統　計　學

唐啟賢著

序

科學之所以在今之學術界中佔重要位置者，在根據事實以研求眞理也。是故物理學，化學，生物學等必恃在實驗室實驗，以尋具體的結果；經濟學，心理學，社會學等亦必恃測驗，以研究人類之慾望，動物之心理，社會之現象等。惟在實驗室實驗，事非甚難；而社會間手不可觸，目不可睹耳不可聞之慾望與心理及其變化之現象，誠難測驗。故在昔日一般經濟學家，心理學家及社會學家研究經濟，心理及社會，欲證驗事實，大都採用抽象的，演繹的及敍述的方法．所謂抽象者，卽由各殊事實之現象，抽出其共同之點，綜合而假定之，其所得結果與事實自難符合。所謂演繹者，卽先假定一原則，然後根據此一原則，進行推理，以解說各種不同之事實；夫不同之事實，乃因人，因時，因地，之不同而造成者，欲定一原則，以解說一切，其所得結果亦必與事實難以符合。所謂敍述者，乃不問觀察事實是否詳盡，認識事實是否確切，將各種事實不分析，不比較，而紀錄之，其結果亦與事實難以符合。既以上述三種方法，求得結果，與事實難以符合，則經濟，社會，心理等學自不能成爲科學。然至今日，經濟，社會，心理等學何以能與物理，化學等併成爲科學者，此不能不歸功於一種學術之發達，此種學術乃以數字建其科學基礎，能將各種學術所探討之事實，由至微以至至鉅，由至隱以至至顯，賡續活動之體相，尋出一系統而控制之，不僅能使經濟，心理，社會等學術得依據事實，以闡明學理，尋繹公例，俾各稱

爲科學，且可濟物理，化學，生物等學在實驗室實驗之有所窮，是故稱之爲一切科學之鑰，殆無不宜，此科學爲何，卽統計學也。尤有進者，舉凡宇宙間政治，社會，經濟，民族及其他一切現象；如國家之富源，土壤之肥瘠，財政之盈虛，戶口之多寡，軍力之强弱，山川之險要，地勢之高下，道路之遠近，民情之醕薄，犯罪之多少，各種疾病之情形，商情之盛衰，物價之貴賤，貨物產銷量之增減，交通之暢滯，供求之升降，金銀價之漲落，匯兌率之起伏，人口之生產死亡，人種之優劣，智識之高下，世俗之好尚，氣候之溫寒燥濕，雨量之多寡，風向之變遷，歲收之豐歉等，亦莫不藉統計以究其竅要，窮其消息。統計者，誠能如中庸所謂致廣大而盡精微，其奧賾固不易紀極，深博亦無所涯涘，宜在今日，各國學者孳孳矻矻，厲精會神，以探討之，卽以中國而論，近年來統計事業如雨後春筍，蓬勃滋生，研究此學者亦不乏其人。惜乎切於實用之統計書籍殊尠，能將統計學爲整個而有系統之敘述供給學者以充份統計智識之書籍，幾於極大之圖書館與書局，遍覓而不獲一見，斯使學者不能無所遺憾，余思有以彌之，乃攈摭中外統計書籍之精華，抉剔涵咀，合以個人之心得，編成本書，其中之辭句力求簡明，理論務取阨要，關係統計之各種最切要問題及方法皆充實其間，使研究統計者手此一編，可窺統計學之奧藩，而推之致用矣。

中華民國二十年九月唐啓賢序於南京實業部

凡例

(一)本書共有十一章。前九章乃叙述統計之一般原則及方法,意在指示學者得其要領,可以辦理各種統計。至第十章係論商情預測,以其在經濟統計占亟重要之位置。第十一章係論人生統計,以人生統計爲社會統計之核心。

(二)本書編輯,依研究統計適當之程序,由淺入深,由概念以至專門,以期教學咸便。

(三)本書擷取各統計書之長,而去其短。

(四)本書措辭簡明,避免科學上艱深枯澀之病。

(五)本書採取近代統計學各種最新進,最精確之理論,使學者得一明確之觀念。

(六)習統計者貴乎諳練其方術而應用之,故本書删除浮詞,詳闡方法,理論之外,尤重實例。

(七)本書印有各種統計圖形,俾學者得充分了然於繪圖以表現統計事實之各種方法。

(八)本書所用專門名詞,乃參酌各書及通常慣用

者而定，不敢冒昧杜撰，亦不敢率爾苟同。

(九)本書譯名如經前人妥譯者沿用之，未妥者以己意譯之，務期簡單明瞭而不失眞，但譯名之後，有時仍附原文，以便閱者尋繹。

(十)本書最後數頁附有參考書目，以便學者自修及硏究。

目　　次

頁數

第六章　量數分析法

第十一章 人生統計

附 錄

計算上應用之各種表

參考書

第一章

緒論

第一節

統計之起源

統計之起源甚古。當西歷紀元前3050年，埃及建築金字塔，欲規定徵收建築費數目之標準，卽爲全國人口與財富之統計。其後中國在虞夏時代；有九洲之區畫，土壤性質之等分，貢賦之高下，江河之源流，運輸之路程，物產之種類，載在禹貢。古希臘判山河，考疆域，調查民數。埃及徹其疆土，以爲定賦稅之準則。東周之時，華夏各國計兵車乘數，以定武備之實力；料人民之多少，計方里之多寡，以定國家之强弱大小。周禮載遂代夫掌登萬民之數，自生齒皆書于版。管仲鬼谷子等均注重權衡之稱。管子曰，“有權衡之稱者，不可欺以輕重”。鬼谷子曰，“古之善用天下者，必量天下之權，量權不審，不知强弱輕重之稱”。梁惠王嘗以本國民數與鄰國民數相較。漢興；蕭何入關中，收秦圖籍，考查天下阨塞戶口多少强弱之處。羅馬規定凡人民須登記其生死於一定之寺院。唐代量天下之戶之資產升隆，定爲九等，縣司註定，州司覆之；每屆三年，一造戶籍。此皆有統計之作用存于其中。官書所載，可見其迹。厥後，更以英皇愛德華第二（Edward II）等之注重核計國境內人民及財產之數，以爲施

政之標準。于是統計事業日益發達。殆至十七世紀以降，世界各國工商業漸臻興盛，社會經濟組織日形複雜，同時政治組織亦非如昔日之簡單；一班學者爲求便於研究政治社會及經濟起見，不得不求執簡馭繁之術：而執簡馭繁之術，舍統計實難其選，因此相率研究統計。西曆1660年，有英人葛朗特(John Graunt)作生命統計，發現人口生產及死亡率常時不變。德人黑爾曼康倫(Hermaun Conring)著「現代政治上顯著之事態」以明政治理亂興亡之跡。1741 年丹麥人安喬生 (Ancherson) 編製歐州各國比較統計表。1746 年諾成華(Gottfried Achenwall)始用統計術語(Statistics)編一書，以比較各國狀況。繼之，又有天文家兼數學家之比人刻特萊氏(Lambert Adophe Jacque Quetelet) 更擴大統計研究之範圍。舉凡人類社會上，道德上及物質上之特質與夫各種動植物之現象莫不在其研究範圍以內。彼並感于各國統計有比較研究之必要，乃于1853年集合當時統計學家與各國統計代表舉行一半官性質之國際統計會議(International Statistical Congress)，將各國統計觀摩切蹉其後每間數年開會一次，對于統計學術頗多闡明。直至 1878 年，各國政府不受該會常務委員會決議之拘束，常務委員會宣告解散，而大會乃停頓。但至 1885 年，有諾門斯把那 (NeumaunSpallart)教授者在英國皇家學會五十週年紀念會時，發表一論文，盛讚國際統計會議之有功于世，頗獲當時歐美統計學者之同情，因于本年開會于倫敦，組織一純屬學術性質之統計學會 (The Statistical Institute)，其主要目的在謀統計學術之進步及其普及，曾發行有國際統計年鑑統計月報等刊物，除刻諾二氏外，更有奥之海音(Hain)，德之克納伯 (Knapp)，萊克什斯 (Lexis)，英之高爾登(Franeis Galtcn)，批爾生(Karl Pearson)，愛德乔 (Elderton)，斯丕門(Spearman)，解柏德 (W. F. Sheppard)，于爾 (Yule)，白萊(Bowley)，美之卻得六克(Chadlock)，桑戴克(E. L. Thorndike)

等對於統計均有精密之研究與著述。除國際統計學會之組織以外，更有國際農業局研究耕作面積，動植物生產，農作物貿易價格等統計，而發布其結果于農業局月報國際農業年鑑中；有國際勞工局研究國際勞工狀況，如工資，工時，工人生活費等之統計，而刊布其結果于勞工月報或各種小冊中；有國際貿易統計局研究各國貿易統計，按一定類別，編製各國輸出入品統計，而刊布之於國際商務統計局報；他如國際商務局研究商業統計；國際郵務聯合會研究國際郵務統計；國際保健局研究各國衛生疾病統計等，足徵國際研究統計熱烈之一斑。至除私人及國際團體致力研究統計外，各國公私團體之研究統計者，如中國國民政府各院，部，廳，市政府等之統計處，司，科，股，國定稅則委員會，統計學社等又如美國商務部 (Board of Trade)，勞工統計局 (Bureau of Labor Statistics)，農業經濟局 (Bureau of Agricultural Economics)，聯邦準備局 (The Federal Reserve Board)，國內外貿易局 (The Bureau of Foreign and Domestic Commerce)，德國之雷司勒銀行 (Dresdner Bank)，日本之日本銀行 (Bank of Japan)，印度之喀爾喀得商事諮詢局 (Bureau of Commercial Intelligence)，加拿大之統計局 Dominion Bureau of Statistics) 等，幾舉不勝舉。於是十九世紀以還，統計之眞詮乃大昌明。

第二節
統計之語源

統計之能成爲一供人研究之學科者，不可不先歸功于德人黑爾曼康倫氏。當氏于 1660 年爲漢斯得大學(University of Helmstadt)教授時，曾著一書，名「現代政治上之顯著事態」，其內容詳列當時歐洲各國人口，土地，財政，軍政，出產等項目，分類以敘述

之；其性質頗似今日之政治統計。誠足啓發後人研究統計之興趣，雖然，氏猶未顯然認其書之統計可成爲一獨立科學。至確以統計爲一獨立科學者，首推德人讓成華氏。讓氏生於1729年，死於1772年，學者稱之爲近代統計學之鼻祖 (The Father of Modern Statistics)。當氏於1746年，爲馬波萊(Marbury)大學教授，編有統計講義，詳述西班牙，葡萄牙，荷蘭，丹麥，瑞典，法，英，俄等國之物產，土地，人口等狀況；卽用術語Statistics，闡此乃由拉丁文 Status 蛻化而來。蓋 Status，之意爲政情。氏之用 Statistics，意卽在將各國之狀況比較，以明其眞相，爲施行政治之指南。自氏用 Statistics 後，各國學者習用之，並改爲各國文字。於是可知各國統計學者在先僅認統計爲表示政情之學也。直至1766年後，統計學之範圍始不限於國政，舉凡人類社會之各種現象皆資爲研究。至"統計"譯名始於日本，初譯關於此種科學爲政表，表記，綜計，製表，國勢，政算等；迄明治十四年，設統計院，乃有統計二字通行於公私文牘間。吾國因用之，自前清末年至於今日，未嘗修改焉。

第三節
統計之學派

十七世紀以還，研究統計者日衆。入主出奴，意見紛歧。形成學派甚多。玆舉其大者分述如下：——

一，國勢學派　此派以研究國家情勢，社會狀態爲事。其研究之方法，乃用文字記述關於國家及社會之情態。此派之鼻祖爲德人黑爾曼康倫氏，

二，表記統計學派　創此派者爲德人安喬生，其統計方法則專重數量，列表。例如將各國之重要事項如土地，面積，財政，人口等用數字顯示之，列表歸納之，使其便於比較。1782年，更有德

人刻羅美(Crome)作各種統計圖表,令閱者一見,卽明瞭其所示事實之狀態或關係,以是後人多稱之爲圖表統計之先達者。

三,數學派　此派爲英人葛朗特所創。其統計方法乃重在搜集正確之材料,用適當算法以整理,計算之;然後根據學理,推究其間之因果關係,發明定律。

四,新統計學派　導此派之先河者爲德人蘇美渠(G P Süssmilch)繼其後者爲刻特萊氏。此派不獨融合上三派之意旨爲一爐,且力圖改進統計技術,依大量觀察法,搜集統計材料,編造正確之統計,及謀公布各種統計結果並闡明其學理,俾人人得以研究所統計的事實之因果關係。

第四節
統計之定義

統計之定義,據1869年在荷蘭海牙所開之第七次國際統計會議時,刻特萊氏曾提出,謂計有一百八十種;以後學者之定義尚不在內,可謂多矣:惜大都簡而無當,殊不足以表示統計之完全意義,較能表示完全意義者僅居極少數耳。玆舉其中最著者如下:——

一,德人買兒氏(VonMayr)以統計乃根據大量觀察爲人類社會生活狀態之有系統的說明(Die systematische Darlegung und Erörterung der thatsächlichen Vorgänge uud der ausdiesen sich ergebenden Gesetze des gesellschaftlichen menschlichen Lebens auf Grundlage Quantitativer Massenbeobachtungen—the systematic statement and ex-planation of actual events, and of the laws of man's social life that may be deduced from these, on the basis of the Quantitative observation of aggregates)。

二，日人橫山雅男氏以統計者乃對於社會與國家動靜之現象，依合法之大量觀察，研究其原因及規律者也。

三，英人白萊氏（A. L. Bowley）以統計爲平均數之科學(Statistics may be called the science of average)。

四，美人金氏（W.L.King）以統計者乃分析所搜集事實之材料或推算之數目，以判斷自然或社會現象之方法。(The science of statistics is the method of judging the collective natural or social Phenomena from the result obtained by the analysis of an enumeration or collection of estimates)。

五，美人塞克類斯特氏（H. Secrist）以統計者爲事實之綜合，依據合理正確之標準，爲預定之目的，作有系統的徵集，並就其關係，依次排列，而以數目敘述，枚舉之或推算之以求顯明事實之各個現象及其間之因果關係（Aggregates of facts affected to a marked extent by a multiplicity of causes; numerically stated, enumerated, or estimated according to reasonable standards of accuracy, collected in a systematic manner for a predetermined purposes and placed in relation to each other.)。

上列諸說當以塞氏者較爲完全，確當。蓋統計不但着重於平均數，平均數之外，又用圖表等以顯明事實之因果關係；不但對於材料及數量加以分析，並須綜合之；不但根據大量觀察，且須依據合理正確之標準及預定之目的；方能收完滿之效果：至徵集事實之時，更須就彼此有關係者而研究之，絕不能就不相連之事實，胡亂蒐集，以求其因果關係也。

第五節
統計之種類

統計可分爲兩種：一曰純正統計 (Pure Statistics)，一曰應用統計 (Applied Statistics)。所謂純正統計者，乃將所搜集之事實，用數學法則及各種定律，由繁雜整理而爲單簡，按其性質分類，使其關係顯明。應用統計者，則將純正統計之定律及法則應用於具體事實。例如政治統計爲應用統計，以之顯明財政，軍事，民事，刑事，領土等之狀況。經濟統計爲應用統計，以之顯明生產分配等之狀況。社會統計爲應用統計，以之顯明慈善事業貧民生活等狀況。人口統計爲應用統計，以之顯明人口之靜態動態等。

第六節
統計之功用

統計之功用，概括言之，有三種：

一，根據事實求得正確之見解．　今世之人多以理想斷事之是非；故其見解乃往往浮而不實，昧於真理。然苟有統計，根據事實以斷事，則心得其平，乃可得正確之見解。

二，化繁爲簡，使複雜之事物易於顯明及比較．　統計之爲用能將複雜之數化爲簡單的總數或平均數能將各種事實之複雜的現象由統計家繪製簡單之圖表以表現之故社會事物雖極形複雜不難作比較而求其顯明。

三，預測將來人事之變遷．　人事者，至變而難預測者也。乃有統計，於是已往之人事狀況吾人卽可明瞭。夫旣明瞭已往之人事狀況，吾人遂可推求其因果關係與變動之法則，而測將來人事之變遷。

由上述三功用，可知統計之於人羣實有深切之關係。譬如科學家以之爲考研眞理之工具；政治家藉以知民間之財富，地價之漲落，戶口之盈虛，國防之力量；農人資以辨土壤之肥瘠，氣候之變

遷；工人借以知工業生產之狀況、工作效率之高低；商人賴以知生產分配等經濟行爲之情形，物價移變之趨勢；此不過舉出數例耳：須知統計用途之廣，與人羣關係之深，當十百倍於此數例，猶恐未能盡述也。

第七節

大量觀察法（Mass-observation or Quantitative Aggregate-observation）

社會現象至爲繁雜。吾人頗難明瞭其眞相，惟若用大量觀察法，觀其大而遺其小，則其實況亦可顯然。蓋社會各種現象中常有一定之法則存在。此法則爲何，卽大量恆靜之法則（The Law of Inertia of Large Numbers）也。大量恆靜者，非謂經數十百年而不變，不過謂大量比較小量爲規則耳。此種大量恆靜之法則，須於大量觀察時，始可實現。因在大量觀察事實時，其間各種偶然發生之現象，可互相抵消，互相平均，等于均歸消滅，而所存者僅不甚變異之通常或中庸之現象：例如某地某年人口死亡數較上年顯有奇特之增減，惟按諸全國某年人口死亡數與上年則大致相等；某年某地之火災甚大，惟調查同年全世界之火災比較前年並無多大變異也。

第二章

統計問題之審定

第一節

規定問題

在進行統計之先，必須將所欲統計之事實研究其能否藉統計方法以表現之，果其能也，乃對於其性質與範圍加以周詳之考核，以爲統計問題之規定。蓋統計事實之性質與範圍不明，則統計問題之規定必歸於錯誤；以後進行統計上各種手續，亦將入於迷途，所謂差以毫厘謬以千里者也：例如有人欲作物價統計，必先研究物價之性質與範圍，然後規定所欲辦理之統計，非然者，則物價爲批發物價抑爲零售物價，或爲全國一般物價抑爲一地一般物價，未加確定，昧然編製統計，其結果必爲荒謬，可斷言也。

第二節

審查要件

當問題規定之後，卽須按其性質與範圍審查與其有關之要件；蓋要件若不審查，則進行統計上之手續時，往往失去全體或一部分

統計之意義：例如作去年與今年進口貨物量值之比較，則必將去年與今年進口各種貨物之量值搜集爲統計材料，然此所謂進口貨者爲純粹之進口貨抑其中並含有復出口之貨乎，不可不先審定，否則，設海關在去年將各種貨物是凡進口者均歸入進口貨類，今年忽將復出口貨不入進口貨類，因此使去年進口貨量值大，而今年進口貨量值小，若據以謂去年進口貿易爲極盛，烏乎可；又如作某市零售物價之統計，以期推測人民生活之程度，乃不可不研究市場之狀況。蓋市場往往因受托辣斯(Trust)或卡特兒(Gartel)壟斷及操縱之影響，使物價乍低乍昂，若根據此種變動非常之物價，測人民生活程度，此其謬誤殊非淺鮮；又如西歷1898年美國與西班牙戰爭時，美國某報取戰時海軍死亡率與紐約（New York）居民之死亡率相比較，其所得結果，海軍死亡率爲千分之九，而紐約居民之死亡率則爲千分之十六，於是謂戰時之海軍尚較紐約之居民爲安全，豈知鑄成大錯，蓋老人與兒童之死亡率特高，而城市之中乃有不少之老人與兒童，至海軍人員，其身體須經嚴格檢驗，俱爲壯士，故以兩者之死亡率相較，殊屬不倫，然則如何始可以作兩者之比較，曰，必使紐約居民亦選出如海軍之壯士，而以其死亡率與海軍之死亡率相較其所得結果乃爲正確也。

第三章

統計材料之搜集

第一節

材料之來源

統計者爲統計事實之材料所構成。無材料則無統計，材料而不正確，則所編製之統計亦不能正確，故未着手統計之先，卽須審愼從事統計材料之搜集也。然物必有本，事必有因，材料亦必有其來源，材料之來源有幾，請概述之如下：——

1.政府之統計報告。 近世各國政府多注重統計。舉凡一國之人口政治經濟等狀況，幾莫不資以明示握有政權者用爲決定施政方針之根據。故由此種統計所編成之報告，極有價值，可當爲重要來源之一。

2.民衆團體之調查統計報告。 晚近社會上各種民衆團體如農會，工會，商會，學生會等亦知借統計以解決各種問題，並爲事務進行之參考；故紛紛從事調查社會全體或特別之消息而統計之，編成報告。此種報告亦可爲材料重要之來源。

3.表簿單冊及各種紀錄。 例如物價日報表，物價月報表，物價指數表，工資指數表，學生出席簿，賬簿，銀市行情單 海關貿易冊，店員工作記錄，工人工作紀錄，工資紀錄，薪給記錄，人

名錄，工作報告，存貨記錄，原料品記錄，送貨記錄，運貨紀錄，機器記錄，販賣紀錄，銷售物品記錄，顧客履歷與購買量之記錄等。

4.各種出版物。例如各國年鑑，旅行指南，工廠一覽，鄉土志，歷史，地理.雜誌及各種注重事實記載之書籍。

5.其他。 如法令，章程，新聞紙，實地訪問之消息等。

第二節
材料之選擇

統計之能爲用於人羣也，以其能示人羣以宇宙間之實況也。若所統計而非正確，則不能示宇宙間之實況，將失統計之效能矣。是故欲完成統計之效能，非編製正確之統計不可。然欲編製正確之統計，須先注意搜集正確，精當而完全之可供統計之材料。但此種材料必經審慎之選擇乃可取得。蓋材料約有二種：一曰原始材料 (Primary Materials)，一曰第二材料 (Secondary Materials)。原始材料者乃向材料之來源直接搜集之材料，或向原始材料搜集之機關取得之材料也。第二材料者乃轉錄經人重行刊布之原始材料也。第二材料既經人重行刊布，則抄印時，難免發生數字之錯誤，記錄地位之錯誤，縮寫，遺漏，妄增及顚倒材料之弊。或省去重要註解，遂使材料一部份之聯絡性失去；此種情形原始材料所决無者也。故材料愈原始，則可靠之度愈大。所謂可靠之度愈大者，卽愈正確精當而完全也。雖然，原始材料非如第二材料之易得也，搜集原始材料，常費巨資並亟耗精力；搜集第二材料，則不過購閱圖書，擇要謄寫之勞耳。且原始材料固極可恃，足以爲吾人解决問題之適當助力；但第二材料能善爲利用，亦可獲完滿之效果.有時原始材料重行刊布爲第二材料時，於其錯誤加以修正，能使此改正之第二材料

更精當正確而完全。是故編製統計非必盡採原始材料，而第二材料亦可用也。

至如搜集材料之數，決不可每類只爲一種。宜多多益善；蓋每類只爲一種，應用之時，陷于錯誤，輒不自知，此種材料業經刊布，其遺羞於統計界也罪猶小，引社會人羣入於迷途也罪大。若每類之材料有數種，則可參酌比較，判其是非，選擇其最可靠者：例如材料之中有原始之材料，有第二之材料，則遴取原始材料；如材料之中有原始材料，有修正之第二材料，視其修正果當，則選擇此第二材料；如有數種關於歷史之材料，則比較其典據，取其最可信者；如有數種關於專門事業之材料，載於專門家之書籍者比較載於普通書籍者爲可恃；如數種材料有登於新聞報紙者，有登於書籍者，則以報紙多欲載最新之事實，其數字材料往往未經修正或不待完全卽露布之，或常爲紙張地位所限不能盡量露布，使材料常失其聯絡性，此時用書籍之材料較爲妥當；但數種材料似皆可恃，則應平均而折衷之，如此選擇材料得其法矣。

第三節

搜集材料之方法

統計材料非可咄嗟而致之也，必經多方面之掇拾，長時期之搜羅，且掇拾有方，搜羅有法，精確之統計材料乃可源源而來。掇拾搜羅之方法爲何，曰約有三種：一曰直接調查(Direct Investigation)二曰間接調查(Indirect Investigation)。三曰佑計(Estimation)。

(一)直接調查　直接調查者卽親向材料來源搜索材料之謂也。在未進行此種調查之先，主其事者宜將調查統計全部計畫細心考量；擬具計畫時，應注意對於調查之事，確定一調查時期，調查範圍，事物數字之單位及經濟能力之最低限度：蓋以社會

情况不絕變動，此一時所調查者絕非彼一時之情況 若不定調查時期，則所調查究爲何時狀況，不得而知之也；社會情況異地而殊，因事而異，調查之能力又時有限制，若不定調查之範圍，則所調查之狀况屬於何地，抑屬於何事，而因調查能力之不同所採用之調查方法究擇何種，此未可知也；各種事物數量之單位未能盡相同也，如牛一頭，馬一匹，布一疋，米一石等，同一事物之單位因時地之習慣不同而又異其名也，如路之距離，其長度在華以里計，在英以哩計，中國金錢價値之量昔日多採用兩爲單位，今日有改兩爲元之趨勢。同一事物因時地之功用不同而異其單位也，如門作牀頂板用，爲門時單位爲一扇，爲頂板時單位爲一面，同一單位又有不同之意義也，如噸或爲長噸或爲短噸等等，數字單位之種類既多，是故調查之時數字之單位不確定，則統計彙數之時必不能免其舛誤也；調查之能力全視經濟能力爲轉移，故調查之時若不定經濟能力之最低限度，則往往調查未竟全功，而資用匱乏，徬徨中輟，將置前所得者於無用之地矣。惟四者如何確定，固當視調查者之能力及調查事物之性質以爲準。然確定單位有必須注意者，一卽單位必宜於調查統計完全時期內通用不變，以免換算之麻煩，而致錯誤，二卽單位宜能將不同地方及不同時間之統計事實，計算比較也。

至若施行直接調查，則因調查範圍常爲調查能力所限制乃有全體調査(Complete Investigation)揀樣調查(Sampling Method)之分別。全體調查者卽爲全體事情之調查也；例如欲知某城失業人數，工廠數，工人數，商店數，學生數，農民數等，則對於此城之失業者，工廠，工人，商店，學生，農民等皆須施以調查。揀樣調查者卽選擇足以代表全體之事實而調查之；例如調查某地之工人家計，工資狀況，物價變遷，勢難且亦不必

盡得其地所有工人之家庭，所有工人之工資，所有各種物品之價而調查之，亟宜選擇工人模範家庭以爲全體工人家庭之代表，將全體工人分爲數類，每類揀適當比例該類之工人人數合爲一羣，以其工資狀況爲全體工人工資狀況之樣例 於市上之物品中選其消費量之最大而關於人生最緊要者，取其物價以代表一地之物價也。

施行直接調查時，無論爲全體調查或揀樣調查，而所用之調查方法最著者概別爲下列三種：

1，調查員往各地調查。爲求材料正確起見 如經濟力充裕，可由有調查統計學識之人員施行調查；蓋此雖耗費金錢與精力殊多，然其所得之結果較爲可靠，利成浮於損也。至調查之時調查員有應注意之事項如下：——

(1)應澈底了解調查之目的並須知所用調查表格等之意義，俾調查時對於被調查者有所疑問，得解答詳明，藉以獲其同情，盡量供給材料。

(2) 應具有關于所調查事情之智識 並須顧及被調查者之智識程度。

(3) 應與調查區域內之行政機關（如省政府市政府縣政府等）民衆團體（如工會商會等）及維持公安機關（如警察廳公安局等）有相當聯絡，俾實施調查時 減除障碍。

(4)與不相識之被調查者接洽時，最好有一第三者之介紹。

(5)爲避免引起被調查者厭煩起見，須利用被調查者較爲清閒之時，施以調查。

(6)應具堅忍耐勞之精神，誠懇方正之態度，並須謙恭毋傲，鎮靜毋躁，庶使被調查者，覺其和藹可親而同時有所敬仰。

(7)與被調查者約不可失信。

(8)可用種種方法，如化裝演講，印發畫報等，說明或圖示調查之結果乃有益於被調查者，因以鼓起被調查者報告事實之興趣。

(9)至困難環境，爲免除被調查者之疑忌或厭煩起見，可先用試探口吻將調查事項略爲提及，視其接受程度如何以定談話之層次。

(10)調查時，語言宜簡單阨要，毋煩瑣冗長。

(11)如遇被調查者言語半吞半吐或欲言忽止時，宜用興奮言辭以刺激之，使其盡情吐露。

(12)如遇被調查者不能將事實之眞相明白表示時，可用旁敲側擊之法，使其無意說出或露出全體或其一部分意思。

(13 如遇被調查者談話敷衍或滔滔罔絕不着邊際時，切不可隨之作泛論，應儘先提出關於調查所須知之最要事項，詢問被調查者。

(14)遇被調查者談話時如有窘狀，可雜以不相關之語以釋其疑懼。

(15)無論被調查者之談話爲虛僞抑錯誤，調查者不宜直接加以辯駁，須用間接言語糾正之。

(16)當有關於個人或團體利害之調查時，對於調查所得，須能嚴守秘密不可絲毫洩漏。否則以後調查，被調查者將不願告以實況。

(17)調查時，非萬不得已，不用法律或强迫之手腕。

(18)應當注重客觀的事實，不宜師心自用，參入一已之成見；不宜感情用事，自造事實。

(19)須注意準確數字上的寫實（如31與38決不可爲約30約40或三十餘）及正確材料之記錄。如對於數字之準確與材料之正確有懷疑時，甯缺毋濫。

(20)除實地調查各種應行調查之事項外，更須搜羅關於調查事項之文件及各種刊物，如核與已所查獲者多不相符，仍宜復查，藉須核實，卽遇困難，亦須設法再行調查。

2，印發調查表格、 於某事焉，應施行廣汎調查，徒爲財力所限制，每不能派調查員爲之，於是將所需之材料，發爲問題，列於一許多縱橫直線圍成許多長方形或正方形以容納各種問題之表格，徵詢他人；或調查員爲便於調查之實施，並恐調查時，言辭稍多，忘及關于調查重要事項之詢問，亦可製成一表以助調查，按照此表所列之問題，由調查員或被調查者填答之。此表爲何，卽所謂調查表也。夫應用調查表固有所長，亦有所短；原塡寫調查表格之答案或答覆調查表格上之問題大都非被調查者職務以內之事，往往隨意塡寫，答非所問，或一見此表，問題甚多，輒啓疑慮，懶於答覆；此皆調查表格之缺點，似證調查表之不可靠也。然水能載舟，亦能覆舟，電氣能利人，亦能死人，凡物莫不有其功用 其有時爲利或爲害者，在乎人能善用之與否耳。吾人印發調查表格，若能設法減去其缺點，則運用之有何害焉。惟如何始可以減去其缺點，曰，注意下列各事可矣:

(1)表格上最好能列出發表之機關，並印一簡單之說明，將調查之意義明告被調查者，使知無害於彼，可不致發生僞報及誤會。

(2)表格中之問題最好有互相證實之處，以杜絕各種詐僞答案或不正確之報告。

(3)問題前後排列互相銜接之處最好合於論理，庶使答者易於了解問題之意義，便於作答。

(4)問題措辭須十分明顯，語言懇切，使答者不致誤解，樂於回答；至遇有專門名詞，則須下一註釋。

(5)問題須能以數字回答者爲佳，不得已乃求簡單文字之答案。

(6)表格上所印之數字單位宜直接顯明，使人不致誤會；如兩爲關平兩抑計算重量所用斤兩之兩，務須註明。

(7) 凡表上所用總數百分數或平均數可以推算者最好不由被問人塡寫。

(8)每問所須之答案不可過長，最好在十個字左右，或只用一二數目字作答，或可以「是」「否」「有」「無」答之者。

(9)答案所需地位應適於塡寫，不可過於緊促。

(10)問題不可過於繁累，使被調查者望而生畏；不可有雙關之意義，使被調查者不知如何答覆。

(11)問題須有趣味，直入被調查者心窩深處。

(12)問題之意須化抽象爲具體，化性質爲分量。

(13)問題不可波及侵犯私權，或過於尋根究底。

(14)所問之事固不可超過被問人所願及所可回答者，亦不可少於所必欲調查之事項。

(15)調查表格有時須附一印有回信地址及一有郵票之信封以備塡表者寄回之用。

(16)發出調查表格之數須倍於自已所希望之數，以防將來收回各表有材料不足之患。

調查表格果能如上所述條件以編製者。印發後必獲良好之效果。如仍恐上說條件未盡完備也，可於表格擬就後先油印數十份發出，徵求答案，作爲預試；俟收回加以修改後，鉛印或石印之，再爲發出。

製表之時又有須注意者九事列舉如下：—

(1)表之格式須合度，不可過大。以免印成攜帶時，重覆摺疊，易於破毀。

(2)調查表種類如甚繁雜，可用各種不同之顏色分別之。

(3)表之紙張以矩形爲準，不宜太薄，恐易撕破。

(4)表之紙張須有藝術化，而無反光，庶易引起人之美感。

(5)表上印字可分大小，以別問題之主要或次要。

(6)表之標題須簡括，使人一覽便知調查之主旨(閱表1及表2)。

(7)表之間格須大小適宜，條分縷析，有綱目各殊之顯示(閱表1及表2)。

(8)表上劃線可分重輕 以示問題之重要程度(閱表2)。

(9)表中項目當以類排列清楚，不可擁擠一處，須留有相當位置以備塡答。

3，登記法。 除調查員往各地調查及印發調查表格 徵集材料外，尙有登記法，使被調查者來調查者前，或郵寄報告塡答調查者所置於一簿上之問題．例如中國於周時訂鄉遂之內，各級首領須按照法定手續登記所轄區內之男女老幼貴賤廢疾死亡田地收穫六畜車輛之數，另有媒氏掌辦出生登記，凡嬰兒出生三月，其父命名之後，須向媒氏呈請登記，以及今世各國人口出生，死亡，婚姻等登記皆是。惟登記法足以使被調查者中心不快，易於生厭，故非於特種情勢之下不爲調查者所應用，此所謂特種情勢者，卽調查者欲得有依時報告之材料，若用前二法，每一時皆派人調查或散表調查，則不勝其煩，且財力與時力兩不經濟，故不如用登記法之爲宜；或調查者欲得有遼廓之調查範圍內之材料，若用前二法，則殊費財力與時間，亦不如用登記法之爲宜也。

(二)間接調查 間接調查者乃搜羅他人所搜集材料之謂也。此種調查施行之方法有三：

1.通信與人委託調查。

2.利用他人刊布之材料。

3.轉錄新聞報雜誌等轉載之材料。

總上三種方法所搜集之材料應用之先，須注意審察其數字之來源，原始材料搜羅之目的，原始材料搜集之方法，數字準確之程度及各種說明之比較；於此五者，瞭然胸中，然後選用之，十有九當矣。雖然間接調查之材料，現成之材料，間接調查所成就者，因人成事者也。現成之材料常掩秘其來源。掩秘來源之材料鮮可靠。因人成事者必不可久。必不可久之材料易失歷史上之連絡性。是故除以經濟能力極爲薄弱，不得不舉行間接調查者外，仍以採用直接調查法爲是。

(三)估計法　估計法原爲材料搜集法之下乘，乃用之者，所以救濟前兩法之窮耳；例如作世界或一國未開採鐵鑛藏量之統計，自不能將此藏量，實數計之，乃不得不用估計法。用估計法時須注意下列兩端：—

1.當有根據　估計者非憑空懸想之謂，必須有適當之根據，始有價值。其所根據者有三：

(1)根據以前之統計或估計。　如各國每五年或十年，一爲人口之統計，若某年非辦理人口統計之年，吾人欲知其時之人口狀況，卽可根據已往之統計以估計之。又如學者多謂山西煤礦蘊藏量，估計足供世界二千年之用，此種估計雖未必精確；然亦根據德人雷叔文(F. Von Rithofen)之估計也。

(2)根據直接取得之材料。　例如人壽保險公司死亡表卽依照一般人民死亡之概況，已往數十年死亡之比率與死亡者年齡身體等關係而編製者也。

(3)根據間接有關係之材料。　例如按一國消費鹽之總額，用個人之平均食鹽量除之，以得全國人數之估計。

表 1

工 廠 調 查 表

民國　　年

1	廠名		2	廠址	
3	經理或廠長姓名		4	工業種類	
5	成立年月		6	出品商標	
7	性質(公司 合夥 獨資)		8	公積金	

9 資本	華資		外資		法定資本金額
	已繳足金額	未繳足金額	已繳足金額	未繳足金額	

10 廠屋	
自有或租用	
建築年月	
面積	
會否保險及保險金額	
廠屋總值	

		工人類別	男工	女工	童工
13	工人人數	計時工人			
		計件工人			
14	工資	計時工人			
		計件工人			
15	工人年齡	最大			
		最小			
16	每人每日工作時間	日工			
		夜工			

11 職員	人數		薪金總數				分紅			
	男	女	年薪		月薪		年底分紅		月底分紅	
			男	女	男	女	男	女	男	女

12 工人教育程度	識字人數		不識字人數
	能了解普通文字者	不能了解普通文字者	

17 紅利			
計時工人			
計件工人			

18 原料	種類	出產地	運輸方法	每年總數(單位)	最近價格(單位)

19 原動力

蒸汽						
鍋鑪	種類	座數	製造國	製造廠	製成年月	使用時期
透平或引擎馬力 匹						
每日平均用煤	種類	出產地	噸數			
有無加煤機						
每匹馬力每小時用煤 磅						

電力						
馬達	種類	座數	製造國	製造廠	製成年月	使用時期
共有馬力 匹						
每日平均用電 基羅瓦特						

柴油			
引擎馬力 匹			
每日平均用油	種類	出產地	磅數
每匹馬力每小時用油 磅			

人力	水力

20 機械

種類	製造國	製造廠	製造年月	使用時期	全廠機械總值

21 出品

種類	每年出數（單位）	裝置法	每年出品總值	運輸法	銷路最旺區域	每年銷數	銷售物品之市價

26 最近三年營業比較

年別	民國十八年	民國十九年	民國二十年
盈			
虧			
原因			

27	工廠待遇之設備	浴室		教育	
		食堂		醫藥 取費	
		更衣室		醫藥 免費	
		洗面所		醫院 自設醫院	
		運動場		醫院 臨時醫院	
		廁所		常年聘請醫生	
		飲料		儲蓄	
		救火機		保險	
		警鐘		借貸 每人每年高額	
		防疫方法		借貸 最底利率	
		避險標牌		借貸 最高利率	
		危險機之保障		撫卹 負傷者	
		寄宿舍		撫卹 死亡者	
		光線		保產金	
		空氣		育兒室	
		書報室		其他	
		娛樂場			
28	備註				

填表人簽名　　　　年　月　日

調查員

表 2

…………工廠工人傷害事項調查表

調查區域…………　　　　調查時期　年　月　日

1	姓名											
2	性別	男										
		女										
3	年齡											
4	在廠職務											
5	受傷部位及傷況											
6	受傷原因											
7	受傷時期	年										
		月										
		日										
		時										
8	治療地點											
9	醫藥費	何人担負										
		金額										
10	療治結果	全愈										
		殘廢										
		死亡										
11	療治日數											
12	善後方法											
13	備註											

調查者

2.審查確度、估計之事實是否近於正確，此用估計法者不可不注意者也。其注意之點如下:—

(1) 若此次估計所根據者卽以前曾經採用適當之方法而未參入臆測分子之意見所作之統計或估計，則此次估計多近於正確。

(2)估計之事實苟非易變者，易致於正確，

(3)估計之結果經過多數人預先推測，倘屬相同者，亦近於正確。

(4)數人同時對於某事實加以估計，僅微有差異，倘其差度能互相衡銷，則此估計亦可近於正確。

第四節

材料之整理

原統計之法則，乃根據於大量觀察法，而大量觀察法者，乃由多數同類之事實中發現其呈示於自然之常態也。故可知從事一種統計之編製，卽須彙集此種統計事實之多數同類材料，但材料既多，甚至因某種統計範圍極廣，所搜集之材料盈千累萬，關於材料之報告汗牛充棟，如整理無方，任其凌亂，一俟加以統計，雖記性過人者欲檢查所須之材料，亦將頭昏欲裂，急切不可得也。故整理統計材料之法，不可不加以研究。整理材料大都依下列之程序:

1 歸類 各處材料源源而來，此時保管材料者絕不可混而存之，先須用抽樣考驗法(Sample testing)或校讀法(Check reading)辨別其正確而有用者留下，若視其有矛盾者，則判其中之較爲合理者留下，視其有一部分錯誤，不可用橡皮擦去或剪刀剪去，於其錯誤處，用筆註之留下，視其有可懷疑之處，亦用筆註之留下，如此有可爲用之材料既皆留下，然後因其性質之異

同，或來源之異同，或搜羅材料之目的不同，或地方區域之分別，或登記材料時間之先後而類歸之。

2 應用活葉卡片　材料既已類別，於是分記於活葉卡片之上，誠以活葉卡片之數量能伸縮自如，吾人易於刪去已廢材料之片，而增置嶄新有用材料之片也。卡片之顏色大都爲白色，然有時材料之種類太繁，亦可用數種顏色之卡片以分別之。至卡片之大小宜能適合容納所需之每種材料並能一律爲最佳。卡片縱橫之長約爲三與五之比。

3 應用適當之檢字法　每類材料既已登記於每類卡片矣。謂如此則整理材料之法已臻盡善乎，猶未也。緣每類材料動輒千百種，若混雜登記於該類之卡片，檢尋之時，仍感困難也。故欲完善材料之整理法，必檢尋材料時毫無困難。而欲檢尋材料時，毫無困難，則必用檢字法。蓋依此法而目分卡片，以記每類各種之材料，一旦從而勾稽之，咄嗟可得。但檢字法之種類甚多，有十進法，字母法，數字字母並用法，以字之首筆分類法，以字之筆畫形式分類法，以筆畫多寡排列法等；各有短長，應用者當視材料之性質屬於何種，分別採取上述各法以適合之。

