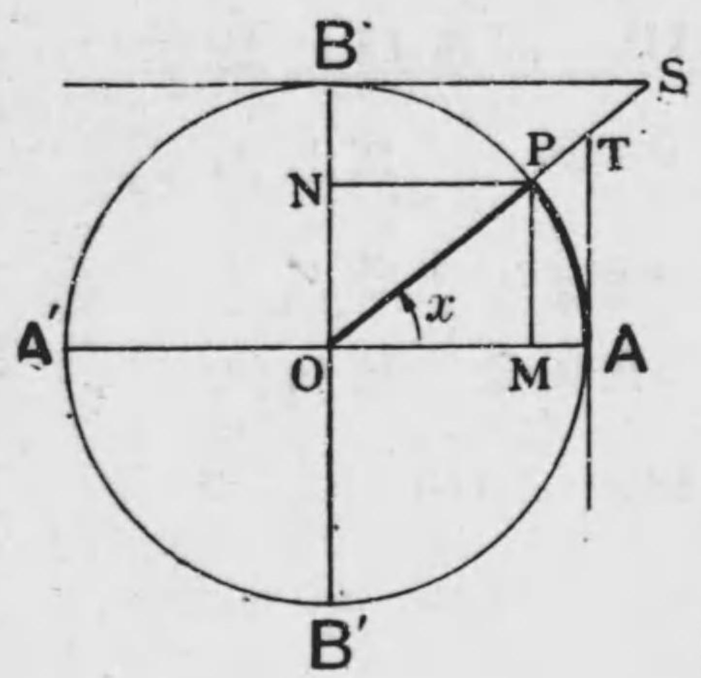
43. 三角函數ノ幾何學的表示

三角函數ハ二線分ノ比デアルガ後項ヲ單位ノ長サニスレバ,其ノ値ハ一ツノ線分デ表ハス事ガ出來ル。

1. 正弦及餘弦　單位ノ長サヲ半徑トスル圓 O ヲ描キ,圓周上ノ點 P ノ定直線 OA (首線)ニ投ズル正射影ヲ M トスレバ,



$$\sin \angle POA = \frac{PM}{OP}$$

然ルニ $OP=1$ デアルカラ

$$\sin x = PM$$

同様ニ

$$\cos x = OM$$

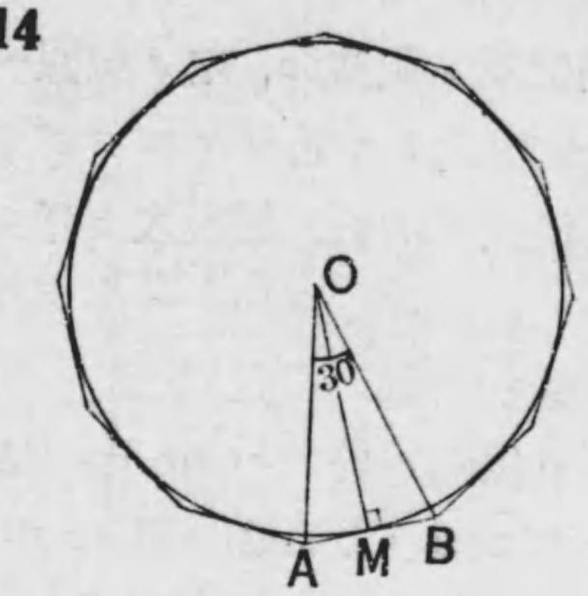
故ニ PM 及ビ OM ノ長サヲ測レバ正弦及ビ餘弦ノ近似値ヲ得ル。(OM ノ代リニ PN ヲトッテモヨイ。) 角 x ガ 0° ノトキハ, OP ハ首線 OA ニ重ナリ,從ッテ　$PM=0$,　$OM=1$

$$\therefore\ \sin 0°=0,\quad \cos 0°=1$$

x ガ大トナルニ從ッテ PM ハ大トナリ, OM ハ小トナリ終ニ $x=90°$ トナラバ, PM ハ OB ト重ナリ,　$PM=OB=OA=1$,　$OM=0$

$$\therefore\ \sin 90°=1,\quad \cos 90°=0$$

14



AB ヲ圓 O ニ外接シテヰル正十二邊形ノ一邊トスル.

切點ヲ M トスレバ　$OM \perp AB$

$AM=3cm$

$\angle AOB = 30°$ デ $\angle AOM=15°$

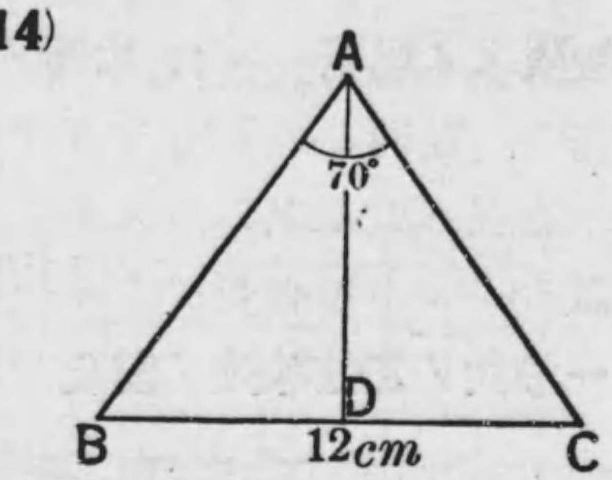
$OM = MA \cot 15°$

$= 3 \times 3.7321$

$= 11.1963$

答　<u>11.2cm</u>

(14)



$AD \perp BC$ トスレバ $BD=6cm$

$\angle BAD = 35'$

$AD = BD \cot 35°$

$= 6 \times 1.4281$

$= 8.5686$

面積 $= \frac{1}{2} BC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 8.5686$

$= 51.4116$

答 $\begin{cases} 高サ & \underline{8.6cm} \\ 面積 & \underline{51.4cm^2} \end{cases}$

43. 三角函數ノ幾何學的表示

三角函數ハ本來比ノ値ヲ取扱フノデアルカラ無名數デアル. 之ヲ線分ノ長サデ示スコトハ生徒ニ誤解ヲ來タスコトガアルカラ注意ヲ要スル.

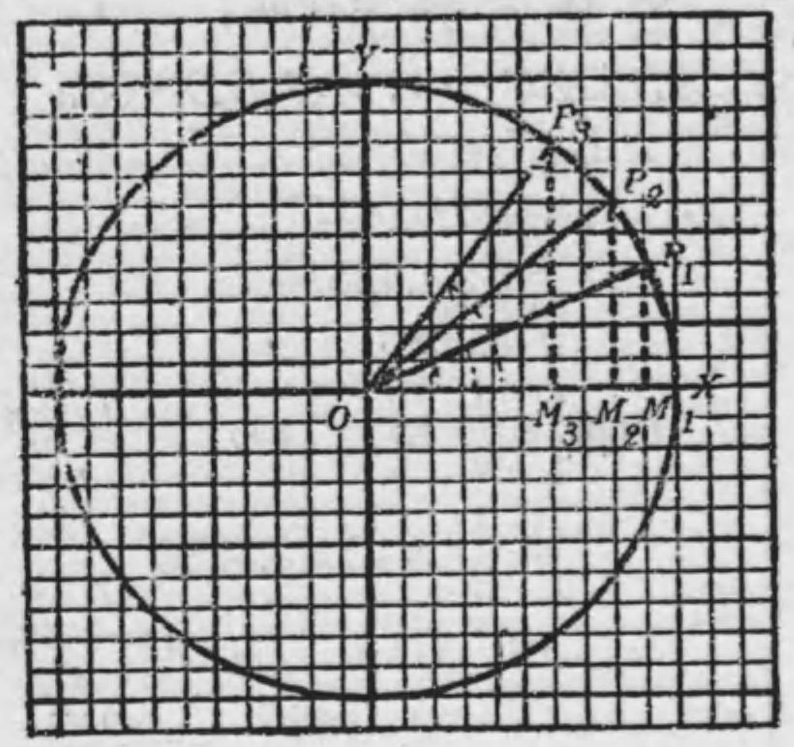
此ノ幾何學的表示ノ特徴トスル點ハ角ノ變化ニ應ジテ其ノ函數デアル三角函數ガ如何ニ變化スルカ, 其ノ變化ノ模様ヲ直觀シ得ル點ニアル.

故ニ之ヲ動的ニ示ス器具ヲ用ヒレバ最モ有効デアルシ, 又ヨシ器具ガナクトモ, OP ヲ白イ「テープ」カナドヲ O ニ「ピン」デ留メテ動カシ, 他ノ部分ヲ垂ラシテ PM トシ PM ノ變化ヲ動的ニ見サセルガヨイ.

從ッテ, 之ハ又「グラフ」ト併セ取扱フコトガ肝要デアル. 一般ノ三角函數曲線ハ三角法ニ讓ルガ, 少クトモ 0 カラ 90° マデノ「グラフ」ヲ示スガヨイ.

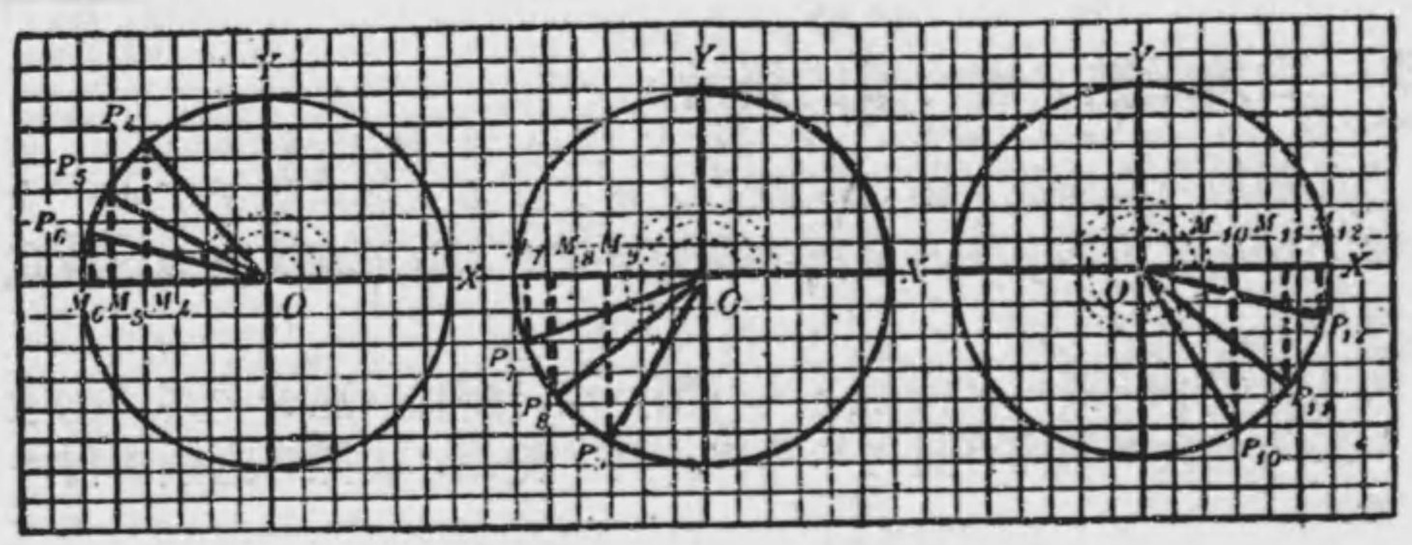
無限大ノ記號　∞ハ，比例ノ記號∝，相似形ノ記號∽，差ノ記號～ト完全ニ區別シテ使用セネバナラヌ．尙無限大ナル數ガアルノデナク，無限ニ大キクナルソノコトヲ∞ナル記號デ示シ，無限大ト呼ブト敎ヘルコトモ必要デアル．

一般角ノ正弦餘弦ノ變化　正弦曲線，餘弦曲線．



單位圓ニ於テハ $\sin x = PM$ デアルカラ，$\sin 0^\circ = 0$　x ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ增大スルトキハ $\sin x$ ハ之ニ從ツテ增大シ，$\sin 90^\circ = 1$ トナル．90° ヲ過ギルト，角ノ增大ニ從ツテ $\sin x$ ハ減少シ，$\sin 180^\circ = 0$

x ガ 180° カラ 270° マデ增大スルトキハ，$\sin x$ ハ常ニ負デ次第ニ減少シ，其ノ絕對値ハ 0

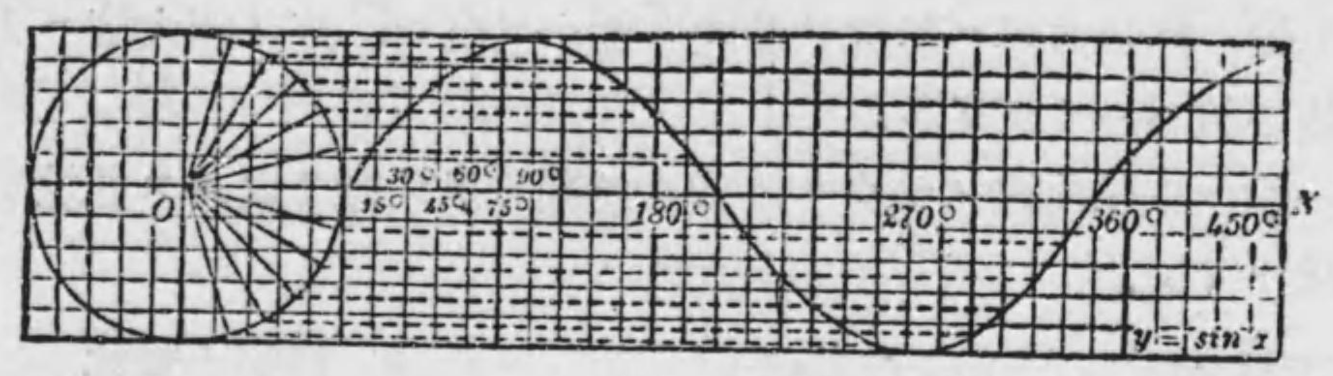


カラ 1 マデ進ミ　　$\sin 270^\circ = -1$

x ガ 270° カラ 360° マデ增大スルトキハ，$\sin x$ ハ -1 カラ 0 マデ增大シ，　$\sin 360^\circ = 0$

360° ヲ超エテ x ガ增大スルトキハ上ノ變化ヲ繰返スノミデアル．又 x ガ負ノトキハ 0° カラ -360° マデノ變化ニ對シ $\sin x$ ハ上ノ變化ヲ逆ニトツテ進ムコトハ明カデアル．

依ツテ次ノヤウナ「グラフ」ヲ得ル．之ヲ**正弦曲線** sine curve トイフ．



餘弦ノ變化

單位圓ニ於テ，$\cos x = OM$ (182頁ノ圖參照) デアルカラ $\cos 0^\circ = 1$

x ガ 0° カラ 90° マデ增大スレバ $\cos x$ ハ 1 カラ次第ニ減少シ

$$\cos 90^\circ = 0$$

トナル．x ガ 90° ヲ過ギルト，$\cos x$ ハ負トナリ，其ノ絕對値ハ 0 カラ 1 マデ進ム．カクテ　$\cos 180^\circ = -1$

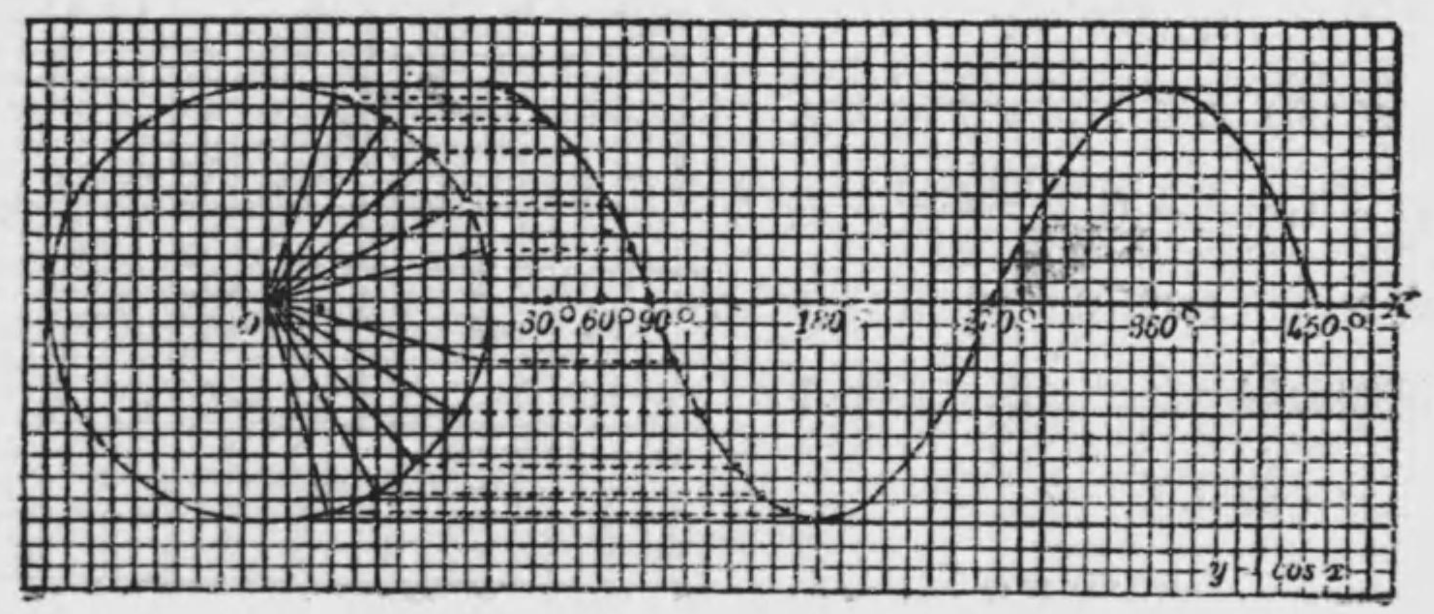
x ガ 180° カラ 270° マデ增大スレバ $\cos x$ ハ -1 カラ 0 マデ增大シ

$$\cos 270^\circ = 0$$

x ガ 270° カラ 360° マデ增大スレバ，$\cos x$ ハ 0 カラ 1 マデ增大シ

$$\cos 360^\circ = 1$$

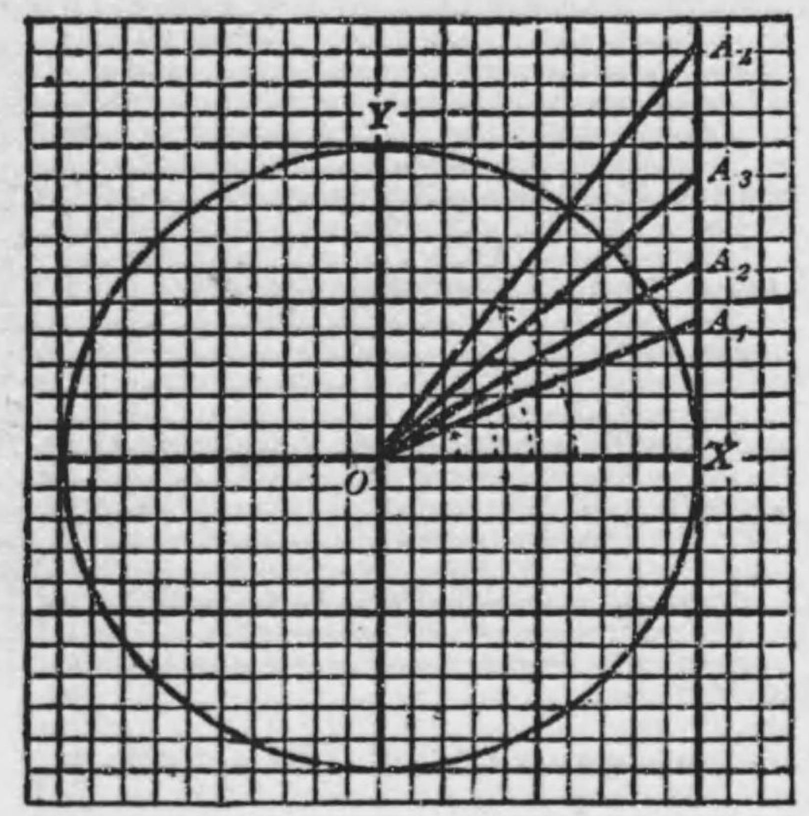
360° ヲ超エテ x ガ增大スレバ，上ノ變化ヲ繰返スノミデアル．又 x ガ負ノトキハ，0° カラ -360° マデノ變化ニ對シ，$\cos x$ ハ上ノ變化ヲ逆ノ順ニトツテ進ム．



餘弦ノ變化ヲ示ス曲線ヲ**餘弦曲線** cosine curve トイフ. 餘弦曲線ハ正弦曲線ト合同デアルケレドモ, 座標軸ニ對シテ位置ヲ異ニスル.

正弦, 餘弦曲線ハ無數ノ極大, 極小ヲ有シ, 其ノ極大値ハ 1, 其ノ極小値ハ −1 デアル.

一般ニ正弦曲線ノヤウニ, 或ル**週期**ヲ以テ繰リ返ヘス曲線ヲ**波狀曲線**トイフ.



正切, 餘切ノ變化

單位圓ニ切線ヲ引キ

$\tan x = XA$

デアルカラ

$\tan 0° = 0$

x ガ 0° カラ 90° マデ增大スルトキハ $\tan x$ ハ 0 カラ次第ニ增大シ, $\tan 90° = \infty$

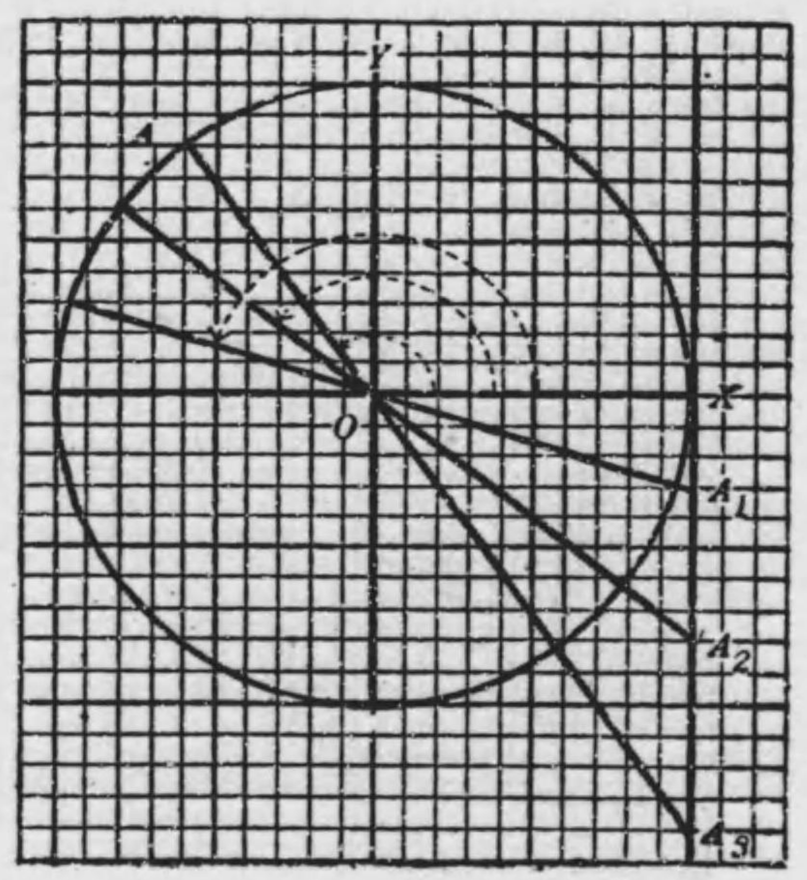
x ガ 90° ヲ過ギルト, $\tan x$ ハ俄ニ負トナリ, x ガ 180° マデ增大スレバ其ノ絕對値ハ∞カラ 0 マデ進ム.

$\tan 180° = 0$

x ガ 180° カラ 270° マデ增大スレバ $\tan x$ ハ 0 カラ∞マデ增大シ, $\tan 270° = \infty$

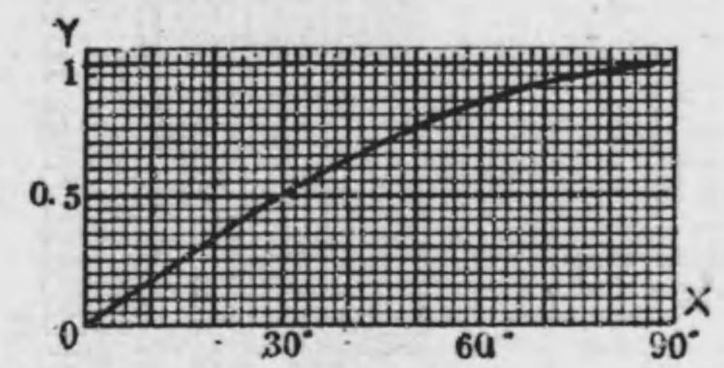
第四象限ニ於テハ第二象限ト同一ノ變化ヲナシ

$\tan 360° = 0°$

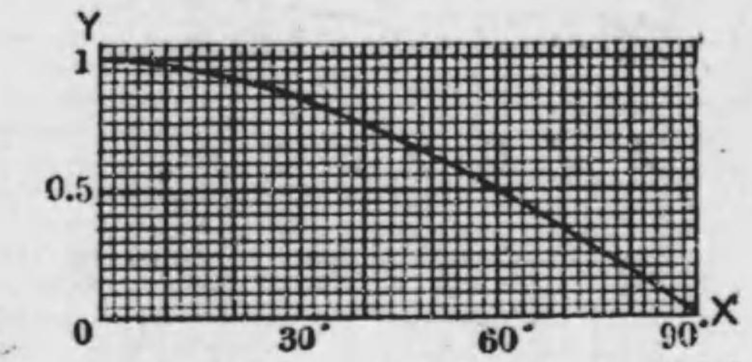


x ガ 0° カラ 90° マデ變化スルトキ, 之ニ伴ッテ正弦, 餘弦ノ變化スル模樣ヲグラフニ描ケバ次ノ通リニナル。

$y = \sin x$



$y = \cos x$



2. 正切

單位ノ長サヲ半徑トスル圓 O(前頁ノ圖)ニ切線 TA ヲ引クトキ,

$$\tan \angle POA = \frac{TA}{OA}$$

然ルニ　$OA = 1$　デアルカラ

$$\tan x = TA$$

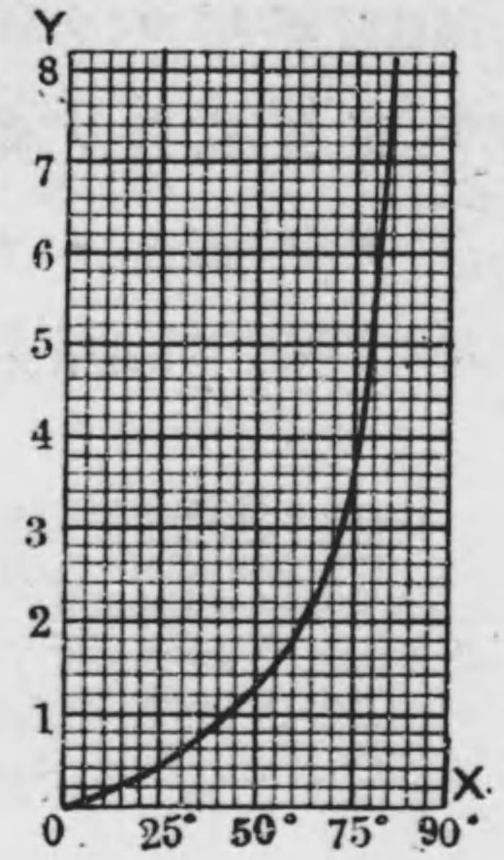
故ニ TA ノ長サヲ測レバ正切ノ近似値ヲ得ル。角 x ガ 0° ノトキハ, TO ハ首線 OA ニ重ナリ, 從ッテ　$TA = 0$　∴　$\tan 0° = 0$

x ガ次第ニ大トナレバ, TA ハ次第ニ大トナリ, x ガ 90° ニナレバ TA ノ長サハ無限ニ大トナル。　∴　$\tan 90° = \infty$

xガ0°カラ90°マデ變化スルトキ,之ニ伴ツテ正切ノ變化スル模樣ヲグラフニ描ケバ右ノ通リニナル。

之ハ　　$y=\tan x$

ノグラフデアル。



問　次頁ノ圖ニ依ツテ, $30^\circ, 50^\circ, 55^\circ$ノ正弦,餘弦,正切ノ値ヲ讀メ。

問　　題

15　$\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\cos x=\frac{3}{4}$

ヲ滿足スル角θ及ビxヲ作圖セヨ。

16　128頁ノ圖ニ於テ, $\cot x$ヲ表ハス線分ハドレカ。其ノ理由如何。

17　xガ0°カラ90°マデノ間ヲ變化スルトキ, $y=\cot x$ノグラフヲ描ケ。

(15)　$\tan\theta=\frac{1}{2}$

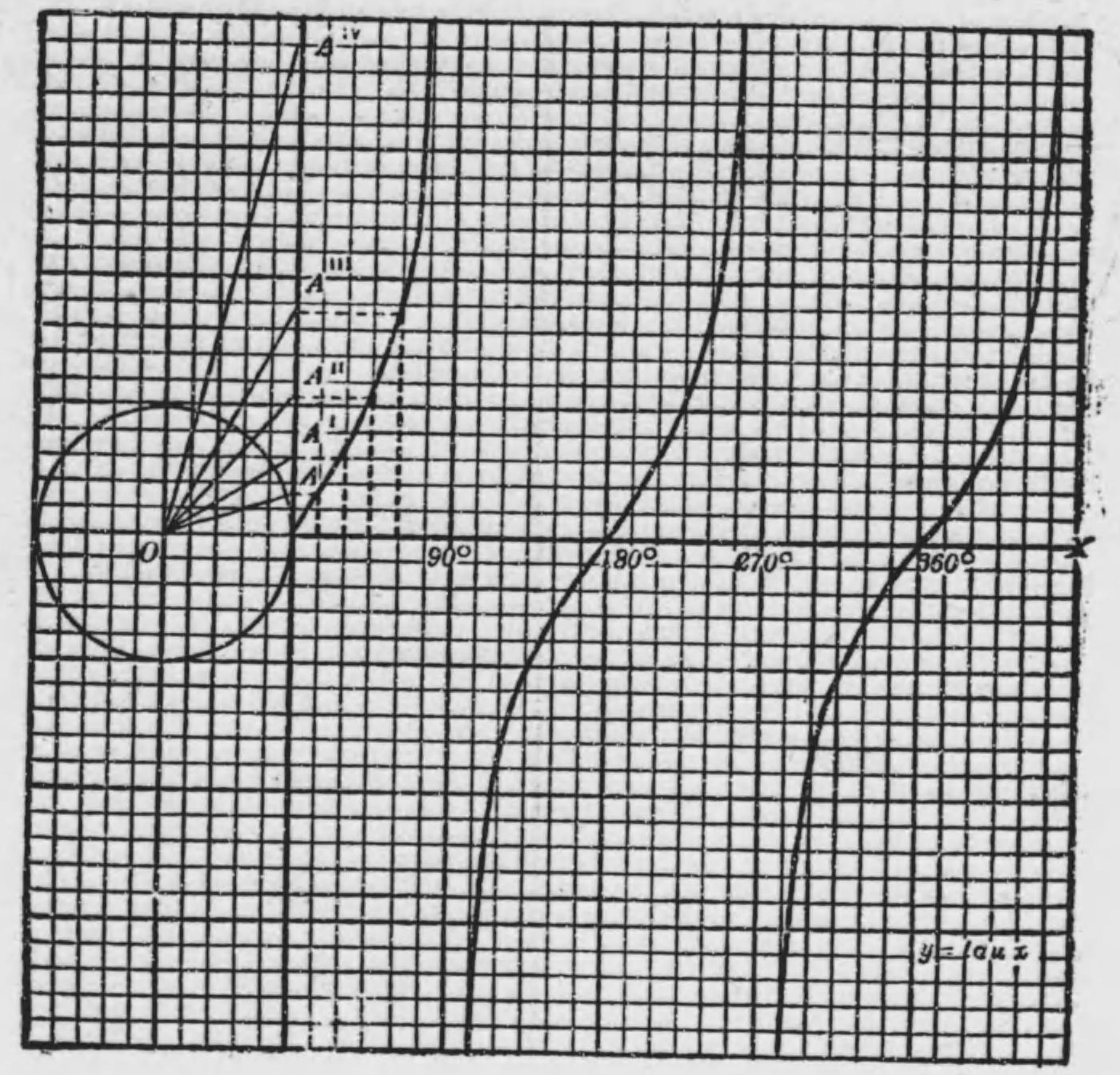
$\cot x=\frac{5}{4}$

ヲ滿足スル角θ及ビxヲ作圖セヨ。

(16)　182頁ノ圖ニ於テ, $\sec x$及ビ$\mathrm{cosec}\, x$ヲ表ハス線分ヲ示セ。

(17)　$y=\sin\theta$ト$y=\cos\theta$ノグラフノ關係ヲ明カニセヨ。又$\tan\theta$ト$\cot\theta$トノグラフハ如何。

正切ノ變化ヲ示ス曲線ヲ**正切曲線** tangent curve トイフ. 正切曲線ハ, 次ノヤウニ多クノ枝カラ成ル.



餘切曲線 cotangent curve ハ正切曲線ト逆合同デアル. 正切曲線, 餘切曲線ニハ極大, 極小ハナイ.

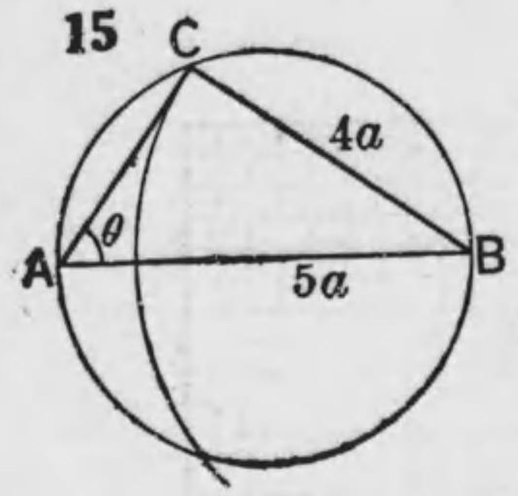
正切曲線ハ90°ノ線 ($x=90^\circ$) ヲ漸近線トスル.

