皆可以求得.三角函數表之造成，即用此法.

§2. **應用三角級數造表** 由第十章(6), (7)二式

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\underline{\lvert 3}} + \frac{\theta^5}{\underline{\lvert 5}} - \frac{\theta^7}{\underline{\lvert 7}} + \cdots\cdots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{\underline{\lvert 2}} + \frac{\theta^4}{\underline{\lvert 4}} - \frac{\theta^6}{\underline{\lvert 6}} + \cdots\cdots.$$

此處 θ 爲以弳爲單位.因此二級數收歛甚速，我人僅計算首三項，即得 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之近似值.例如求 $\sin 20^\circ$.

因 $$20^\circ = \frac{20\pi}{180^\circ}\text{弳}$$

取 $\pi=3.14159265\cdots\cdots$, 得

$$20^\circ=0.349065850398\cdots\cdots \text{弳}.$$

代入 $\sin\theta$ 級數中,

$$\sin 20^\circ=0.349065850398-\frac{(0.349065850398)^3}{6}$$
$$+\frac{(0.349065850398)^5}{120}$$
$$=0.342020268347\cdots\cdots.$$

故得 $\sin 20^\circ=0.342020268347\cdots\cdots\cdots\cdots$. 但表中所列爲0.3420, 此蓋取小數四位, 而第五位不滿5乃捨去也.

由 $\cos\theta$ 級數, 可計算 $\cos 20^\circ$ 之近似值. 計算級數首三項, 得

$$\cos 20^\circ=0.939695044036\cdots\cdots$$

若用公式 $\cos 20^\circ=\sqrt{1-\sin^2 20^\circ}$, 亦可得同樣之結果. 表中 $\cos 20^\circ$ 爲 0.9397, 蓋取小數四位, 而第五位又四捨五入也.

既知 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$, 則 $\tan\theta$, $\cot\theta$, 可由公式

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

以求之.

§3. 小角之函數之值　由第十章(4)式, 當 x 爲甚小

之角時, $\sin x \to x$, 故求小角之函數之值,可以角之弳值以代其正弦.例如求 $\sin 10''$, 因

$$10''=\frac{10\pi}{180\times 60\times 60}=\frac{\pi}{64800}=0.00004848136811\cdots\cdots\text{弳}.$$

茲求 $\sin 10''=0.00004848136811\cdots\cdots$ 與用級數首三項所算出之值之差.用級數

$$\sin 10''=\frac{\pi}{64800}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^3+\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^5-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在第二項以後以 0.00005 代 $\frac{\pi}{64800}$, 則 $-\frac{1}{6}(0.00005)^3$ $+\frac{1}{120}(0.00005)^5-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 諸項之和影響於第一項 $0.00004848136811\cdots\cdots$ 者,在小數第十二位以後,故若以 $\sin 10''=0.000048481368$, 其差誤小於 $\frac{1}{10^{12}}$.

由此,用 $\cos 10''=\sqrt{1-\sin^2 10''}$ 可求得

$$\cos 10''=0.9999999988248.$$

§4. 求相差10″之角之函數之值 設 $\sin 10''$ 之值爲已知,則求 $\sin 20''$, $\sin 30''$, $\sin 40''$ 等相差 10″ 之角之函數之值,可用下之公式,較爲便利.

設 α 爲任何角,則由函數之和之公式[第四章(21)]

$$\sin(n+1)\alpha+\sin(n-1)\alpha=2\sin n\alpha\cos\alpha.$$

設 $2\cos\alpha=2-K$, 則

$$\sin(n+1)\alpha+\sin(n-1)\alpha=(2-K)\sin n\,\alpha.\therefore$$

$$\sin(n+1)\alpha=2\sin n\alpha-\sin(n-1)\alpha-K\sin n\,\alpha\cdots\cdots\cdots(1)$$

設 $\alpha=10''$, 則 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 皆爲已知. 因 $2\cos a=2-K$, 得

$$K=0.0000000023504\cdots\cdots$$

令 $n=1$, 則由(1)式得 $\sin 20''$ 之值, 令 $n=2$, 則得 $\sin 30''$ 之值,餘類推.

§5. 求大於30°之角之函數之值　若已知30°以內諸角之函數之值,則求大於30°諸角之函數,宜以下之公式.

由第四章(21)式,

$$\sin(30^\circ+A)+\sin(30^\circ-A)=2\sin 30^\circ\cos A=\cos A.$$

故得公式

$$\sin(30^\circ+A)=\cos A-\sin(30^\circ-A)\cdots\cdots(2)$$

例如　$\sin 38^\circ=\sin(30^\circ+8^\circ)=\cos 8^\circ-\sin 22^\circ.$

同樣,有公式

$$\cos(30^\circ+A)=\cos(30^\circ-A)-\sin A\cdots\cdots(3)$$

又因

$$\sin(45^\circ+A)-\sin(45^\circ-A)=2\cos 45^\circ\sin A=\sqrt{2}\sin A.$$

故若45°以內之正弦之值爲皆已求得,則求45°以外之

角之正弦,以用下式爲宜:

$$\sin(45^\circ+A)=\sin(45^\circ-A)+\sqrt{2}\sin A\cdots\cdots(4)$$

同樣可求 $\cos(45^\circ+A)$ 公式.

又若60°以內之正弦爲皆已求得,則求60°以外之角之正弦,宜用下式:

$$\sin(60^\circ+A)=\sin(60^\circ-A)+\sin A\cdots\cdots(5).$$

同樣亦可求 $\cos(60^\circ+A)$ 之公式.

§6. **表之精確度** 由 §3, $\sin 10''=0.000048481368$ 與實値之差在小數第十二位以後,即其誤差爲小於 $\frac{1}{10^{12}}$. 但 $\sin 20''$, $\sin 30''$ 等爲由 $\sin 10''$ 之値逐步推算而得,故其値之精確度有時不能達小數第十二位.但特別角之函數,可不必藉此法而求得,例如由 §1, 已知 $\sin 18^\circ=(\sqrt{5}-1)/4$, 故由上法所求得之 $\sin 18^\circ$ 之値,可與 $(\sqrt{5}-1)/4$ 比較,以知其精確度.

下列二公式,可用以證驗計算之是否精確:

證驗公式:

$$\sin A+\sin(72^\circ+A)-\sin(72^\circ-A)=\sin(36^\circ+A)-\sin(36^\circ-A)\cdots\cdots(6)$$

$$\cos A+\cos(72^\circ+A)+\cos(72^\circ-A)=\cos(36^\circ+A)+\cos(36^\circ-A)\cdots\cdots(7)$$

此公式之來源，蓋因

$$\sin(72^\circ+A)-\sin(72^\circ-A)=2\cos 72^\circ\sin A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin A,$$

$$\sin(36^\circ+A)-\sin(36^\circ-A)=2\cos 36^\circ\sin A=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sin A,$$

故

$$\sin A+\sin(72^\circ+A)-\sin(72^\circ-A)=\sin A+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin A,$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sin A=\sin(36^\circ+A)-\sin(36-A).$$

同理可證明(7)式.

命 $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\frac{\theta^5}{\underline{|5}}$，其差誤可計算之如次.

因在 $o<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta$ 級數收歛甚速，若取

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\frac{\theta^5}{\underline{|5}},$$

則所差者爲 $-\frac{\theta^7}{\underline{|7}}+\frac{\theta^9}{\underline{|9}}-\cdots\cdots$，但

$$-\frac{\theta^7}{\underline{|7}}+\frac{\theta^9}{\underline{|9}}-\cdots\cdots=-\left[\frac{\theta^7}{\underline{|7}}-\frac{\theta^9}{\underline{|9}}+\frac{\theta^{11}}{\underline{|11}}-\frac{\theta^{13}}{\underline{|13}}+\cdots\cdots\right]$$

$$=-\left[\left(\frac{\theta^7}{\underline{|7}}-\frac{\theta^9}{\underline{|9}}\right)+\left(\frac{\theta^{11}}{\underline{|11}}-\frac{\theta^{13}}{\underline{|13}}\right)+\cdots\cdots\right]$$

在此 $[\quad]$ 內爲正數，故

$$\frac{\theta^9}{\underline{|9}}-\frac{\theta^{11}}{\underline{|11}}+\cdots\cdots<\left|\frac{\theta^7}{\underline{|7}}\right|.$$

即 $\sin\theta$ 與 $\theta-\frac{\theta^3}{\lfloor\underline{3}}+\frac{\theta^5}{\lfloor\underline{5}}$ 之差小於 $\frac{\theta^7}{\lfloor\underline{7}}$.

當 $\theta=20^\circ$, $\frac{\theta^7}{\lfloor\underline{7}}$ 爲小數點後第七位之數, 故在 20° 以下, $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{\lfloor\underline{3}}+\frac{\theta^5}{\lfloor\underline{5}}$, 其差誤小於 $\frac{1}{10^6}$. 即可精確至小數六位.

若 $\theta=10^\circ$, 則因 $10^\circ=0.17453$……强, $\theta^5=0.00016$, $\frac{\theta^5}{\lfloor\underline{5}}=0.0000013$……, 故若 θ 在 10° 以下, 求其正弦及餘弦精確至小數第四位, 則可用

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{\lfloor\underline{3}}\qquad\cdots\cdots(8)$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{\lfloor\underline{2}}\qquad\cdots\cdots(9)$$

本書所附之三角函數表,小數僅有四位,因第五位爲四捨五入關係,可有 ± 0.00005 之差異; 故由已知角以求函數,僅能精確至小數第三位而止. 反之,由函數以求角,設 d 爲二相鄰之函數之差,因表中所列爲十分之一度之函數,則百分之一度之函數應爲 $\frac{d}{10}$. 由此與 d 之單位相應之角必爲 $\frac{10}{d}$ 之百分之一度, 即 $\frac{1}{10d}$ 度. 但因本表第四位爲不精確, 故求得之相應角,亦可有 $\frac{1}{10d}$ 度之差異也.

本書所附之對數表, 尾數亦僅四位, 第四位則因第五

位之四捨五入,亦可有 ±0.00005 之差異.由已知之對數反求眞數,因

$$0.00005=\log 1.00011514,$$

而

$$1.00011514=1+\frac{1}{8685},$$

設有一眞數 N, 其對數加 0.00005, 則因 $\log N+\log M=\log(NM)$,其眞數應爲 $N\left(1+\frac{1}{8685}\right)$, 卽 $N+\frac{N}{8685}$; 由此得知用本書所附之對數表以求眞數,其差誤不能大於眞數之 $\frac{1}{8685}$ 也.

本書所附之三角函數對數表亦僅四位,其第四位不能眞確.由已知函數之對數以求其相應之角,其精確度亦與二相隣之對數之差有關.同前,設 D 爲二相隣之對數之差,則所求得之相應角可有 $\frac{1}{10D}$ 度之差異.又 D 之值乃隨角而變,則 $\frac{1}{10D}$ 亦隨角而有不同,欲知其詳,讀者可參閱蓋氏對數表餘論 § 24. (商務印書館出版)

習　題

1. 求 8° 之正弦,餘弦,及正切至小數第四位.
2. 求 25° 之正弦,餘弦,及正切至小數六位.
3. 試證 $\tan\theta>\theta$.
4. 試證 $\sin\theta>\theta-\frac{\theta^3}{4}$.
5. 試證 $\tan\theta>\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^4}{32}$.
6. 試證 $\cos\theta<1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{16}$.
7. 試證 $\csc\theta=\frac{1}{2}\left[\tan\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}\right]$.
   [用此式以求 $\csc\theta$ 之值,較爲相宜].

附錄一

平面三角重要公式之集合

I. 基本公式

1 $\sin x \csc x = \cos x \sec x = \tan x \cot x = 1.$

2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

3. $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$

4. $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x.$

5. $\sin x = \cos x \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}} = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}.$

6. $\cos x = \sin x \cot x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}} = \dfrac{\cot}{\sqrt{1+\cot^2 x}}.$

7. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cot x} = \dfrac{\sec x}{\csc x} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}.$

II. 和差公式

8. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$

9 $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$

10. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$

11. $\cot(x\pm y)=\dfrac{\cot x\cot y\mp 1}{\cot y\pm\cot x}.$

12. $\sin x+\sin y=2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y).$

13. $\sin x-\sin y=2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y).$

14. $\cos x+\cos y=2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y).$

15. $\cos x-\cos y=-2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y).$

16. $\tan x\pm\tan y=\dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}.$

17. $\cot x\pm\cot y=\pm\dfrac{\sin(x\pm y)}{\sin x\sin y}.$

18 $\dfrac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(x\pm y)}{\tan\frac{1}{2}(x-y)}.$

III. 半角與倍角公式

19. $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$

20. $\cos x=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$

21. $\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2\cot\frac{x}{2}}{\cot^2\frac{x}{2}-1}=\dfrac{2}{\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}}.$

22. $\cot x = \dfrac{\cot^2\frac{x}{2} - 1}{2\cot\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}\right).$

23. $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos x)}.$

24. $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos x)}.$

5. $\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}.$

26. $\sin 2x = 2\sin x\cos x.$

27. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$

28. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$

29. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

30. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$

31. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}.$

V, 邊角之關係

32. 正弦定律: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

33. 餘弦定律: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$

34. 正切定律: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$

35. **半角定律：** 設 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

36. **三角形之面積：**

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=sr.$$

V. 分析三角

37 $\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2})$.