4 卡片之排列　卡片既經分別爲若干類目，更須將每類卡片次第排列於特製之卡片櫥中，方可保持其秩序也。卡片櫥之種類甚多，其最適用者當如圖1圖2及圖3之形。

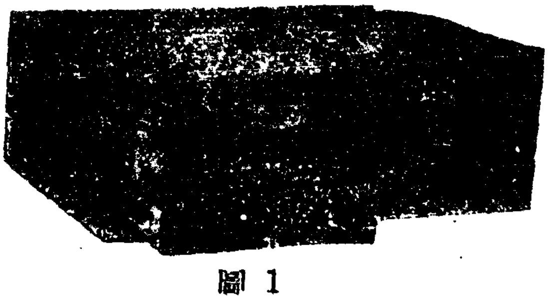


圖 1

圖 2

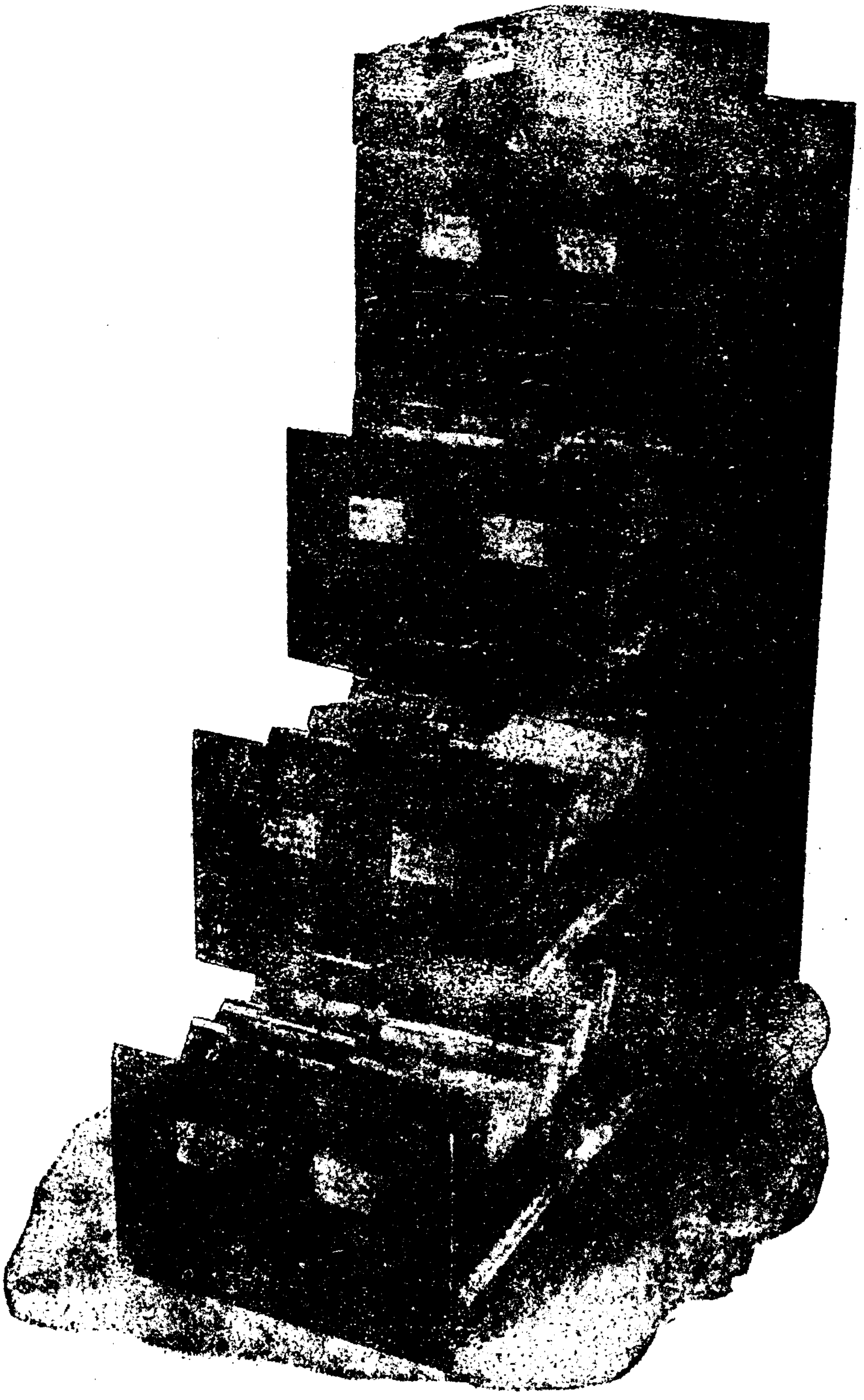


圖 3

第四章

統計表之編製

第一節

列表之功用

統計材料雖經充分搜集，整理有緒，猶未完成統計之功用；誠以統計之最後目的，在表現材料所示事實之眞相，搜集之材料未經表現，則統計之最後目的固未達也。是故吾人已知搜集材料之法，又必須知表現事實之方法。此種方法卽所謂統計法也。(Statistical Method). 統計法概別爲三種：一曰列表法 (Tabular Method)，二曰繪圖法 (Graphic Method)，三曰量數分析法 (The Method of Analysis of Aggregates of Facts)，今當逐一述之。

表列法者卽係將零散分置之材料，按類排列，納入一表之縱列橫列之項目所轄之行欄內，列成系統，以便對照，而適應所欲研究之目的者也。至此種表卽所謂統計表。

列表之功用約有六端：

1. 易於審查材料　表中材料既列成系統，則提綱挈要，審查自易。
2. 便於比較事實　以文章敍述事實，往往連篇累牘，因此事實之重要性 時間性，表明事實所用數目之大小，皆不便於比較，今

若用表序列事實之材料，則以相同之事實類別相比，自易發見事實之各個或各組相互之關係，其重要性時間性及數目之大小均可便於比較矣。

3. 易於記憶事實　同類事實之材料彙集一處，簡賅清晰，自易引起閱者聯念的作用，使其便於記憶。

4. 便於總計數目　總計數目，雖不必列表，但遇事項龐雜，數目紛繁，不可不列一表，循數目之大小，依次排列，俾便於總計。

5. 減少重複之說明　表中各事項分類排列，則項目說明可以減少，非如文章敍述事實常多重複。

6. 事實之關係顯明　網羅適應於研究一種問題之目的之材料，纂納一表，其材料所示事實之關係自易顯明。

第二節
統計表之種類

統計表之種類甚多，其分類法極不一致。但就其最普通者言之，可有分類法二種：一依表列事實爲原始或非原始而分者，一依表列事實所取標準爲歷史的；橫斷的或變量的而分者。茲將依此兩種方法所分之種類略述如下：—

1. 依表列之事實爲原始或非原始而分者爲詳表及總表。

(1) 詳表　詳表者詳細事實之倉庫也。吾人將最初搜集某種事實之材料完全的並正確的詳細表現於此表。而對於此種材料絕不加以分析焉。

(2) 總表　總表者縮合詳表之材料而爲簡賅記載之表也。此表之材料僅爲原始材料之一部分，或自原始材料用計算法得來者，或爲特別事項之解說而經分析者也。

(3)詳表與總表之優點

A. 詳表之優點

a. 表中數字比較總表數字爲可靠，蓋詳表中材料一經編製總表時，加以綜合之手續，則其重要數字或致隱蔽也。

b. 詳表之材料甚爲詳細，可供數方面之參考；若用總表綜合其材料，常使數方面不能盡得其單獨所求者。

B. 總表之優點

a. 編製總表，必將詳表之材料合併縮減；是總表之材料少於詳表，故研究總表材料所示之事實，較詳表爲節省時間。

b. 總表之材料爲詳表材料之縮影，故欲明材料所示事實之大意者，不可不用總表。

2. 依表列事實所取標準爲歷史的，橫斷的或變量的而分者，爲表示歷史事實之表，表示橫斷情形之表及表示變量事實之表。

(1) 表示歷史事實之表　此表所列事實乃以時期爲主體，依照事實時間性之先後，順次排列(如表3)。所以備將來繼續研究。

表 3　蘇州造紙業男工歷年每人每月平均工資

年	別	工資（單位爲元）
民國十五年	(1926)	12·00
民國十六年	(1927)	23·50
民國十七年	(1928)	24·00
民國十八年	(1929)	25·50
民國十九年	(1930)	29·00

表中材料乃由中國國民政府工商部發表

(2) 表示橫斷情形之表　此表乃列同一時期之事實，以其空間之關係爲主體，依照事實內容之情形，順序排列（如表

4)，俾可便於比較。

表 4　　1929年七國人口概數與國富總額

國　別	人　口　概　數	國　富　總　額
中　國	485000000	38289000000日圓
俄　國	160000000	104102000000
美　國	116000000	762356000000
德　國	63000000	71685000000
日　本	60000000	102343000000
英　國	47000000	236320000000
法　國	41000000	103530000000
總　數	972000000	1418625000000

表中材料除中國人口概數爲中國內政部發表者外由日本內閣統計局發表

(3) 表示變量事實之表　此表乃列一時期之事實，依其分布範圍之廣狹與發見次數之多寡，適當排列(如表5)，以便研究其變量情形。

表 5　　中國29城工業每年普通放假日數之比較

組　距 (日　數)	城　數	百　分　數
1——10	10	34•48
11——20	10	34•48
21——30	1	3•45
31——40	4	13•79
41——20	1	3•45
51——60	1	3•45
61以上	2	6•90
總　計	29	100•00

表中材料乃由中國國民政府工商部發表

第三節

表格式樣之選擇

表格式樣種類頗多。有單項表式 (Single Tabular Form)，二項表式 (Double Tabular Form)，三項表式 (Treble Tebular Form)，四項表式(Quadruple Tebular Form)及五項六項等以至於十餘項之表式。所謂單項表式者卽含有一種事實之表式 (如表3)，二項表式者卽列有二種事實之表式(如表4)，三項表式者卽列有三種事實之表式(如表6)，四項五項六項等以至於十餘項之表式者卽列四項五項六項等以至於十餘項之事實之表式。由是可知表格無一定之式樣，式樣種類之選取應視統計表須呈示事實之多寡而定。雖然，編造任何表格，選用式樣不可不注意下列各點:

表 6　最近十年中國輸出入金銀及貨物淨值比較表

(淨值以關平銀千兩爲單位)

年	現金				現銀				貨物		
	輸入	輸出	淨輸入	淨輸出	輸入	輸出	淨輸入	淨輸出	淨輸入	淨輸出	入超數
	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.	Hk.Tls.
1921	29499	45960	………	16461	89545	57114	32431	………	906122	601256	304866
1922	9808	5685	4123	………	75687	36114	39573	………	945049	654892	290157
1923	10146	15813	………	5667	93941	26745	67196	………	923403	752917	170486
1924	2047	11782	………	9735	49529	23527	26002	………	1018211	771784	246427
1925	1845	2883	………	1038	73927	11403	62524	………	947865	776353	171512
1926	1607	9205	………	7598	78781	25577	53204	………	1124221	864295	259926
1927	2077	3376	………	1299	81889	16805	65084	………	1012932	918620	94312
1928	6329	270	6059	………	111662	5267	106395	………	1195969	991355	204614
1929	1005	2976	………	1971	121430	15604	105826	………	1165779	1015687	250092
1930	2575	19110	………	16535	102560	35554	67006	………	1309756	894844	414912
	………	………	………	50122	………	………	625241	………	………	………	2407304

表中材料係由1930年中國海關貿易册抄來

1.式樣須爲矩形或長方形。

2.式樣須能使閱者易於査出其中所列之事項而窺事實之全部。

3.採用之式樣須能節省篇幅並能妥於保存。

4.式樣最好不多費工夫而可編列者。

5.式樣須有一備註處以備填當造表時所未知之事實，例如呈示歷史事實之表有備註，則以後各年之事實須填入表中者即可填入備註，如此則研究進退消長之情形，自屬便利。

6.式樣最好能將事實之分總數及大總數皆可列出。

第四節

造表規律

如欲編造適用之統計表不可不知造表之規律而善能運用之，造表之規律爲何，可分下列五項以說明之：

1.確定表之名稱

(1) 表之名稱乃用以表明表之內容者，須置於表之項端，因表之排列法通常多自上而下之故也。

(2) 表之名稱務須簡明而能揭出表中重要各點，須無庸另註解釋而能使人明瞭表之內容。

(3) 名稱中所有各要點先後次第，宜與表中所列關於重要點之細大項目之次第一致。

(4) 表之內容有空間及時間性者，須以其地方時期分別在表之名稱上註明，例如表6之內容爲最近十年中國輸出入金銀貨物淨值，則名稱上必須註明最近十年中國等字。

(5) 表之重要數字須指出時，宜列入名稱之內；如表5列二十九城工業每年普通放假日數，則此二十九城須註明於表

之名稱中。

(6) 有時一表所占篇幅甚長，須分作數頁或數表方能列出，此種長表除在第一頁或第一表上部將該表之名稱完全寫出外，並註明表之號數，以後各頁或各表僅記號數，名稱可以不記，但記「續前」二字可矣。

2.排列表之項目

(1) 表之項目須按表列事實之性質擇依下列標準順序排列:

(a) 位置之重要。

(b) 等級之高低。

(c) 時間之先後。

(d) 數目之大小。

(e) 筆劃之繁簡。

(f) 字母之先後。

(g) 地方區域之大小。

(2) 複雜表式之項目多至數十，最易涉於混亂。故編纂時宜將此衆多之項目別爲數類，歸於數表，或删汰一切零星瑣屑而不重要之材料，使減成少數項目載各種緊要事項。

(3) 表中包含事項最多之大項目又可分成細項目。排列之時，將細項目位於大項目之下。至大項目與細項目之區分視造表之目的而定。

(4) 注重比較某一項目之時，須用粗字顯之，若用紅藍等色刊印，尤易醒目。

3.劃表格線

(1) 表中每一豎行或一橫欄須以直線劃分之。

(2) 普通項目之間用一細直線，重要項目之間可用粗直線，雙直線，三直線等劃分之。

(3) 表之項端及底邊可畫粗直線或雙直線。

(4) 表之左右邊可不必需邊線。

(5) 表中上部列項目處之下，及下面列總數平均數之上，均須用橫線劃分之。

(6) 表中排列數字之處不必用豎線或橫線劃分，因一用豎線或橫線，則每一豎列數字或橫列數字非畫一豎線或一橫線不可；如此反不清楚。

4.數字列法

(1) 表中數字之位數如爲橫列者，須上下相對，如爲豎列者，須前後相對，俾易加減比較，免觀察錯誤。

(2) 列數字之處雖不用豎線或橫線劃分，然可畫點線介於數字之處與數字所示事實之間。

(3) 表中數字如有特別意義時若爲橫列者，則於其上或下，若爲豎列者，則於其前或後，畫一粗線。

(4) 如表中各豎行或各橫行之數目排列甚長，閱時頗費精神。可將此一列數目分成多組，每組間畫一直線或分組點線

(5) 無數字之格須用短線或短點線補充之(可參閱表6)。

(6) 數字宜有一定之界限，不可混雜；例如編製米業工人生產能力表時，其分類常爲舂米5石至10石者10人，10石至15石者8人，15石至20石者2人等，此種分類卽易混雜，蓋其界限不清也，然若改爲5石至9.99石者10人，10石至14.99石者8人，15石至19.99石者2人等，其中之界限卽較爲顯豁矣。

5.表之佈置

(1) 列表以能附近其有關之正文爲最佳，至其列前列後則視表之關係如何而定；例如正文係說明表中之意義，則宜先列表，若正文之意義不必賴列表以顯明，或正文必須置於表前始予表以若干意義時，則表宜放在正文後面或中間，

有時表長甚，則宜放 附錄內，惟其總表仍宜置於正文中。

(2) 表之布置須有順勢，而不可有矛盾之勢。所謂順勢者，卽表中材料之排列，或從上至下，或從左至右也。所謂矛盾之勢者，卽表中材料之排列，時或從上至下，或又從下至上，時或從左至右，或又從右至左也。

(3) 表中所排印之字大小須適宜，最小者亦須令閱者無傷目力。

(4) 兩種性質不同關係毫無之事項，決不可羅列於一表，否則兩種事項之特徵，皆不能顯矣。

(5) 表中最好能留一地位，以為說明修正等事項之備註。

第五章

統計圖之繪製

第一節

繪圖之功用

統計表之爲用雖能使材料之排列整理有緒，然表中所用文字，說明事實 仍宜陷繁長艱深之病；所用描寫事實之數字，每佔篇幅頗多，閱者苟非詳細檢視，仍不易發見此種事實之眞相；於是統計圖之繪製尙焉。蓋將統計之事實表示於統計圖，雖不及以列表法用文字說明或數字描寫事實爲精確，然能將事實之大體顯明，使人於最短時間了解其眞相。雖無統計智識者，因其表示事實，彰明顯著，一見即可了然，亦亟願瀏覽之也。

第二節

統計圖之種類

統計圖就其普通所用者，依其形式之不同，概言之，可分爲直條圖(Bar Diagram) 平面圖(Surface Diagram)，容積圖 (Volume Graph)，形象圖(Figurative Diagram)，組織圖(Organization Chart) 統計地圖(Cartogram)，曲線圖 (Curve Graph)及百分比

較圖(Percentage Diagram)。茲分述之如次:——

一. 直條圖 ;於此圖上繪若干直條，以其長短代表某事物數量之多寡。此圖可分爲橫直條圖及豎直條圖兩種。所謂橫直條者卽平行之直條(如圖4所示)。豎直條者卽垂直之直條(如圖5所示)。至此兩種又各分爲四種如下:

(一)單式直條圖 (Simple Bar Diagram) 於此圖上，繪若干直條，以一直條代表某事物之一項目，例如圖4及圖5，吾人乃得視直條之長短，可以知各項數值之大小。至繪此圖時，須注意直條宜稍粗，其中間之距離不可太狹，條身宜用黑色有時亦可用其他顏色。

(二)複式直條圖 (Component Bar Diagram) 此圖上有每兩道或兩道以上直條列爲一組代表某一事物之一大項目，以每組中之一直條代表大項目中之一細項目，(例如圖6) 視直條之長短，以比較各細目數值之大小。繪此圖時，對於並列之各直條最好能用顏色以示區別，且有時應在圖下用記號註明各種直條所代表之事物。

(三)單式分段直條圖 (Simple sectioned Bar Diagram)

中國外商經營電燈廠電力統計

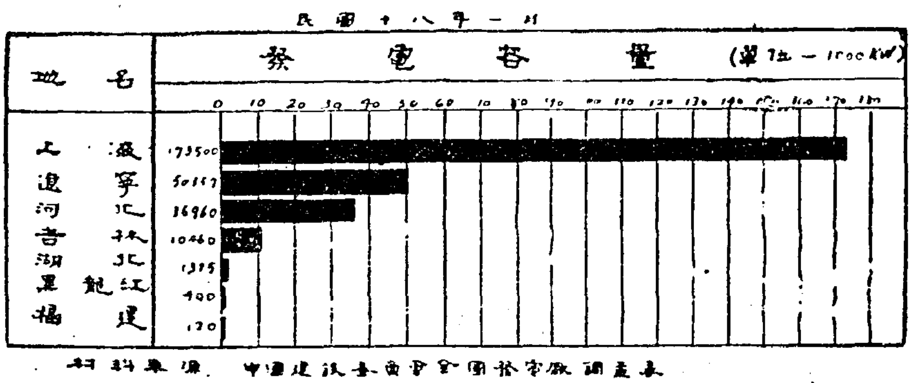


圖 4

一九二八年日本在華投資統計圖

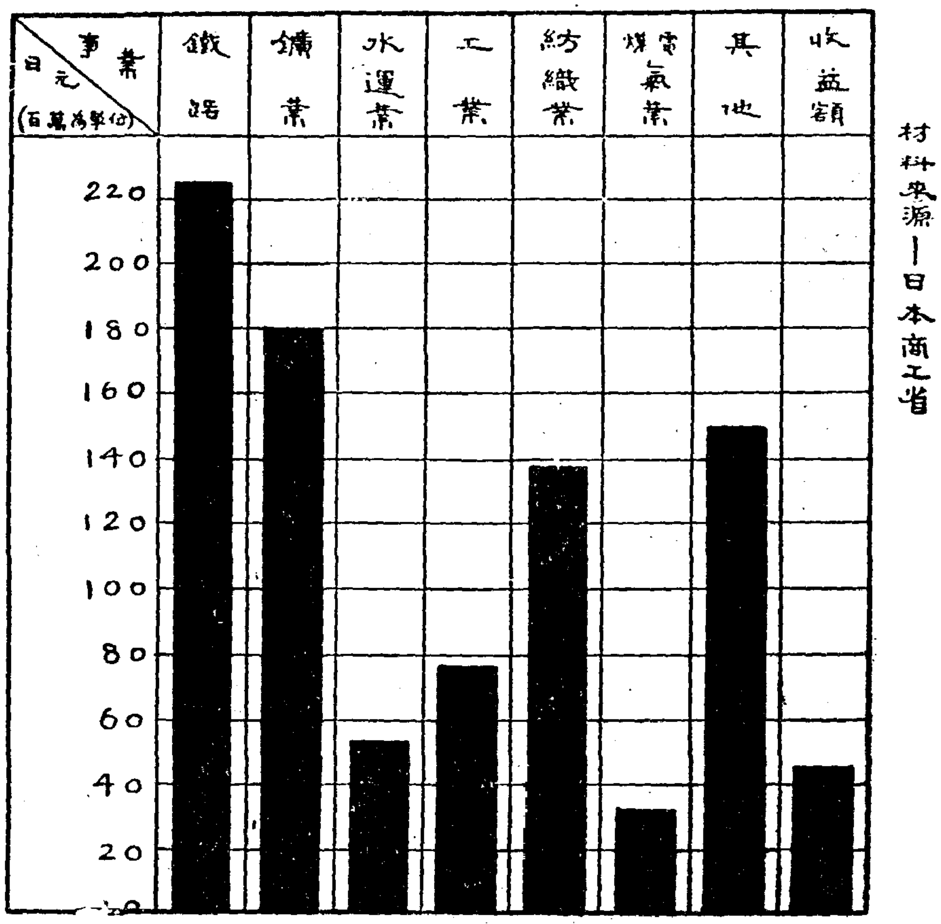


圖 5

圖中每一直條代表某事物之總數；再按某事物各部分之數值比例，分此直條爲若干段，每段代表一部分，例如圖7及圖8。至繪此圖時，須注意直條宜稍寬，其各段須用顏色或各種點線表明，使之顯然有別。

(四)複式分段直條圖 (Component Sectioned Bar Diagram)

此圖與複式直條圖類似，所不同者卽此圖之每一直條表示

一項總數及總數之各部分耳，此種圖式與單式分段直條圖式皆可分爲兩種：一則各條之長度均相等，一則各條之長度不等。各條長度相等者是以百分數代表各項材料也，各條長

一九二八年日本對華貿易

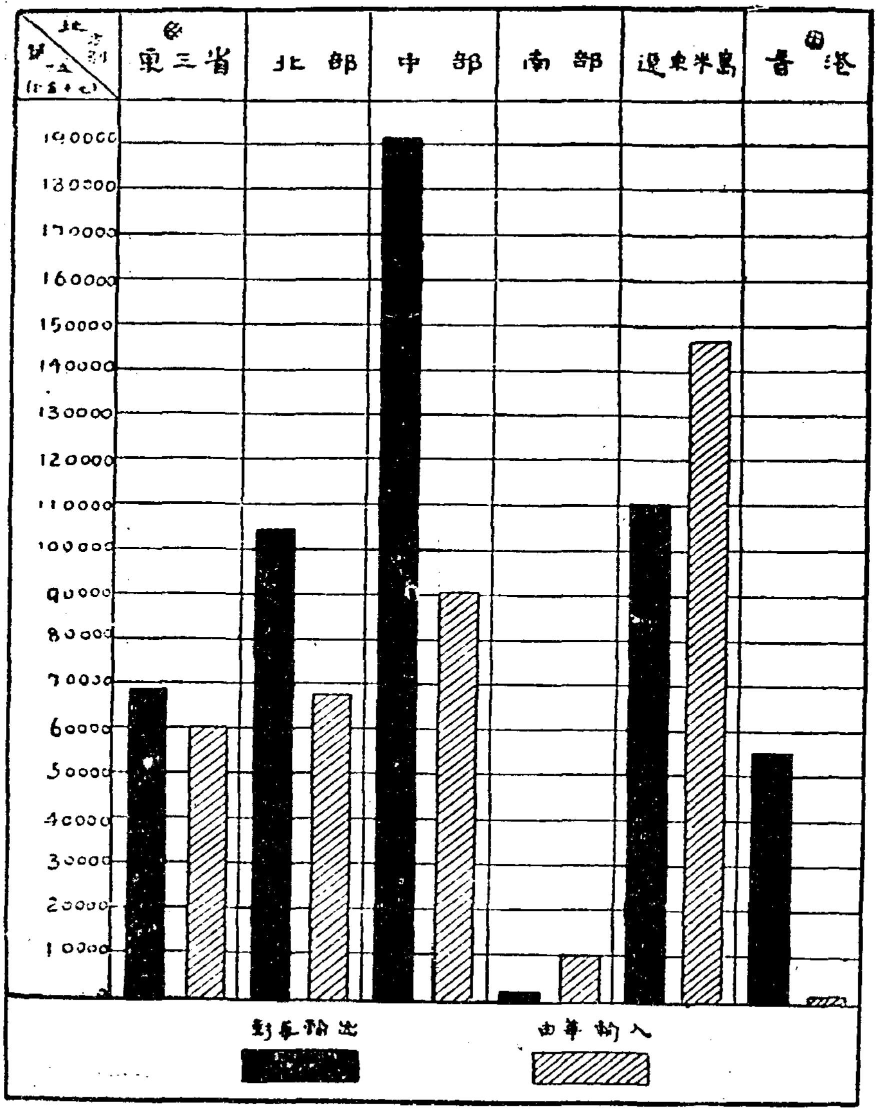
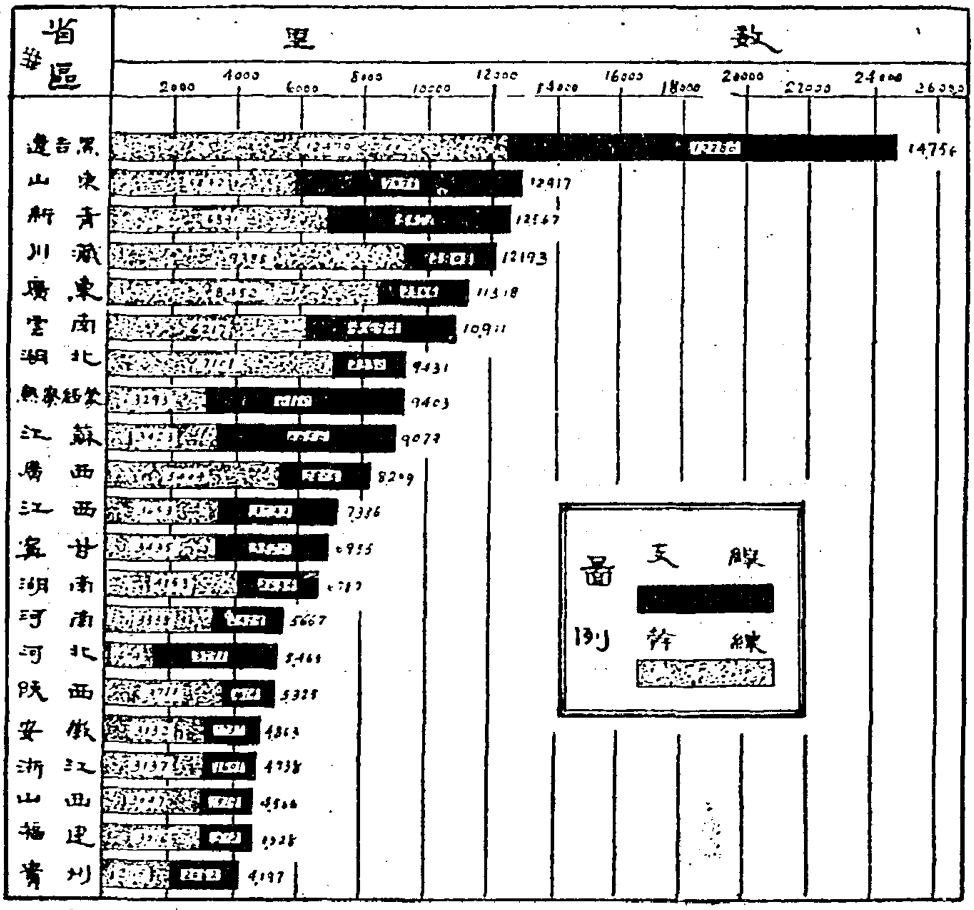


圖 6

中國各省電報幹支線統計圖



材料來源 交通部電政統計圖表

圖 7

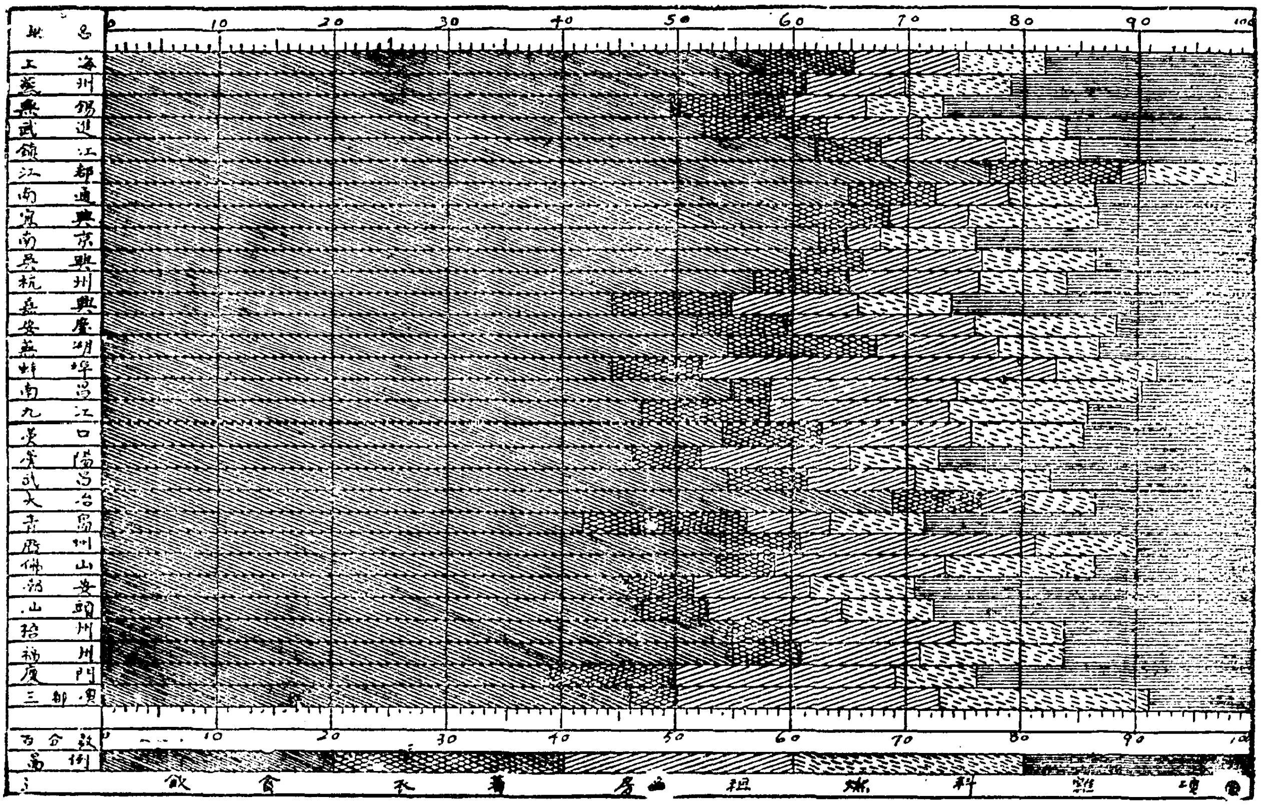
短不等者是各條均表示事項之真實數目也。

二. 平面圖 此圖乃以其平面面積代表一事物之全體。其形可分為四種:一曰圓形圖(Pie Diagram),二曰方形圖,三曰三角形圖,四曰多角形圖。

(一)圓形圖 圓形圖可分為四種:一曰單圓圖,二曰多圓圖,三曰疊圓圖,四曰扇形圖。

1. 單圓圖 以一圓之全面積代表某一事物之全體數量,再

工 人 生 活 費 用 比 較 圖



材料來源 國民政府工商部工人生活調查報告

圖 8

按此事物所分之項目，分全圖之面積爲若干扇形。以代表各項目之數值；例如圖9 爲一分成一百等分之單圓圖。以百分代表全體數量，而以各部分之數量合成百分數，由圓之中心點起繪成扇形以代表之，至將各扇形所代表之數量合成百分數應用公式如下：

1926年日本本部高麗及日本在滿洲投資開採石礦每度鐵礦石數量百分比

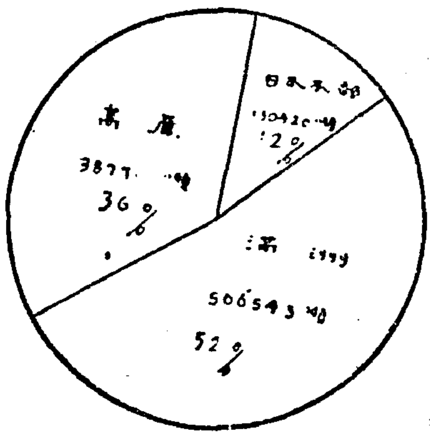


圖 9

設 x 爲圓周某扇形代表數值所佔之分數

y 爲代表某項目之數值所佔百分數

則 360 : x :: 某事物全體數值 : 某項目之數值

100 : y :: 某事物全體數值 : 某項目之數值

如圖 9 所載高麗產鐵礦石爲

360 : x :: 1084680 : 387717

$$x = \frac{387717 \times 360}{1084680} = \frac{139578120}{1084680} = 129$$

100 : y :: 1084680 : 387717

$$y = \frac{387717 \times 100}{1084680} = 36$$

因 $\frac{x}{360} = \frac{\text{某項目之數值}}{\text{某事物之全體數值}}$

$$\frac{y}{100} = \frac{\text{某項目之數值}}{\text{某事物之全體數值}}$$

故 $\frac{x}{360}=\frac{y}{100}$

$\frac{129}{360}=\frac{36}{100}$

如欲單圓圖所表示之事實分外顯明，最好用各種不同之顏色區別各扇形。至若其事物之項目太多，所分之扇形亦必多。其中有過於狹小之扇形，不能將項目之文字及數目註上，仍以繪他種圖形爲是。

2. 多圓圖　用二個以上不等之圓形代表二個以上不等事物之數量。大圓形表示大量。小圓形表示小量（閱圖 10 及 11）。大量與小量之比卽大圓面積與小圓面積之比。因此，繪圖時不可不知求兩圓面積相比之方法，求兩圓面積相比之法如下：

因　圓之面積 $=\frac{1}{2}rc=\frac{1}{2}r\times 2\pi r=\pi r^2$

$\pi=3.1416$ 或 $3\frac{1}{7}$

c ＝圓周之長

r ＝圓之半徑之長

故　兩圓面積之比爲兩圓 πr^2 之比亦卽兩圓半徑平方之比

3. 疊圓圖　由同一圓心作成二個以上之圓形代表二個以上事物之數量(閱圖12)。並可按各事物所含各部分數值之比例，分圓周爲若干扇形，以代表各事物所含各部分之數值。此種圖形之缺點有二：

(1)閱者常爲圓周所混亂而不易明瞭其所示事物之現象。

(2)不易看出被掩圖形之面積。

美國維斯康新省牛乳餅工業進步之情形

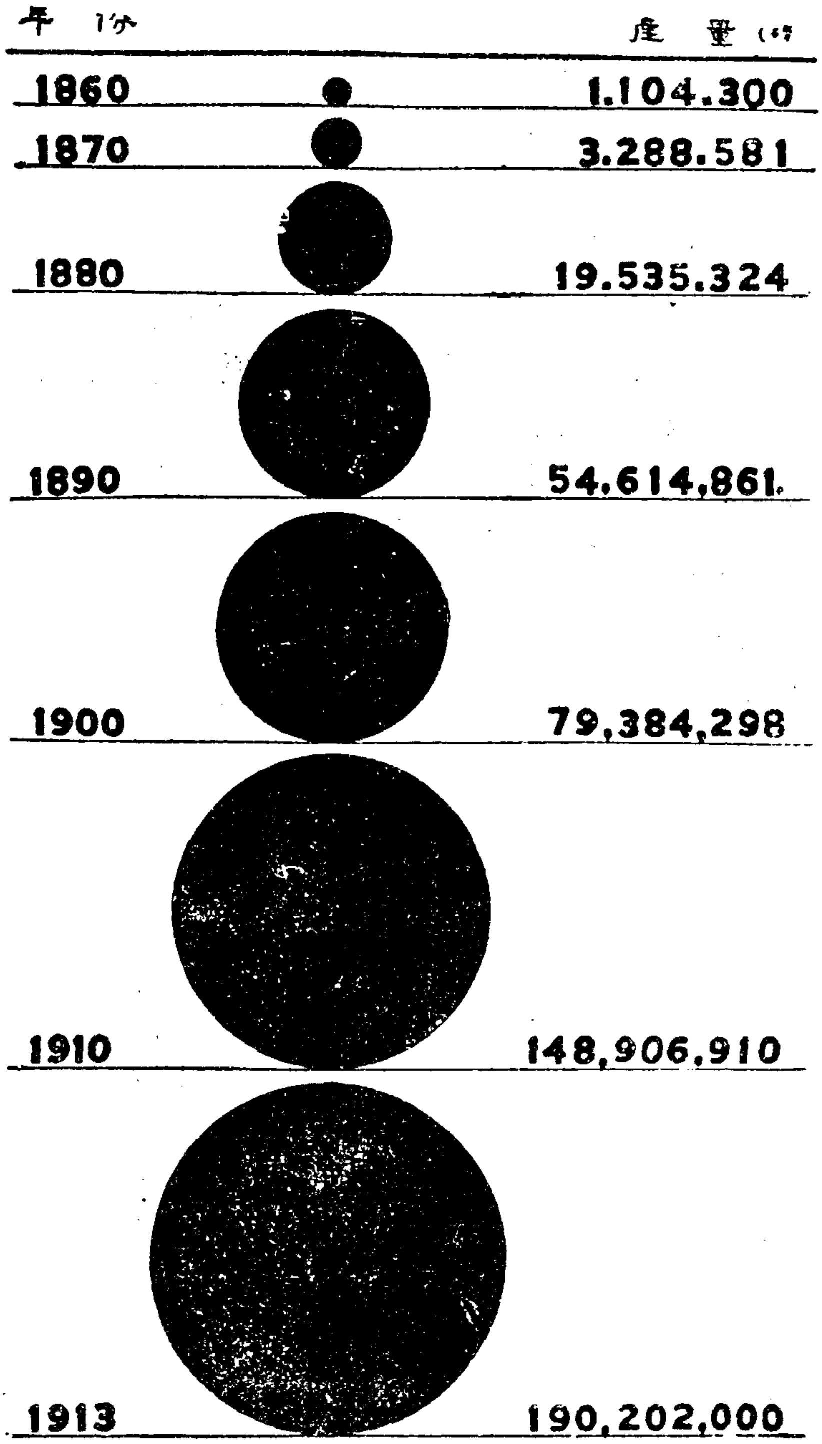


圖 10

材料來源：一九一三年產量之數字乃為前牛乳餅所及食物管理委員會所估計
一八六〇年至一九一〇年產量之數字乃得自聯邦戶口調查局

民國十六年中國直接輸出入貨值按來去處百分比較

直接輸入洋貨來處　　　　直接輸出國貨去處

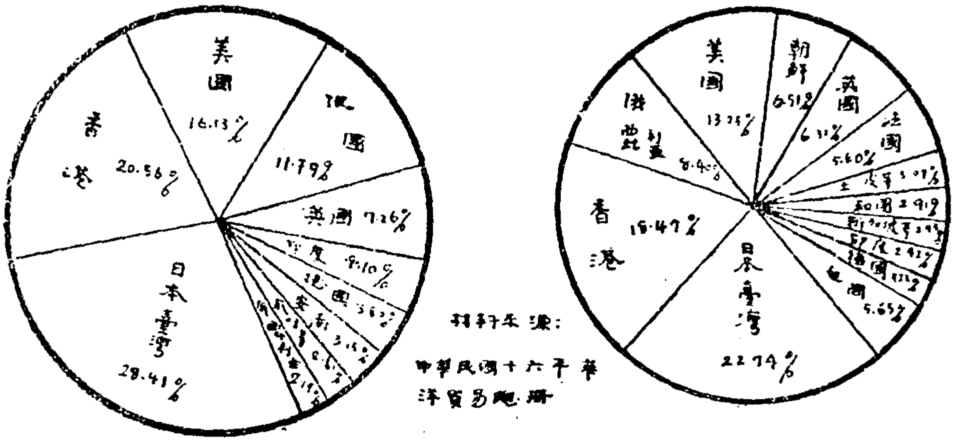


圖 11

4.**扇形圖**　扇形圖者乃圓之一部分，如圖13是也。此種圖可分為兩種：一曰單扇形圖，二曰多扇形圖。單扇形圖之面積代表某一事物之全體數值。至其各部分則按其數值之比例分扇形圖為數部分代表之，多扇形圖即二個以上不等之扇形圖，能代表二個以上不等事物之數量者。大扇形圖表明大量，小扇形圖表明小量。大量與小量之比，即大扇形與小扇形圖之面積之比。是則欲繪多扇形圖，不可不知求扇形圖面積之法（參閱圖14）。其公式如下：

$$扇形圖面積=\frac{半徑\times 弧}{2}$$

O為扇形之起點

$\overset{\frown}{AB}$為弧

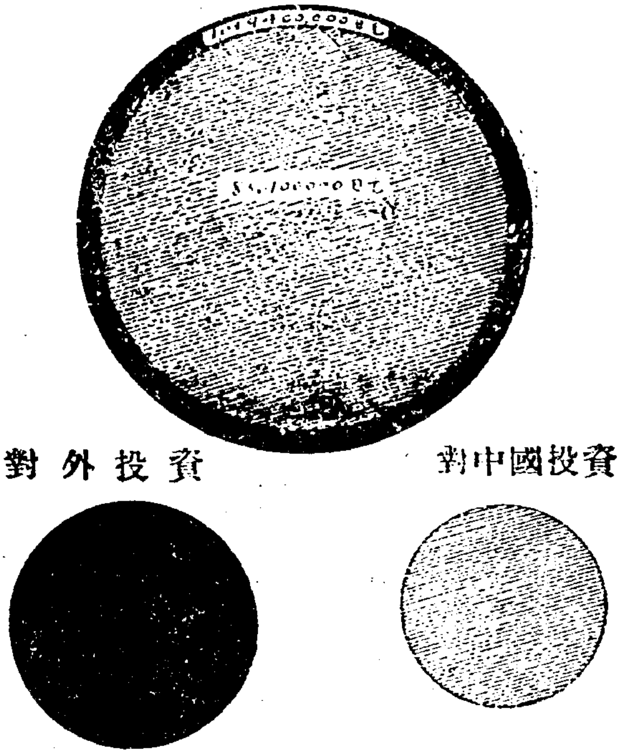
$$弧=\frac{2\pi r\times a}{360^\circ}$$

（因r為半徑，$2\pi r=$圓周，$\angle a$為所用扇形之角度）

AO或OB為半徑

一九二八年日本對中國投資與對外投資之比較

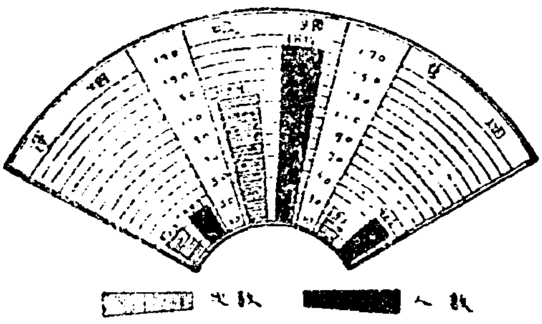
4：5



材料來源 日本商工省

圖 12

上海市公安局查獲烟案次數人數統計圖



材料來源：上海市公安局十八年度統計年表

圖 13

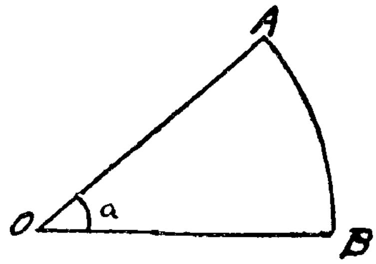
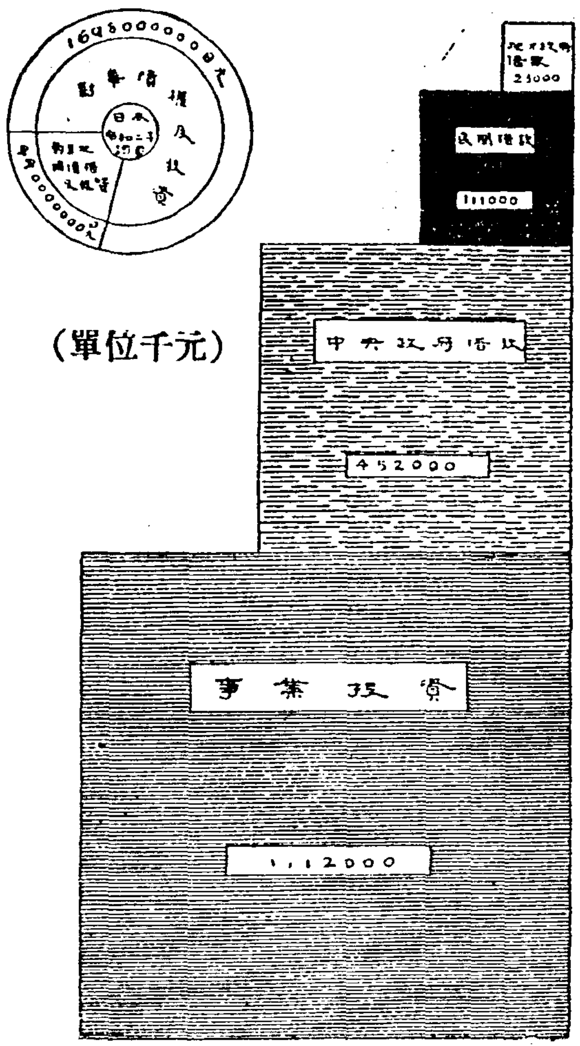


圖 14

扇形圖爲圓形之變化，所以用之者，因有時用圓形太多，乃另取之以引起閱者之興趣耳。

(二)方形圖　方形圖係以一平方形代表一事物之數量。依方形面積之廣狹，表明所代表事物數量之多寡（閱圖15）。其種類約分爲二：一曰長方形圖，二曰正方形圖。兩圖相異之



材料來源——一九二九年朝日年鑑

圖 15　日本對華債權及事業投資額

處，卽在形式之不同耳。至求面積之方法兩者固相同，均以方形輪廓之縱橫兩線相乘，求得積數爲方形之面積。

(三)三角形圖　此圖乃以一三角形代表一事物之數量（例如圖17)。依三角形面積之大小表明所代表事物數量之多寡，數量多者則面積大，數量少者則面積小．故欲知數量之多寡，一觀面積之大小可矣。但不知三角形面積之求法，面積之大小不得而知，是故知三角形面積之求法爲應用三角形圖之先決問題，求三角形面積所用公式如下：

三角形之面積 $=\frac{1}{2}$a b

a 爲三角形之高度如E F

b 爲三角形之基線如G H

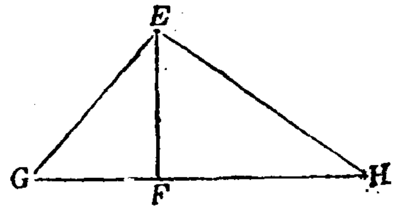


圖 16

(四)有規則多角形　有規則多角形圖乃四角以上之多角形。用其面積以代表一事物之體數量(可參閱圖18)。至有數種事物之數量，則可用數多角形圖代表之。惟不知多角形面積之求法，則不能定面積之大小；不能定面積之大小則不能繪各種多角形以代表各種事物數量之多寡。故在繪數有規則多角形圖以爲比較之先，必須知多角形面積之求法。其公式如下：

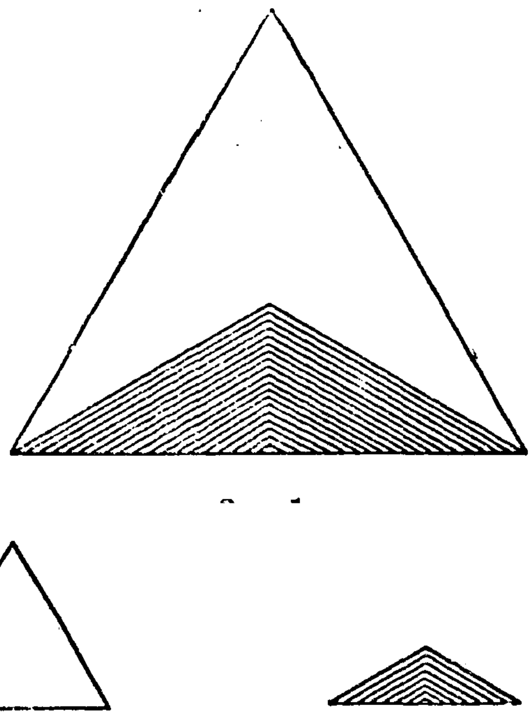
有規則多角形之面積 $=\frac{1}{2}$ap

$AB+BC+CD+DE+EF+FA=p$

$OG=a$

三．容積圖　容積圖種類甚多。有立方體形，圓柱形，稜椎體形，球形等。各得以其容積之大小，代表事物數量之多寡。但此種圖形繪於紙上，不易顯別(閱圖20)，故辦理統計者不常用之。然有時亦爲彼等所用者，則以此圖製爲實體模型，置於博覽

中國已採及日本在華開採之煤礦產煤能力比較圖



中國已採之煤礦平均每年產煤能力

日本在華開採之煤礦平均每年產煤能力

圖 17.