問

角	sine	cosine	tangent
30°	0.5	0.86	0.58
50°	0.77	0.64	1.2
55°	0.82	0.57	1.4

問　　題

15

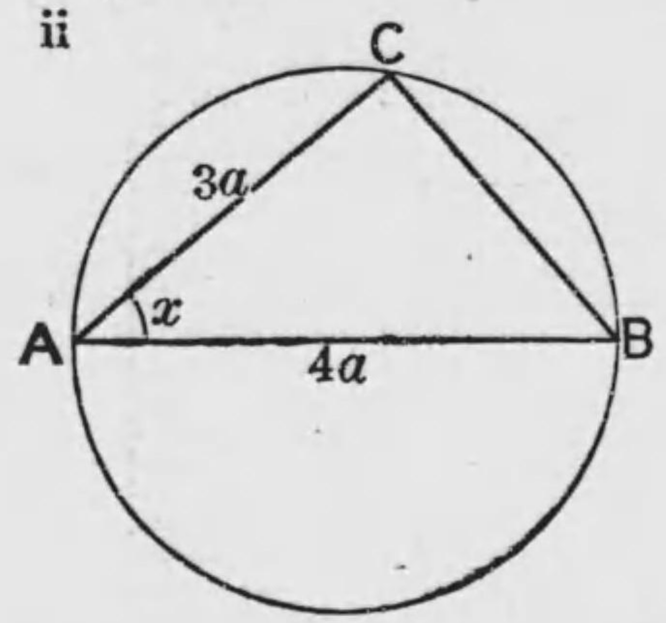


i　線分 $AB=5a$ トシ，AB ヲ直徑トスル圓ヲ B カラ $BC=4a$ デ切ル．

$\angle CAB$ ハ所要ノ角 θ デアル．

$$\sin\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$$

ii



線分　$AB=4a$　ヲ直徑トスル圓ヲ A カラ　$AC=3a$ デ切ル．

$\angle CAB$ ハ所要ノ角 x デアル．

$$\cos x=\frac{AC}{AB}=\frac{3a}{4a}=\frac{3}{4}$$

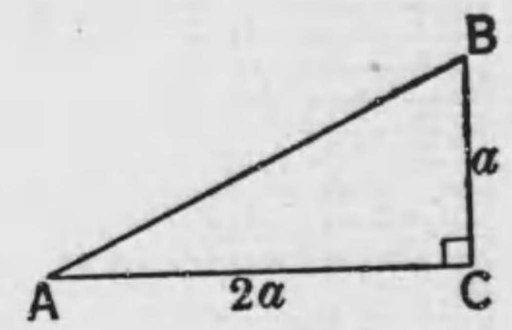
16　$\cot x=\cot\angle OSB$

$$=\frac{BS}{OB}=BS\ \ (CB=1)$$

即チ　$\cot x$ ノ表ハス線分 BS デアル．

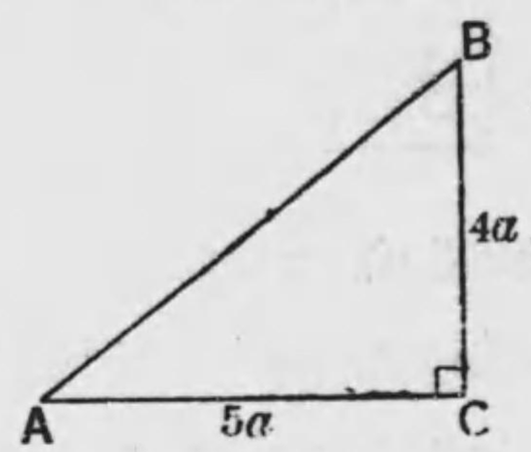
(15)　(i)　直角 ACB ヲ夾ム二邊ヲ $AC=2a$ $BC=a$ トシ，直角三角形 ABC ヲ作レバ $\angle A=\theta$

$$\tan\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$



(ii)　直角 ACB ヲ夾ム二邊
$AC=5a$,
$CB=4a$ トスレバ
$\angle BAC=x$

$$\cot x=\frac{AC}{BC}=\frac{5a}{4a}=\frac{5}{4}$$



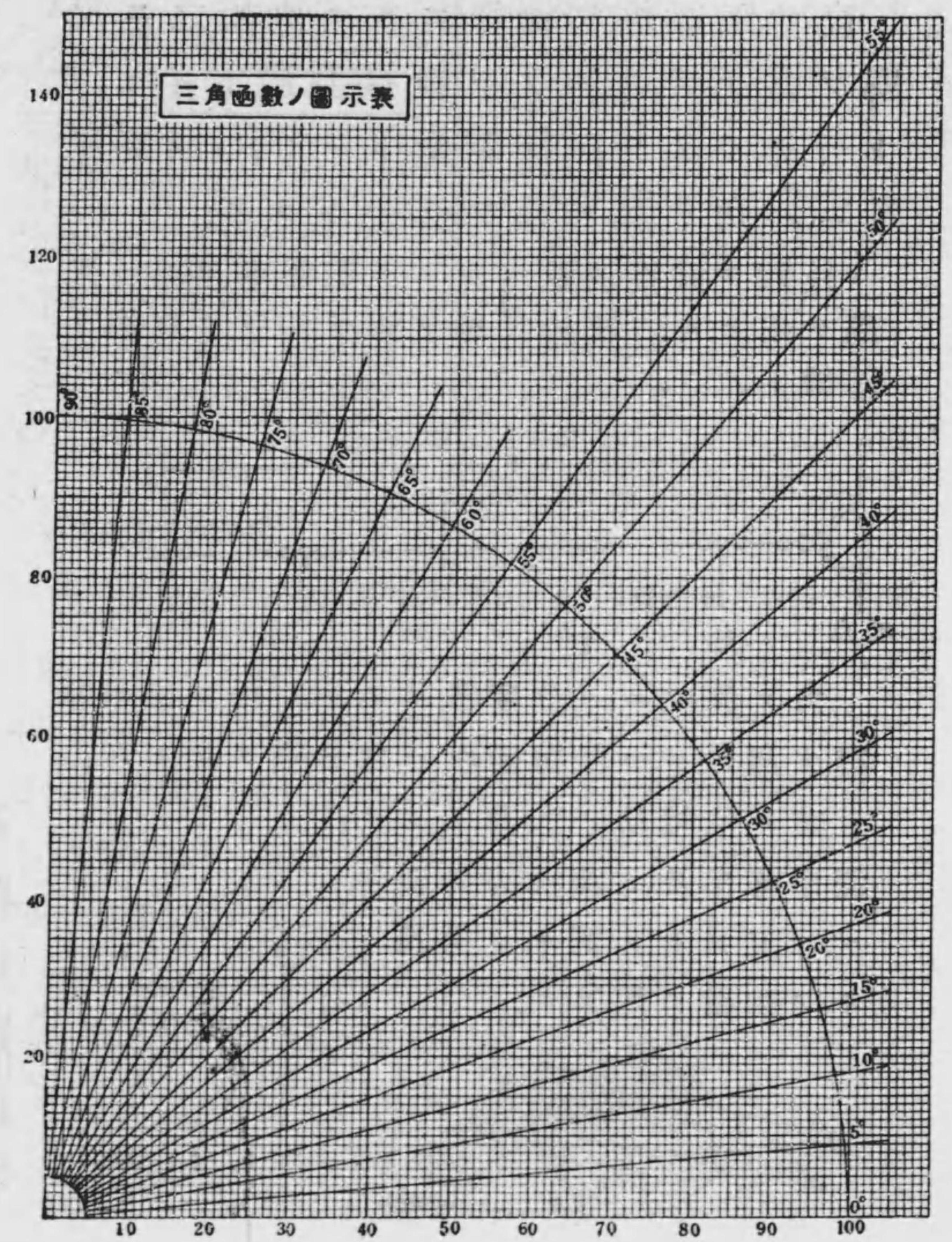
(16)　$\sec x=\dfrac{OT}{OA}=OT\ \ (OA=1)$

$\sec x$ ヲ表ハス線分ハ OT デアル．

$\operatorname{cosec}x=\operatorname{cosec}\angle OSB=\dfrac{OS}{OB}=OS$

即チ　$\operatorname{cosec}x$ ノ表ハス線分ハ OS デアル．

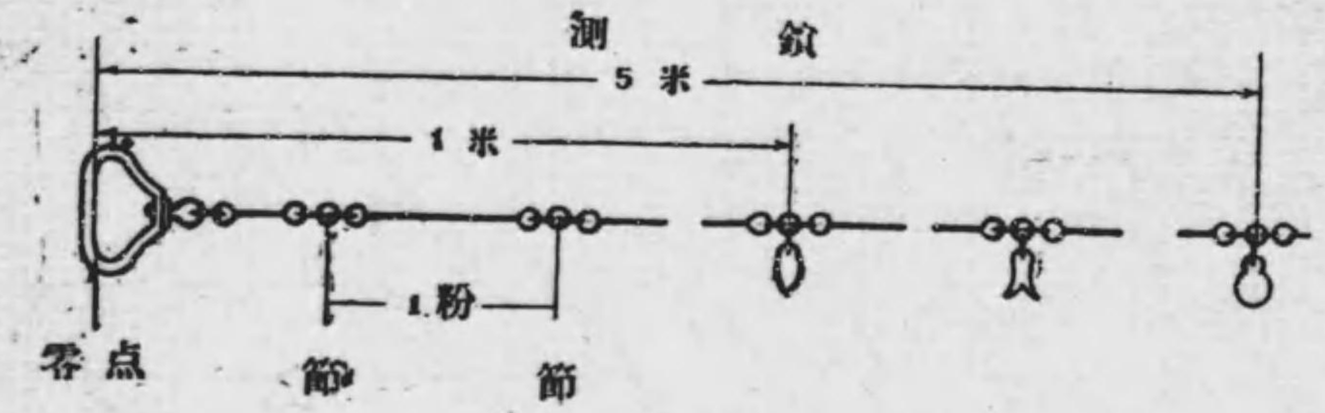
三角函數ノ圖示表



44. 測量問題

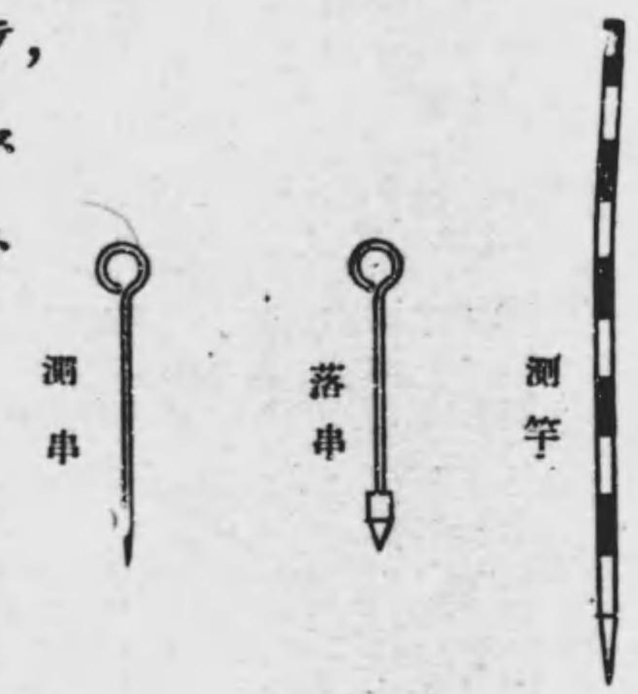
高サ,距離等ヲ測量スルニ,直接之ニ尺度ヲ當テテスルノヲ**直接測量**トイヒ,サウデナイノヲ**間接測量**トイフ。間接測量ニハ角ヲ測ル事ヲ必要トスル。

距離ヲ直接測量スルニハ**測鎖**,**巻尺**,或ハ**米縄**ヲ用ヒル。直接尺度ヲ以テ測ッタ直線ヲ**基線**トイフ。



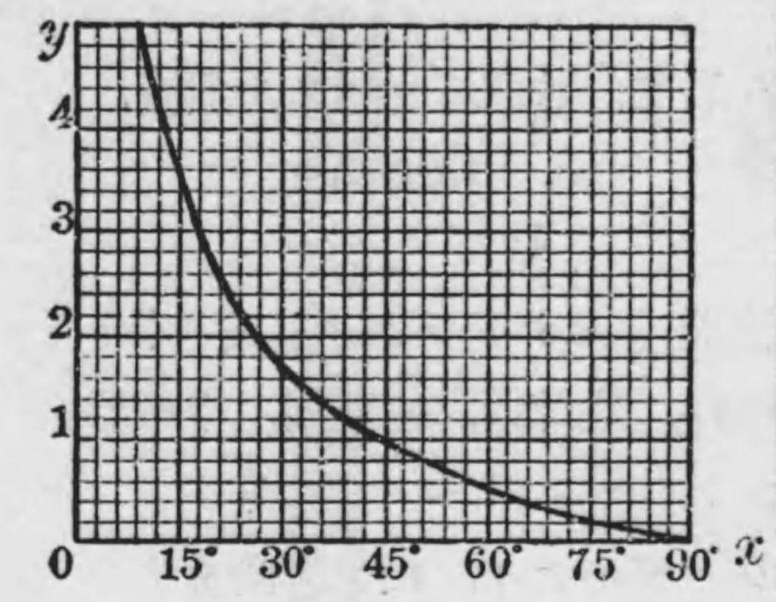
角ヲ測ルニハ**分度器**ガアル。併シ正確精密ナ測角ニハ**經緯儀**或ハ**六分儀**ヲ用ヒル。

其ノ他補助ノ道具トシテ,測串(セン),落串(セン)及ビ測桿(カン)等ヲ要スル。又高サヲ測ルニ**標尺**トイフ物指モ用ヒル。



17 $y=\cot x$

x	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
y	∞	3.73	1.73	1	0.58	0.27	0



(17) $y=\sin\theta$ ト $y=\cos\theta$ トハ合同ナ曲線デアル. 唯座標軸ニ對スル位置ヲ異ニスルノミ, 0° カラ 90° マデナラバ裏返ヘシテ重ネレバ重ナル. 一般ニ

$$y=\sin\theta$$

ノ y 軸ヲ 90° ダケ平行移動サセ, $x=90°$ ノ線ヲ y 軸トスレバ

$$y=\cos\theta$$

ノ「グラフ」トナル.

$y=\tan\theta$ ト $y=\cot\theta$ トモ亦同様デ合同デアツテ $x=45°$ ノ直線ヲ軸トシテ裏返ヘスト重ナル.

三角函數ノ圖示表

之ハ三角函數ノ「グラフ」ノ意味デハナイ. 三角函數ノ數値ヲ圖的ナ表ニ示シタモノデ, 桁數ノ多クヲ要求スルコトハ出來ナイケレド, 本節ニ述ベタ三角函數ノ幾何學的表示ノ理論ヲ應用シテ一目ノ下ニ直チニソノ數値ガ求メラレル. 勿論ココニ示スハ見本ニ過ギナイカラ, 生徒ニハ少シク大キナ方眼紙ヲ用ヒテ作ラセルガヨイ.

44. 測量問題

測量ノ種類ニハ見方ニヨツテ種々アル. 大別スレバ

- 平面測量‥‥地球表面ノ比較的小部分ヲ取扱ヒ, 之ヲ平面トシテ行フ. ‥‥‥平面三角法ノ應用.
- 大地測量‥‥地球表面ノ相當大ナル部分ヲ取扱ヒ, 之ヲ平面トシテハ考ヘラレナイ. ‥‥球面三角法ノ應用.

又目的＝ツテ分析スレバ

1. 陸地測量

平面測量，地況測量．高低測量，三角測量、曲線測量，土坪計算法等ガ之＝屬スル.

2. 河川測量

河川，港灣，潮流，水量，岩礁，砂洲等＝關スル測量.

3. 市街測量　　4. 礦山測量　　5. 鐵道測量

要スル機械トシテハ

測鎖，卷尺，米繩（間縮，碼繩），經緯儀（「セオドライト」或ハ「トランシツト」）六分儀，直角器．水準器，羅針儀，傾斜儀，平板器，標尺（函尺トモイフ），測桿（梵天，「ポール」トモイフ）等々

尤モ此等ヲ同時＝全部要スルルトイワノデハナイ．長サノ測量ナラバ結局186頁＝擧ゲタヤウナモノデ充分デアル.

測鎖　勿論長サヲ測ル尺度デアル．端＝右ノ圖ノヤウナ部分ガアツテ，此ノ環ノ內側ガ0ノ點デアル．キザミガアルノハ測串ヲココヲ通シテ地面＝立テル爲デアル.

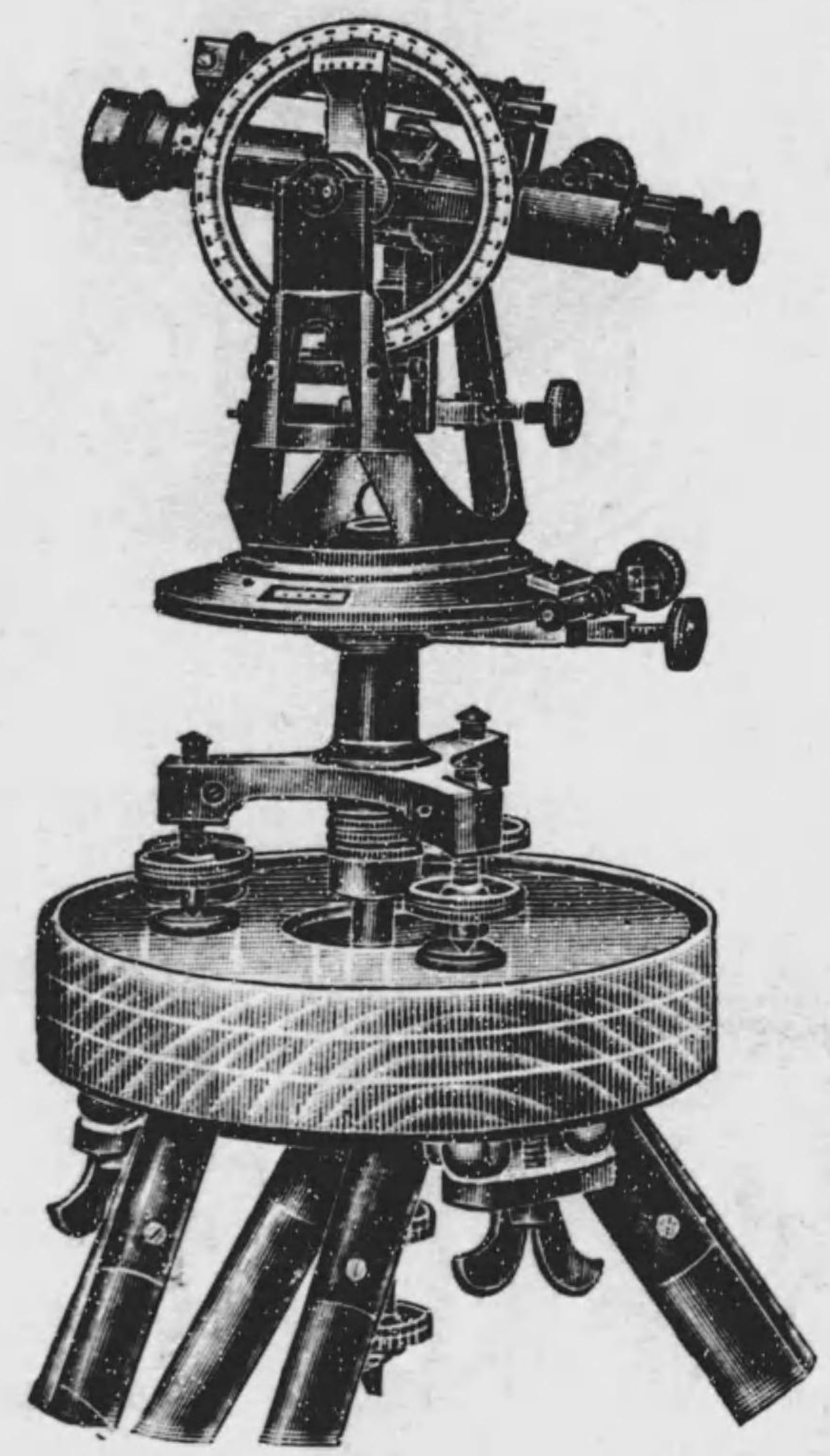
1米毎＝（或ハ1間毎＝）眞鍮ノ札ガツイテヰテ，之＝キザミガアリ，山ノ一ツアルハ1米，二ツアルハ2米トイフヤウ＝ヨクワカルヤウ＝ナツテヰル.（186頁ノ圖參照）

測竿ハ測點＝立テ，遠方カラ望ンデヨク他ノモノト區別ノ出來ルヤウ＝赤白＝染メ分ケテアル．標杆トモイフ.

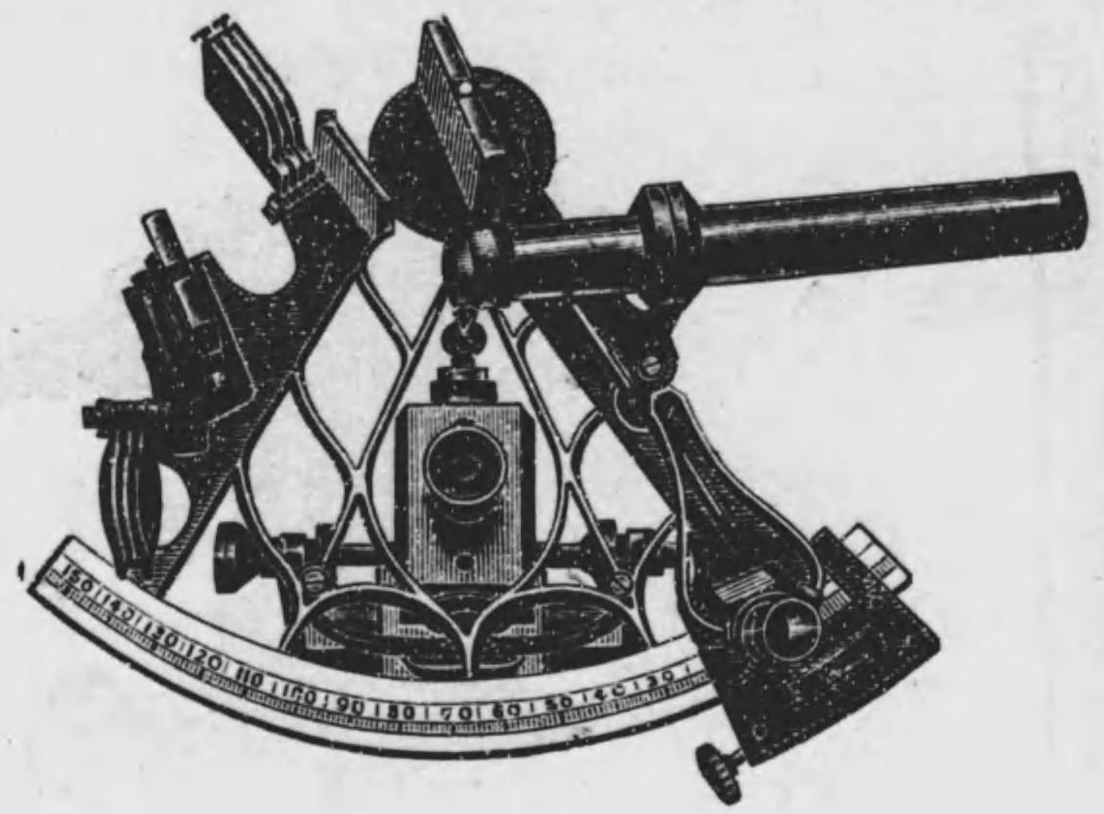
落串ハ下方＝重イ部分ガアツテ，落シテ其ノ眞下ノ地點ヲ定メル＝便デアル.

標尺　拔キ差ノ出來ル函＝ナツテヰル尺度デ，鉛直＝立テテ測ルノ＝便利デアリ，又望遠鏡デ望ンデヨクワカルヤウ＝最小目盛ハ一ツオキ＝染メ分ケテアル.

標尺　　經緯儀



六分儀



地上ノ測角ニハ經緯儀ヲ用ヒル。天文臺等ニ設備サレテ天體測量用ニ供セラレルモノハ極メテ精巧ナ經緯儀デアル。經緯儀ハ水平面内及ビ垂直面内ノ角ノミヲ測リ得ル。船舶ノ甲板上ニ於ケル觀測ニハ六分儀ガ便宜デアル。之ハ取扱ガ簡便デ,任意ノ平面内ノ角ヲ測ルコトガ出來ル。併シ其ノ精確サハ經緯儀ニ劣ルヲ常トスル。

經偉儀 Theodolite (又ハ Transit トイフ) 正シクハ「セオドライト」トイフベキデ, 天文臺ニ備付ケラレタ大キナ精巧ナモノヲ「トランシツト」トイフベキデアルガ, 測量家ハ「トランシツト」ト呼ブコトガ多イ. 構造ハ複雑デ, 生徒用ニハ簡易ナモノヲ作業科アタリデ作製シテ使用サセルガヨイ. (189)頁ヲ參照. 要スルニ水平ニオカレタ分度器, 鉛直ニ置カレ分度器 (之ヲ分度圈トイフ. 全圓周アル), 望遠鏡, 水準器, 振下, 三脚カラ成ル.

經緯儀ハ水平面内ノ角ト鉛直面内ノ角トノミ測ルコトガ出來ル. 測角機トシテハ最モ精巧ナモノデ, 測量用ニ携帶スル粗末ナモノデモ副尺ニ依ツテ分ノ小數第一位マデ讀ミトルコトガ出來ル.

六分儀 (Sextant) 構造ハ經緯儀ヨリ簡單デアルガ, 使用法ヤ測角ノ理論ヲイフコトハ一層困難デアル. 左手ニ持ツテ, 右手デ調節シナガラ使用シ得ルノデ, 任意ノ二觀測點ノ目ニ張ル角ヲ測ルコトガ出來ル. 之ガ六分儀ト稱セラレルノハ, ソノ目盛ハ全圓周ノ$\frac{1}{6}$ナル60°ノ弧カラ成ルノデ, 測角ハソノ2倍ノ120°マデ測ルコトガ出來ル. 昔ハ四分儀, 八分儀等トイフモノモアツタ.

圖ニ於テ右ニ見エルハ望遠鏡デアツテ, 左ニハ光線ノ度ヲ加減スル「ガラス」ガ數枚見エル (例ヘバ太陽ヲ觀測スルトキニハ色ノ濃イ「ガラス」ヲ多ク重ネテ, 之ヲ通過スル光線ニヨル等) 要部ハ鏡ガ(中央ニ見エル) アツテ之ニ光線ガ反射サレテ望遠鏡ニ入リ來ル, 之ト實物トヲ重ネテ見ルヤウニシテ下ノ目盛ヲ讀ムノデアル. 勿論目盛ニハ副尺モアリ, 又之ヲ擴大シテ讀ム爲ノ「レンズ」ガアルコトハ經緯儀同樣デアル.

六分儀ハ船中デモ測リ得ルシ, 又任意ノ平面内ノ角ヲ測リ得ル長所ハアルガ精密サハ經緯儀ニ及バナイ.

其ノ他水準器ハ測量ニ必要デアル. 又平板測量ガ手輕ニ且ツ有効デアルコトハ既ニ述ベタ通リデアル.

簡易經緯儀ニヨル生徒ノ實測

1. **鉛直線** 錘ヲ絲デ吊ルシテブラ下ゲ其ノ方向ヲ定メル.
2. **鉛直面** 鉛直線ヲ含ム平面ヲ作レバヨイ.
3. **水平線** 本來ハ靜カナ池ノ面ノヤウナ平面上ノ直線ヲイフノデアルガ, 測量上ハ鉛直線ニ垂直ニ作レバヨイ.
4. **水平面** 鉛直線ニ垂直ナ平面ヲ作レバヨイ.
5. **距　角** 二點ノ距リヲ長サデイヘバ所謂**距離**デアル. 之ニ對シテ角デイフトキ距角トイフノデアル. 之ト同樣ニ高サヲ線分ノ長サデ云ハナイデ, 仰角ヲ以テイフトキ**高度**トイフ. 即チ高サヲ角デイフノデアル.

挿繪 之ハ十七世紀ノ著書レオナード・ツブラーノ書ニ見エルモノデアル. Leonhard Zubler's work on geometric instruments, Zurich, 1607.

測量ニ關スル重ナ術語ヲ次ニ述ベヨウ.

1. 鉛直線 地球ノ中心ニ向フ直線(重力ノ方向ト一致スル直線)ヲイフ.

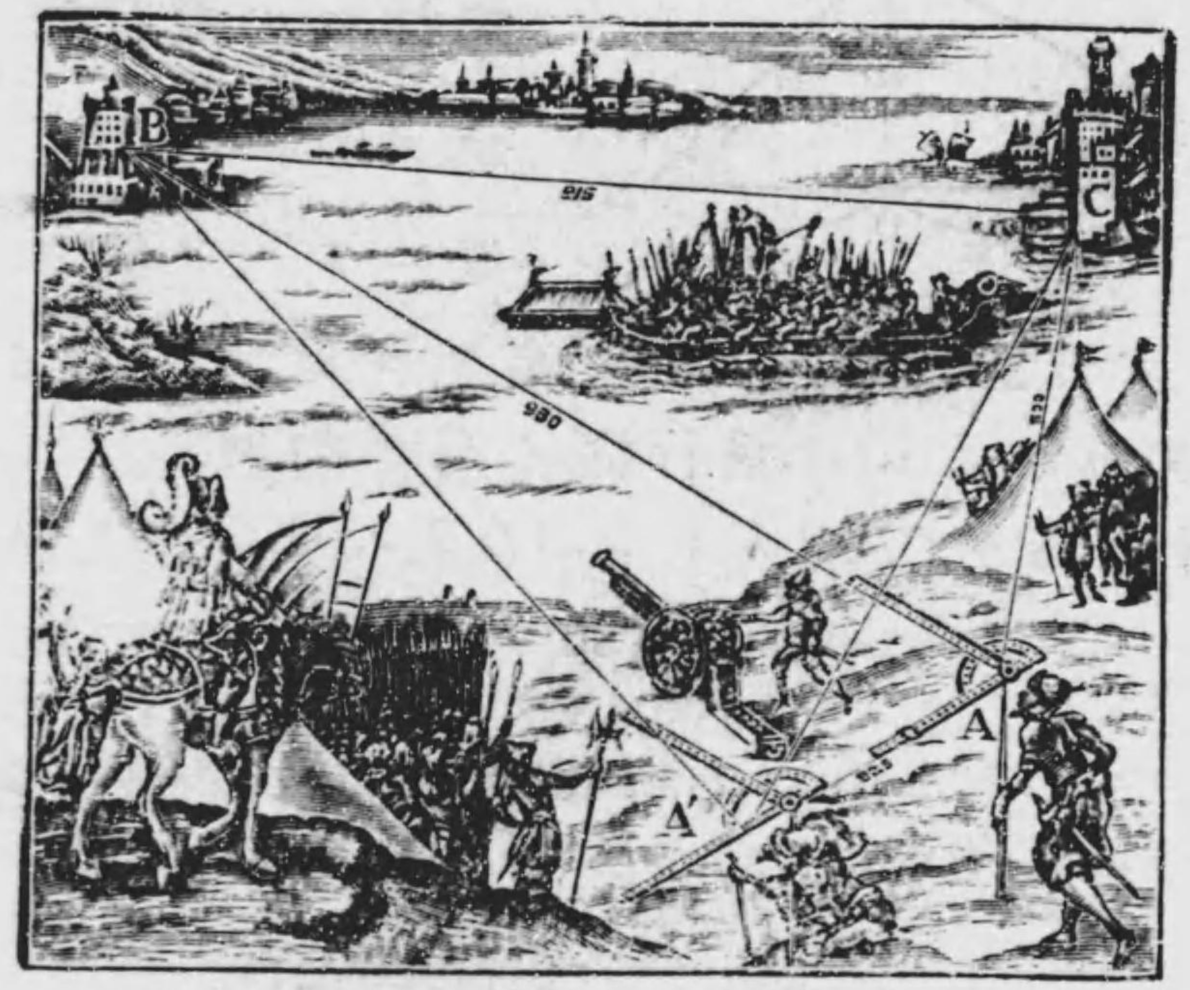
2. 鉛直面 鉛直線ヲ含ム平面ヲイフ.

3. 水平線 鉛直線ニ垂直ナ直線ヲイフ.

4. 水平面 鉛直線ニ垂直ナ平面ヲイフ.

5. 距　角 測點ト他ノ二點ノ各トヲ連ネタ二直線ガ測點ニ張ル角ヲ後ノ二點ノ距角トイフ.

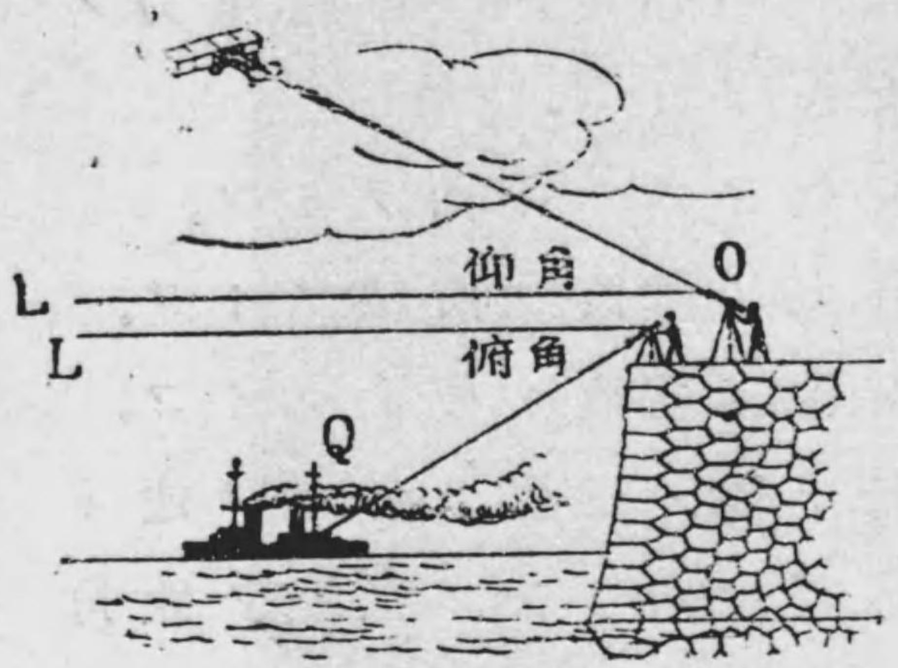
圖ニ於テ, B, C ノ距角ハ A ニ於テハ $\angle BAC$, A' ニ於テハ $\angle BA'C$ デアル.



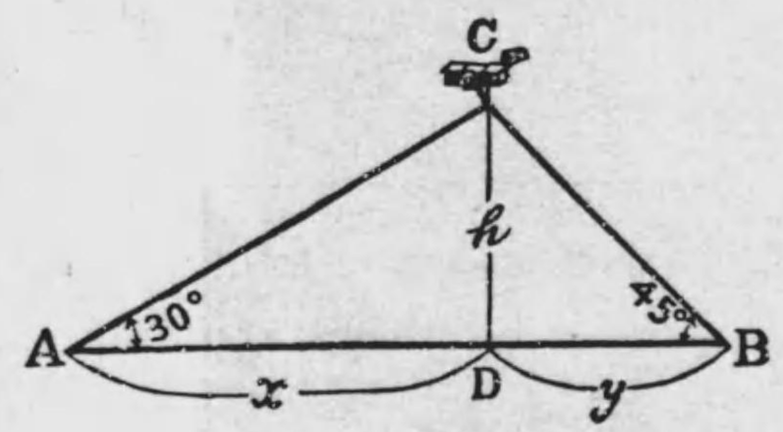
中世紀ニ於テ戰爭ニ數學ノ用ヒラレル圖

〔測角器ノ原始的デアルノヲ見ヨ〕

6.　仰角,俯角　一點P(又ハQ)ト測點Oトヲ結ブ線ガ,水平面ヨリ上方ニアルトキハ,此ノ直線ト水平面トノナス角ヲ仰角トイヒ,下ニアルトキハ俯角トイフ.



例　同一水平面上ニアルA,B兩地間ヲ飛行スル飛行機ガ線分ABノ眞上Cノ位置ニアルヲ觀タノニ,Aデハ30°,Bデハ45°ノ高サニ見エタ.　ABヲ500mトスレバ,飛行機ノ高サ如何.



解　高サCDヲhトシ,ADヲx,BDヲyトスレバ,

$$\frac{h}{x}=\tan A=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad \therefore\ x=h\sqrt{3}$$

$$\frac{h}{y}=\tan B=\tan 45^\circ=1\qquad \therefore\ y=h$$

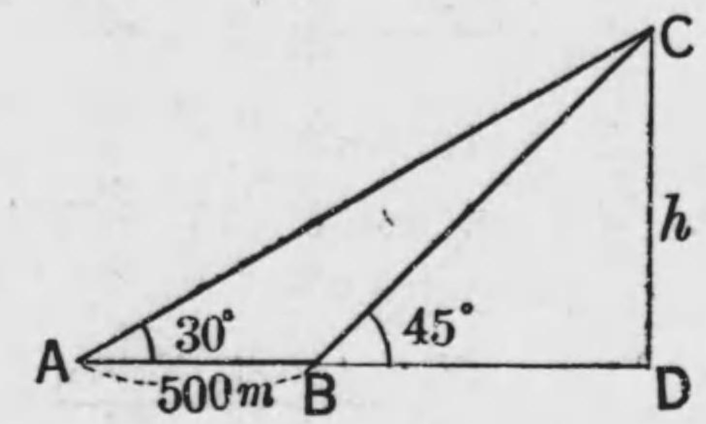
$$x+y=500=h\sqrt{3}+h$$

$$h=\frac{500}{\sqrt{3}+1}=250(\sqrt{3}-1)$$

$$=250\times 0.7321=183.025\qquad \text{答}\ \ \underline{\text{約}\ 183m}$$

6.　仰角,俯角　總ベテ水平線カラ見テイフコトヲ徹底サセルガヨイ.　サウデナイト,時々生徒ハ俯角ヲ鉛直線トナス角（即チ俯角ノ餘角）ヲ誤ツテ俯角トイフコトガアル.　此ノ爲ニハ此ノ挿繪ハ大イニ役立ツモノデアルト信ズル.

例　唯飛行機ヲAB線上ニ眺メテ$\angle A=30^\circ,$　$\angle B=45^\circ$トイフトキニハ左ノ例題ノヤウナ場合ノ外ニ尙次ノヤウナ場合ガアツテ二ツノ解答ヲナスベキデアル.　ソコデココニハA,B兩地間ヲ飛行スルト制限シテアルノデアル.　因ニCガABノ延長上ノ上方ニアル場合ハ191頁ノ問題(19)ト同一デアル.