38. $\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}(xy\mp\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$.

39. $\tan^{-1}x\pm\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right)$.

40. $\sin x=x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots$.

41. $\cos x=1-\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}-\frac{x^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$.

42. $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots\cdots$.

附錄二

希臘字母

書法		讀音	書法		讀音
Α	α	Alpha	Ν	ν	Nu
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ ς	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
Ι	ι	Iota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	Mu	Ω	ω	Omega

三角函數及對數表

三角函數及對數表

用法說明

I.

分秒化度及度化分秒表

此表含有三表,左表爲由分化度,中表爲由秒化度,右表爲由度化分秒.求若干分化爲度,或若干秒化爲度,或若干度化爲分秒,可於表中直接檢得.若求若干分若干秒化爲度,則取左表與中表之值相加而得;

例如 $23'37''=0^\circ.38333+0^\circ.01027=0^\circ.3936$

數字後有··符號者,係表示末位數字繼續重複之意.

II.

三角函數表

此表包含正弦,餘弦,正切,餘切諸函數.表之排列方法,左旁度數自上而下,右旁度數自下而上.共自零度以至九十度.左旁表角之正函數,右旁表角之餘函數.

上眉數字表十分之一度,正函數爲自左而右,餘函數爲自右而左.如求sin 30°.4之函數,先在正弦表上檢得左旁30°,再檢上眉自左而右之.4,則30°之列與.4之行交點所列之數字0.5060卽爲所求之數,卽 sin 30°.4=0.5060.如求 cos 42°.7,先在正餘弦表上檢得右旁42°,再檢上眉自右而而左之.7.則42°之列與.7之行交點所列之數字0.7349,卽爲所求之數,卽cos 42°.7=0.7349.其餘正切,餘切檢法同.至於正割或餘割可先檢得餘弦或正弦,再求其倒數卽得,蓋因

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\ \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}.$$

表之右旁1,2,3,4,5係角之小數第二位,其下數字卽爲檢小數第二位之角時表尾應加之數,此曰表尾差(Tabular difference).例如 sin 30°.4=0.5060,倘求 sin 30°.43,則檢得30°之列與3之行相交點之數字爲5,然後將5加入0.5060之末位卽得所求值,卽 sin 30°.43=0.5065.再如求 sin 30°.47,則因末位7=3+4,故先檢得3之下與0.5060同列之表尾差爲5,再檢得4之下與0.5060同列之表尾差爲6,由是7之表尾差爲5與6之和,卽11;若將11加入0.5060之末位,則爲所求之數,卽sin 30°.47=0.5071.餘類推.

但在實際應用上,有時少於一度之數不用小數而用分秒,故欲檢之角若爲某度某分某秒者,則先應用第一表將分秒化爲度,然後按表檢之.

設欲檢之角達小數三位者,例如求 $\sin 30^\circ.434$, 則小數點後第三位之數不能直接在表中檢得,須加計算.

因 $$30^\circ.43<30^\circ.434<30^\circ.44,$$

在表中檢得 $$\begin{aligned}\sin 30^\circ.44&=0.5066\\ \sin 30^\circ.43&=\underline{0.5065}\\ \text{相差}&=0.0001\end{aligned}$$

故相差 $0^\circ.01$ 之正弦相差 0.0001; 今 $30^\circ.434$ 與 $30^\circ.43$ 相差爲 $0^\circ.004$, 設其正弦應差爲 d, 則

$$0^\circ.01:0^\circ.004=0.0001:d$$

$$\therefore \quad d=0.00004.$$

故 $$\begin{aligned}\sin 30^\circ.434&=\sin(30^\circ.43+0^\circ.004)\\ &=0.5065+0.00004\\ &=0.50654.\end{aligned}$$

若已知函數求角,則先在表中求得與已知函數相同之數字,再反推其角.例如已知其角之正切爲 0.8517, 則在表中檢得正切爲 0.8517 之角爲 $40^\circ.42$. 倘在表中不能檢得尾數完全相符之數字,則取其前後二數,再如上法而以比例推得之.

III

對數表

此表分排四面,前二面爲眞數自1至2之常用對數,上眉數字係眞數小數點後第三位數.後二面爲眞數自1至10之常用對數,上眉數字係眞數小數點後第二位數,右旁表尾差之用法與第二表同.

移動眞數之小數點n位向右(或向左)等於加n(或$-n$)於其對數;例如

$$\log 3.245 = 0.5112,$$

$$\log 324.5 = 0.5112 + 2 = 2.5112,$$

$$\log 0.003245 = 0.5112 - 3 = \bar{3}.5112.$$

倘眞數在四位之外,則可取其前後之數用比例推之.法與第二表求小數三位之角之函數同.

若已知某數之對數求眞數,則先在表中檢得與已知對數相同之對數,然後反推其眞數,法與前已知某角之函數求某角同.

IV

三角函數對數表.

此表包含正弦,餘弦,正切,餘切之對數,其排列方法與第二表同.惟第15,16面專列自0°.00至10°.00之正弦

對數及自80°.00至90.°00之餘弦對數；第19, 20面專列自0°.00至10°.00之正切對數及自80°.00至90°.00之餘切對數；第23,24面則專列自80°.00至90°.00之正切對數及自0°.00至10°,00之餘切對數；其上層數字均表百分之一度.

又表中$\bar{1}$, $\bar{2}$等用時應改爲8, 9等而後減去10；例如

$$\log\sin 25^\circ.23=\bar{1}.6297=9.6297-10,$$

$$\log\cot 84^\circ.42=\bar{2}.9899=8.9899-10.$$

再因自0°至1°之正弦,自88°.9至90°之餘弦,自0°至1°.1及自88°.9至90°之正切,餘切,每進千分之一度,其對數相差甚大,應用下列公式檢查對數表:

公式	當x°在0°與1°.1之間時	當x°在88°.9與90°之間時
(1)	$\log\sin x^\circ=\bar{2}.2419+\log(x)$	$\log\cos x^\circ=\bar{2}.2419+\log(90-x)$
(2)	$\log\tan x^\circ=\bar{2}.2419+\log(x)$	$\log\cot x^\circ=\bar{2}.2419+\log(90-x)$
(3)	$\log\cot x^\circ=1.7581-\log(x)$	$\log\tan x^\circ=1.7581-\log(90-x)$

V.

度化弳及弳化度表

左表係由度化爲弳,右表係由弳化爲度.

A 分秒化度

′	°	″	°
0′	=0°.00 000	0″	=0°.00 000
1′	.01 666..	1″	.00 027..
2′	.03 333..	2″	.00 055..
3′	.05	3″	.00 083..
4′	.06 666..	4″	.00 111..
5′	.08 333..	5″	.00 138..
6′	.10	6″	.00 166..
7′	.11 666..	7″	.00 194..
8′	.13 333..	8″	.00 222..
9′	.15	9″	.00 25
10′	0°.16 666..	10″	0°.00 277..
1	.18 333..	1	.00 305..
2	.20	2	.00 333..
3	.21 666..	3	.00 361..
4	.23 333..	4	.00 388..
15′	.25	15″	.00 416..
6	.26 666..	6	.00 444
7	.28 333..	7	.00 472..
8	.30	8	.00 5
9	.31 666..	9	.00 527..
20′	0°.33 333..	20″	0°.00 555..
1	.35	1	.00 583..
2	.36 666..	2	.00 611..
3	.38 333..	3	.00 638..
4	.40	4	.00 666..
25′	.41 666..	25″	.00 694..
6	.43 333..	6	.00 722..
7	.45	7	.00 75
8	.46 666..	8	.00 777..
9	.48 333..	9	.00 805..
30′	0°.50	30″	0°.00 833..
1	.51 666..	1	.00 861..
2	.53 333..	2	.00 888..
3	.55	3	.00 916..
4	.56 666..	4	.00 944..
35′	.58 333..	35″	.00 972..
6	.60	6	.01
7	.61 666..	7	.01 027..
8	.63 333..	8	.01 055..
9	.65	9	.01 083..
40′	0°.66 666..	40″	0°.01 111..
1	.68 333..	1	.01 138..
2	.70	2	.01 166..
3	.71 666..	3	.01 194..
4	.73 333..	4	.01 222..
45′	.75	45″	.01 25
6	.76 666..	6	.01 277..
7	.78 333..	7	.01 305..
8	.80	8	.01 333..
9	.81 666..	9	.01 361..
50′	0°.83 333..	50″	0°.01 388..
1	.85	1	.01 416..
2	.86 666..	2	.01 444..
3	.88 333..	3	.01 472..
4	.90	4	.01 5
55′	.91 666..	55″	.01 527..
6	.93 333..	6	.01 555..
7	.95	7	.01 583..
8	.96 666..	8	.01 611..
9	.98 333..	9	.01 638..
60′	1°.00	60″	0°.01 666..

兩小點「..」表示末位繼續重複。

B 度化分秒

0°.00	=0′00″	0°.50	=30′
1	0′36″	1	30′36″
2	1′12″	2	31′12″
3	1′48″	3	31′48″
4	2′24″	4	32′24″
0°.05	3′	0°.55	33′
6	3′36″	6	33′36″
7	4′12″	7	34′12″
8	4′48″	8	34′48″
9	5′24″	9	35′24″
0°.10	6′	0°.60	36′
1	6′36″	1	36′36″
2	7′12″	2	37′12″
3	7′48″	3	37′48″
4	8′24″	4	38′24″
0°.15	9′	0°.65	39′
6	9′36″	6	39′36″
7	10′12″	7	40′12″
8	10′48″	8	40′48″
9	11′24″	9	41′24″
0°.20	12′	0°.70	42′
1	12′36″	1	42′36″
2	13′12″	2	43′12″
3	13′48″	3	43′48″
4	14′24″	4	44′24″
0°.25	15′	0°.75	45′
6	15′36″	6	45′36″
7	16′12″	7	46′12″
8	16′48″	8	46′48″
9	17′24″	9	47′24″
0°.30	18′	0°.80	48′
1	18′36″	1	48′36″
2	19′12″	2	49′12″
3	19′48″	3	49′48″
4	20′24″	4	50′24″
0°.35	21′	0°.85	51′
6	21′36″	6	51′36″
7	22′12″	7	52′12″
8	22′48″	8	52′48″
9	23′24″	9	53′24″
0°.40	24′	0°.90	54′
1	24′36″	1	54′36″
2	25′12″	2	55′12″
3	25′48″	3	55′48″
4	26′24″	4	56′24″
0°.45	27′	0°.95	57′
6	27′36″	6	57′36″
7	28′12″	7	58′12″
8	28′48″	8	58′48″
9	29′24″	9	59′24″
0°.50	30′	1°.00	60′

0°.000	=0″.0
1	3″.6
2	7″.2
3	10″.8
4	14″.4
0°.005	18″.0
6	21″.6
7	25″.2
8	28″.8
9	32″.4
0°.010	36″.0

Sine 正餘弦表 Cosine

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0		表尾差				
	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											0.000000	90°					
0°	0.000000	001745	003491	005236	006981	008727	010472	012217	013962	015707	017452	89	175	349	524	698	873
1	01745	01920	02094	02269	02443	02618	02792	02967	03141	03316	03490	88	17	35	52	70	87
2	03490	03664	03839	04013	04188	04362	04536	04711	04885	05059	05234	87	17	35	52	70	87
3	05234	05408	05582	05756	05931	06105	06279	06453	06627	06802	06976	86	17	35	52	70	87
4	06976	07150	07324	07498	07672	07846	08020	08194	08368	08542	08716	85	17	35	52	70	87
5	08716	08889	09063	09237	09411	09585	09758	09932	10106	10273	10453	84	17	35	52	69	87
6	10453	10626	10800	10973	11147	11320	11494	11667	11840	12014	12187	83	17	35	52	69	87
7	12187	12360	12533	12706	12880	13053	13226	13399	13572	13744	13917	82	17	35	52	69	87
8	13917	14090	14263	14436	14608	14781	14954	15126	15299	15471	15643	81	17	35	52	69	86
9	15643	15816	15988	16160	16333	16505	16677	16849	17021	17193	0.17365	80°	17	34	52	69	86
10°	0.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79	2	3	5	7	9
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78	2	3	5	7	9
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77	2	3	5	7	9
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76	2	3	5	7	8
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75	2	3	5	7	8
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74	2	3	5	7	8
16	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73	2	3	5	7	8
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72	2	3	5	7	8
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71	2	3	5	7	8
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0.3420	70°	2	3	5	7	8
20°	0.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69	2	3	5	7	8
21	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68	2	3	5	6	8
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67	2	3	5	6	8
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66	2	3	5	6	8
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65	2	3	5	6	8
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64	2	3	5	6	8
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63	2	3	5	6	8
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62	2	3	5	6	8
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61	2	3	5	6	8
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0.5000	60°	2	3	5	6	8
30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59	2	3	5	6	8
31	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58	1	3	4	6	7
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57	1	3	4	6	7
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56	1	3	4	6	7
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55	1	3	4	6	7
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54	1	3	4	6	7
36	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53	1	3	4	6	7
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52	1	3	4	6	7
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51	1	3	4	5	7
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0.6428	50°	1	3	4	5	7
40°	0.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49	1	3	4	5	7
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48	1	3	4	5	7
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47	1	3	4	5	6
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46	1	3	4	5	6
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0.7071	45°	1	2	4	5	6
45°	0.7071																