會，陳列所等處以期引起觀者之興趣耳。

既以容積代表數量，則求容積之法不可不知。求容積之法乃因圖形而異。今姑舉其最普通者如求立方體形，圓柱形，稜椎體形，球形等所用之公式如下：

立方體形之容積＝邊^3

圓柱形之容積＝圓柱底×圓柱底至圓柱頂之高度

稜椎體形之容積＝$\frac{1}{3}$×稜椎底×稜椎底至頂尖之高度

球形之容積 $=\frac{4}{3}\pi r^3$ 或 $\frac{1}{6}\pi d^3$

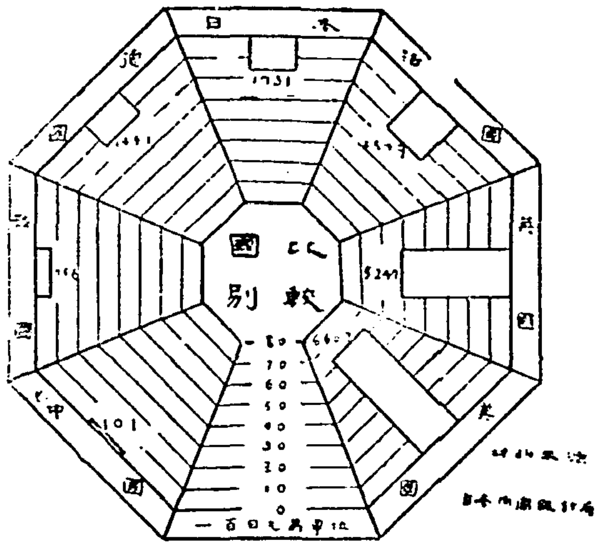


圖 18. 1929 年七國國富按國別
平均每人攤額比較圖

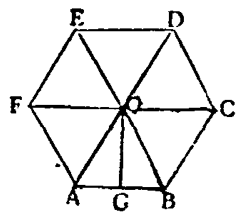


圖 19.

四. 形像圖　將所欲表示之事物繪成圖形，以圖形之大小高低長短或多寡不同之情形，顯明所欲表示事物之數量（閱圖21及22）。此種圖大都屬於體積形爲多。故其繪製之先，常須畫一體積輪廓。然後繪成圖形始可正確。此種圖有時製成實體模形，陳列於博覽會或陳列館，足以引起人之注意。若再施以仿效實體之顏色，尤足以煇煌奪目喚起觀者之興趣也。

五. 組織圖　組織圖係用以表示各種團體組織之系統，因而顯明其間之類屬性質及種種關係（閱圖23）。

六. 統計地圖　統計地圖爲含有統計作用之地圖也，此種地圖可表現事實之次數或分量及地理上分配之關係，人一覽之若將數量，及地位雙方對照，則對於空間事實之集中或變異狀況瞭如指掌（閱圖24及圖25）。此種圖之繪法甚多茲依其繪法之

中華民國十六年中日對外貿易總値之比較

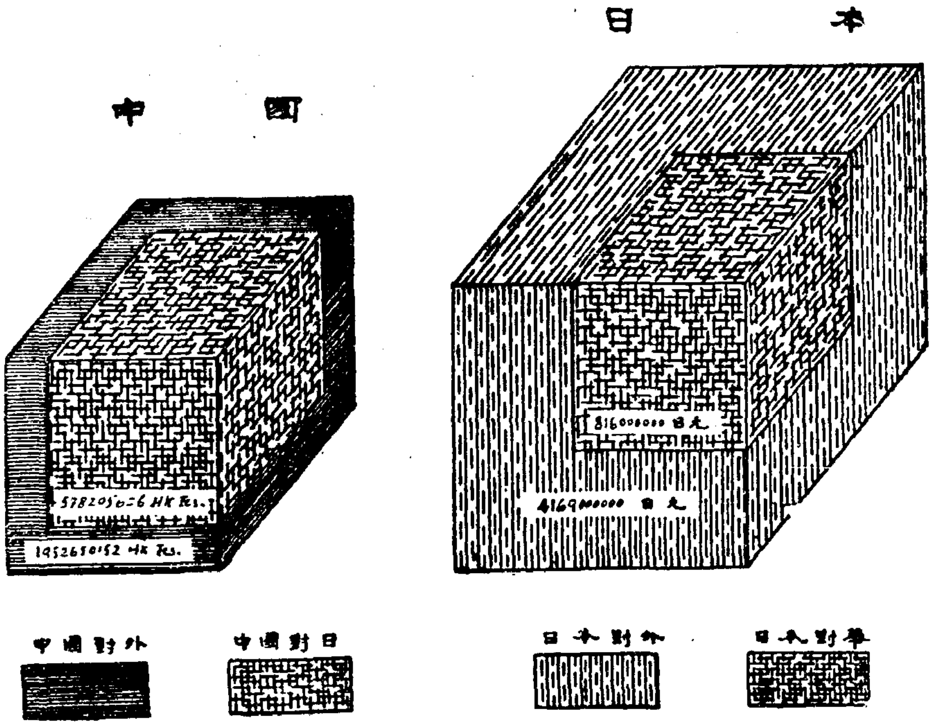


圖 20.

不同得分爲下列數種:

1. 顏色圖(Colored Map)　以各種顏色或同一顏色之深淺(惟深淺不能混和)表示各種事物數量之不同。

2. 橫線圖 (Shaded or Cross-hatched Map)　以橫線密度之稀緊表示各種事物數量之差異。密度愈緊者代表之數量愈大。反之則愈小。是則地圖上陰影有濃淡。小量之處較淡而色近白。大量之處較濃而色近黑。

3. 點圖 (Dotted Map)　以圓點之大小濃淡或多寡表現各種事物數量之差異。

4. 標針圖(Pin Map)　因標針可以移動，故遇事實在空間

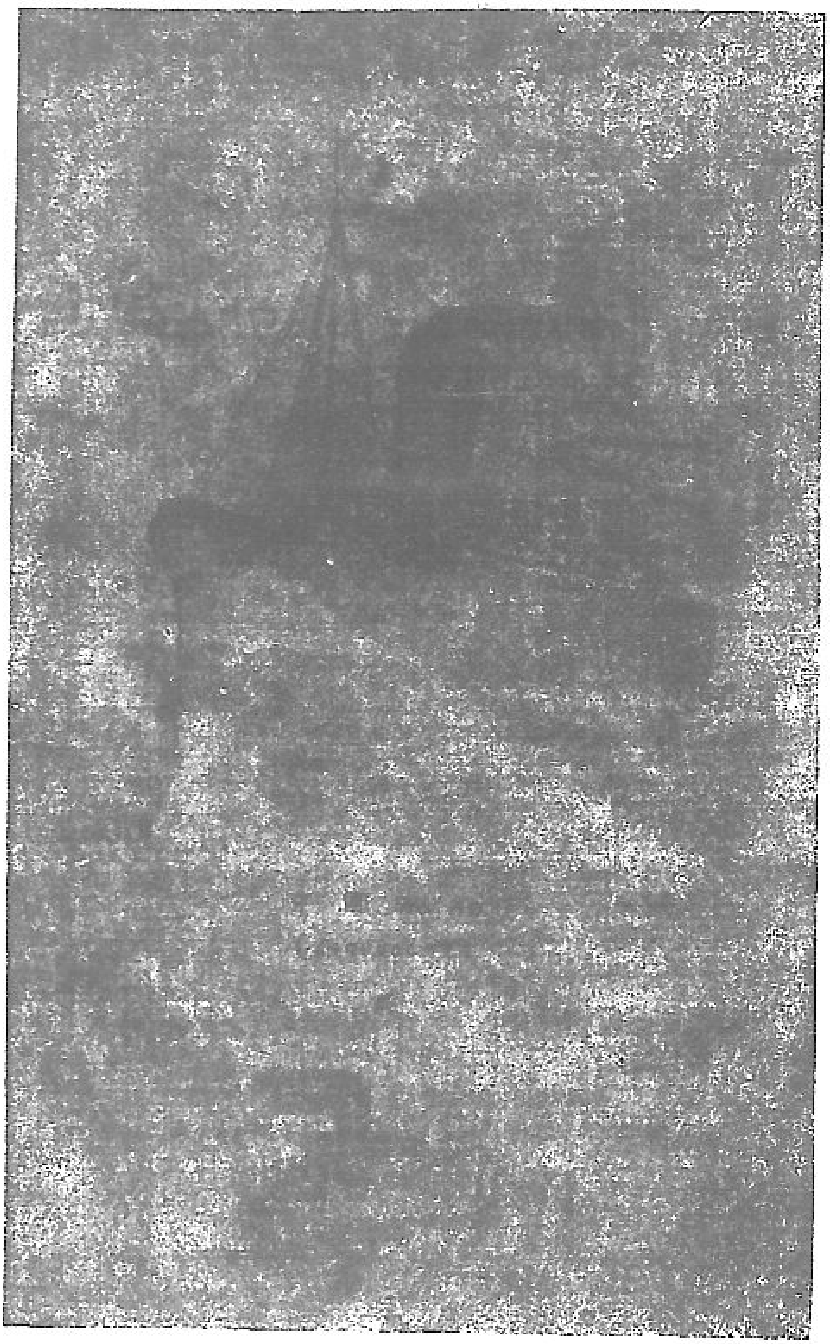
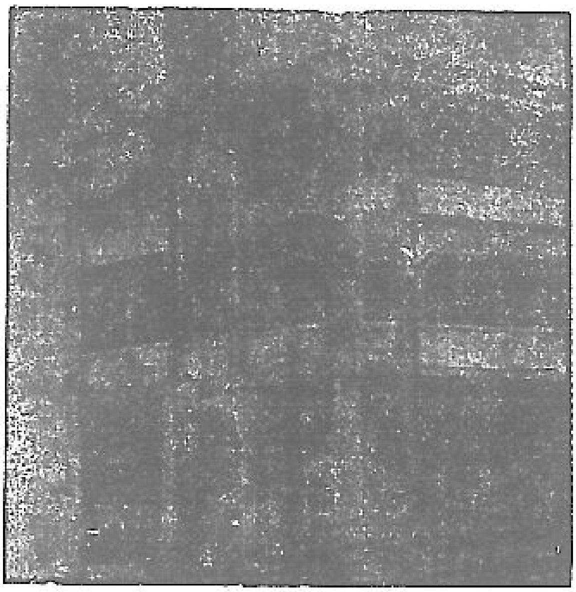


圖21。中國船舶與在華經營日本之船舶比較圖

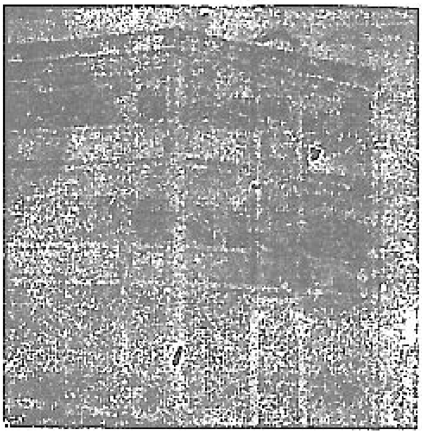
日本及其他各國在華設立行號之比較

(1.8:1)

日本行號
4,848號



其他各國行號
2,637號



料材來源: 民國十六年海關貿易總册 圖22。

中國國民政府行政系統

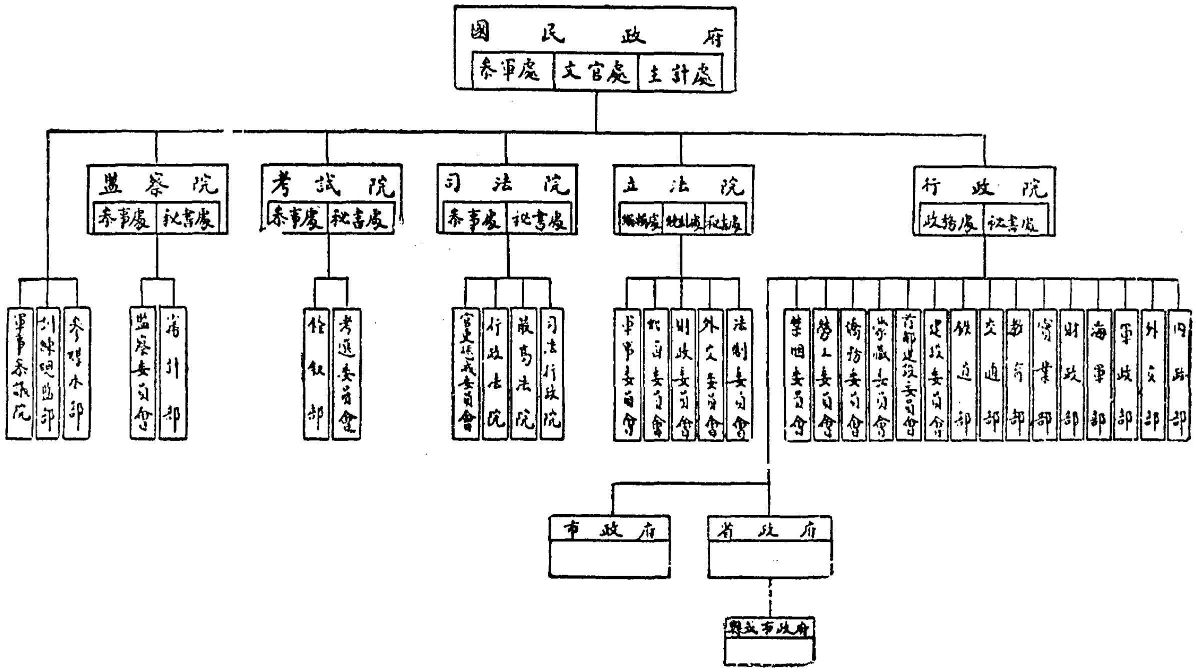
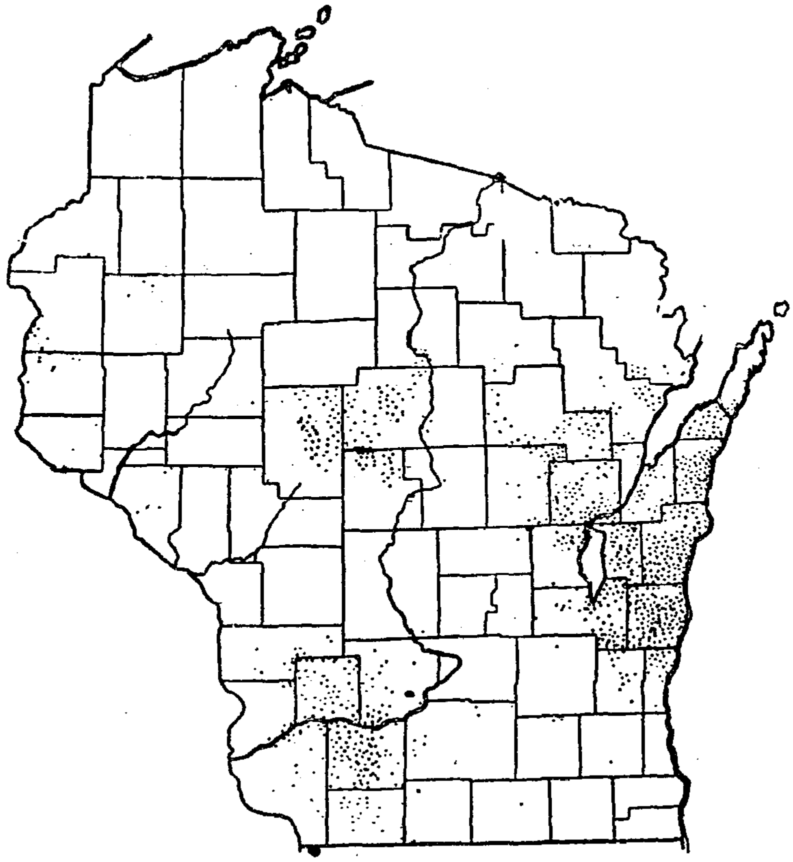


圖23.

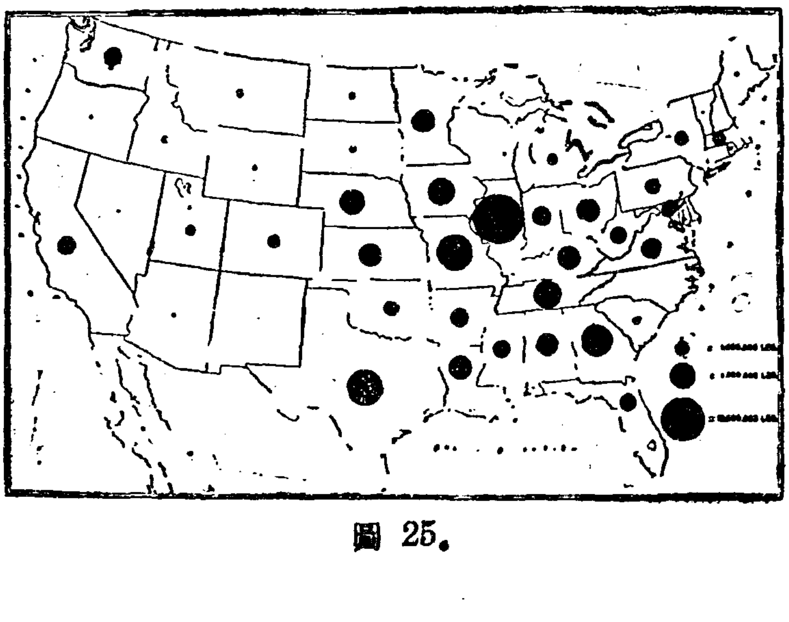
1915 年美國維斯康新省製造牛乳餅分佈圖



材料來源：美國維斯康新大學農業試驗場

圖 24。

1911 年美國維斯康新省之牛乳餅運往各省之數量



材料來源：美國維斯康新大學農業試驗場

圖 25。

常有變動之情形時，利用之置於地圖上，隨事實在空間之地位而移動；例如某種商品銷場昔在甲地，嘗置一標針於地圖上之甲地，其銷場現已在乙地，則置一標針於地圖上之乙地。

5.模型圖　將一種事實塑成凹凸形於一地圖板上，使人觀其凹凸形，則知事實在空間之狀況。

七．曲線圖　比較事物各部分分量之多寡，乃用直條平面容積等圖表示之，固甚清楚。然若比較各時間事物變遷之趨勢及各事物變量特著之點，則以觀察各直條之末端及各分列之平面形等圖，視線不易連貫，於其中增減之趨勢及分配之情形自不易了然；惟有用曲線圖表現之，使視線可隨各個曲線之變動為轉移，如此可成連續之觀念，而事物分量增減之趨勢及分配之情形藉以洞悉。

曲線圖之種類甚多、以其求曲線時計算法之不同，概別為兩類：一為算術曲線圖(Arithmetic Curve)。二為對數曲線圖(Logarithmic Curve)。

1.算術曲線圖　算術曲線圖卽於一曲線圖中以相等距離代表所示事實之相等數量也。此種圖又分為兩類：一依曲線所表示之材料而分類者，一依曲線之形狀而分類者。

(1)依曲線所表示之材料可分為兩種如下：

a.時間曲線 (Historical Curve)　此種曲線多用以表示歷史上連貫的事實，以觀察其變遷之狀況(例如圖26)。所謂歷史上連貫的事實者，卽按時之先後而發現有連帶關係之事實也。此種曲線可以代表時間列項之各時間之簡單數量，又可以代表時間列項之由開始時累積至各時間之數量 (可參閱表 8 及圖 33)。前者為簡單的時間曲線。後者為累積的時間曲線。

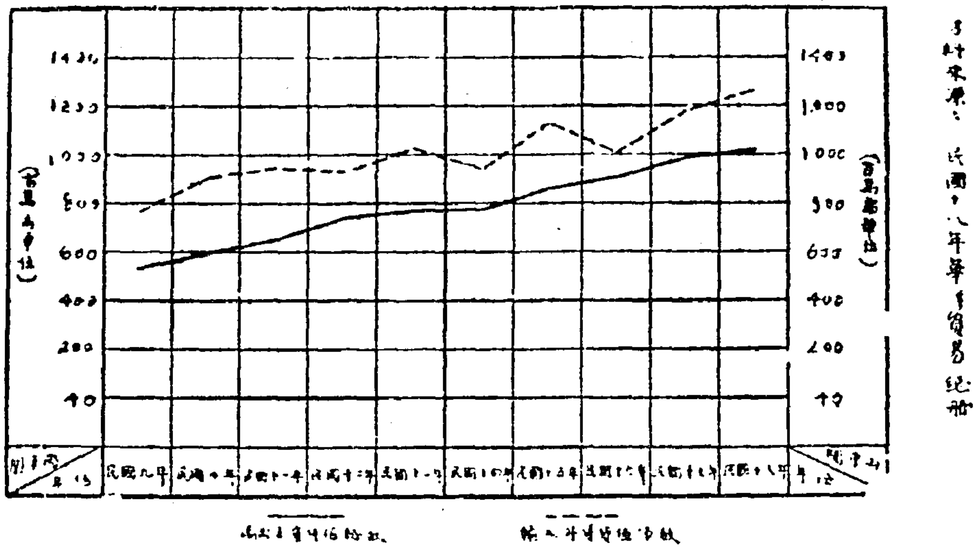


圖 26. 歷年海關對外貿易貨值按年淨數比較圖

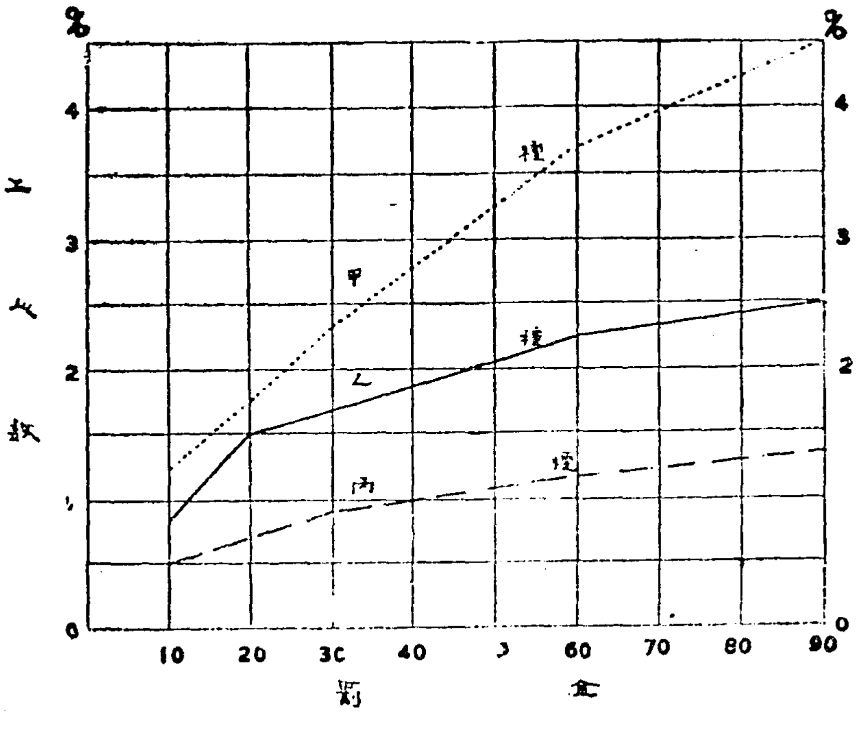


圖 27. 某年某工廠甲乙丙三種工人罰金分配圖

b. 次數曲線(Frequency Curve) 時間曲線乃以時間列項所發生之量數爲主體。次數曲線乃以次數所由生之量數爲主體。時間曲線乃表示歷史上連貫事實的變動。次數曲線乃用以表示次數分配的狀態(例如圖27)。時間曲線有兩種。次數曲線亦有兩種。即簡單的次數曲線及累積的次數曲線也。前者係將顯示各量數所有次數之點,用曲線連接之。後者係將各量數所有之次數依次遞加,以各遞加之和所代表之各點用曲線連之(可參閱表7及圖32)。

(2)依曲線之形狀可分爲九種:

a. 多邊形曲線(Frequency Polygon) 此圖形即以直線連綴已知代表一事實列項數量之各點而成(例如圖26,27,及28)。

b. 直方圖(Rectangular Histogram) 將所欲繪示之事實之量數分成間有一定距離之若干組然後以各組量數依大小之次序排列在一線下(閱圖29),由此線之代表最小量及最大量之兩端各繪一與該線成直角之豎線,作次數之量尺,視各量數組所含有之次數若干以定一橫線於圖代表之,至此橫線之長確等於代表一量數組組距之長,如此以至代表各量數組次數之

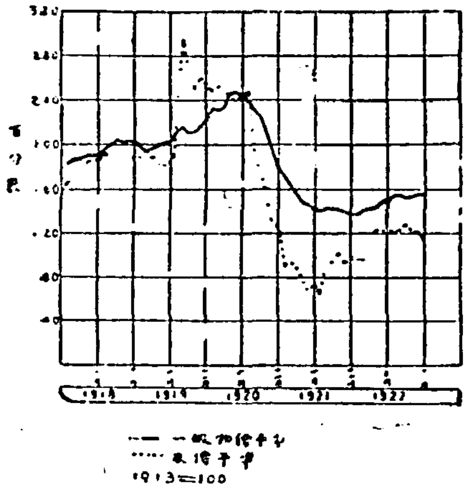


圖28. 美國1918至1922年逐月米價平準與一般物價平準之變動(加權者)

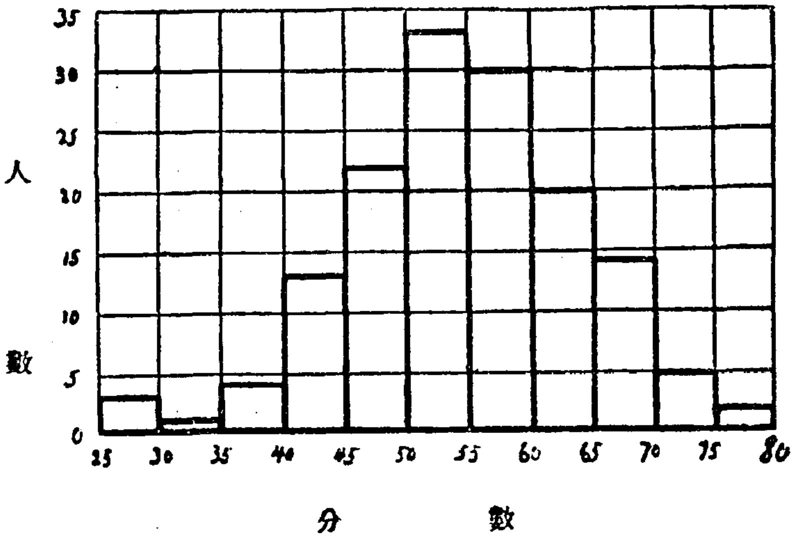


圖29. 某校147名學生國文分數之比較

橫線皆經求出，乃在各橫線之兩端垂直線於底線，遂成多數之長方條；此種圖形卽直方圖也。至如遇有時間性之事實，而欲繪一直方圖以表顯之，則須將前所謂"量數"兩字改爲"時間"依法行之可矣。直方圖之每一長條可代表一事實全體量數之一部分情形，若合之以其面積卽所謂次數面積 (Frequency Surface)可代表全體量數之情形焉。

c. 平滑曲線 (Smothed Curve) 此線爲一平滑而無角度之曲線.(可參閱圖29及30)。其爲用乃顯示所代表事實變遷之大概情形。至一切偶然與暫時之特殊變動一律删去。

平滑曲線之求法普通用者有二：一爲自在畫法此法卽依多邊形曲線之形勢畫一掩有約等于在圖之底線上所繪直方圖之面積之平滑線(例如圖30)；二爲繼動平均數法，此法卽將事實列項之組距逐漸擴大，

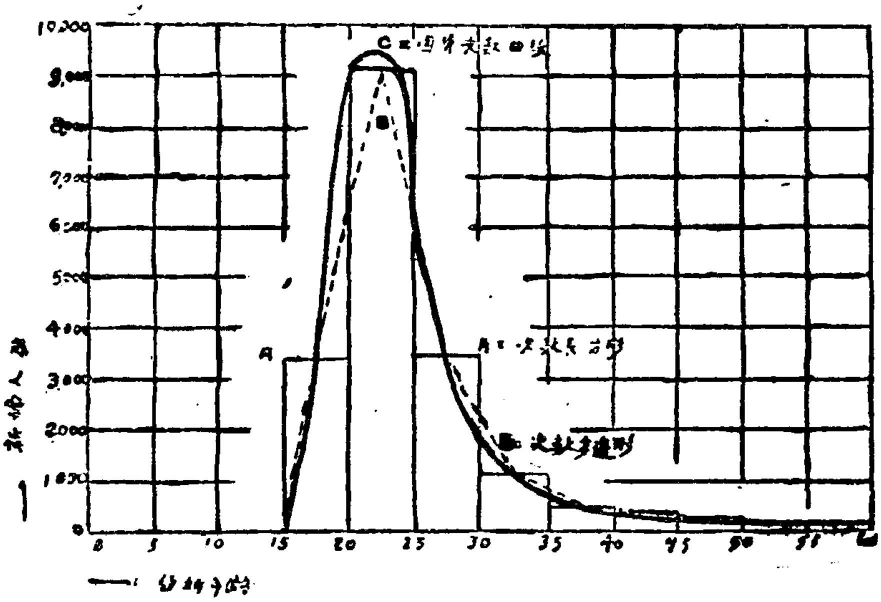


圖30。某地新婦人數及年齡比較圖

由多數之平均數集中變爲少數之平均數，例如有 3，5,7,12,13,18.等數，若每三數一加而平均之，則爲(3+5+7)÷3=5，(5+7+12)÷3=8等，每五數一加而平均之，則爲(3+5+7+12+13)÷5=8，(5+7+12+13+18)÷5=11等，每三數一加之平均數必多於每五數一加之平均數(可參閱圖31)，遇每一包含數愈多之平均數定一點代表之，則連綴此各點以一線，比線必愈近於平滑也，此法之應用乃根據大量觀察法之原則，蓋量愈大而平均之，則所示之事實愈顯其有規則，有規則事實之趨勢自可用無甚起伏之曲線代表之也。

d.累積的次數曲線(Cumulative Frequency Graph)

累積的次數曲線在形式上有兩種：一曰下向累積曲線，二曰上向累積曲線。前者乃一曲線，由圖之左

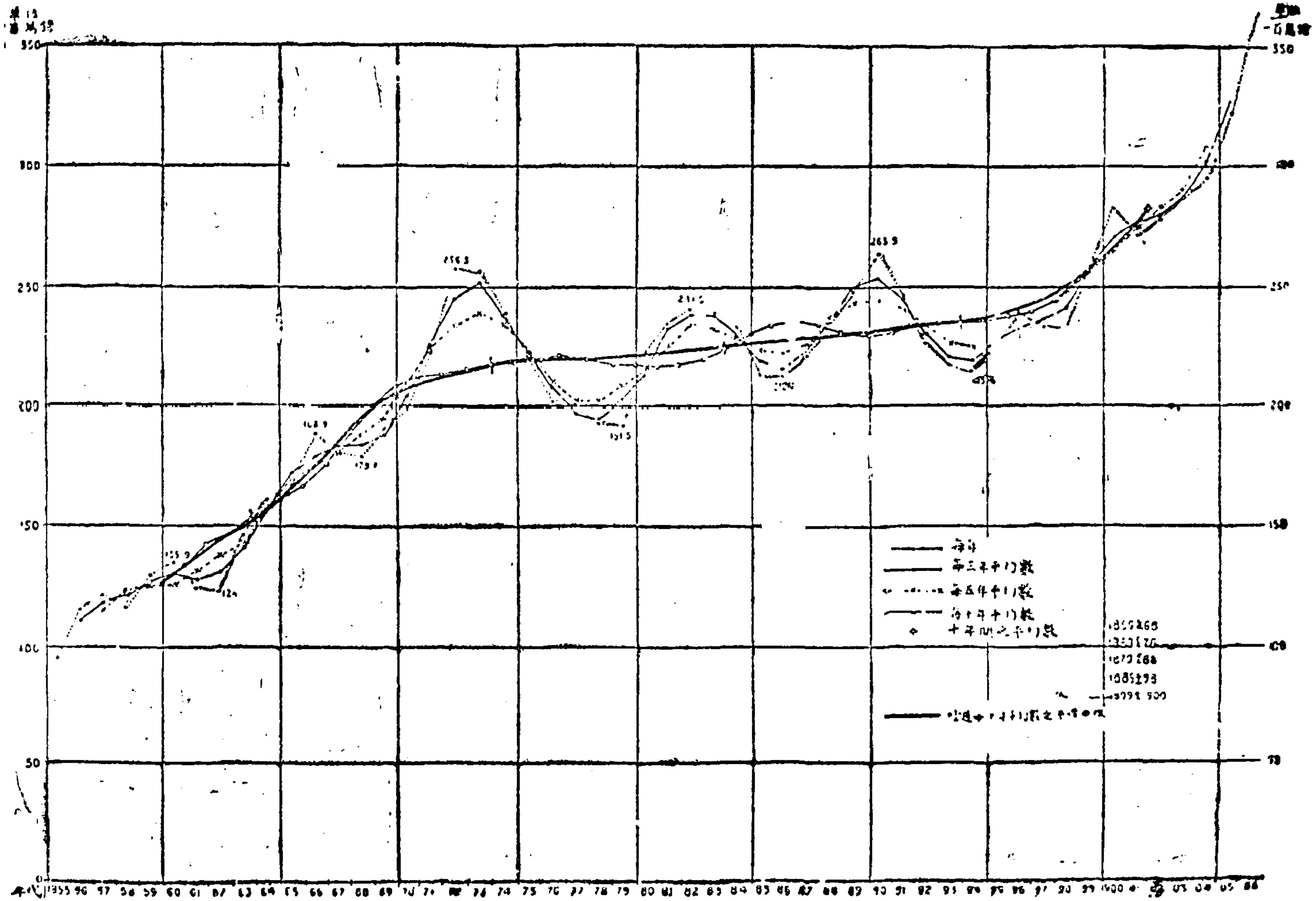


圖31. 歷年美國出口貨值比較圖

上角趨向右下角，此綫所示之累積次數，爲一事實逐項以原有及較高之量之次數相加者所謂以上的累積次數。後者乃一曲線，由圖之左下角趨向右上角，此線所示之累積次數爲一事實逐項以原有及較低之量之次數相加者所謂以下的累積次數，（可參閱表7及圖32）。

表7. 某國810城某月之火油價格

組	價格（每加崙以仙計）	城數 簡單次數	累積次數 以下 less than	累積次數 以上 more than
1	6.0——6.4	5	5	810
2	6.5——6.9	8	13	805
3	7.0——7.4	13	26	797
4	7.5——7.9	18	44	784
5	8.0——8.4	61	105	766
6	8.5——8.9	69	195	705
7	9.0——9.4	140	335	615
8	9.5——9.9	119	454	475
9	10.0——10.4	100	554	356
10	10.5——10.9	81	635	256
11	11.0——11.4	65	700	175
12	11.5——11.9	42	742	110
13	12.0——12.4	32	774	68
14	12.5——12.9	23	797	36
15	13.0——13.4	13	810	13
		810		

說明 "以下"行所列之數乃由小數量一端加起；例如第2組之累積次數13爲第1組之次數5與第2組之次數8相加之和第3組之累積次數26爲第1組之次數5第2組之次數8與第3組之次數13相加之和，以此類推。

"以上"行所列之數乃由大量一端加起；例如第14組之累積次數36爲第15組之次數13與第14組之次數23相加之和第13組之累積次數68爲第15組之次數13第14組之次數23與第13組之次數32相加之和，以此類推。

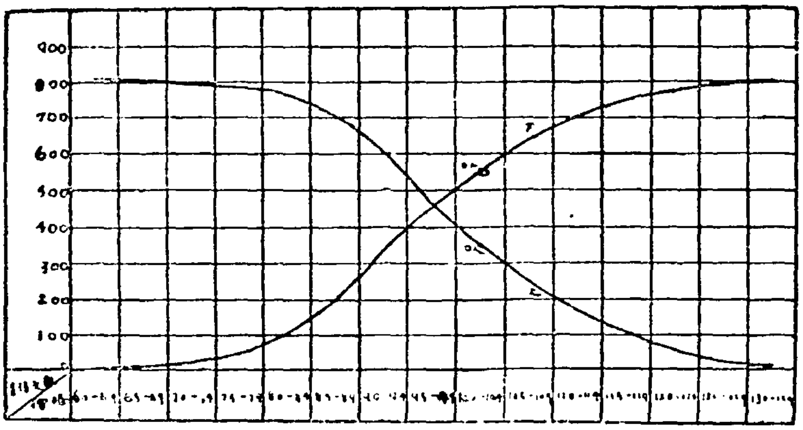


圖32. 某國810城某月火油價格比較圖

e. 累積的時間列項曲綫 (Cumulative Historical Graph)　此綫在形式上亦有兩種：一為下向的，一為上向的。前者亦為一曲綫，由圖之左上角趨向右下角，惟此綫所示者係一事實之以後累積時間列項之數，所謂以後累積時間列項之數者即將每時間及其較後之項數相加之和。後者亦為一曲綫由圖之左下角趨向右上角，惟此綫所示者係一事實之以前累積時間列項之數，所謂以前累積時間列項之數者即將每時間及其較前之項之數相加之和（可參閱表8及圖33)。

表8. 近十年中國海關稅收

民國年份	關平兩		
	非累積的	累積的	
		本期及期前 (up to and including)	本期及期後 (after and including)
九年	49819885	49819885	756391714
十年	59007129	108827014	706571829
十一年	59359194	168186208	647564700
十二年	63504251	231690459	588205506
十三年	69595131	301285590	524701255
十四年	70725667	372011257	455106124
十五年	80435962	452447219	384380457
十六年	68781876	521229095	303944495
十七年	82332526	603561621	235162619
十八年	152830093	756391714	152830093
	756391715		