此ノトキハ

$$AD=\frac{h}{\tan A}$$

$$BD=\frac{h}{\tan\angle CBD}$$

$$AD-BD=h\left(\frac{1}{\tan A}-\frac{h}{\tan\angle CBD}\right)$$

$$500=h\left(\frac{1}{\tan 30^\circ}-\frac{1}{\tan 45}\right)$$

$$500=h(\sqrt{3}-1)$$

$$h=\frac{500}{\sqrt{3}-1}=250(\sqrt{3}+1)=\underline{683m}$$

上ノ解デモ,又左ノ解デモ分母ニ$\sqrt{3}+1$ヤ$\sqrt{3}-1$ヲ有スルトキノ**分母ノ有理化**ハマダ學習シテヰナイカラ改メテ教授スルカ,然ラズンバ$1.732+1=2.732$トシテ之デ250ヲ割ル實際ノ計算ヲサセルガヨイ.

$$\frac{500}{\sqrt{3}+1}=\frac{500(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{500(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\frac{500(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$=250(\sqrt{3}-1)$$

問題

18 $BC=AC\tan 30^\circ$

$CD=AC\tan 60^\circ$

故ニ

$$\frac{BC}{CD}=\frac{AC\tan 30^\circ}{AC\tan 60^\circ}=\frac{\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

即チ $CD=3BC$

故ニ $BD=2BC$

19 $CD\perp AB$ デアルカラ

$BD=CD\cot 20^\circ$

$AD=CD\cot 53^\circ$

$BD+AD=CD(\cot 20^\circ+\cot 53^\circ)$

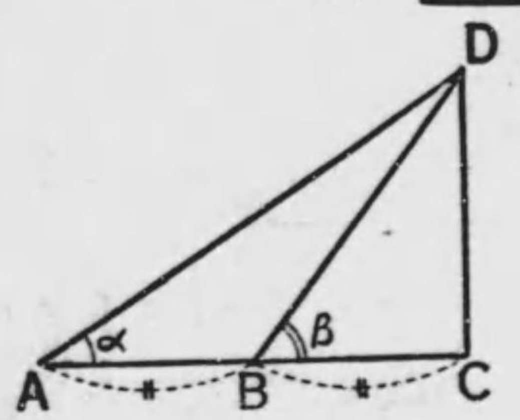
$5=CD(2.7475+0.7536)$

$=CD\times 3.5011$

故ニ $CD=\dfrac{5}{3.5011}=1.428$

答 1.428浬

20

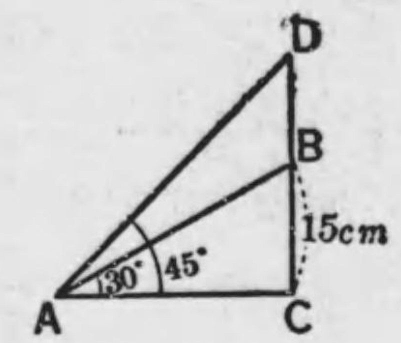


Dヲ塔ノ尖端トスル.

$\tan\alpha=\dfrac{DC}{AC}$ $AC=2BC$ ナル故 $\tan\alpha=\dfrac{DC}{2BC}$ $2\tan\alpha=\dfrac{DC}{BC}$

$\tan\beta=\dfrac{DC}{BC}$ $\therefore$ $2\tan\alpha=\tan\beta$

(18)



$BC=AC\tan 30^\circ$

$\therefore$ $AC=BC\cot 30^\circ=15\times 1.7321$

$=25.9815$

答 ACノ距離26m

$DC=AC\tan 45^\circ=AC=26$

$BC=CD-CB=26-15=11$

答 旗竿ノ長サ 11m

(19) A,Bヲ目ノ位置トスルト

$AC=CD\cot 20^\circ$

$BC=CD\cot 56^\circ$

$AC-BC=CD(2.7475-0.6745)$

$CD=\dfrac{30}{2.073}=14.47$

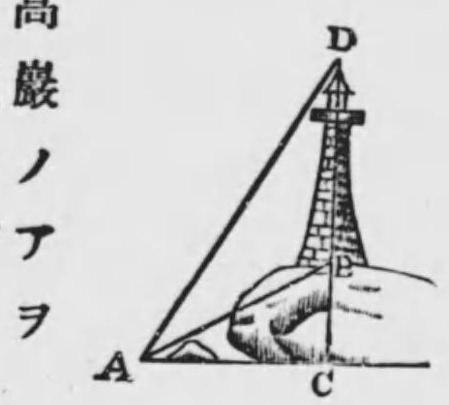
依ツテ木ノ高サハ, 之ニ目ノ高サヲ加ヘテ

$14.47m+1.5m=15.97m$

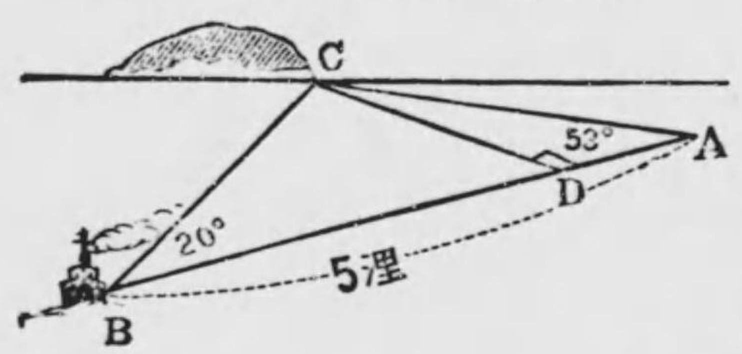
答 15.97m

問題

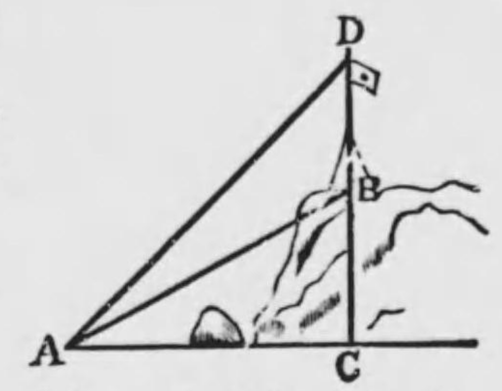
18 巨巖BC上ニBDナル燈臺ガアル。點AデB,Dノ仰角ヲ測ツタノニ夫々30°,60°デアツタ。燈臺ノ高サハ巨巖ノ高サノ2倍デアルコトヲ證セヨ。



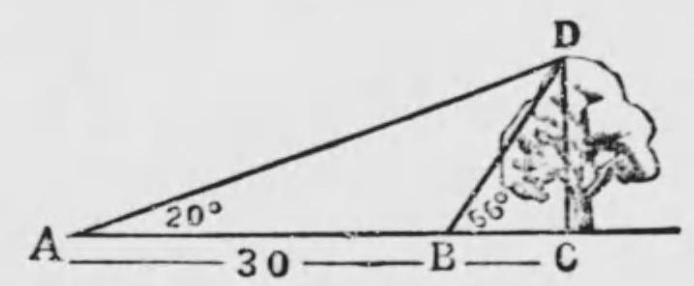
19 或ル汽船ガ海上ノ一點Aデ或ル島ヲ見タノニ,ソノ進ム方向ト53°ノ角ヲナシテヰタ。今5浬直進シテカラ同島ヲ見タノニ,進ンデ來タ方向ト20°ノ角ヲナシタ。島ニ最モ近カツタトキノ距離CD如何。



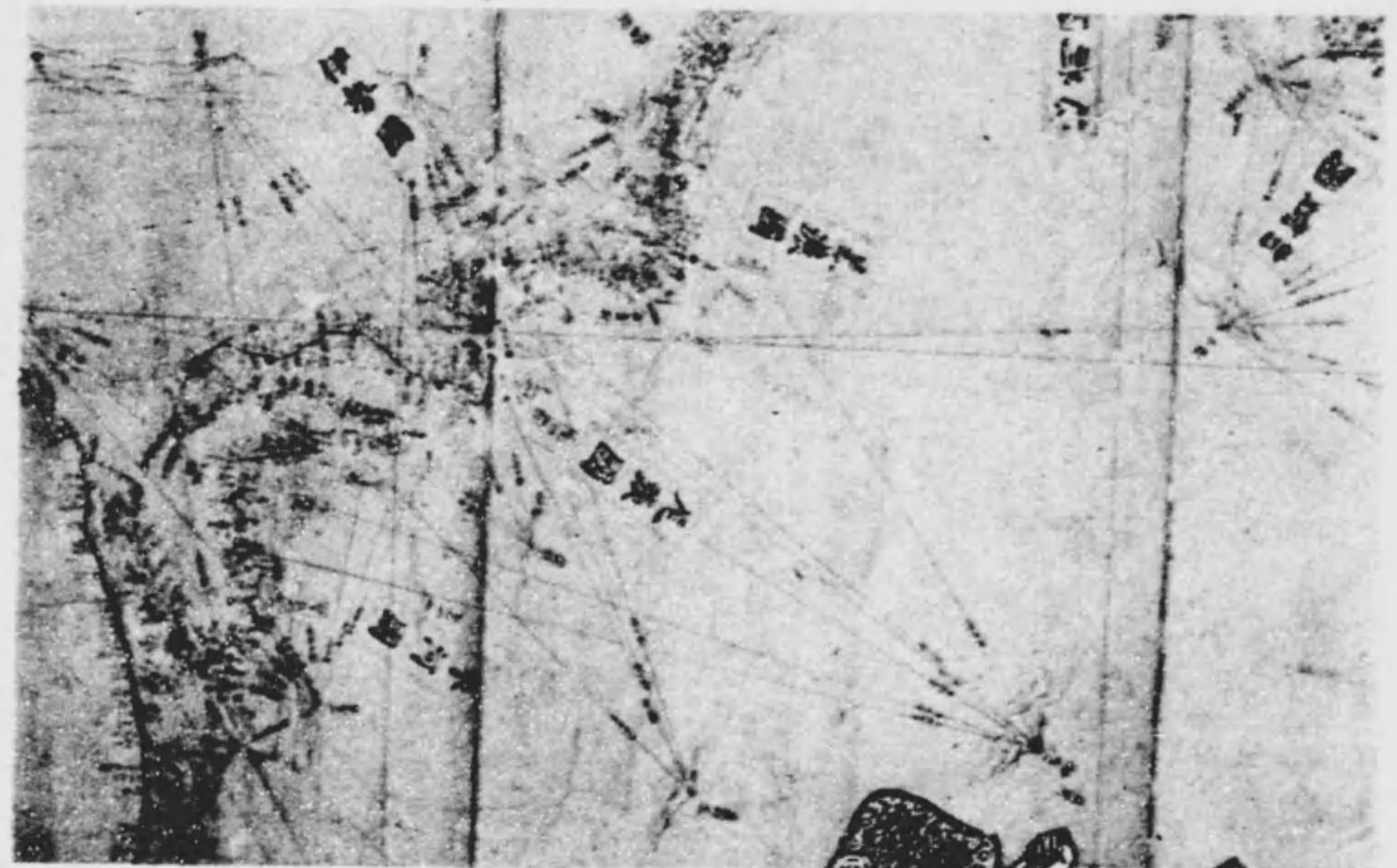
(18) 崖BC上ニBDナル旗竿ガ立ツテヰル。地點AデB及ビDノ仰角ヲ測ツタノニ夫々30°,45°ヲ得タ。BCヲ15mトスレバACノ距離ト旗竿ノ長サ如何。



(19) 30m隔タツタA,B二地點ニABト一直線上ノ點Cニ立ツテヰル立木ノ頂上ノ仰角ヲ測ツタノニ夫々20°,56°ヲ得タ。木ノ高サ如何。但シ眼ノ高サヲ1.5mトスル。

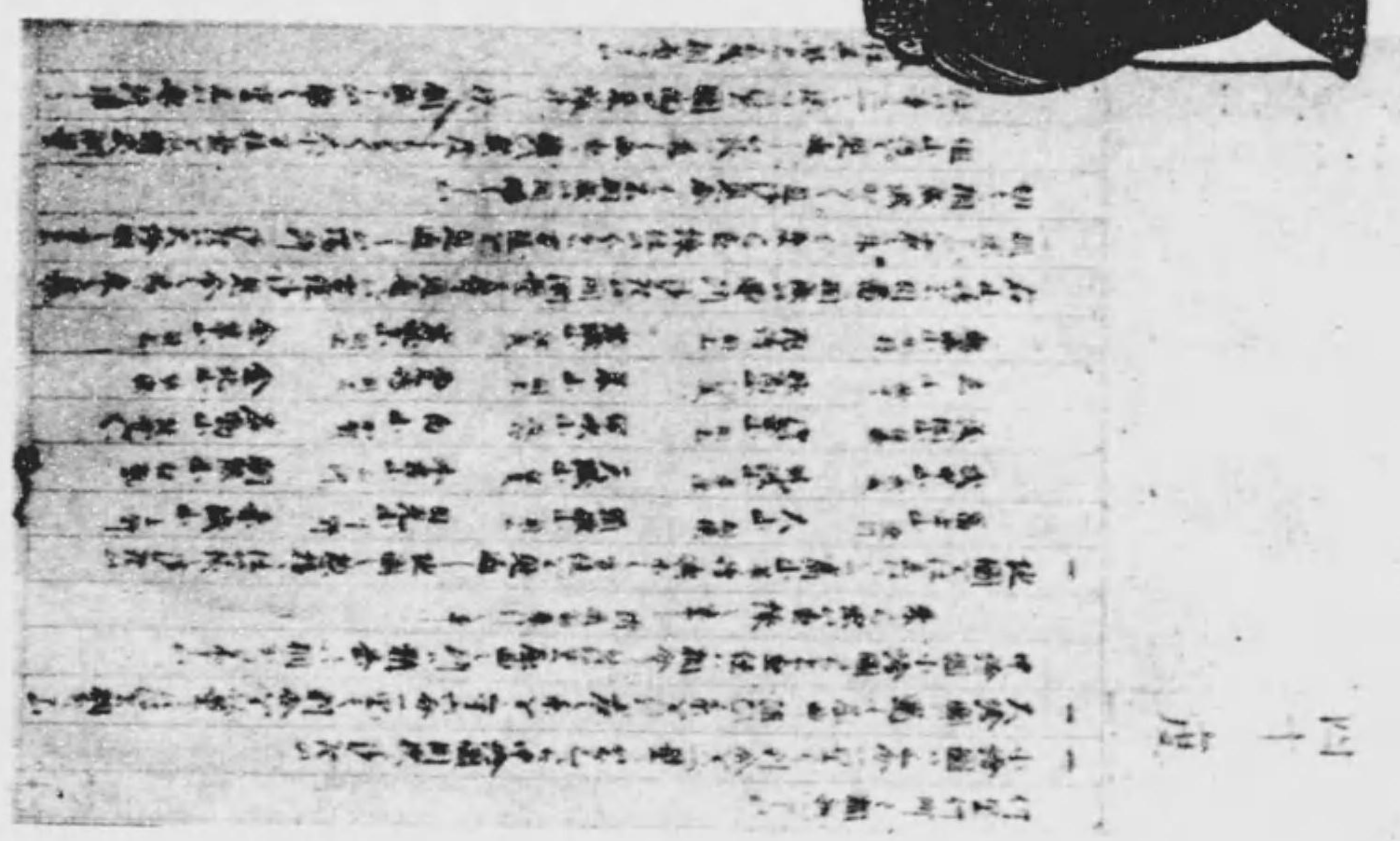


20 二點A,Bハ塔ノ基底Cヲ過ル水平線上ニ在ル。A,Bニ於ケル塔ノ仰角ガ夫々α,βデアツテ,$AB=BC$ナラバ,$\tan\beta=2\tan\alpha$デアルコトヲ證セヨ。



伊能忠敬トソノ實測ニナル沿海地圖

伊能忠敬(二四〇五—二四八一)ハ寛政十二年，將軍家齊ノ命ヲ受ケテ蝦夷地ヲ測量シタ有名ナ測量家デアル。



伊能忠敬 (2405—2481，即チ西暦1745—1821) 我ガ國デ最初ニ沿海實測地圖ヲ作製シタ人トシテ，永久ニ我ガ現學界ニ名ヲ殘ス人デアル．18歳ノトキ下總佐原町ノ豪家伊能家ニ入婿トナル．伊能家ハ當時家業頗ル振ハズ衰微シテキタガ忠敬ノ努力ニヨリ復興シ，名主トナル．公益ニ盡シ，幕府カラ苗字帶刀ヲ許サレタ．

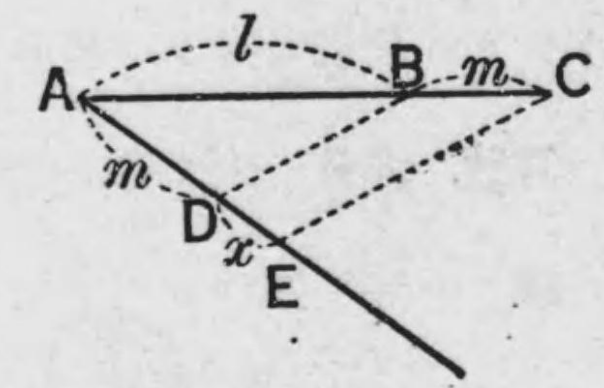
算數，測量，天文等ノ研究ヲ續ケ，50歳ニナツテ家督ヲ長男景敬ニ讓リ，翌年江戸ニ出テ居ヲ構へ，曆法改正ノ爲ニ大阪カラ上京シタ曆學ノ大家高橋至時 (1765—1804) ニ從ツテ曆學，天文ヲ研究シタ．當時歐洲諸國ガシキリニ力ヲ東洋ニ伸バシ，ロシアノ軍艦モ亦北海ニ出沒スルノデ，55歳ノトキ幕府ノ命ヲ受ケテ測量ヲ始メタ．伊豆カラ始メ，奥羽，北海道ニ至リ，全國津々浦々ニ及ビ，18年間ニシテ全國地圖ヲ作製シテ幕府ニ獻ジタ．其ノ地圖ハ大圖トイフ方ガ36,000分ノ1，中圖ガ216,000分ノ1，小圖ガ432,000分ノ1デアツタ．此ノ地圖ハ最近マデ我ガ國ノ地圖ノ基礎トナツタモノデアル．文政4年77歳デ江戸ニ歿シタ．

第三章　線分ノ包ム矩形

45. 線分ノ比例中項

問 1　$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$　　從ツテ　$ac=b^2$,　即チ　b ハ a,c ノ比例中項デアル.

問 2　$m^2=ln$



問 3　$AB=l$,　$BC=m$ トシ, 別ニ $AD=m$ トシ $CE \parallel BD$ トスレバ $DE=x$ ガ第三比例項デアル.

定理〔證明〕　$\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ニ於テ

$$\angle ADB=\angle CDA=\text{R.}\llcorner$$

$\angle BAD$ ハ $\angle CAD$ ノ餘角デ,　又 $\angle C$ ハ $\angle CAD$ ノ餘角デアルカラ

$$\angle BAD=\angle C \quad \therefore \triangle ABD \backsim \triangle CAD$$

$$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC} \quad \text{即チ} \quad AD^2=BD\cdot DC$$

$\triangle DAB$, $\triangle ABC$ ニ於テ

$$\angle ADB=\angle BAC=\text{R.}\llcorner \qquad \angle BAD=\angle C$$

$$\therefore \triangle DBA \backsim \triangle ABC \qquad \therefore \frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$$

$$AB^2=BD\cdot BC$$

此ノ定理ノ結果ハ比例中項ノ作圖, 或ハ矩形ヲ等積ノ正方形ニ化スル等ノ作圖ニ極メテ有効ナモノデアル.

ピタゴラスノ定理ノ證明

$$AB^2=BD\cdot BC \qquad AC^2=CD\cdot CB$$

$$\therefore AB^2+AC^2=BD\cdot BC+CD\cdot CB=BC(BD+DC)$$

$$=BC\cdot BC=BC^2$$

第三章　線分ノ包ム矩形

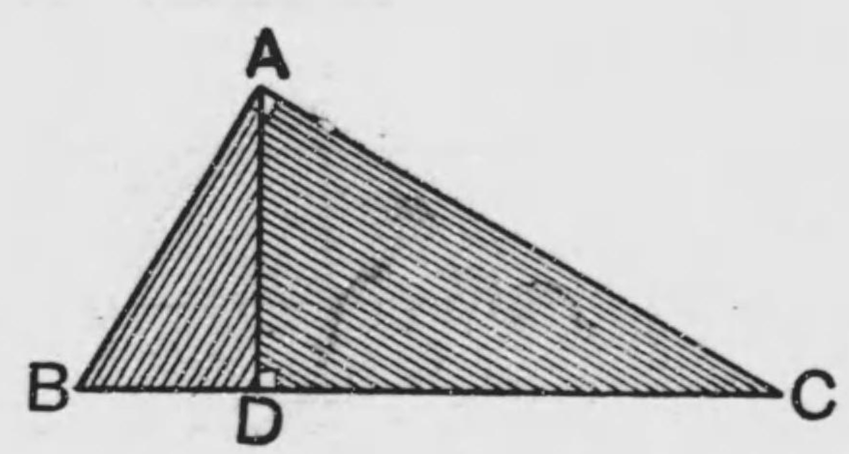
45. 線分ノ比例中項

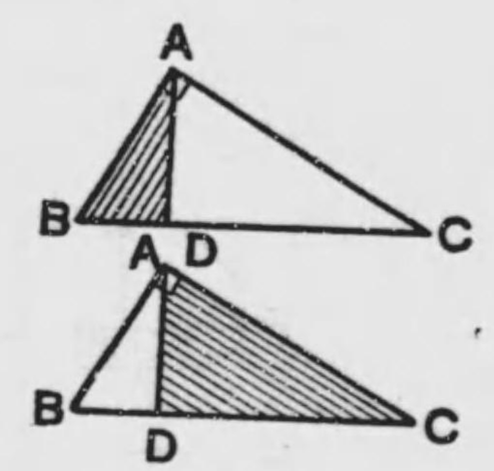
問1　a, b, c ガ連比例ヲナセバ,其ノ間ノ關係式ハ如何.

問2　線分 m ガ線分 l, n ノ比例中項ナラバ, l, m, n ノ間ノ關係ハ如何.

問3　線分 l, m ノ第三比例項ヲ求メル作圖法ヲ述ベヨ.

定理　直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜邊ニ垂線ヲ下セバ,垂線ハ斜邊ノ分ノ比例中項デ,直角ヲ夾ム邊ハ夫々之ニ隣ツテヰル斜邊ノ分ト斜邊トノ比例中項デアル。〔18頁參照〕





$\triangle ABC$ ニ於テ, $\angle A$ ガ直角, $AD \perp BC$ ナラバ,

$AD^2=BD\cdot DC$　　($\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ヲ比較セヨ)

$AB^2=BD\cdot BC$　　($\triangle DAB$, $\triangle ABC$ ヲ比較セヨ)

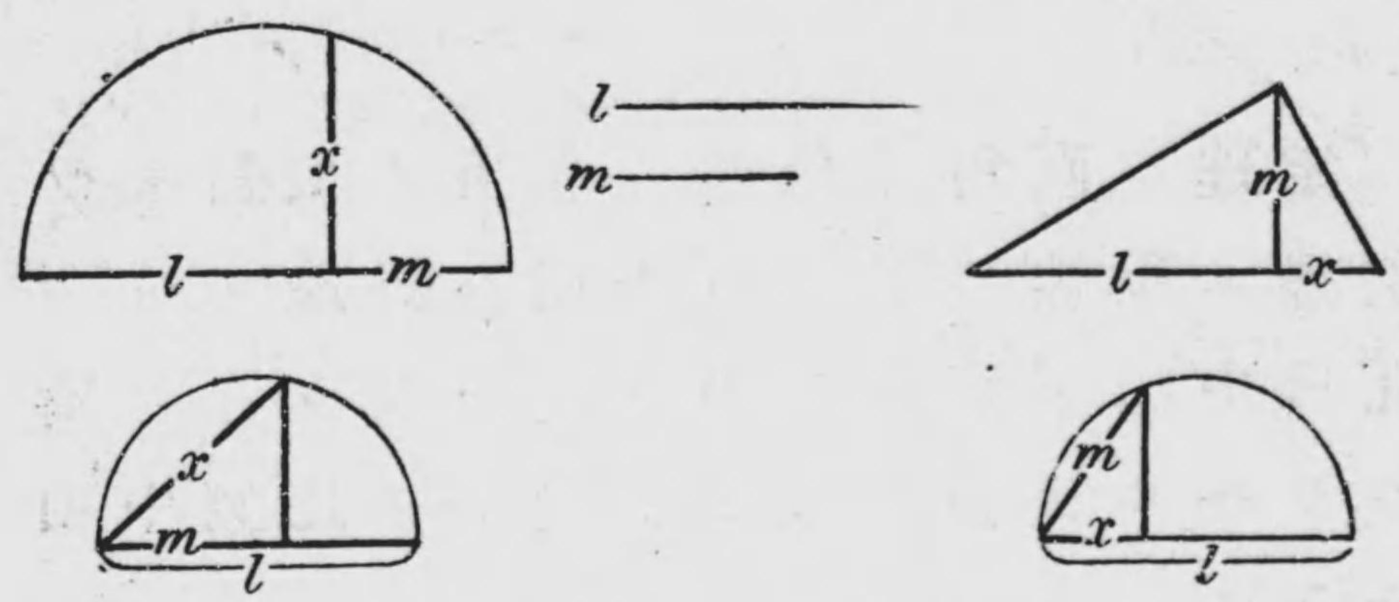
$AC^2=CD\cdot CB$　　($\triangle DAC$, $\triangle ABC$ ヲ比較セヨ)

此ノ定理ヲ用ヒルトキハ,ピタゴラスノ定理ヲ別ノ方法デ證明スルコトガ出來ル。

問　　題

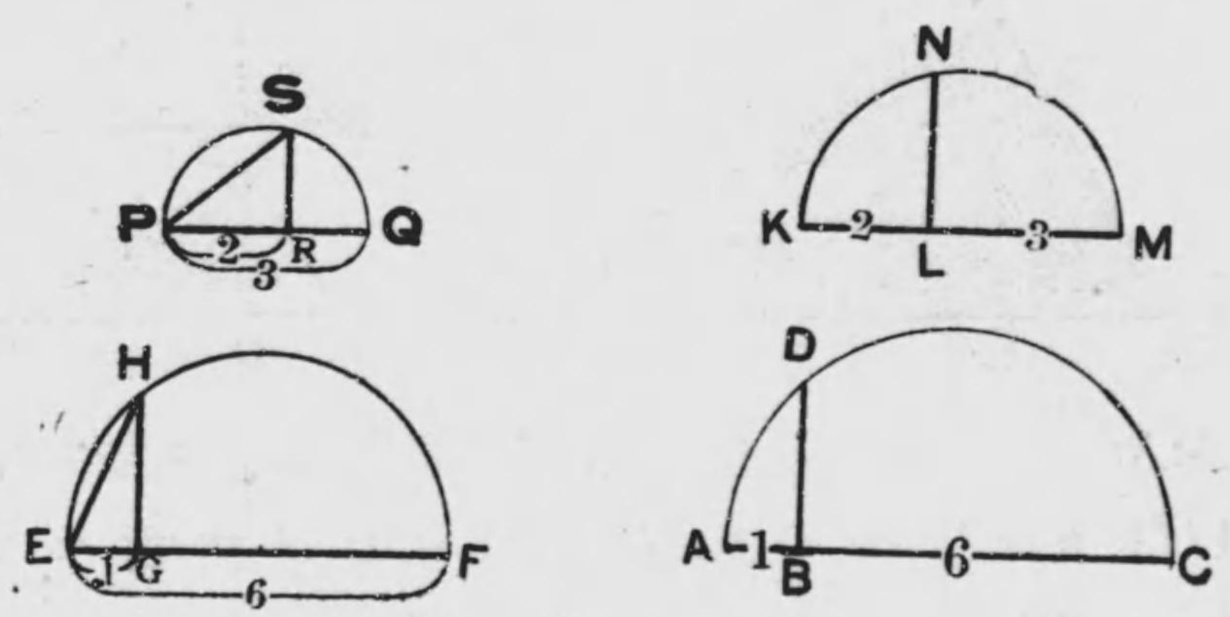
1　二線分 l, m ノ比例中項ヲ,作圖ニヨツテ求メヨ。

(1)　本節ノ定理ニ依ツテ,二線分 l, m ノ第三比例項ヲ求メヨ。



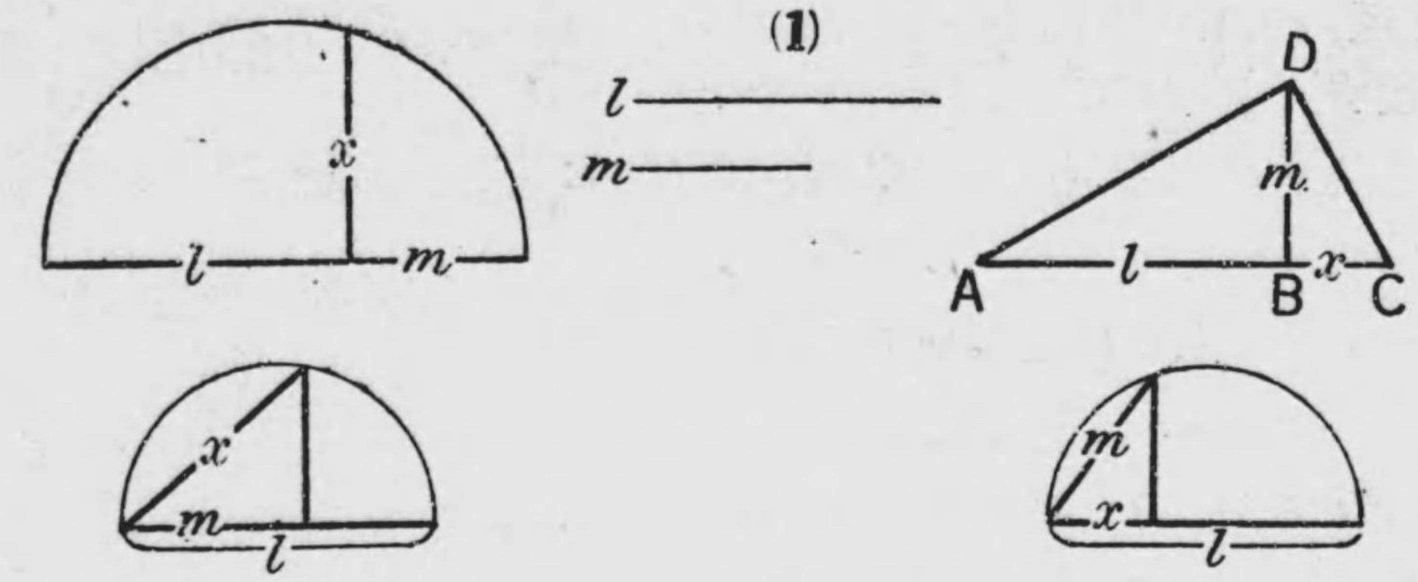
2　$\sqrt{6}$ cm ヲ作圖セヨ。

(2)　$\sqrt{7}$ cm ヲ作圖セヨ。



問　　題

1　　**(1)**



$x^2 = lm$

作圖　$l+m$ ヲ直徑トスル半圓ニ，其ノ分點ニ於ケル垂線ヲ立テヨ．之ガ所要ノ比例中項 x デアル．

又ハ l ヲ直徑ト x 半徑ニ直徑ノ端カラ m ノ長サニトツタ點ニ垂線ヲ立テヨ．

$AB=l$　　$BD \perp AB$

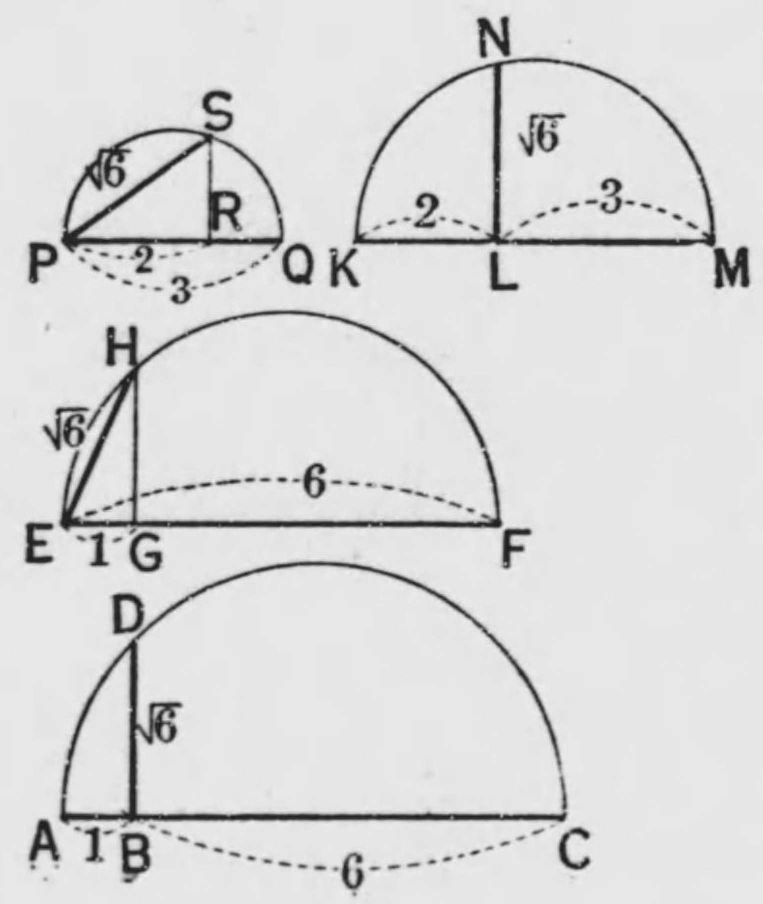
且ツ　$BD=m.$ $DC \perp AD$

$l:m=m:x$

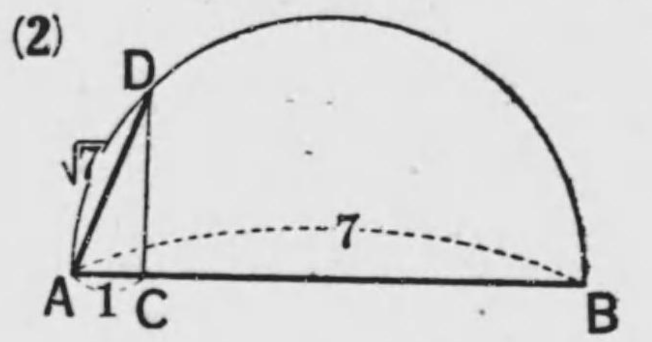
AB ト DC トノ交ハリヲ C トスレバ　$BC=x$

$l:m=m:x$

2



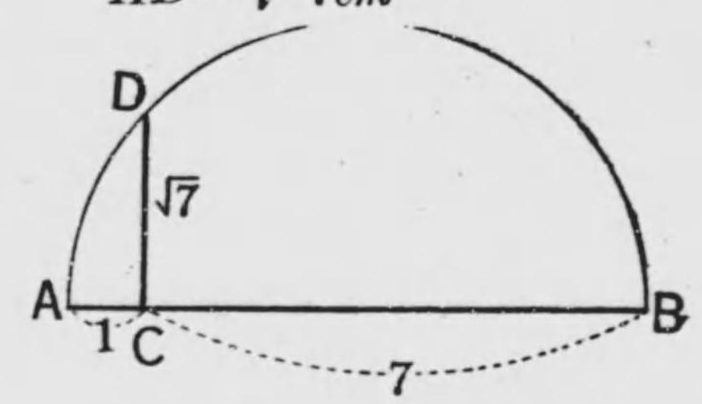
(2)



$AB=7cm,$　$AC=1cm$

$CD \perp AB$ トスレバ

$AD=\sqrt{7}cm$



$AB=8cm,$　$AC=1cm$

$DC \perp AB$ トスレバ

$CD=\sqrt{7}cm$

46. 圓ノ弦ノ分ノ包ム矩形

定理　一點ニ於ヲ內分又ハ外分サレル弦ノ包ム矩形.

〔證明〕　$\triangle ACE, \triangle DEB$ ニ於テ

$$\angle CAE=\angle CDB$$
$$\angle AEC=\angle DEB$$

$\therefore\ \triangle ACE \backsim \triangle DEB$　　$\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{CE}{EB}$

即チ　　$AE\cdot EB=CE\cdot ED$

AE, CE ト BE, DE トハ反比例ヲナス.

又 AC ト BD トヲ**逆平行** Anti-parallel トモイフ.

A, B, C, D ガ同一圓周上ニ在ツテ AB, CD ガ E ニ於テ交ハレバ $AE\cdot BE=CE\cdot DE$ デアルカラソノ逆トシテ

二線分 AB, CD ガ E ニ於テ交ハリ $AE\cdot BE=CE\cdot DE$ ナラバ A, B, C, D ハ同一圓周上ニ在ル, トノ定理ガ成立ツ. 之ヲ證明スレバ

A, B, C ヲ通ツテ圓ヲ描ケ. モシソノ圓ガ D ヲ通ラナイトシ圓ト CD トノ交點ヲ D' トスレバ　$AE\cdot BE=CE\cdot D'E$

然ルニ　$AE\cdot BE=CE\cdot DE$ ナル故 $CE\cdot DE=CE\cdot D'E$

故ニ　$DE=D'E$, D ト D' ト一致シナケレバ不合理デアル.

系一　切線ノ上ノ正方形.

$\triangle EDT \backsim \triangle ETC$ ヨリ證スルモヨイ.

割線 EBA ガ E ノ周リヲ回轉シテ ET ニ近ヅクトキハ交點 $B.A$ ハ次第ニ近ヅキ, ツヒニ一致スル. ソノトキハ $EA=EB=ET$ ソレ故 $ET^2=EA\cdot EB$ ト極限ノ理デ證明スルモヨイ. 之ハ點 E ガ圓內ニ在ルトキハ E ガ弦ノ中點トナルトキニ相當スル.