Sine 正餘弦表 Cosine

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0		表尾差				
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											0.7071	45°					
45°	0.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44	1	2	4	5	6
46	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43	1	2	4	5	6
47	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42	1	2	4	5	6
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41	1	2	3	5	6
49	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	0.7660	40°	1	2	3	5	6
50°	0.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39	1	2	3	4	6
51	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38	1	2	3	4	5
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37	1	2	3	4	5
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36	1	2	3	4	5
54	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35	1	2	3	4	5
55	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34	1	2	3	4	5
56	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33	1	2	3	4	5
57	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32	1	2	3	4	5
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31	1	2	3	4	5
59	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	0.8660	30°	1	2	3	4	4
60°	0.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29	1	2	3	3	4
61	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28	1	2	2	3	4
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27	1	2	2	3	4
63	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26	1	2	2	3	4
64	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25	1	2	2	3	4
65	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24	1	1	2	3	4
66	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23	1	1	2	3	3
67	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22	1	1	2	3	3
68	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21	1	1	2	3	3
69	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	0.9397	20°	1	1	2	2	3
70°	0.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19	1	1	2	2	3
71	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18	1	1	2	2	3
72	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17	1	1	2	2	3
73	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16	0	1	1	2	2
74	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15	0	1	1	2	2
75	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14	0	1	1	2	2
76	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13	0	1	1	2	2
77	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12	0	1	1	1	2
78	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11	0	1	1	1	2
79	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	0.9848	10°	0	1	1	1	2
80°	0.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9	0	1	1	1	1
81	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8	0	1	1	1	1
82	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7	0	0	1	1	1
83	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6	0	0	1	1	1
84	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5	0	0	1	1	1
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4	0	0	0	1	1
86	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3	0	0	0	0	1
87	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2	0	0	0	0	0
88	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0.9998	1	0	0	0	0	0
89	0.9998	9999	9999	9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	1.0000	0°	0	0	0	0	0
90°	1.0000																

Tangent 正餘切表 Cotangent

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0		表尾差				
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											0.000000	90°					
0°	0.000000	001745	003491	005236	006981	008727	010472	012218	013964	015708	017455	89	175	349	524	698	873
1	01746	01920	02095	02269	02444	02619	02793	02968	03143	03317	03492	88	17	35	52	70	87
2	03492	03667	03842	04016	04191	04366	04541	04716	04891	05066	05241	87	17	35	52	70	87
3	05241	05416	05591	05766	05941	06116	06291	06467	06642	06817	06993	86	18	35	53	70	88
4	06993	07168	07344	07519	07695	07870	08046	08221	08397	08573	08749	85	18	35	53	70	88
5	08749	08925	09101	09277	09453	09629	09805	09981	10158	10334	10510	84	18	35	53	70	88
6	10510	10687	10863	11040	11217	11394	11570	11747	11924	12101	12278	83	18	35	53	71	88
7	12278	12456	12633	12810	12988	13165	13343	13521	13698	13876	14054	82	18	36	53	71	89
8	14054	14232	14410	14588	14767	14945	15124	15302	15481	15660	15838	81	18	36	54	71	89
9	15838	16017	16196	16376	16555	16734	16914	17093	17273	17453	0.17633	80°	18	36	54	72	89
10°	0.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79	2	4	5	7	9
11	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78	2	4	5	7	9
12	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77	2	4	5	7	9
13	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76	2	4	6	7	9
14	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75	2	4	6	7	9
15	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74	2	4	6	8	9
16	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73	2	4	6	8	9
17	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72	2	4	6	8	10
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71	2	4	6	8	10
19	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0.3640	70°	2	4	6	8	10
20°	0.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69	2	4	6	8	10
21	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68	2	4	6	8	10
22	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67	2	4	6	8	10
23	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66	2	4	6	8	10
24	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65	2	4	6	8	11
25	4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64	2	4	6	9	11
26	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63	2	4	7	9	11
27	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62	2	4	7	9	11
28	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61	2	5	7	9	11
29	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0.5774	60°	2	5	7	9	12
30°	0.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59	2	5	7	9	12
31	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58	2	5	7	10	12
32	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57	2	5	7	10	12
33	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56	3	5	8	10	13
34	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55	3	5	8	10	13
35	7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54	3	5	8	11	13
36	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53	3	5	8	11	14
37	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52	3	6	8	11	14
38	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51	3	6	9	11	14
39	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0.8391	50°	3	6	9	12	15
40°	0.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49	3	6	9	12	15
41	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48	3	6	9	12	16
42	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47	3	6	10	13	16
43	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	0.9657	46	3	7	10	13	17
44	0.9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1.0000	45°	3	7	10	14	17
45°	1.0000																

Tangent 正餘切表 Cotangent

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0		表尾差				
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											1.0000	45°					
45°	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	44	4	7	11	14	18
46	0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	43	4	7	11	15	18
47	0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	42	4	8	11	15	19
48	1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	41	4	8	12	16	20
49	1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1.1918	40°	4	8	12	17	21
50°	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	39	4	9	13	17	22
51	2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2799	38	5	9	14	18	23
52	2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	37	5	9	14	19	24
53	3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	36	5	10	15	20	25
54	3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	1.4281	35	5	10	16	21	26
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	34	5	11	16	22	27
56	4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	33	6	11	17	23	29
57	5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	32	6	12	18	24	30
58	6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	31	6	13	19	26	32
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	1.7321	30°	7	14	20	27	34
60°	1.732	1.739	1.746	1.753	1.760	1.767	1.775	1.782	1.789	1.797	1.804	29	1	1	2	3	4
61	1.804	1.811	1.819	1.827	1.834	1.842	1.849	1.857	1.865	1.873	1.881	28	1	2	2	3	4
62	1.881	1.889	1.897	1.905	1.913	1.921	1.929	1.937	1.946	1.954	1.963	27	1	2	2	3	4
63	1.963	1.971	1.980	1.988	1.997	2.006	2.014	2.023	2.032	2.041	2.050	26	1	2	3	4	4
64	2.050	2.059	2.069	2.078	2.087	2.097	2.106	2.116	2.125	2.135	2.145	25	1	2	3	4	5
65	2.145	2.154	2.164	2.174	2.184	2.194	2.204	2.215	2.225	2.236	2.246	24	1	2	3	4	5
66	2.246	2.257	2.267	2.278	2.289	2.300	2.311	2.322	2.333	2.344	2.356	23	1	2	3	4	5
67	2.356	2.367	2.379	2.391	2.402	2.414	2.426	2.438	2.450	2.463	2.475	22	1	2	4	5	6
68	2.475	2.488	2.500	2.513	2.526	2.539	2.552	2.565	2.578	2.592	2.605	21	1	3	4	5	7
69	2.605	2.619	2.633	2.646	2.680	2.675	2.689	2.703	2.718	2.733	2.747	20°	1	3	4	6	7
70°	2.747	2.762	2.778	2.793	2.808	2.824	2.840	2.856	2.872	2.888	2.904	19	2	3	5	6	8
71	2.904	2.921	2.937	2.954	2.971	2.989	3.006	3.024	3.042	3.060	3.078	18	2	3	5	7	9
72	3.078	3.096	3.115	3.133	3.152	3.172	3.191	3.211	3.230	3.251	3.271	17	2	4	6	8	10
73	3.271	3.291	3.312	3.333	3.354	3.376	3.398	3.420	3.442	3.465	3.487	16	2	4	6	9	11
74	3.487	3.511	3.534	3.558	3.582	3.606	3.630	3.655	3.681	3.706	3.732	15	2	5	7	10	12
75	3.732	3.758	3.785	3.812	3.839	3.867	3.895	3.923	3.952	3.981	4.011	14	3	6	8	11	14
76	4.011	4.041	4.071	4.102	4.134	4.165	4.198	4.230	4.264	4.297	4.331	13	3	6	10	13	16
77	4.331	4.366	4.402	4.437	4.474	4.511	4.548	4.586	4.625	4.665	4.705	12					
78	4.705	4.745	4.787	4.829	4.872	4.915	4.959	5.005	5.050	5.097	5.145	11					
79	5.145	5.193	5.242	5.292	5.343	5.396	5.449	5.503	5.558	5.614	5.671	10°					
80°	5.671	5.730	5.789	5.850	5.912	5.976	6.041	6.107	6.174	6.243	6.314	9					
81	6.314	6.386	6.460	6.535	6.612	6.691	6.772	6.855	6.940	7.026	7.115	8					
82	7.115	7.207	7.300	7.396	7.495	7.596	7.700	7.806	7.916	8,028	8.144	7					
83	8.144	8.264	8.386	8.513	8.643	8.777	8.915	9.058	9.205	9.357	9.514	6					
84	9.514	8.677	9.845	10.019	10.199	10.385	10.579	10.780	10.988	11.205	11.430	5					
85	11.430	11.664	11.909	12.163	12.429	12.706	12.996	13.300	13.617	13.951	14.301	4					
86	14.301	14.669	15.056	15.464	15.895	16.350	16.832	17.343	17.886	18.464	19.081	3					
87	19.08	19.74	20.45	21.20	22,02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27	28.64	2					
88	28.64	30.14	31.82	33.69	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08	57.29	1					
89	57.29	63.66	71.62	81.85	95.49	114.55	143.24	191.0	286.5	573,0	∞	0°					
90°	∞																

此處之表尾差難得準確.

Log 對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.00	0.0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	0043
1.01	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	0086
1.02	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	0128
1.03	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	0170
1.04	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	0212
1.05	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	0253
1.06	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	0294
1.07	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	0334
1.08	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	0374
1.09	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	0414
1.10	0.0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	0453
1.11	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	0492
1.12	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	0531
1.13	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	0569
1.14	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	0607
1.15	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641	0645
1.16	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678	0682
1.17	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	0719
1.18	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752	0755
1.19	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788	0792
1.20	0.0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	0828
1.21	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860	0864
1.22	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896	0899
1.23	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	0934
1.24	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966	0969
1.25	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000	1004
1.26	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035	1038
1.27	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069	1072
1.28	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	1106
1.29	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136	1139
1.30	0.1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169	1173
1.31	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	1206
1.32	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235	1239
1.33	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268	1271
1.34	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1207	1300	1303
1.35	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332	1335
1.36	1335	1339	1342	1345	1348	1251	1355	1358	1361	1364	1367
1.37	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396	1399
1.38	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	1430
1.39	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458	1461
1.40	0.1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489	1492
1.41	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	1523
1.42	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550	1553
1.43	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581	1584
1.44	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	1514
1.45	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641	1644
1.46	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	1673
1.47	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	1703
1.48	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729	1732
1.49	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	1761

Log 對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.50	0.1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787	1790
1.51	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816	1818
1.52	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844	1847
1.53	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872	1875
1.54	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901	1903
1.55	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928	1931
1.56	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956	1959
1.57	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984	1987
1.58	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011	2014
1.59	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038	2041
1.60	0.2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066	2068
1.61	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092	2095
1.62	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119	2122
1.63	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146	2148
1.64	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172	2175
1.65	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198	2201
1.66	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225	2227
1.67	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251	2253
1.68	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276	2279
1.69	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302	2304
1.70	0.2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327	2330
1.71	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353	2355
1.72	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378	2380
1.73	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403	2405
1.74	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428	2430
1.75	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453	2455
1.76	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477	2480
1.77	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502	2504
1.78	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526	2529
1.79	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550	2553
1.80	0.2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574	2577
1.81	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598	2601
1.82	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622	2625
1.83	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646	2648
1.84	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669	2672
1.85	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693	2695
1.86	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716	2718
1.87	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739	2742
1.88	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762	2765
1.89	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785	2788
1.90	0.2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808	2810
1.91	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831	2833
1.92	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853	2856
1.93	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876	2878
1.94	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898	2900
1.95	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920	2923
1.96	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942	2945
1.97	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964	2967
1.98	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986	2989
1.99	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008	3010

本表爲眞數自 1 至 10 之常用對數。移動眞數之小數點n位向右(或向左)等於加n(或-n)於其對數。 例如:log 017453=0.2419-2[=2.2419]

Log 對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	表尾差				
												1	2	3	4	5
1.0	0 0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	0414					
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	0792					
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	1139					
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	1461					
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	1761					
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	2041					
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	2304					
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2553					
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2788					
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	3010					
2.0	0.3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	3222	2	4	6	8	11
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	3424	2	4	6	8	10
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	3617	2	4	6	8	10
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	3802	2	4	5	7	9
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	3979	2	4	5	7	9
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	4150	2	3	5	7	9
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	4314	2	3	5	7	8
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	4472	2	3	5	6	8
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	4624	2	3	5	6	8
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	4771	1	3	4	6	7
3.0	0.4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	4914	1	3	4	6	7
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	5051	1	3	4	6	7
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	5185	1	3	4	5	7
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	5315	1	3	4	5	6
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	5441	1	3	4	5	6
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	5563	1	2	4	5	6
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	5682	1	2	4	5	6
3.7	5632	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	5798	1	2	3	5	6
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	5911	1	2	3	5	6
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	6021	1	2	3	4	6
4.0	0.6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	6128	1	2	3	4	5
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	6232	1	2	3	4	5
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	6335	1	2	3	4	5
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	6435	1	2	3	4	5
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	6532	1	2	3	4	5
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	6628	1	2	3	4	5
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	6721	1	2	3	4	5
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	6812	1	2	3	4	5
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	6902	1	2	3	4	4
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	6990	1	2	3	4	4

用到此十列之表尾差時,看前一表.