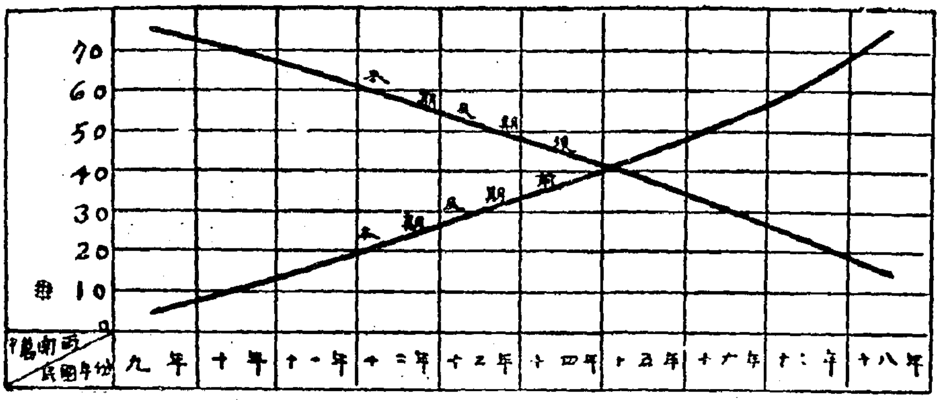
說明 "本期及期前"行

例如十年之累積數爲十年與其前一年(卽九年)之數相加之和，十一年累積數爲十一年與其前二年(卽九年及十年)之數相加之和，以此類推。

"本期及期後"行

例如十七年之累積數爲十七年與其後一年(卽十八年)之數相加之和，十六年之累積數爲十六年與其後二年(卽十七年及十八年)之數相加之和。以此類推。

f. 距限曲綫 (Zone Curve) 此綫可以代表具兩個分量之材料之列項。先將各項之兩個分量代以兩點。俟列項之點既皆繪定，乃以兩綫各聯同屬一類分量之列項之點，此兩綫之間之面積卽所謂距限曲綫也。於此面積之內可以顏色或緊密之橫綫或豎綫塡蓋之(參閱圖34)。此種曲綫之爲用，在其能將兩種材料之列項之分量之距離顯明。故凡利息之最高率與最低率之距離，最高與最低物價差額，工資最高率與最低率之差距，某種貨物在各處銷售數量之最高額與最



材料來源：中國海關民國十八年華洋貿易總册

圖33. 近十年來中國海關稅收額累積比較圖

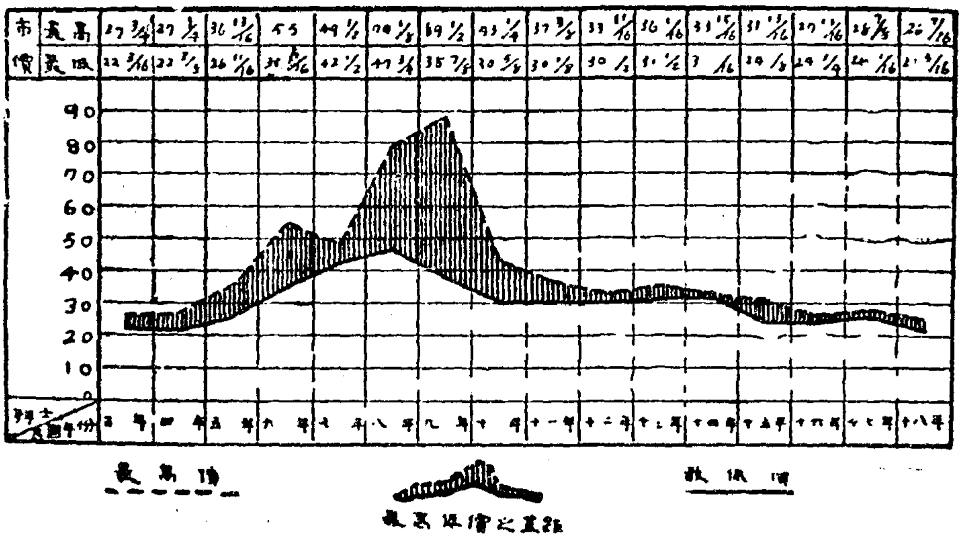
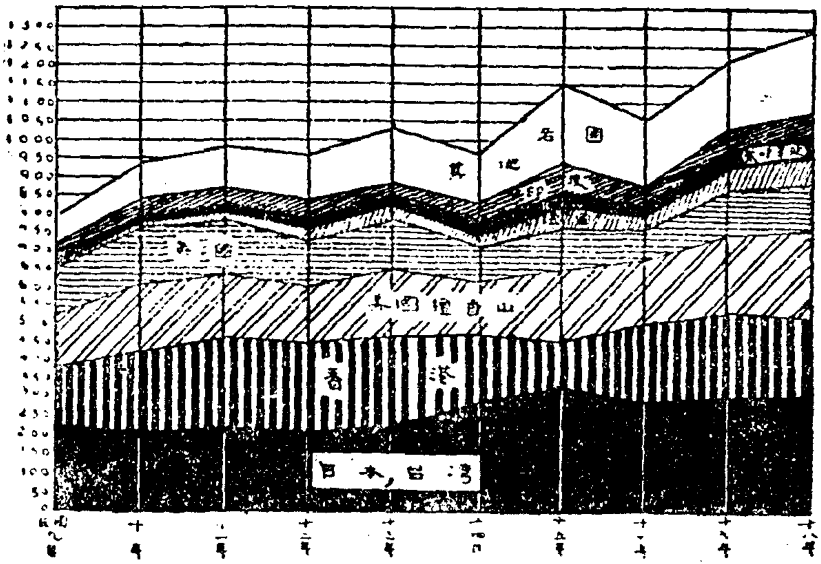


圖34. 近十一年倫敦大條銀市最高最低價之差距

低額之差距，一國輸出入貨值之差數等皆可用此圖以表示之。

g. 帶紋曲綫 (Band Curve)　此種曲綫可用以表示一事實之全體分量，同時表示其各部份之分量。繪製此圖之法乃由一基綫起，測量第一部分之列項分量所代表之面積，而以一曲綫劃分之，然後仍由基綫起用累積法測量第二部分之列項分量，求其代表之面積，而以一曲綫劃分之，如此至數部分之面積與劃分界限之曲綫皆經求出，於是將曲綫之間之各部份再施以顏色或各種點綫以為顯別(可參閱圖35)。



材料來源　中國海關民國十八年華洋貿易總册

圖35.　近十年中國直接由外洋各地輸入貨物之淨值按地比較圖

由此圖，吾人可辨其各部分面積之大小，從可知一事實各部分分量之多寡，又可明全體之面積從可知全體之分量矣。

h. 山狀曲綫 (Mountain Curve)　此種圖形與多邊形圖大致相似，所不同者即在曲綫下底綫上之面積須

以顏色或緊密之斜直綫填蓋之(例如圖36)。

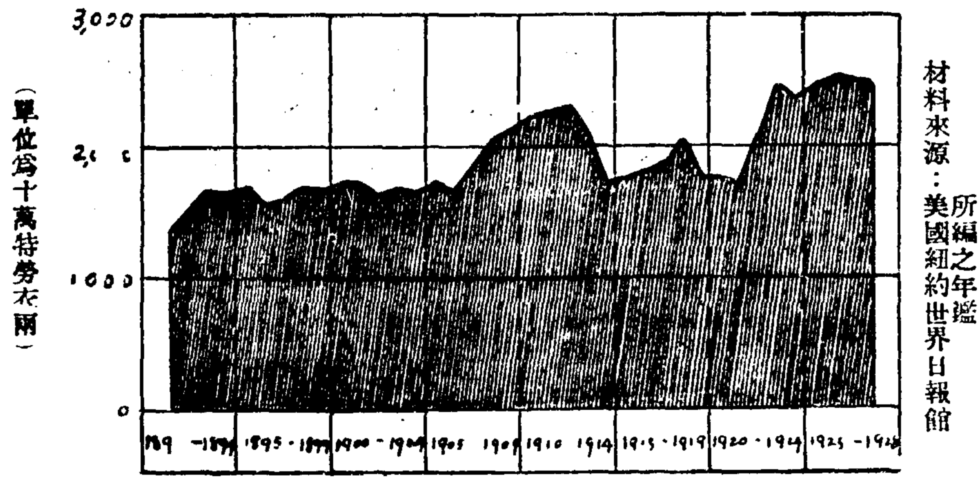


圖36. 歷年世界銀產額比較圖

i. 分歧曲綫(Divergence Curve)　此種圖形乃用以表示一種事實所具正負兩種相反之狀況。繪圖之先須畫一橫綫作爲全圖之基綫，亦可稱之爲零綫，在其上下各有一面積，可依事實正負方面量數之情形，繪成多邊形或山狀形，此種圖卽所謂分歧曲綫圖(例如圖37)。

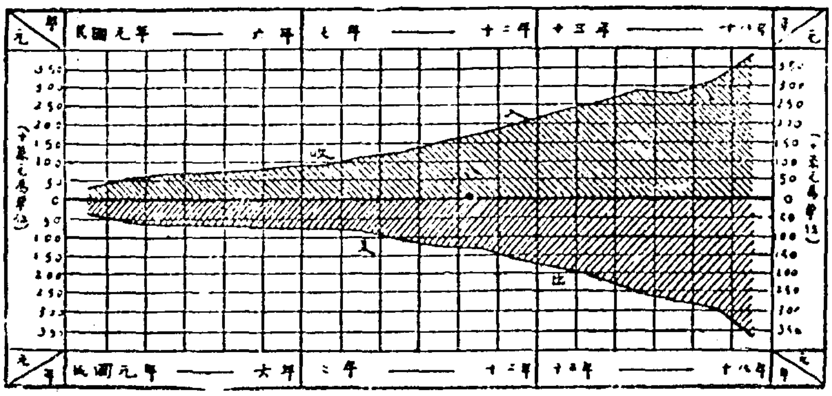


圖37. 中國郵政歷年收支款額比較圖　材料來源：中國交通部

2. 對數曲綫圖　對數曲綫圖乃用以表示一事實變動之比率。至曲綫之所以名對數者，因其根據對數法以繪成者也。繪此曲綫普通須用對數紙。對數紙有兩種：一曰雙對數紙(Double logarithmic paper)，此紙各格直橫距之分劃均有比率之綫；一曰半對數紙(Semi-logarithmic paper)此紙各格之橫距比度為相等的，直距比度為對數的，此紙有一個二個三個四個或五個循環線組之十乘冪，每一循環線組之十乘冪可以應用於每一十之乘方全距，若十之乘方之全距不足，更須一十倍之全距以表示事實之數量時，則用兩個循環線組十乘冪的半對數紙，以此類推，所謂十之乘方之全距者，即如10至100，100至1000等是。顧何以顯示事實變動之比率而必用對數曲線，請舉一例以明之。譬如1905年甲國輸出入貨值為100000000元，乙國輸出入貨值為600000000元，每五年各按比例增加一倍，是其增進之數如下：——

年別	甲國輸出入貨值	乙國輸出入貨值
1905	100000000元	600000000元
1910	200000000	1200000000
1915	400000000	2400000000
1920	800000000	4800000000
1925	1600000000	9600000000

上舉兩國輸出入貨值之增加速率完全相同，但若用平常所用之算術的格子紙，其格子大小相等，繪兩線於其上以代表兩國輸出入貨值之趨勢而比較之，其差異足使閱者以為兩者增加之速率不相同（閱圖38A）；如用對數的格子紙，繪兩線於其上，以代表兩國輸出入貨值，則可顯明兩者速率完全相同（閱圖38B），此可為表示事實變動之比率必用對數曲線之明證。

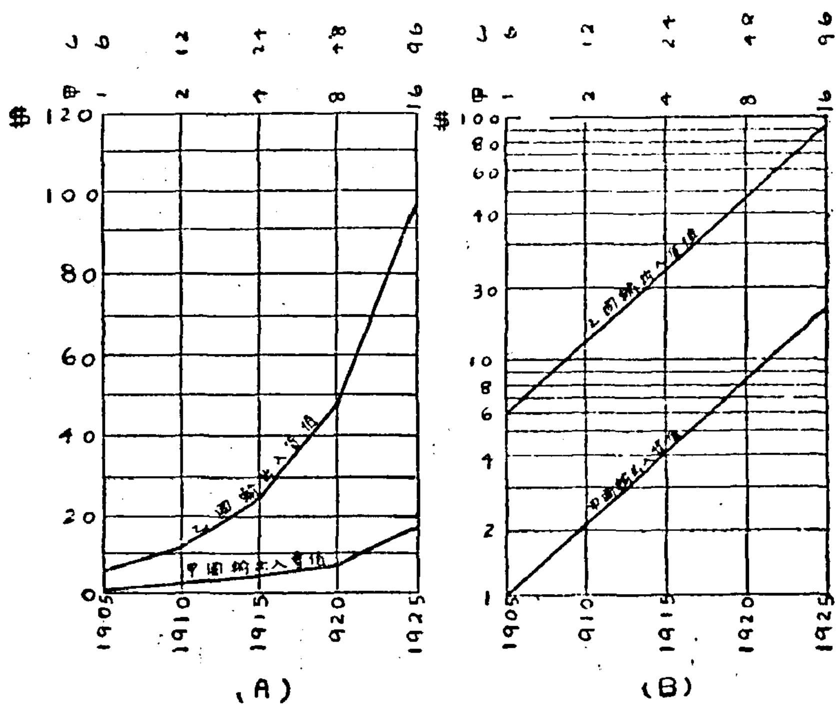
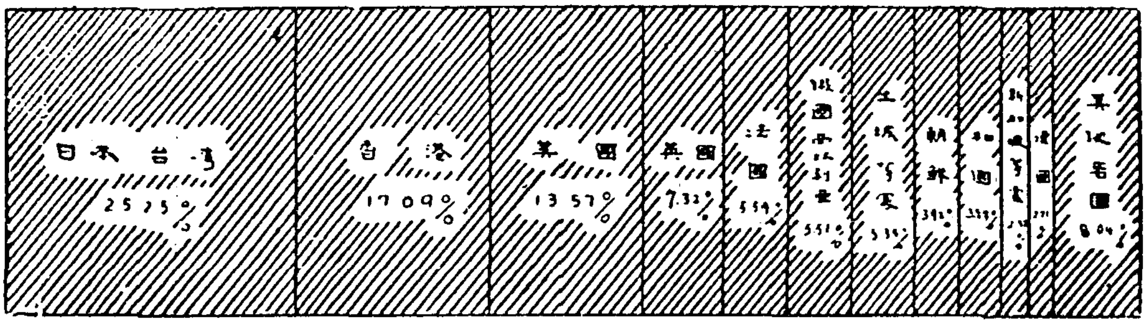


圖38. 甲乙兩國輸出入貨值比較圖

（貨值以 100000000 元爲單位）

八. 百分比較圖　百分比較圖爲繪圖法中適宜於表示兩種以上事實數量之多寡及其盈虛消長之狀況者也。其形式可爲圓，方，直條或曲線一視其所表示事實之情形而定（參閱圖 8,9,11,39及40）。表示事實情形之無連續性者，宜用圓形方形，直條形等圖；有連續性者，宜用曲線圖：例如欲比較某年中美德法俄之貿易值，須先將五國對外貿易總值以一百分代之，然後求各國對外貿易值佔五國對外貿易總值百分之幾，，最後乃可繪一圓形圖，以整圓三百六十度代表一百分，而將圓依度數分爲五部分以適當各國對外貿易值所佔之百分數；有時欲比較兩種以上之事實可將一事實之量作爲一百，其他各事實之量



材料來源　中國海關民國十八年華洋貿易總册

圖39。 民國十八年中國直接運往外洋貨值比較圖

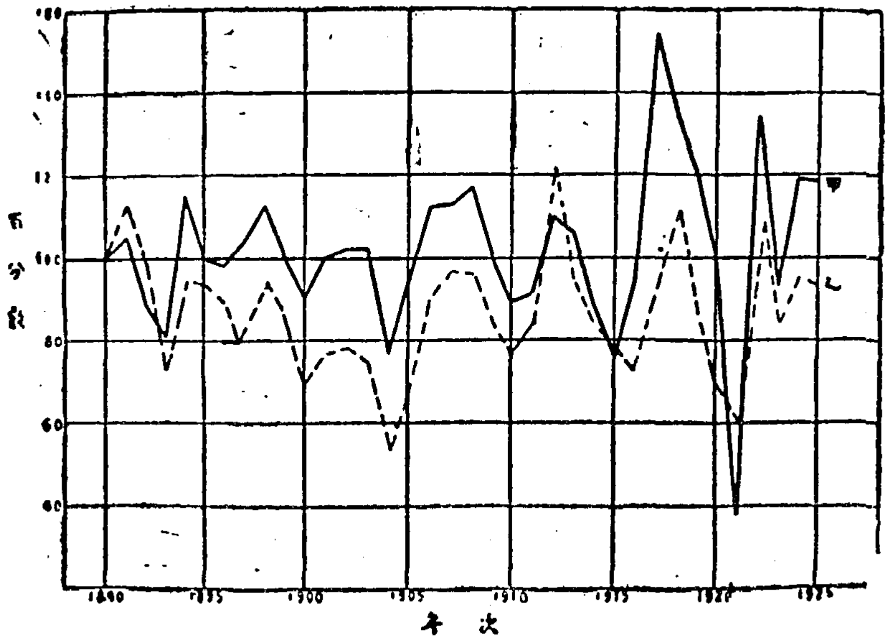


圖40。 1890—1925年甲乙兩國米價變動比較圖

合成百分之幾：例如某校有男生120人，女生60人，則以男生作爲100，女生作爲50，然後可依數量之比例，畫爲多圓形方形等圖；又如比較兩國歷年對外貿易狀況，則宜用百分曲線圖，化兩國同一某年對外貿易值皆爲一百，置一點於圖以表示之，然後據此求得兩國其他各年貿易值之百分數，各百分數亦皆以一點表示之，於是用兩線各連接代表各該國貿易值所佔百分數之各點，有此兩線，吾人乃易比較兩國對外貿易之趨勢矣。

第三節

繪圖之規律

圖之種類雖甚繁雜，然圖之繪製常有一定之規律，蓋繪圖時吾人有必須注意者如下列各點也：

1. 名稱　每圖應有簡明醒目確可以代表圖中內容之名稱。但有時名稱必詳細，始可以代表圖中內容者，可並用總名稱及副名稱（例如圖11之名稱）。至名稱之地位或在圖之上方，或在圖之下方，或在圖形輪廓之內，全視圖之形式而異。如圖以下部爲起點，則名稱置於圖之下方；以上部爲起點，則置於上方；既不在上部，又不在下部，而於中間，或雖起點在下，而所稱之項目在上，則置於上方，以其易於引起人之注意。有時爲美觀起見，亦得置於圖形輪廓內之上下方。
2. 號數　如所繪之圖甚多，一時加以查閱殊非易易。若將圖依次編號，則無慮查閱之難矣。至若編列號數之位置，以在圖之上方或下方之左或中間爲宜。
3. 基線　在繪統計圖身之先，須繪圖之基線，以作圖形大小之量尺，資爲圖形之憑據。基線種類甚多，有橫軸，縱軸，中軸，圈線，半徑線，三邊，四邊，有規則多邊，零線等區別。橫軸者亦名

橫量尺，卽一種圖之底線或頂線，沿此底線將各量數註於其下或此頂線將各量數註於其上，從小數目或最近數目起，自左至右，依次註明，隨在各量數註於底線下者之地位向上或註於頂線上者之地位向下，各可引一普通豎線，或名之曰指導線guide line(參閱圖4,7,30,32等)。縱軸者亦名豎量尺。沿圖左(或圖右，然不如圖左爲適宜，故非於不得已時不沿圖右畫縱軸也。)畫與圖之底線或頂線成一直角之直線也(可閱圖37,40等)。沿此直線將各量數註於其旁，從小數目或最近數目起自下而上，依次註明，並依各量數之地位向右各引一橫線。如圖上有若干與縱軸平行之豎線，則兩者相交可成許多直角四方形所謂格子是也。中軸者卽橫梗於圖形之中，平分圖形爲上下兩部分之線也(例如圖37之零線)，上於此線者列正數，下於此線者列負數。圈線者圓形圖之輪廓（閱圖11)。半徑線者卽圓形直徑之一半。三邊者卽三角形之三邊(閱圖17)。四邊者卽方形之外廓(閱圖39)。有規則多邊者卽有規則多角形之外廓(閱圖18)。零線者卽零位所起之線，例如圖36及38之底線與圖37之中軸也。

至基線如何運用須視圖之種類而定：例如繪製直條圖，曲線圖時須用縱軸，橫軸(或零線)，中軸等爲基線；圓形，圓柱形及球形圖，則用圈線，半徑線或中軸爲基線；方形圖形象圖及統計地圖，多用四邊爲基線；三角形及稜椎形圖，則用三邊爲基線；有規則多角形圖及組織圖則用有規則多邊爲基線。

至若以基線爲圖形之憑據也，故基線宜較其他線爲粗，較其他線色爲深，以資顯別。又以基線爲圖形大小之量尺也，故基線上下之數字排列須有規則（如10,20,30,40……），以便觀察，決不可隨材料之數目排列不規則之數字（如17,19,13……），至數字界限之劃分不宜過長，亦不宜過短，以能助閱者計量圖形之數目足已。

4. 數字　圖上所用數字之單位(如千關平兩，百萬元，千担等)須寫明。數字之排列宜循其大小由左而右，小數在左，大數在右，或由下而上，小數在下，大數在上。至數字材料如能列於圖內最好(閱圖21，22，34等)，如其太多，不能容納於圖內，宜列一數字材料表於圖之左右或附於圖後，以資對照。

5. 繪圖所根據之方法　繪圖所根據之方法有時可列於圖中或圖後附一表以記載之。

6. 圖之重要處

(1)曲線　圖形上之曲線應與格子之直線相異，或比圖中之格線稍粗使與其背地顯然區別(閱圖40)。

(2)百分線　用百分法表示之曲線圖上代表百分之一直線，須比圖形中各格線稍粗，使其易於顯別(閱圖40)。

(3)表現重要事實　在表現多項事實之圖中有最重要之事實，須用方法將其特別表顯，庶可引人注意，其方法有五種如下，繪圖者須善於選用之：

a. 以紅字或粗畫字寫明重要之事項。

b. 以實地直條表示最要之事，以空地直條表示次要之事。

c. 以粗直條或曲線表示最要之事項，而以細直條或曲線表示次要之事項。

d. 在圖之各部分施用顏色，深者表示重要之事項，較淺者表示次要之事項。

e. 圖形中表現重要事實之處之旁邊，可加一足以令人注意之標記，如 * × 等記號。

7. 作色　如在一圖上之直條或曲線太多，不易比較，可施用各種顏色以別之。

8. 用半透明紙　如在一圖上，曲線太多，吾人不易一目了然。最好用半透明紙多頁，分繪各曲線於其上然後比較某兩曲線之

趨勢，卽檢出此兩曲線所在之半透明紙，而以頁與頁對照可矣。

9. 比較兩種以上事實相差太巨之變量　在曲線或直條圖上，有兩條以上之曲線或直條代表兩種以上事實之變量，若此變量相差太巨時，似不易比較於一圖之上；但如採用下列方法亦可於一圖之上表現兩種或兩種以上事實之變量焉。

(1)用破格式之圖形　所謂破格式者卽將圖之測量所不需要一部分加以中斷者也(例如圖41)。

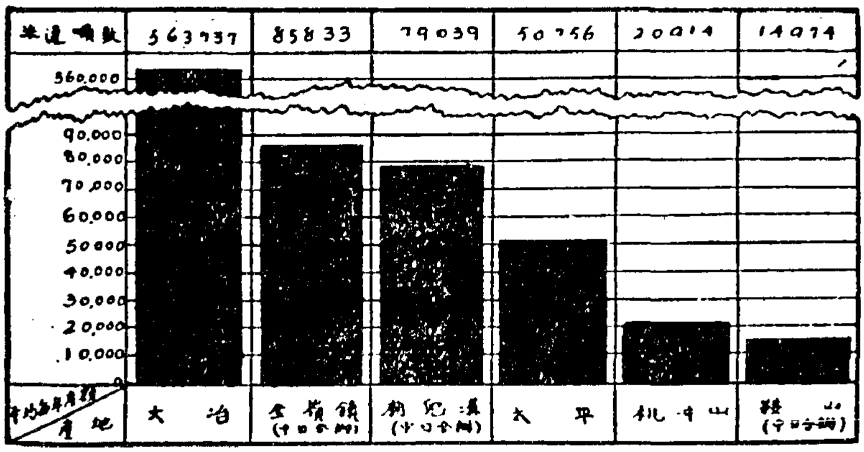


圖 41　日本經營之中國鐵鑛

(2)量尺調合法　一圖之內可用兩種互相平行之量尺，每一量尺先行酌定起止距離，然後分劃代表事項之數量(參閱表9及圖42)。但有時欲表現三種以上之事實之變量，因其非兩種量尺所能測量，則此圖式卽不適用。

(3)百分數法　先將各變量化爲百分率，然後繪直條或曲線以表示之(例如圖8及28)。

(4)用對數紙　若兩種以上之事實之變量各有一定之比率，則變量相差雖巨而可表現之於對數紙上(參閱圖38)。

10. 圖之整潔　圖形務須十分清潔，其各部分之排列務須整齊。

表9. 歷年某省省立銀行資本與營業金額

年份	資本	營業金額
1920	14000000元	8000000000元
1921	25000000	6000000000
1922	30000000	14000000000
1923	32000000	20000000000
1924	43000000	30000000000
1925	45000000	18000000000
1926	56000000	20000000000
1927	69000000	28000000000
1928	66000000	34000000000
1929	68000000	31000000000
1930	65000000	32000000000

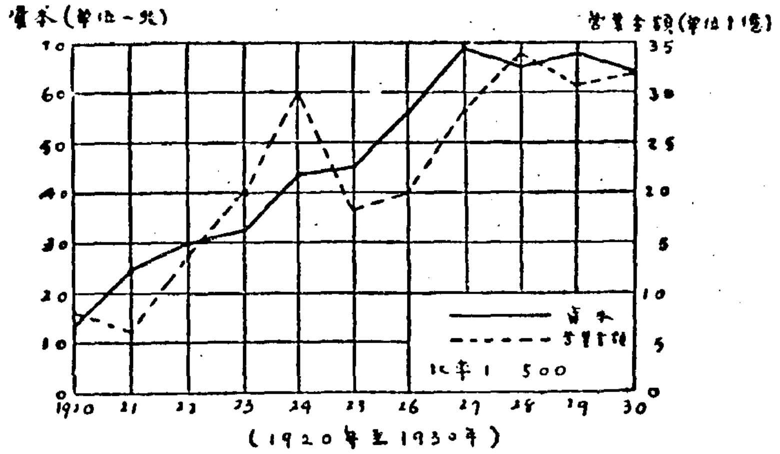


圖 42 某省銀行資本與營業金額按年比較圖

排列之次序大都由左向右。

11.圖說　圖中若表現有二種以上之事實，則圖中何部分代表何種事實，當加圖說(例如圖28)。

12.繪圖人名日期及材料來源　繪圖人名日期及材料來源有時須書於圖之下面或右下方，俾研究此圖者得知圖之時代性及其可靠程度。

13.圖之審核　一圖形既經繪就，繪圖者必須加以一度之審核，

視其能否將事實正確的表現，其形式是否適用，其各部分之排列是否整潔，其所根據之材料是否易於尋究；如視此四者皆屬於正的方面，此圖乃爲一完善之圖，如屬於負的方面，此圖乃非一完善之圖，而必須加以校正者也。

第四節

圖之應用

何種圖形最合應用，一視乎材料之性質，繪圖之宗旨或用圖之情形而定。例如：——

1. 表現時移事遷之材料，宜用多邊形時間曲線圖。
2. 表現次數分配之材料，宜用直條，平面，多邊次數曲線，山狀曲線，分歧曲線，直方形等圖。
3. 表現事物在空間分配之現象，宜用統計地圖。
4. 比較材料價值，可選用直條，平面，容積，形象等圖。
5. 表示事物比例的變量，宜用對數曲線圖。
6. 表示事物在各種程度之下或上之情形，可用累積曲線圖。
7. 欲顯明一團體中各部分職掌權限之相互間關係，宜用組織圖。
8. 欲將事物之眞相躍然紙上，宜用象形圖。
9. 欲懸圖壁上，以供演講於大數羣衆之中，此圖最好施以顏色，以資顯別，圖形亦宜放大，使遠聽者便於閱覽。
10. 欲將圖陳列一處以供展覽期引起參觀者之興趣，此種圖宜爲形象容積等形。
11. 所繪之圖欲用爲廣告宜爲形象圖。
12. 印於書籍或雜誌之圖不宜過大，最好能使讀者於一張紙上即可窺其全部。
13. 若繪圖之主要目的，在使一般人皆可明瞭圖示之事實，此綫

含有通俗作用，宜用形象圖。

總之，圖式之選擇，務以簡明而確能表現事實之眞相者爲宜，萬不可徒尙美觀與新奇，反失作圖之本意也。

第六章

量數分析法

第一節

量數分析法之內容

就散漫之事實，加以整理，依其所屬項目之性質相同者，分類排列，使其秩然有緒，此統計表之爲用也。將事實之眞相作最清楚最顯著之表現，此統計圖之爲用也。至若應用數理，分析任一事實之材料，以簡明之數字，表明事項內容之情形，此量數分析法之爲用也。夫列表繪圖之法，吾嘗論之，而此量數分析法猶未及焉，爰另闢此章以述之。

量數分析法內容包含最重要之問題有四：

一。全體量數 (Measures of Mass)

二。集中量數 (Measures of Central Tendency)

三。差異量數 (Measures of Dispersion or Variability)

四。相關量數 (Measures of Relationship or Correlation)

此四問題爲量數分析法中之主要根本問題，當逐一討論之於後。

第二節
全體量數

全體量數乃將事實之全部用數理方法以表現者也。由此種量數可知事實全部之大概情形。其求法最著者有二：一爲順序分配(Order Distribution)，二爲次序分配(Frequency Distribution)。順序分配者卽按事實之量數，由其最小者或最大者一一序列者也。此種排列雖較未排列前爲清楚，然在量數較少之時可用，而量數較多之時，如將各個量數循次一一排列，則數字層疊，繁衍冗長，人驟覩之，不易悉其底蘊，因此次數分配法倘焉。次數分配法者乃將各種事實分組序列之法也。應用此法有四步驟；

一. 求全距(range) 全距卽量數之最大者與最小者中間之距離(the distance between the smallest measure and the largest measure)

二. 決定組距或級距(class interval or step interval)
求得全距之後卽須決定組距(或稱爲級距)。所謂組距者，乃分全距爲若干組，而介每組間之一定距離也。至組距大小之決定則視全距之情形以爲判：譬如全距包含之單位甚少，其數只爲十餘，則每單位代表一組可矣；如單位甚多，則必採用較大之組距，然組距亦不可過大，包含最多二十個單位足已，蓋組距之所以須擴張者，僅爲計算簡捷起見，絕不可忘其與精確之度成反比例，若組距愈大愈可減低精確之度也。

三. 劃定組限或級限(class limits or step limits) 組限(或稱爲級限)者，組距之界限也。限有上下之分，在組距之小數一端爲下限(lower limit)，大數一端爲上限

(upper limit)；例如 10—14•99 爲一組，15—19•99爲一組，10 及 15 爲下限，14•99 及19•99 爲上限，至 14•99及19•99之意義，卽各小數點之後有無限個9，例如14•9999…………及19•99999…………，蓋若是，則前組之上限與後組之下限始截然分開，而無混淆之弊也，但此種組限只可用於連續量數 (Continuous series) 而不可用於不連續量數(discontinuous series) 因前數可分至無盡數，如工資1•9999…元，米 5•99 石等，後者則不可分至無盡數，如學生 50人，不可爲49•999人，馬30匹，不可爲 29•99匹，然則遇不連續量數，將何以分其阻限，只有不必用小數，而用整數，如 1—5，6—10等。

四。排列次數　待組距組限業經決定，乃排列各量數在各組距中發見之次數，於此可以窺全體量數之大致情形矣。

玆舉出下列之材料，以述明表現全體量數，應用次數分配之法。

10	17	21	23	26	28	25	28	30
31	31	32	34	35	36	35	37	37
38	39	40	41	41	42	44	43	43
41	45	47	48	47	46	49	46	46
49	50	50	52	51	53	54	54	55

一。全距＝55—10＝45

二。將全體量數可以分成 9 組，使每組含有五個單位，是卽組距也。

10——15
15——20
20——25
25——30
30——35
35——40
40——45
45——50
50——55

9組

$$\frac{45}{9}=5$$

三．因組距必須劃淸界限，故上列九組之材料可改正如下：

10——14.99

15——19.99

20——24.99

25——29.99

30——34.99

35——39.99

40——44.99

45——49.99

50——55

四．組距距限旣經劃淸，卽可將各組距中發見之次數排列，以呈現事實之全部。

表10

組　　距	排　　列 （每一短直線代表一次）	次　　數
10——14.99	|	1
15——19.99	|	1
20——24.99	||	2
25——29.99	||||	4
30——34.99	卌	5
35——39.99	卌||	7
40——44.99	卌|||	8
45——49.99	卌||||	9
50——55	卌||	7

如更求一事實之全體量數顯明，可繪一次數面積圖以呈現之。次數面積圖之繪法前已言之，先在各組距中間代表該組所有次數之處各置一點，然後經過每點，畫一橫線，介於代表組距上下限之縱線中間，在各橫線下之面積，卽次數面積也。例如用表10之材料

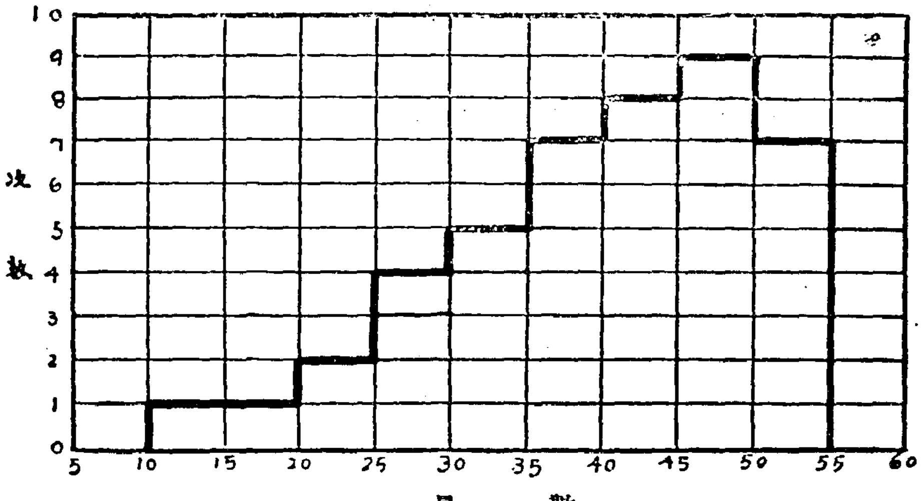


圖 43

繪一次數面積圖(如圖43)，在 10—14•99 一組有一次，故置一點在10—15之中間代表一次之線。此一點之所以在10—15之中心者，因10—14•99一組原爲10—15一組，用14•99而不用15者，爲明本組與下一組之界限耳，以此類推，吾人獲一次數面積圖，一覽可知圖示事實全體之大概情形，譬次數面積之形如圖44，卽知次數分配爲

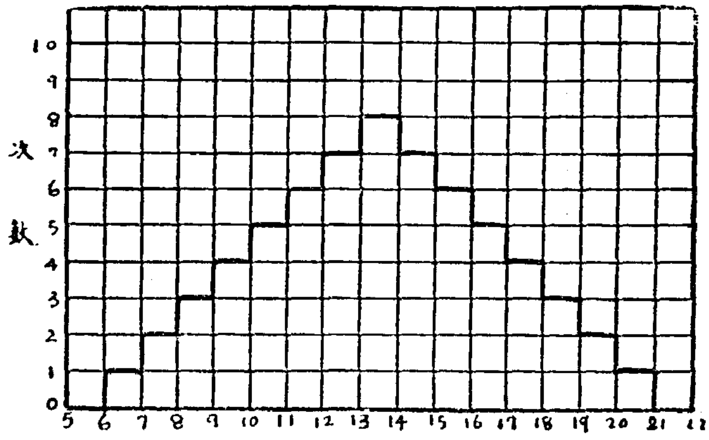


圖 44

數單衆的 (unimodal,) 並知其爲常態次數面積 (Normal Frequency Surface) 次數面積之形如圖45之甲或乙，卽知其爲次數偏

態面積 (Skewed Frequency Surface,) 蓋其所示之次數分配成爲偏態；次數面積之形如圖46，卽知其爲多乘數的次數面積 (Multi

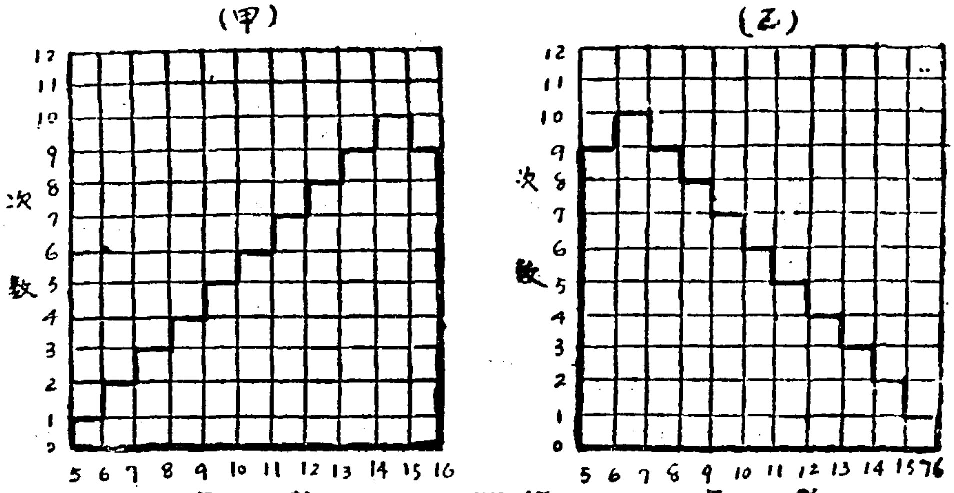


圖 45

modal Frequency Surface,) 以其有兩個（有時兩個以上）之集

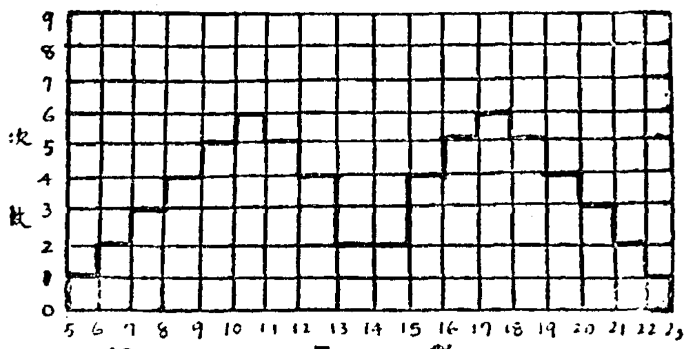


圖 46

中趨勢也。至次數面積何以成爲單乘數的，而以常態名之，誠以宇宙間各種事實大都呈集中之趨勢耳。何以成爲偏態，因統計材料與所統計之事實未能分配勻稱也例如測驗某級學生程度，所出之問題，在該級學生中能答者佔最多數或最少數，顧欲統計彼等所得之分數，自成偏態。何以成爲多乘數的，其原因常由於以兩個以上不

調和之事項混合統計，例如合併兩個不同年級之學生成績繪成圖形，往往發生此種現象焉。

第三節

集中量數

全體量數之功用在將事實所有之各量數悉行表現，使人一見卽知事實各部分之情形，惟此僅得統計一部分之命意，猶未盡統計之眞髓也。蓋統計之所以重要，以其能將至複雜至繁賾之數，整理縮減，而便加以研究耳。是此種整理縮減之法，斯爲統計中最要之問題。縮減之法爲何，卽求集中量數；因無論何種事實所含有各個量數，往往大小不齊，然衡諸齊一法則，每有集中之傾向，故可以最適中之量數代表全體量數焉。集中量數之求法，概別有三種：爲求

1. 衆數 (Mode.)
2. 平均數 (Average or Mean.)
3. 中點數 (Median.)