系二　面積ニヨル切線ノ條件

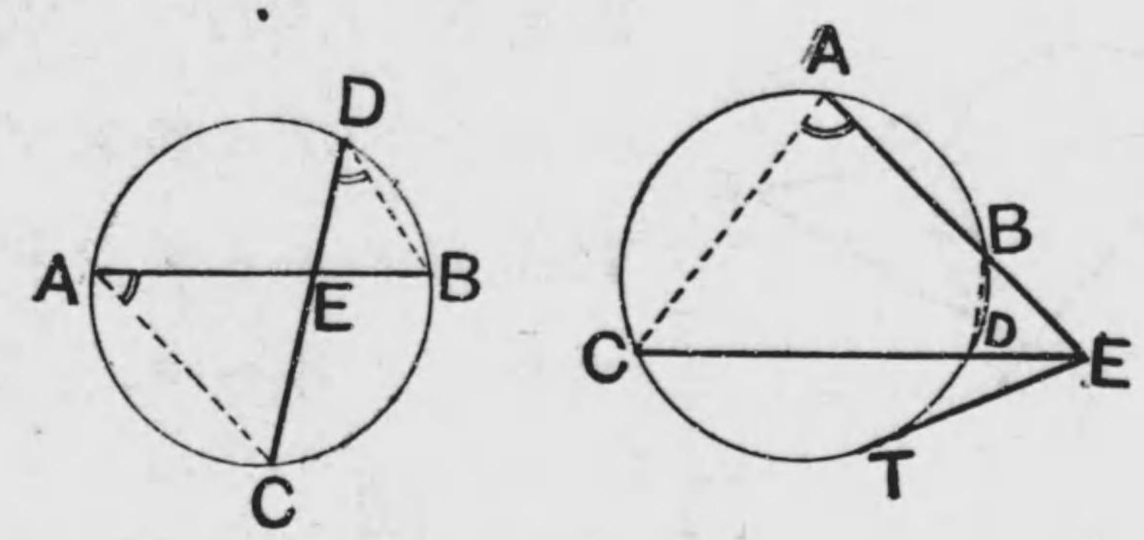
直接法　$ET^2=EQ\cdot EP$　　$\therefore\ \dfrac{EQ}{ET}=\dfrac{ET}{EP}$

$\angle E$ ハ共有　　$\therefore\ \triangle ETP \backsim \triangle EQT$

$\therefore\ \angle ETQ=\angle P$　故ニ TE ハ切線デアル.

46. 圓ノ弦ノ分ノ包ム矩形

定理　一定點ニ於テ內分又ハ外分セラレタ弦ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ常ニ一定デアル.



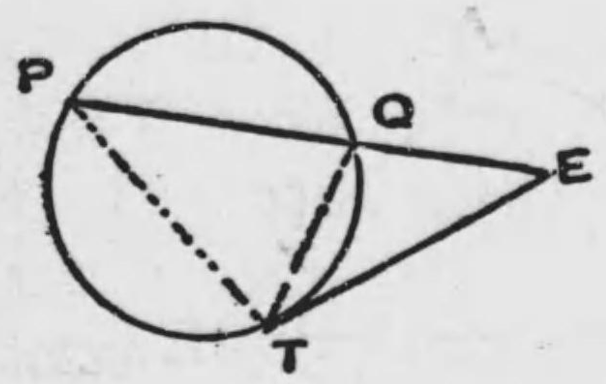
圓ノ任意ノ二弦 AB, CD 又ハソノ延長ガ定點 E デ交レバ, $\triangle ACE$ ト $\triangle BDE$ トハ如何ナル關係ニアルカ.

從ッテ　　$AE\cdot BE=CE\cdot DE$

系一　圓外ノ一點カラ圓ニ引イタ切線ノ切點マデノ長サハ,ソノ點デ外分セラレル弦ノ二ツノ分ノ比例中項デアル.

$$ET^2=EA\cdot EB=EC\cdot ED$$

系二　圓外ノ一點トソノ圓周上ノ一點トヲ結ブ線分ガ,其ノ點デ外分セラレル弦ノ二ツノ分ノ比例中項デアルトキハ,其ノ線分ハソノ圓ニ切スル.

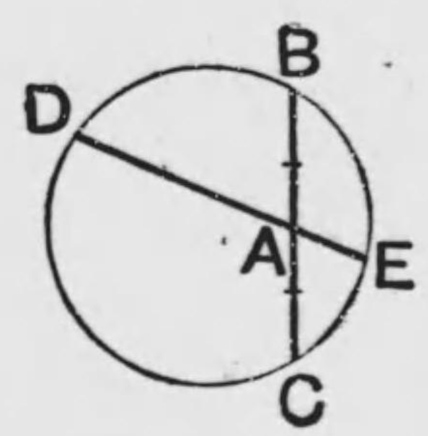


直接法　$\triangle ETP \backsim \triangle EQT$

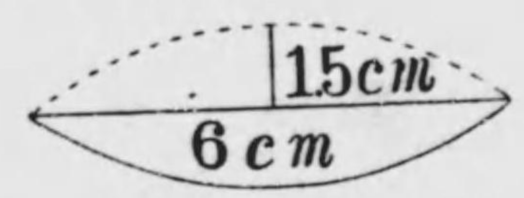
間接法　ET ガ切線デナクテ割線デアッタナラバドウナルカヲ考ヘヨ.

問　　題

3　圖ニ於テ A ハ弦 BC ノ中點デアルトスレバ, AB ハ A ヲ通ル總テノ弦ノ分ノ比例中項デアルコトヲ證明セヨ.



(3)　*弦ガ 6 cm ナル圓弧ノ中點ト弦ノ中點トノ距離ガ 1.5 cm デアル圓ノ半徑如何.



*「レンズ」ノ曲率半徑ハ此ノ問題ノヤウナ計算ニヨツテ出スモノデアル.

間接法　ET ガ切線デナイトスレバ, ET ハ割線デ, T ノ外ニ尙 S ニ於テ ET ハ圓ト交ハル. 然ラバ　$EQ \cdot EP = ET \cdot ES$

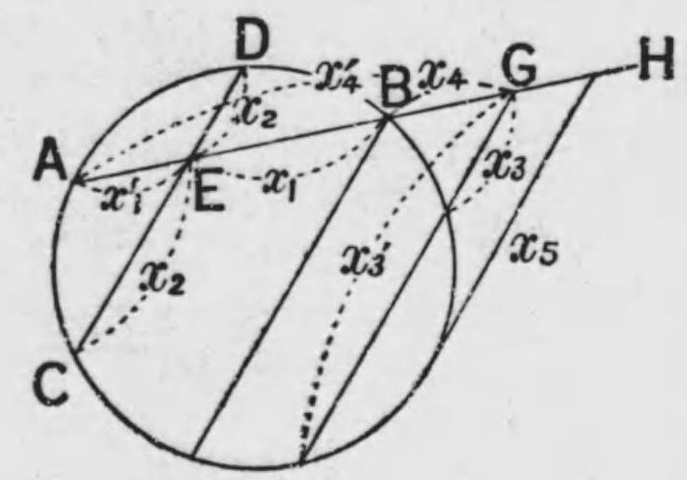
然ルニ假設ニヨリ　$EQ \cdot EP = ET^2$　　$\therefore\ ET^2 = ET \cdot ES$

$$\therefore\ ET = ES$$

之ハ矛盾スル. 卽チ ET ハ切線デアル.

此ノ系二ハ, 弦トナス角ガ圓周角ト等シイトキ切線デアルトイフ定理ト共ニ切線ヲ決定スルニ大切ナ條件トナル.

注意　本節ノ定理及ビ系一ハ內分外分トセズ單ニ分ツトスルトキハ同一ノ定理ト見ルコトガ出來ルノデ



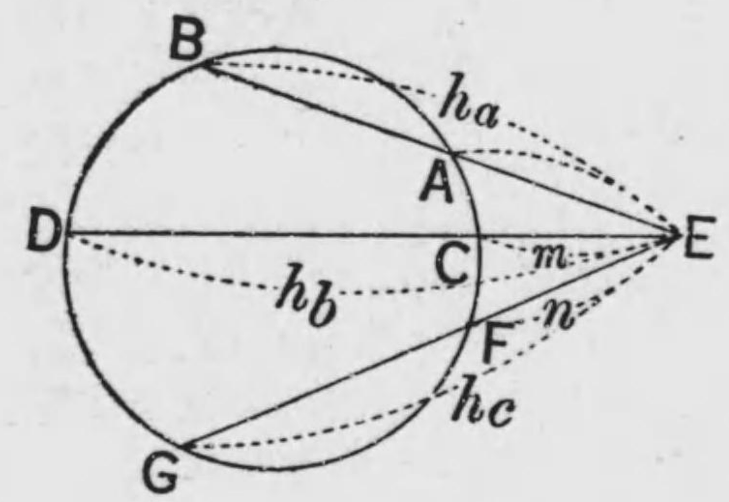
E ヲ分點トスレバ

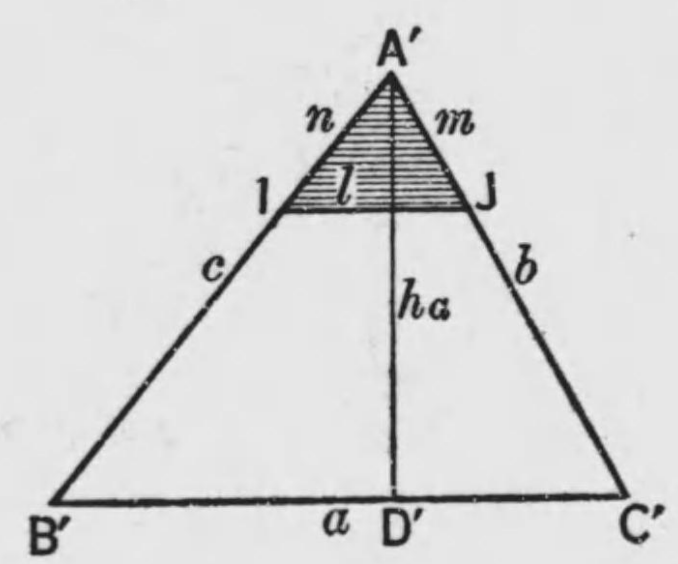
$$x_1x_1' = x_2x_2'$$

E ガ B ニ一致スレバ一分ハ 0 トナリ從ツテ積ハ 0 トナル.

G ヲ分點トスレバ

$$x_3x_3' = x_4x_4'$$





本節ノ定理ヲ用ヒレバ容易ニ三ツノ高サヲ知ツテ三角形ヲ作ルコトガ出來ル. 求メル三角形 $A'B'C'$ ノ三邊 a, b, c ニ各頂點カラ下シタ垂線ヲ h_a, h_b, h_c トスレバ

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

一ツノ圓外ノ點 E カラ EB, ED, EG ヲ h_a, h_b, h_c ニ等シクトレバ

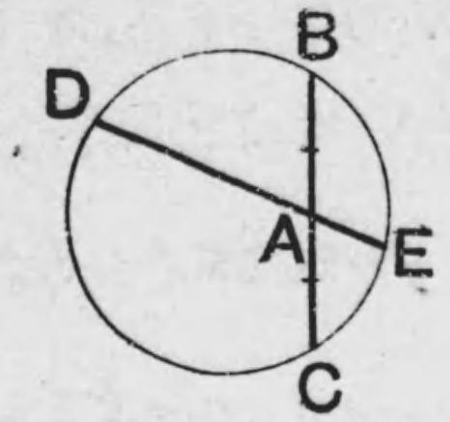
$$lh_a = m'_b = nh_c$$

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

卽チ a, b, c ハ l, m, n ニ比例スル故 $\triangle A'B'C'$ ト l, m, n デ作ツタ三角形トハ相似デアル.

問　題

3



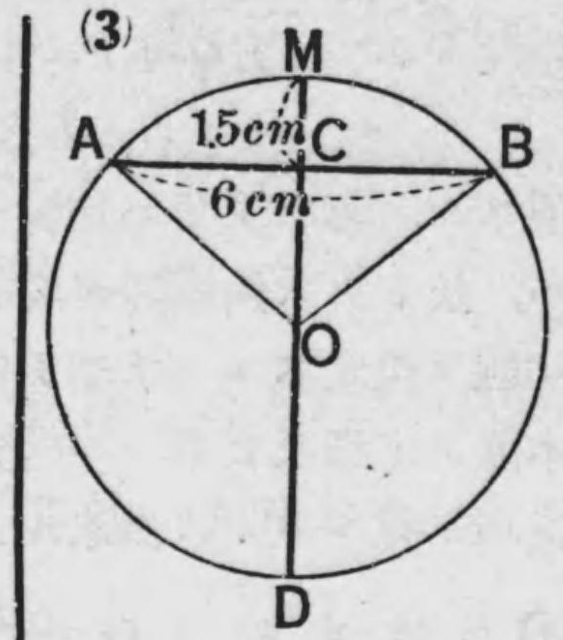
Aヲ通ル任意ノ弦ヲ DE トスル.

$BA \cdot AC = DA \cdot AE$

然ルニ $AB = AC$ デアルカラ

$AB^2 = AD \cdot AE$

(3)



$\overset{\frown}{AB}$ ノ中點Mヲ通ル直徑ノ端ヲDトスレバ $MD \perp AB$, MDトABノ交點CハABノ中點.

故ニ　$AC^2 = MC \cdot CD$

卽チ　$3^2 = 1.5 \times CD$　$CD = 6$

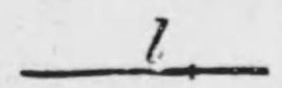
$\therefore \quad OM = \dfrac{MC + CD}{2} = 3.75$

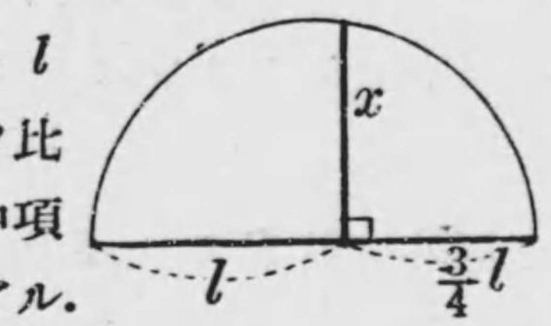
答　3.75cm

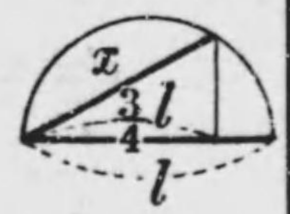
47. 作圖題

4　正方形ノ一邊ノ長サヲx cm トスレバ　$x^2 = \dfrac{3}{4} l.l$

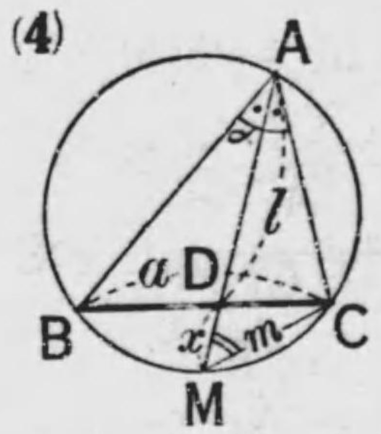
xハ$\dfrac{3}{4}$ l ト l トノ比例中項デアル.







(4)



底邊aト頂角αガ與ヘラレタトキハ外接圓ガ定マル. 頂角ノ二等分線ハ底邊ニ對スル弧ノ中點Mヲ通ル. Mハ定點デアルカラ $CM = m$ ハ定長デアル.

$\triangle AMC \backsim \triangle CMD$ カラ

$(l+x) : m = m : x$ 卽チ $(l+x)x = x^2$

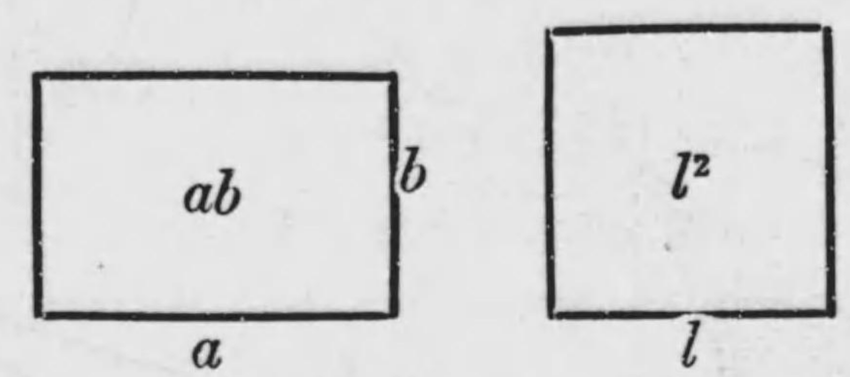
$x^2 + lx - m^2 = 0$

$x = -\dfrac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + m^2}$

$\sqrt{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + m^2}$ ノ長サハ求メルコトガデキル. 故ニxノ長サガワカル. 從ツテ點Dガ決マリ, Aガ決マル.

47. 作圖題

與ヘラレタ矩形ト等積ノ正方形ヲ作ルコト.



解析　矩形ノ二隣邊ヲ a, b トシ,等積ノ正方形ノ一邊ヲ l トスレバ

$$ab = l^2$$

卽チ l ハ a, b ノ比例中項デアル.

作圖及ビ證明ハ各自試ミヨ.

問　題

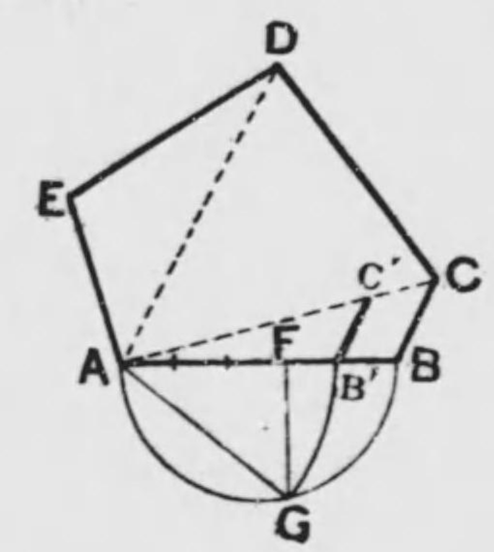
4　線分 l ガ與ヘラレルトキ, $\dfrac{3}{4}l^2$ ノ面積ヲ有スル正方形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ.

5　與ヘラレタ五邊形ト相似デアツテ,面積ガ $\dfrac{3}{5}$ ノ五邊形ヲ作レ.

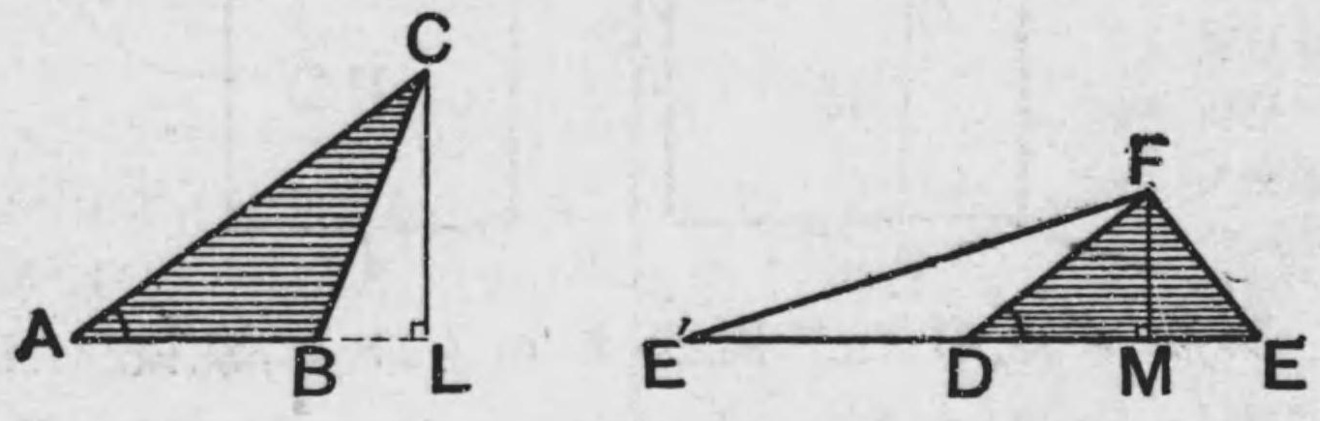
〔161頁問ト比較セヨ〕

(4)　頂角,底邊,頂角ノ二等分線ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

注意　$(l+x)x = m^2$



定理　一角ノ相等シイ(又ハ補角ヲナス)二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,ソノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シイ.



$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ, $\angle A=\angle D$ トスレバ,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB.AC}{DE.DF}$$

證明　頂點 C,F カラ底邊ニ垂線ヲ下シ,之ヲ CL, FM トスレバ, $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB.CL$

$$\triangle DEF=\tfrac{1}{2}DE.FM$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{\frac{1}{2}AB.CL}{\frac{1}{2}DE.FM}\cdots\cdots(A)$$

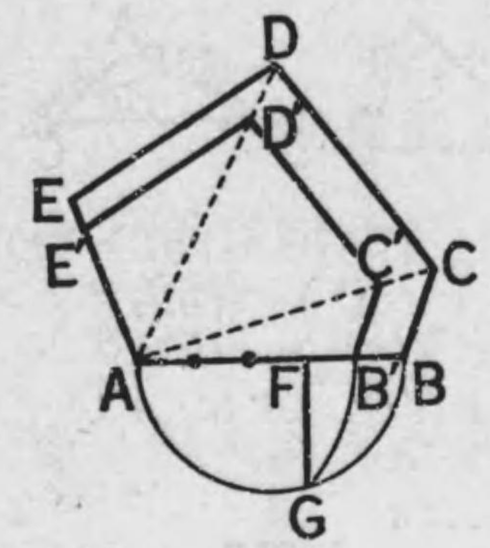
然ルニ　$\triangle CAL\backsim\triangle FDM$　$\therefore\ \dfrac{CL}{FM}=\dfrac{AC}{DF}$

$$\therefore\ \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB.CL}{DE.FM}=\frac{AB.AC}{DE.DF}$$

$\triangle\ IE'F$ ノヤウニ $\angle E'DF$ ガ $\angle A$ ノ補角デアルトキハ, $E'D$ ヲ延長シテ DE ヲ $E'D$ ニ等シクトレバ,　$\triangle DE'F=\triangle DEF$

故ニ一角ノ等シイ場合ト同樣デアル.

5

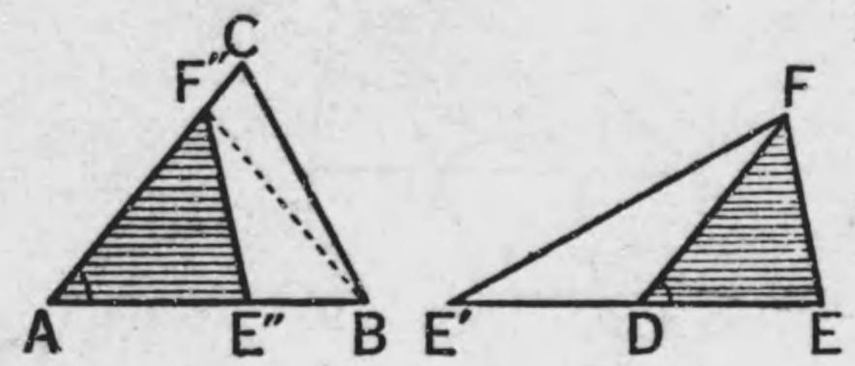


$AB'C'D'E'$ ヲ求メル五邊形トスルト

$$\frac{ABCDE}{AB'C'D'E'}=\frac{AB^2}{AB'^2}=\frac{5}{3}$$

AB' ハ $\frac{3}{5}AB$ ト AB トノ比例中項デアル. 故ニ AB ヲ直徑トスル半圓ヲカキ, AB ヲ5等分シ, $AF=\frac{3}{5}AB$ トスル. F ニ於ケル AB ノ垂線ト半圓トノ交點ヲ G トシ, $AB'=AG$ トスレバ AB' ハ所要ノ五邊形ノ一邊トナル.

定理　一角相等シイ(又ハ補角ヲナス)二ツノ三角形ノ面積ノ比.



相似形ニヨラナイ證明法ハ

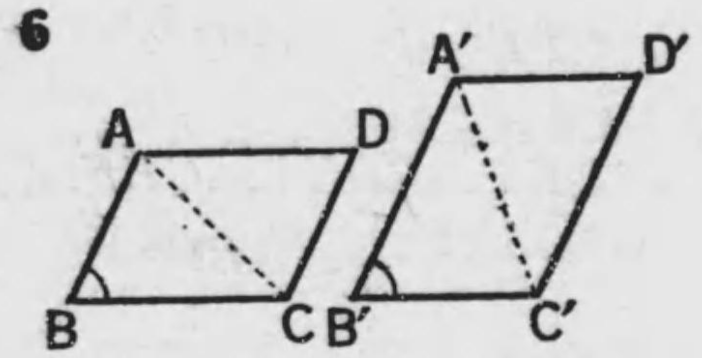
$$\triangle AE''F'\equiv\triangle DEF$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABF'}=\frac{AC}{AF''}\qquad\frac{\triangle ABF'}{\triangle AE''F'}=\frac{AB}{AE''}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AC.AB}{DF.DE}$$

問　　題

6



$$\frac{\text{▱}ABCD}{\text{▱}A'B'C'D'}=\frac{2\triangle ABC}{2\triangle A'B'C'}$$

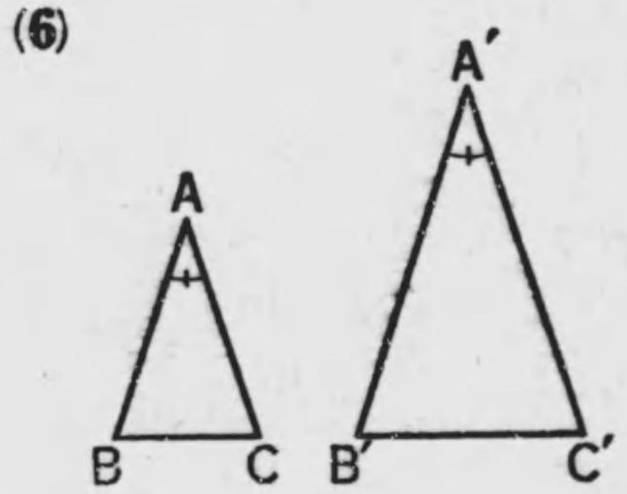
$$=\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}$$

$\angle B=\angle B'$ デアルカラ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}$$

$$\therefore\ \frac{\text{▱}AC}{\text{▱}A'C'}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}$$

(6)



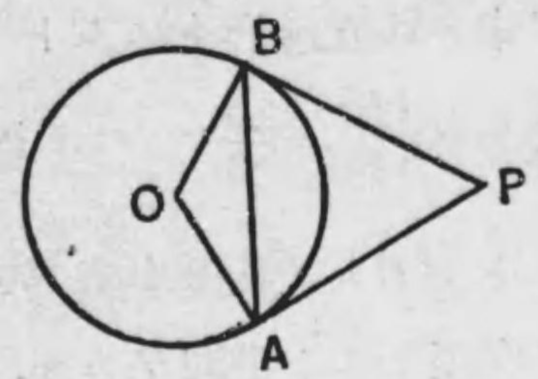
$\angle A=\angle A'$

$AB=AC$

$A'B'=A'C'$

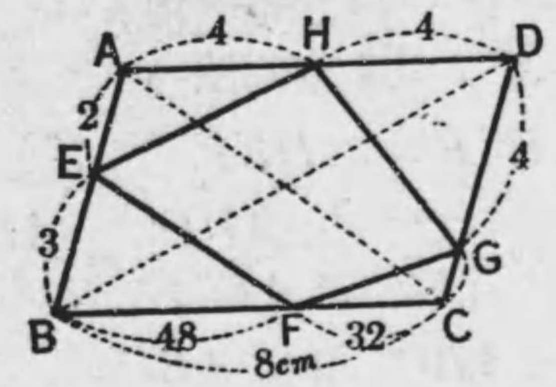
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

7



$\triangle PAB$ ト $\triangle OAB$ トハ、$\angle P$ ト $\angle O$ トガ補角ヲナシテキルカラ、$\dfrac{\triangle PAB}{\triangle OAB}=\dfrac{PA\cdot PB}{OA\cdot OB}=\dfrac{PA^2}{OA^2}$

8



▱ $EFGH$ ノ面積ヲ求メルニハ、▱AC カラ $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle CGF$, $\triangle DHG$ ヲ引ケバヨイ.

$$\frac{\triangle AEH}{\triangle ABD}=\frac{2\times4}{5\times8}=\frac{1}{5}$$

$$\triangle AEH=\frac{1}{5}\triangle ABD=\frac{1}{10}▱AC$$

$$\frac{\triangle BEF}{\triangle ABC}=\frac{3\times4.8}{5\times8}=\frac{1.8}{5}$$

$$\triangle BEF=\frac{1.8}{5}\triangle ABC=\frac{1.8}{10}▱AC$$

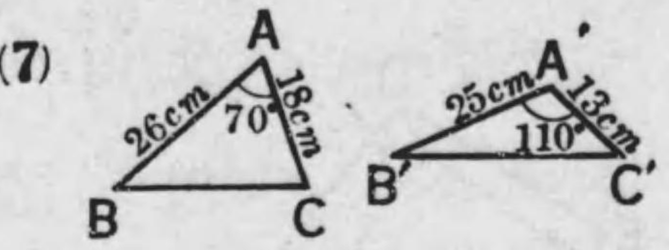
$$\frac{\triangle CGF}{\triangle CDB}=\frac{1\times3.2}{5\times8}=\frac{0.4}{5}$$

$$\triangle CGF=\frac{0.4}{5}\triangle CDB=\frac{0.4}{10}▱AC$$

$$\frac{\triangle DHG}{\triangle DAC}=\frac{4\times4}{5\times8}=\frac{4}{10}$$

$$\triangle DHG=\frac{2}{5}\triangle DAC=\frac{2}{10}▱AC$$

(7)



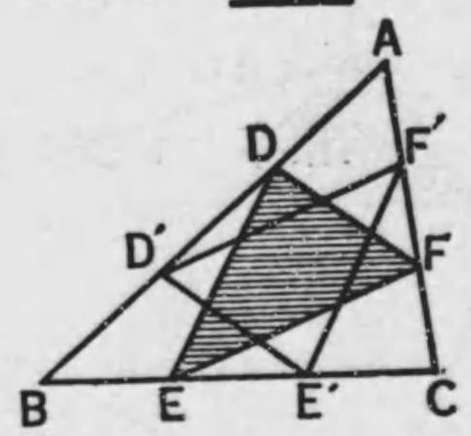
$\angle A+\angle A'=70^\circ+110^\circ=180^\circ$

即チ $\angle A$ ト $\angle A'$ トハ補角ヲナス.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$$

$$=\frac{26\times18}{25\times13}=\underline{\frac{36}{25}}\cdots\cdots 答$$

(8)



(一) $\dfrac{\triangle ADF}{\triangle ABC}=\dfrac{1\times2}{3\times3}=\dfrac{2}{9}$

$$\triangle ADF=\frac{2}{9}\triangle ABC$$

$$\triangle BDE=\frac{2}{9}\triangle ABC$$

$$\triangle CEF=\frac{2}{9}\triangle ABC$$

$$\triangle DEF=\triangle ABC-(\triangle ADF+\triangle BDE+\triangle CEF)=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

又 $\triangle AD'F'=\dfrac{2}{9}\triangle ABC$

$$\triangle BD'E'=\frac{2}{9}\triangle ABC$$

$$\triangle CE'F'=\frac{2}{9}\triangle ABC$$

$$\triangle D'E'F'=\triangle ABC-(\triangle AD'F'+\triangle BD'E'+\triangle CE'F')=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

$$\therefore\ \triangle DEF=\triangle D'E'F'$$

問　　題

6　一角ガ相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハソノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シイ。

7　圓 O 外ノ點 P カラ切線 PA, PB ヲ引ケバ、$\triangle PAB:\triangle AOB=PA^2:OA^2$

8　▱$ABCD$ ノ邊 AB ハ $5\,cm$, BC ハ $8\,cm$ デアル。AB, BC, CD, DA 上ニ順次ニ AE ヲ $2\,cm$, BF ヲ $4.8\,cm$, CG ヲ $1\,cm$, DH ヲ $4\,cm$ ノヤウニトレバ、四邊形 $EFGH$ ノ面積ト ▱$ABCD$ ノ面積トノ比ヲ求メヨ。

注意　$\dfrac{\triangle AEH}{▱AC}=\dfrac{\triangle AEH}{2\triangle ABD}$

(6)　頂角ノ等シイ二等邊三角形ノ比ハ等邊ノ二乘比ニ等シイ。

(7)　二ツノ三角形ガアル。共ノ一ツノ三角形ノ一角ハ70°デ、之ヲ夾ム二邊ハ $18\,cm$, $26\,cm$ デアリ、他ノ三角形ノ一角ハ110°デ、之ヲ夾ム二邊ハ $25\,cm$, $13\,cm$ デアル。此ノ二ツノ三角形ノ面積ノ比ヲ求メヨ。

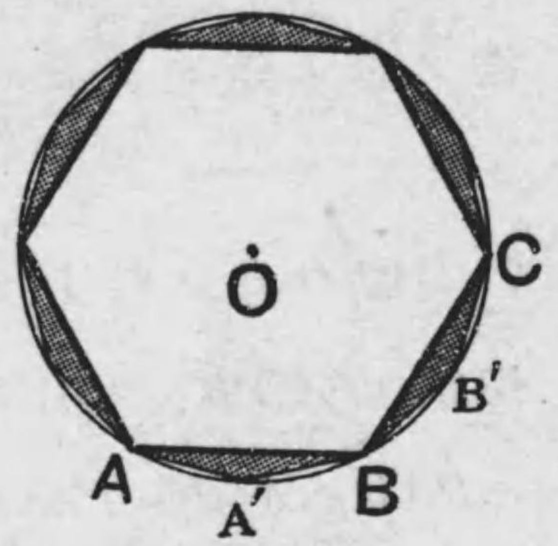
(8)　$\triangle ABC$ ノ邊 AB, BC, CA 上ニ二點ヅツ D,D'; E,E'; F,F' ヲトリ、$AD:DB=BE:EC=CF:FA=1:2$　$AD':D'B=BE':E'C=CF':F'A=2:1$ ナラシメルト $\triangle DEF=\triangle D'E'F'$

第四章　圓

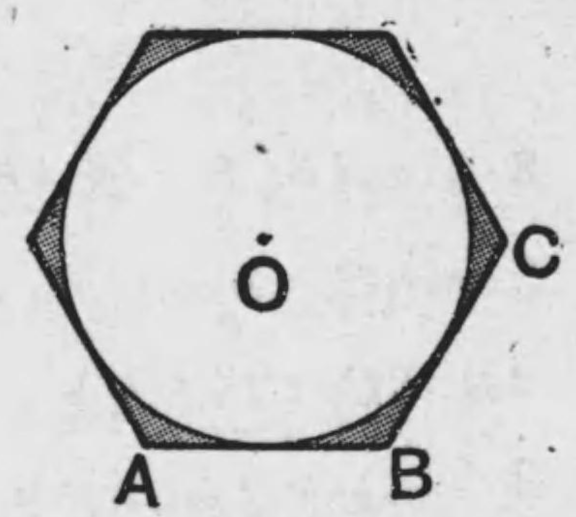
48. 圓周ト直徑

問 1　圓周率トハ何カ．ソノ値ハイクラカ．

問 2　圖ノヤウニ圓ニ內接スル正六邊形ヲ描キ,更ニ順次ニ二倍邊數ノ正多角形(正十二邊形,正二十四邊形)等ヲ內接サセルト,ソノ周ハ次第ニ增大シテ圓周ニ近ヅクコトヲ見ヨ．



問 3　圖ノヤウニ圓ニ外接スル正六邊形ヲ描キ,順次ニ二倍邊數ノ正多角形ヲ共ノ圓ニ外接サセルト,ソノ周ハ次第ニ減少シテ圓周ニ近ヅクコトヲ見ヨ．



斯樣ニシテ順次邊數ヲ二倍シテ得タ正多角形ノ周ヲ,直徑$2r$ヲ單位トシテ計算シタモノヲ表示スレバ,

圓ニ內接及ビ外接スル正多角形ヲ描イテ圓周ヲ計算シ,圓周率ハ $3\frac{10}{71}$ ト $3\frac{10}{70}$ トノ間ニアルコト,及ビソノ近似値トシテ $3\frac{10}{70}$ 卽チ $\frac{22}{7}$ ヲトツタノハ,アルキメデスデアル．

$$\square EFGH=\square AC-\left(\frac{1}{10}\square AC+\frac{1.8}{10}\square AC+\frac{0.4}{10}\square AC+\frac{2}{10}\square AC\right)$$

$$=\frac{12}{25}\square AC\qquad \frac{EFGH}{\square AC}=\frac{12}{25}\cdots 答$$

(二)　$DF' \parallel D'F$

$\therefore\ \triangle ADF=\triangle AD'F'$

$D'E \parallel DE'$

$\therefore\ \triangle BED=\triangle BE'D'$

$E'F \parallel EF'$

$\therefore\ \triangle CEF=\triangle CE'F'$

$\therefore\ \triangle DEF=\triangle D'E'F'$

第四章　圓

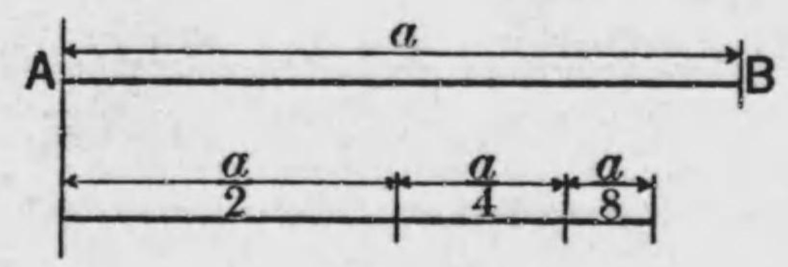
48. 圓周ト直經

問 1　圓周率トハ圓周ト直徑トノ比,　$\pi=3.14159$

圓ノ周及ビ面積ヲ計算ヲスルニハ是非極限ノ理ヲ用ヒナクテハナラナイ．併シ極限ノ理ハ生徒ニハ理解シ難ク却ツテ生徒ヲ迷ハスコトニナルカラココニハ極メテ常識的ニ實驗的ニ取扱フ事ニシテキル．

極限ニ就イテ

極限ノ例トシテハ公比$\frac{1}{2}$ノ無限等比級數ヲトルガ平易デ理解シ易イ．與線分ABノ長サヲaトシ最初ソノ半分ヲトリ次ニ殘リノ半分ヲトル如クシテソノ總和sヲ求メルト



$$s=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}a+\frac{1}{16}a+\cdots\cdots \text{トナリ,}$$

n項マデノ和ハ　$s=\dfrac{\frac{1}{2}a\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=a-\dfrac{a}{2^n}$　デアル．

而シテ項數ヲ限リナク多クトルトキハ$\frac{a}{2^n}$ハ如何程デモ 0 ニ近ヅキ從ツテ總和sトaトノ差ハ如何程デモ小ニスルコトガ出來ル．

故ニnヲ無限ニ大キクトツタトキノ總和ハaニ等シイト見ルコトガ出來ル．

aヲ $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}a+\cdots\cdots$ノ項數ヲ無限ニトツタトキノ和ノ極限デアルトイフ．(併シ此ノ學年デハマダ G. P. ヲ學習シテキナイ.)