Log 對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	表尾差				
												1	2	3	4	5
5.0	0.6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	7076	1	2	3	3	4
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	7160	1	2	3	3	4
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	7243	1	2	2	3	4
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	7324	1	2	2	3	4
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	7404	1	2	2	3	4
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	7482	1	2	2	3	4
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	7559	1	2	2	3	4
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7634	1	2	2	3	4
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7709	1	1	2	3	4
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7782	1	1	2	3	4
6.0	0.7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7853	1	1	2	3	4
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7924	1	1	2	3	4
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7993	1	1	2	3	3
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	8062	1	1	2	3	3
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	8129	1	1	2	3	3
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	8195	1	1	2	3	3
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	8261	1	1	2	3	3
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	8325	1	1	2	3	3
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	8388	1	1	2	3	3
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	8451	1	1	2	3	3
7.0	0.8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	8513	1	1	2	2	3
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	8573	1	1	2	2	3
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	8633	1	1	2	2	3
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	8692	1	1	2	2	3
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	8751	1	1	2	2	3
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	8808	1	1	2	2	3
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	8865	1	1	2	2	3
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	8921	1	1	2	2	3
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	8976	1	1	2	2	3
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	9031	1	1	2	2	3
8.0	0.9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	9085	1	1	2	2	3
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	9138	1	1	2	2	3
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	9191	1	1	2	2	3
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	9243	1	1	2	2	3
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	9294	1	1	2	2	3
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	9345	1	1	2	2	3
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	9395	1	1	2	2	3
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	9445	0	1	1	2	2
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	9494	0	1	1	2	2
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	9542	0	1	1	2	2
9.0	0.9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	9590	0	1	1	2	2
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	9638	0	1	1	2	2
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	9685	0	1	1	2	2
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	9731	0	1	1	2	2
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	9777	0	1	1	2	2
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	9823	0	1	1	2	2
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	9868	0	1	1	2	2
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	9912	0	1	1	2	2
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	9956	0	1	1	2	2
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996		0	1	1	2	2

Log Sin 正餘弦對數表 Log Cos

													表尾差				
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5
5°.0	$\bar{2}$.9403	9412	9420	9429	9437	9446	9455	9463	9472	9480	$\bar{2}$.9489	84.9	1	2	3	3	4
5.1	9489	9497	9506	9514	9523	9531	9539	9548	9556	9565	9573	84.8	1	2	3	3	4
5.2	9573	9581	9589	9598	9606	9614	9623	9631	9639	9647	9655	84.7	1	2	2	3	4
5.3	9655	9664	9672	9680	9688	9696	9704	9712	9720	9728	9736	84.6	1	2	2	3	4
5.4	9736	9744	9752	9760	9768	9776	9784	9792	9800	9808	9816	84.5	1	2	2	3	4
5.5	9816	9824	9831	9839	9847	9855	9863	9870	9878	9886	9894	84.4	1	2	2	3	4
5.6	9894	9901	9909	9917	9925	9932	9940	9948	9965	9963	$\bar{2}$.9970	84.3	1	2	2	3	4
5.7	$\bar{2}$.9970	9978	9986	9993	$\bar{1}$.0001	0008	0016	0023	0031	0038	$\bar{1}$.0046	84.2	1	2	2	3	4
5.8	$\bar{1}$.0046	0053	0061	0068	0075	0083	0090	0098	0105	0112	0120	84.1	1	1	2	3	4
5.9	0120	0127	0134	0142	0149	0156	0163	0171	0178	0185	$\bar{1}$.0192	84°.0	1	1	2	3	4
6°.0	$\bar{1}$.0192	0200	0207	0214	0221	0228	0235	0243	0250	0257	0264	83.9	1	1	2	3	4
6.1	0264	0271	0278	0285	0292	0299	0306	0313	0320	0327	0334	83.8	1	1	2	3	4
6.2	0334	0341	0348	0355	0362	0369	0376	0383	0390	0397	0403	83.7	1	1	2	3	3
6.3	0403	0410	0417	0424	0431	0438	0444	0451	0458	0465	0472	83.6	1	1	2	3	3
6.4	0472	0478	0485	0492	0498	0505	0512	0519	0525	0532	0539	83.5	1	1	2	3	3
6.5	0539	0545	0552	0558	0565	0572	0578	0585	0591	0598	0605	83.4	1	1	2	3	3
6.6	0605	0611	0618	0624	0631	0637	0644	0650	0657	0663	0670	83.3	1	1	2	3	3
6.7	0670	0676	0383	0689	0695	0702	0708	0715	0721	0727	0734	83.2	1	1	2	3	3
6.8	0734	0740	0746	0753	0759	0765	0772	0778	0784	0790	0797	83.1	1	1	2	3	3
6.9	0797	0803	0809	0816	0822	0828	0834	0840	0847	0853	$\bar{1}$.0859	83°.0	1	1	2	2	3
7°.0	$\bar{1}$.0859	0865	0871	0877	0884	0890	0896	0902	0908	0914	0920	82.9	1	1	2	2	3
7.1	0920	0926	0932	0938	0945	0951	0957	0963	0969	0975	0981	82.8	1	1	2	2	3
7.2	0981	0987	0993	0999	1005	1011	1017	1022	1028	1034	1040	82.7	1	1	2	2	3
7.3	1040	1046	1052	1058	1064	1070	1076	1081	1087	1093	1099	82.6	1	1	2	2	3
7.4	1099	1105	1111	1116	1122	1128	1134	1140	1145	1151	1157	82.5	1	1	2	2	3
7.5	1157	1163	1168	1174	1180	1186	1191	1197	1203	1208	1214	82.4	1	1	2	2	3
7.6	1214	1220	1226	1231	1237	1242	1248	1254	1259	1265	1271	82.3	1	1	2	2	3
7.7	1271	1276	1282	1287	1293	1299	1304	1310	1315	1321	1326	82.2	1	1	2	2	3
7.8	1326	1332	1337	1343	1348	1354	1359	1365	1370	1376	1381	82.1	1	1	2	2	3
7.9	1381	1387	1392	1398	1403	1409	1414	1419	1425	1430	$\bar{1}$.1436	82°.0	1	1	2	2	3
8°.0	$\bar{1}$.1436	1441	1446	1452	1457	1462	1468	1473	1478	1484	1489	81.9	1	1	2	2	3
8.1	1489	1494	1500	1505	1510	1516	1521	1526	1532	1537	1542	81.8	1	1	2	2	3
8.2	1542	1547	1553	1558	1563	1568	1574	1579	1584	1589	1594	81.7	1	1	2	2	3
8.3	1594	1600	1605	1610	1615	1620	1625	1631	1636	1641	1646	81.6	1	1	2	2	3
8.4	1646	1651	1656	1661	1666	1672	1677	1682	1687	1692	1697	81.5	1	1	2	2	3
8.5	1697	1702	1707	1712	1717	1722	1727	1732	1737	1742	1747	81.4	1	1	2	2	3
8.6	1747	1752	1757	1762	1767	1772	1777	1782	1787	1792	1797	81.3	0	1	1	2	2
8.7	1797	1802	1807	1812	1817	1822	1827	1832	1837	1842	1847	81.2	0	1	1	2	2
8.8	1847	1851	1856	1861	1866	1871	1876	1881	1886	1890	1895	81.1	0	1	1	2	2
8.9	1895	1900	1905	1010	1915	1919	1924	1929	1934	1939	$\bar{1}$.1943	81°.0	0	1	1	2	2
9°.0	$\bar{1}$.1943	1948	1953	1958	1962	1967	1972	1977	1981	1986	1991	80.9	0	1	1	2	2
9.1	1991	1996	2000	2005	2010	2015	2019	2024	2029	2033	2038	80.8	0	1	1	2	2
9.2	2038	2043	2047	2052	2057	2061	2066	2071	2075	2080	2085	80.7	0	1	1	2	2
9.3	2085	2089	2094	2098	2103	2108	2112	2117	2121	2126	2131	80.6	0	1	1	2	2
9.4	2131	2135	2140	2144	2149	2153	2158	2162	2167	2172	2176	80.5	0	1	1	2	2
9.5	2176	2181	2185	2190	2194	2199	2203	2208	2212	2217	2221	80.4	0	1	1	2	2
9.6	2221	2226	2230	2235	2239	2243	2248	2252	2257	2261	2266	80.3	0	1	1	2	2
9.7	2266	2270	2275	2279	2283	2288	2292	2297	2301	2305	2310	80.2	0	1	1	2	2
9.8	2310	2314	2319	2323	2327	2332	2336	2340	2345	2349	2353	80.1	0	1	1	2	2
9.9	2353	2358	2362	2367	2371	2375	2379	2384	2388	2392	$\bar{1}$.2397	80°.0	0	1	1	2	2