今當分述如下

一. 衆數

衆數者量數中最密集之數也 (The mode of a frequency series is that value of the variable for which the frequency is the maximum.)。平常人所謂普通數卽指此而言；如謂某省人民富裕，某國人民困窮，其以數字代表普通人民富裕及困窮之程度者，皆爲衆數。衆數之計算法有四：

1. 視察法 (Inspection). 此法卽編製一次數分配表或次數曲線圖，然後按此以察出衆數：例如用表11，可看出次數最密集之處在量數"9"之一項中，故"9"卽爲衆數；又如圖47係就表11之事實繪成，吾人覽之，可以知曲線之最高峯在量數"9"之

垂直線上，圖中之縱線以此爲最長，故代表此線之量數"9"卽爲乘數。但次數曲線須左右兩邊對稱，所得乘數方有代表數

表11 某廠工人每日編製藤籃次數分配表

藤籃 (件數)	工人數 (次數)
3	6
4	6
5	8
6	10
7	21
8	26
9	40
10	34
11	19
12	13
13	8
14	5
	196

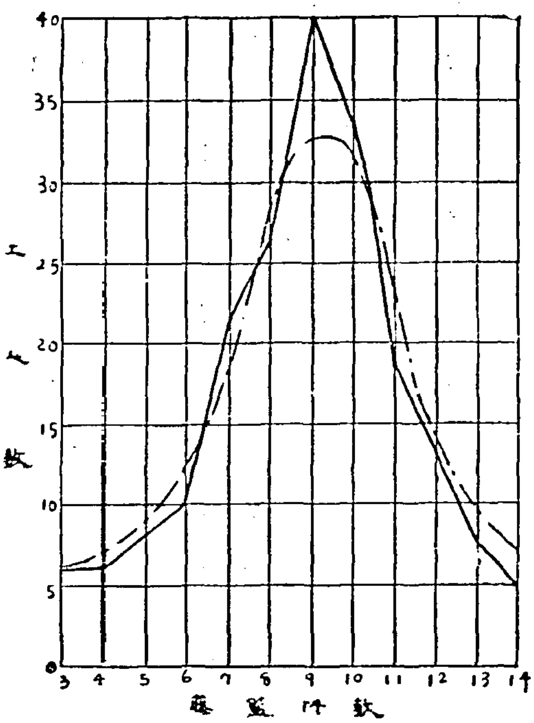


圖47 ——實際藤籃件數之次數曲線
——修匀之次數曲線

之價值，若成偏態，則此乘數可靠之度甚微。

2. 組合法(By grouping or linking method). 先將量數由小至大，依次排列，然後每兩量之次數相加，每三量之次數相加，每四量之次數相加，繼續此法直至可以決定最多次數究屬何量爲止（參閱表12）。至若量數太多則可歸併爲若干組，循組距中值（卽組距中點之價値，用以代表組距者。）之大小，依次排列，然後每兩組之次數相加，每三組之次數相加，每四組之次數相加，繼續此法直至可以決定最多次數究屬何組爲止。

表 12

量　數	次　數	組合次數 第一行	第二行	第三行	第四行
3	5				
		11			
4	6			19	
			14		
5	8				24
		18			
6	10				
			31		
7	21			57	
		47			
8	26				87
			66		
9	40				
		74			
10	34			93	
			53		
11	19				66
		32			
12	13				
			21		
13	8			27	
		14			
14	6				

行　數	最多次數所密集之量數	衆　數
1	9 10	因各行最多次數所密集之量數內均有9其他量數莫可比之者故以9爲衆數
2	8 9	
3	9 10 11	
4	7 8 9	

3. 用披爾生公式 (Pearsonian Formula). 此公式爲披爾生氏所立如下，

$$Mo = M - 3 \times (M - Md)$$

Mo 爲衆數

M 爲算術平均數

Md 爲中點數

一事實之次數分配如不甚形成偏態，用此公式尙爲合宜，蓋在

不甚偏歪之次數分配中，中點數與算術平均數之距離約等於衆數與算術平均數，距離三分之一也。惟用此公式必須求算術平均數及中點數，手續甚繁，故仍不爲辦理統計者所習用耳。

4. 次數表核算法(Interpolation). 欲求一事實連續量數之近似衆數(Approximate mode)，可用此法，先將一事實之全體量數分成若干組，然後編成次數分配表，視最多次數屬於何組，卽假定衆數在此一組內，乃用下列公式以求之。

設 Mo = 衆數
L = 含有衆數組組距之下限
U = 含有衆數組組距之上限
i = 組距之長
f_1 = 鄰近衆數下一組之次數
f_2 = 鄰近衆數上一組之次數

則 $$Mo = L + \frac{f_2}{f_1+f_2} \times i \qquad (1)$$

或 $$Mo = U - \frac{f_1}{f_1+f_2} \times i \qquad (2)$$

舉例

表13 某公司160名職員月薪之次數分配

組距	排列	次數
10.0—14.99	/	1
15.0—19.99	/	1
20.0—24.99	//	2
25.0—29.99	////	4
30.0—34.99	卌	5
35.0—39.99	卌 //	7
40.0—44.99	卌 ///	8
45.0—49.99	卌 ////	9
50.0—54.99	卌 //	7
55.0—59.99	卌 卌 卌	15
60.0—64.99	卌 卌 卌 ////	19
65.0—69.99	卌 卌 卌 卌 卌 卌 /	31
70.0—74.99	卌 卌 卌 卌 /	21
75.0—79.99	卌 卌 ///	13
80.0—84.99	卌 卌 /	11
85.0—90.0	卌 /	6
		160

將表13所列量數代入公式(1)

$$Mo=65.0+\frac{21}{19+21}\times 5=65+\frac{105}{40}=67.63$$

將表13所列量數代入公式(2)

$$Mo=70.0-\frac{19}{19+21}\times 5=70-\frac{95}{40}=67.63$$

(U本爲69.99……今用四捨五入法改爲70)

上所舉之兩公式，學者可任用其一，至有時爲謀衆數更加正確起見，又可用鄰近衆數所在組之上下每端兩組或兩組以上或所有各組之次數相加以求衆數，例如仍依表13所列之量數用下列算式求之。

$$Mo=65+\frac{51}{129}\times 5=65+\frac{255}{129}\doteq 66.98$$

或 $$Mo=70-\frac{78}{129}\times 5=70-\frac{390}{129}=66.98$$

二. 平均數

平均數乃於一事實全體量數中用算術或幾何方法求得之一種數量，如構成此事實之各項量數相等，則此所求出之數亦必於各項量數相等，如不等，則此所求出之數必大於各項量數中之最小者，小於各項量數中之最大者。(If all the items averaged are equal to each other, the average will be equal to each one of them also. If the items averaged are not all equal to each other the average will lie between the largest and smallest items.) 由是可知平均數者實全體量數之均衡數也。平均數共有三種：一曰算術平均數(Arithmetie Average or Mean)，二曰調和平均數 (Harmonic Average or Mean)，三曰幾何平均數 (Geometric Average or Mean)。

(一)算術平均數　算術平均數者，乃以一種事實之量數數目(卽次數總和)，除所有量數價値之總和，所得之商數也。(The arithmetic average of a statistical series is the quotient obtained by dividing the sum of all the variates in the given series by the number of such variates.) 其計算法概別之有三種：

1.由未歸類量數求算術平均數

(1)求簡單算術平均數(Simple Arithemetic Average)：簡單算術平均數係由簡單量數(在未歸類之量數中，每一量數有其實際之價値，此種量數名曰簡單量數。)與簡單次數(每一量數只有1次)之分配中求出，求此種平均數所用之公式如下：

設　M＝算術平均數
　　N＝次數之總和
　　Σm＝全體量數價値之總和
　　(Σ卽總和之記號讀如雪格瑪 sigma)

則　$M=\frac{\Sigma m}{N}$

舉例：

表14

織布機號數	每月織布能力	次數
1	510 疋	1
2	470	1
3	620	1
4	750	1
5	530	1
6	620	1
7	430	1
8	350	1
9	290	1
	4570	9

$$M=\frac{\Sigma m}{N}=\frac{4570}{9}=507.78$$

卽平均每部織布機能織布507.78疋

(2)求加權算術平均數(Weighted Arithmetic Average).

加權算術平均數係由不止一次且多少不等之各量數分配中求出。其所用公式如下：

$$M=\frac{\Sigma fm}{N}$$

m 爲量數之數值

f 爲各量數之次數

舉例：

表15　某工廠187工人工資　配

每月工資(以元計)(量數,m)	工人數(次數,f)	量數×次數(fm)
1	7	7
2	8	16
3	9	27
4	15	60
5	36	180
6	38	228
7	25	175
8	22	176
9	18	162
10	9	90
11	4	44
12	2	24
	187	1183

$$M=\frac{\Sigma fm}{N}=\frac{1183}{187}=6.33$$

平均每工人工資爲6.33元

顧何爲而須有加權算術平均數，可據上例以說明其理由；譬如用簡單算術平均法求每人平均工資，則所得結果爲$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12}{12}=6.5$卽6.5元，此實非187工人平均每人工資，而爲12人之平均工資，是其謬誤彰彰明甚，而欲糾正之，故應用加權算術平均法焉。

2. 由已歸類量數求算術平均數。 由未歸類量數求其與次數相乘之積時，可將次數直接與量數相乘。但由已歸類量數求其與次數相乘之積時，不能將次數直接與組距相乘，必須求出組距之中值而後乘之。舉例如下：

表16 某月某地織布工人之成績

布之長(以丈計) 組距	中值 (m)	人數 (f)	fm
0.0—— 4.99	2.5	3	7.5
5.0—— 9.99	7.5	5	37.5
10.0—— 14.99	12.5	7	87.5
15.0—— 19.99	17.5	13	227.5
20.0—— 24.99	22.5	8	180.0
25.0—— 29.99	27.5	19	522.5
30.0—— 34.99	32.5	20	650.0
35.0—— 39.99	37.5	46	1725.0
40.0—— 44.99	42.5	38	1615.0
45.0—— 49.99	47.5	49	2327.5
50.0—— 54.99	52.5	28	1470.0
55.0—— 59.99	57.5	46	2645.0
60.0—— 64.99	62.5	15	937.5
65.0—— 69.99	67.5	5	337.5
70.0—— 74.99	72.5	16	1160.0
75.0—— 79.99	77.5	4	310.0
80.0—— 84.99	82.5	18	1485.0
85.0—— 89.99	87.5	19	1662.5
90.0—— 94.99	92.5	4	370.0
95.0——100.00	97.5	2	195.0
		365	17952.5

$$M=\frac{\Sigma fm}{N}=\frac{17952.5}{365}=49.2$$

平均每工人每月織布49.2丈

3. 簡法(Short Method). 簡法可分爲兩種：

(1) 先自事實之次數分配之一端起約數至次數總數二分之一之處，選擇一量或一組中值，假定其爲平均數(Estimated or Assumed Mean)，或就次數分配最密集之處擇定一量或一組中值，作爲估計平均數；然後求估計平均數與各量或各組距中值之差數 (deviation)，

如前者較後者爲少，則兩者之差數爲正，如前者爲多，則兩者之差數爲負，俟正負差數旣皆求出，乃將各正負差數與各量或各組次數相乘，得各差數與各量或各組次數之積，其在估計平均數以上之各差數與各量或各組次數之積必爲正，以下之各差數與各量或各組次數之積必爲負，於是用代數法將此正負積數相加，除以次數總數，所得結果，爲平均校正數(Correction)，以此校正數加估計平均數所得之和爲算術平均數，即實得平均數(Obtained Mean)也。其公式如下：

$$M = E.M. + C$$

如每一量或組僅有一次則公式上之 $C=\frac{\Sigma d}{N}$

如每一量或組有若干次則公式上之 $C=\frac{\Sigma fd}{N}$

M爲算術平均數或稱爲實得平均數(O.M.)
E.M.爲估計平均數
C 爲較正數即實得平均數與假定平均數相差之數
f 爲次數
d 爲任一量或組距中値與估計平均數之差數
N爲次數之總數

舉例如下：

表17

量 數	估計平均數	估計平均數與實際各量數之差數 d		
		十	○	一
54		6		
32				16
59		11		
76		28		
48	48		0	
84		36		
89		41		
25				23
14				34
15				33
N =10		122		106
		122+(-106)= 16		

$$M=E.M.+\frac{\Sigma d}{N}=48+\frac{16}{10}=49.6$$

至公式$M=E.M.+\frac{\Sigma d}{N}$如何演出，茲用圖 48 及 49述明之於後：

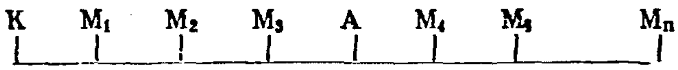


圖 48

設 KM_n 代表全體量數

$KM_1, KM_2, KM_3, KM_4,$ 等為全體量數中之各項次數

KA 代表算術平均數

N為項數之總和

則$KA=\frac{KM_1+KM_2+KM_3+KM_4+KM_5+\cdots\cdots+KM_n}{N}$

$$=\frac{(KA-AM_1)+(KA-AM_2)+(KA-AM_3)+(KA+AM_4)+(KA+AM_5)+\cdots\cdots+(KA+AMn)}{N}$$

$$=\frac{KA-AM_1+KA-AM_2+KA-AM_3+KA+AM_4+KA+AM_5+\cdots\cdots+KA+AMn}{N}$$

$$=\frac{N\overline{KA}-AM_1-AM_2-AM_3+AM_4+AM_5+\cdots\cdots+AMn}{N}$$

$$N\overline{KA}=N\overline{KA}-AM_1-AM_2-AM_3+AM_4+AM_5+\cdots\cdots+AMn$$

$$-AM_1-AM_2-AM_3+AM_4+AM_5+\cdots\cdots+AMn=0$$

又

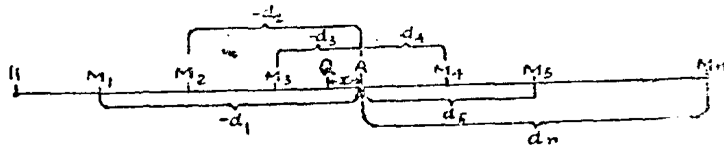


圖 49

設 $KM_1KM_2KM_3KM_4KM_5\cdots\cdots KMn$ 仍為全體量數中之各項次數，KA 為實得算術平均數;N為項數

之總和如圖48所示KQ爲估計平均數

$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \cdots\cdots d_n$ 爲各項量數自實得平均數之離差

QA即x爲實得平均數與估計平均數之差數

則 $$\frac{\Sigma(\text{各項量數自KQ之離差})}{N}$$

$$=\frac{-(d_1-x)-(d_2-x)-(d_3-x)+(d_4+x)+(d_5+x)+\cdots\cdots+(dn+x)}{N}$$

$$=\frac{-d_1+x-d_2+x-d_3+x+d_4+x+d_5+x+\cdots\cdots+dn+x}{N}$$

$$=\frac{-d_1-d_2-d_3+d_4+d_5+\cdots\cdots+dn+Nx}{N}$$

因 $-AM_1=-d_1, -AM_2=-d_2, -AM_3=-d_3, AM_4=d_4,$

$AM_5=d_5$, 以此類推

$-AM_1-AM_2-AM_3+AM_4+AM_5+\cdots+AM_n=0$

故 $-d_1-d_2-d_3+d_4+d_5+\cdots+d_n=0$

$$\frac{\Sigma(\text{各項量數自 KQ 之離差})}{N}$$

$$=\frac{-d_1-d_2-d_3+d_4+d_5+\cdots+d_n+Nx}{N}=\frac{Nx}{N}=x$$

又因 $KA=KQ+QA$

故 $KA=KQ+x$

$$KA=KQ+\frac{\Sigma(\text{各項自KQ之離差})}{N}$$

以 KQ爲估計平均數即E.M.

Σ(各項自KQ之離差即Σd)

是故 $$M.=E.M.+\frac{\Sigma d}{N}$$

(2)如欲用以上方法求加權算術平均數，遇量數甚多時，須將量數分成若干組，而以每組組距中值一一與次數相乘，在計算上殊形煩瑣，乃有第二種方法，無須以量

數或組距中值與次數直接相乘，雖有甚多量數，只須分成若干相等距離之組，將每一組距看作一單位，再定某一組距中值爲估計平均數後，則以較估計平均數所在之組大一組距者爲+1，大二組距者爲+2，較小一組距者爲-1，小二組距者爲-2，依次求完，然後將次數逐項與估計平均數所在之組及各組組距間之差數相乘，所得之積之和，除以次數總數，乘以原組距之長，其所得結果爲校正數，復以校正數加估計平均數所得之和卽爲實得算術平均數，似此方法可謂爲極多量數之算術平均數求法之最簡者，故爲學者所習用焉，此法之公式如下：

$$M = E.M. + \frac{\Sigma fd'}{N} \times i$$

E.M.爲估計平均數
f 爲次數
d' 爲估計平均數組與其他各組之差數
i 爲組距之長

舉例 表18

組距	組距中值	次數 f	d'	fd'
0.0——4.99	2.5	3	-9	-27
5.0——9.99	7.5	5	-8	-40
10.0——14.99	12.5	7	-7	-49
15.0——19.99	17.5	13	-6	-78
20.0——24.99	22.5	8	-5	-40
25.0——29.99	27.5	19	-4	-76
30.0——34.99	32.5	20	-3	-60
35.0——39.99	37.5	46	-2	-92
40.0——44.99	42.5	38	-1	-38
45.0——49.99	47.5	49	0	-500
50.0——54.99	52.5	28	1	28
55.0——59.99	57.5	46	2	92
60.0——64.99	62.5	15	3	45
65.0——69.99	67.5	5	4	20
70.0——74.99	72.5	16	5	80
75.0——79.99	77.5	4	6	24
80.0——84.99	82.5	18	7	126
85.0——89.99	87.5	19	8	152
90.0——94.99	92.5	4	9	36
95.0——100.00	97.5	2	10	20
		365		623
				-500
				123

$$M = E.M. + \frac{\Sigma fd'}{N} \times i = 47.5 + \frac{623 + (-500)}{365} \times 5$$

$$= 47.5 + \frac{123}{365} \times 5 = 47.5 + 0.34 \times 5 = 47.5 + 1.7$$

$$= 49.2$$

(二)調和平均數　關於每一單位時間工作速率之計算，所根據之單位有兩種．一曰時間單位，二曰工作單位。時間單位者卽在一單位時間中能做若干工作。工作單位者卽做一單位工作共需若干時間。玆舉例以說明之。

1．時間單位　有甲乙兩人製造鋼條。甲在一小時內製四根，卽其製鋼條之速率爲一小時 4 根。乙在一小時內製六根，卽其製鋼條之速率爲一小時 6 根。若甲乙兩人共同製造，則在一小時內可製 10 根，其平均速率似爲 4 與 6 之算術平均數卽5根。

2．工作單位　甲乙兩人製造鋼條。甲製一鋼條需時15分鐘。乙製一鋼條須時10分鐘。合計兩人各製造一鋼條須時25分鐘，平均製一鋼條需12．5分鐘。

由上之例，可知依據時間單位計工作效率之甲乙二人卽依據工作單位計工作效率之甲乙二人。以後者合成前者計算，則甲製鋼條之速率亦爲每小時四根，乙製鋼條之速率亦爲每小時六根也。惟依後者計算兩人平均製一鋼條需12．5分鐘，是其改爲時間單位計算，則每小時甲乙二人平均每人可製鋼條4．8根而非5根。然則兩者必有一發生錯誤矣。經學者研究，以爲錯誤屬之後者。因根據時間單位計甲乙平均工作速率爲鋼條 5 根，依此結果，是假定此兩人各製一鋼條所需之時間共爲24分鐘，或兩人平均製造一鋼條需十二分鐘；其實不然，兩人各製造一鋼條需時25分鐘，或兩人平均製造一鋼條需時12．5分鐘，是則

求平均工作速率之根據，必須以平均每人製造鋼條一根需時12.5分鐘為準，因此必用調和平均數焉。調和平均數為何，蓋卽一列量數中各量數之倒數之算術平均數之倒數也。(The harmonic average of a group of variates is the reciprocal of the mean of the reciprocals of the variates.) 其公式如下

$$H=\frac{1}{\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

H為調和平均數

m代表各量數

N代表項數之和

將上列說明代入公式

$$H=\frac{1}{\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{m}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{12}+\frac{2}{12}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}}=\frac{1}{\frac{5}{24}}=\frac{24}{5}=4.8$$

甲乙兩人平均每人每小時能製鋼條4.8根

(三)幾何平均數　幾何平均數為一列量數中之n個量數相乘之積而計其n次方根之結果也，此所謂n者，卽量數之個數。(The geometric average of a group of variates is the nth root of the product of these variates, where n is the number of variates.) 此種平均數之功用在能確示某種事情增進之平均速率；例如某種物價在第二年較第一年減少四分之三，第三年較第一年減二分之一，第四年較第一年增加一倍，第五年較第一年增加三倍，是若以第一年物價作為100，

則第二三四五年與第一年相比之物價作爲25,50,200,400,今吾人欲知五年物價變動之平均速率可用算術平均法計之；則爲(100+25+50+200+400)÷5=775÷5=155卽平均物價，其增進速率爲155−100=55,此果是耶，非也，若平均五年物價，應知其未曾變動，蓋第二年之物價較第一年減四分之三與第五年較第一年增加三倍兩相抵銷，第三年較第一年減二分之一與第四年較第一年增加一倍兩相抵銷也。惟以算術平均法計物價增進率，已見其變動頗劇，是果其無變動，則算術平均法本身之誤矣，於是代之以幾何平均法，而計算結果乃與吾人所度者同，故平均一事情之增進率，必用之焉。其公式如下：

$$Mg = \sqrt[n]{m_1 m_2 m_3 m_4 \cdots\cdots m}$$

Mg爲幾何平均數

$m_1 m_2 m_3 m_4 m \cdots\cdots m_r$ 代表各量數

計算上一公式須用開方及乘法，設若量數太多，必非短時間可以求得結果，於是用對數法計之，將原來公式變爲

$$\text{Log } Mg = \frac{\Sigma \log m}{N}$$

m 代表各量數

現可將上例代入公式如下：

$$\text{Log}Mg = \frac{\Sigma \log m}{N} = \frac{\log 100 + \log 25 + \log 50 + \log 200 + \log 400}{5}$$

$$= \frac{2 + 1.39794 + 1.69897 + 2.30103 + 6.60206}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

因2爲100之對數

故Mg=100

由上式可知五年平均物價爲100，固未有漲落之變動也。

三、中點數

中點數爲全體量數中間一點之數値(The median is a value of the variable such that as many actual values lie above as below it).依簡單次數之量數數値大小,順次排列,將見量數項目之一半居其上,一半居其下。設若在歸類量數之次數分配表中覓之,將見其兩端各有量數之半。如化量數爲百分數,則其所在位置確與五十分點之位置相合,有百分之五十的量數在此點以上,百分之五十的量數在此點以下。

求中點數之算法有二:一爲由簡單次數之量數求中點數,二爲由已歸類量數求中點數。

1.由簡單次數之量數求中點數　由簡單次數之量數求中點數之法,係先將各個量數依其大小之次序排列,然後視項目之總數如爲奇數,則中點數卽爲最中項目之量數,如爲偶數則中點數卽爲居中二項量數之半數,依此定義,可知中點數卽爲第$\frac{N+1}{2}$量數(N爲項目之總和)。例如用表19之材料求之則可知中點數爲$\frac{9+1}{2}=5$,卽第五個量數,從量數之任一端起數至第五個量數爲21,故21卽爲中點數。

表19

每日織毯數(量數)	廠數(次數)
34	1
33	1
29	1
28	1
21	1
20	1
19	1
17	1
15	1
	N=9

上表所列量數共計9項爲奇數，故能以第五個量數21爲中點數。假設量數項目之和爲偶數，卽須以最中二量數之平均數爲中點數，例如表20所列之量數共有十項，欲求其中點數，卽須

表20

每日織毯數（量數）	廠數（次數）
34	1
33	1
29	1
28	1
21	1
20	1
19	1
18	1
16	1
15	1
	N=10

先求$\frac{10+1}{2}=5.5$，於是可知中點數必在最中二量數卽第五及第六量數之間，而爲$\frac{21+20}{2}=20.5$。但表中並無20.5之一量數，故此數卽爲虛擬之中點數。

2. **由已歸類量數求中點數** 若量數之項目有數十數百或數千，吾人不可不用次數分配法以歸類之，先假定各量數均勻分佈於各組組距之間；然後將各項分配之次數相加得N，以2除之，所得結果爲中點數所在之位置，再從次數分配之任一端起至含有中點數之$\frac{N}{2}$一點之組止，將各量數之次數相加得F（求F亦可用累積法）。從$\frac{N}{2}$減去F，所餘之數爲i，卽含有中點數組之上一組或下一組至中點數之次數差異，復以含有中點數一組之次數f除i，所得之商數卽爲計算中點數之比例率，以此比例率乘以組距之長C，所得之積數卽爲i個量數之距離，

如計算量數時由小至大，即以此積數加於含有中點數組組距之下限，如由大至小，即從含有中點數組組距之上限減之，兩者所得結果皆爲所求之中點數，至其公式如下·

設　L代表含有中點數組組距之下限

U代表含有中點數組組距之上限

N代表次數總數

Md爲中點數

則 $$Md = L + \frac{i}{f} \times C = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times C \quad (1)$$

或 $$Md = U - \frac{i}{f} \times C = U - \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times C \quad (2)$$

上列兩公式可任意擇一應用。由小量數向大量數數時則用公式(1)。由大量數向小量數數時則用公式(2)。玆取表21之材料以演明之。

天津市工人每月工資分配

表21　　民國十八年年調査

工資（以元計）（組距）	人數（次數）	累積次數 以下	累積次數 以上
1——4.99	438	438	2140
5——8.99	724	1162	1702
9——12.99	415	1577	978
13——16.99	287	1864	563
17——20.99	153	2017	276
21——24.99	49	2066	123
25——28.99	29	2095	74
29——32.99	30	2125	45
33——36.99	3	2128	15
37——40.99	4	2132	12
41——44.99	0	2132	8
45——48.99	2	2134	8
49——52.99	2	2136	6
53——56.99	0	2136	4
57——60.99	3	2139	4
61——65.00	1	2140	1
	2140		

$$Md=L+\frac{i}{f}\times C=L+\frac{\frac{N}{2}-F}{f}\times C=5+\frac{\frac{2140}{2}-438}{724}\times 4$$

$$=5+\frac{632}{724}\times 4=5+3.49=8.49$$

或$$Md=U-\frac{i}{f}\times C=U-\frac{\frac{N}{2}-F}{f}\times C=9-\frac{\frac{2140}{2}-978}{724}\times 4$$

$$=9-\frac{92}{724}\times 4=9-0.51=8.49$$

四. 各種集中量數之關係

衆數中點數幾何平均數調和平均數與算術平均數互有一定之關係如下:—

1. 在次數分配勻稱 (symmetrical distribution) 之材料中，M, Md及Mo三種平均數均合於一點(可閱圖50)。

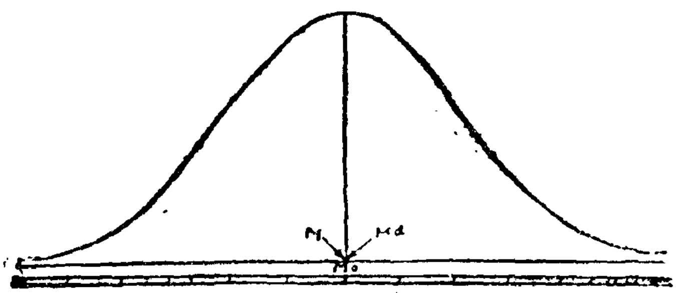


圖 50

2. 一事實如為不甚偏歪之分配(moderately assymetrical distribution)，則$Mo=M-3(M-Md)$或$Md=Mo+\frac{2}{3}(M-Mo)$。

蓋以衆數在一事實為偏歪之次數分配與勻稱之次數分配中，所居之位置相同，中點數及算術平均數則不然，在一事實卽為不甚偏歪之次數分配，均須稍有移動。中點數移離衆數之距極

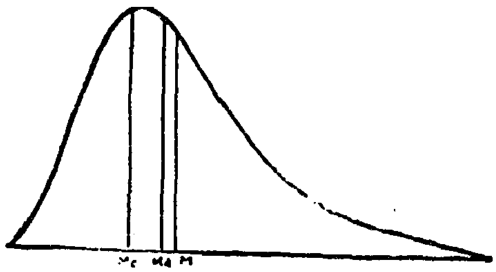


圖 51

爲算術平均數者三分之二也（可閱圖51)。玆爲理解此二公式使易清楚起見，演明之如下：

(1)因　$Md-Mo=\frac{2}{3}(M-Mo)$

故　$Md=Mo+\frac{2}{3}(M-Mo)$

(2)因　$Md=Mo+\frac{2}{3}(M-Mo)=\frac{3Mo}{3}+\frac{2M}{3}-\frac{2Mo}{3}$

$=\frac{Mo}{3}+\frac{2M}{3}=\frac{Mo}{3}+\frac{3M}{3}-\frac{M}{3}=\frac{Mo+3M-M}{3}$

則　$3Md=Mo+3M-M$

$3Md-3M+M=Mo$

故　$Mo=M+3(Md-M)=M-3(M-Md)$

3. 一事實之變量如非呈示勻稱之次數分配，其算術平均數常大於幾何平均數，幾何平均數常大於調和平均數，此種比較可以下式形之：

$M>Mg>H$

4. 任何兩項量數之幾何平均數等於此兩項量數之調和平均數及算術平均數之幾何平均數。其等式可演明如下：

設 a與b爲兩項量數

則 $M=\frac{a+b}{2}$

$$Mg=\sqrt{a\cdot b}$$

$$H=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\frac{1}{\frac{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}}{2}}=\frac{1}{\frac{\frac{a+b}{ab}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{a+b}{2ab}}=\frac{2ab}{a+b}$$

因 $\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}}$

故 $Mg=\sqrt{M\cdot H}$

五、衆數平均數及中點數之功用與缺點

衆數平均數及中點數各有其特殊之功用與缺點，用得其當則功用顯，不得其當則缺點著。惟如何斯用之得當，而免不得當，則必先知其功用與缺點之所在，然後善其趨避可矣。

(一) 衆數

1.功用

(1)衆數非由一事實之全體量數求出，乃由其中集於一小部分之量數求出，常不受極端量數（最大量數與最小量數）之影響。故遇極端量數不十分正確，而欲免受其所致之影響時，以用衆數爲宜。

(2)衆數因確定在次數最密集之組，爲代表次數最多之組之量數，故顯而易見，計算便捷。

(3)衆數不受極端量數之影響,故對于極端量數之大小可無須研究;譬如吾人欲知中國經濟狀況,只求之於含有多數人民之一階級之經濟狀況,而得一衆數足已,無須另研究巨富及赤貧者之經濟狀況。

(4)衆數所代表者爲最普通之情形,例如某地有五人,各擁貲千萬元,其餘皆不滿百元,若用平均法計算該地之經濟狀況,每人皆屬小康,而實則當地人民極爲困窮,若用衆數代表之,卽察見一般人民經濟窘迫之情形。

(5)集中之量數若必須爲整數,而不可分析,如女工可爲5人,不可爲4.5人,宜用衆數,蓋衆數可以不分析至小數,而平均數與中點數則常爲精確的分析至小數若干位始止也。

2.缺點

(1)當兩極端量數有關於全體量數甚切時,採用衆數頗不適宜,譬如求某工廠每一工人工作成績,若用衆數,則工作最優及最劣者全不能發生影響,殊有未當。

(2)衆數係由一小部分事項求出,非若平均數之由全體量數求得,故全體量數若成偏態,則求得之衆數卽不可靠;譬如某工廠有一百工人編織毛毯,只有六人每月可織五件,其餘工人能織六件以至十餘件二十餘件不等。然各種工人皆無較織五件之工人爲多,是其衆數爲5,若吾人卽據此謂某工廠每工人可織毛毯五件,豈非謬誤。

(3)衆數之變動有時甚大,蓋其變動之情形常隨組距之大小與界限爲異。

(4)設有若干量數無集中之傾向而呈散漫之勢,則其衆數爲不適用;例如一公司有數百股東,內五人有同等股數各一百股,其他各人之股數均不相同,若求股數之衆數則所得結果必爲100股,此實未能代表某公司每人之股數也。

(5)用披爾生公式求衆數，因須先求出算術平均數及中點數，手續甚爲麻煩，故鮮有用之者。

(二)平均數

甲.算術平均數

1.功用

(1)求算術平均數須全體量數鉅細不遺，均在計算之列，非如衆數對於極端之量數完全不問。故遇極端量數極有關係於全體量數時，以用算術平均數爲宜。

(2)算術平均數由一事實之全體數量求出，故較衆數爲正確。

(3)算術平均數爲人人所易熟習。

(4)僅知全體量數與次數總數，而不知各量數之次數爲何，亦可求出算術平均數；譬如已知某工廠共有三百工人，每日共產出牙膏一萬五千盒，而不知各人能製牙膏若干，只須以一萬五千盒除以三百，卽可求出算術平均數每人每日製牙膏五十盒，至衆數及中點數，遇有此種情形時，則無法計算。

2.缺點

(1)極端量數如有錯誤，算術平均數卽不能正確。

(2)若全體量數中有不合理量數，則算術平均數受其影響；例如少數極大或極小量數之項目足使平均數有所偏枉；然此則衆數及中點數所可免者也。

(3)算術平均數所落之點，在不連續之量數上，有時與事理不合；譬如上海平均每紡織工廠有1345.6工人，此人數.6在實際上所絕無者也。

乙.調和平均數　調和平均數之特殊功用在求每一時間某事進步之平均速率，其他功用甚少。

丙.幾何平均數　幾何平均數之特殊功用在計算某事實含有增進的速率，如物價指數，人口增加率，複利之平均率等；其缺點卽在

計算麻煩，不能普偏應用

(三)中點數

1.功用

(1)中點數受兩極端量數之影響甚微，故欲減少極端量數所致之影響者，以用中點數爲宜。

(2)組距之大小及界限影響於中點數亦微，故其位置比較確定，非若衆數之隨此種情形變動。

(3)遇量數甚多時，求中點數較平均數爲易。

2.缺點

(1)中點數大都非由全體量數之價值求出，其精確之度不及平均數。

(2)欲兩極端量數對全體量數之代表數發生效力時，不宜用中點數。

(3)以量數之項數乘中點數，苟非偶然，不能得各項實在量數之總和。

(4)中點數所落之點在不連續之量數上常與事理不合，如某工廠一部分有58.3人之類是。

第四節

差異量數

集中量數所表示者爲一事實全體量數之中心位置，而非全體量數分配之狀況。集中量數可以表示若干量數集中的趨勢，而不可以表示離中的趨勢。今苟欲表示全體量數分配之狀況或若干量數離中的趨勢，只有用差異量數，蓋差異量數者，乃用以表示一事實內部各量數之互相差異，或各量數與其平均數相差之一種數目也 (Dispersion is that property of a series by which the several variates tend to differ in value from the average.)。然何以須用差異量數以表示一事實全體量數分配之狀況及數量離中的性質，其最著原因，爲有時以集中量數比較兩種事實，雖其各量數所集合之地位相等，固未可斷定兩事實完全相等。蓋兩事實之各量數所集合之地位相等，若其離中分配情形未能相同，此兩種事實之狀況亦必不相等也。茲繪圖如下以揭明之。

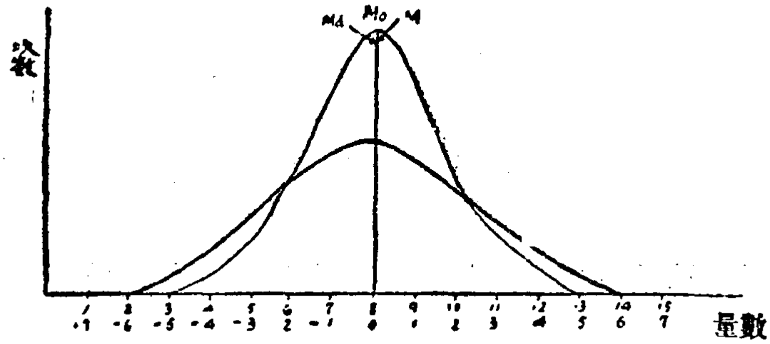


圖 52 兩事實之量數分配狀況不相等之曲線

閱上圖，可以知兩事實之衆數，算術平均數及中點數均落於量數上，但其分配情形互相不同，苟遽依集中量數之相等以斷定此兩事實測量之完全相同，則必陷於謬誤。

計算差異量數之方法舉其普通用者有四：爲求

1. 全距(Range).
2. 四分位差 (Quartile Deviation 或 Semi-interquartile Range).
3. 平均差 (Mean Diviation 或 Average Deviation).
4. 標準差 (Standard Deviation 或 Root-mean-square-deviation).

茲逐一分述之於後。

一. 全距

全距爲一事實全體量數中兩極端量數之差異數，事實之現象畢呈其間。Range is a distance along the scale within which all observations lie.)。其計算法係將量數中之最大量數減去最小量數，以此兩者之差異數，可以表示事實之分配狀況；例如將工廠中最高薪級之工頭所得工資減去最低薪級學徒之工資，以其距離所謂差數，作為工資分配之狀況焉。但此殊未可信，蓋全距之大小祗恃兩極端量數以為準，如兩極端量數距離太大，而其中間各數有集中之勢，或為不規則之散漫，於一事實之分配狀況全距足以致絕大之影響者，皆所不顧，則其所示之分配情形，必不正確。因此全距之一法鮮為人所採用，然在全體量數分配有規則時，全距或可用，以其在計算差異量數之方法中，究屬最簡便者耳。至在此種有規則之全體量數分配中，全距愈小，集中之勢愈大。(The smaller the range, the more the concentration.)反之全距愈大，則集中之勢愈小，即差異量數愈大，此有須注意者也。

二. 四分位差

中點數乃居於全體量數最中間之一點，將全體量數分為二等分。若此二等分再各求其中點數，則全體量數分為四等分。因別此四等分之兩中點數自二等分之中點數，遂名四等分之兩中點數為較低四分位數 (Lower Quartile) 及較高四分位數 (Upper Quartile)。前者下部分之量數佔全體量數四分之一，上部分之量數佔全體量數四分之三。後者下部分之量數佔全體量數四分之三，上部分之量數佔全體量數四分之一。至所謂四分位差者，即此較高及較低四分位數間差數之一半也 (Quartile deviation is a distance along the scale which when laid on each side of the midway between the quartiles, includes one half of total number of observations.)。四分位差既為此兩者之一半，則欲求四分位差必先求此兩者。求較高及較低四分位數所用公式如下：

1. $$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i \qquad (1)$$

Q_1代表較低四分位數

L 代表含有較低四分位數組之組距下限

N 代表次數之總數

F 代表含有較低四分位數組以下各組之次數總數

f 代表較低四分位數組之次數

i 代表組距之長

$$Q_1 = U - \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times i \qquad (2)$$

U 代表含有較低四分位數組之組距上限

F 代表含有較低四分位數組以上各組之次數總數

Q_1, N, f 及 i 與公式(1)之Q_1, N, f 及 i 所代表者同

2. $$Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times i \qquad (3)$$

Q_3代表較高四分位數

L 代表含有較高四分位數組之組距下限

N 代表次數總數

F 代表含有較高四分位數組以下各組次數總數

f 代表較高四分位數組之次數

i 代表組距之長

$$Q_3 = U - \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i \qquad (4)$$

U 代表含有較高四分位數組之組距上限

F 代表含有較高四分位數組以上各組次數總數

Q_3, N, f 及 i 與公式(3)之 Q_3, N, f 及 i 所代表者同

以上所列四種公式係由已歸類量數求 Q 及 Q_3者。若由未歸類量數

求 Q_1 及 Q_3，則須自全體量數分配之小量數一端起，用下列公式計算至某一量數卽得之。

$$Q_1 = 第\frac{\frac{N+1}{2}+1}{2}量數$$

$$Q_3 = 第\frac{3N+1}{4}量數$$

N＝次數總數

既經求得 Q_1 及 Q_3，則依下列公式求四分位差。四分位差以Q代之。

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

玆用表 22 所列之材料演明求四分位差之法。

表22　某工廠職員月薪分配

每月薪金(以元計)(組距)	人數(次數)	累積次數 以下	累積次數 以上	Q_3及Q_1
0.0—— 4.99	1	1	300	
5.0—— 9.99	3	4	299	
10.0—— 14.99	4	8	296	
15.0—— 19.99	6	14	292	
20.0—— 24.99	9	23	286	
25.0—— 29.99	14	37	277	
30.0—— 34.99	14	51	263	
35.0—— 39.99	44	95	249	Q_1=37.73
40.0—— 44.99	23	118	205	
45.0—— 49.99	42	160	182	
50.0—— 54.99	14	174	141	
55.0—— 59.99	25	199	126	
60.0—— 64.99	14	213	101	
65.0—— 69.99	26	239	87	Q_3=67.31
70.0—— 74.99	18	257	61	
75.0—— 79.99	19	276	43	
80.0—— 84.99	7	283	24	
85.0—— 89.99	6	289	17	
90.0—— 94.99	6	295	11	
95.0——100.00	5	300	5	
	N=300			

$$\text{因}\quad Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i = 35.0 + \frac{\frac{300}{4} - 51}{44} \times 5 = 37.73$$

$$\text{或}Q_1 = U - \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times i = 39.99 - \frac{\frac{3}{4} \times 300 - 205}{44} \times 5 = 37.73$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times i = 65.0 + \frac{225 - 213}{26} \times 5 = 67.31$$

$$\text{或}Q_3 = U - \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i = 69.99 - \frac{75 - 61}{26} \times 5 = 67.31$$

$$\text{故}\quad Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{67.31 - 37.73}{2} = 14.79$$

四分位差之求法吾人已知之矣，惟如何可用以測定一事實變量之分配狀況，曰，須視四分位差之大小以爲定。因一事實之各項量數如有集中之勢，則四分位差甚小，否則四分位差甚大也。雖然此固未能成爲定則，蓋四分位差僅能示全體量數一半之差異其所影響只及於Q_3及Q_1間之事物，若此中間之事物足以代表全體者，則所求之四分位差未嘗不可表示差異之一般狀況，假如吾人欲測定一事實量數之差異程度，對於全體事實之各項變量，皆所注意，而Q_1及Q_3間當全體量數一半之事物，誠不足以代表全體，則於其中所求出四分位差不適用也明矣。

三. 平均差

平均差者，一事實之各項量數與其衆數中點數或算術平均數之差數之算術平均數也 (The average deviation is strictly, the mean of the absolute deviation of the several variates from the mode, median or mean.)。通常因中點數較衆數爲精確，較算術平均數易於計算，故計算平均差尤多用各量數與中點數之差數

求之。計算平均差時有須注意者，卽差數相加，可不顧及正負符號 (without regard to plus and minus signs)，否則卽不能得正確差數之和。求平均差之方法有三種：

1. 由未歸類量數求平均差。

公式 $A.D.=\frac{\Sigma d}{N}$

A. D. 為平均差

d 為每一量數與衆數中點數或算術平均數之差數

N 為次數總數

舉例 譬如有八工人各訂書二百本；甲費時二句鐘，乙三，丙四，丁五，戊六，己七，庚八，辛九，求其平均差。

表23

量數	由中點數求差數 d	由算術平均數求差數 d	由衆數求差數 d
2	—3.5	—3.5	—4
3	—2.5	—2.5	—3
4	—1.5	—1.5	—2
5	—0.5	—0.5	—1
6	0.5	0.5	0
7	1.5	1.5	1
8	2.5	2.5	2
9	3.5	3.5	3
N=8 $Md=\frac{5+6}{2}=5.5$ $M=\frac{44}{8}=5.5$ Mo=6	16.0 $A.D.=\frac{16.0}{8}$ =2	16.0 $A.D.=\frac{16.0}{8}$ =2	16 $A.D.=\frac{16}{8}$ =2

平均差數爲二句鐘

2. 由已歸類量數求平均差。

公式　$A.D.=\frac{\Sigma fd}{N}$

fd 爲次數與差數相乘之積

舉例

表24　某工廠工人每月所得工資之分配

工資(以元計)組距	中值 (m)	人數 (f)	差數 (d)	fd
10——14.99	12.5	1	—37.43	— 37.43
15——19.99	17.5	2	—32.43	— 64 86
20——24.99	22.5	5	—27.43	—137 15
25——29.99	27.5	8	—22.43	—174 44
30——34.99	32.5	20	—17.43	—348.60
35——39.99	37.5	25	—12.43	—310 75
40——44.99	42.5	27	— 7.43	—200.61
45——49.99	47.5	34	— 2.43	— 82 62
50——54.99	52.5	42	2.57	107 94
55——59.99	57.5	31	7.57	234 67
60——64.99	62.5	22	12.57	276 54
65——69.99	67.5	16	17.57	281.12
70——74.99	72.5	7	22.57	157 99
75——80.00	77.5	3	27.57	82.71
		N=243		2502.43

因　$Md=L+\frac{\frac{N}{2}-F}{f}\times C=45+\frac{\frac{243}{2}-88}{34}\times 5$

$=45+\frac{121.5-88}{34}\times 5=45+\frac{167.5}{34}$

$=45+4.93=49.93$

則　$\Sigma fd=2502.43$

故　$AD=\frac{\Sigma fd}{N}=\frac{2502.43}{243}=10.3$

工資平均差爲10.3元

3. 簡法　用上面所述兩法求平均差，計算時殊形煩瑣，遠不如用簡法，可以節省精力，經濟時間；蓋用簡法計算平均差所依據之原理，與計算算術平均數所用簡法之原理粗相類似，此法亦以每一組距作一單位計算耳。簡法有二種：一爲用實得中點數求差數，此種求出之差數可不另加校正數，（卽實得中點數與假定中點數相差之數）。二爲用假定中點數求差數。所謂假定中點數者，卽由小量一端之次數起累積至確含有全體量數之半數之一組之中值也，由此求出之差數必須另加校正數。觀此兩法，似以後者計算，手續較煩，其實以前法求出之各量差數與次數相乘所得之積，含有數字位數較後法求出者爲多，此前者之煩尤勝於後者多加校正數一步手續之煩，故前者終不及後者應用廣也。此兩法之公式如下：—