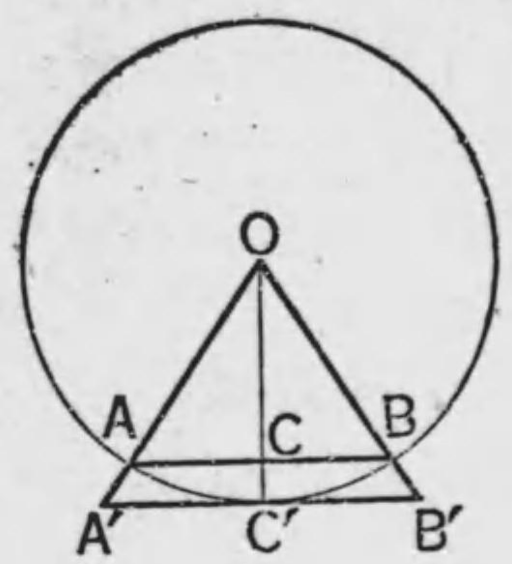
公理 一變數ガ常ニソノ値ヲ增大シ且ツ一常數ヨリ小ナルトキハ此ノ變數ハ極限ニ近ヅク．此ノ極限ノ値ハソノ常數ヨリ大ナルカ又ハ之ト等シイ．

一變數ガ常ニソノ値ヲ減少シ且ツ一常數ヨリ大ナルトキハ此ノ變數ハ極限ニ近ヅク，此ノ極限ノ値ハソノ常數ヨリ大ナルカ又ハ之ト等シイ．

此ノ公理ニヨレバ內接多角形ノ邊數ヲ絕エズ2倍シ行キ邊數ヲ無限ニ大トシタトキノソノ周ノ極限ハ圓周デアリ，面積ノ極限ハ圓ノ面積デアル．

又外接多角形ノ邊數ヲ絕エズ2倍シテ行キ邊數ヲ無限ニ大トシタトキノソノ周ノ極限ハ圓周デアリ，ソノ面積ノ極限ハ圓ノ面積デアル．

次ニ邊數ヲ2倍ニシテ行クトキノ內接正多角形ト外接多形トノ極限ガ同一デアルカドウカト考ヘルト，$AB, A'B'$ ヲ同邊數ノ內接，外接正多角形ノ相對應スル邊トシ，OA, OA' ガ重ルヤウニ置クトキ，a, a' ヲ邊，$p\,p'$ ヲ周，r ヲ圓ノ半徑トスルトキハ



$$\frac{p}{p'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2}}{r}$$

正多角形ガ邊數ヲ變ズルトキノ $\frac{p}{p'}$ ハ常ニ1ヨリ小デアツテ邊數ガ無限ニ增シタトキノ

$$\frac{p}{p'} \text{ノ極限}=\frac{\sqrt{r^2-0}}{r}=\frac{r}{r}=1$$

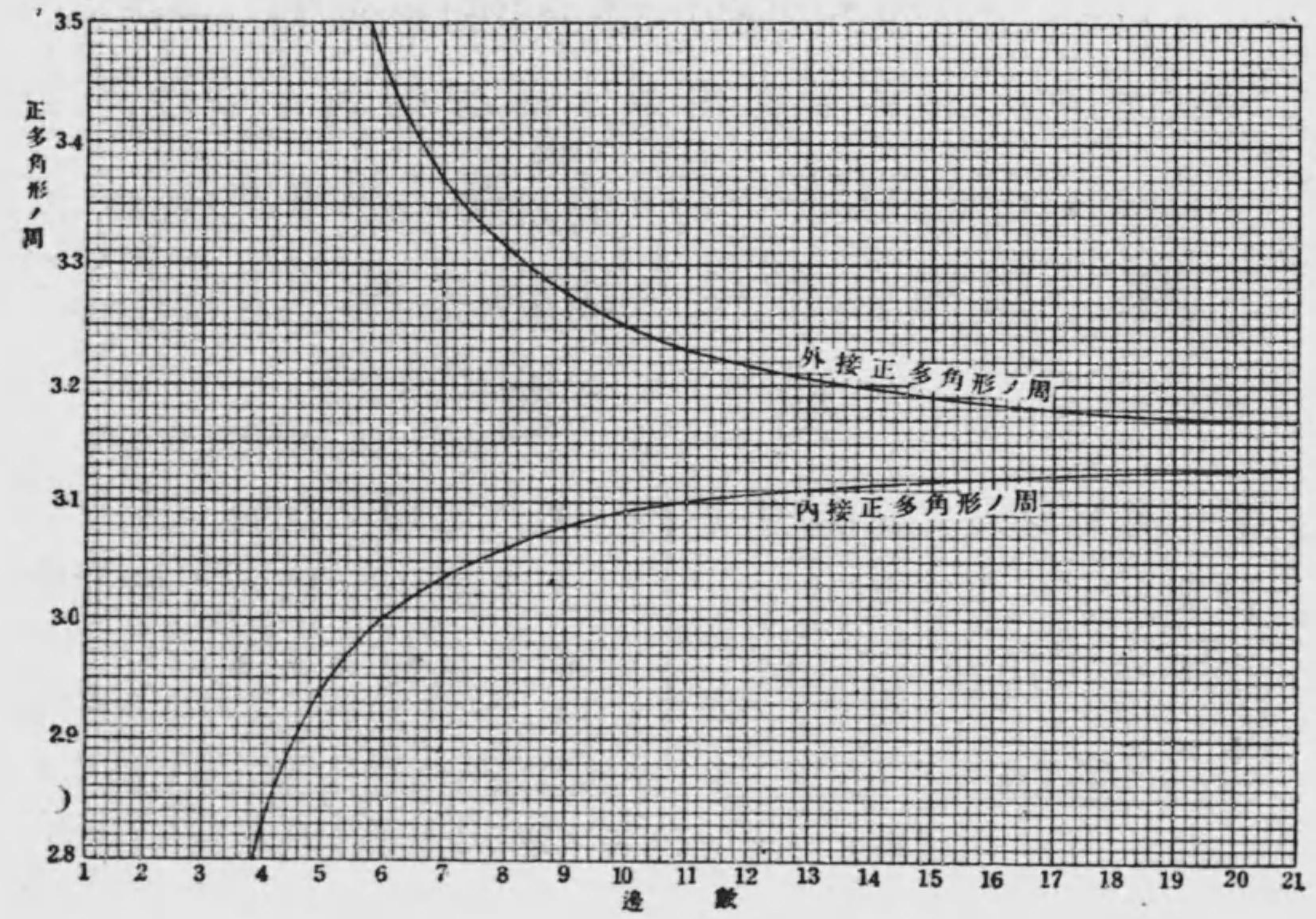
卽チ pp' ノ極限ハ同一ナルコトガ知ラレル．

尙之ト關聯シテ初メニ取ル正多角形ガ三角形デモ四角形デモ又ハ五角形デモ邊數ヲ2倍ニシテ無限ニ增大シタトキノ極限ハ一致スルコトヲ證シヨウ．

邊數	內接正多角形ノ周	外接正多角形ノ周
6	$2r$ ×3.0000000	$2r$ ×3.4641016
12	〃 3.1058285	〃 3.2153903
24	〃 3.1326286	〃 3.1596599
48	〃 3.1393502	〃 3.1460862
96	〃 3.1410320	〃 3.1427146
192	〃 3.1414526	〃 3.1418730
384	〃 3.1415577	〃 3.1416627
768	〃 3.1415847	〃 3.1416101
1536	〃 3.1415904	〃 3.1415970

之ニヨツテ圓ノ周ハ圓ノ直徑ノ 3.1415904 倍ト 3.1415970 倍トノ間ニアツテ，約**3.14159**倍デアルコトガワカル。

今直徑ガ1デアル圓ニ內接スル正多角形及ビ外接スル正多角形ノ周ト邊數トノ關係ノグラフヲ描ケバ，下ノ圖ノヤウニナル．



定理　圓周ノ直徑ニ對スル比ノ値ハ常ニ一定デアル。*

圓ノ直徑ヲ $2r$,圓周ヲ c トスレバ, $\frac{c}{2r}$ ハ常ニ一定デ,此ノ比ノ値ヲ**圓周率**トイヒ,通常 π トイフ文字デ書表ハス。

故ニ半徑 r ガ與ヘラレタトキ圓周 c ハ

$\mathbf{c=2\pi r}$ デ求メラレル。

圓周率ハ循環シナイ無限小數卽チ**無理數**デ,小數點以下幾桁求メテモ眞ノ値ハ得ラレナイ。今ソノ小數點以下30桁マデヲ示セバ,

$$\pi=3.141592653589793238462643383279\cdots\cdots$$

デアルケレドモ,實用上ニハ近似値トシテ,

$$3.14,\quad 3.1416,\quad \frac{22}{7},\ \frac{355}{113}$$ 等ヲ用ヒル。

系　圓周ハ直徑ニ比例スル。

問　　題

1　地球ノ赤道ノ周ヲ計算セヨ。但シ地球ノ半徑ハ 6378粁, $\pi=3.14$ トスル。

(1)　地球ノ自轉ニヨッテ赤道上ノ點ハ1時間何粁廻轉スルカ。

*茲ニハ此ノ證明ヲ省ク。

〔(201)頁ノ續キ〕 p,p' ヲ正六邊形ヲ基礎トシ, q,q' ヲ正四邊形ヲ基礎トスル內接及ビ外接正多形ノ周トシ, pp' ノ近ヅク極限ヲ L トスルニ $p\leqq L\leqq p'$ デアツテ q' ハ常ニ p ノ何レヨリ大デアルカラ $L\leqq q'$ 又 q ハ常ニ p ノ何レヨリモ小デアルカラ

$$q\leqq L \quad \text{卽チ} \quad q\leqq L\leqq q' \quad \text{デアル.}$$

$$1\leqq\frac{L}{q}\leqq\frac{q'}{q}$$

然ルニ $\frac{q'}{q}$ ハ前證明ニヨツテ1ニ近ヅク故 $\frac{L}{q}$ ハ1ニ近ヅク値ト1トノ間ニアル. ソレ故ソノ極限ニ於テハ矢張リ1デアル. 卽チ $L=q$

卽チ正四邊形ヲ基礎トシテ內接正多角形ノ邊數ヲ無限ニ增シタトキノ周ノ極限ハ正六邊形ヲ基礎トシテ內接正多多角形ノ邊數ヲ無限ニ增シタトキノ極限ト等シイ. 其ノ他如何ナルモノヲ基礎トシテモ極限ハ同一デアル.

此ノ如キ**漸近法** (Method of Exhaustion) ハアンチホン Antiphon (紀元前430年頃)ガ圓ノ正方化問題デ試ミタモノデアルガ, コレニ依ツテ圓周ノ近似値 $\frac{22}{7}$ ヲ出シタノハアルキメデスデアル.

問　　題

1　地球ノ赤道ヲ圓ト見做シテソノ周ハ

$6378km\times2\times3.14=4053.84km$

答　40053.84km

(1)　地球ハ24時間デ一回轉スルカラ1時間ニ回轉スル粁數ハ

$40053.84km\div24=1668.91km$

答　1668.91km

アルキメデス Archimedes ノ傳

アルキメデスノ傳ニツイテ既ニ一年用ニ詳シイガ少シク補ツテ置カウ.

彼ノ發明的天才ノアツタコトハ有名デアル. ソノ一例トシテローマ人ガシラキウス市ヲ攻擊シタトキ大キナ金屬ノ反射鏡ヲ作リ太陽ノ光線ヲ反射シテ海上ノ船ヲ燒失セシメタトイフコトヲ掲ゲテアル本モアルガ事實トハ思ハレナイ.

彼ハ物理ニ於ケル釣合ノ理ヤ流體靜力學ヲ知ツテヰタコトハ彼ガヒーロー王ニナシタ種々ノ事實デモ明カデアル.

彼ハ特ニ圓周, 圓錐, 球ノ體積, 表面積ニ關スル發見ガ多ク.

(1) 圓ノ面積ハ底ガソノ圓周ト等シク高サガ半徑ト等シイ三角形ト等積ナコト.

(2) π ハ $3\frac{10}{70}$ ヨリ小デ $3\frac{10}{71}$ ヨリ大ルコト.

(3) 球ノ表面積ハソノ大圓ノ4倍ナルコト.

(4) 缺球ノ曲面積ハ缺球ノ頂點ト底面ノ周ニ到ル距離ヲ半徑トスル圓ノ面積ト等シイコト.

(5) 球ノ體積, 表面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積及ビ表面積ノ $\frac{2}{3}$ ト等シイコト等ハ彼ノ發見シタトコロデアル. 又彼ハ

(6) アルキメデスノ螺線 ($r=c\theta$) ヲ發見シ.

(7) 橢圓及ビ拋物線デ圍マレタ面積ヲ計算シタ.

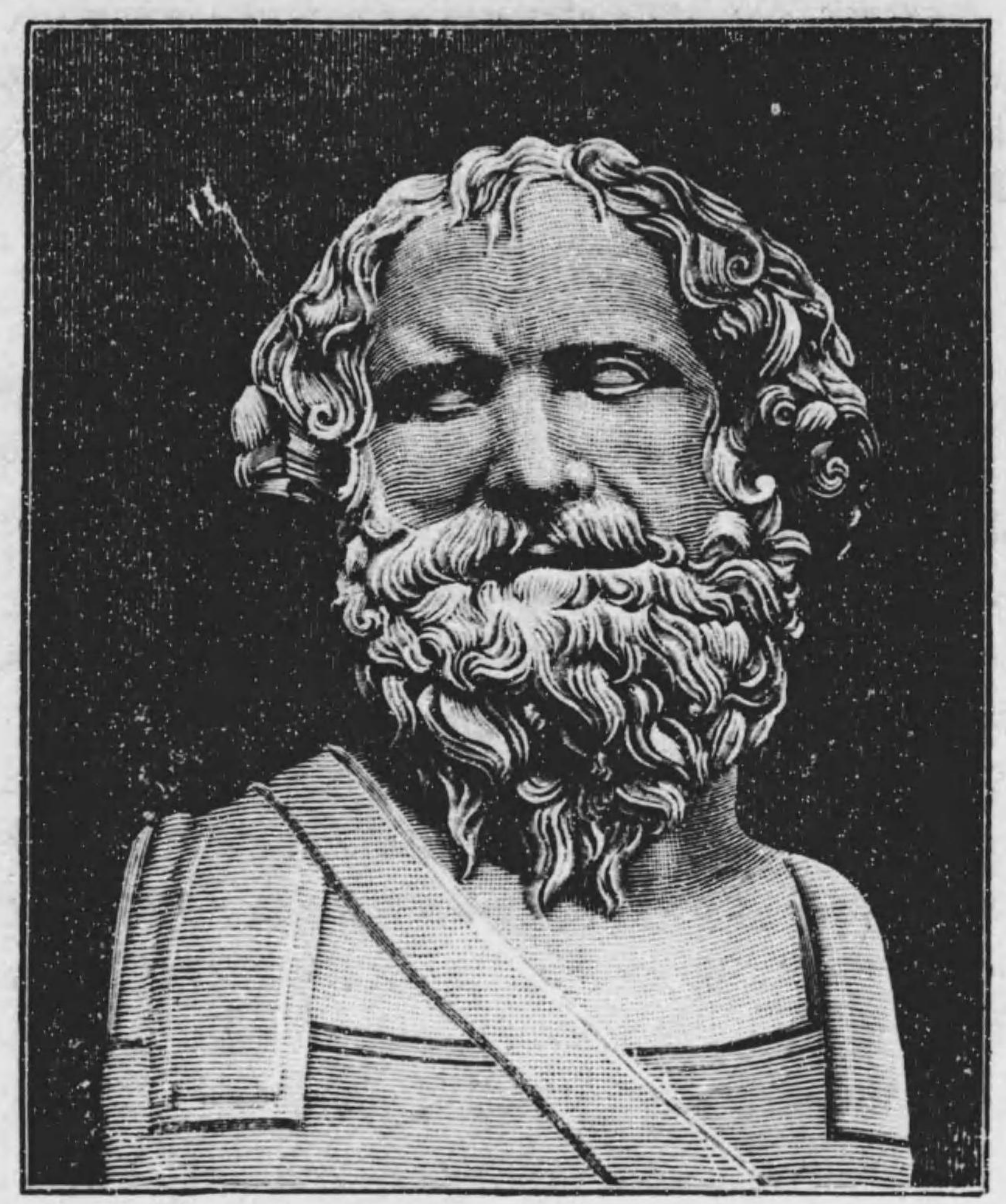
(8) 橢圓又ハ拋物線ガソノ軸ノ周リニ回轉シテ生ジタ橢圓體, 拋物線體ノ性質ヲ研究シタ. 之ハ後ニ此等ノモノノ體積ノ計算ヲ導キ出スコトニ力ノアツタモノデアル.

(9) 角ノ三等分ニツイテ教科書ノ48頁問題(7)ニ在ル割線 DEC ヲ發見シタコト.

アルキメデスノ發見ハソノ著書中ニ皆ソノ理ヲ論ジテアルノデ彼ノ偉大ノ天才デアルコトヲ示スモノデアル. ソノ著書ハ1906年J. L. Heiberg ガコンスタンチノーブルデ發見シタ寫本ヨリ知ラレタモノデアル. 又詩人シセロハ彼ノ墓ヲ探出シタトイハレル. ソノ面ニ書イテアル圓壔ニ內接スル球ノ圖形ハアルキメデスノ遺言ニヨツテマーセラス (Marcellus) ガ作ツタモノデアル.

アルキメデスノナシタ數學ハ測定ノ幾何學トモイフベキモノデ現今ノ微分積分學ノ基礎ヲナスモノダトイフコトガ出來ル.

アルキメデス



ARCHIMEDES (287—212 *B.C.*)

圓周率 π ノ歷史

圓周ハ $2\pi r$ デアルカラ π ノ値ヲ見出スコトガ出來ルナラバ圓周ヲ半徑ノ何倍カヲ以テ表ハスコトガ出來ル. 又圓ノ面積ハ πr^2 デアルカラ圓周ヲ正確ニ表ハス事ガ出來ルナラバ面積モ正確ニ表ハスコトガ出來ルノデアル. 即チ圓ノ面積ト等積ノ正方形ヲ作ルコトガ出來ル. ソレ故圓周ノ直線化ノ問題モ圓ノ正方化問題モ同一事項デアルノデアル. 併シ古ヨリ正方化問題ニ注意ガ向ケラレテソノ方ノ研究

ガ主トシテナサレタノデアル. $\sqrt{a}$ ノ作圖ハ定規ト「コンパス」ヲ使用スレバ出來ル. ソレ故 π ガ平方根ヲ有限回求メテ得ラレルナラバ圓ノ正方化問題ヲ解クコトガ出來ルノデアル. スベテノ初等幾何的ノ作圖ハ二直線ノ交點, 直線ト圓トノ交點, 二圓ノ交點ヲ求メルコトニ歸スルノデアルカラ此等ノコトヲ有限回繰リ返スコトニヨツテ作圖シ得ナイ問題ナラバ之ハ作圖不能問題トイフベキデ

$$\pi=2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\cdots\cdots}}}}}}$$

ト根號ノ無限回出テ來ルコトヨリ考ヘテモ圓ノ正方化ハ作圖不能問題ナルコトガ明カデアル.

實ニ圓周率ハ有理數デモ根數デモナク無理數ノ中デモ代數的ノ數ヲ以テ表ハシ得ナイ超越數 (Transcendental numder) デアル.

獨逸人ラムベルト Lambert ハ1766年 π ハ無理數ナルコトヲ證明シ, 獨逸ノ大學教授リンデマン Lindemann ハ1882年ニ圓ノ正方化問題ハ定規ト「コンパス」トデハ不能問題デアルコトヲ證シタ.

古代デハバビロニア人埃及人等ハ圓周率ノ値トシテ3ヲトツタ. ソレヨリ4000年間ニ幾多ノ數學者ニヨリ世界各地デ研究サレソノ算出法ニモ種々ナモノガ現ハレテ π ノ値ハ次第ニソノ精密サヲ加ヘタ. 今ソノ年代ヲ追ウテ π ノ値ヲ示スト.

アーメス Ahmes (紀元前1700年頃) $\pi=3.1604$

アルキメデス Archimedes (紀元前287—212) $3\frac{10}{70}>\pi>3\frac{10}{71}$

トレミー Ptolemy (紀元165年頃生存) $\pi=3\frac{17}{120}=3.14166\cdots\cdots$

アリヤバハタ Ariyabhata (印度人紀元475—550頃) $\pi=\frac{62832}{20000}=3.1416$

ブラーマグプタ Brahmagupta (印度人紀元598年生)

$\pi=\sqrt{10}=3.1623$

メチウス Metius (和蘭人紀元1571—1635) $\pi=3.1415929$

アドリマン・フアン・ルーマン Adriaen van Rooman (1561—1615)
小數17桁マデ算出

ルドルフ・フアン・コーレン Ludolph van Ceulen (1539—1610)
小數37桁マデ算出

ベガ Georg Vega (1793年死) 小數140桁マデ算出

ツアカリアス・デーズ Zacharias Dase (1844年死)
小數200桁マデ算出

リヒテル Richter (1854年死) 小數500桁マデ算出

シヤンクス W.Shanks (1873年) 小數707桁マデ算出

關 考和 (1680年頃) $\pi=\frac{355}{113}$

松永良弼 (1740年頃) 小數50桁マデ算出 (元文四年, 1739年作「方圓算經」) 倘參考ノタメニ π ノ値ヲ求メル式ヲ揭ゲヨウ.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdots \text{(Wallis, 1616—1703)}$$

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2\cdots\cdots}}}} \text{(Brouncker, 1620—1684)}$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots \text{(Gregory, 1638—1675)}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\log i}{i} \qquad \text{(Bernoulli)}$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\cdots\cdots \text{(分母ハ素數列)}$$

$$\frac{\pi^2}{16}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}\cdots\cdots$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{x}{2}+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3}+\cdots\cdots (0<x<\pi)$$

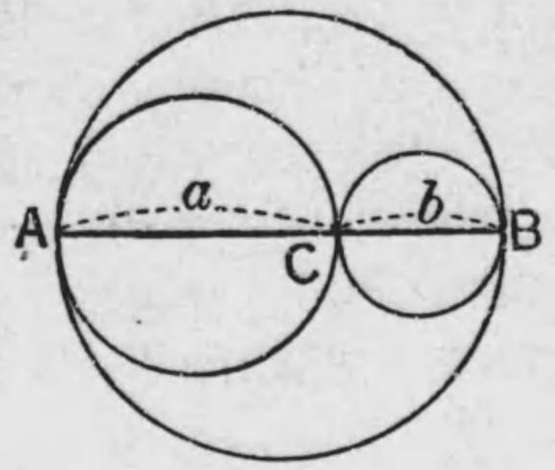
$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7\cdot8}\cdots\cdots$$

$$\frac{2\pi^2}{3}=7-\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{6\cdot10}+\cdots\cdots\right)$$

$$\pi=2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots}}}}}$$

ニューカム Neuvcomb 教授ハ圓周率ヲ小數以下10桁マデトレバ地球ノ周ヲ一吋ヨリ小ナル誤差アルヤウニ算出出來, 小數30桁トレバ如何ナル强大ナル顯微鏡デモ見エナイモノヲ宇宙ノ如ク大ナラシメルコトガ出來ルトイツタ.

2



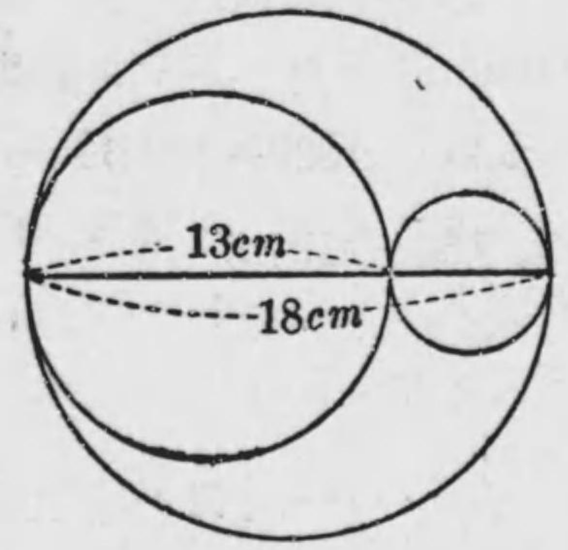
$AC=a,\ CB=b$ トスレバ

圓ACノ周$=\pi a$

圓BCノ周$=\pi b$

$\pi a+\pi b=\pi(a+b)=$圓ABノ周

3



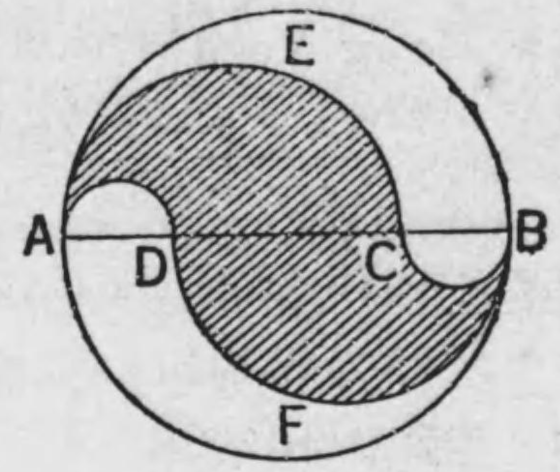
太サ 40.82cm ノ小火鉢ノ直徑ヲ求メテ見ルニ

40.82cm÷3.14=13cm

18cm−13cm=5cm

答 5cm

(2)



$$AECB=\frac{\pi AC}{2}+\frac{\pi BC}{2}=\frac{\pi(AC+BC)}{2}=\frac{\pi AB}{2}$$

$$ADFB=\frac{\pi AD}{2}+\frac{\pi DB}{2}=\frac{\pi(AD+DB)}{2}=\frac{\pi AB}{2}$$

∴ 半圓$\overset{\frown}{AB}$=曲線$AECB$
=曲線$ADFB$

(3) $22\frac{3}{4}$吋÷3.14=7.245吋

$=7\frac{1}{4}$吋

答 $7\frac{1}{4}$吋

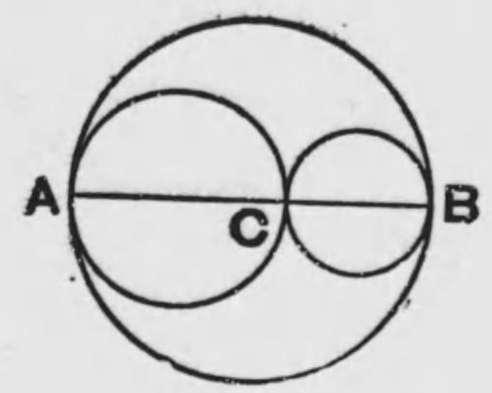
吋ノ小數ハ分數デ，而モ分母ガ2^nナル分數ヲ用ヒルコトニナツテヰルカラ$\frac{3}{4}$トカ$\frac{1}{8}$トカ云ハネバナラヌ.

49. 圓ノ面積

圓周 半徑rナル圓ノ面積ハπr^2デアル.

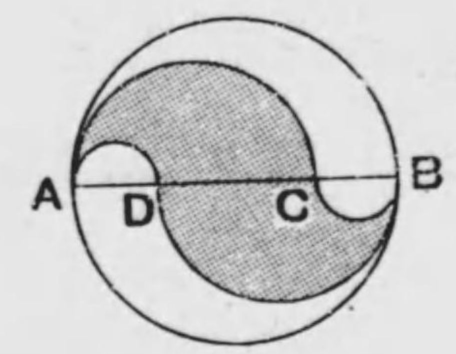
此ノ證明ハ外接正多角形ノ極限ヲ用ヒタガヨイ. 外接多角形ニスレバ變數トシテ多角形ノ周ダケデアルガ內接多角形ヲトレバ周ト高サトガ常ニ變ズルカラ變數ガ多イノデ極限ヲ考ヘ難イ. 勿論出來ナイコトハナイ.

2 直徑AB上ノ任意ノ一點ヲCトシ,AC,BCヲ直徑トシタ二ツノ圓ヲ描ケバ,大キイ圓ノ周ハ小サイ二ツノ圓ノ周ノ和ニ等シイ。

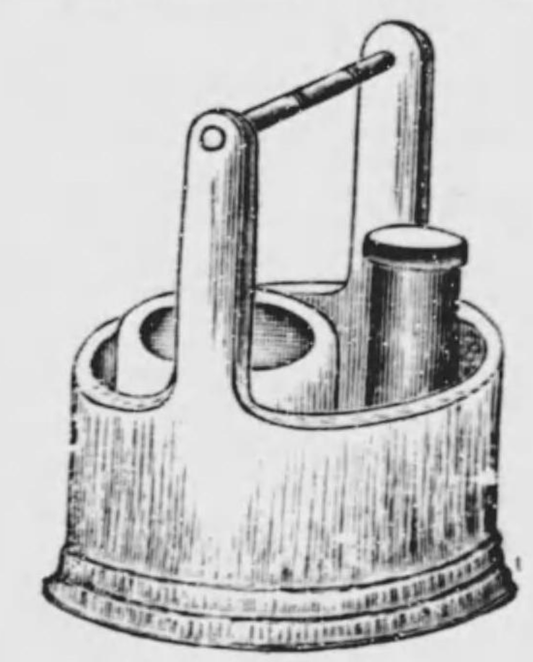


3 直徑ガ18cmアル圓筒形ノ煙草盆ニ,太サガ40.82cmノ圓筒形ノ小火鉢ヲ入レ,尚此ノ外ニ出來ルダケ大キイ圓筒形ノ竹筒ヲ入レルニハ,ソノ竹筒ノ直徑ヲ何程トスレバヨイカ。但シ$\pi=3.14$トシテ計算セヨ。

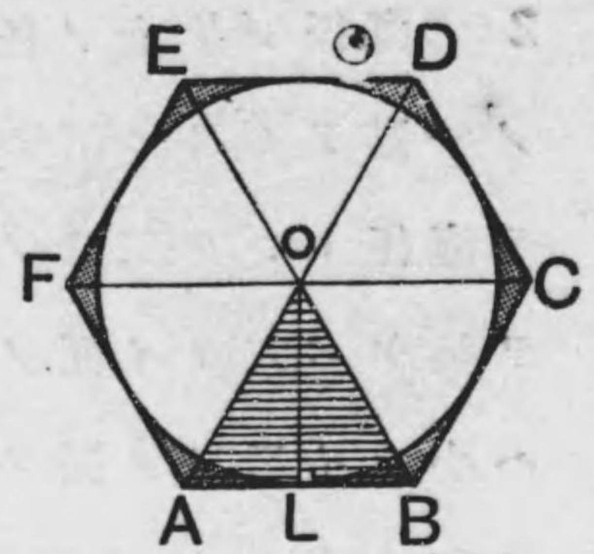
(2) 直徑AB上ニ任意ノ二點C,Dヲトツテ,圖ノヤウニ各分ヲ直徑トシテ半圓ヲ描ケバ,AカラBニ至ル四ツノ曲線ノ長サハ相等シイ。



(3) 帽子ノ吋數ハ頭ノマハリト等シイ圓周ノ直徑ヲ吋デ表ハシタ數デアル。今頭ノマハリガ$22\frac{3}{4}$吋アル人ハ何吋ノ帽子ヲ買ヘバヨイカ。



49. 圓ノ面積



定理 半徑 r ノ圓ノ面積ハ πr^2 デアル.

證明 半徑 r ノ圓ニ外接スル正六邊形ヲ描イテソノ周ヲ p_6,面積ヲ S_6 トスレバ,

$$S_6=6\triangle AOB$$
$$=6\times\frac{1}{2}OL\cdot AB$$
$$=\frac{1}{2}OL\times 6AB$$
$$=\frac{1}{2}rp_6$$

外接正十二邊形ノ周ヲ p_{12},面積ヲ S_{12} トスレバ

$$S_{12}=\frac{1}{2}rp_{12}$$

コノ方法ヲ繰返スト,正多角形ノ面積ハ次第ニ圓ノ面積ニ近付ク. 邊數ヲ無限ニ増シタトキノ正多角形ノ周ハ圓ノ周ニ等シク,面積ハ圓ノ面積ト等シクナル.

$$圓ノ面積=\frac{1}{2}r\times 2\pi r$$
$$=\pi r^2$$

系一 圓ノ面積ハ半徑ノ二乘ニ比例スル.

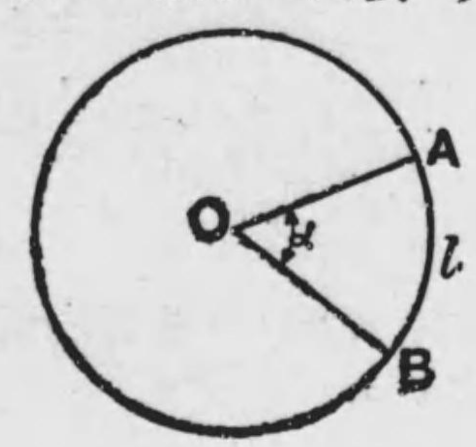
任意ノ二ツノ圓ノ面積ヲ S,S',半徑ヲ r,r' トスレバ

$S=\pi r^2,\quad S'=\pi r'^2$ デアルカラ

$\dfrac{S}{S'}=\dfrac{\pi r^2}{\pi r'^2}=\dfrac{r'^2}{r'^2}$ 故ニ $S\propto r^2$

卽チ $S=kr^2$ デ $k=\pi$ デアル.

系二 扇形ノ面積ハ其ノ弧ト半徑トノ積ノ半分デアル.



