Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 20

Übungsaufgaben

AUFGABE 20.1. Zeige, dass die folgenden Teilmengen T der natürlichen Zahlen arithmetisch repräsentierbar sind.

(1) Eine konkrete endliche Menge $\{n_1, \ldots, n_k\}$.
(2) Die Menge aller Vielfachen von 5.
(3) Die Menge der Primzahlen.
(4) Die Menge der Quadratzahlen.
(5) Die Menge der Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung jeder Exponent maximal 1 ist.

AUFGABE 20.2. Zeige, dass die folgenden Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ arithmetisch repräsentierbar sind.

(1) Die Addition
$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x + y.$$
(2) Die Multiplikation
$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$
(3) Die eingeschränkte Subtraktion
$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto \max{(x - y, 0)}\,,$$
die bei $y > x$ den Wert 0 besitzt.
(4) Die Restfunktion
$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N},\ (n, t) \longmapsto r(n, t),$$
die den Rest (zwischen 0 und $t-1$) bei Division von n durch t angibt.

AUFGABE 20.3. Es sei
$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
eine Polynomfunktion mit $f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass f durch den Ausdruck $y = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ arithmetisch repräsentiert wird.

Aufgabe 20.4. Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$F\colon \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.5. Zeige, dass eine polynomiale Abbildung (mit Koeffizienten aus $\mathbb{N}$)

$$F\colon \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto F(x_1, \ldots, x_n),$$

arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.6.*

Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y, z) \longmapsto xy^2 - z^2 + 2z^3,$$

(wohldefiniert und) arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.7. Zeige, dass die Abbildung

$$F\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

mit

$$F(n) = \begin{cases} \sqrt{n}\,, \text{ falls } \sqrt{n} \in \mathbb{N}\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.8. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

eine Abbildung und $\Gamma \subseteq \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^s$ der zugehörige Graph, also die Menge

$$\Gamma = \{(n_1, \ldots, n_{r+s}) | \, \varphi(n_1, \ldots, n_r) = (n_{r+1}, \ldots, n_{r+s})\}\,.$$

Zeige, dass φ genau dann arithmetisch repräsentierbar ist, wenn Γ (als Relation) arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.9. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

eine arithmetisch repräsentierbare Abbildung. Zeige, dass zu jedem Punkt $P \in \mathbb{N}^s$ die Faser

$$\varphi^{-1}(P) \subseteq \mathbb{N}^r$$

arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.10. Es sei
$$\varphi\colon \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$
eine arithmetisch repräsentierbare Abbildung und es sei $T \subseteq \mathbb{N}^s$ eine arithmetisch repräsentierbare Relation. Zeige, dass das Urbild
$$\varphi^{-1}(T) \subseteq \mathbb{N}^r$$
arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.11. Wir betrachten das Registerprogramm mit drei Registern (bei leerem dritten Register berechnet es die Summe der ersten beiden Registerinhalte)

(1) $C(2,5)$
(2) 1+
(3) 2−
(4) $C(3,1)$
(5) Halte an

a) Erstelle die Programmabbildung für dieses Programm.

b) Welche Beziehung besteht zwischen der Programmabbildung und der Additionsabbildung
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\, (x,y) \longmapsto x+y?$$

c) Erstelle eine arithmetische Repräsentierung für dieses Programm.

Aufgabe 20.12. Zeige explizit, dass die in Vorlesung 18 besprochenen Registerprogramme (also ihre zugehörigen Programmabbildungen) arithmetisch repräsentierbar sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.13. (2 Punkte)

Es sei
$$\varphi\colon \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$
eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann arithmetisch repräsentierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen φ_i, $1 \leq i \leq s$, arithmetisch repräsentierbar sind.

Aufgabe 20.14. (4 Punkte)

Zeige, dass die Abbildung

$$F\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N},\, (x,y) \longmapsto \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor,$$

arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.15. (5 Punkte)

Zeige, dass die β-Funktion arithmetisch repräsentierbar ist.

Aufgabe 20.16. (2 Punkte)

Zeige, dass es nur abzählbar viele arithmetisch repräsentierbare Relationen gibt.