(1) $$\text{A.D.} = \frac{\Sigma f d'}{N} \times i$$

d' 代表由每一組距中值求得之差數，但此所謂一組距只作一單位，

i 代表組距之長

(2) $$\text{A.D.} = \frac{\Sigma f d' + C(Nb - Na)}{N} \times i$$

C 代表校正數

$$C = \frac{\text{T.Md.} - \text{A.Md.}}{i}$$

T. Md. 爲實得中點數

A. Md. 爲假定中點數

Na 代表實得中點數以上之次數

Nb 代表實得中點數以下之次數

i 代表組距之長

舉例如下以指示第一法：

表25

組　　距	f	d'	fd'
10——14.99	1	—7.93	—7.93
15——19.99	2	—6.93	—13.86
20——24.99	5	—5.93	—29.65
25——29.99	8	—4.93	—39.44
30——34.99	20	—3.93	—78.66
35——39.99	25	—2.93	—73.25
40——44.99	27	—1.93	—12.11
45——49.99	34	—0.93	—31.62
50——54.99	42	0.07	2.94
55——59.99	31	1.07	33.17
60——64.99	22	2.07	45.54
65——69.99	16	3.07	49.12
70——74.99	7	4.07	28.49
75——80.00	3	5.07	15.21
	N=243		500.93

$$Md = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times C$$

$$= 45 + \frac{121.5 - 88}{34} \times 5$$

$$= 49.93$$

$$A.D. = \frac{\Sigma fd'}{N} \times i = \frac{500.9}{243} \times 5 = 2.0614 \times 5 = 10.3$$

舉例如下以指示第二法：

表26

組　　距	f		d'	fd'
10——14.99	1	122	—7	—7
15——19.99	2		—6	—12
20——24.99	5		—5	—25
25——29.99	8		—4	—32
30——34.99	20		—3	—60
35——39.99	25		—2	—50
40——44.99	27		—1	—27
45——49.99	34		0	0
50——54.99	42	121	1	42
55——59.99	31		2	62
60——64.99	22		3	66
65——69.99	16		4	64
70——74.99	7		5	35
75——80.00	3		6	18
	N=243			Σfd'=500

$$T.Md.=49.93$$

$$A.Md.=47.5$$

$$C=\frac{T.Md.-A.Md.}{i}=\frac{49.93}{5}=0.49$$

$$Nb=122$$

$$Na=121$$

$$A.D.=\frac{\Sigma fd'+C(Nb-Na)}{N}\times i=\frac{500+.49\times(122-121)}{243}\times 5$$

$$=\frac{500+.49}{243}\times 5=2.06\times 5=10.3$$

設實得中點數小於假定中點數，其求法亦如上舉之例，惟有異者，即在求Nb及Na時，須將含有假定中點數一組內之次數如34加入Na而不加入Nb。

按求平均差有必須特別注意之一事，即當各差數相加時，雖其數有正負符號，可置之不問，否則即不能得正確之差數，此於算法上殊嫌牽强，乃有所謂標準差以代之。於是平均差雖根據全體量數求出，各量數均能發生影響，自較四分位差爲準確，然終不敵標準差之爲用大也。

四. 標準差

標準差又曰均方差，即一事實分配中各量數與其衆數中點數或算術平均數之差數之平方之算術平均數之方根也(The standard deviation is the square root of the mean of the squares of the deviations from the mode, median or mean.)。標準差與平均差之區別，即一則爲由衆數，中點數或算術平均數求出各差

數平方之算術平均數之方根 (the root-mean-square-deviation taken from the mode, median or mean), 一則爲由衆數，中點數或算術平均數求出各差數之算術平均數; 一則計算時將各差數平方，其負數符號無形消滅，蓋依據數學原理，無論一數爲正抑爲負，自乘以後，總是正數，一則雖有負數，但須作爲正數計算：一則習於由算術平均數求差數，一則習於由中點數求差數；如在不甚偏歪之次數曲線圖中，從算術平均數之地位向左右各展一標準差之長，而於其兩端豎立兩縱線以至曲線，則此曲線底線與兩縱線間之面積，共包含全體量數 68.26%，若從中點數之地位向左右各展一平均差之長，而於其兩端豎立兩縱線以至曲線，則此曲線底線與兩縱線間之面積共包含全體量數 57.5%；此標準差與平均差之大較也。

求標準差之方法大別之爲三種：一爲由未歸類量數求標準差之法，二爲由已歸類量數求標準差之法，三爲由各部分之標準差求全部標準差之法。茲分述之於後。

(一)由未歸類量數求標準差 當量數少時，可不必歸類，直接應用下列三公式之一以求標準差：

公式一 $$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$

σ(讀爲雪格瑪)爲標準差之符號

d 代表各量數與算術平均數之差數

N代表次數總數

應用此公式，先須求出算術平均數，然後由各量數與算術平均數之差數求標準差。

舉例：

表27

量數 (m)	次數 (f)	d	d^2
2	1	—3.5	12.25
3	1	—2.5	6.25
4	1	—1.5	2.25
5	1	—.5	.25
6	1	.5	.25
7	1	1.5	2.25
8	1	2.5	6.25
9	1	3.5	12.25
44	N=8		$\Sigma d^2=42.00$
$M=\frac{44}{8}=5.5$			

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}=\sqrt{\frac{42}{8}}=\sqrt{5.25}=2.3$$

公式二
$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma d'}{N}\right)^2}$$

d'為各量數與估計算術平均數之差數

$\frac{\Sigma d}{N}$為校正數

應用此公式，先須求出估計算術平均數，然後由各量數與估計算術平均數之差數求標準差。

舉例

表28

m	f	d'	d'^2
2	1	—3	9
3	1	—2	4
4	1	—1	1
5	1	0	0
6	1	1	1
7	1	2	4
8	1	3	9
9	1	4	16
設假定算術平均數為5	N=8	10 —6 Σd'=4	$\Sigma d'^2=44$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma d'}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{44}{8}-\left(\frac{4}{8}\right)^2}=\sqrt{5.5-.25}=$$

$$=\sqrt{5.25}=2.3$$

公式三 $\sigma=\sqrt{\frac{N\cdot\Sigma m^2-(\Sigma m)^2}{N^2}}$

用第一或第二公式求標準差，必先求出實得或估計算術平均數，此則不必，可直接由量數求標準差。

舉例：

表29

m	m^2
95	9025
18	324
82	6724
76	5776
70	4900
65	4225
58	3364
51	2601
49	2401
74	5476
56	3136
56	3136
35	1225
25	625
88	7744
12	144
98	9604
28	784
21	441
88	7744
84	7056
6	36
97	9409
91	8281
86	7396
15	225
1524	111802

$$\sigma=\sqrt{\frac{N\cdot\Sigma m^2-(\Sigma m)^2}{N^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{26\times111802-(1524)^2}{(26)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2906852-2322576}{676}}$$

$$=\sqrt{\frac{584276}{676}}$$

$$=\sqrt{864.31}$$

$$=29.44$$

（二）由已歸類量數求標準差。 遇量數多時，先須歸類，然後擇用下列五公式之一以求標準差

公式四 $$\sigma = \sqrt{\frac{N(10\,\Sigma fc^2 + 11(\Sigma r^2) - 10y) - (10\,\Sigma fc + \Sigma fr)}{N^2}}$$

用此公式計算標準差，必先編一種標準差計算表，將量數分別列入，此種表式乃由美國烏海渥省立大學(Ohio state University)統計學教授陶勃氏(Tocps)所製如下：

表 30

十位(T)

對角地之次數×(T−U)	0	64	98	108	25	64	27	12	7		405 y
(T−U)	81	64	49	36	25	16	9	4	1		
對角地之次數	0	1	2	3	1	4	3	3	7	2	26 N
對角線名	I	H	G	F	E	D	C	B	A	S	

單位(U)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	f	r	fr	fr²	r²
9	I I	H	G	F	E 1	D	C	B	A	S	1	9	9	81	81
8	H	1	1			1			11	1 A	6	8	48	384	64
7	G									1 B	1	7	7	49	49
6	F 1					11		1	1	C	5	6	36	216	36
5	E	1	1	1			1			1 D	5	5	25	125	25
4	D							1	1	E	2	4	8	32	16
3	C									F	0	3	0	0	9
2	B	1							1	G	2	2	4	8	4
1	A		1			1				1 H	3	1	3	3	1
0	S	A	B	C	D	E	F	G 1	H	I I	1	0	0	0	0

f	1	3	3	1	1	4	1	3	5	4	26 N; 140 Σfr; 998 Σfr²
c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
fc	0	3	6	3	4	20	6	21	40	36	139 Σfc
fc²	0	3	12	9	16	100	36	147	320	324	967 Σfc²
c²	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	

表之說明

(1)以橫線代表十位數，縱線代表單位數。

(2)譬如有量數95。因9爲十位，5爲單位，卽於代表9之橫線與代表5之豎線相遇之方格中，畫一"|"代表一次，餘類推。

(3)求每行與每排之次數卽f.

(4)各行或各排次數之和爲N.

(5)每排之次數 f 乘其排數 r 所得之積卽以 fr 代表之。

(6)每行之次數 f 乘其行數 c 所得之積，卽以 fc 代表之。

(7)將每排之fr乘r，或每排之f乘r^2，其積爲fr^2。

(8)將每行之fc乘c，或每行之f乘c^2，其積爲fc^2。

(9)各排之fr相加之和爲 Σfr。

(10)各排之fr^2相加之和爲 Σfr^2。

(11)各行之fc相加之和爲 Σfc。

(12)各行之fc^2相加之和爲 Σfc^2。

(13)由零位起至最大十位90止，對角畫一直線，如表30之S線卽是。將經過此線之方格中所包含之次數相加，以其和書於"對角地次數"排中代表90一行之上之欄內，如表30之S欄內是。

(14)將上述對角線之上下所有每相等平行之兩條方格中包含之次數相加，以其和分別書於"對角地次數"排中各欄如A，B，C，D，等欄內是。

(15)求$(T-U)^2$，例如$(10-1)^2$，$(10-2)^2$，$(10-3)^2$等。

(16)以對角地之次數分別與其下一格之$(T-U)^2$相乘，而以其乘積之和爲v。

公式之應用

$$\sigma=\sqrt{\frac{N(110\ \Sigma fc^2)+11\ \Sigma fr^2)-10y)-(10(\Sigma fc)+\Sigma fr)^2}{N^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{26\times(110\times967+11\times898-10\times405)-(10\times139+140)^2}{26^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{26\times(106370+9878-4050)-(1390+140)^2}{676}}$$

$$=\sqrt{\frac{26\times112198-(1530)^2}{676}}=\sqrt{\frac{2917148-2340900}{676}}$$

$$=\sqrt{\frac{576248}{676}}=\sqrt{852.4}\doteq29.23$$

公式五 $$\sigma=\sqrt{\frac{N\Sigma fg^2-(\Sigma fg)^2}{N^2}}\times i$$

N為次數總數

f 為次數

g 為組數

量數如有大至100以上者，陶勃氏所製之標準差計算表卽不適用，而公式四亦失其作用，爰有公式五以代之。

舉例如下以述明公式五之應用：

表31

組　距	次數 f	組數 g	次×組 fg	次×組² fg^2
6——10	1	1	1	1
11——15	2	2	4	8
16——20	1	3	3	9
21——25	2	4	8	32
26——30	1	5	5	25
31——35	1	6	6	36
36——40	0	7	0	0
41——45	0	8	0	0
46——50	1	9	9	81
51——55	1	10	10	100
56——60	3	11	33	363
61——65	1	12	12	144
66——70	1	13	13	169
71——75	1	14	14	196
76——80	1	15	15	225
81——85	2	16	32	512
86——90	3	17	51	867
91——95	2	18	36	648
96——100	2	19	38	722
i=4	26		290	4138

$$\sigma=\sqrt{\frac{N\Sigma fg^2-(\Sigma fg)^2}{N^2}}\times i=\sqrt{\frac{26\times 4138-(290)^2}{26^2}}\times 4$$

$$=\sqrt{\frac{107588-84100}{676}}\times 4=\sqrt{\frac{23488}{676}}\times 4=\sqrt{34.75}\times 4$$

$$=5.89\times 4=23.56$$

公式六　$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$

f 爲次數

d 爲各量數與實得算術平均數之差

N 爲次數之總數

用公式五求標準差，須以組數分别乘次數，頗不合理，於是有公式六，不以組而以代表各量數組之組距中值由算術平均數之差乘次數焉。舉例以說明此公式算法如下：

表32

組距	中值 m	f	d	d^2	fd^2
10——14.99	12.5	1	—36.52	1333.7104	1333.71
15——19.99	17.5	2	—31.52	993.5104	1987.02
20——24.99	22.5	5	—26.52	703.3104	3516.55
25——29 99	27.5	8	—21.52	463.1104	3704.88
30——34 99	32.5	20	—16.52	272.9104	5458.21
35——39.99	37.5	25	—11.52	132.7104	3317.81
40——44.99	42.5	27	— 6 52	42.5104	1147.78
45——49.99	47.5	34	— 1.52	2.3104	78.55
50——54.99	52.5	42	3 48	12.1104	508.64
55——59.99	57.5	31	8.48	71.9104	2229.22
60——64.99	62.5	22	13.48	181.7104	3997.63
65——69.99	67.5	16	18.48	341.5104	5464.17
70——74.99	72.5	7	23.48	551.3104	3859.17
75——80.00	77.5	3	28.48	811.1104	2433.33
		N=243			Σfd^2=39036.67

因 $M=\frac{\Sigma fm}{N}=\frac{11912.5}{243}=49.02$

故 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}=\sqrt{\frac{39036.67}{243}}=\sqrt{160.64}=12.67$

公式七 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fm^2-(\Sigma fm)^2}{N^2}}$

f 爲次數

N 爲次數之和

m 爲量數

用此公式可直接　量數求出標準差，無先求算術平均數之必要，其演法如下：

設　　d 爲量數與實得算術平均數之差

則　　$d=m-M$

$$\frac{\Sigma fd^2}{N}=\frac{\Sigma f(m-M)^2}{N}=\frac{\Sigma f(m^2-2mM+M^2)}{N}$$

$$=\frac{\Sigma fm^2-2\Sigma fmM+\Sigma fM^2}{N}$$

$$=\frac{\Sigma fm^2}{N}-\frac{2\Sigma fmM}{N}+\frac{\Sigma fM^2}{N}$$

因　　$M=\frac{\Sigma fm}{N}$

則　　$$\frac{\Sigma fd^2}{N}=\frac{\Sigma fm^2}{N}-2\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2+\frac{\Sigma f\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2}{N}$$

$$=\frac{\Sigma fm^2}{N}-2\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2+\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2$$

$$=\frac{\Sigma fm^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2=\frac{N(\Sigma fm^2)}{N^2}-\frac{(\Sigma fm)^2}{N^2}$$

$$=\frac{N\Sigma fm^2-(\Sigma fm)^2}{N^2}$$

故　　$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}=\sqrt{\frac{N\Sigma fm^2-(\Sigma fm)^2}{N^2}}$$

舉例：

表33

組　距	中值 m	次數 f	fm	m²	fm²
10—14.99	12.5	1	12.5	156.25	156.25
15—19.99	17.5	2	35.0	306.25	612.50
20—24.99	22.5	5	112.5	506.25	2531.25
25—29.99	27.5	8	220.0	756.25	6050.00
30—34.99	32.5	20	650.0	1056.25	21125.00
35—39.99	37.5	25	937.5	1406.25	35156.25
40—44.99	42.5	27	1147.5	1806.25	48768.75
45—49.99	47.5	34	1615.0	2256.25	76712.50
50—54.99	52.5	42	2205.0	2756.25	115762.50
55—59.99	57.5	31	1782.5	3306.25	102493.75
60—64.99	62.5	22	1375.0	3906.25	85937.50
65—69.99	67.5	16	1080.0	4556.25	72900.00
70—74.99	72.5	7	507.5	5256.25	36793.75
75—80.00	77.5	3	232.5	6006.25	18018.75
		N=243		11912.50	623018.75

$$\sigma=\sqrt{\frac{N\Sigma fm^2-(\Sigma fm)^2}{N^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{243\times 623018.75-(11912.5)^2}{(243)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{151393556.25-141907656.25}{59049}}$$

$$=\sqrt{\frac{9485900}{59049}}=\sqrt{160.64}$$

$$=12.7$$

公式八　$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-c^2}\times i$$

f 爲次數

d' 爲量數與估計算術平均數之差

N 爲次數之總和

C 爲校正數

i 爲組距之長

用前四種公式求標準差，當計算時常遇有四五位以上之數字，殊覺煩瑣，宜得一縮減數字之簡法以求之爲佳，公式八卽應此需要者也。其計算法亦如求平均差所用之簡法，當求差數時，將每一組距視作一單位，其法原有兩種：一爲由實得算術平均數與各組量數間之差數求標準差，一爲由估計算術平均數與各組量數間之差數求標準差。因前者於計算時仍常遇有三四位以上之數字而後者較少，故簡法雖有二種，自以後者之應用爲廣。應用此法，先須假定含有實得平均數組之組距中値爲估計平均數，然後求各量數與估計平均數之差數之平方之算術平均數，此數亦可謂之爲標準差之平方，惟此標準差之平方乃由估計平均數求出者，不能無誤，自須用校正數校正之，吾人固知由估計平均數求出之差數之平均數如有錯誤，則其錯誤之數必爲正負差數相差之數之平均數，苟欲原數之正確，卽必以此數校正之，至若由估計平均數求出之差數之平方之算術平均數，錯誤之數，必爲正負差數相差之數之平均數之平方，故欲原數之正確，亦必以此數爲校正數校正之。由各量數與估計平均數之差數求出之標準差之平方既經校正後，乃須開方，所得結果爲假定組距爲 1 計算之標準差，尙須將此數乘以原組距之長，斯可得眞實標準差。

至公式八之由來係出於公式六，其演算方法如下：

因　$d=m-M$

$d'=m-E.M.$

$M=E.M.+C$

$\Sigma fd=o$

則　$M=m-d$

$E.M.=m-d'$

$E.M.+C=m-d$

$m-d'+C=m-d$

$d=m-m+d'-C=d'-C$

$d'=d+C$

$d'^2=(d+C)^2$

$$\Sigma fd'^2=\Sigma f(d+C)^2=\Sigma fd^2+2\Sigma fdC+N(C)^2$$

$$=\Sigma fd^2+N(C)^2$$

$$\frac{\Sigma fd'^2}{N}=\frac{\Sigma fd^2}{N}+\frac{N(C)^2}{N}=\frac{\Sigma fd^2}{N}+C^2$$

$$\frac{\Sigma fd^2}{N}=\frac{\Sigma fd'^2}{N}-C^2$$

但是　$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$

假定量數組距為1則 $C=\frac{\Sigma fd'}{N}$

故　$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-C^2}=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}$$

此處之標準差爲假定量數組距爲1所算出者

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-C^2}\times i=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}\times i$$

此處之標準差乃爲實得者

舉例如下以說明公式八之應用：

表34

組　距	次數 f	差數 d'	fd'	fd'²
10——14.99	1	—6	— 6	36
15——19.99	2	—5	—10	50
20——24.99	5	—4	—20	80
25——29.99	8	—3	—24	72
30——34.99	20	—2	—40	80
35——39.99	25	—1	—25	25
40——44.99	27	0	—125	
45——49.99	34	1	34	34
50——54.99	42	2	84	168
55——59.99	31	3	93	279
60——64.99	22	4	88	352
65——69.99	16	5	80	400
70——74.99	7	6	42	252
75——80.00	3	7	21	147
	N=243		442 —125 317	1975

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-C^2}\times i=\sqrt{\frac{1975}{243}-\left(\frac{317}{243}\right)^2}\times 5$$

$$=\sqrt{8.13-1.69}\times 5=\sqrt{6.44}\times 5$$

$$=2.538\times 5=12.7$$

（三）由各部分之標準差求全部之標準差　除上述求標準差之方法外，尚有由各部分之標準差以求全部之標準差之簡法；例如某紡織公司有甲乙兩廠，各廠工人工資之標準差均已求得，現欲計算全廠工人工資之標準差，似宜將兩廠工人工資分配情形歸併，製成一張工資分配表，依據此表計算標準差，但經此一番手續，既費時間，又極麻煩，最好能得一節時間而準確之方法，以省此一番手續。其法如下：

1. 設各部分標準差，在計算時用同一組距之長及估計平均數，則吾人求全部之標準差，應直接依下列公式：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f_1 d'^2_1+\Sigma f_2 d'^2_2+\cdots+\Sigma f_n d'^2_n}{N_1+N_2+\cdots+N_n}-\left(\frac{\Sigma f_1 d'_1+\Sigma f_2 d'_2+\cdots+\Sigma f_n d'_n}{N_1+N_2+\cdots+N_n}\right)^2}\times i$$

$f_1 f_2 \cdots\cdots f_n$ 爲各部分之次數

$d'_1 d'_2 \cdots\cdots d'_n$ 爲各部分由估計平均數求出之差數

N 爲次數之和

i 爲組距之長

此公式係由公式 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}\times i$ 化出，蓋以全部之次數爲各部分次數之和，故 $f=f_1+f_2\cdots+f_n$，又因各部分所用之估計平均數相同，故 $\Sigma fd'=\Sigma f_1 d'_1+\Sigma f_2 d'_2+\cdots\cdots+\Sigma f_n d'_n$, $\Sigma fd'^2=\Sigma f_1 d'^2_1+\Sigma f_2 d'^2_2+\cdots\cdots+\Sigma f_n d'^2_n$。

2. 設各部分標準差雖以同一組距計算，而估計平均數互不相同，則吾人欲求全部標準差，應先將不同之估計平均數變爲同一估計平均數，然後仍用上面公式。但欲同一不同之估計平均數，似須改變各部分次數分配情形，重求 $\Sigma f_1 d'_1 \Sigma f_1 d'^2_1$ 等，此仍爲費時而麻煩之工作，於是另定推演之方法如下：

假定甲部分估計平均數與乙部分估計平均數之差爲h，則欲將甲部分估計平均數改爲與乙部分相同之估計平均數，卽須將 d'_1 改爲 d'_1+h，於是吾人可化演等式如下：

$$\Sigma f_1(d'_1+h)=\Sigma f_1 d'_1+\Sigma f_1 h$$

$$\begin{aligned}\Sigma f_1(d'_1+h)^2&=\Sigma fd'^2_1+2\Sigma f_1 d'_1 h+\Sigma f_1 h^2\\&=\Sigma f_1 d'^2_1+2h\Sigma f_1 d'_1+N_1 h^2\\&=\Sigma f_1 d'^2_1+h(2\Sigma f_1 d'_1+N_1 h)\end{aligned}$$

由各部分不同之估計平均數求出之次數分配計算全部之標準差，較由各部分同一估計平均數求出之次數分配計算全部之標準差爲難。故須舉例以述明之，能明此者，則前者不難知矣。

設某工廠分甲乙兩部分，其工資分配情形如表35及36，吾人欲求該廠全體工資之標準差，其算法如下：

表35　　甲部分工人工資分配表

工資組 (以元計	人數 f_1	d'_1	$f_1d'_1$	$f_1d'^2_1$	估計平均數=17.5
5——9.99	80	—2	—160	320	$N_1=510$
10——14.99	90	—1	—90	90	$\Sigma f_1d'_1=210$
15——19.99	100	0	0	0	$\Sigma f_1d'^2_1=1450$
20——24.99	90	1	90	90	
25——29.99	80	2	160	320	
30——35.	70	3	210	630	
	510		—250 +460 210	1450	

表36　　乙部分工人工資分配表

工資組 (以元計)	人數 f_2	d'_2	$f_2d'_2$	$f_2d'^2_2$	估計平均數=22.5
5——9.99	30	—3	—90	270	$N_2=210$
10——14.99	40	—2	—80	160	$\Sigma f_2d'_2=-150$
15——19.99	50	—1	—50	50	$\Sigma f_2d'_2=590$
20——24.99	40	0	0	0	
25——29.99	30	1	30	30	
30——35.00	20	2	40	80	
	210		—122 + 70 150	590	

甲部分估計平均數比較乙部分估計平均數之差爲17.5－22.5＝－5，但因計算標準差時，須視組距單位爲1，故－5

當改為－1，由此吾人可應用改變不同一估計平均數之公式，以改變甲部分之 $\Sigma f_1d'_1$ 及 $\Sigma f_1d'^2_1$。

$$\Sigma f_1(d'_1+h)=\Sigma f_1d'_1+\Sigma f_1h=210+(-510)$$
$$=-300$$
$$\Sigma f_1(d'_1+h)^2=\Sigma f_1d'^2_1+h(2\Sigma f_1d'_1+N_1h)$$
$$=1150+(-1)\times(420+(-510))$$
$$=1450+90=1540$$

現可應用公式求某廠全體工資之標準差如下：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f_1d'^2_1+\Sigma f_2d'^2_2+\cdots+\Sigma f_nd'^2_n}{N_1+N_2+N_3}-\left(\frac{\Sigma f_1d'_1+\Sigma f_2d'_2+\cdots+\Sigma f_nd'_n}{N_1+N_2+\cdots+N_n}\right)^2}\times i$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1540+590}{510+210}-\left(\frac{-300+(-150)}{510+210}\right)^2}\times i$$

$$=\sqrt{\frac{2130}{720}-\left(\frac{-450}{720}\right)^2}\times 5$$

$$=\sqrt{2.96+3.9}\times 5=\sqrt{3.35}\times 5=1.83\times 5=9.15$$

即9·15元

如有疑此數即 9.15 不正確，不妨將兩部分之材料合併計算標準差如下：

表37

工資組（以元計）	人數 f	d'	fd'	fd'²
5——9·99	110	—3	—330	990
10——14 99	130	—2	—260	520
15——19.99	150	—1	—150	150
20——24·99	130	0	0	0
25——29·99	110	1	110	110
30——35	90	2	180	360
	N=720		Σfd'=—450	Σfd'²=2130

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}\times i=\sqrt{\frac{2130}{720}-\frac{-450}{720}}\times 5$$

$$=2.96+8.9=\sqrt{3.35}\times 5=1.83\times 5=9.15$$

卽9.15元

五 各種差之關係

凡統計之事實含有量數甚多，如其次數分配極爲對稱，或卽不對稱亦不甚偏歪，則平均差約當標準差五分之四，四分位差約當標準差三分之二，六倍標準差之距離，七倍半平均差之距離或九倍四分位差之距離約合全體量數百分之九十九；此種差數之關係比例率皆由經驗所得知也。今爲明此種比例率更較準確起見，列等式如下：—

$\sigma=1.2533$A.D.

$\sigma=1.4826$Q

A.D. $=.7979\sigma$

A.D. $=1.1843$Q

Q $=.6745\sigma$

Q $=.8453$A.D.

對於各種差之關係既已明瞭，則可便於校正任何一種差之錯誤，並當用多種差以顯示一事實分配之狀況時，可依上列之關係演算，無須一一求之也。

六 差異係數(Co-efficients of Dispersion)

對於兩種事實，欲比較其差異之量，若直接以其測量之全距，四分位差 平均差或標準差互相比較，所得結果，多不可靠，蓋因各測量所用之單位，常不相同，而所依據之集中量數不能盡等，竟欲以此種單位與集中量數所測量之差異數量作比較，是其參差不齊，謬誤自多。然則比較兩種測量之差異數量，非使其測量所用之單位

及所根據之集中量數變爲相同不可，而使其變爲相同之法卽須求出差異係數 求差異係數有兩種公式：

(一)披爾生公式 此公式爲披爾生氏發明，故名披爾生公式。

公式·

$$V=\frac{100\sigma}{M}$$

V 代表差異係數

以M除σ之結果，卽爲差異係數。其所以更用100乘之者，蓋使之化爲百分比率以便比較耳。

此種公式乃用以求標準差之差異係數者，至若平均差四分位差亦可用同樣法則求其差異係數；例如求平均差之差異係數，其公式爲$\frac{A.D.\times 100}{M,Mo或Md}$求四分位差之差異係數，其公式爲$\frac{\frac{Q_3-Q_1}{2}\times 100}{\frac{Q_3+Q_1}{2}}$惟此有須注意者，卽求某種差時係用某種集中量數，則求其差異係數時，亦必以該種集中量數爲除數；例如求標準差時，用算術平均數，則求差異係數時亦必用算術平均數。

舉例：

某學校某年招考新生，得投考者五十人，錄取二十人。投考者共得分數2076，其算術平均數爲41.52，標準差爲 19.7。錄取生共得分數 1389，其算術平均數爲69.45，標準差爲14.5。兩者之差異係數比較如下：

$$V=\frac{100\times 19.7}{41.52}=47$$

$$V=\frac{100\times 14.5}{69.45}=20$$

投考者之分數差異係數為 47，當錄取生之分數差異係數 20 二倍以上，可知錄取生之程度較投考者為齊整多也。

(二)桑戴克公式　桑戴克氏不贊成求差異係數直接用集中量數除差異數，而主張用集中量數之方根除差異數。其演式如下：—

公式：

$$V = \frac{100A.D.}{\sqrt{Md}}$$

舉例：

設有 A B 兩量數 A 量數之平均差為 4 呎，中點數為 12呎，B 量數之平均差為 48 呎，中點數為 144呎，其差異係數如下：

$$V_{A量} = \frac{100 \times 4}{\sqrt{12}} = \frac{400}{3.46} = 115.61$$

$$V_{B量} = \frac{100 \times 48}{\sqrt{144}} = \frac{4800}{12} = 400$$

由上兩式可知 B 量之差異係數為 400 當 A 量之差異係數 115.61 二倍有餘也。

用披氏及桑氏兩公式求差異係數，究以何者之結果為正確，未可斷言。惟就經驗所得，用披氏公式求差異係數者較桑氏公式為多，蓋用桑氏公式求單位不相同之兩量數之差異係數，有時所得結果不合理也；例如有AB 兩種量數，A 量數之平均差為 4 呎，中點數為 12呎，B 量數之平均差為 144 吋，中點數為 48 吋，兩種量數之平均差及中點數實相等（因一呎等於十二吋之故），是則兩量數之差異係數亦應相等，乃用桑氏公式求出差異係數如下，竟發現A B 兩種量數之差異程度相差甚遠，是其錯誤，甚為顯然。

$$V_{A量}=\frac{100\times4}{\sqrt{12}}=\frac{400}{3.46}=115.61$$

$$V_{B量}=\frac{100\times48}{\sqrt{144}}=\frac{4800}{12}=400$$

然若用披氏公式演算 AB 兩種量數之差異係數如下，則似桑氏公式所致之錯誤可以避免：

$$V_{A量}=\frac{100\times4}{12}=\frac{400}{12}=33.3$$

$$V_{B量}=\frac{100\times48}{144}=\frac{4800}{144}=33.3$$

由上所述則吾人求差異係數比較上自以用披爾生公式爲宜。

七　偏斜係數 (Coefficients of Skewness)

差異係數乃用以比較兩種事實對稱或近於對稱之次數分配之程度者也。若欲比較兩種事實次數分配偏斜之度，則必須求偏斜係數，求偏斜係數之公式亦有二種：

(一)披爾生公式

$$Sk=\frac{M-Mo}{\sigma}$$

或 $$Sk=\frac{3(M-Md)}{\sigma}$$

因 $$Sk=\frac{M-(M-3(M-Md))}{\sigma}$$

Sk 代表偏斜係數

(二)于爾公式

$$Sk=\frac{(Q_3-Md)-(Md-Q_1)}{Q}$$

或 $$Sk=\frac{Q_1+Q_3-2Md}{Q}$$

取此兩種公式相較，究以何者應用爲廣，依經驗所得，則推前者。兩種公式須如何斯可藉以辨次數之爲常態分配(symmetrical distribution)，抑爲偏態分配(asymmetrical distribution) 則視式中$M-Mo$, $M-Md$或$(Q_3-Md)-(Md-Q_1)$ 所致之結果以爲定。如$M-Mo$, $M-Md$或$(Q_3-Md)-(Md-Q_1)$ 所得之商數爲零，次數之分配卽爲對稱，可稱此種分配爲常態之次數分配。若 Md 之數小於M或Mo，或$(Md-Q_1)$之數小於(Q_3-Md)，以其求出之偏斜係數必爲正，所謂正者卽小量數之端高於大量數之端，此種分配可稱爲正的偏態之次數分配。若Mo或Md之數大於M，或$(Md-Q_1)$ 之數大於(Q_3-Md)以其求出之偏斜係數必爲負，所謂負者卽大量數之端高於小量數之端，此種分配可稱爲負的偏態之次數分配。至偏斜係數之值雖有正負，總在 ±2 之間，而實際測量之時鮮有能過 ±1 者也。玆舉例如下以明之：

表38 某廠工人工資之分配

工資(以月計) 組距	中值 m	人數 f	d'	fd'	fd'²
元——元					
10——14.99	12.5	1	−6	− 6	36
15——19.99	17.5	2	−5	−10	50
20——24.99	22.5	5	−4	−20	80
25——29.99	27.5	8	−3	−24	72
30——34.99	32.5	20	−2	−40	80
35——39.99	37.5	25	−1	−25	25
40——44.99	42.5	27	0	0	0
45——49.99	47.5	34	1	34	34
50——54.99	52.5	42	2	84	168
55——59.99	57.5	31	3	93	279
60——64.99	62.5	22	4	88	352
65——69.99	67.5	16	5	80	400
70——74.99	72.5	7	6	42	252
75——80.00	77.5	3	7	21	147
		N=243		422 −125 Σfd'=317	Σfd'²=1975

因 $$M = E.M. + \frac{\Sigma fd'}{N} \times i = 42.5 + \frac{317}{243} \times 5$$

$$= 42.5 + 6.52 = 49.02$$

$$Md = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times c = 45 + \frac{121.5 - 83}{34} \times 5$$

$$= 45 + .99 \times 5 = 49.95$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} \times i = \sqrt{\frac{1975}{243} - \left(\frac{317}{243}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{8.13 - 1.69} \times 5 = 12.7$$

故 $$Sk = \frac{3(M - Md)}{\sigma} = \frac{3 \times (49.02 - 49.95)}{12.7}$$

$$= \frac{-2.79}{12.7} = -.22$$

因 $$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i = 35 + \frac{60.75 - 36}{25} \times 5$$

$$= 35 + .99 \times 5 = 39.95$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times i = 55 + \frac{182.25 - 164}{31} \times 5$$

$$= 55 + .59 \times 5 = 57.95$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{57.95 - 39.95}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

故 $$Sk = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Md}{Q} = \frac{39.95 + 57.95 - 2 \times 49.95}{9}$$

$$= \frac{97.9 - 99.99}{9} = \frac{-2}{9} = -.22$$

由上式求出之偏斜係數，可知工資分配爲負的偏態形。

八　羅倫曲線(The Lorenz Curve)

吾人欲比較兩事實次數分配之差異程度，若分配爲對稱，則計算差異係數；若分配爲不對稱；則計算偏斜係數；前已言之。至吾人不欲得一數字的測度，僅欲比較兩事實全體次數分配差異之大致情形，則可用一種差異曲線。此線爲羅倫博士 (Dr. Lorenz) 所發明，故名之曰羅倫曲線。此線最大之功用爲研究財富之分配，他若研究土地工資收入等之分配，亦可用之。羅倫曲線之繪法可參閱圖53便知之矣。

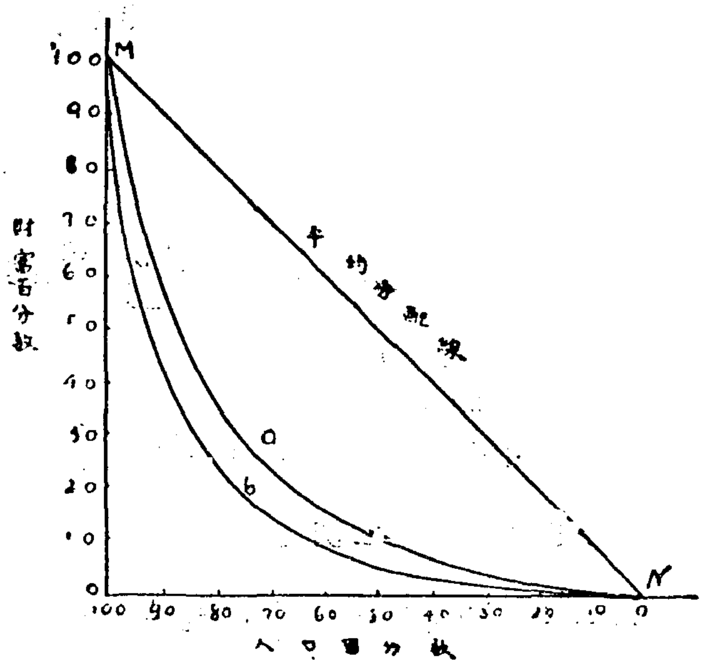


圖 53

假設某城人民之財富，平均每人所有相等，可畫一直線MN表示之，此一直線卽平均分配線(Line of Equal Distribution)。但實

際財富分配，豈可各人所攤完全相等，其分配情形，往往可以表示之以a線b線等曲線。顧欲辨其分配之程度何若，則視曲線離平均分配線之遠近以爲定，凡曲線離平均分配線愈近者，則所表示財富之分配愈均勻，離平均線愈遠者，則所表示財富之分配乃愈不齊；此僅就財富而言。如欲研究土地工資收入等分配情形，亦可按照此例行之。

第五節

相關量數

吾人對於一事實之變量，欲知其集中程度，必須研究集中量數，欲知其分配程度，必須研究差異量數，若欲知其與他種事實之變量相關程度，則須研究相關量數，蓋相關量數卽表明兩種或兩種以上事實相關之量數也。此所謂相關者，卽當某一事實之量有變動時，其他事實之量亦有所感應而生變動焉。相關量數之種類有三：

一。正的相關，又曰直接相關 (Positive Correlation or Direct Correlation). 在兩種事實變量中，此有一量增加時，彼亦有一量隨之增加，此有一量減少時，彼亦有一量隨之減少，此種關係稱之曰正的相關，或直接相關；譬如某物批發價漲，則零售價亦漲，批發價落，則零售價亦落，卽其例也。正的相關可以下列圖式表明之。

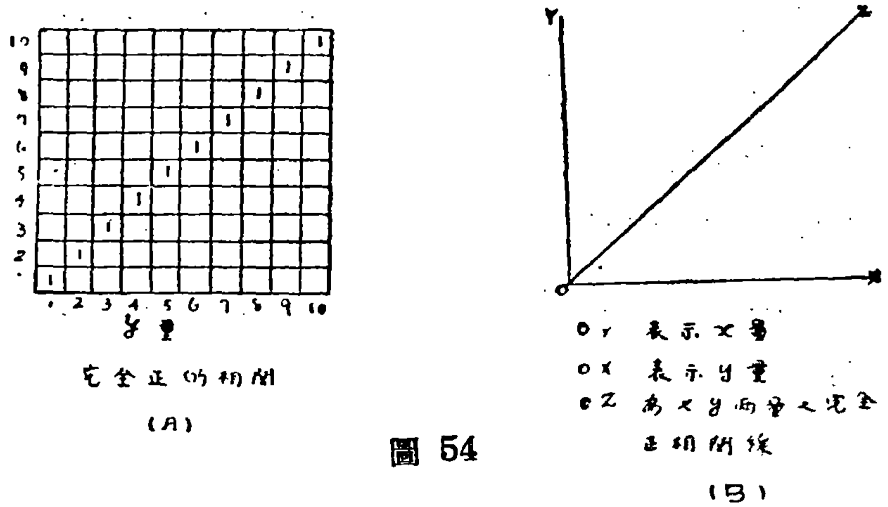


圖 54

二. 負的相關，又曰相反相關 (Negative Correlation or Inverse Correlation)。 在兩種事實變量中，當此有一量增加時，彼有一量反因而減少，此有一量減少時，彼有一量反因而增加，例如米之產量增加，價反下落，產量減少，價反上漲；此等變動之關係，因趨勢在反對的方向，故謂為負的相關，或相反的相關。此種相關可用下列圖式表明之：

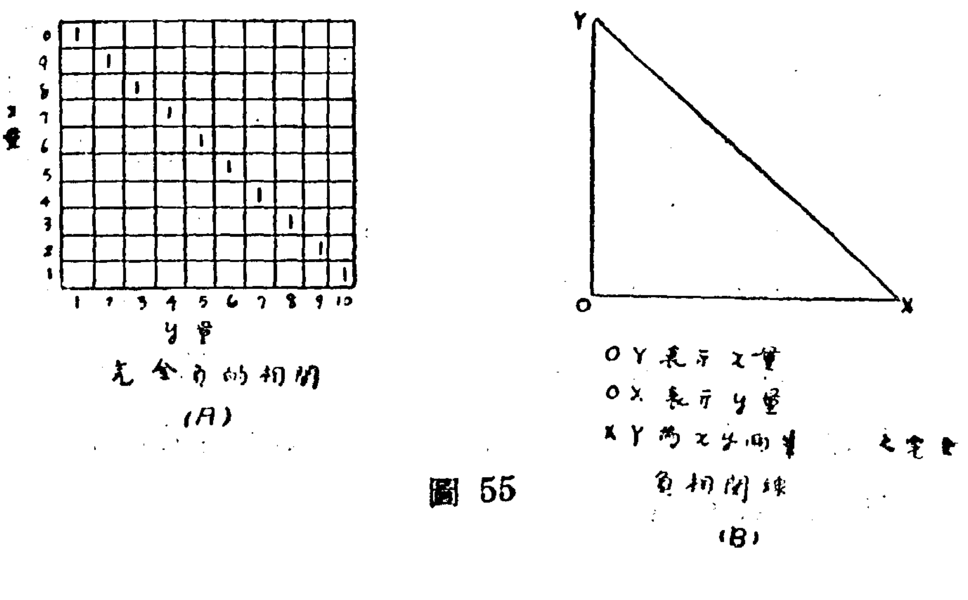
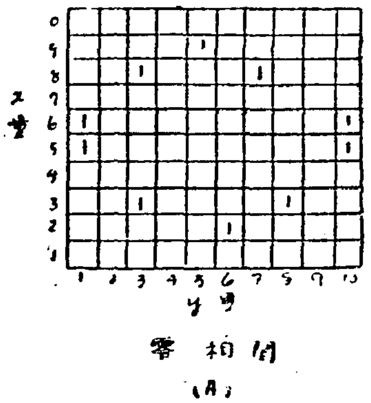


圖 55

三. 零相關 (Zero Correlation). 在兩種事實變量之中，當此量顯增減之變動時，他量不發生影響，他量有增減之變動時，此量不發生影響；此等事實之變量可謂無關係，故稱之曰零相關。此種相關可以下列圖式表明之：



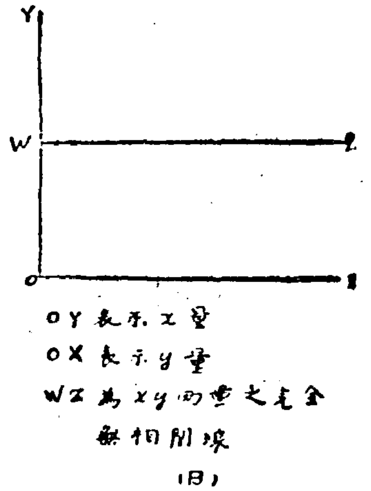


圖 56

惟相關之為正的或負的抑無相關，此非僅賴能繪以上各種圖形，卽可知之；蓋兩事實之相關往往不能以一簡單的直線而以形成一波浪狀之線表示之，無論何人頗難辨其相關為正為負抑為無相關，是故必須用求相關量數之各種方法以尋出兩事實之相關程度，能尋出兩事實之相關程度，則相關之為正或負抑無相關必易辨矣。求相關量數之方法甚多，可分為兩大類以說明之。

1. 由變量的事實求相關。 所謂變量的事實卽一事實能於其分量加以精密之測量者也。由此種事實求相關之方法，舉其最通用者言之，可分為五種：

(1)相應離差法 (The method of concurrent deviation).