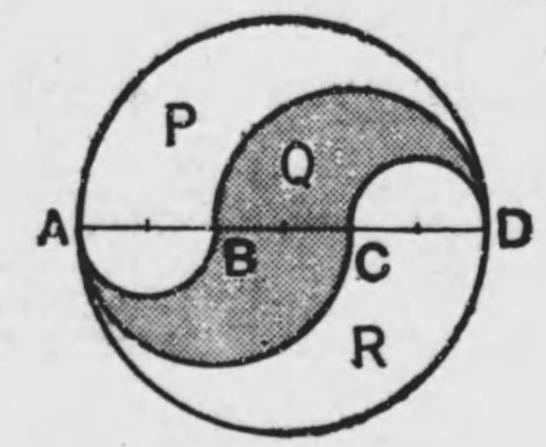
$\widehat{AB}=l\quad \angle AOB=a$ トスレバ

$$\frac{扇形AOB}{全圓}=\frac{a}{360°}=\frac{l}{2\pi r}$$

$$扇形AOB=\frac{l\pi r^2}{2\pi r}=\frac{lr}{2}$$

問題

4



$AD=6a$

AB ヲ直徑トスル半圓 $\dfrac{\pi a^2}{2}$

DB 〃 〃 $\dfrac{4\pi a^2}{2}$

P ノ面積 $\dfrac{\pi a^2}{2}+\left(\dfrac{9\pi a^2}{2}-\dfrac{4\pi a^2}{2}\right)=3\pi a^2$

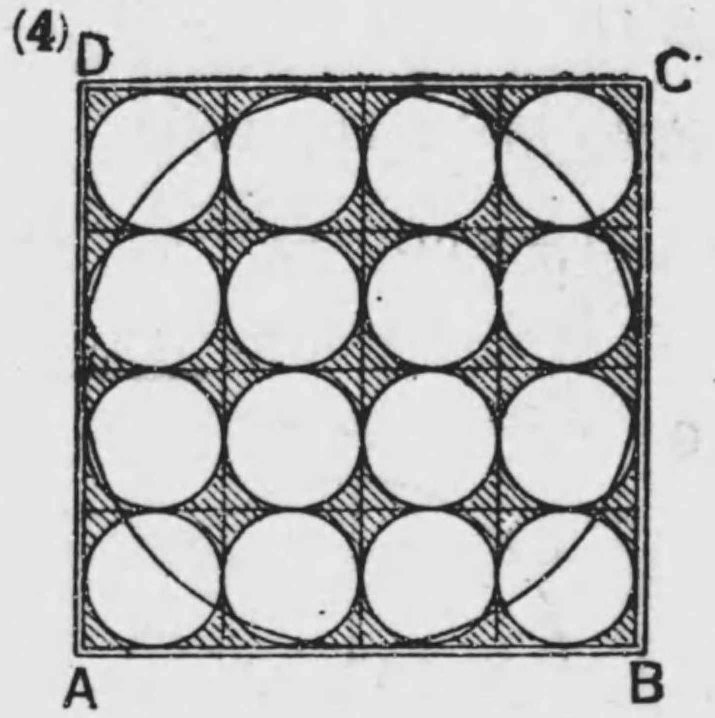
P ハ全圓ノ面積ノ $\dfrac{1}{3}$

R 〃 〃 $\dfrac{1}{3}$

故ニ殘リノ Q モ全圓ノ面積ノ $\dfrac{1}{3}$

注意 AD ヲ n 等分スレバ同樣ニ面積ヲ n 等分スルコトガ出來ル.

(4)



$AB=8a$ トスレバ

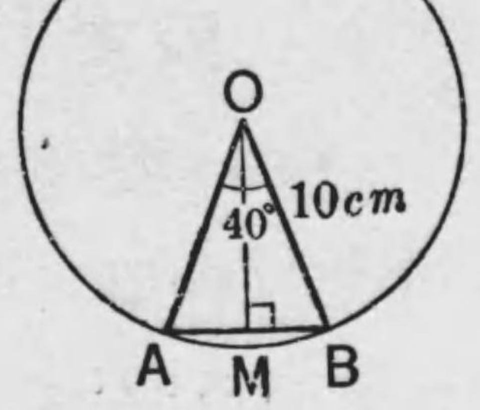
大圓ノ面積ハ $\underline{16\pi a^2}$

小圓ノ一ツノ面積ハ $\underline{\pi a^2}$

小圓全體ノ面積ハ $\underline{16\pi a^2}$

故ニ大圓ノ面積ハ小圓ノ面積ノ和ニ等シイ.

5



$AM = OA\sin 20° = 10 \times 0.3420$

$= 3.42$

$AB = 3.42cm \times 2 = \underline{6.84cm}$

扇形 OAB ノ面積

$\frac{1}{2} \times OA \times$ 弧AB

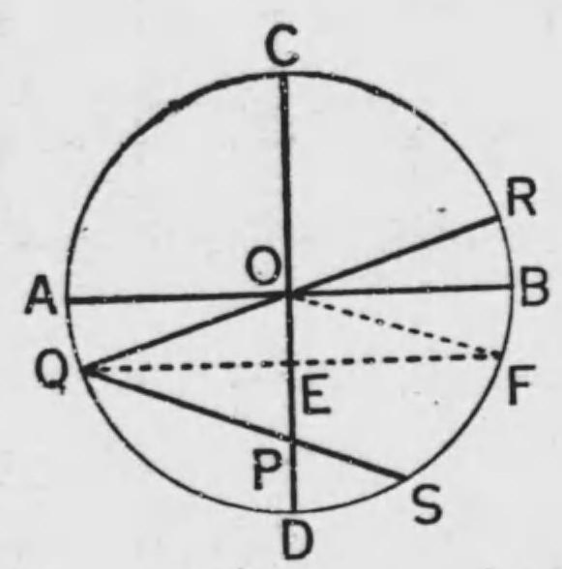
弧$AB = 2\pi \times 10 \times \frac{40}{360} = \frac{62.832}{9}$

依ツテ扇形 OAB ノ面積ハ

$\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{62.832}{9} = 34.9063$

答 $\underline{34.9cm^2}$

6

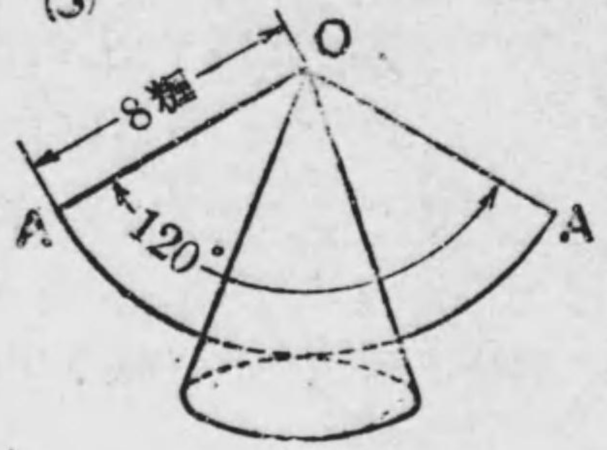


$QE \perp OD$, QE ガ圓周ト交ハル點ヲ F トスレバ,

$\angle OQE = \angle EQS$

$\therefore \ \overset{\frown}{FR} = \overset{\frown}{FS}$ 又 $\overset{\frown}{FB} = \overset{\frown}{BR}$ デアルカラ $3\overset{\frown}{BR} = \overset{\frown}{BS}$

(5)



直圓錐ノ側面積ハ扇形ノ面積ニ相等シイカラ

側面積 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 2\pi \times 8 \times \frac{1}{3} cm^2$

$= \frac{64\pi}{3} cm^2$

底面積ヲ出スタメニ先ヅ底面ノ半徑ヲ出サネバナラヌ.

半徑 $= 2\pi \times 8 \times \frac{1}{3} cm \div 2\pi = \frac{8}{3} cm$

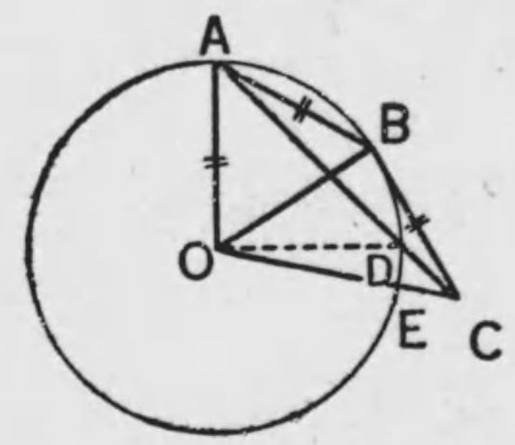
底面積 $= \pi\left(\frac{8}{3}\right)^2 cm^2 = \frac{64\pi}{9} cm^2$

故ニ全表面積 $= \left(\frac{64\pi}{3} + \frac{64\pi}{9}\right) cm^2$

$= \frac{256}{9}\pi \, cm^2$

答 $\underline{89.361cm^2}$

(6)



$OA = AB = OB$

$\angle OBA = 60°$

$\angle ABC = 150°$

$AB = BC$

$\therefore \ \angle BAC = \angle BCA = 15°$

$\therefore \ \angle BOD = 30°$

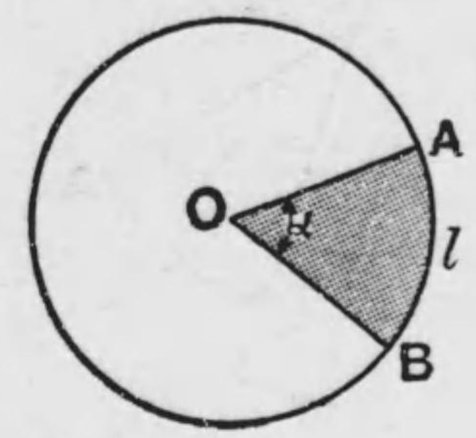
$OB = BC$ デ $\angle OBC =$ R.∟ デアルカラ $\angle BOC = 45$

$\therefore \ \angle DOE = 15°$

$\therefore \ \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{DE} = 2 : 1$

系一　圓ノ面積ハ半徑ノ二乘ニ比例スル。

系二　扇形ノ面積ハ其ノ弧ト半徑トノ積ノ半分デアル。

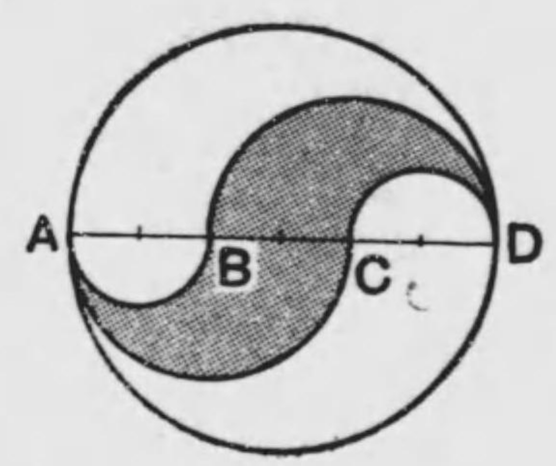


$$\frac{\text{扇形}AOB}{\text{圓}O} = \frac{\angle a}{360°} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2\pi r} = \frac{l}{2\pi r}$$

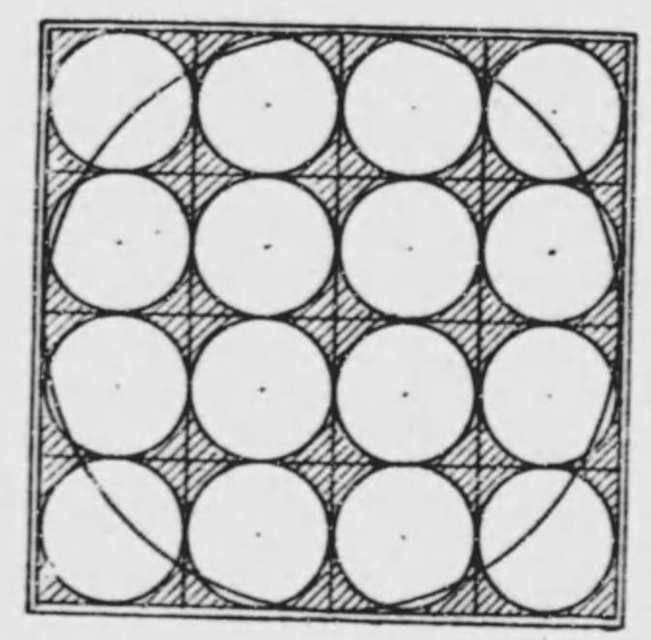
$$\therefore \ \text{扇形 } AOB = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} lr$$

問　題

4　一ツノ圓ノ直徑 AD ヲ B, C ニ於テ三等分シ, AB, AC, BD, CD ヲ夫々直徑トシテ圖ノヤウニ半圓ヲ描キ,曲線 ABD, ACD ニヨツテ圓ヲ三ツニ分ツトキハソノ各部分ノ面積ハ相等シイ。



(4)　圖ノヤウニ一ツノ正方形ヲ16ノ正方形ニ等分スレバ,各正方形ニ內接スル圓ノ面積ノ和ハ大キイ正方形ニ內接スル圓ノ面積ニ等シイ。

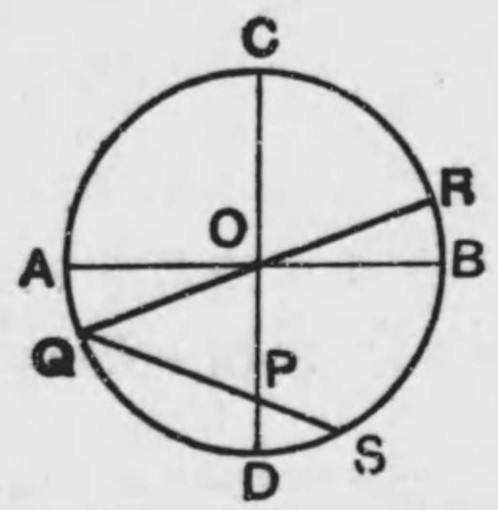


5　半徑ガ10 cm,中心角ガ40°デアル扇形ノ弦及ビ面積如何。

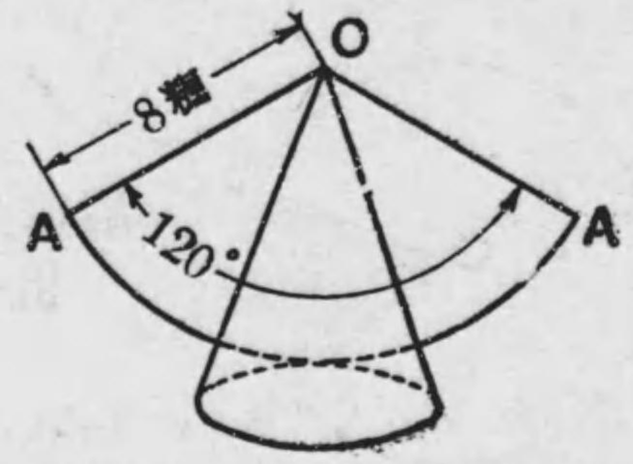
　但シ　$\pi=3.1416$

6　圖ニ於テAOB, CODハ直角ニ交ル直徑デアツテ,PハOD上ノ任意ノ點デOQ, QPハ相等シイトキハ$3\widehat{BR}=\widehat{BS}$

注意　QカラODニ垂直ナ弦ヲ引イテ考ヘヨ。

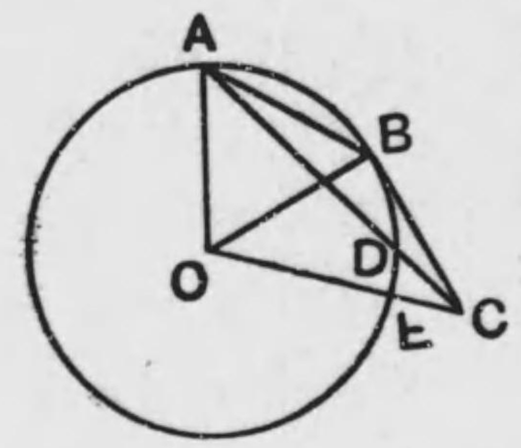


(5)　半徑ガ8 cmデ中心角ガ120°ノ扇形デ作ツタ直圓錐ノ全表面積ヲ求メヨ。

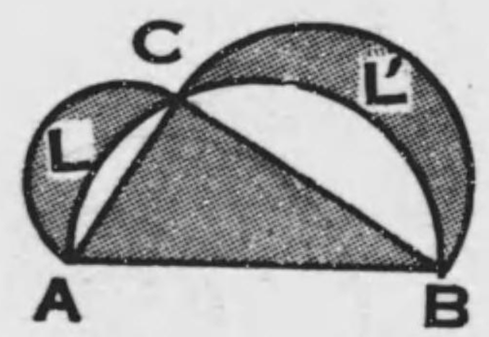


(6)　圖ニ於テ,Oハ圓ノ中心デアツテ,OA, AB, BCハ相等シク,且BCハ切線デアル。

然ラバ　$\widehat{BD}:\widehat{DE}=2:1$

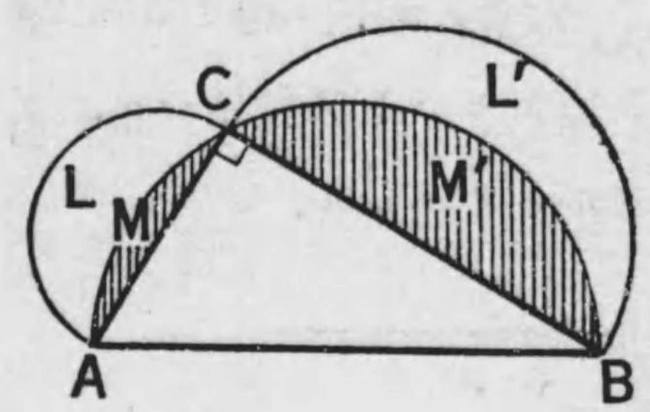


7　直角三角形ABCノ各邊ヲ直徑トシテ半圓ヲ描ケバ圖ノヤウナ月形(二ツノ圓弧デ圍マレタ形)ガ出來ル。△ABCノ面積ハ二ツノ月形L, L'ノ和ニ等シイコトヲ證セヨ。*



*此ノ問題ハ希臘ノヒポクラテスHippocrates(紀元前470年頃)ノ考ヘタモノデアル。

7



ACノ上ノ半圓ノ面積ハ　$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2$　卽チ　$\frac{\pi AC^2}{8}$

BC　〃　〃　$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2$　卽チ　$\frac{\pi BC^2}{8}$

AB　〃　〃　$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2$　卽チ　$\frac{\pi AB^2}{8}$

△ABC　ハ直角三角形デアルカラ

$$AB^2=BC^2+AC^2$$

$$\therefore\ (L+M)+(L'+M')=\triangle ABC+M+M'$$

$$\therefore\ L+L'=\triangle ABC$$

ヒポクラテス Hippocrates

ヒポクラテスハ希臘ノキオスChiosノ人デアル. 若イ時船舶業ヲ營ンデヰタガアデンノ海賊ニ襲ハレテ全財產ヲ掠奪サレタトイフコトデアル. 彼ハ之ヲ裁判ニヨツテ回復セントアデンニ行キ, ココデ哲學ノ講義ヲ聞キ, 彼ハ自ラ幾何學ノ學校ヲ開キ生活ノ資ヲ得タトイフ. 彼ハ幾何學ノ最初ノ本ヲ書イタ. 之ハユークリッドノ原本ノ基礎ヲナシタト思ハレルモノデアル. ソノ書中デ彼ハ初メテ誘導法(Method of reducing)ヲ用ヒタ. 又同弧ノ上ニ立ツ圓周角ノ等シイコトノ定理, 一點ガ弦ニ張ル角ガソノ弓形內ノ角ヨリ大ナルカ, 小ナルカ, 等シイカニ從ツテソノ點ハ弓形內ニアルカ, 外ニ在ルカ, 又ハ弧上ニ在ルトイフ定理, 圓ノ面積ハ直徑ノ二乘ニ比例スル等ノ定理ヲ發見シタ. (次ニ續ク.)

倘立方倍積問題ハ$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$ヲ解クコト，即チ$a$ト$2a$トノ間＝二ツノ比例中項ヲ入レルコト＝歸スルコトヲ發見シタ．又世界最古ノ數學教科書ヲ著ハシタ人デアルトイハレル．

改算記　改算記ハ1656年山田重正ノ著ハシタ算術書デアツテ徳川時代ノ實用算術ヲ敎ヘタモノデアル．

算盤＝ヨル加減乘除，開平開立法ヨリ金錢貸借，物品取引＝於ケル日用諸算，田畑ノ割付，正多角形及ビ圓ノ面積ノ計算ヨリ球並＝截頭角錐ノ體積ノ求メ方，級數，積彈等ノコトガ種々集メテアル．中々高等ナ數學マデ集メテアルガ別＝數理ノ系統＝ヨツテキルノデモナイ．

文中ノ語句解釋．圓廻（圓周），定積（面積），兩々カケテ（二乘シテ），坪（面積），寸坪（寸ヲ單位トシタ面積，即チ平方寸），本坪（元ノ面積），引テハ（延イテハ，減ズル意デハナイ），割付ル（計算スル），少ノコリ有リ（7914ヲ採レバ79ヨリモ幾分大トナル．眞ノ値ハ0.785デアル）．

圓周率トシテ3.16ヲトツテ計算シテキルノハ感心シナイ．

8　寸ヲ單位トスレバ圓周ハ31.6寸デアル．

$$31.6^2=998.56$$

$$998.56\div 79=12.64$$

圓周ノ二乘ハ　$(2\pi r)^2=4\pi^2r^2$　デコレハ圓ノ面積　πr^2　ノ4π倍即チ12.64倍デアル．故＝圓ノ面積ハ圓周ノ二乘ヲ　12.64デ割ツテモヨイ．

(8)　直徑ヲ1尺トシ圓周ヲ3.16尺トトツタノダカラ圓ノ面積トシテ

$$\pi r\times r=1.58\times 0.5=0.79$$

直徑1尺ノ圓ノ面積ハ0.79平方尺デアルカラ79ヲ圓積率ト考ヘタノデアル．

小學校ノ　$0.785\times d^2$　ノ0.785ト此ノ0.79ト同義デ$\frac{\pi}{4}$＝當ル．

圖ハ凡ソ 280 年前ノ書物，

改算記

ノ一頁ヲ寫シタモノデアル。次＝説明ノ部ヲ再錄スル。

徑1尺ノ圓廻3尺1寸6分ヲ32＝割ハ9分8厘7毛5糸ヅツ有,又32ヲ二ツ＝割ハ一方16ヅツ有,是＝9分8厘7毛5糸ヅツ懸レバ1尺5寸8分ト成,是＝5寸ヲカクル時＝79ト成,是圓ノ定積也。又圓周ヲ兩々カケ合後 1264 ヲ以割ハ坪＝成事ハ指渡シ尺ノ廻リ3尺1寸6分兩々置,カクル時寸坪998.56有,是ヲ本坪79ヲ以割ハ1264ト成故12坪6分4厘引テハ本坪1ト直ス心也。又 7914 ヲカケルト云モ右同ジ心モチ＝割付ル也。是＝ハ少ノコリ有ナリ。

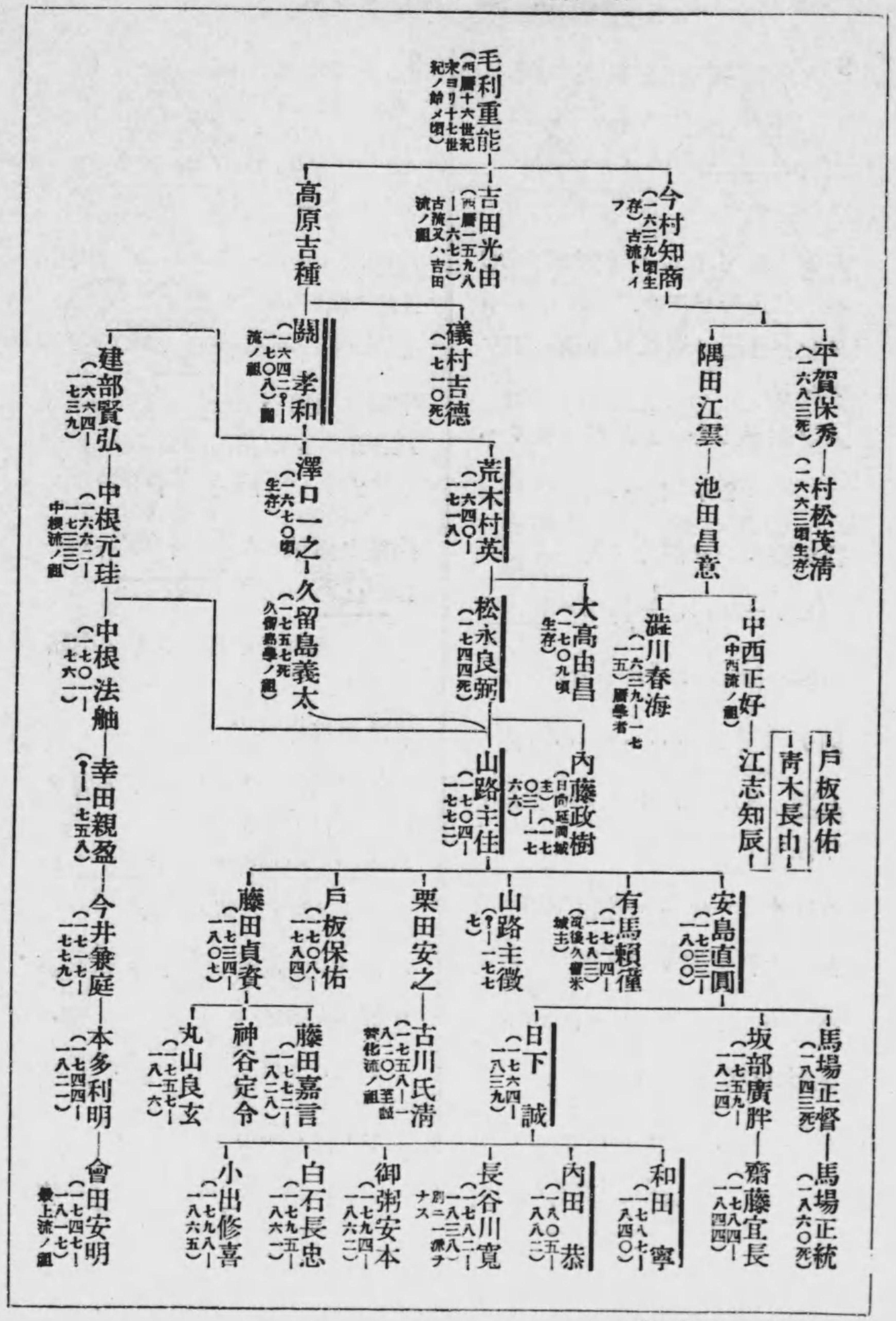
8　上＝云フ1264ハ如何＝シテ出シタ數デアルカ。

(8)　上＝云フ79ハ如何ナル計算カラ出タモノデアルカ。

關 孝 和 (2302—2368)

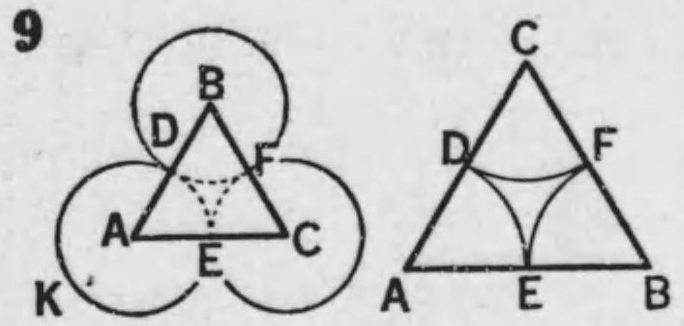
關孝和（西暦1642—1708）ハ上野ノ國藤岡ノ人デアル。幼イトキカラ數理ニ長ジ,六歳デ人ノ計算ヲスルノヲ見テ其ノ誤ヲ指摘シタトイハレル。九歳ニナツテハ,當時ノ算術書"塵劫記"ニ通ジ,神童トマデ唱ヘラレタ。綱重,綱豐(後ノ六代將軍家宣)ノ二代ニ仕ヘ,家宣ガ幕府ノ世子トナツテ西ノ丸ニ入ツタトキ,孝和モ西ノ丸ノ御附キトシテ幕府ノ御家人ニ列セラレタ。深ク數學ヲ研究シテ數理ノ微妙ヲ究メ,前人未到ノ境ニ進ンダ。點竄術(今ノ代數)ヲ創始シ圓理術ヲ發明シタ。實ニ本朝數學ノ鼻祖デアツテ,人皆算聖ト呼ンダ。圓理術ハ圓ノ周及ビ面積,球ノ體積ノ計算ヲスル方法ヲ論ズルモノデアツテ,今ノ所謂微分學積分學ノヤウナモノデアル。微分學積分學ノ創始者トシテ世界ニ知ラレタモノニニユートン(1642—1727)トライプニッツ(1646—1716)トアルガ,關氏ハ之ト年代ヲ同ジクシテ其ノ班ニ列セラレル數學者デアル。實ニ世界數學ノ奇蹟デアツテ又我ガ國數學界ノ誇デアル。

關流算家系譜略



──〔林博士ヨリ〕──

9



<u>左圖</u>　圓 A,B,C ハ等圓デ ABC ハ正三角形デアル. $AB=2r$ トスレバ各圓ノ周及ビ面積ハドウナルカ.

A ノ周ハ $2\pi r$　$\widehat{DKE}$ ノ長サハ

$$2\pi r-2\pi r\times\frac{1}{6}$$

弧デ圍マレタ部分ノ周ハ

$\left(2\pi r-2\pi r\times\frac{1}{6}\right)\times3=\underline{5\pi r}$ 答

面積ハ $\left(\pi r^2-\pi r^2\times\frac{1}{6}\right)\times3$

即チ $\underline{\frac{5}{2}\pi r^2}$…………答

<u>右圖</u>　$AB=2r$ トスレバ各圓ノ半徑ハ r デアルカラ

$\widehat{DE}$ ノ長サハ $2\pi r\times\frac{1}{6}$ 即チ $\frac{\pi r}{3}$

依ツテ弧デ圍マレタ周ハ $\underline{\pi r}$ 答

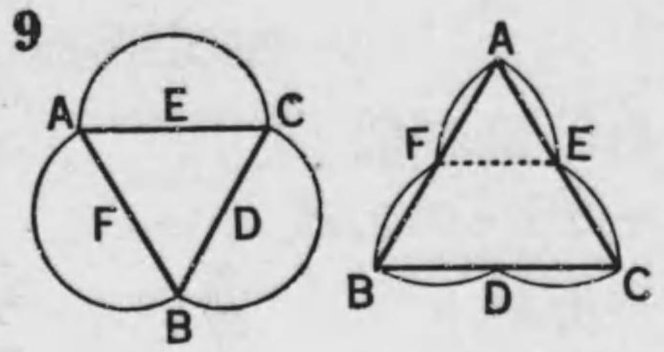
$\triangle ABC$ ノ面積ハ $2r\times\sqrt{3}\,r\times\frac{1}{2}$

扇形 ADE ノ面積ハ $\frac{\pi}{6}r^2$

DEF ノ面積ハ $\sqrt{3}\,r^2-\frac{\pi}{2}r^2$

$$=\underline{\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}r^2}\quad 答$$

9



<u>左圖</u>　$AB=2r$ トスレバ, 半圓 AB ノ弧ハ πr, 全體ノ周ハ $3\pi r$ 等周ノ圓ノ半徑ハ $\underline{\frac{3}{2}}r$ デアル.

半圓ノ面積ハ $\frac{\pi}{2}r^2$

$\triangle ABC$ ノ面積

$$2r\times\sqrt{3}\,r\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}\,r^2$$

全體ノ面積ハ $\underline{\left(\frac{3\pi}{2}+\sqrt{3}\right)}r^2$

$=\underline{6.44r^2}$…………答

<u>右圖</u>　各弧ノ中心ハ各邊ノ中點デアル.

$\widehat{AF}$ ノ長サハ $\frac{\pi}{3}r$

全體ノ周ハ　$2\pi r$. コレト等周ノ圓ノ半徑ハ $\underline{r}$ デアル.

$\triangle ABC$ ノ面積ハ $\sqrt{3}\,r^2$

扇形 EAF ノ面積ハ $\frac{\pi}{6}r^2$

弓形 AF ノ面積ハ $\frac{\pi}{6}r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

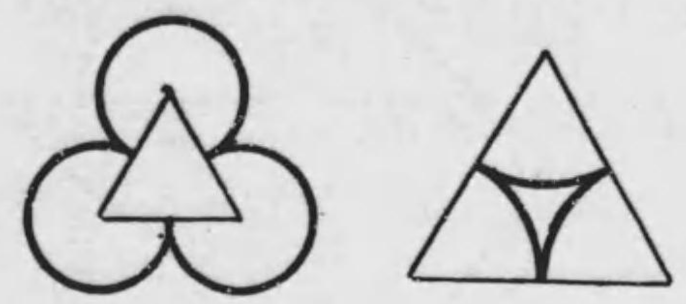
全體ノ面積ハ

$$\sqrt{3}\,r^2+6\left(\frac{\pi r^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}r^3\right)$$

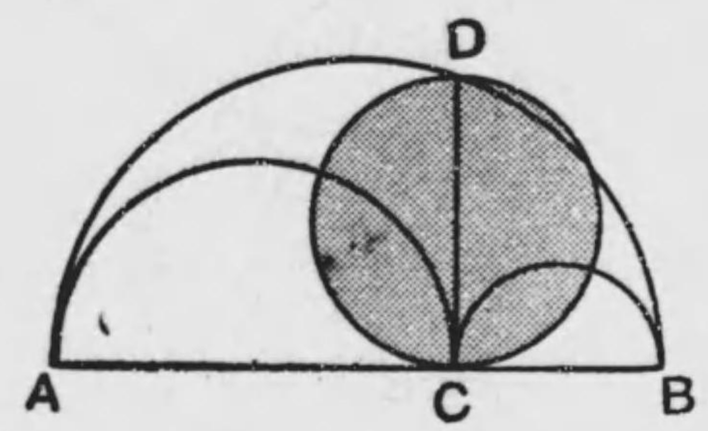
$$=\sqrt{3}\,r^2+\pi r^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$$

$$=\underline{\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}r^2=\underline{2.275r^2}\cdot\cdot 答$$

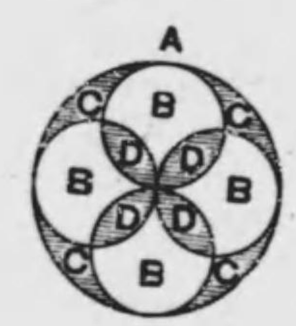
9　次ノ圖ヲ描ケ。又次ノ圖ニ於ケル弧デ圍マレタ部分ノ周及ビ面積ヲ半徑 r デ表ハセ。



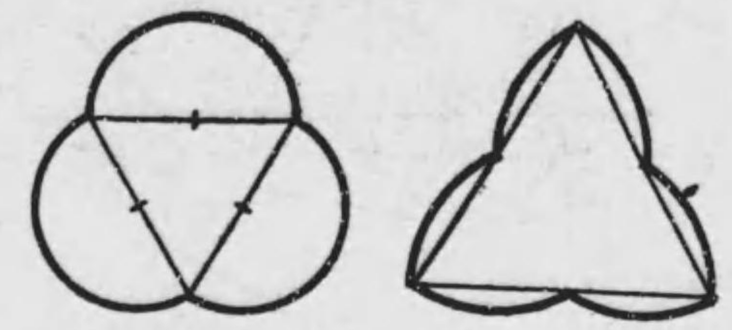
10　AB 上ニ點 C ヲトリ, AB, AC, BC ヲ直徑トシテ AB ノ同側ニ半圓ヲ描クトキハ,此等ノ半圓デ圍マレタ面積ハ C ニ立テタ垂線ノ圓マデノ部分 CD ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シイ。



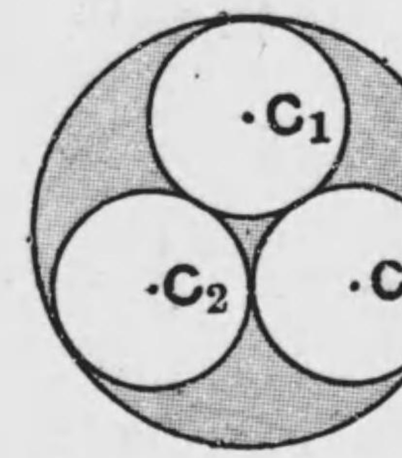
11　次ノ圖ニ於テ C ノ部ノ面積ト D ノ部ノ面積トノ等シイコトヲ示セ。



(9)　次ノ圖ノ面積ヲ半徑 r デ表ハセ。又之ト等周ノ圓ヲ描ケ。



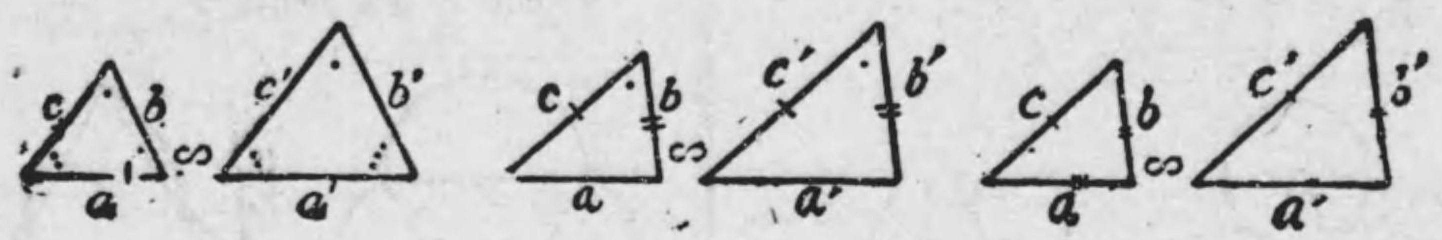
(10)　等圓 C_1, C_2, C_3 ガ圖ノヤウニ一ツノ圓ニ內切シ,又互ニ外切スル。各等圓ノ面積ハ大圓ノ幾分ニ當ルカ。