Log Sin 正餘弦對數表 Log Cos

		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		表尾差				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5
0°.0	−∞	$\bar{4}$.2419	5429	7190	8439	9408	ʃ0200	0870	1450	1961	$\bar{3}$.2419	89.9					
0.1	$\bar{3}$.2419	2833	3211	3558	3880	4180	4460	4728	4971	5206	5429	89.8					
0.2	5429	5641	5843	6036	6221	6398	6568	6732	6890	7043	7190	89.7					
0.3	7190	7332	7470	7604	7734	7859	7982	8101	8217	8329	8439	89.6					
0.4	8439	8547	8651	8753	8853	8951	9046	9140	9231	9321	$\bar{3}$.9408	89.5					
0.5	$\bar{3}$.9408	9494	9579	9661	9743	9822	9901	9977	ʃ0053	0127	$\bar{2}$.0200	89.4					
0.6	$\bar{2}$.0200	0272	0343	0412	0480	0548	0614	0679	0744	0807	0870	89.3					
0.7	0870	0931	0992	1052	1111	1169	1227	1284	1340	1395	1450	89.2					
0.8	1450	1503	1557	1609	1661	1713	1764	1814	1863	1912	1961	89.1					
0.9	1961	2009	2056	2103	2150	2196	2241	2286	2331	2375	$\bar{2}$.2419	89°.0					
1°.0	$\bar{2}$.2419	2462	2505	2547	2589	2630	2672	2712	2753	2793	2832	88.9					
1.1	2832	2872	2911	2949	2988	3025	3063	3100	3137	3174	3210	88.8	4	8	11	15	19
1.2	3210	3246	3282	3317	3353	3388	3422	3456	3491	3524	3558	88.7	3	7	10	14	17
1.3	3558	3591	3624	3657	3689	3722	3754	3786	3817	3848	3880	88.6	3	6	10	13	16
1.4	3880	3911	3941	3972	4002	4032	4062	4091	4121	4150	4179	88.5	3	6	9	12	15
1.5	4179	4208	4237	4265	4293	4322	4349	4377	4405	4432	4459	88.4	3	6	8	11	14
1.6	4459	4486	4513	4540	4567	4593	4619	4645	4671	4697	4723	88.3	3	5	8	11	13
1.7	4723	4748	4773	4799	4824	4848	4873	4898	4922	4947	4971	88.2	2	5	7	10	12
1.8	4971	4995	5019	5043	5066	5090	5113	5136	5160	5183	5206	88.1	2	5	7	9	12
1.9	5206	5228	5251	5274	5296	5318	5340	5363	5385	5406	$\bar{2}$.5428	88°.0	2	4	7	9	11
2°.0	$\bar{2}$.5428	5450	5471	5493	5514	5535	5557	5578	5598	5619	5640	87.9	2	4	6	8	11
2.1	5640	5661	5681	5702	5722	5742	5762	5782	5802	5822	5842	87.8	2	4	6	8	10
2.2	5842	5862	5881	5901	5920	5939	5959	5978	5997	6016	6035	87.7	2	4	6	8	10
2.3	6035	6054	6072	6091	6110	6128	6147	6165	6183	6201	6220	87.6	2	4	6	7	9
2.4	6220	6238	6258	6274	6291	6309	6327	6344	6362	6379	6397	87.5	2	4	5	7	9
2.5	6397	6414	6431	6449	6466	6483	6500	6517	6534	6550	6567	87.4	2	3	5	7	9
2.6	6567	6584	6600	6617	6633	6650	6666	6682	6699	6715	6731	87.3	2	3	5	7	8
2.7	6731	6747	6763	6779	6795	6810	6826	6842	6858	6873	6889	87.2	2	3	5	6	8
2.8	6889	6904	6920	6935	6950	6965	6981	6996	7011	7026	7041	87.1	2	3	5	6	8
2.9	7041	7056	7071	7086	7100	7115	7130	7144	7159	7174	$\bar{2}$.7188	87°.0	1	3	4	6	7
3°.0	$\bar{2}$.7188	7202	7217	7231	7245	7260	7274	7288	7302	7316	7330	86.9	1	3	4	6	7
3.1	7330	7344	7358	7372	7386	7400	7413	7427	7441	7454	7468	86.8	1	3	4	6	7
3.2	7468	7482	7495	7508	7522	7535	7549	7562	7575	7588	7602	86.7	1	3	4	5	7
3.3	7602	7615	7628	7641	7654	7667	7680	7693	7705	7718	7731	86.6	1	3	4	5	6
3.4	7731	7744	7756	7769	7782	7794	7807	7819	7832	7844	7857	86.5	1	3	4	5	6
3.5	7857	7869	7881	7894	7906	7918	7930	7943	7955	7967	7979	86.4	1	2	4	5	6
3.6	7979	7991	8003	8015	8027	8039	8051	8062	8074	8086	8098	86.3	1	2	4	5	6
3.7	8098	8109	8121	8133	8144	8156	8168	8179	8191	8202	8213	86.2	1	2	3	5	6
3.8	8213	8225	8236	8248	8259	8270	8281	8293	8304	8315	8326	86.1	1	2	3	5	6
3.9	8326	8337	8348	8359	8370	8381	8392	8403	8414	8425	$\bar{2}$.8436	86°.0	1	2	3	4	5
4°.0	$\bar{2}$.8436	8447	8457	8468	8479	8490	8500	8511	8522	8532	8543	85.9	1	2	3	4	5
4.1	8543	8553	8564	8575	8585	8595	8606	8616	8627	8637	8647	85.8	1	2	3	4	5
4.2	8647	8658	8668	8678	8688	8699	8709	8719	8729	8739	8749	85.7	1	2	3	4	5
4.3	8749	8759	8769	8780	8790	8799	8809	8819	8829	8839	8849	85.6	1	2	3	4	5
4.4	8849	8859	8869	8878	8888	8898	8908	8917	8927	8937	8946	85.5	1	2	3	4	5
4.5	8946	8956	8966	8975	8985	8994	9004	9013	9023	9032	9042	85.4	1	2	3	4	5
4.6	9042	9051	9060	9070	9079	9089	9098	9107	9116	9126	9135	85.3	1	2	3	4	5
4.7	9135	9144	9153	9162	9172	9181	9190	9199	9208	9217	9226	85.2	1	2	3	4	5
4.8	9226	9235	9244	9253	9262	9271	9280	9289	9298	9307	9315	85.1	1	2	3	4	4
4.9	9315	9324	9333	9342	9351	9359	9368	9377	9386	9394	$\bar{2}$.9403	85°.0	1	2	3	4	4

用到此十一列之表尾差時,照用法說明第5面公式[二];檢對數表.

Log Sin 正餘弦對數表 Log Cos

													表尾差				
		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0						
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											− ∞	90°					
0°	− ∞	$\bar{3}$.2419	5429	7190	8439	9408	$\bar{1}$0200	0870	1450	1961	$\bar{2}$.2419	89					
1	$\bar{2}$.2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206	5428	88					
2	5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041	7188	87					
3	7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326	8436	86					
4	8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	$\bar{2}$.9403	85					
5	$\bar{2}$.9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	$\bar{1}$0046	0120	$\bar{1}$.0192	84					
6	$\bar{1}$.0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	0859	83					
7	0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	1436	82					
8	1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	1943	81					
9	1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	$\bar{1}$ 2397	80°					
10°	$\bar{1}$.2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	2806	79	4	8	12	16	20
11	2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	3179	78	4	7	11	15	19
12	3179	8214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	3521	77	3	7	10	14	17
13	3521	3654	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	3837	76	3	6	9	13	16
14	3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	4130	75	3	6	9	12	15
15	4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	4403	74	3	5	8	11	14
16	4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4659	73	3	5	8	10	13
17	4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4900	72	2	5	7	10	12
18	4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	5126	71	2	5	7	9	11
19	5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	$\bar{1}$.5341	70°	2	4	6	9	11
20°	$\bar{1}$.5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	5543	69	2	4	6	8	10
21	5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	5736	68	2	4	6	8	10
22	5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	5919	67	2	4	5	7	9
23	5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	6093	66	2	3	5	7	9
24	6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	6259	65	2	3	5	7	8
25	6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6871	6387	6403	6418	64	2	3	5	6	8
26	6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	6570	63	2	3	5	6	8
27	6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6373	6687	6702	6716	62	1	3	4	6	7
28	6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	6856	61	1	3	4	6	7
29	6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	$\bar{1}$.6990	60°	1	3	4	5	7
30°	$\bar{1}$.6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	7118	59	1	3	4	5	6
31	7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	7242	53	1	2	4	5	6
32	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	7361	57	1	2	4	5	6
33	7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	7476	56	1	2	3	5	6
34	7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	7586	55	1	2	3	4	6
35	7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	7692	54	1	2	3	4	5
36	7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	7795	53	1	2	3	4	5
37	7785	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	7893	52	1	2	3	4	5
38	7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	7989	51	1	2	3	4	5
39	7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	$\bar{1}$.8081	50°	1	2	3	4	5
40°	$\bar{1}$.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49	1	2	3	4	4
41	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48	1	2	3	3	4
42	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47	1	2	2	3	4
43	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46	1	2	2	3	4
44	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	$\bar{1}$.8495	45°	1	2	2	3	4
45°	$\bar{1}$.8495																

用到此十列之表尾差時,看前一表.

Log Sin 正餘弦對數表 Log Cos

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0		表尾差				
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											$\bar{1}$.8495	45°					
45°	$\bar{1}$.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	44	1	1	2	3	4
46	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43	1	1	2	3	4
47	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42	1	1	2	3	3
48	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8778	41	1	1	2	3	3
49	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1.8843	40°	1	1	2	3	3
50°	$\bar{1}$.8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	8905	39	1	1	2	2	3
51	8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	8965	38	1	1	2	2	3
52	8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	9023	37	1	1	2	2	3
53	9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	9080	36	1	1	2	2	3
54	9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	9134	35	1	1	2	2	3
55	9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	9186	34	1	1	2	2	3
56	9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	9236	33	1	1	2	2	3
57	9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	9284	32	0	1	1	2	2
58	9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	9331	31	0	1	1	2	2
59	9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	$\bar{1}$.9375	30°	0	1	1	2	2
60°	$\bar{1}$.9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	9418	29	0	1	1	2	2
61	9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	9459	28	0	1	1	2	2
62	9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	9499	27	0	1	1	2	2
63	9499	9503	9506	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	9537	26	0	1	1	2	2
64	9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	9573	25	0	1	1	1	2
65	9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	9607	24	0	1	1	1	2
66	9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	9640	23	0	1	1	1	2
67	9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	9672	22	0	1	1	1	2
68	9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9693	9699	9702	21	0	1	1	1	1
69	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	1.9730	20°	0	1	1	1	1
70°	$\bar{1}$.9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	9757	19	0	1	1	1	1
71	9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	9782	18	0	1	1	1	1
72	9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	9806	17	0	0	1	1	1
73	9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	9828	16	0	0	1	1	1
74	9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	9849	15	0	0	1	1	1
75	9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	9869	14	0	0	1	1	1
76	9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	9887	13	0	0	1	1	1
77	9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	9904	12	0	0	1	1	1
78	9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	9919	11	0	0	0	1	1
79	9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	$\bar{1}$.9934	10°	0	0	0	1	1
80°	$\bar{1}$.9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	9946	9	0	0	0	1	1
81	9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9958	8	0	0	0	0	1
82	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	9968	7	0	0	0	0	0
83	9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	9976	6	0	0	0	0	0
84	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	9983	5	0	0	0	0	0
85	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	4	0	0	0	0	0
86	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	9994	3	0	0	0	0	0
87	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9997	9997	9997	2	0	0	0	0	0
88	9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	$\bar{1}$.9999	1	0	0	0	0	0
89	$\bar{1}$.9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0.0000	0°	0	0	0	0	0
90°	0.0000																