(2)乘積率法(Product-moment method).

(3)相關比率(Correlation ratio).

(4)各種等級法(Methods of ranks).

(5)異號差數對數法(The method of unlike signed pairs.)

2.由品質的事實求相關．　所謂品質的事實者乃不可爲精密測量之事實也。由此種事實求相關之方法，較通用者爲均方相關法(The method of mean square contingency).

關於以上所舉之各種方法，分述如後。

一．相應離差法

對於比較短時期之兩種事實，求其相關程度，有最簡單之一法卽相應離差法。此法乃將兩事實之變量，依時間之先後順次排列，在每一事實以後時間之變量，比較前者如增多，則於以後時間之變量之旁，畫一「＋」號，如減少，則畫一「－」號，如未增減，則畫一「○」號，以此類推直至將各變量比較完畢爲止；然後將兩事實之變量逐項比較，若在任何一時間，兩事實之兩項變量均爲「＋」或均爲「－」，是曰相應，一爲「＋」一爲「－」是曰不相應，有一時間相應，可記相應一分，有二時間相應則記相應二分，不相應亦如之，依不相應之時間數而記不相應之分數，若在一時間有一項變數爲中性，卽其旁有「○」號者，或二者均爲中性，則相應方面與不相應方面各加半分，如此行之，至兩事實各項量數比較畢，乃觀相應與不相應之分數孰多，取其多者爲相應離差數，以C代表之，至其係數之爲正爲負一依相應之性質而定，若相應者爲正，則係數之記號亦爲正，所以表示二者之起伏步驟一致也。若相應者爲負，則係數之記號亦爲負，所以表示二者之起伏相反也。故以R爲相互關係數，N爲比較項數，其公式如下：

$$R=\pm\sqrt{\pm\frac{2C-N}{N}}$$

此處所用±號之意：卽公式中之C如爲相應者，則根號之外用「＋」號；如爲不相應者，則根號之外用「－」號。

舉例:

表39 美國之眞實工資與工人生產率指數

年代	眞實工資 指數	眞實工資 後期數與前期數差數之記號	工人生產率 指數	工人生產率 後期數與前期數差數之記號	相應分數	不相應分數
1880	55		81			
1881	58	+	61	—		1
1882	58	○	78	+	.5	.5
1883	63	+	69	—		1
1884	70	+	76	+		
1885	74	+	74	—		1
1886	76	+	72	—		1
1887	80	+	69	—		1
1888	77	—	77	+		1
1889	81	+	83	+	1	
1890	85	+	71	—		1
1891	84	—	86	+		1
1892	91	+	72	—		1
1893	90	—	66	—	1	
1894	97	+	63	—		1
1895	97	○	77	+	.5	.5
1896	105	+	79	+	1	
1897	103	—	79	○	.5	.5
1898	100	—	85	+		
1899	95	—	83	—	1	
1900	91	—	83	○	.5	.5
1901	94	+	78	—		1
1902	91	—	95	+		1
1903	94	+	88	—		1
1904	93	—	91	+		1
1905	96	+	100	+	1	
1906	97	+	108	+	1	
1907	95	—	97	—	1	
1908	98	+	90	—		1
1909	93	—	99	+		1
1910	94	+	100	+		1
1911	100	+	95	—		1
1912	96	—	108	+		1
1913	100	+	100	—		1
1914	102	+	98	—		1
1915	103	+	106	+	1	
1916	101	—	106	○	.5	.5
1917	95	—	109	+		1
1918	105	+	108	—		1
1919	111	+	99	—		1
1920	107	—	103	+		1
					13.5	28.5

因28.5較多於13.5故取28.5爲C.

因 28.5 爲不相應分數故其係數之記號爲「—」。

依公式計算相關係數如下：

$$R=-\sqrt{\frac{2\times 28.5-40}{40}}=-\sqrt{\frac{57-40}{40}}=-\sqrt{\frac{17}{40}}$$

$$=-\sqrt{.43}=-.65$$

—.65可以表示工資與生產率之負相關程度

相應離差法之最大缺點，卽在只算各以後一時期之量數離前一時期之量數之差之方向，而不算離差之大小。若後一時期之量數比前一時期之量數大，所求得兩事實之相關程度卽爲正，反之，卽爲負，兩者相差之數固一律看待也。是故法雖簡易學者不恆用之。

二. 乘積率法

求相關量數最通用之方法爲乘積率法。以此種方法求相關時，或用一種相關表(Correlation table)，或不用相關表。若用相關表，則不僅可求相關量數之係數 (Coefficient of correlation)，且可求消長係數(Regression coefficient).不用相關表，祇能求相關係數，不能求消長係數。玆詳爲說明如後。

甲. 就相關表計算相關之方法

此種計算方法之步驟可分爲三·第一步製 相關表，第二步求相關係數，第三步求消長係數。

1. 製 相關表. 未製相關表之先，須決定兩種事實各量數分配組距之大小及界限，並擬定一事實之量爲X量，又一事實之量爲Y量。X與Y量既經擬定，乃繪一格子表卽所謂相關表，將Y量各組距沿表之左端之豎線排列，量數自小而大，由下而上，復將X量各組距沿表之頂線或底線排列，量數自小而大，由左

而右，更將兩事實之各對量數之次數記入相當方格中（可參閱表40）。

2. 求相關係數。 相關表製成之後，即可求相關係數，所謂相關係數者，乃表明兩事實之相關程度之量數也。相關係數普通以 r 代之，英人批爾生曾作相關係數之公式如下：

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$$

N為各事實測量之次數總數

x為X量各量數與其平均數之差數

y為Y量各量數與其平均數之差數

σ_x為X量之標準差

σ_y為Y量之標準差

Σxy 為X量與Y量各相當差數乘積之和

設 x'為X量各量數與其估計平均數之差數

y'為Y量各量數與其估計平均數之差數

C_x為 x'之校正數，蓋欲將x'改成x，必得以一數校正之此數即C_x.

C_y為y'之校正數，蓋欲將y'改成y必得以一數校正之此數即C_y

則 $x'=x+C_x$

$y'=y+C_y$

$\Sigma x'y'=\Sigma(x+C_x)(y+C_y)$

$=\Sigma xy+C_x\Sigma y+C_y\Sigma x+\Sigma C_xC_y$

因 $\Sigma x=0$

$\Sigma y=0$

故 $\Sigma x'y'=\Sigma xy+0+0+\Sigma C_xC_y$

$=\Sigma xy+\Sigma C_xC_y$

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}\text{ 可變為 }\sigma=\frac{\Sigma x'y'-NC_xC_y}{N\sigma_x\sigma_y}$$

就表40以說明上列公式應用之步驟。

(1)將各橫行之次數相加，列入f_y欄，各豎行之次數相加，列入f_x欄；再將f_y或f_x欄各次數相加，所得之和，列於f_y與f_x相交之方格中，例如N＝4565之地位。

(2)估計各量數分配含有平均數之組距，如表40之X量含有平均數之組距為61－65，Y量含有平均數之組距為91—100。

(3)以各量組距中値與各量估計平均數之間之數為差數，此種差數因每一組距作一單位計，故為1,2,3,－1,－2,－3等數。

(4)以各量之次數與其相當之差數相乘，求 f_yy' 及 f_xx' 如X量之次數 1 乘－11求得積數－11，Y量之次數 4 乘 5 求得積數20等。

(5)用代數法將 f_xx' 及 f_yy' 行之各數分別相加，求其總和，即 $\Sigma f_xx'$ 如－2436，及 $\Sigma f_yy'$ 如－370。

(6)以N除 $\Sigma f_xx'$ 求校正數 C_x，並以N除 $\Sigma f_yy'$ 求校正數C_y。

(7)用 x' 乘 f_xx' 得 $f_xx'^2$，將 $f_xx'^2$ 行各數相加得 $\Sigma f_xx'^2$。復用 y' 乘 f_yy' 得 $f_yy'^2$，將 $f_yy'^2$ 行各數相加得 $\Sigma f_yy'^2$。

(8)求σ_x及σ_y。

(9)求 $\Sigma x'y'$，其方法有二：

A.先求每一橫行各量數與X量之估計平均數之差數之和得 $\Sigma x'$，如－10＋(－32)＋(－6)＋(－4)＝－52，再求與各該橫行相交之直行組距與Y量之估計平均數之差數y'如－8，以之乘 $\Sigma x'$ 如－52，得各該橫行之 $\Sigma x'y'$ 如－416；然後將各橫行之 $\Sigma x'y'$ 盡行求出而加之，即得全體量數之 $\Sigma x'y'$ 如 26501。

B.先將各格之次數乘其所屬行之x'及y'，求各格之 Σx'y' 如 1×5×2=10，將此數書於格之右上角；次將每一橫行之各格之 Σx'y' 相加，得各該橫行之 Σx'y' 如 10+15+40=65；然後將各橫行之 Σx'y' 相加，所得之數即全體量數之 Σx'y' 如 26501。

相關表

表 40.　某月4565工人能製紙傘之數

某月4565工人能製手紙之數

Y \ X	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70	71-75	76-80	81-85	f_y	y'	$f_y y'$	$f_y y'^2$	Σx'y'
141-150														1	1	2	4	5	20	100	65
131-140												2	3	45	176	18	242	4	968	3517	2795
121-130									1	1	2	9	65	331	156	5	559	3	1767	5301	3777
111-120										1	2	55	323	165	40	2	650	2	1260	2520	1526
101-110								1	2	9	22	157	67	24	5	1	648	1	648	648	176
91-100							1	3	9	34	226	75	14	76	4		591	0	4663	0	0
81-90						1	1	9	45	200	174	57	12	29	1		516	-1	-516	516	677
71-80							1	12	126	145	96	20	1	3			409	-2	-818	1636	1560
61-70						3	45	141	110	45	27	1	5	1			360	-3	-1080	3240	3363
51-60				1	3	14	56	44	57	17	13	2	1				213	-4	-852	3408	3274
41-50				2	5	51	47	28	19	8	4	1					166	-5	-830	4150	3945
31-40			2	1	13	32	24	15	2	3	1						93	-6	-558	3348	3012
21-30		1	2	3	9	7	9	2		1							35	-7	-245	1715	1512
11-20		1		4		1		1									7	-8	-56	448	416
1-10	1		1														2	-9	-18	162	180
f_x	1	2	5	11	30	111	170	277	391	520	614	665	617	709	414	28	4565 (N)	-10	-5035 4663 -370	31124	26501
x'	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4					
$f_x x'$	-11	-20	-45	-88	-210	-666	-850	-1108	-1173	-1040	-614	0	617	1418	1292	112	3359 -5825 -2436				
$f_x x'^2$	121	200	405	704	1470	3996	4250	4432	3519	2080	614	0	617	2836	3726	448	34416				

(10)應用公式求相關係數。

相關係數之數值如為 1，即表明完全正相關。若由1次第減少為 .90, .81, .76, .01 等，則關係密切之程度亦逐漸減少，迨減至

0 時，卽全無相關之可言。至相關係數如為－1，卽表明完全負相關，若由－1在負方面次第減少數值，則相反之關係逐漸減少，迨減至零時，相反之關係完全消失矣。

例如

$$\Sigma x'y' = 26501$$

$$N = 4565$$

$$C_x = \frac{\Sigma f_x x'}{N} = \frac{-2436}{4565} = .53$$

$$C_y = \frac{\Sigma f_y y'}{N} = \frac{-370}{4565} = .08$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma f_x x'^2}{N} - C_x^2} = \sqrt{\frac{29418}{4565} - (.53)^2} =$$

$$\sqrt{6.44 - .29} = \sqrt{6.15} = 2.48$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma f_y y'^2}{N} - C_y^2} = \sqrt{\frac{31124}{4565} - (.08)^2}$$

$$= \sqrt{6.85 - .01} = \sqrt{6.84} = 2.62$$

$$r = \frac{\Sigma x'y' - NC_xC_y}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{\frac{\Sigma x'y'}{N} - C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{26501}{4565} - .53 \times .08}{2.48 \times 2.62} = \frac{5.81 - .04}{6.5} = \frac{5.77}{6.5} = .89$$

以上求法，雖係當組距為1，計算相關係數，然其所得結

果，即吾人欲求依原有組距之相關係數。茲演式如下以明之

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma f_x x'^2}{N}-C_x^2}\times i=2.48\times4=9.92$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma f_y y'^2}{N}-C_y^2}\times i=2.62\times9=23.58$$

$$C_x=.53\times4=2.12$$

$$C_y=.08\times9\equiv.72$$

$$\Sigma x'y'=26501\times4\times9=954036$$

$$r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\frac{954036}{4565}-2.12\times.72}{9.92\times23.58}$$

$$=\frac{208.97-1.53}{233.91}=\frac{207.44}{233.91}=.89$$

.89與1之差僅爲.11是工人製傘與製手杖之能力正的相關程度頗大

3.求消長係數。　相關係數僅能表明兩事實相關之有無及相關程度之高低，但不能表明其各量彼此影響之程度，因此消長係數之計算尙焉。蓋兩事實之量數中，有一量數發生變化，即能影響他量，若徒知兩事實全體量數之相關程度，而不知其中各量數互爲消長之關係，則相關程度猶未澈底明瞭也。至若求消長係數，須應用求Y量依X量爲消長之係數之公式及X量依Y量爲消長係數之公式。前者爲$b_1=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$。後者爲$b_2=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$。依此兩式求得X及Y量互爲消長之係數，然後求兩相關線，視其斜度可知兩事實各量消長之情形。但求此相關線不宜僅憑觀察判斷之力畫出，亦必須依一定之公式以繪之。假設RR'爲X量依Y量消長之直線，CC'爲Y量依X量爲消長之直線，求RR'

直線之公式爲$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$。求CC'直線之公式爲$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$。式中之x代表X量之任一量數與其平均數之差數。y代表Y量之任一量數與其平均數之差數。今用表40以說明消長係數之求法。

$$b_1=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=.89\times\frac{2.62}{2.48}=.94$$

$$b_2=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=.89\times\frac{2.48}{2.62}=.84$$

·94卽Y量依X量之消長係數，其意爲X量有一單位之變化時，Y量卽有 94之變化，

·84卽X量依Y量之消長係數，其意爲Y量有一單位之變化時，X量卽有·84之變化。

$$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y=.84y$$

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x=.94x$$

設　x_1爲X量中任一量數
y_1爲Y量中任一量數
M_x爲X量之實得平均數
$E.M._x$爲X量之估計平均數
M_y爲Y量之實得平均數
$E.M._y$爲Y量之估計平均數

則　$M_x=E.M._x+\frac{\Sigma f_x x'}{N}\times i=63+(-.53)\times 4$
$=65.12$

$M_y=E.M._y+\frac{\Sigma f_y y'}{N}\times i=95.5+(-.08)\times 9$
$=96.22$

$$x=x_1-65.12$$
$$y=y_1-96.22$$
$$x_1-65.12=.84(y_1-96.22)$$
$$x_1=.84(y_1-96.22)+65.12$$
$$y_1-96.22=.94(x_1-65.12)$$
$$y_1=.94(x_1-65.12)+96.22$$

依上算式，吾人卽可在X量中任指定一數值求出Y量相當之數值，在Y量中任指定一數值，卽可求出X量相當之數值；譬如x_1爲80，則y_1爲110.21，y_1爲80，則x_1爲51.5，其求法如下：

$$x_1=.84(y_1-96.22)+65.12=.84\times(115-96.22)+65.12$$
$$=15.78+65.12=80.9$$
$$y_1=.94(x_1-65.12)+96.22=.94\times(80-65.12)+96.22$$
$$=13.99+96.22=110.21$$

若將Y量之任何數值每減少10單位，則其相當之X量數值必減少.84×10=8.4，X量之數值每減少10單位，則具相當之Y量之數值必減少.94×10=9.4；因此可列表如下：

表 41

(甲)
X 依 Y 消長

Y	X
115	80.9
110	76.7
100	68.3
90	59.9
80	51.5
70	43.1
60	34.7
50	26.3
40	17.9
30	9.5

(乙)
Y 依 X 消長

X	Y
80	110.21
70	100.81
60	91.41
50	82.01
40	72.61
30	63.21
20	53.81

由甲表所列之各相對數值，於其中任取兩對以兩點表示之，連接此兩點以一直線卽RR'線（閱圖57）。R點在Y量爲30，X爲95，R'點在Y爲115，X爲80.9。表甲之其餘各對數值均可落在此直線上。同樣於表乙任取兩對數值，以兩點表示之，連接此兩點以一直線卽CC'線（閱圖57）。C點在X量爲20在Y爲53.81，C'點在X爲80，在Y爲110.21。此兩直線RR'及CC'相交於中央點M。Mx爲65.12。My爲96.22就此兩線之位置卽可看出X及Y之相關情形。

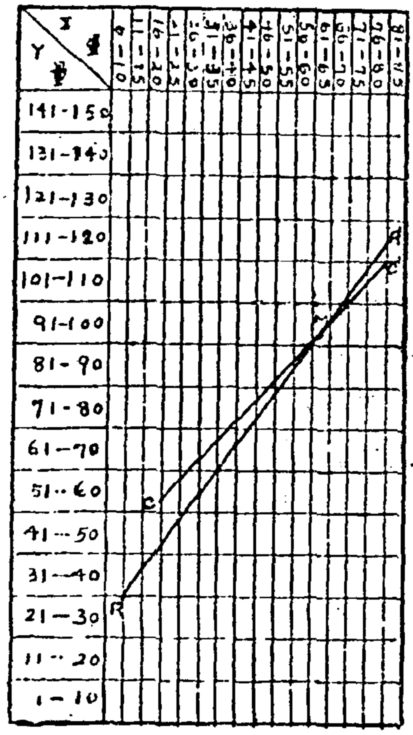


圖 57

乙。　不列相關表計算相關之方法

遇量數甚少，而須從速計算其相關時，以不列相關表能計算r爲最佳。此種求r之方法，所應用公式如下：—

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}$$

x爲X事實之任何量數與其全體量數之平均數之差數

y爲Y事實之任何量數與其全體量數之平均數之差數

此公式係由公式$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$變來，因$N\sigma_x\sigma_y=N\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}\cdot\frac{\Sigma y^2}{N}}$

$=N\sqrt{\frac{\Sigma x^2\times\Sigma y^2}{N^2}}=\sqrt{\Sigma x^2\cdot\Sigma y^2}$之故。茲將某地十工廠之工人所銷費鹽量及糖量作為兩種事實，以求其相關之步驟如下：—

1. 編製一次數表（如表42），將各工廠工人所銷費鹽量及糖量列在XY兩行內。
2. 求鹽糖每一銷費量之平均數。
3. 求x及y。
4. 求x^2及y^2。
5. 求xy如$(-9\ \times(-8)=72,(-5)\times(-3)=15$等。
6. 將xy行各數用代數法相加求 Σxy。
7. 將求得各數代入公式。

表 42

工廠	鹽量 X	糖量 Y	x	y	x^2	y^2	xy
甲	20	30	—9	—8	81	64	72
乙	24	35	—5	—3	25	9	15
丙	25	36	—4	—2	16	4	8
丁	26	37	—3	—1	9	1	3
戊	27	28	—2	—10	4	100	20
己	28	39	—1	1	1	1	—1
庚	29	41	0	3	0	9	0
辛	34	38	5	0	25	0	0
壬	35	46	6	8	36	64	38
癸	42	50	13	12	169	144	156
	10)290	10)380			366	396	321
	29	38					

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\cdot\Sigma y^2}}=\frac{321}{380.7}=.84$$

三. 相關比率

用乘積率法求出二量之相關，可稱爲直線相關 (Rectilinear Correlation— 如圖 58 所示 —)蓋如以二量編成相關表,則連接表

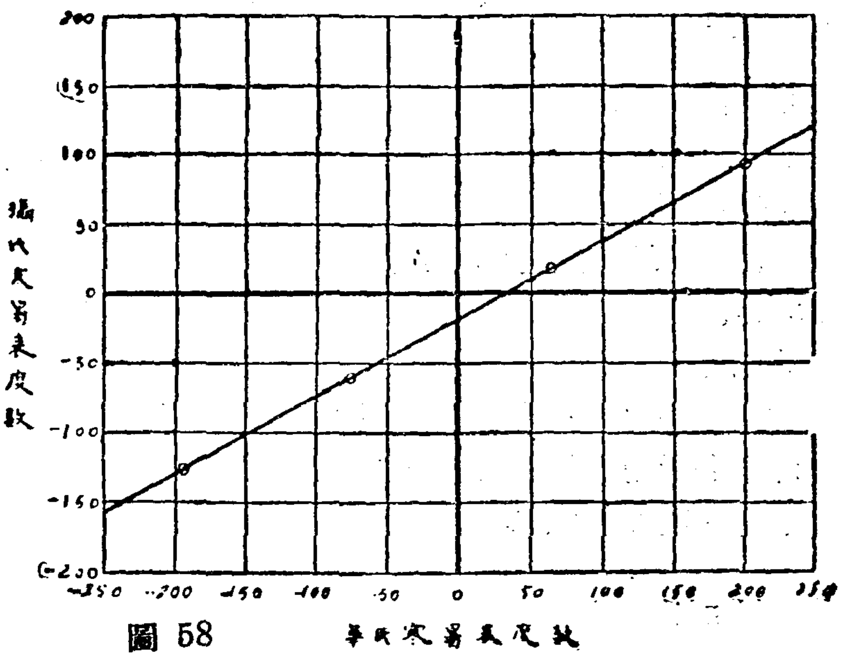


圖 58

直　線　相　關

中各行量數平均點所成之線，近於直線故也。然若列一相關表，其中各行量數平均點聯成之線，爲非直線(如圖59所示)，設由乘積率法以求此種量數之相關係數，則其所表示二量之相關程度，將陷於錯誤。故遇此種非直線相關(Nonrectilinear Correlation)之量數，欲求其相關程度，即須用相關比率法，用乘積率法求出之相關係數以 r 代表之，而相關比率則通常以η(讀如也他eta)表示之，其公式如下:

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]}{N}}}{\sigma_y}$$

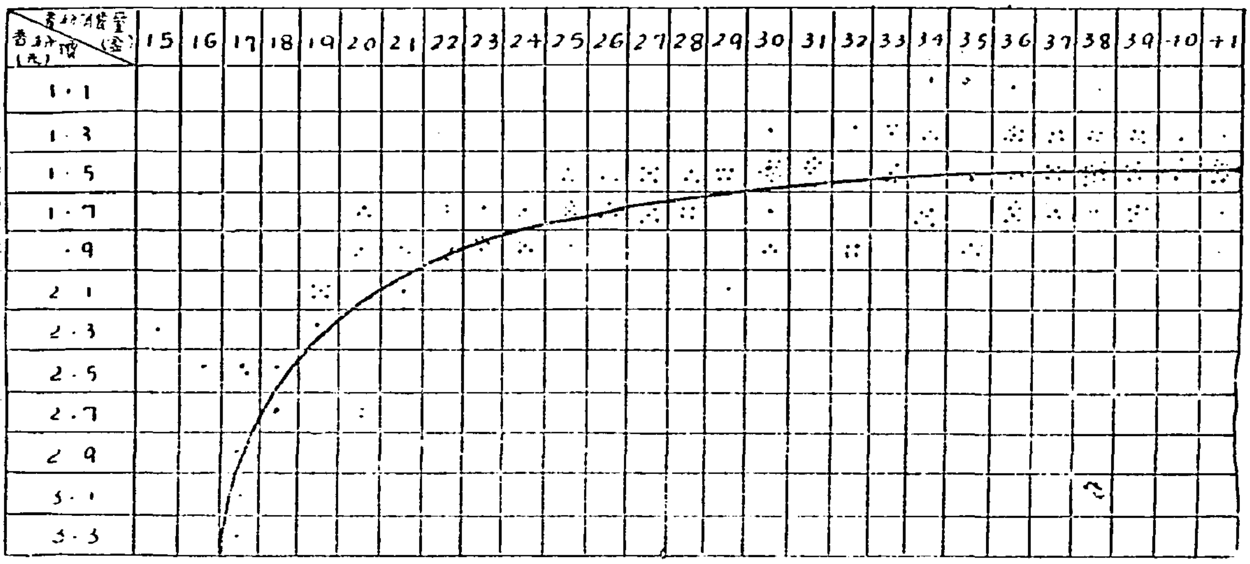


圖 59 非直線相關

S爲總和之記號

n_x爲X事實每一量數所有次數總數

$\bar{y}_x$爲X事實每一量數與Y事實各量數相交之點所含有之量數之和之平均數

$\bar{y}$爲Y事實各量數之平均數

n 爲量數所有次數總數

σ_y爲Y事實各量數之標準差

用表43說明求η之方法，其步驟爲

1. 列兩種事實於一相關表。
2. 將表中X事實各量數所有次數相加求n_x，Y事實各量數所有次數相加求n_y。
3. 用算術平均法求X事實每一量數與Y事實各量數相交之點所含有之量數之平均數卽$\bar{y}_x$。
4. 求Y事實各量數之平均數卽$\bar{y}$。
5. 求Y事實各量數之標準差σ_y。

6. 求$n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2$

7. 將各$n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2$相加求$S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]$。

8. 用σ_y除$\sqrt{\frac{S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]}{N}}$卽得相關比率$\eta$。

表 43

X代表香粉銷售量(以全計)　Y代表香粉價(以元計)

Y \ X	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	$n_y=f$	d_y	fd_y	fd_y^2
1.1																						1						1	-3	-3	9
1.3																1		1	3	3		7	4	4	5	1	2	31	-2	-62	124
1.5											3	3	5	3	5	9	6	2	5		1	2	5	9	5	2	8	73	-1	-73	73
1.7						3		2	1	3	7	3	5	4		1				5		6	3	2	5	2	1	53	0	0	0
1.9						3	2	7	4	5	2					3		4			3						1	34	1	34	34
2.1					5		1								1										1			8	2	16	32
2.3	1				1																							2	3	6	18
2.5		1	2	1																								4	4	16	64
2.7				1		2																						3	5	15	75
2.9			1																									1	6	6	36
3.1			1																									1	7	7	49
3.3			1																									1	8	8	64
n_x	1	1	5	2	6	8	3	9	5	6	12	6	10	7	6	14	6	7	8	8	4	16	12	15	16	5	12	212 (N)		108 -138 -30	578
$\bar{y}_x$	2.3	2.5	2.86	2.6	2.01	2.03	1.97	1.86	1.96	1.83	1.73	1.6	1.5	1.61	1.6	1.57	1.5	1.7	1.53	1.55	1.5	1.57	1.55	1.49	1.54	1.54	1.52	$\bar{y}=Em_y+\frac{\Sigma fd_y}{N}\times i$			
$\bar{y}_x-\bar{y}$	.82	1.02	1.38	1.12	.6	.55	.49	.38	.38	.35	.25	.12	.02	.13	.12	.11	.02	.22	[illegible]	.07	32	-.01	0	.01	.06	.06	.04	$=1.7+\frac{-30}{212}\times 2=1.48$			
$(\bar{y}_x-\bar{y})^2$	.67	1.04	1.9	1.25	.36	.3	.24	.14	.14	.12	.06	.01	.0004	.02	.01	.01	.0004	.05	.003	.005	.10	.0001	0	.0001	.004	.004	.002				
$n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2$	.67	1.04	9.5	2.50	2.16	2.4	.72	1.26	.70	.96	.72	.06	.004	.14	.06	.14	.002	.35	.02	.04	.4	.002	0	.002	.06	.02	.02	$S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]=23.95$			

因
$$\sqrt{\frac{S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]}{N}}=\sqrt{\frac{23.95}{212}}=\sqrt{.11}=.33$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2_y}{N}-C_y^2}\times i=\sqrt{\frac{578}{212}-\left(\frac{-30}{212}\right)^2}\times 2$$

$$=\sqrt{2.73-(-.14^2)}\times 2=\sqrt{2.73+.02}\times 2$$

$$=\sqrt{2.75}\times 2=1.66\times 2=3.32$$

故
$$\eta=\frac{\sqrt{\frac{S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]}{N}}}{\sigma_y}=\frac{.33}{3.32}=.1$$

兩事實在前，吾人須視其能否呈直線相關，而定採用乘積率法或相關比率法以求其相關係數，此吾人已知之矣。然若有時直線不甚顯著，則將應用何種方法，曰，唯有旣求r又求η。求出r及η後用下列公式以考證之，如其所得結果小於2.5，則兩量爲直線相關，宜用求之公式求相關係數，大於2.5則非直線相關，宜用求η之公式求相關係數。此種考證r及η之公式爲

$$\frac{\sqrt{N}}{.037449}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2-r^2}.$$

四. 各種等級法

用乘積率法及相關比率法求相關係數，所得結果固尙精確，然手續繁難，計算費時，故在量數只有十至三十個時，與其用乘積率法及相關比率法，不如用手續較簡，計算省力之等級法。計算相關等級法有二：一爲斯丕門等級差異法(Spearman's method of ranr difference)，一爲斯丕門相關尺度 (Spearman's foot-rule fok correlation)。此兩法爲英人斯丕門氏所創，故名之。

1.等級差異法　以此法求相關係數，所用公式如下：

$$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

ρ(讀如勞rho)爲由等級差異法求出之相關係數之符號

ΣD^2爲XY兩事實所有各相關量數等級之數字差數之平方之和

N爲每一事實之量之次數總數

用表44說明求ρ之步驟。

(1)將勞資糾紛次數及罷工次數分別列於A,B兩行。

(2)求A行各量數之次數所居之等級，列在A之等級行內；B行

各量數次數所居之等級，列在B之等級行內。其求等級之方法，例如A行之75有二，一居全量之第四等級，一居第五等級，即以$(4+5)\div 2=4.5$，B行之97居第一等級，即書"1"字。

(3)從A等級減去相對之B等級，所得正負零各差數，分別填入(+)(-)(○)各行內。

(4)將正負差數，各依類相加，所得結果，正差數總數與負差數總數必相等。

(5)各差數自乘，以其積數寫入D^2行內。

(6)求ΣD^2以6乘之。

(7)求N。

(8)照公式求ρ。

由等級差異法求出之ρ與由乘積率法求出之r結果不一致。披爾生乃發明下列公式。可以將ρ轉化爲r。

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$$

$$\pi=180^\circ$$

平時吾人由ρ求r，不必用上列公式，只須有一種由ρ之值求r表(見附錄表I)，即可查出相當ρ之r值。

2.相關尺度　其公式如下：

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}$$

R爲由相關尺度求出之相關係數之符號

ΣG爲兩事實各相關量數等級之數字之正差數之和

N爲量數之次數總數

今就表44說明求R之步驟。

(1)將兩事實所有量數之次數分別列於A,B兩行。

(2)求A行各量數之次數所居之等級列在A之等級行內，B行各量數之次數所居之等級列在B之等級行內。

(3)從A等級減去相對之B等級所得之負差數不記，只記正差數，以G代表之。

(4)將各正差數相加求 ΣG，各差數所有次數相加求 N。

(5)依公式求R。

由相關尺度求出之 R 與由乘積率法求出之 r 結果亦不一致，披爾生又有一公式如下可以將R變爲r:

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$$

吾人得R後卽可按上列公式求 r，但若有一種由R求 r 表(見附錄表II)，則無須實行按公式求 r，卽於此表能查出相當所求R之r値矣。

表44

地　別	勞資糾紛之次數 A	罷工次數 B	A 之等級	B 之等級	AB等級之差數 +	0	—	ΣD²
甲	97	85	1	1		0		
乙	91	82	2	2		0		
丙	87	78	3	3		0		
丁	75	71	4.5	4	5			.25
戊	75	68	4.5	5.5			1	1
己	69	68	6	5.5	.5			.25
庚	64	60	7.5	7.5		0		
辛	64	60	7.5	7.5		0		
壬	53	49	9	9		0		
癸	50	45	10	10		0		
N=10					1		1	1.50

$$(1)\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}=1-\frac{6\times1.5}{10\times(100-1)}=1-\frac{9}{990}$$

$$=1-.01=.99$$

(2) $R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}=1-\frac{6\times1}{100-1}=1-.06=.94$

(3)將ρ轉化爲r

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)=2\sin\left(\frac{180^\circ}{6}\times.99\right)$$

$$=2\sin29.7^\circ=2\times.495=.99$$

(4)將R轉化爲r

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1=2\cos60^\circ\times(1-.94)-1$$

$$=2\cos60^\circ\times.06-1=2\cos3.6^\circ-1=1.996-1$$

$$=.996$$

五. 異號差數對數法

異號差數對數法爲英人解拍傳所創，乃求相關係數之極迅捷但不甚精確之方法。其法係先將兩事實量數各列成等級，次求各事實之集中量數（通常用中點數或算術平均數）。然後將此集中量數與各量數間之差數求出，並在集中量數以上之差數各加一正號，以下者各加一負號，最後乃按此各差數之正負對數求相關係數。是以此法求相關係數，可分下列五步：

第一步　將兩事實之量各依次排列。

第二步　求各事實之集中量數。

第三步　求各數與集中量數之差。

第四步　將兩量正負同號之對數記於同號對數（以l表明之）行內。兩量異號之對數記於異號對數（以u表明之）行內。倘兩量有零之差異時，則將其對數記於零差對數（以d表明之）行內。

第五步　求各項對數之和。

第六步　將已求出各數代入下列公式求U（卽用異號差數對數法求出之相關係數之符號）。

$$U=\frac{u+\left(\frac{\frac{u}{u+l}+\frac{1}{2}}{2}\right)d}{N}$$

舉某省十地方之勞資糾紛與工資爭議(糾紛原因)相關係數求法之例如下,以說明應用異號差數對數法:

表45

勞資糾紛次數 A量	工資爭議次數 B量	A量各數與其平均數之差 D_A	B量各數與其平均數之差 D_B	同號對數 l	異號對數 u	零差對數 d
12	6	−3	−5	1		
16	8	+1	−3		1	
10	8	−5	−3	1		
11	9	−4	−2	1		
17	11	+2	0			1
13	11	+3	0			1
15	13	0	+2			1
18	15	+3	+4	1		
19	17	+4	+6	1		
14	12	−1	+1		1	
M=15	M=11			l=5	u=2	

$$U=\frac{u+\left(\frac{\frac{u}{u+l}+\frac{1}{2}}{2}\right)d}{N}=\frac{2+\left(\frac{\frac{2}{2+5}+\frac{1}{2}}{2}\right)\times 3}{10}=\frac{2+\left(\frac{\frac{4}{14}+\frac{7}{14}}{2}\right)\times 3}{10}$$

$$=\frac{2+\frac{.79}{2}\times 3}{10}=\frac{2+.40\times 3}{10}=\frac{3.2}{10}=.32$$

吾人若欲將U化爲r,可查一種由U之百分比例數求r表(見附錄表III),亦可用如下之公式行之。

$$r=\cos\pi U$$

玆用表45之事實以說明化U爲r之法。

$$r=\cos\pi U=\cos(180^\circ\times .32)=\cos 57.6^\circ=.54$$

六。 均方相關法

均方相關法爲披爾生氏所創，其公式爲

$$C=\sqrt{\frac{S-N}{S}}$$

C ＝均方相關之係數

$$S=\Sigma\left(\frac{(n_{rc})^2}{\frac{n_r n_c}{N}}\right)$$

n_{rc} 代表相關表中每橫行與竪行相交格中之次數

n_r 代表相關表中每橫行次數總數

n_c 代表相關表中每竪行次數總數

n_r n_c 代表每方格所居之橫行之次數總數與所居之竪行之次數總數相乘之積

N＝次數總數

玆用表 46 之材料以說明求相關係數之法。

一百三十一名工人精神及工作能力之測驗

表 46　　　　精神(視精神之强弱以分數別之)

工作能力(視能力之大小以分數別之)

分數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	總計
1	1^1	2^4	1^1											
2	2^4	4^{16}	2^4	1^1	1^1									10
3		1^1	3^9	7^{49}	5^{25}	4^{16}	6^{36}							26
4				3^9	4^{16}	8^{64}	7^{49}	5^{25}	4^{16}	1^1				32
5			1^1		1^1	2^4	3^9	8^{64}	8^{64}	4^{16}	2^4	1^1	1^1	31
6							1^1	2^4	3^9	6^{36}	4^{16}	3^9	4^{16}	23
7											2^4	2^4	1^1	5
總計	3	7	7	11	11	14	17	15	15	11	8	6	6	N=131

注意！ 各格次數左上角之數字乃各次數自乘之積卽 $(n_{rc})^2$

從上表之數字求 $\frac{n_r\, n_c}{N}$

表47

分數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	.29	.21	.21										
2	.23	.53	.53	.84	.84								
3		1.39	1.39	2.18	2.18	2.78	3.37						
4				2.69	2.69	3.42	4.15	3.66	3.66	2.69			
5			1.66		2.60	3.31	4.02	3.55	3.55	2.6	1.89	1.42	1.42
6							2.98	2.63	2.63	1.93	1.40	1.05	1.05
7											.31	.23	.23

此表各格中數值求法舉例如下

設 $n_r = 4$

$n_c = 3$

$N = 131$

則 $\frac{n_r\, n_c}{N} = \frac{4 \times 3}{131} = \frac{12}{131} = .09$

設 $n_r = 4$

$n_c = 7$

$N = 131$

則 $\frac{n_r\, n_c}{N} = \frac{4 \times 7}{131} = \frac{28}{131} = .21$

計算 $\dfrac{n_{rc}}{\dfrac{n_r n_c}{N}}$

表44

分數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	11.11	19.05	4.76										
2	17.39	30.19	7.55	1.19	1.19								
3		.72	6.47	22.48	11.47	5.76	10.68						
4				3.35	5.95	18.71	11.81	6.83	4.37	.37			
5			.60		.38	1.21	2.24	18.03	18.03	6.15	2.12	.70	.07
6							.34	1.52	3.42	18.65	11.43	8.57	15.24
7											12.9	17.39	4.35

$$S = \Sigma \frac{(n_{rc})}{\dfrac{n_r n_c}{N}} = 345.37$$

將上表所求之數代入均方相關法之公式以求相關係數。

$$C = \sqrt{\frac{S-N}{S}} = \sqrt{\frac{355.37-131}{345.37}} = \sqrt{\frac{214.37}{345.37}}$$

$$= \sqrt{.62} = .79$$

由上所述，吾人對於求相關係數之法可以了然矣。雖然，若遇兩種事實以兩曲線表示之，察其起伏之狀不相對，似不相關，但經相當時間，其起伏確能相應，顯有相關；例如物價與工資，物價高，則經若干時期，工資增加，再經若干時期，物價更漲，復經若干時期，工資再加，互為因果，若表示之以兩曲線，則互相隔若干時期，即有一呼應。遇此種事實，則吾人將如何比較之以求其相關係數乎？其法只有將代表原因之一曲線向後移(lag)與代表結果之一曲

線波曲相對，雖其日期不同，姑置之勿論，例如圖60之曲線B與曲線A顯然呈相關之勢，曲線 B 之升降較曲線A約落後一月，故欲算

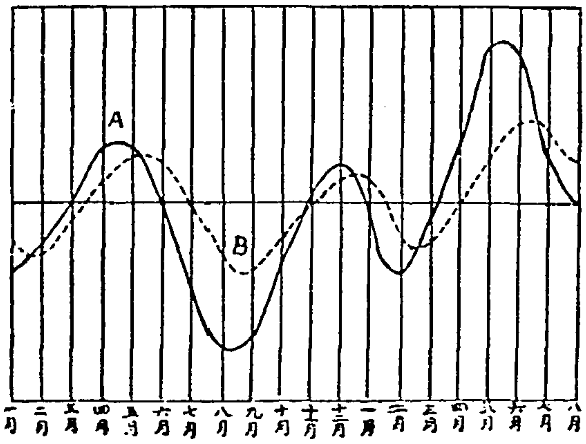


圖 60

相關係數時，可將 A 線後移，使其任何各位置所代表各月之數與 B 線之位置所代表較後一月之數作成一對，例如 A 線在六月之位置之數與B線在七月之位置之數作成一對，再七月對八月，八月對九月，依此類推。

但有須注意者，乃不可僅視圖上曲線起伏之狀，即任意移動，以致因果倒置；譬將A線往後移動，則可得一顯著之正相關，若將A線往前移動，則可得顯著之反相關，以此之故，吾人在曲線移動之先，必須確定兩事實相關所距之時間，又須辨孰者爲因孰者爲果也。

第七章

常態曲綫 (Normal Curve)

第一節

常態曲綫之理論

宇宙間現象，奇離變幻，莫可究詰，夫人而知之也。然仍有天然之秩序在，此種秩序卽集中之趨勢 (Central tendency)：譬如一年有四季，而酷熱與嚴寒時甚少，介乎酷熱與嚴寒之中者爲溫和之天氣，此種天氣確佔四季之大部分時間；地球上最寒者爲南北極，最熱者近赤帶，而各所佔面積究不如溫帶之爲廣；人羣之聰明品格，各有不同，然智愚賢不肖究不如中庸者之爲多。是故集中之趨勢誠爲自然之常態，凡百事物之眞相。如有事物無集中之趨勢，而偏於一端，卽違自然之常態，其所呈者大都非眞相，必有若干差誤也。常態曲線者何，蓋卽概率曲線 (Probability Curve)，因其形似鐘，又名鐘形曲線 (Bell-shaped Curve)，爲一種有規則的兩稱曲線 (binomial curve)，卽用以表示事實集中之趨勢而呈露其眞相者也。