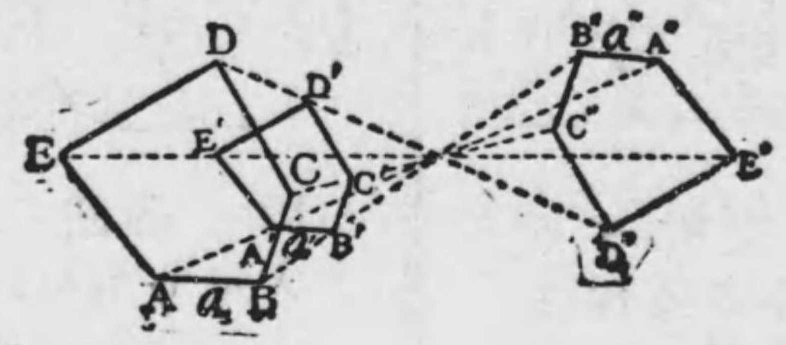


(11)　問題11ニ依リ次ノ圖ニ於テハ圓ノ面積ハ四等分サレルコトヲ示セ。

摘要

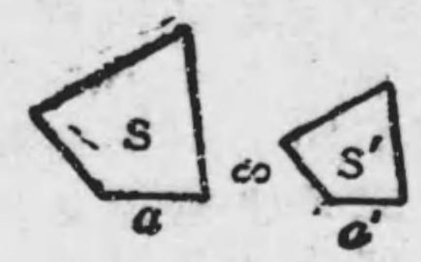
(1) 相似形 相似比, 等角





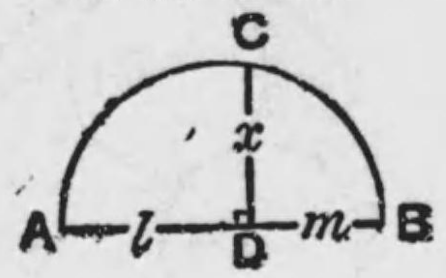
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{a^2}{a'^2}$$

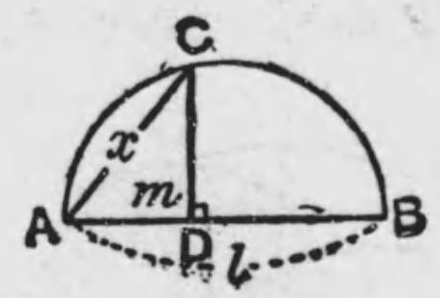


(2) 比例中項

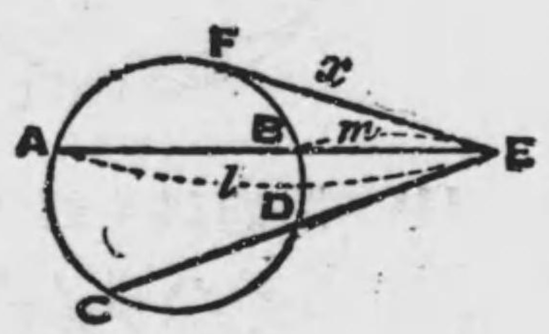
1



2



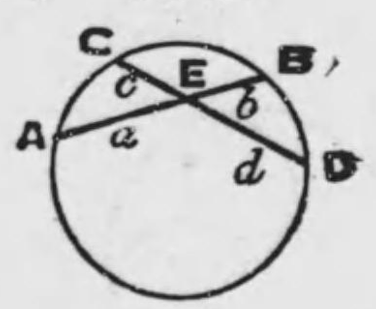
3



$$x^2=lm$$

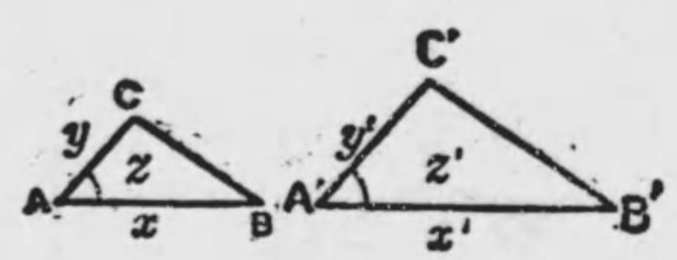
(3) 其他

1



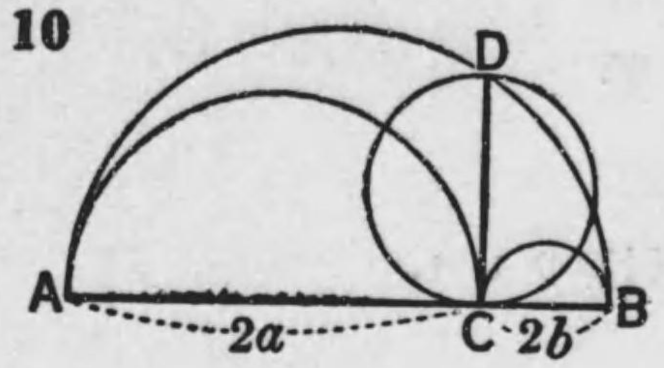
$$ab=cd$$

2



$$\frac{z}{z'}=\frac{xy}{x'y'}$$

10



$AC=2a$, $CB=2b$ トスレバ

AC ノ上ニ立ツ半圓 $\frac{\pi a^2}{2}$

CB 〃 〃 $\frac{\pi b^2}{2}$

AB ノ上 〃 〃 $\frac{\pi(a+b)^2}{2}$

$ACBDA$ ノ面積ハ

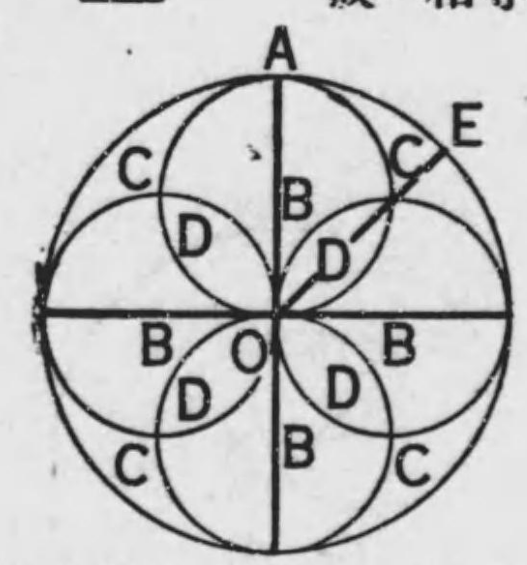
$$\frac{\pi(a+b)^2}{2}-\frac{\pi a^2}{2}-\frac{\pi b^2}{2}=\underline{\pi ab}$$

CD ノ長サハ $2\sqrt{ab}$

CD ヲ直徑トスル圓ノ面積ハ

$\underline{\pi ab}$ 故ニ相等シイ.

11

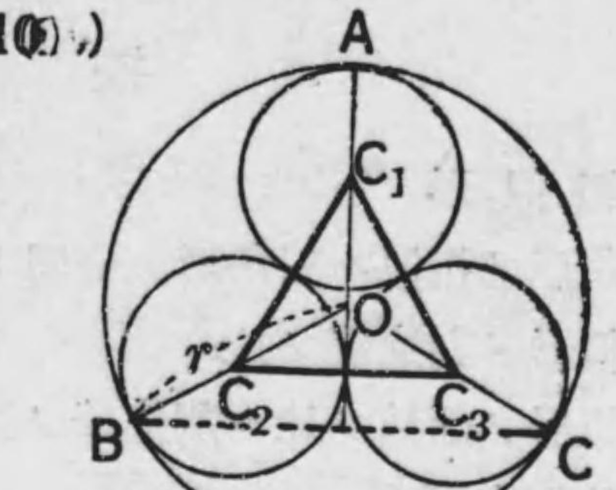


扇形 AOE ハ圓 O ノ８分ノ1ニ當ル.

AO ヲ直徑トスル半圓モ圓 O ノ８分ノ１ニ當ル 故ニ扇形 AOE カラ $\frac{C}{2}$ ヲトツタモノト AO ノ上ノ半圓カラ $\frac{D}{2}$ ヲ取ツタモノト相等シイ.

故ニ $D=C$ デアル.

(10)



AC_1, BC_2, CC_3 ハ共ニ O ヲ通ル.

BC ノ長サヲ r デ表ハセバ $\sqrt{3}\,r$

小圓ノ半徑ヲ x デ表ハセバ

$\frac{OC_2}{OB}=\frac{C_2C_3}{BC}$ カラ

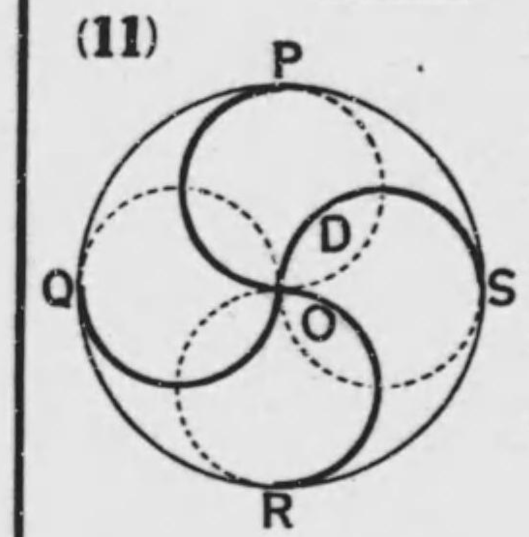
$\frac{r-x}{r}=\frac{2x}{\sqrt{3}\,r}$ $x=(2\sqrt{3}-3)r$

$$\frac{\text{圓}C_1\text{ノ面積}}{\text{圓}O\text{ノ面積}}=\frac{\pi(2\sqrt{3}-3)^2r^2}{\pi r^2}$$

$=21-12\sqrt{3}$

$=\underline{0.2148}$ ‥‥答

(11)



面積 POS
$=$ 扇形 POS
$+$ 半圓 PD
$-$ 半圓 DS
$=$ 扇形 POS
$=$ 圓 $O\times\frac{1}{4}$

別解 OPS ノ面積ハ小圓ヘ C ヲ加ヘ, ソレカラ D ヲ減ジタモノデアツテ, 且ツ小圓ハ圓 O ノ４分ノ１ニ當ツテヰルカラ, OPS ハ圓 O ノ４分ノ１デアル.

摘　要

(1) 相似形

三角形ノ相似ハ三角形ノ合同ト比較對照サセヨ.

相似形ノ對應邊ノ比.

相似形ノ面積ノ比＝對應邊ノ二乘比.

(2) 比例中項

比例中項及ビ第三比例項ノ作圖.

比例中項ノアラハレル基本ノ場合 (三ツ)

(3) 弦ノ分ノ包ム矩形. 一角ノ等角 (或ハ補角) ノ三角形ノ面積ノ比.

(4) 三角函數ノ整理

名稱　六ツ

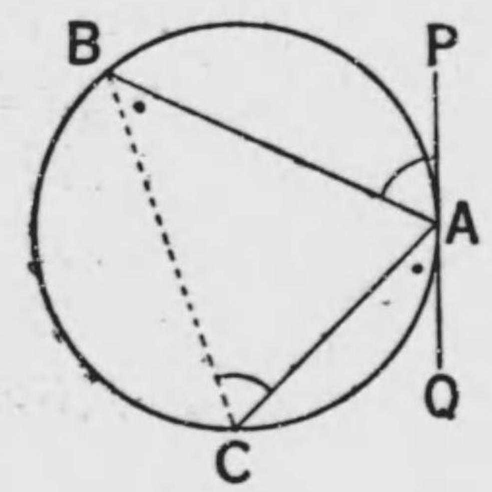
相互間ノ關係ヲ表ハス公式.

(5) 測　量

(6) 圓

雜　題

1



$\angle PAB = \angle ACB$

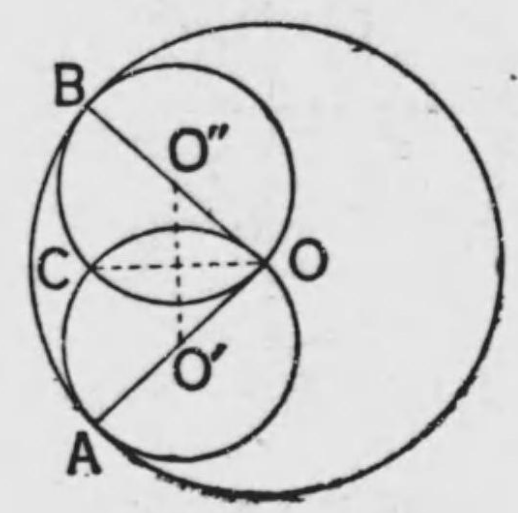
$\angle CAQ = \angle ABC$

$\therefore \angle PAB : \angle BAC : \angle CAQ$

$= \angle ACB : \angle BAC : \angle ABC$

$= \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA}$

(1)

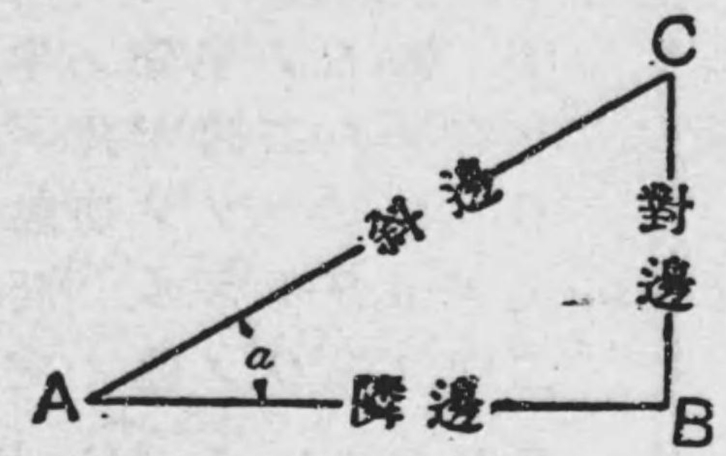


$O'O'' \perp OC$ デ, $OO'' = OO'$ デアルカラ $\angle O'OC = \angle COO''$

O', O'' ハ等圓デアルカラ

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC}$

(4) 三角函數



正弦　$\sin A = \dfrac{對邊}{斜邊}$

餘弦　$\cos A = \dfrac{隣邊}{斜邊}$

正切　$\tan A = \dfrac{對邊}{隣邊}$

餘切　$\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$　　$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

正割　$\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$　　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

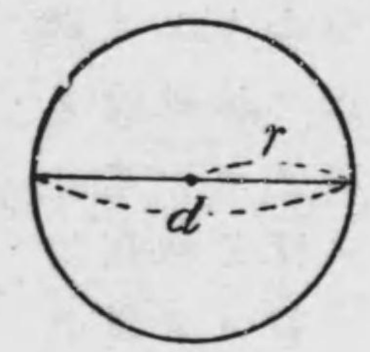
餘割　$\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$　　$1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A$

$1 + \cot^2 A = \dfrac{1}{\sin^2 A} = \operatorname{cosec}^2 A$

(5) 測量上ノ術語

鉛直線,鉛直面；水平線,水平面；仰角,俯角；距角

(6) 圓



圓周　$= \pi d = 2\pi r$

圓ノ面積$= \pi r^2$

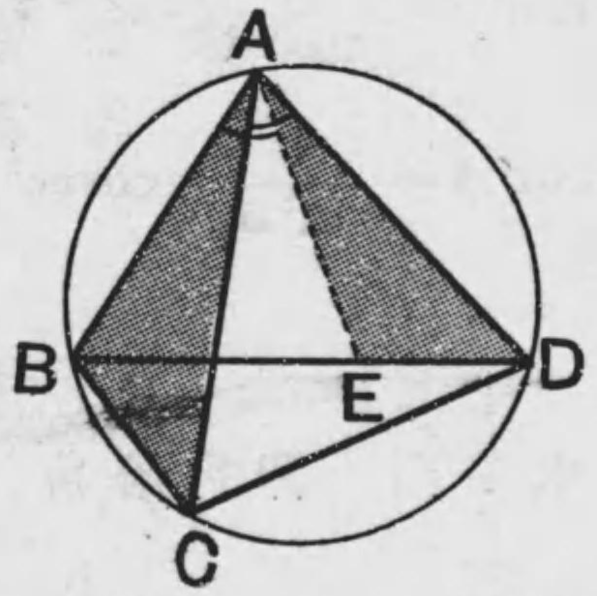
扇形ノ面積$= \dfrac{1}{2} lr$

雜　題

1 圓ノ切線 PAQ ノ切點 A カラ弦 AB, AC ヲ引ケバ,

$$\angle PAB : \angle BAC : \angle CAQ = \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA}$$

2 圓ニ內接スル四邊形ノ二双ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ,ソノ兩對角線ノ包ム矩形ニ等シイ。



注意　$\triangle ABC \backsim \triangle AED$

$AD \cdot BC = AC \cdot DE$

(1) 圓 O ノ半分ノ半徑ヲ有スル二圓ガ共ニ圓 O ニ內切シ,ソノ切點ヲ夫々 A, B トスル。此ノ二圓ノ點 O ノ他ノ交點ヲ C トスレバ, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$

注意　$\angle AOC = \angle BOC$

(2) 圓ノ內接四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ニ交ルトキハ,ソノ二双ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ此ノ四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シイ。

問題 2 ヲトレミー(Ptolemy)ノ定理ト言フ。

トレミーハ二世紀ニ於ケルエヂプトノ偉大ナ天文學者デアツテ又數學者デアル。彼ハ幾分地球ノ自轉ヲ感知シテキナイノデハナカツタガ,宇宙ノ中心ハ地球デアルト考ヘ,太陽ト惑星トハ地球ヲ中心トシテ廻轉スルト說イタ。コペルニカス (1473—1543) ガ出テ,地動說ヲ唱ヘルニ到ルマデ千餘年間ノ天文科學界ノ權威ヲナシタ。彼ハ又數學ニ於ケル發明發見モ多ク角ノ單位ノ度,分,秒,圓周率ノ値トシテノ $3\frac{17}{120}$ ($=3.1416$) 等モ彼ノ著書中ニ初メテ見ラレル所デアル。

2 $\angle DAE = \angle BAC$ トシ AE ガ BD ト交ハル點ヲ E トスル.

$\angle ACB = \angle ADE$

$\triangle ABC \backsim \triangle AED$

$AC : BC = AD : DE$

即チ　$BC \cdot AD = AC \cdot DE$

又 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$ デアルカラ

$AB : BE = AC : CD$

即チ　$AB \cdot CD = AC \cdot BE$

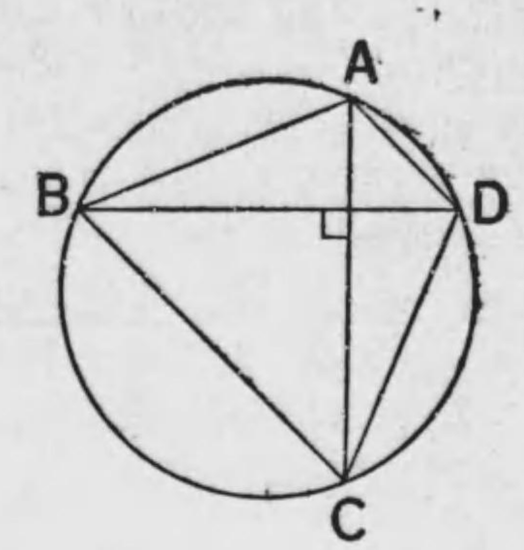
故ニ　$AB \cdot CD + BC \cdot AD$

$= AC \cdot DE + AC \cdot BE$

$= AC(DE + BE)$

$= AC \cdot BD$

(2)



問題 2 カラ

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

$AC \cdot BD$ ハ $\square ABCD$ ノ 2 倍デアル.

故ニ　$AB \cdot CD + BC \cdot AD = 2\square ABCD$

問題 2 ハトレミーノ定理トイハレル. ソノ一般ノ四邊形ニ擴張シタ定理及ビ球面幾何學ニ擴張シタ定理ガアル.

トレミー Ptolemy ノ傳

クラウディアス・トレミー (Claudius Ptolemy) ハ埃及ノ有名ナル天文學者デアルガ, 紀元 135 年頃アレクサンドリアニ住ンデ居タコト, 彼ノ著書ニ於テ紀元125年ニ最初ノ天文觀測ヲナシ, 151年ニ最後ノ天文觀測ヲナシタトイフコトノ他ニ, 彼ノ人トナリニツイテノ記錄ハ何モナイ.

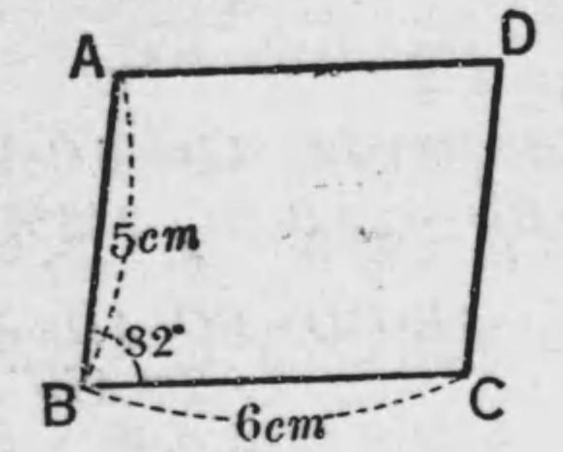
彼ハ「アルマゲスト」Almagest ト「ゲヲグラフイカ」Geographica トノ二書ヲ著ハシタ.

「アルマゲスト」ハコペルニカス Copernicus (1473—1543) ニ到ルマデノ天文學ノ基礎ヲナスモノデ全13巻ヨリ成ツテヰル. ソノ第一巻ノ章ハ圓ノ弦ノ長サノ計算ヲナス方法ヲ示シタモノデ, 圓周ヲ360等分シテ秒トナシタコトガ, 此ノ書中ニ初メテ見ラレル. 尙第一巻ニ於テハ平面及ビ球面三角法ニツイテ論ジテアル.

3 半徑6cm ノ圓ノ面積 $\pi\times6^2cm^2$
半徑8cm………… $\pi\times8^2cm^2$
二圓ノ和ハ $100\pi cm^2$. 之ト等積ナ圓ノ半徑ヲ x cm トスレバ
$\pi x^2=100\pi,\quad x^2=100$
答 半徑10cm

又ハ 6cm, 8cm ヲ二隣邊トスル直角三角形ヲ描キ, 斜邊ヲ直徑トスル圓ヲ描ケ.

4



BC ヲ底邊トスルト高サハ
$AB\sin 82^\circ$
ABCD ノ面積 $=6\times5\sin82^\circ$
$=30\times0.9903=29.709$
答 $29.7cm^2$

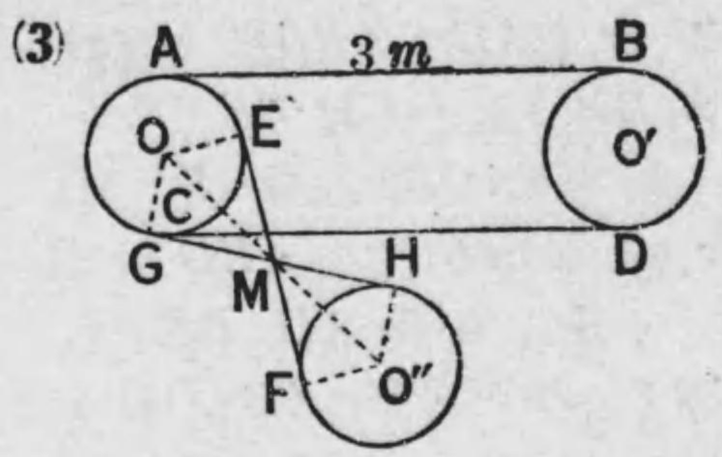
5 線路ガ水平線トナス角ヲ x° トスレバ $\sin x=\dfrac{37}{1000}=0.037$
表カラ $x=2^\circ$ 約 答 2°約
(詳細ニ求メルト 2°7′.3)

---

(5) 勾配 $\dfrac{1}{40}$ トハ道路40m ニ對シテ1m ノ上リノコトデアルカラ, 之ハ $\dfrac{1}{50}$ ノ勾配ヨリ, $\dfrac{1}{40}-\dfrac{1}{50}$
$=\dfrac{5}{200}-\dfrac{4}{200}=\dfrac{1}{200}$ (角度ニ直セバ 17′.3) 200m ノ行程ニ對シテ上リノ1m ダケ急デアル. 又10m ノ上リニハ行程ハ400m ト 500m デアルカラ, ソノ差ハ100m デアル.

答 $\begin{cases}\dfrac{1}{200}\\ 100m\end{cases}$

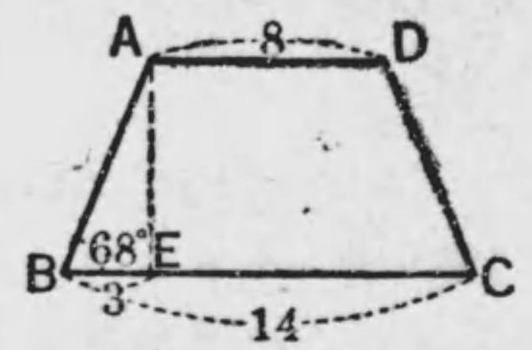
(3)



同方向ノ場合
圓 O ノ圓周ハ 1m×3.14
ベルトノ長サハ 3m×2+3.14
=9.14m

異方向ノ場合 $\triangle EOM$ ヲ考ヘルト, $2EO=OM$ デアルカラ
$\angle MOE=60^\circ$
$\therefore\ \widehat{GAE}=1m\times\pi\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}\pi m$
$EM=OM\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}m$
依ツテベルトノ長サハ
$\dfrac{2}{3}\pi m\times2+\dfrac{3\sqrt{3}\,m}{4}\times4=9.38m$
答 9.14m. 9.38m

(4)



$BE=3cm,$
$AE=BE\tan68^\circ=3\times2.4751$
$=7.4253$
故ニ面積 $=(8+14)\times7.4253\div2$
$=81.6783$
答 約 $81.7cm^2$

3 半徑ガ6cmト8cmデアル二圓ノ和ニ等シイ面積ヲ有スル圓ヲ描ケ.

4 相隣ル二邊ガ5cmト6cmトデアツテ,其ノ夾角ガ82°デアル平行四邊形ノ面積如何.

5 鐵道線路ノ勾配[•]ガ

37デアルトキ,線路ト水平線トノナス角ハ何程デアルカ. 但シ勾配37トハ37:1000ノ略稱デアツテ,線路1kmニ對シテ上リガ37mデアル事ヲ意味スル.

(3) 直徑1mノ二ツノ車ノ軸ノ間ヲ3m隔テテ同方向ニ回轉サセヨウトスル. 何米ノ「ベルト」ヲ要スルカ. 又2mヲ隔テテ異方向ニ回轉セシメルニハ「ベルト」何米ヲ要スルカ.

(4) 上底ガ8cm下底ガ14cm下底ノ兩端ノ角ガ68°デアル等脚梯形ノ面積如何.

(5) 或ル道路ノ勾配ガ $\dfrac{1}{40}$ デアツテ,他ノ道路ノ勾配ハ $\dfrac{1}{50}$ デアルトイフ[••]. 何レガ何程急デアルカ. 又此ノ二ツノ道路ニ依リ10mノ地點ニ上ル爲ニハ行ク距離ノ差如何.

• 勾配ハ角ノ正切ヲ言フベキモノデアルガ,角ノ極メテ小サイトキハ,正切ト正弦トハ殆ンド相等シイカラ,測量ノ容易デアル爲鐵道ノ勾配等ハ角ノ正弦ヲ以テ勾配トスル.
•• 一般ニ勾配ハ分子ヲ1ニシタ分數デ表ハス.

6 300mノ糸デ凧ヲ揚ゲタノニ,糸ハ水平線ト35°ノ角ヲナシタ．糸ガ一直線ヲスルモノト假定シテ凧ノ高サヲ計算セヨ．

(6) 崖ノモトカラ30m離レタ處デ崖ノ上ヲ見タノニ,仰角ガ38°アツタ．崖ノ高サヲ求メヨ．

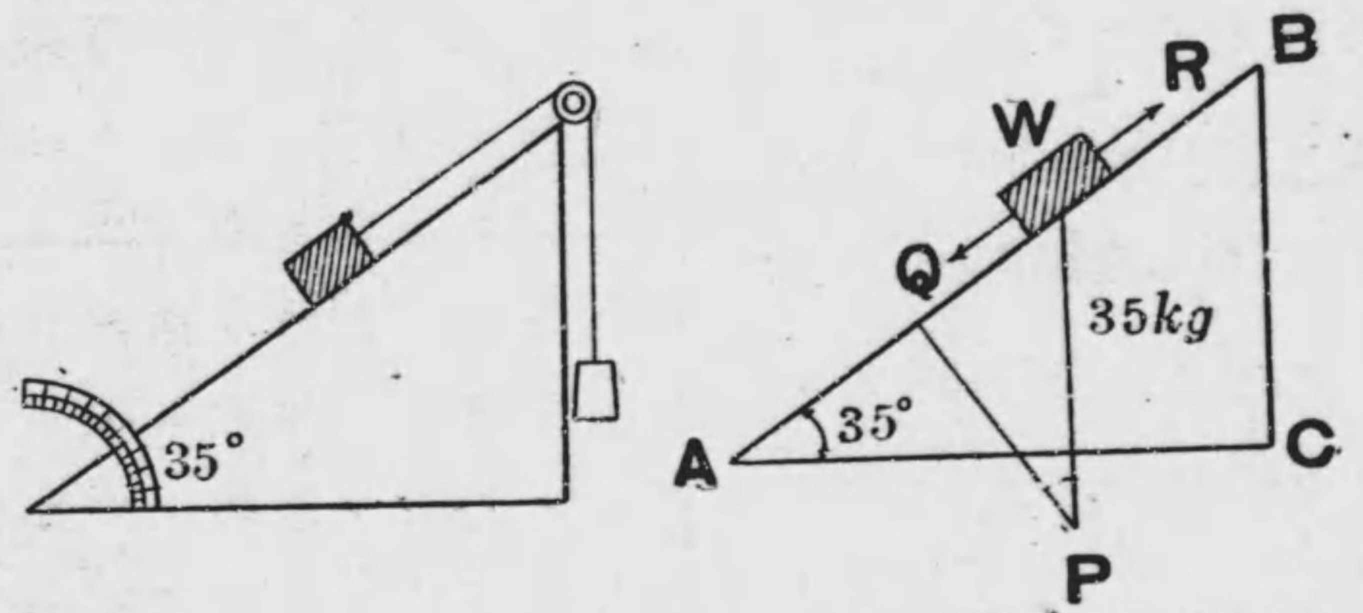
7 $\sin A=\dfrac{1}{3}$ デアルトキ,$\cos A$, $\tan A$ ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ．

(7) $\cos A=\dfrac{2}{5}$ デアルトキ, $\cot A$, $\operatorname{cosec} A$ ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ．

8 $\sin x=\dfrac{3}{5}$デアルトキ $\angle x$ ヲ作圖セヨ．

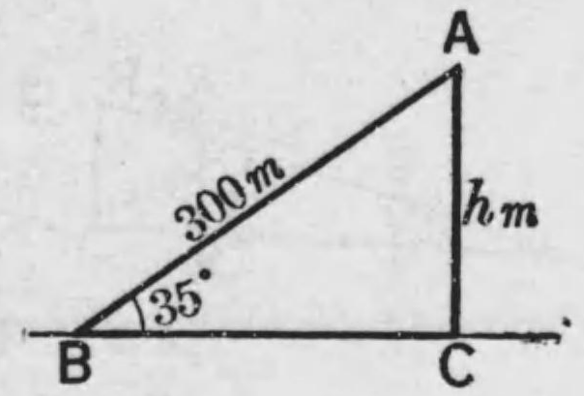
(8) $\tan x=0.25$ ノトキ $\angle x$ ヲ作圖セヨ．

9 重サ35kgノ物體ガ水平面ト35°ノ角ヲナス斜面ニ在ルトキ,之ヲ靜止ノ狀態ニ保ツニハ滑車ヲ通シテ如何ナル錘ヲ吊シタラヨイカ．



〔注意〕 一般ニ,水平面ト角Aヲナス斜面上ノ物體ノ重サヲ線分 WP デ表ハストキ,之ハ鉛直ノ方向ニ向ヒ,斜面ニ沿フ力 WQ ハ $WP\sin A$ デアツテ,錘ニ依ツテ引ク力 WR ハ WQ ニ等シク,從ツテ $WP\sin A$ デアル．

6



Aヲ凧ノ位置トスレバ, 高サ hm ハ

$$h=300\times\sin 35^\circ$$
$$=300\times0.5736=172.08$$

答 172m

7 $\sin A=\dfrac{1}{3}$

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2}{3}\times1.4142$$
$$=0.9428$$

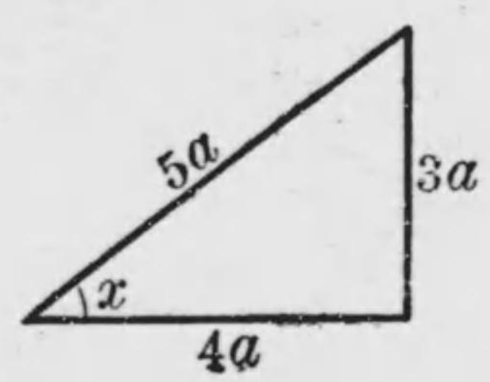
答 0.94

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}=0.35355$$

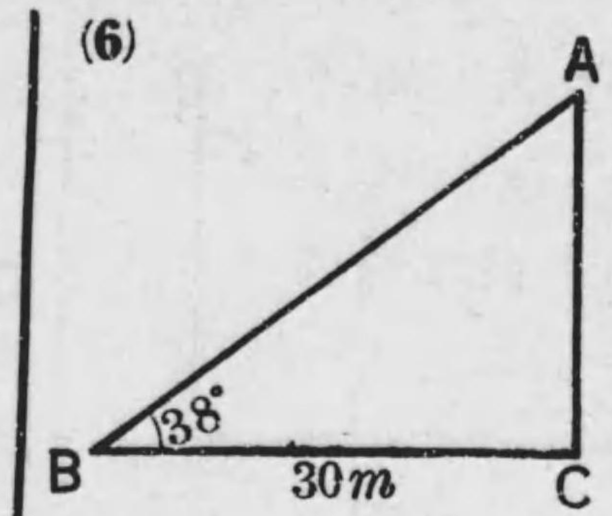
答 0.35

〔備考〕 一般ニ360°以內ノ角デ $\sin A$ トシテ一ツノ値$\dfrac{1}{3}$ヲ與ヘルト, 之ニ應ズル$\cos A$, $\tan A$ハ二ツノ値(±)ガ出ルノデアルガ, ココデハ 90°ヨリ大キイ角ノ三角函數ヲ云ツテヰナイカラ正ノミヲトル．

8



(6)



Aヲ崖ノ頂トシテCAヲ崖ノ高サトスレバ

$$CA=BC\tan 38^\circ$$
$$=30\times0.7813=23.439$$

答 23.4m

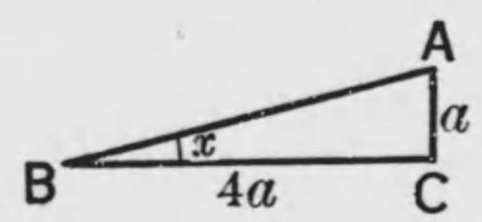
(7) $\cos A=\dfrac{2}{5}$

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$
$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{4}{25}}$$
$$=\frac{\sqrt{21}}{5}$$
$$\therefore\ \cot A=\frac{2}{5}\times\frac{5}{\sqrt{21}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$
$$=\frac{2\times4.5826}{21}=0.4364$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{5}{\sqrt{21}}=1.0911$$

答 0.436, 1.091

〔備考〕 正ノミヲトル．一般ニハ正負ニ値ガ得ラレル．

(8) $\tan x=0.25$
$$=\frac{1}{4}$$

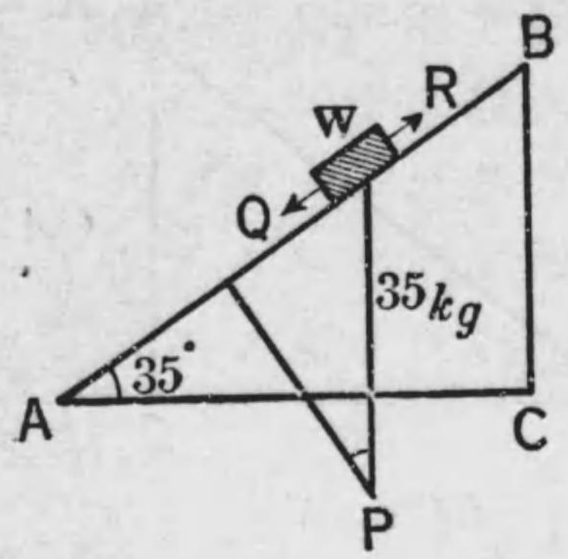


$BC\perp CA$
$BC=4a$
$CA=a$
ニトレバ

$\angle CBA$ ハ x ヲ與ヘル．

任意ノ單位 a ヲ定メ, 5a, 4a, 3a ヲ邊トスル直角三角形ヲ描キ, 其ノ3aニ對スル角ガ所要ノ角xデアル．

9



教科書ノ注意ニヨツテ

$WR=WP\sin A$

$=35\times\sin 35^\circ$

$=35\times 0.5736=20.076$

答 $\underline{20kg}$

10 屈折率$=\dfrac{\sin ECM}{\sin BCN}=\dfrac{\sin PEC}{\sin ABC}$

$$=\frac{\frac{PC}{EC}}{\frac{AC}{BC}}=\frac{PC\cdot BC}{EC\cdot AC}=\frac{4}{3}$$