Log Tan 正餘切對數表 Log Cotan

用到此十一列之表尾差時，照用法說明第5面公式(二)，檢對數表。

													表尾差				
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5
0°.0	− ∞	$\bar{4}$.2419	5429	7190	8439	9408	∫0200	0870	1450	1961	$\bar{3}$.2419	89.9					
0.1	$\bar{3}$.2419	2833	3211	3558	3880	4180	4460	4723	4972	5206	5429	89.8					
0.2	5429	5641	5843	6036	6221	6398	6569	6732	6890	7043	7190	89.7					
0.3	7190	7332	7470	7604	7734	7860	7982	8101	8217	8329	8439	89.6					
0.4	8439	8547	8651	8754	8853	8951	9046	9140	9231	9321	$\bar{3}$.9409	89.5					
0.5	$\bar{3}$.9409	9495	9579	9662	9743	9823	9901	9978	∫0053	0127	$\bar{2}$.0200	89.4					
0.6	$\bar{2}$.0200	0272	0343	0412	0481	0548	0614	0680	0744	0807	0870	89.3					
0.7	.0870	0932	0992	1052	1111	1170	1227	1284	1340	1395	1450	89.2					
0.8	1450	1504	1557	1610	1662	1713	1764	1814	1864	1913	1962	89.1					
0.9	1962	2010	2057	2104	2150	2196	2242	2287	2331	2376	$\bar{2}$.2419	89°.0					
1°.0	$\bar{2}$.2419	2462	2505	2548	2590	2631	2672	2713	2754	2794	2833	88.9					
1.1	2833	2873	2912	2950	2988	3026	3064	3101	3138	3175	3211	88.8	4	8	11	15	19
1.2	3211	3247	3283	3318	3354	3389	3423	3458	3492	3525	3559	88.7	3	7	10	14	17
1.3	3559	3592	3625	3658	3691	3723	3755	3787	3818	3850	3881	88.6	3	6	10	13	16
1.4	3881	3912	3943	3973	4003	4033	4063	4093	4122	4152	4181	88.5	3	6	9	12	15
1.5	4181	4210	4238	4267	4295	4323	4351	4379	4406	4434	4461	88.4	3	6	8	11	14
1.6	4461	4488	4515	4542	4568	4595	4621	4647	4673	4699	4725	88.3	3	5	8	11	13
1.7	4725	4750	4775	4801	4826	4851	4875	4900	4924	4949	4973	88.2	2	5	7	10	12
1.8	4973	4997	5021	5045	5068	5092	5115	5139	5162	5185	5208	88.1	2	5	7	9	12
1.9	5208	5231	5253	5276	5298	5321	5343	5365	5387	5409	$\bar{2}$.5431	88°.0	2	4	7	9	11
2°.0	$\bar{2}$.5431	5453	5474	5496	5517	5538	5559	5580	5601	5622	5643	87.9	2	4	6	8	11
2.1	5643	5664	5684	5705	5725	5745	5765	5785	5805	5825	5845	87.8	2	4	6	8	10
2.2	5845	5865	5884	5904	5923	5943	5962	5981	6000	6019	6038	87.7	2	4	6	8	10
2.3	6038	6057	6076	6095	6113	6132	6150	6169	6187	6205	6223	87.6	2	4	6	7	9
2.4	6223	6242	6260	6277	6295	6313	6331	6348	6366	6384	6401	87.5	2	4	5	7	9
2.5	6401	6418	6436	6453	6470	6487	6504	6521	6538	6555	6571	87.4	2	3	5	7	9
2.6	6571	6588	6605	6621	6638	6654	6671	6687	6703	6719	6736	87.3	2	3	5	7	8
2.7	6736	6752	6768	6784	6800	6815	6831	6847	6863	6878	6894	87.2	2	3	5	6	8
2.8	6894	6909	6925	6940	6956	6971	6986	7001	7016	7031	7046	87.1	2	3	5	6	8
2.9	7046	7061	7076	7091	7106	7121	7136	7150	7165	7179	$\bar{2}$.7194	87°.0	1	3	4	6	7
3°.0	$\bar{2}$.7194	7208	7223	7237	7252	7266	7280	7294	7308	7323	7337	86.9	1	3	4	6	7
3.1	7337	7351	7365	7379	7392	7406	7420	7434	7448	7461	7475	86.8	1	3	4	6	7
3.2	7475	7488	7502	7515	7529	7542	7556	7569	7582	7596	7609	86.7	1	3	4	5	7
3.3	7609	7622	7635	7648	7661	7674	7687	7700	7713	7726	7739	86.6	1	3	4	5	6
3.4	7739	7751	7764	7777	7790	7802	7815	7827	7840	7852	7865	86.5	1	3	4	5	6
3.5	7865	7877	7890	7902	7914	7927	7939	7951	7963	7975	7988	86.4	1	2	4	5	6
3.6	7988	8000	8012	8024	8036	8048	8059	8071	8083	8095	8107	86.3	1	2	4	5	6
3.7	8107	8119	8130	8142	8154	8165	8177	8188	8200	8212	8223	86.2	1	2	3	5	6
3.8	8223	8234	8246	8257	8269	8280	8291	8302	8314	8325	8336	86.1	1	2	3	5	6
3.9	8336	8347	8358	8370	8381	8392	8403	8414	8425	8436	$\bar{2}$.8446	86°.0	1	2	3	4	6
4°.0	$\bar{2}$.8446	8457	8468	8479	8490	8501	8511	8522	8533	8543	8554	85.9	1	2	3	4	5
4.1	8554	8565	8575	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8649	8659	85.8	1	2	3	4	5
4.2	8659	8669	8680	8690	8700	8711	8721	8731	8741	8751	8762	85.7	1	2	3	4	5
4.3	8762	8772	8782	8792	8802	8812	8822	8832	8842	8852	8862	85.6	1	2	3	4	5
4.4	8862	8872	8882	8891	8901	8911	8921	8931	8940	8950	8960	85.5	1	2	3	4	5
4.5	8960	8970	8979	8989	8998	9008	9018	9027	9037	9046	9056	85.4	1	2	3	4	5
4.6	9056	9065	9075	9084	9093	9103	9112	9122	9131	9140	9150	85.3	1	2	3	4	5
4.7	9150	9159	9168	9177	9186	9196	9205	9214	9223	9232	9241	85.2	1	2	3	4	5
4.8	9241	9250	9260	9269	9278	9287	9296	9305	9313	9322	9331	85.1	1	2	3	4	4
4.9	9331	9340	9349	9358	9367	9376	9384	9393	9402	9411	$\bar{2}$.9420	85°.0	1	2	3	4	4

Log Tan 正餘切對數表 Log Cotan

													表尾差				
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5
5°.0	$\bar{2}$.9420	9428	9437	9446	9454	9463	9472	9480	9489	9497	$\bar{2}$.9506	84.9	1	2	3	3	4
5.1	9506	9515	9523	9532	9540	9549	9557	9565	9574	9582	9591	84.8	1	2	3	3	4
5.2	9591	9599	9608	9616	9624	9633	9641	9649	9657	9666	9674	84.7	1	2	2	3	4
5.3	9674	9682	9690	9699	9707	9715	9723	9731	9739	9747	9756	84.6	1	2	2	3	4
5.4	9756	9764	9772	9780	9788	9796	9804	9812	9820	9828	9836	84.5	1	2	2	3	4
5.5	9838	9844	9852	9860	9667	9875	9883	9891	9899	9907	9915	84.4	1	2	2	3	4
5.6	9915	9922	9930	9938	9946	9953	9961	9969	9977	9964	$\bar{2}$.9992	84.3	1	2	2	3	4
5.7	$\bar{2}$.9992	0000	0007	0015	0022	0030	0038	0045	0053	0060	$\bar{1}$.0068	84.2	1	2	2	3	4
5.8	$\bar{1}$.0068	0075	0083	0090	0098	0105	0113	0120	0128	0135	0143	84.1	1	1	2	3	4
5.9	0143	0150	0157	0165	0172	0180	0187	0194	0202	0209	$\bar{1}$.0216	84°.0	1	1	2	3	4
6°.0	$\bar{1}$.0216	0223	0231	0238	0245	0253	0260	0267	0274	0281	0289	83.9	1	1	2	3	4
6.1	0289	0296	0303	0310	0317	0324	0331	0338	0346	0353	0360	83.8	1	1	2	3	4
6.2	0360	0367	0374	0381	0388	0395	0402	0409	0416	0423	0430	83.7	1	1	2	3	4
6.3	0430	0437	0444	0451	0457	0464	0471	0478	0485	0492	0499	83.6	1	1	2	3	3
6.4	0499	0506	0512	0519	0526	0533	0540	0546	0553	0560	0567	83.5	1	1	2	3	3
6.5	0567	0573	0580	0537	0593	0600	0607	0314	0620	0627	0633	83.4	1	1	2	3	3
6.6	0533	0640	0647	0653	0660	0667	0673	0680	0686	0693	0699	83.3	1	1	2	3	3
6.7	0699	0706	0712	0719	0725	0732	0738	0745	0751	0758	0764	83.2	1	1	2	3	3
6.8	0764	0771	0777	0734	0790	0796	0803	0809	0816	0822	0828	83.1	1	1	2	3	3
6.9	0828	0835	0341	0847	0854	0860	0866	0873	0879	0885	$\bar{1}$.0891	83°.0	1	1	2	3	3
7°.0	$\bar{1}$.0891	0898	0904	0910	0916	0923	0929	0935	0941	0947	0954	82.9	1	1	2	2	3
7.1	0954	0960	0966	0972	0978	0984	0991	0997	1003	1009	1015	82.8	1	1	2	2	3
7.2	1015	1021	1027	1033	1039	1045	1051	1058	1064	1070	1076	82.7	1	1	2	2	3
7.3	1076	1082	1088	1094	1100	1106	1112	1117	1123	1129	1135	82.6	1	1	2	2	3
7.4	1135	1141	1147	1153	1159	1165	1171	1177	1183	1188	1194	82.5	1	1	2	2	3
7.5	1194	1200	1206	1212	1218	1223	1229	1235	1241	1247	1252	82.4	1	1	2	2	3
7.6	1252	1258	1264	1270	1276	1281	1287	1293	1299	1304	1310	82.3	1	1	2	2	3
7.7	1310	1316	1321	1327	1333	1338	1344	1350	1355	1361	1367	82.2	1	1	2	2	3
7.8	1367	1372	1378	1384	1389	1395	1400	1406	1412	1417	1423	82.1	1	1	2	2	3
7.9	1423	1428	1434	1439	1445	1450	1456	1461	1467	1473	$\bar{1}$.1478	82°.0	1	1	2	2	3
8°.0	$\bar{1}$.1478	1484	1489	1494	1500	1505	1511	1516	1522	1527	1533	81.9	1	1	2	2	3
8.1	1533	1538	1544	1549	1554	1560	1565	1571	1576	1581	1587	81.8	1	1	2	2	3
8.2	1587	1592	1597	1603	1608	1613	1619	1624	1629	1635	1640	81.7	1	1	2	2	3
8.3	1640	1645	1651	1656	1661	1667	1672	1677	1682	1688	1693	81.6	1	1	2	2	3
8.4	1693	1698	1703	1709	1714	1719	1724	1729	1735	1740	1745	81.5	1	1	2	2	3
8.5	1745	1750	1755	1761	1766	1771	1776	1781	1786	1791	1797	81.4	1	1	2	2	3
8.6	1797	1802	1807	1812	1817	1822	1827	1832	1837	1842	1848	81.3	1	1	2	2	3
8.7	1848	1853	1858	1863	1868	1873	1878	1883	1888	1893	1898	81.2	1	1	2	2	3
8.8	1898	1903	1908	1913	1918	1923	1928	1933	1938	1943	1948	81.1	0	1	1	2	2
8.9	1948	1953	1958	1963	1968	1973	1977	1982	1987	1992	$\bar{1}$.1997	81°.0	0	1	1	2	2
9°.0	$\bar{1}$.1997	2002	2007	2012	2017	2022	2026	2031	2036	2041	2046	80.9	0	1	1	2	2
9.1	2046	2051	2056	2060	2065	2070	2075	2080	2085	2089	2094	80.8	0	1	1	2	2
9.2	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2132	2137	2142	80.7	0	1	1	2	2
9.3	2142	2147	2151	2156	2161	2166	2170	2175	2180	2185	2189	80.6	0	1	1	2	2
9.4	2189	2194	2199	2203	2208	2213	2217	2222	2227	2231	2236	80.5	0	1	1	2	2
9.5	2236	2241	2245	2250	2255	2259	2264	2269	2273	2278	2282	80.4	0	1	1	2	2
9.6	2282	2287	2292	2296	2301	2305	2310	2315	2319	2324	2328	80.3	0	1	1	2	2
9.7	2328	2333	2337	2342	2346	2351	2356	2360	2365	2369	2374	80.2	0	1	1	2	2
9.8	2374	2378	2383	2387	2392	2396	2401	2405	2410	2414	2419	80.1	0	1	1	2	2
9.9	$\bar{1}$.2419	2423	2428	2432	2437	2441	2445	2450	2454	2459	$\bar{1}$.2463	80°.0	0	1	1	2	2

Log Tan 正餘切對數表 Log Cotan

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0		表尾差				
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											−.∞	90°					
0°	−∞	$\bar{3}$2419	5429	7190	8439	9409ʃ0200	0870	1450	1962	$\bar{2}$.2419		89					
1	$\bar{2}$.2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208	5431	88					
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046	7194	87					
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	8446	86					
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	$\bar{2}$.9420	85					
5	$\bar{2}$.9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992ʃ0068	0143	$\bar{1}$.0216		84					
6	$\bar{1}$.0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	0891	83					
7	0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	1478	82					
8	1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	1997	81					
9	1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	$\bar{1}$.2463	80°					
10°	$\bar{1}$.2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	2887	79	4	8	13	17	21
11	2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	3275	78	4	8	12	16	19
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	3684	77	4	7	11	14	18
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	3968	76	3	7	10	13	17
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	4281	75	3	6	9	13	16
15	4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	4575	74	3	6	9	12	15
16	4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	4853	73	3	6	8	11	14
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	5118	72	3	5	8	11	13
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	5370	71	3	5	8	10	13
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	$\bar{1}$.5611	70°	2	5	7	10	12
20°	$\bar{1}$.5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	5842	69	2	5	7	10	12
21	5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	6064	68	2	4	7	9	11
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	6279	67	2	4	6	9	11
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	6486	66	2	4	6	8	10
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	6687	65	2	4	6	8	10
25	6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	6882	64	2	4	6	8	10
26	6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	7072	63	2	4	6	8	9
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	7257	62	2	4	6	7	9
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	7438	61	2	4	5	7	9
29	7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	$\bar{1}$.7614	60°	2	4	5	7	9
30°	$\bar{1}$.7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	7788	59	2	3	5	7	9
31	7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	7958	58	2	3	5	7	9
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	8125	57	2	3	5	7	8
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	8290	56	2	3	5	7	8
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	8452	55	2	3	5	6	8
35	8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	8613	54	2	3	5	6	8
36	8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	8771	53	2	3	5	6	8
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	8928	52	2	3	5	6	8
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	9084	51	2	3	5	6	8
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	$\bar{1}$.9238	50°	2	3	5	6	8
40°	$\bar{1}$.9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	9392	49	2	3	5	6	8
41	9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	9544	48	2	3	5	6	8
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	9697	47	2	3	5	6	8
43	9697	9712	9727	9742	9757	9772	9788	9803	9818	9833	$\bar{1}$.9848	46	2	3	5	6	8
44	$\bar{1}$.9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	ʃ0.0000	45°	2	3	5	6	8
45°	0.0000																

用到此十列之表尾差時,看前一表.