$PC=18dm\quad AC=27dm$

$EC=\sqrt{5^2+18^2}$

$\dfrac{PC\cdot BC}{EC\cdot AC}=\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{18\times BC}{\sqrt{5^2+18^2}\times 27}=\dfrac{4}{3}$

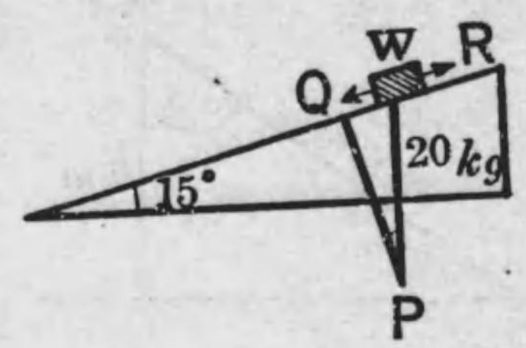
$BC=2\sqrt{5^2+18^2}=\sqrt{1396}$

$AB=\sqrt{BC^2-CA^2}=\sqrt{667}$

$=25.83$

答 $\underline{25.83dm}$

(9)



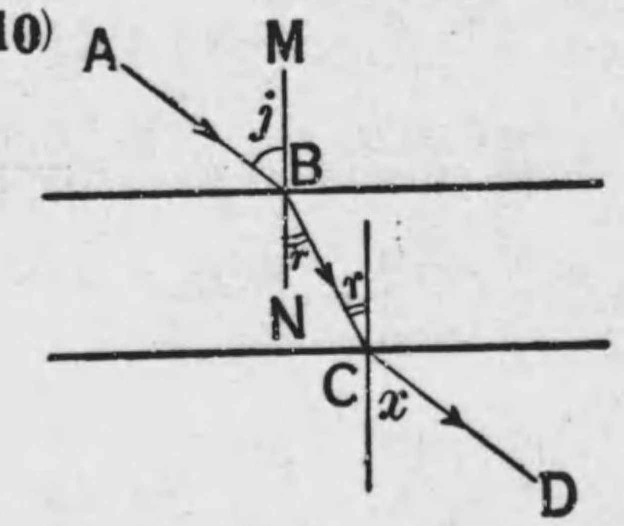
物體ノ重サヲWkgトスルト，之ガ斜面ニ沿フ分力WQハ$WP\sin 15^\circ$デ，之ガ20kgノ錘ニ釣合ヘバヨイ。

即チ　$WP\sin 15^\circ=20$

$$WP=\frac{20}{\sin 15^\circ}=\frac{20}{0.2588}=77.28$$

答 $\underline{77.28kg}$

(10)



光ガ甲媒質例ヘバ空氣カラ乙媒質例ヘバガラスヘ入ルトキノ入射角ヲi，屈折角ヲr，屈折率ヲμ，トシ，再ビ空氣中ヘ出ルトキノ屈折角ヲx，屈折率ヲμ'トスレバ

$$\mu=\frac{\sin i}{\sin r}$$

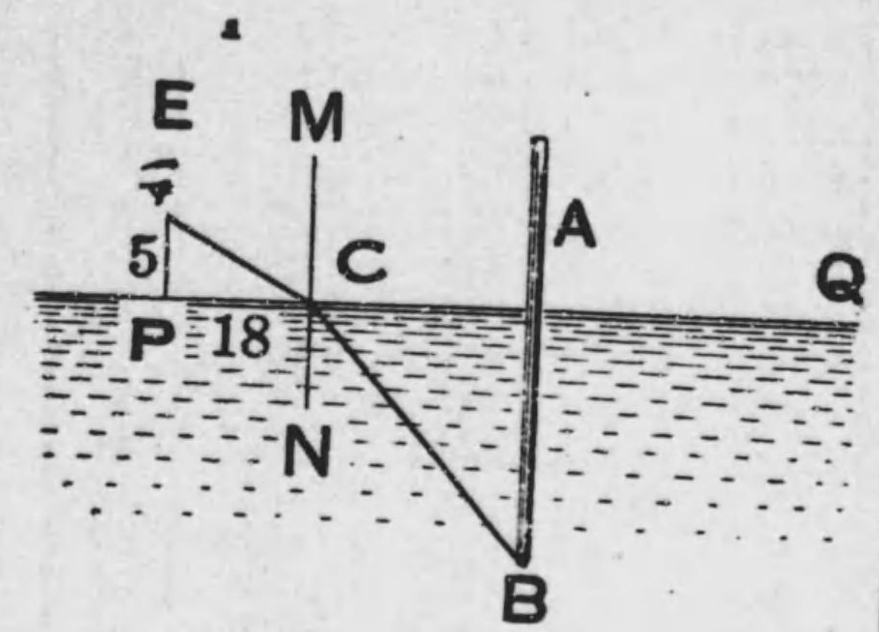
$$\mu'=\frac{1}{\mu}=\frac{\sin r}{\sin x}$$

$$\therefore\ \frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\sin x}{\sin r}$$

$\therefore\ \sin i=\sin x\qquad\therefore\ x=i$

同位角ガ等シイカラ

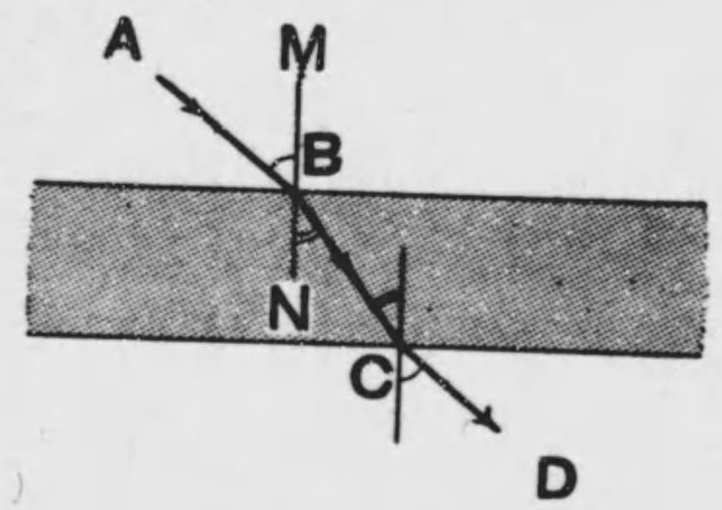
$AB\parallel CD$



光線ガ空氣中カラ水中ニ入ルトキ屈折率*ハ$\dfrac{4}{3}$デアル。今水中ニ垂直ニ立テラレタ杭ABノ一端Bヲ,水面PQ上5dmノ點Eカラ見タノニ,觀測者ノ脚下Pカラ水面上18 dmノ距離ニアル點Cニ於テ見エタ。杭ノ水中ノ部分ABノ長サヲ求メヨ。但シCAハ27 dmアル。

(9) 斜面ノ角ガ15°デアルトキ20 kgノ錘ニ依ツテ釣合ヒ得ル物體ノ重サハ何程カ。

(10) 光ガ空氣中カラ,板ガラスノ如キ平行平面ヲ有スル物體ニ入ツテ再ビ空氣中ニ出ルトキハ,光ノ進入スル方向ハ其ノ出ル方向ト平行デアルコトヲ證セヨ。



備考　空氣中カラガラスニ入ルトキノ屈折率ハ$\dfrac{3}{2}$デアツテ,ガラスカラ空氣中ニ入ルトキノ屈折率ハ$\dfrac{2}{3}$デアル。

*屈折率$=\dfrac{\text{入射角ノ正弦}}{\text{屈折角ノ正弦}}=\dfrac{\sin ABM}{\sin CBN}$

平方・立方・平方根・立方根ノ表

數	平方	立方	平方根	立方根	數	平方	立方	平方根	立方根
1	**1**	**1**	**1.0000**	**1.0000**	**51**	**2,601**	**132,651**	**7.1414**	**3.7084**
2	4	8	1.4142	1.2599	52	2,704	140,608	7.2111	3.7325
3	9	27	1.7321	1.4422	53	2,809	148,877	7.2801	3.7563
4	16	64	2.0000	1.5874	54	2,916	157,464	7.3485	3.7798
5	**25**	**125**	**2.2361**	**1.7100**	**55**	**3,025**	**166,375**	**7.4162**	**3.8030**
6	36	216	2.4495	1.8171	56	3,136	175,616	7.4833	3.8259
7	49	343	2.6458	1.9129	57	3,249	185,193	7.5498	3.8485
8	64	512	2.8284	2.0000	58	3,364	195,112	7.6158	3.8709
9	81	729	3.0000	2.0801	59	3,481	205,379	7.6811	3.8930
10	**100**	**1,000**	**3.1623**	**2.1544**	**60**	**3,600**	**216,000**	**7.7460**	**3.9149**
11	121	1,331	3.3166	2.2240	61	3,721	226,981	7.8102	3.9365
12	144	1,728	3.4641	2.2894	62	3,844	238,328	7.8740	3.9579
13	169	2,197	3.6056	2.3513	63	3,969	250,047	7.9373	3.9791
14	196	2,744	3.7417	2.4101	64	4,096	262,144	8.0000	4.0000
15	**225**	**3,375**	**3.8730**	**2.4662**	**65**	**4,225**	**274,625**	**8.0623**	**4.0207**
16	256	4,096	4.0000	2.5198	66	4,356	287,496	8.1240	4.0412
17	289	4,913	4.1231	2.5713	67	4,489	300,763	8.1854	4.0615
18	324	5,832	4.2426	2.6207	68	4,624	314,432	8.2462	4.0817
19	361	6,859	4.3589	2.6684	69	4,761	328,509	8.3066	4.1016
20	**400**	**8,000**	**4.4721**	**2.7144**	**70**	**4,900**	**343,000**	**8.3666**	**4.1213**
21	441	9,261	4.5826	2.7589	71	5,041	357.911	8.4261	4.1408
22	484	10,648	4.6904	2.8020	72	5,184	373,248	8.4853	4.1602
23	529	12,167	4.7958	2.8439	73	5,329	389,017	8.5440	4.1793
24	576	13,824	4.8990	2.8845	74	5,476	405,224	8.6023	4.1983
25	**625**	**15,625**	**5.0000**	**2.9240**	**75**	**5,625**	**421,875**	**8.6603**	**4.2172**
26	676	17,576	5.0990	2.9625	76	5,776	438,976	8.7178	4.2358
27	729	19,683	5.1962	3.0000	77	5,929	456,533	8.7750	4.2543
28	784	21,952	5.2915	3.0366	78	6,084	474,552	8.8318	4.2727
29	841	24,389	5.3852	3.0723	79	6,241	493,039	8.8882	4.2908
30	**900**	**27,000**	**5.4772**	**3.1072**	**80**	**6,400**	**512,000**	**8.9443**	**4.3089**
31	961	29,791	5.5678	3.1414	81	6,561	531,441	9.0000	4.3267
32	1,024	32,768	5.6569	3.1748	82	6,724	551,368	9.0554	4.3445
33	1,089	35,937	5.7446	3.2075	83	6,889	571,787	9.1104	4.3621
34	1,156	39,304	5.8310	3.2396	84	7,056	592,704	9.1652	4.3795
35	**1,225**	**42,875**	**5.9161**	**3.2711**	**85**	**7,225**	**614,125**	**9.2195**	**4.3968**
36	1,296	46,656	6.0000	3.3019	86	7,396	636,056	9.2736	4.4140
37	1,369	50,653	6.0828	3.3322	87	7,569	658,503	9.3274	4.4310
38	1,444	54,872	6.1644	3.3620	88	7,744	681,472	9.3808	4.4480
39	1,521	59,319	6.2450	3.3912	89	7,921	704,969	9.4340	4.4647
40	**1,600**	**64,000**	**6.3246**	**3.4200**	**90**	**8,100**	**729,000**	**9.4868**	**4.4814**
41	1,681	68,921	6.4031	3.4482	91	8,281	753,571	9.5394	4.4979
42	1,764	74,088	6.4807	3.4760	92	8,464	778,688	9.5917	4.5144
43	1.849	79,507	6.5574	3.5034	93	8,649	804,357	9.6437	4.5307
44	1,936	85,184	6.6332	3.5303	94	8,836	830,584	9.6954	4.5468
45	**2,025**	**91,125**	**6.7082**	**3.5569**	**95**	**9,025**	**857,375**	**9.7468**	**4.5629**
46	2,116	97,336	6.7823	3.5830	96	9,216	884.736	9.7980	4.5789
47	2,209	103,823	6.8557	3.6088	97	9,409	912,673	9.8489	4.5947
48	2,304	110 592	6.9282	3.6342	98	9,604	941,192	9.8995	4.6104
49	2,401	117,649	7.0000	3.6593	99	9,801	970,299	9.9499	4.6261
50	**2,500**	**125,000**	**7.0711**	**3.6840**	**100**	**10,000**	**1,000,000**	**10.0000**	**4.6416**

三角函數ノ眞數表

角	*Sine*	*Cosine*	*Tangent*	*Cotangent*	角
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	89°
2	.0349	.9994	.0349	28.6363	88
3	.0523	.9986	.0524	19.0811	87
4	.0698	.9976	.0699	14.3007	86
5	.0872	.9962	.0875	11.4301	85
6	.1045	.9945	.1051	9.5144	84
7	.1219	.9925	.1228	8.1443	83
8	.1392	.9903	.1405	7.1154	82
9	.1564	.9877	.1584	6.3138	81
10	.1736	.9848	.1763	5.6713	80
11	.1908	.9816	.1944	5.1446	79
12	.2079	.9781	.2126	4.7046	78
13	.2250	.9744	.2309	4.3315	77
14	.2419	.9703	.2493	4.0108	76
15	.2588	.9659	.2679	3.7321	75
16	.2756	.9613	.2867	3.4874	74
17	.2924	.9563	.3057	3.2709	73
18	.3090	.9511	.3249	3.0777	72
19	.3256	.9455	.3443	2.9042	71
20	.3420	.9397	.3640	2.7475	70
21	.3584	.9336	.3839	2.6051	69
22	.3746	.9272	.4040	2.4751	68
23	.3907	.9205	.4245	2.3559	67
24	.4067	.9135	.4452	2.2460	66
25	.4226	.9063	.4663	2.1445	65
26	.4384	.8988	.4877	2.0503	64
27	.4540	.8910	.5095	1.9626	63
28	.4695	.8829	.5317	1.8807	62
29	.4848	.8746	.5543	1.8040	61
30	.5000	.8660	.5774	1.7321	60
31	.5150	.8572	.6009	1.6643	59
32	.5299	.8480	.6249	1.6003	58
33	.5446	.8387	.6494	1.5399	57
34	.5592	.8290	.6745	1.4826	56
35	.5736	.8192	.7002	1.4281	55
36	.5878	.8090	.7265	1.3764	54
37	.6018	.7986	.7536	1.3270	53
38	.6157	.7880	.7813	1.2799	52
39	.6293	.7771	.8098	1.2349	51
40	.6428	.7660	.8391	1.1918	50
41	.6561	.7547	.8693	1.1504	49
42	.6691	.7431	.9004	1.1106	48
43	.6820	.7314	.9325	1.0724	47
44	.6947	.7193	.9657	1.0355	46
45	.7071	.7071	1.0000	1.0000	45
角	*Cosine*	*Sine*	*Cotangent*	*Tangent*	角

第二學年摘要

◎乘法及ビ因數分解ニ用ヒル公式

(1) 共通因數 $ax+bx-cx=(a+b-c)x$

(2) 二項式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3) 三項式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

◎G.C.M. 及ビ L.C.M. ノ求メ方

G.C.M.=(係數ノ G.C.M.)×(各文字因數ノ G.C.M.)

L.C.M.=(係數ノ L.C.M.)×(各文字因數ノ L.C.M.)

◎分數式ノ符號

$$\frac{A}{B}=\frac{+A}{+B}=\frac{-A}{-B},\quad -\frac{A}{B}=\frac{+A}{-B}=\frac{-A}{+B}$$

◎分數式ノ變化

$$\frac{m(a+b)}{ma}=\frac{a+b}{a}=\frac{p(a+b)}{pa}=1+\frac{b}{a}$$

◎分數式ノ四則

$$\frac{p}{a}\pm\frac{q}{a}=\frac{p\pm q}{a},\quad \frac{p}{a}\pm\frac{q}{b}=\frac{bp\pm aq}{ab}$$

$$\frac{p}{a}\times\frac{q}{b}=\frac{pq}{ab},\quad \frac{p}{a}\div\frac{q}{b}=\frac{bp}{aq}$$

◎一元二次方程式ノ解法

a 完全平方式ヲ作ツテ解ク法

b $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ニヨル法

◎一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根 (α,β) ト係數トノ關係； $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

◎變數,函數,常數

圓錐曲線ノグラフ

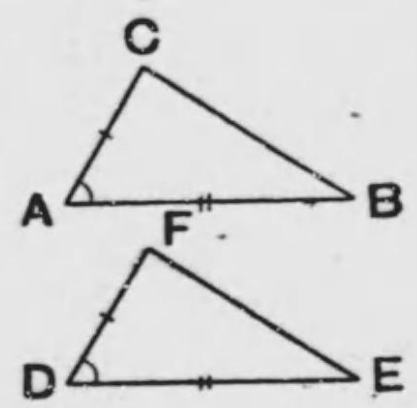
$x^2+y^2=r^2$ ……………圓(半徑 r)

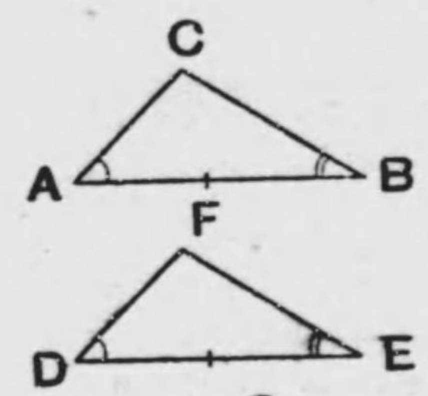
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……………楕圓

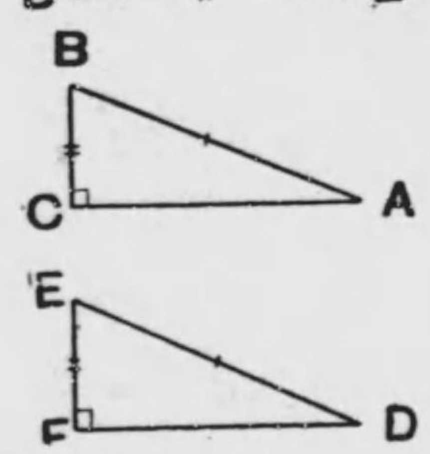
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad xy=c$ ……雙曲線

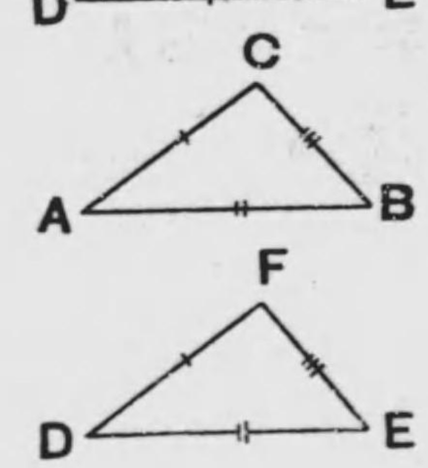
$y=ax^2+bx+c,\ y^2=px$ ……抛物線

◎兩三角形ノ合同

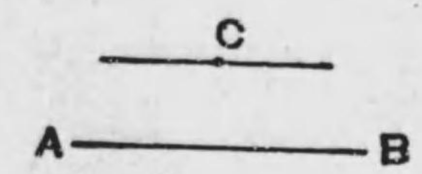
1


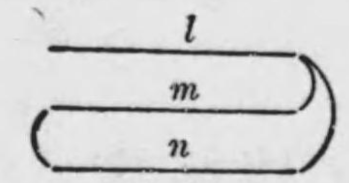
3


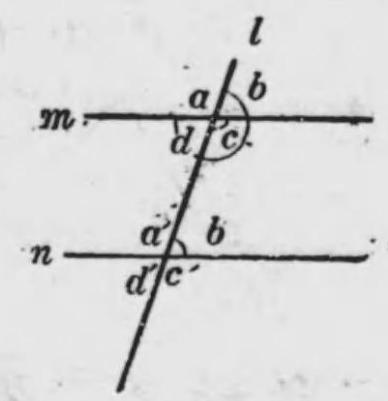
2


4


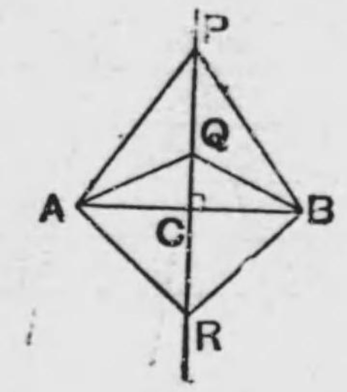
◎平行線ニツイテ

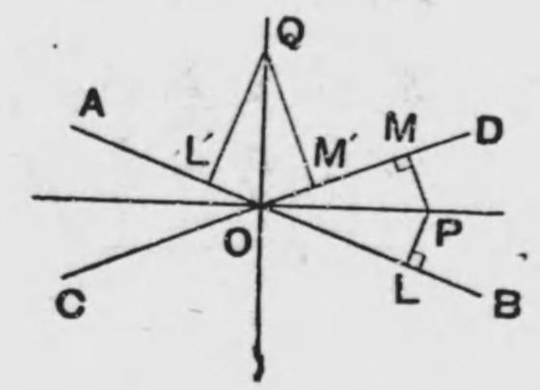
1


2


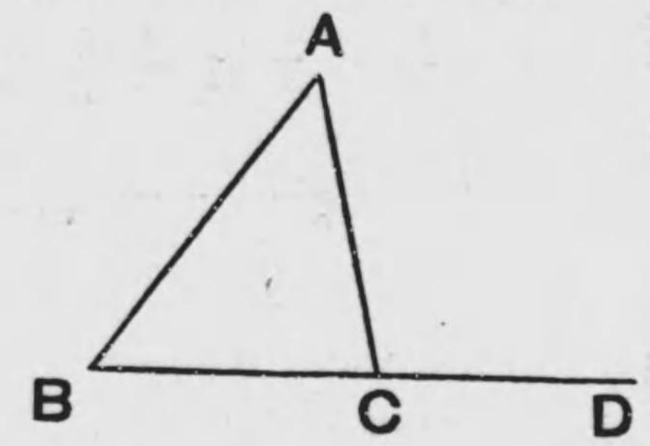
3


◎線分ノ垂直二等分線及角ノ二等分線

1


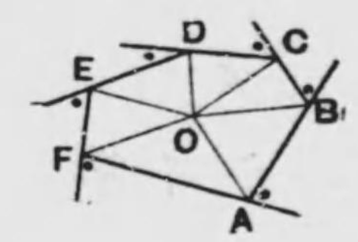
2


◎多角形ノ内角,外角

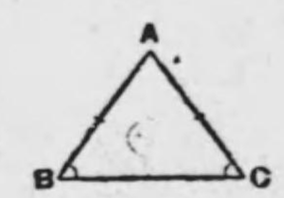
1


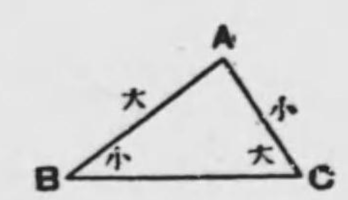
2 内角ノ和 $2(n-2)$R.L

3 外角ノ和 4R.L

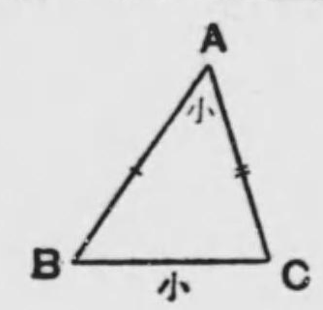


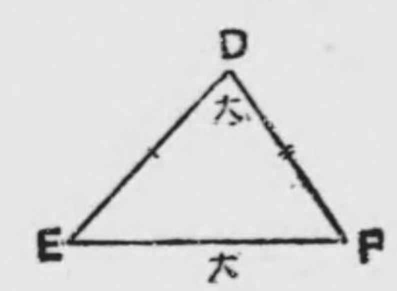
◎一ツノ邊ト角トノ關係



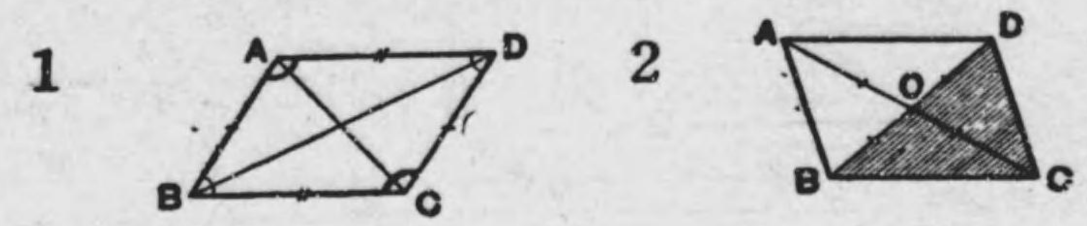


◎二邊ガ夫、相等シイ二ツノ三角形

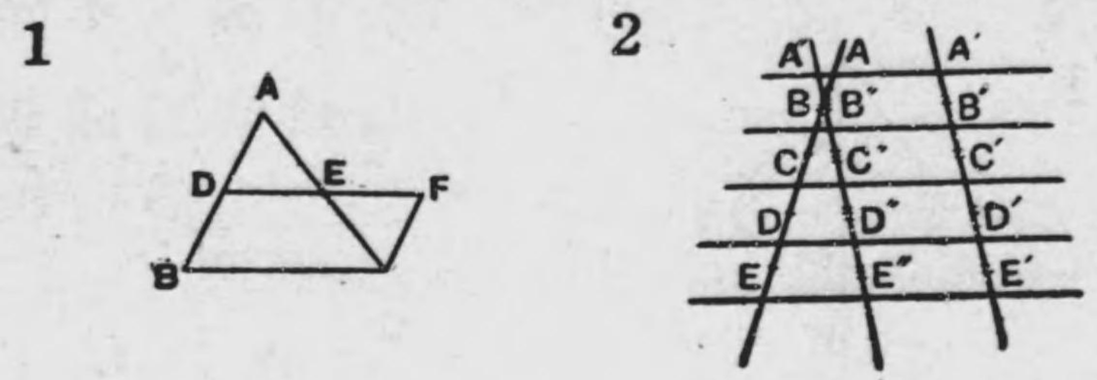




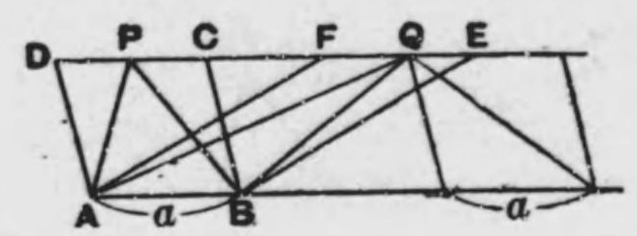
◎平行四邊形ノ性質



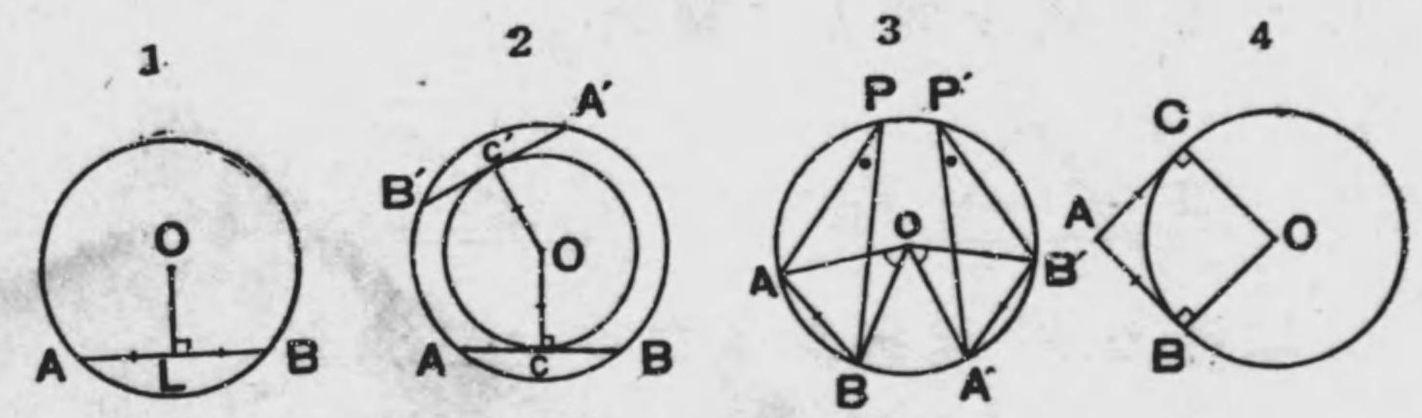
◎三角形ノ二邊ノ中點ノ連結線



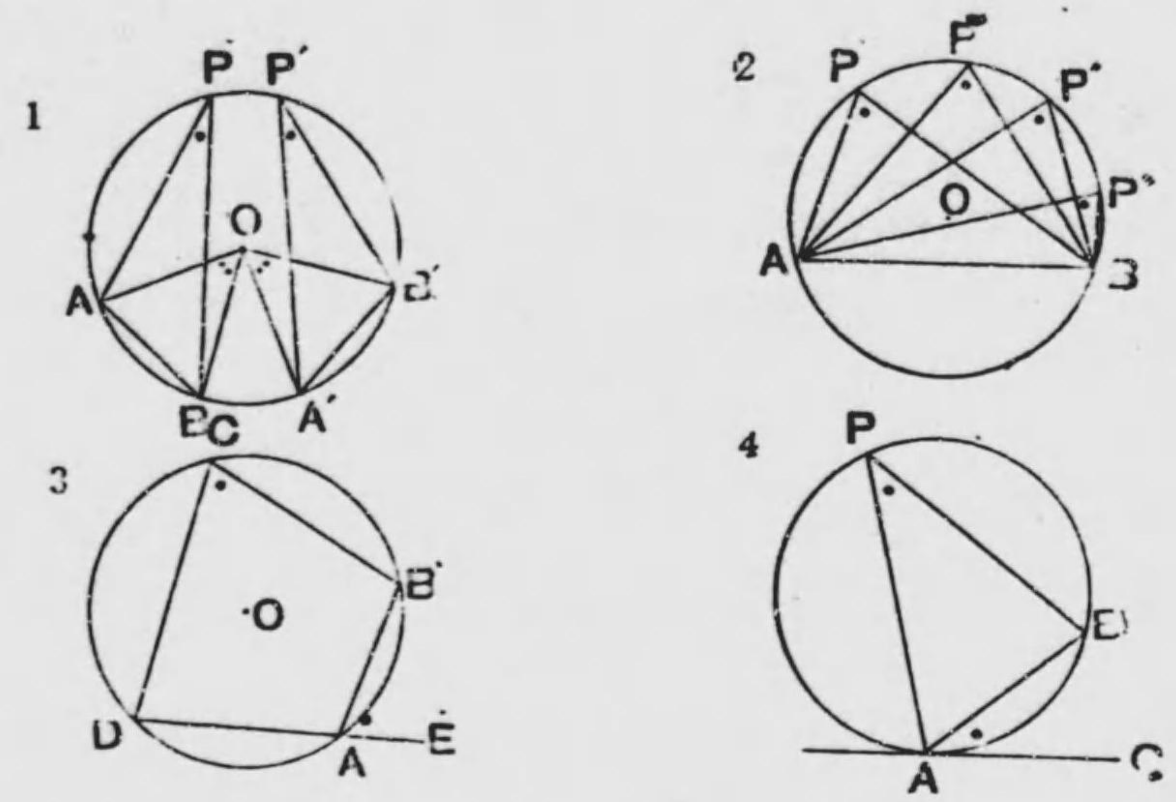
◎三角形,平行四邊形ノ面積



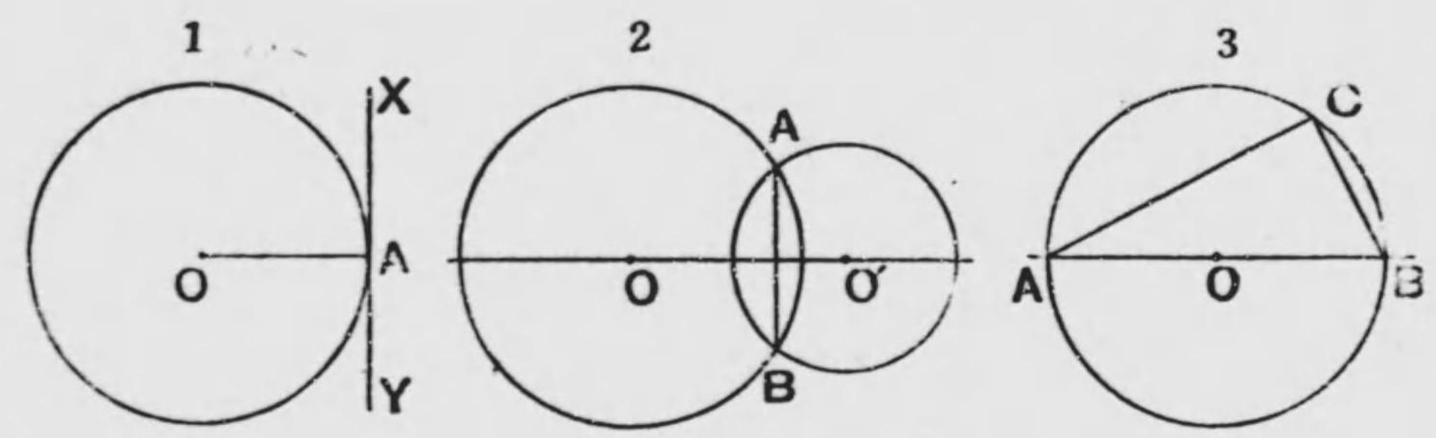
◎相等シイ線分及弧



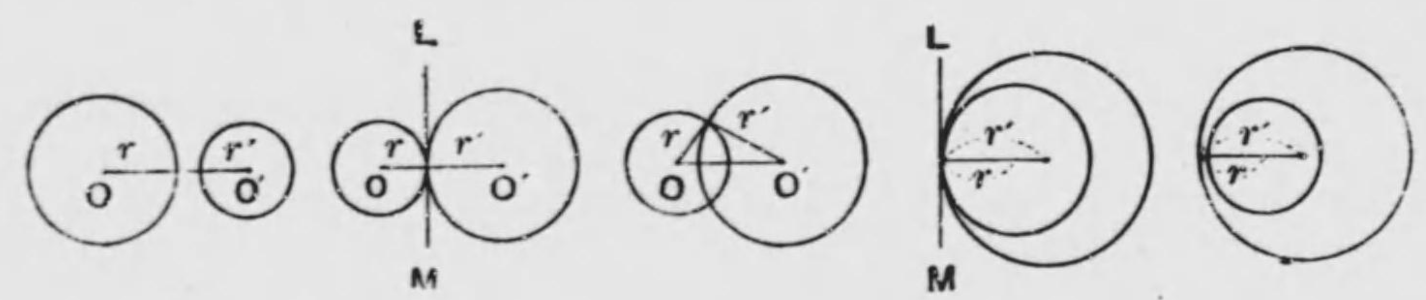
◎相等シイ角



◎直　角



◎二圓ノ位置ノ關係



昭和九年四月十日印刷　昭和九年四月十五日發行

中等教育新制數學教科書
第三學年
教授書

非賣品

著作者　廣島高等師範學校附屬中學校　數學研究會
代表者　曾田梅太郎

發行兼印刷者　鈴木政雄
東京市神田區神保町一丁目二五ノ一

發行者　鈴木常松
大阪市東區博勞町五丁目五十六番地

發行所　東京市神田區神保町一丁目二五ノ一　振替口座東京二六四四番　東京修文館

發行所　大阪市東區博勞町五丁目五六　振替口座大阪四七一番　大阪修文館


0 5 10 15 20 25
100 95 90 85 80 75


45 40 35 30 25 20 15


75
80
85
90
95
100
25
20
15
10
5
0
生徒實驗用（本品ハ取引證明ニ用ヒテハナリマセン）
工局第九九九號
廣島高師附中
數學研究會
東京 大阪
修文館
發行

東京
大阪 修文館藏版

廣島高師附中數學研究會考案方眼紙 NO.1