Log Tan 正餘切對數表 Log Cotan

		[illegible]	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0		表尾差				
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											0.0000	45°					
45°	0.0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	0152	44	2	3	5	6	8
46	0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	0303	43	2	3	5	6	8
47	0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	0456	42	2	3	5	6	8
48	0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	0608	41	2	3	5	6	8
49	0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	0.0762	40°	2	3	5	6	8
50°	0.0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	0916	39	2	3	5	6	8
51	0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	1072	38	2	3	5	6	8
52	1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	1229	37	2	3	5	6	8
53	1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	1387	36	2	3	5	6	8
54	1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	1548	35	2	3	5	6	8
55	1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	1710	34	2	3	5	6	8
56	1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	1875	33	2	3	5	7	8
57	1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	2042	32	2	3	5	7	8
58	2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	2212	31	2	3	5	7	9
59	2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	0.2386	30°	2	3	5	7	9
60°	0.2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	2562	29	2	4	5	7	9
61	2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725	2743	28	2	4	5	7	9
62	2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	2928	27	2	4	6	7	9
63	2928	2947	2966	2935	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3118	26	2	4	6	8	9
64	3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3313	25	2	4	6	8	10
65	3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3514	24	2	4	6	8	10
66	3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3721	23	2	4	6	8	10
67	3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	3936	22	2	4	6	9	11
68	3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4158	21	2	4	7	9	11
69	4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	0.4389	20°	2	5	7	10	12
70°	0.4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4630	19	2	5	7	10	12
71	4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	4882	18	3	5	8	10	13
72	4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	5147	17	3	5	8	11	13
73	5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5425	16	3	6	8	11	14
74	5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5719	15	3	6	9	12	15
75	5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	6032	14	3	6	9	13	16
76	6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6366	13	3	7	10	13	17
77	6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6725	12	4	7	11	14	18
78	6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	7113	11	4	8	12	16	19
79	7113	7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	0.7537	10°	4	8	13	17	21
80°	0.7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8003	9					
81	8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	8522	8					
82	8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	9109	7					
83	9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	0.9784	6					
84	0.9784	9857	9932	∫0008	0085	0164	0244	0326	0409	0494	1.0580	5					
85	1.0580	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	1554	4					
86	1554	1664	1777	1893	2012	2135	2261	2391	2525	2663	2806	3					
87	2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357	4569	2					
88	4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167	1.7581	1					
89	1.7581	8038	8550	9130	9800	∫2.0591	1561	2810	4571	7581	∞	0°					
90°	∞																

用到此十列之表尾差時,看後一表.

Log Tan 正餘切對數表 Log Cotan

		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		表尾差				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5
80°.0	0.7537	7541	7546	7550	7555	7559	7563	7568	7572	7577	0.7581	9.9	0	1	1	2	2
80.1	7581	7586	7590	7595	7599	7604	7608	7613	7617	7622	7626	9.8	0	1	1	2	2
80.2	7626	7631	7635	7640	7644	7649	7654	7658	7663	7667	7672	9.7	0	1	1	2	2
80.3	7672	7676	7681	7685	7690	7695	7699	7704	7708	7713	7718	9.6	0	1	1	2	2
80.4	7718	7722	7727	7731	7736	7741	7745	7750	7755	7759	7764	9.5	0	1	1	2	2
80.5	7764	7769	7778	7778	7783	7787	7792	7797	7801	7806	7811	9.4	0	1	1	2	2
80.6	7811	7815	7820	7825	7830	7834	7839	7844	7849	7853	7858	9.3	0	1	1	2	2
80.7	7858	7863	7868	7872	7877	7882	7887	7891	7896	7901	7906	9.2	0	1	1	2	2
80.8	7906	7911	7915	7920	7925	7930	7935	7940	7944	7949	7954	9.1	0	1	1	2	2
80.9	7954	7959	7964	7969	7974	7978	7983	7988	7993	7998	0.8003	9°.0	0	1	1	2	2
81°.0	0.8003	8008	8013	8018	8023	8027	8032	8037	8042	8047	8052	8.9	0	1	1	2	2
81.1	8052	8057	8062	8067	8072	8077	8082	8087	8092	8097	8102	8.8	0	1	1	2	2
81.2	8102	8107	8112	8117	8122	8127	8132	8137	8142	8147	8152	8.7	1	1	2	2	3
81.3	8152	8158	8163	8168	8173	8178	8183	8188	8193	8198	8203	8.6	1	1	2	2	3
81.4	8203	8209	8214	8219	8224	8229	8234	8239	8245	8250	8255	8.5	1	1	2	2	3
81.5	8255	8260	8265	8271	8276	8281	8286	8291	8297	8302	8307	8.4	1	1	2	2	3
81.6	8307	8312	8318	8323	8328	8333	8339	8344	8349	8355	8360	8.3	1	1	2	2	3
81.7	8360	8365	8371	8376	8381	8387	8392	8397	8403	8408	8413	8.2	1	1	2	2	3
81.8	8413	8419	8424	8429	8435	8440	8446	8451	8456	8462	8467	8.1	1	1	2	2	3
81.9	8467	8473	8478	8484	8489	8495	8500	8506	8511	8516	0.8522	8°.0	1	1	2	2	3
82°.0	0.8522	8527	8533	8539	8544	8550	8555	8561	8566	8572	8577	7.9	1	1	2	2	3
82.1	8577	8583	8588	8594	8600	8605	8611	8616	8622	8628	8633	7.8	1	1	2	2	3
82.2	8633	8639	8645	8650	8656	8662	8667	8673	8679	8684	8690	7.7	1	1	2	2	3
82.3	8690	8696	8701	8707	8713	8718	8724	8730	8736	8742	8748	7.6	1	1	2	2	3
82.4	8748	8753	8759	8765	8771	8777	8782	8788	8794	8800	8806	7.5	1	1	2	2	3
82.5	8806	8812	8817	8823	8829	8835	8841	8847	8853	8859	8865	7.4	1	1	2	2	3
82.6	8865	8871	8877	8883	8888	8894	8900	8906	8912	8918	8924	7.3	1	1	2	2	3
82.7	8924	8930	8936	8942	8949	8955	8961	8967	8973	8979	8985	7.2	1	1	2	2	3
82.8	8985	8991	8997	9003	9009	9016	9022	9028	9034	9040	9046	7.1	1	1	2	2	3
82.9	9046	9053	9059	9065	9071	9077	9084	9090	9096	9102	0.9109	7°.0	1	1	2	2	3
83°.0	0.9109	9115	9121	9127	9134	9140	9146	9153	9159	9165	9172	6.9	1	1	2	3	3
83.1	9172	9178	9184	9191	9197	9204	9210	9216	9223	9229	9236	6.8	1	1	2	3	3
83.2	9236	9242	9249	9255	9262	9268	9275	9281	9288	9294	9301	6.7	1	1	2	3	3
83.3	9301	9307	9314	9320	9327	9333	9340	9347	9353	9360	9367	6.6	1	1	2	3	3
83.4	9367	9373	9380	9386	9393	9400	9407	9413	9420	9427	9433	6.5	1	1	2	3	3
83.5	9433	9440	9447	9454	9460	9467	9474	9481	9488	9494	9501	6.4	1	1	2	3	3
83.6	9501	9508	9515	9522	9529	9536	9543	9549	9556	9563	9570	6.3	1	1	2	3	3
83.7	9570	9577	9584	9591	9598	9605	9612	9619	9626	9633	9640	6.2	1	1	2	3	4
83.8	9640	9647	9654	9662	9669	9676	9683	9690	9697	9704	9711	6.1	1	1	2	3	4
83.9	9711	9719	9726	9733	9740	9747	9755	9762	9769	9777	9784	6°.0	1	1	2	3	4
84°.0	0.9784	9791	9798	9806	9813	9820	9828	9835	9843	9850	9857	5.9	1	1	2	3	4
84.1	9857	9865	9872	9880	9887	9895	9902	9910	9917	9925	0.9932	5.8	1	1	2	3	4
84.2	0.9932	9940	9947	9955	9962	9970	9978	9985	9993	0000	1.0008	5.7	1	2	2	3	4
84.3	1.0008	0016	0023	0031	0039	0047	0054	0062	0070	0078	0085	5.6	1	2	2	3	4
84.4	0085	0093	0101	0109	0117	0125	0133	0140	0148	0156	0164	5.5	1	2	2	3	4
84.5	0164	0172	0180	0188	0196	0204	0212	0220	0228	0236	0244	5.4	1	2	2	3	4
84.6	0244	0253	0261	0269	0277	0285	0293	0301	0310	0318	0326	5.3	1	2	2	3	4
84.7	0326	0334	0343	0351	0359	0367	0376	0384	0392	0401	0409	5.2	1	2	3	3	4
84.8	0408	0418	0426	0435	0443	0451	0460	0468	0477	0485	0494	5.1	1	2	3	3	4
84.9	1.0494	0503	0511	0520	0528	0537	0546	0554	0563	0572	1.0580	5°.0	1	2	3	3	4

Log Tan 正餘切對數表 Log Cotan

		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		表尾差				
	0·	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5
85°.0	1.0580	0589	0598	0607	0616	0624	0633	0642	0651	0660	1.0669	4.9	1	2	3	4	4
85.1	0669	0678	0687	0696	0704	0713	0722	0731	0740	0750	0759	4.8	1	2	3	4	4
85.2	0759	0768	0777	0786	0795	0804	0814	0823	0832	0841	0850	4.7	1	2	3	4	5
85.3	0850	0860	0869	0878	0888	0897	0907	0916	0925	0935	0944	4.6	1	2	3	4	5
85.4	0944	0954	0963	0973	0982	0992	1002	1011	1021	1030	1040	4.5	1	2	3	4	5
85.5	1040	1050	1060	1069	1079	1089	1099	1109	1118	1128	1138	4.4	1	2	3	4	5
85.6	1138	1148	1158	1168	1178	1188	1198	1208	1218	1228	1238	4.3	1	2	3	4	5
85.7	1238	1249	1259	1269	1279	1289	1300	1310	1320	1331	1341	4.2	1	2	3	4	5
85.8	1341	1351	1362	1372	1383	1393	1404	1414	1425	1435	1446	4.1	1	2	3	4	5
85.9	1446	1457	1467	1478	1489	1499	1510	1521	1532	1543	1.1554	4°.0	1	2	3	4	5
86°.0	1.1554	1564	1575	1586	1597	1608	1619	1630	1642	1653	1664	3.9	1	2	3	4	6
86.1	1664	1675	1686	1698	1709	1720	1731	1743	1754	1766	1777	3.8	1	2	3	5	6
86.2	1777	1788	1800	1812	1823	1835	1846	1858	1870	1881	1893	3.7	1	2	3	5	6
86.3	1893	1905	1917	1929	1941	1952	1964	1976	1988	2000	2012	3.6	1	2	4	5	6
86.4	2012	2025	2037	2049	2061	2073	2086	2098	2110	2123	2135	3.5	1	2	4	5	6
86.5	2135	2148	2160	2173	2185	2198	2210	2223	2236	2249	2261	3.4	1	3	4	5	6
86.6	2261	2274	2287	2300	2313	2326	2339	2352	2365	2378	2391	3.3	1	3	4	5	6
86.7	2391	2404	2418	2431	2444	2458	2471	2485	2498	2512	2525	3.2	1	3	4	5	7
86.8	2525	2539	2552	2566	2580	2594	2608	2621	2635	2649	2663	3.1	1	3	4	6	7
86.9	2663	2677	2692	2706	2720	2734	2748	2763	2777	2792	1.2806	3°.0	1	3	4	6	7
87°.0	1.2806	2821	2835	2850	2864	2879	2894	2909	2924	2939	2954	2.9	1	3	4	6	7
87.1	2954	2969	2984	2999	3014	3029	3044	3060	3075	3091	3106	2.8	2	3	5	6	8
87.2	3106	3122	3137	3153	3169	3185	3200	3216	3232	3248	3264	2.7	2	3	5	6	8
87.3	3264	3281	3297	3313	3329	3346	3362	3379	3395	3412	3429	2.6	2	3	5	7	8
87.4	3429	3445	3462	3479	3496	3513	3530	3547	3564	3582	3599	2.5	2	3	5	7	9
87.5	3599	3616	3634	3652	3669	3687	3705	3723	3740	3758	3777	2.4	2	4	5	7	9
87.6	3777	3795	3813	3831	3850	3868	3887	3905	3924	3943	3962	2.3	2	4	6	7	9
87.7	3962	3981	4000	4019	4038	4057	4077	4096	4116	4135	4155	2.2	2	4	6	8	10
87.8	4155	4175	4195	4215	4235	4255	4275	4295	4316	4336	4357	2.1	2	4	6	8	10
87.9	4357	4378	4399	4420	4441	4462	4483	4504	4526	4547	1.4569	2°.0	2	4	6	8	11
88°.0	1.4569	4591	4613	4635	4657	4679	4702	4724	4747	4769	4792	1.9	2	4	7	9	11
88.1	4792	4815	4838	4861	4885	4908	4932	4955	4979	5003	5027	1.8	2	5	7	9	12
88.2	5027	5051	5076	5100	5125	5149	5174	5199	5225	5250	5275	1.7	2	5	7	10	12
88.3	5275	5301	5327	5353	5379	5405	5432	5458	5485	5512	5539	1.6	3	5	8	11	13
88.4	5539	5566	5594	5621	5649	5677	5705	5733	5762	5790	5819	1.5	3	6	8	11	14
88.5	5819	5848	5878	5907	5937	5967	5997	6027	6057	6088	6119	1.4	3	6	9	12	15
88.6	6119	6150	6182	6213	6245	6277	6309	6342	6375	6408	6441	1.3	3	6	10	13	16
88.7	6441	6475	6508	6542	6577	6611	6646	6682	6717	6753	6789	1.2	3	7	10	14	17
88.8	6789	6825	6862	6899	6936	6974	7012	7050	7088	7127	7167	1.1	4	8	11	15	19
88.9	7167	7206	7246	7287	7328	7369	7410	7452	7495	7538	1.7581	1°.0					
89°.0	1.7581	7624	7669	7718	7756	7804	7850	7896	7943	7990	8038	0.9					
89.1	8038	8087	8136	8186	8236	8287	8338	8390	8443	8496	8550	0.8					
89.2	8550	8605	8660	8716	8773	8830	8889	8948	9008	9068	9130	0.7					
89.3	9130	9193	9256	9320	9386	9452	9519	9588	9657	9728	1.9800	0.6					
89.4	1.9800	9873	9947	∫0022	0099	0177	0257	0338	0421	0505	2.0591	0.5					
89.5	2.0591	0679	0769	0860	0954	1049	1147	1248	1349	1453	1561	0.4					
89.6	1561	1671	1783	1899	2018	2140	2266	2396	2530	2668	2810	0.3					
89.7	2810	2957	3110	3268	3431	3602	3779	3964	4157	4359	4571	0.2					
89.8	4571	4794	5028	5277	5540	5820	6120	6442	6789	7167	2.7581	0.1					
89.9	2.7581	8089	8550	9130	9800	∫3.0592	1561	2810	4571	7581	∞	0°.0					

用到此十一列之表尾差時,照用法說明第5面公式[三],檢對數表,

度化弳

0°	.0000	50°	0.8727
1	.0175	1	.8901
2	.0349	2	.9076
3	.0524	3	.9250
4	.0698	4	.9425
5	.0873	55	.9599
6	.1047	6	.9774
7	.1222	7	0.9948
8	.1396	8	1.0123
9	.1571	9	1.0297
10°	.1745	60°	1.0472
1	.1920	1	1.0647
2	.2094	2	1.0821
3	.2269	3	1.0996
4	.2443	4	1.1170
15	.2618	65	1.1345
6	.2793	6	1.1519
7	.2967	7	1.1694
8	.3142	8	1.1868
9	.3316	9	1.2043
20°	.3491	70°	1.2217
1	.3665	1	1.2392
2	.3840	2	1.2566
3	.4014	3	1.2741
4	.4189	4	1.2915
25	.4363	75	1.3090
6	.4538	6	1.3265
7	.4712	7	1.3439
8	.4887	8	1.3614
9	.5061	9	1.3788
30°	.5236	80°	1.3963
1	.5411	1	1.4137
2	.5585	2	1.4312
3	.5760	3	1.4486
4	.5934	4	1.4661
35	.6109	85	1.4835
6	.6283	6	1.5010
7	.6458	7	1.5184
8	.6632	8	1.5359
9	.6807	9	1.5533
40°	.6981	90°	1.5708
1	.7150	1	1.5882
2	.7330	2	1.6057
3	.7505	3	1.6232
4	.7679	4	1.6406
45	.7854	95	1.6581
6	.8029	6	1.6755
7	.8203	7	1.6930
8	.8378	8	1.7104
9	.8552	9	1.7279
50°	.8727	100°	1.7453

0°.1	.0017	0°.01	.0002
.2	.0035	.02	.0003
.3	.0052	.03	.0005
.4	.0070	.04	.0007
.5	.0087	.05	.0009
.6	.0105	.06	.0010
.7	.0122	.07	.0012
.8	.0140	.08	.0014
.9	.0157	09	.0016

1 弳 $= 180^\circ/\pi = 57^\circ.29578$

$1^\circ = \pi/180$ 弳 $= 0.0174533$ 弳

30°	0.5236 =	$\pi/6$
45°	0.7854 =	$\pi/4$
60°	1.0472 =	$\pi/3$
90°	1.5708 =	$\pi/2$
100	1.7453	
110	1.9199	
120°	2.0944 =	$2\pi/3$
130	2.2689	
135°	2.3562 =	$3\pi/4$
140	2.4435	
150°	2.6180 =	$5\pi/6$
160	2.7925	
170	2.9671	
180°	3.1416 =	π
190	3.3161	
200	3.4907	
210°	3.6652 =	$7\pi/6$
220	3.8397	
225°	3.9270 =	$5\pi/4$
230	4.0143	
240°	4.1888 =	$4\pi/3$
250	4.3633	
260	4.5379	
270°	4.7124 =	$3\pi/2$
280	4.8869	
290	5.0615	
300°	5.2360 =	$5\pi/3$
310	5.4105	
315°	5.4978 =	$7\pi/4$
320	5.5851	
330°	5.7596 =	$11\pi/6$
340	5.9341	
350	6.1087	
360°	6.2832 =	2π

360 度·或 2π 弳
之齊倍數

1	360°	6.28319
2	720°	12.56637
3	1080°	18.84956
4	1440°	25.13274
5	1800°	31.41593
6	2160°	37.69911
7	2520°	43.98230
8	2880°	50.26548
9	3240°	56.54867
10	3600°	62.83185

弳化度

0.00	0°.00	0.50	28°.65	1.00	57°.80
.01	0°.57	.51	29°.22	.01	57°.87
.02	1°.15	.52	29°.79	.02	58°.44
.03	1°.72	.53	30°.37	.03	59°.01
.04	2°.29	.54	30°.94	.04	59°.59
0.05	2°.86	0.55	31°.51	1.05	60°.16
.06	3°.44	.56	32°.09	.06	60°.73
.07	4°.01	.57	32°.66	.07	61°.31
.08	4°.58	.58	33°.23	.08	61°.88
.09	5°.16	.59	33°.80	.09	62°.45
0.10	5°.73	0.60	34°.38	1.10	63°.03
.11	6°.30	.61	34°.95	11	63°.60
.12	6°.88	.62	35°.52	.12	64°.17
.13	7°.45	.63	36°.10	.13	64°.74
.14	8°.02	.64	36°.67	.14	65°.32
0.15	8°.59	0.65	37°.24	1.15	65°.89
.16	9°.17	.66	37°.82	.16	66°.46
.17	9°.74	.67	38°.39	.17	67°.04
.18	10°.31	.68	38°.96	.18	67°.61
.19	10°.89	.69	39°.53	.19	68°.18
0.20	11°.46	0.70	40°.11	1.20	68°.75
.21	12°.03	.71	40°.68	.21	69°.33
.22	12°.61	72	41°.25	.22	69°.90
.23	13°.18	.73	41°.83	.23	70°.47
.24	13°.75	.74	42°.40	.24	71°.05
0.25	14°.32	0.75	42°.97	1.25	71°.62
.26	14°.90	.76	43°.54	.26	72°.19
.27	15°.47	.77	44°.12	.27	72°.77
.28	16°.04	.78	44°.69	.28	73°.34
.29	16°.62	.79	45°.26	.29	73°.91
0.30	17°.19	0.80	45°.84	1.30	74°.48
.31	17°.76	.81	46°.41	.31	75°.06
.32	18°.33	.82	46°.98	.32	75°.63
.33	18°.91	.83	47°.56	.33	76°.20
.34	19°.48	.84	48°.13	.34	76°.78
0.35	20°.05	0.85	48°.70	1.35	77°.35
.36	20°.63	.86	49°.27	.36	77°.92
.37	21°.20	.87	49°.85	.37	78°.50
.38	21°.77	.88	50°.42	.38	79°.07
.39	22°.35	.89	50°.99	.39	79°.64
0.40	22°.92	0.90	51°.57	1.40	80°.21
.41	23°.49	.91	52°.14	.41	80°.79
.42	24°.06	.92	52°.70	.42	81°.36
.43	24°.64	.93	53°.29	.43	81°.93
.44	25°.21	.94	53°.86	.44	82°.51
0.45	25°.78	0.95	54°.43	1.45	83°.86
.46	26°.35	.96	55°.00	.46	83°.65
.47	26°.93	.97	55°.58	.47	84°.22
.48	27°.50	.98	56°.15	.48	84°.80
.49	28°.07	.99	56°.72	.49	85°.37
0.50	28°.65	1.00	57°.30	1.50	85°.94
				.51	86°.52
				.52	87°.09
				.53	87°.66
				.54	88°.24
				1.55	88°.81
				56	89°.38
				1.57	89°.95
				1.5708	90°
				3.1416	180°
				4.7124	270°
				6.2832	360°

1.	57°.30	0.001	0°.06	0.0001	°.01
2.	114°.59	.002	°.11	.0002	°.01
3.	171°.89	.003	°.17	.0003	°.02
4.	229°.18	.004	°.23	.0004	°.02
5.	286°.48	.005	°.29	.0005	°.03
6.	343°.77	.006	°.34	.0006	°.03
7.	401°.07	.007	°.40	.0007	°.04
8.	458°.37	.008	°.46	.0008	°.05
9.	515°.66	.009	°.52	.0009	°.05
10.	572°.96				

漢英名詞對照表

說明

(1) 本表按王雲五氏之四角號碼檢字法排列
(2) 單字注四角號碼及附角之號碼於本字之上
(3) 名詞除第一字四角號碼已見該名詞上面單字用～記號代表外第二字取上二角之號碼於本條之上
(4) 名詞第三字仍依號碼順序排列但不注號碼
(5) 本表每面上端首尾所注號碼係本面號碼之起訖中間所注各字係本面單字
(6) 四角號碼檢字法見下(詳細方法可參閱王雲五大辭典或王雲五小辭典)

第二次改訂四角號碼檢字法

王雲五發明

第一條 筆畫分為十種，各以號碼代表之如下：

號碼	筆名	筆形	舉例	說明	注意
0	頭	亠	言主广疒	獨立之點與獨立之橫相結合	0 4 5 6 7 8 9各種均由數筆合為一筆。檢查時遇單筆與複筆並列，應儘量取複筆；如亠作0不作3，扌作4不作2，厂作7不作2，𠆢作8不作32，⺌作9不作33。
1	橫	一乚乀	天土地江元風	包括橫刁與右鈎	
2	垂	丨丿亅	山月千則	包括直撇與左鈎	
3	點	丶乀	宀ネ冖厶之衣	包括點與捺	
4	叉	十乂	草杏皮刈大對	兩筆相交	
5	插	扌	才戈申史	一筆通過兩筆以上	
6	方	口	國鳴目四甲由	四邊齊整之形	
7	角	ㄱ𠃌乚𠃊ㄥㄱ	羽門氐陰雪衣學罕	橫與垂相接之處	
8	八	八丷人𠆢	分頁羊余災奈疋乍	八字形與其變形	
9	小	小⺌⺍忄	尖糸粦呆惟	小字形與其變形	

第二條 每字祇取四角之筆，其順序：
(一)左上角 (二)右上角 (三)左下角 (四)右下角

(例) (一)左上角……端……(二)右上角
(三)左下角……(四)右下角

檢查時按四角之筆形及順序，每字得四碼：

(例) 顏=0128 截=4325 縣=6299

第三條 字之上部或下部，祇有一筆或一複筆時，無論在何地位，均作左角，其右角作0。

(例) 宣 直 首 条 票 宗 母

每筆用過後，如再充他角，亦作0。

(例) 乎 之 持 排 尖 米 業 時

第四條 由整個口門鬥所成之字，其下角取內部之筆，但上下左右有他筆時，不在此例。

(例) 因=6043 閉=7724 鬭=7712

茵=4460 瀾=3712

英漢名詞對照表

本書於二十五年十二月經
國民政府教育部審定
領到教字第一〇七號執照

中華民國二十五年十二月審定本第一版
中華民國三十八年五月審定本第九七版

(57014)
高級中學用
復興教科書　三角學　一冊
定價壹元
印刷地點外另加運費

編著者　李蕃
校訂者　段子燮
主編者　王雲五
發行人　陳懋解　上海河南中路
印刷所　商務印書館印刷廠
發行所　商務印書館　各地