第二節

常態曲綫之繪法

常態曲線繪法有二:一曰修勻次數多邊形之方法,二曰概率曲線繪法。前者係將一事實次數分成若干組,每兩三四或五組之次數相加而平均之,如此類推,卽六組或七組之次數相加而平均之亦無不可。此種平均數須由各數繼動相加求出,故稱之爲繼動平均數,玆舉五組之次數,設為 ABCD 及 E,求每三組繼動平均數則可得修勻系來次數多邊形之數值如下:

$$A\text{之修勻之數值}=\frac{A+A+B}{3}$$

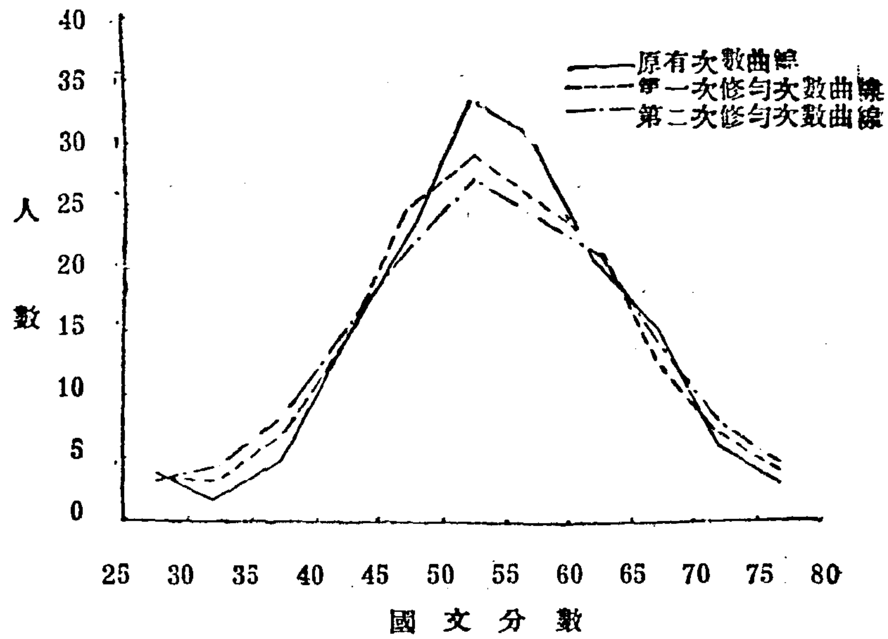
$$B\text{之修勻之數值}=\frac{A+B+C}{3}$$

$$C\text{之修勻之數值}=\frac{B+C+D}{3}$$

$$D\text{之修勻之數值}=\frac{C+D+E}{3}$$

$$E\text{之修勻之數值}=\frac{D+E+F}{3}$$

繪一次數多邊線並其修勻線如圖61於下:



原有次數	3	1	4	13	22	33	30	20	14	5	2
每三組繼動平均數（第一次修勻	2.3	2.7	6	13	22.6	26.3	27.6	21.3	13	7	3
每三組繼動平均數（第二次修勻）	2.4	3.6	7.2	13.8	21.3	26.1	25.7	20.6	13.7	7.6	4.3

圖 61　原有次數曲線與修勻曲線之比較

修勻次數多邊形方法，宜用於次數多邊形之近常態者，若離常態太遠，宜用後一法。後一法須根據下列公式以求之：

$$y = y_0 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

e 爲常數 2.71828 卽納氏對數之底數 The base of the Naperian logarithm system

x 爲在曲線圖之底線上由全體量數之平均數所在之點至某一點之距離之變量用標準差表示者

y 爲由 x 線上各點向上引出縱線之高度

σ 爲標準差在此處用以測量 x 之差度

y_0係由全體量數之平均數所在之點向上引出之縱線此縱線可以表示 x 之值發現最多之概然次數故爲曲線下之最高者求 y_0 可用下列公式

$$y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

N 爲全體事實之次數

σ 爲標準差

π 爲常數 3.1416

常態曲線下有若干縱線（卽在底線上由平均數至標準差分數部分之距離向上引出各豎線），常爲 y_0 之分數，而有一定之比例，故可將 x 之指定各值與由 x 點向上引出縱線（y）各值之比例一一求出，使以後應用常態曲線之公式時計算上更爲便利，附錄表 IV 卽應此需要而排列 x 值與 y 值之比率者也；例如 x 值爲 $.1\sigma$，則由此表可查出於此一點引出之縱線等於 y_0 高度之 .99501，卽 $.99501y_0$，x 值爲 1.0σ，則於此一點引出之縱線等於 y_0 高度之 .60653，卽 $.60653y_0$，x 值爲 2.0σ，則於此一點引出之縱線等于 y_0 高度之 .13534，卽 $1.3534y_0$，至 $.99501y_0$，$.60653y_0$，$.13534y_0$ 等如何求出，則須應用公式 $y=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$。

譬以 x 值爲 2σ

$$則y=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}=y_0\times2.71828^{\frac{-(2\sigma)^2}{2\sigma^2}}=y_0\times2.71828^{\frac{-4\sigma^2}{2\sigma^2}}$$

$$=y_0\times2.71828^{-2}=y_0\times\frac{1}{2.71828^2}$$

$$=y_0\times\frac{1}{7.38.0461584}=.13534y_0$$

概率曲線公式中，以求$e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$一部分爲不易。此部分之求法既已述明，則依據事實之量數以求 y，自不難矣。惟求 y 僅爲繪畫概率曲線所經過之一步耳，至其全體步驟如下：

1. 沿 x 線置相等σ之距離，如云.1σ，.2σ，.3σ，……或1σ，2σ，3σ，……（閱圖62），此種單位之選擇，悉聽各人自便，但曲線之形狀則依所擇之單位而定。
2. 於 x 線之中點（即x＝o）立一等於 y_0 之縱線。
3. 在 x 線上所選定之各點.1σ，.2σ，.3σ．……等，按照y_0之分數部分之比例，向上各引一縱綫，例如附錄表 IV 所指示者：

$x = .1\sigma$　　$y = .99501y_0$

$x = .2\sigma$　　$y = .9802y_0$

$x = .3\sigma$　　$y = .956y_0$

4. 將所引縱綫之頂端用綫連接，即成一常態次數多邊形。若所引縱綫之間隔愈密，即所採σ分數部分愈小，則此多邊形愈近於修勻之曲綫。

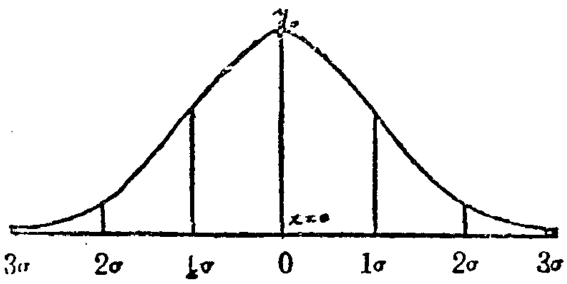


圖 62

第三節
常態曲綫下之面積

常態曲綫下之縱綫 y 係代表 x 之次數，各 y 綫高度相加之和與所測量數總數相近。是則含 x 兩縱綫 y_1 y_2 中間之面積亦可以代表其量數之數目，且頗爲精確。惟在各種縱綫中間，實際計算常態曲綫下各部分面積，殊爲煩瑣，不如用解柏德所算之表，此表原係假設曲綫下全面積等於1，用σ 爲測量單位，按其距離分全面積爲若干部分，各部分以曲綫，底綫、平均數（x=o）上之縱綫及距平均數某點上之縱綫爲界限，求出各部分面積當全面積之分數，例如離平均數在 1σ 之間之量數爲.34134，離平均數在2.5σ 之間之量數爲 .4939，離平均數在 3σ 之間之量數爲.49865，離平均數在5σ 之間之量數爲.4999997等等(可參閱附錄表V)。因曲綫爲常態，其左右兩端互相對稱，故平均數上下距離所含之面積應相等，而離平均數在 ±1σ 間所含量數應爲.68268，在 ±2.5σ 間所含量數爲 .98792，在 ±3σ 間所含量數爲 .9873，在 ±5σ 間所含量數爲 .9999994，由是可知在 ±1σ 界限以外之量數爲.31732，在±2.5σ 界限以外之量數爲.01208，在 ±3σ 界限以外之量數爲 .0027，在 ±5σ 界限以外之量數僅爲.0000006，故常態曲綫之實際應用，祗取平均數上下之 2.5σ，誠以在此界限以外之數量僅爲 .01208，卽百分之1.208，所差甚微，若取平均數上下之3σ，則所捨棄之數，僅爲.0027，卽百分之.27，所差更微，對於全體量數幾不能發生影響，若取平均數上下之 5σ 則所捨棄之數尤微，對於全體量數幾可謂無影響矣。

上所述者，僅爲由平均數一點引出之縱綫與量數上另一點引出縱綫之間之量數比例。若欲計算量數上任何兩點向上引出之兩

縱線間所含量數當全體量數之百分數，例如欲求0.5σ與1.7σ之間之量數百分數，則須先求出離平均數在1.7σ間所含量數，然後求出離平均數在0.5σ間所含量數，於是以前者求得之量數減去後者之量數，卽爲0.5σ與1.7σ間之量數，其算法述明如下：

離平均數在1.7σ間之量數＝.4554＝45.54%

離平均數在0.5σ間之量數＝.1915＝19.15%

在0.5σ與1.7σ間之量數＝45.54%－19.15%＝26.39%又如欲求1.9σ與－.9σ間之量數百分數，則須先行求出離平均數在1.9σ間所含量數，次求離平均數在0.9σ間所含量數，然後以兩量數相加，卽得所欲求之結果，其算法述明如下：

離平均數在1.9σ間之量數＝.4713＝47.13%

離平均數在.9σ間之量數＝.3159＝31.59%

在0.9σ與－.9σ間之量數＝47.13%＋3159%＝78.72%

第四節

常態曲綫之應用

常態曲線最重要之用途有四種：

一.試驗實際次數分配之能否合于常態. 對于實際次數分配欲試驗其能否合于常態，可照下列各步之次序行之。

(1)依實際次數分配情形繪一次數曲線圖。

(2)另繪一常態曲線於實際曲線上(可參閱第63)。其繪法乃以常態曲線所須依據之x線與實際曲線依據之底線相合，並以x線之中點（卽x＝o）置於實際次數分配之算術平均數上，再用σ在x線上爲計算單位之距離，有時一個σ可任分爲若干分數部分，如.01σ，.02σ，………或.1σ .2σ，……之類；其σ之分數部分愈細，則據以繪成之常態曲線乃愈

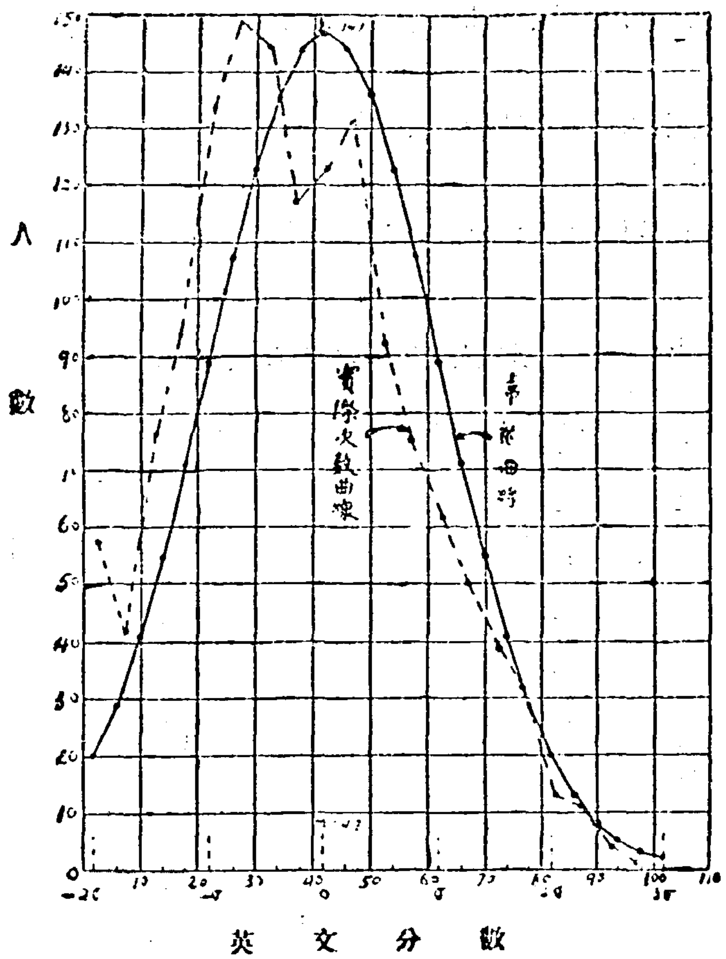


圖 63 常態曲線與實際次數曲線比較

正確也。此單位距離 σ 之分數部分如 $.1\sigma$ $.2\sigma$ ……之類，須以實際分配 σ 之價值算之，並用公式 $y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 計算 y_0 之高度，由x線上引一縱線等于 y_0，更以x綫上各值 $.1\sigma$ $.2\sigma$，……等代入公式 $y=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ 求各縱綫之高度 於是接連

各縱數之頂端以一曲線，此線卽加於實際次數上之常態曲線也。

(3)視實際次數曲線與常態曲線切合之程度，卽可知實際次數分配之合于常態與否。

舉例如下，以述明求常態曲線之算法：

表 49 某學校學生分數之次數分配

分數組距	組距中值 m	學生數 f	d'	fd'	fd'²
0—— 4.99	2.5	58	—7	—406	2842
5—— 9.99	7.5	42	—6	—252	1512
10—— 14.99	12.5	76	—5	—380	1900
15—— 19.99	17.5	94	—4	—376	1504
20—— 24.99	22.5	134	—3	—402	1206
25—— 29.99	27.5	149	—2	—298	596
30—— 34.99	32.5	144	—1	—144	144
35—— 39.99	37.5	117	0	0	0
40—— 44.99	42.5	123	1	123	123
45—— 49.99	47.5	132	2	264	528
50—— 54.99	52.5	92	3	276	828
55—— 59.99	57.5	75	4	300	1200
60—— 64.99	62.5	62	5	310	1550
65—— 69.99	67.5	50	6	300	1800
70—— 74.99	72.5	39	7	273	1911
75—— 79.99	77.5	32	8	256	2048
80—— 84.99	82.5	13	9	117	1053
85—— 89.99	87.5	11	10	110	1100
90—— 94.99	92.5	4	11	44	484
95——100.00	97.5	1	12	12	144
		N=1448		2385 —2258 Σfd'= 127	Σfd'²=22473

$$M=E.M.+\frac{\Sigma fd'}{N}=37.5+\frac{127}{1448}=37.59$$

37.59為假定量數組距為 1 算出者，以此數為 x 線之中點（卽 x=0）。

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-C^2}=\sqrt{\frac{22473}{1448}-\left(\frac{127}{1448}\right)^2}$$

$$=\sqrt{15.52-.0077}=\sqrt{15.51}=3.94$$

3.94爲假定量數組距爲1算出者

$$y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{1448}{3.94\times\sqrt{2\times3.1416}}=\frac{1448}{3.94\times\sqrt{6.2832}}$$

$$=\frac{1448}{3.94\times2.51}=\frac{1448}{9.89}=146.41$$

因次數曲線乃將原來事實之量數組距作爲1表示者，故求 y_0 即用標準差之以組距 1 表示者，倘原來事實不用組距表示，而以單位表示，則求 y_0 亦用單位表示之標準差。

求出y_0後卽須應用公式 $y=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ 求出由 x 線之中點向左右分置 $-.2\sigma$ $-.4\sigma$，2σ，4σ，等距離引出之各縱線高度。因$e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$之求法會於本章第二節述明，其得數並如上所述可於附錄表 IV 查之，例如在 $.2\sigma$ 距離引出之y爲 $.9802y_0$. 在 $.4\sigma$ 距離引出之 y 爲 $.92312y_0$。則現須知者卽 y_0，而 y_0 既經求出，故可知各y之數。舉例如下：

在 $.2\sigma$ 距離引出之 $y=.9802\times146.41=143.51$

在 $.4\sigma$ 距離引出之 $y=.92312\times146.41=135.15$

如覺用圖形比較事實之常態與實際分配情形，只可知其配合之大概，而不能知其精確之配合程度，可應用下列公式：

$$\sigma s = \sqrt{\frac{y(N-y)}{N}}$$

σs為取樣之標準差誤

y 爲常態曲線任何一點垂至 x 線上之一直線之高度

N爲次數之和

例如在圖63之 x 線上－1σ 處 作一縱線 y 與常態曲線相交於次數89處，又與實際次數曲線相交於次數 135 處，二數之差等於46。須知常態曲線與實際次數曲線完全湊合，則二數之差必等於零，今差數等於 46，是否太大，卽可用上述公式驗之。

$$\sigma s = \sqrt{\frac{y(N-y)}{N}} = \sqrt{\frac{89\times(1448-89)}{1448}} = 9.14$$

若常態曲線上之次數與實際次數之差，較三倍取樣之標準差誤之數爲小，則此差誤之發現，乃由於取樣之變動，可視之爲無關緊要，而事實之實際分配亦可以常態視之。若常態次數與實際次數之差，較三倍取樣之標準差誤之數爲大，則此差誤必非由於取樣之變動，而由於他種原因之影響，故此種差誤卽爲不配合之表示，而實際分配不能以常態視之，今常態次數爲 89 實際次數爲135，其差爲46，此差數46較取樣之標準差誤之三倍爲大，因3×9.14＝27.42，而46>27.42；則從89與135二點而言，可知圖63之實際次數曲線不能與常態曲線配合也。

二、推算事業之成績之人數分配．

學校敎師記分數以代表學生讀書之成績。其所記分數常犯三種謬誤之一；此三者卽分數高者人數太多、分數少者人數太多及全體學生所得分數相差甚微甚至分數相同；此非學生程度之整齊 實敎員測驗方法未臻完善，蓋舉行智力學力等測

驗，若人數甚多，其分配必近常態，成績最佳者人數必少，成績最劣者人數亦必少，且二數或相等，而中等者必佔多數：譬以甲乙丙丁戊為分數等別，代表一級學生不齊之成績，其最優者為甲等而下之至於戊為最劣，是則得丙者必佔最多數，乙丁者次之，甲戊者又次之，苟事實不受他種非常原因之影響，其必適合此種情形者無疑。學業成績如此，其他事業之成績亦莫不如此。

因成績之人數分配應合于常態，故可用常態曲線圖以求其分配之成分；譬如將x線用標準差分之，其中點左右各為 3σ（見圖64），正負共 6σ，平均以 1.2σ 為一段，可得五段，於其各段

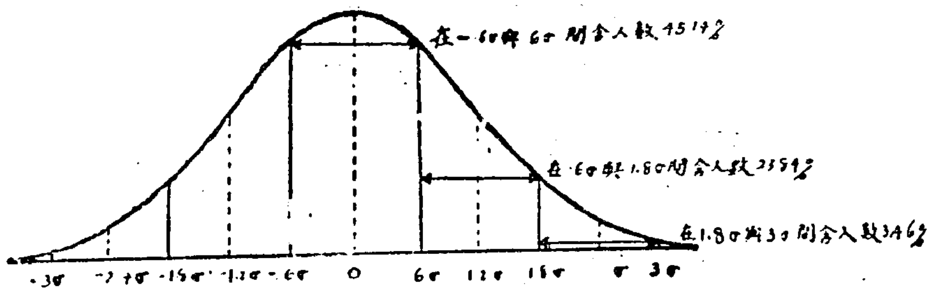


圖 64

之兩極點各豎一縱線至常態曲線，乃分常態曲線下之面積為五部分，以之代表甲乙丙丁戊五種分數之人數，由 1.8σ 至 3σ 一段代表甲，$.6\sigma$ 至 1.8σ 代表乙，$-.6\sigma$ 至 $.6\sigma$ 代表丙，-1.8σ 至 $-.6\sigma$ 代表丁，-3σ 至 -1.8σ 代表戊，然後參考附錄表X查出各段之面積占全體面積之百分數，即得甲乙丙丁戊五種分數之人數各占全體人數之百分數如下：

a. 常態曲線下	3σ 一段內之面積為	49.87%
	1.8σ 一段內之面積為	− 46.41%
	1.8σ 至 3σ 一段內之面積為	3.46%

b. 常態曲線下 1.8σ 一段內之面積為	46.41%
.6σ 段內之面積為	− 22.57%
.6σ 至 1.8σ 一段內之面積為	23.84%
c. 常態曲線下 −.6σ 一段內之面積為	22.57%
.6σ 一段內之面積為	+ 22.57%
−.6σ 至 .6σ 一段內之面積為	45.14%
d. 常態曲線下 −1.8σ 一段內之面積為	46.41
−.6σ 一段內之面積為	− 22.57
−1.8σ 至 −.6σ 段內之面積為	23.84
e. 常態曲線下 −3σ 一段內之面積為	49.87
−1.8σ 一段內之面積為	− 46.41
−3σ 至 −1.8σ 一段內之面積為	3.46

各則分數等別	甲	乙	丙	丁	戊
一級人數	3.46%	23.84%	46.14%	23.84%	3.46%

三.考驗問題難易之程度.

有一問題欲得一羣人研究之，應先知此問題能否為此一羣人研究，惟如何知之，則須能辨問題難易之程度。但此種程度何從辨別，由發出問題者辨之耶，則其主觀之見解不能免於錯誤，由研究者辨之耶，則其主觀之見解更不能免於錯誤。然則如何始可以决定問題之難易，必也由發出問題者依客觀的標準定之。所謂客觀的標準者，卽視能否解答此問題之人數多寡以為斷；譬如有一問題，大多數人不能解答，則問題必難，大多數能解答，則必易，半數能解答，則難易適中，而極合於此一羣人研究者也，此為問題難易之辨別方法。至欲知問題難易之程度，則須依下列法則决定之。

1. 出題者由其意見，將各問題按先易後難，次第排列。

2. 使研究者解答各問題，凡答對每一問題之研究者人數卽以全體研究者之人數除之，求答對每一問題之研究者百分數，

3. 每一問題之研究者人數，須多多益善，蓋如是次數分配乃愈顯其常態也。

4. 由各問題答對者之百分數求各問題之標準差之價値（卽x線之距離）於此須應用附錄表V，但須將表中各數折成百分數；蓋以研究者爲百分，代表常態曲線下之全面積也。各問題之標準差價値既得，卽以之代表各問題難易之等級。惟是附錄表V之標準點係在x線上之中點，若以此點作爲百分之五十分點推算，每一問題答對者之百分數，必須將表中所列之數另加減之，此誠費事，於是有統計學家將前表改造成附錄表VI表VII及表VIII，茲將編造及用法說明如下：

(1)表VI係以常態曲線圖之底線全距離定爲 $\pm 2.5\sigma$ 共計 5σ，以 -2.5σ 爲起點 此點卽定爲0，平均數所在之點爲百分之五十分點，2.5σ 爲百分點，其用法可舉例以明之；設有一問題，答錯之人數佔全體人數百分之5'.61，在底線上所居之點爲 2.56σ，此題所佔百分比之地位卽爲51，又有一題，答錯人數之百分比爲88.11，在底線上所居之點爲 3.65σ，此所佔百分比之地位爲73。

(2)表VII之編造及用法與表VI大致相同，所異者卽常態曲線下之底線距離定爲 $\pm 3\sigma$ 共計 6σ，非如表VI定爲 $\pm 2.5\sigma$ 共計 5σ 也。

(3)表VIII之編造與用法亦與表VI大致相同；所異者卽常態曲線下之底線全距離定爲 $\pm 5\sigma$ 共計 10σ，每 1σ 又分爲20等分，總計全距離爲200部分，各部分之面積（或量數）俱經求出，並將每 1σ 用10乘之，使與百分記分法適合，能求出答對每一問題之研究者百分數，卽可按表查得

該問題難易之等級；例如某一問題答對者人數佔全體百分之50，則該問題難易之等級為50，若答對者佔全體百分之 99.6，則該問題難易之等級為 23.5，若答對者佔全體百分之99.999971，則問題最易，即定其價值為0，反之，最難，即定其價值為100。

5.既求得各問題難易之等級，即按此等級，依次排列，再用上法更行試驗，以定其最當之等級。蓋各問題之次第先後更換之時，其難易之程度往往受更換之影響，因每一問題之意義常能引解答後一問題之思想也。

四.定學校試題之分數。

學校考試學生時，定試題之分數，頗為不易，蓋各試題之難易不等，絕不宜劃一分數，如甲乙丙丁戊每題平均為 20 分，應先別問題難易之程度，然後始可定適當之分數。但判別問題難易之程度，原非易事，今以其可用常態曲線圖確定，故分數得據此易于決定，至其法乃須繪一常態曲線圖，其 x 線之長為 $\pm2.5\sigma$ 或 3σ 或 5σ，良以 $\pm2.5\sigma$ 之距離上常態曲線下之面積所含之量數當全體 98.76%，所遺棄者不過 1.24%；$\pm3\sigma$ 之量數當全體 99.72%，所遺棄者不過 .28%；$\pm5\sigma$ 之量數當全體 99.99994%；所遺棄者不過 .00006% 耳。試以 x 線之長為 ±2.5，代表 100 分。分 ±2.5 為十段，則每段為 $.5\sigma$ 之距離(閱圖65)。-2.5σ 距離之末端為分數起點即 0 分 -2σ 距離之末端為 10 分，以此類推，每向右移 $.5\sigma$，即加 10分，直至 2.5σ 為止。於是用表 VI 求常態曲線下各部分之面積當全體量數之百分數；例如 -2.5σ 至 -2σ 間之面積當全體量數之百分數為 49.38%−47.73%=1.65%，此數即假定事實為常態時，作為不能解答某問題之人數，大凡一問題僅為1.65%人所不能解答者，其易可知，故其分數為10；又如 -2.5σ 至

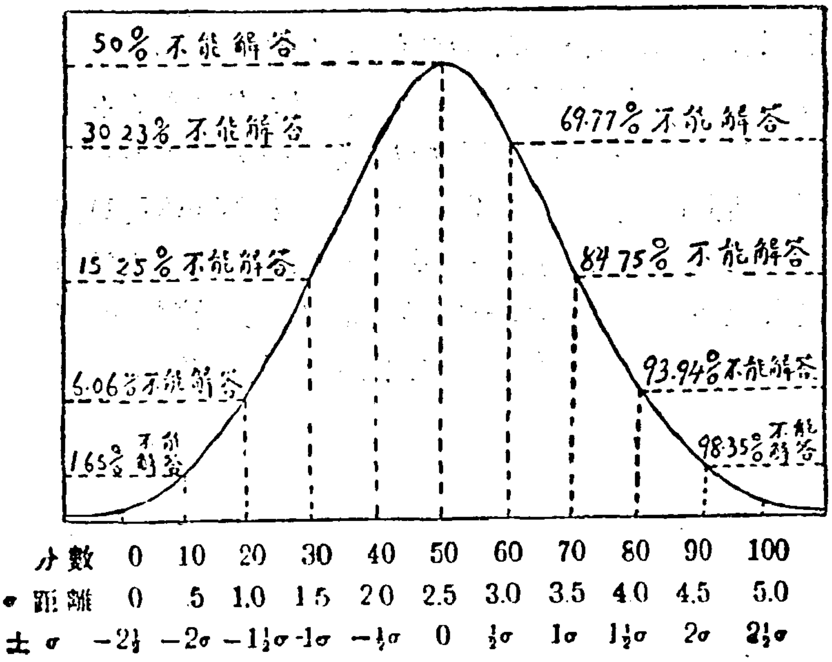


圖 65

-1.5σ 之面積當全體量數之百分數爲 49.38% − 43.32% = 6.06%，此爲不能解答某問題之人數，因此問題有 6.06% 人不能解答，較 1.65% 人所不能解答者爲難，而其難易之距離僅爲 $.5\sigma$，故加10分，即能解答此問題者可得 20 分；以此類推，則 −2.5 至 -1σ 間有不能解答某問題之人數佔 49.38% − 34.13% = 15.25%，故能解答此題者得 30 分；-2.5σ 至 $-.5\sigma$ 間有不能解答某問題之人數佔 49.38% −19.15% = 30.23%，故能解答此題者得 40 分；-2.5σ 至 x 線之中點(即 x=0)，有不能解答某問題之人數佔 49.38% −0 = 49.38% 故能解答此題者得 50 分；-2.5σ 至 $.5\sigma$ 間有不能解答某問題之人數佔49.38% +19.15% = 68.53%，故能解答此題者得

60分；-2.5σ 至 $.1\sigma$ 間有不能解答某問題之人數佔49.38%+34.13%=83.51%，故能解答此題者得70分；-2.5σ 至 1.5σ 間有不能解答某問題之人數佔 49.38%+43.32%=92.7%，故能解答此題者得80分；-2.5σ 至 2σ 間有不能解答某問題之人數佔49.38%+47.73%=97.11%，故能解答此問題者得90分；-2.5σ 至 2.5σ 間有不能解答某問題之人數佔49.38%×2=98.76%，故能解答此題者得100分，蓋一問題而有98.76%之人不能解答，其難可知矣。

第八章

考證量數確誤之方法

吾人欲取一事實以統計之，每不能得其全體量數，所可得而爲統計者，多爲全體量數中之一部分而已。由此一部分量數統計之結果，自不能絕對正確，此種結果與眞確所欲求者，苟非偶然能相適合，則必有多少差異，此種差異幾在上述各種量數上無可避免者。又當統計時，往往利用計數器具計算統計事實之數量，此種器具因受溫度及天氣之影響，大小長短，時有伸縮，或有時用器者看器具之角度不能準確，移動器具不得其法，足使統計結果發生差誤。因此爲求統計正確，不可不知考證量數確度之方法，以爲校正量數錯誤之準備。考證量數確度之方法有二：

一．用標準差考證確誤之程度．此種考證法所用公式，略舉如下：

1．求算術平均數之確度． 其公式爲

$$\sigma_M = \frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{N}}$$

N爲次數之總和

σ_{dis} 爲所測量數之標準差（dis. 卽 distribution 爲分配之意）

σ_M 爲實得算術平均數與眞確算術平均數之標準差（所謂實得者卽由一部分之量數求出者眞確者卽由全體

量數求出者

2. 求中點數之確度。其公式爲

$$\sigma_{Md}=\frac{1.25331\ \sigma_{dis}}{\sqrt{N}}\text{或}=\frac{1\frac{1}{4}\ \sigma_{dis}}{\sqrt{N}}.$$

3. 求四分位差之確度。其公式爲

$$\sigma_Q=\frac{1.11\ \sigma_{dis}}{\sqrt{N}}.$$

4. 求標準差之確度。其公式爲

$$\sigma_\sigma=\frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{2N}}.$$

6. 求相關係數之確度。

(1) 相關係數如由 $\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$ 之公式求得則其求確度之公式爲

$$\sigma_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}.$$

(2) 相關係數如由 $2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$ 求得，則其求確度之公式爲

$$\sigma_r=\frac{1.05(1-r^2)}{\sqrt{N}}$$

(3) 相關係數如由 $2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$ 求得，則其求確度之公式爲

$$\sigma_r=\frac{.638}{\sqrt{N}}.$$

(4) 相關係數如由相關比率公式求出，則其求確度之公式

爲

$$\sigma_{\eta}=\frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}}.$$

σ_M, σ_{Md}, σ_Q, σ_σ, σ_r, 或 σ_η 既經求得，即依習慣用法以 $\pm 3\sigma$ 爲確實限度，因 -3σ 至 $+3\sigma$ 間含有全體量數 99.75% 之故，在算術平均數之確實限度爲 $\pm 3\sigma_M$, 中點數之確實限度爲 $\pm 3\sigma_{Md}$ 四分位差、標準差，相關係數等之確實限度爲 $\pm 3\sigma_Q$, $\pm 3\sigma_\sigma$, $\pm 3\sigma_r$, $\pm 3\sigma_\eta$. 各種確實限度加其所考證之實得量數所得之和，在其間有眞確之量數存焉；例如某量數之實得平均數爲 49.02，其標準差爲 12.67，次數爲 243，則實得算術平均數 49.02，若非偶然，必不能與眞確平均數胳合，其間必有若干差誤，由此差誤之數即可考驗實得平均數之確度。其算法如下：——

$$\pm 3\,\sigma_M=\pm\left(3\times\frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{N}}\right)=\pm\left(3\times\frac{12.67}{\sqrt{243}}\right)$$

$$=\pm\left(3\times\frac{12.67}{15.59}\right)=\pm\left(3\times.81\right)=\pm 2.43$$

$$49.02+2.43=51.45$$

$$49.02+(-2.43)=46.59$$

由上式可知眞確平均數即在 51.46 與 46.58 之間，然有時眞確平均數發現之機會亦出於該項平均數確實限度之外，但爲數極少，不過萬分之三而已。

以上所舉各公式皆爲考證一系量數之確實限度，至欲考證二系量數之差數確度則須用下列公式：——

$$\sigma_{iff}=\sqrt{(\sigma_x)^2+(\sigma_y)^2}$$

σ_{diff} 爲某二系量數間差數之標準差

σ_x 及 σ_y 爲二系量數之確度數

此公式可適用於求平均數，四分位差，標準差，相關係數等每二系量數間差數之確度。但求平均數之 σ_{dis} 時，先用求平均數確度之公式求出 σ_x 及 σ_y，求四分位差，相關係數等數之 σ_{dis} 亦然，須先用求 Q，r 等確度之公式求出 σ_x 及 σ_y 然後以之代入求 σ_{dis} 之公式。迨 σ_{dis} 求得之後，乃加以所考證之兩系量數之差數，所得之和數內，眞確差數在焉。茲舉例如下以說明之：

某學校某級有 A，B 兩班。每班學生以不同教授法教授之。一學期後用同種試題試驗之。甲班 196 人之平均分數爲 74，其標準差爲 7。乙班 225 人之平均分數爲 62，其標準差爲 6。是則兩班平均分數之差爲 $74-62=12$，二數之差之確度如何，卽可用 σ_{diff} 之公式求之。

$$\sigma_x = \frac{7}{\sqrt{196}} = \frac{7}{14} = .5$$

$$\sigma_y = \frac{6}{\sqrt{225}} = \frac{6}{15} = .4$$

$$\left(\text{求 } \sigma_x \text{ 及 } \sigma_y \text{ 皆應用公式 } \sigma_M = \frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{N}}\right)$$

$$\sigma_{diff} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2} = \sqrt{(.5)^2 + (.4)^2}$$
$$= .64$$

甲乙兩班學生平均分數之眞正相差數不出 12分±.64 分之外，易言之，卽在 12.64 分與 11.36 分之中。

二. 用概誤差(Probable Error)考證確誤之程度. 在習慣上，考證量數確誤之程度，多用概誤差，而鮮用標準差，概誤差者，卽平均數之離差之中點數也(The probable error is the median of the deviations from the average.)。在事實爲常態之分配時，概誤差與四分位差數同，卽自 x 線之中點展±Q 或

±P.E. 之距離,各含有百分之二十五之量數也。概誤差與標準差有一定之關係,其係數爲 P. E. $=.67449\sigma$ 或 $.6745\sigma$。P. E. 卽代表概誤差之記號。至普通用以考證量數確度之公式如下:——

$$P.E._{M}=\frac{.6745\,\sigma_{dis}}{\sqrt{N}}$$

$$P.E._{Md}=\frac{.84535\,\sigma_{dis}}{\sqrt{N}}$$

$$P.E._{\sigma}=\frac{.6745\,\sigma_{dis}}{\sqrt{2N}}$$

$$P.E._{r}=\frac{.6745\,(1-r^2)}{\sqrt{N}}$$

$$P.E._{\eta}=\frac{.6745\,(1-\eta^2)}{\sqrt{N}}$$

第九章

指數 (Index Number)

第一節

指數之意義

社會現象，錯綜紛紜，奇侅繁頤，本至變而難測，今乃可以窺其陳迹，察其趨向，而宣明其祕奧；其法爲何，蓋卽指數之編製也。緣指數者爲兩個以上之量數之百分比率的平均數。所謂百分比率非實在之數，例如以某年或某時期之數或平均數，或以某地或某數地之數或平均數，或以某事項之數或平均數爲基本數，基本數須合成100，而以他年或他時期之數，或以其他地域之數，或以其他事項之數化合等于基本數百分之幾，此百分之幾卽一種百分數，凡此百分數與其基本數100均可稱之爲百分比率。惟何以名指數者，以其能將萬有不齊之事物，一一指示，使人易於明瞭，且以其變各種不同之數爲簡單之百分數，使人乃如世所謂屈指可數之也。至指數之爲用，概言之，有二：一則能將各種殊異之事實通盤比較，一則能將有悠久歷史之現象可用數字表示者，盡情呈現。因指數有此兩種功用，故吾人資以鑒往知來，推此測彼，摘隱倮微，乃不難焉。

指數旣足使吾人藉以窺測至變而難測之社會現象，故在統計上應用極廣。舉凡物價之漲落，工資之升降，生產銷費量之增減，研

兌率利率之起伏，貿易之消長，事業之盛衰等狀況，幾無不可賴指數以爲分析歸納之工具。宜美人卡尼特(Carl Snyder)謂吾人今値生存於指數時代(We are living in an index number age)。英人吉字林(L. F. Giblin)謂測量一國之文明程度用指數尚較用汽車爲當(The Civilization of a Country is better measured by its use of index numbers than by its use of motor cars)。

第二節
指數之種類

指數之種類甚多，得依比較對象性質之不同或依材料之不同而分別之。

一．依比較對象之不同而分者． 測量社會，經濟之現象，所以貴乎用指數者，以其能爲盈千累萬各種不同事實之相對的比較耳。因所比較對象性質之不同，乃有指數三種：

(一)時間性的數字系列指數． 此種指數乃以時間爲基性而求比率，例如表50所示之指數。

南京糧食批發物價指數

表50　　民國十八年一月之物價作爲100

時　　間	指　　數
十八年一月	100.00
二月	97.50
三月	110.09
四月	98.80
五月	98.70
六月	102.50
七月	99.90
八月	103.40

計算時間性的數字系列指數，必先求出基本時期(base period)，以此時期之數爲基本數。此種基本時期，簡言之，卽爲基期，因擬定基期有時不同，故此種指數又可分爲兩種：一曰定基指數，二曰環比指數。

1. 定基指數 (Fixed base index)。 定一時期（如一年，數年，一月，數月等）之數或平均數為基本數 100，更求其他各時期（如某年，某月等）之百分比率。然後總合基本數及各時期百分比率而平均之，即得定基指數。

2. 環比指數 (Link relative index)。 用前一時期（如去年前月等）之數為基本數 100，以求本時期（如本年本月等）之百分比率。然後總合基本數及各時期百分比率而平均之即得環比指數。

求定基指數及環比指數所得結果不甚相同，茲舉例如下以說明之：——

定基指數與環比指數

表51 （用幾何平均法求之）

中華民國年份	北京上等粳米每石之價	百分比率九年之價=100	百分比率之對數	百分比率每去年之價=100	百分比率之對數	附註
九年	14.01	100.00	2.00000	100.00	2.00000	A=定基指數
十年	14.27	101.86	2.00800	101.86	2.00800	B=環比指數
十一年	14.61	104.28	2.01820	102.38	2.01022	
十二年	13.93	99.43	1.99752	95.35	1.97932	
十三年	16.00	114.20	2.05767	114.86	2.06017	
		A=103.83	5)10.08139 2.01628	B=102.70	5)10.05771 2.01154	

（二）地域性的數字系列指數。 此種指數乃以地域為基性而求比率，例如表52所示之指數。

甲乙丙丁四國工資指數

表52　　　以甲國之工資為 100

國　　別	工資指數
甲　國	100
乙　國	120
丙　國	90
丁　國	70

（三）實質的數字系別指數。此種指數乃以事項為基性而求比率，例如表53所示之指數。

某年各業股票價格指數

表53　　以鋼鐵業之股票價格作為 100

業　　別	股票價格指數
鋼鐵業	100
棉織業	80
絲織業	90
火柴業	52
造紙業	73

二．依材料之不同而分者。依材料不同而類分之指數甚夥，舉其最著者，有物價指數 (Index number of prices)，工資指數 (Index number of wages)，生活費指數(The cost of living index number)，生產消費量指數(Production nnd consumption index number)，對外貿易指數(Foreign trade index number)，投資指數(Investment index number)，成本指數 (Costing index number)等。茲分別述之如下：

（一）物價指數　物價者貨物之交易價格也。物價指數者卽以物價編成之指數也。此項指數又可分爲五種如下：

1.零售物價指數　零售物價乃消費者直接購買物品所付之價，以此物價編成指數卽爲零售物價指數。此種指數材料可獲自攤販，小商人，零售商舖，百貨商店等處。編製此種指數之最要目的，在藉以示明一般社會人羣生活程度之高低，及推算貨幣購買力（卽每一貨幣單位購買物品實數之謂）之消長。

2.批發物價指數　批發物價爲商人大宗買賣物品所議之價格，以此價格編成指數，卽批發物價指數。因批發物品大都爲內行企業者所定購，其價常較零售價爲低，其價變動之程度亦較爲迂緩而合理。故測量一般物價及考驗商情循環之眞相，常用其價所編成之指數。至此種指數之材料來源係在批發商人，售貨經紀人，大工廠，大商店等處。

3.輸出入物價指數　輸出入物價乃經國際貿易商人所宣布輸出入物品之價格或國境關卡徵收貨物出入口稅時由商人報告之價格。以此種價格編成指數，卽輸出入物價指數。此種指數可表示一國人民實際所付外貨價格之變化，並可用以推測國際貿易盛衰之趨勢。

4.包價指數　包價者乃公共機關，如醫院，學校，貧民院，孤兒院，軍營等長期採購貨物之價，而常介乎批發與零售價之間之價。以此種價格編成指數，卽謂爲包價指數。惟公共機關採購物品數量雖鉅，其種類決不能普遍，品質必不能齊全。故以之編成指數，誠不足以顯示一般人民生活狀況，只能用以測度公共機關人員之生活狀況。

5.契約貨價指數　市場交易，多有在貨物未上市或未製成時，由售主與顧客預先議定貨價，立據爲憑者。以此貨價

編成指數，曰，契約貨價指數。此種指數，以其材料不易搜集，材料之範圍不廣，即屬編成，僅可測驗一部分貨價之變化，更以定價時期與貨物上市時期相距時間或甚遠，或出預料之外，則指數常不能表示貨價變動之眞相。是故此種指數爲統計學家所擯棄。

(二)工資指數　工資者乃由工人與雇主權衡於工人生活費用及貨物生產費用並參考其他同類工人工作之所得而約定作工之酬報。工資指數即彙各種工人所得各種作工之酬報編成之指數也。有此種指數，吾人即可以測驗工人生活之所憑依之生產費用一部分之工作費用之變動。宜歐美各國爲解决勞工生活問題起見，幾莫不從事此種指數之編製焉。

(三)生活費指數　生活費者乃維持人類生存最低限度之費用，如衣食住燃料等費用是也。以此種費用編成指數即爲生活費指數。此種指數能表示維持生活之用品之購買力之增減，能用以糾正名義工資以適合貨幣購買力之增減，而使眞實工資不生異常變動。

(四)生產消費量指數　生產消費者指貨物之生產消費也。故生產量指數即以各種貨物生產量編成之指數。消費量指數即以各種貨物消費量編成之指數。有此兩種指數，則貨物之供求可使交相適應，可以減少或有過剩與恐慌之危險矣。

(五)對外貿易指數　對外貿易指數乃以一國對外貿易額編成而用以表示對外貿易之狀況者也。此種指數不宜用對外貿易值編製，否則即不足以確示對外貿易趨勢，蓋貿易值之增加，不能認爲貿易額亦增高，自亦不能肯定對外貿易之趨勢向上，反之，亦不能肯定對外貿易之趨勢向下。至若以貿易額編成指數，則其升降確與貿易之盛衰相爲呼應也。

(六)投資指數　投資指數者乃以公債劵，公司股票及其他有

價證券之價格或買賣數量所編成之指數也。有此種指數，卽易於考察債券，股票，證券等發行者業務之盛衰，業運之否泰，故善於經營實業者，當投資時，宜獲此種指數以爲指南。

(七)成本指數 成本指數者乃採用原料，工資及其他在營業上開支之各種用費所編製者也。有此指數，企業家卽可據以定公允之貨價並推測業務之盈虧。

第三節

編製指數之程序

編製指數應取何種步驟，統計學者言人人殊，然概括之，不外下列五步驟：

第一步，確定編製指數之目的。 吾人編製指數，必先確定編製指數之目的，蓋此種目的既經確定，斯可採取適宜之指數材料：例如編製之目的爲測生活費之變化，於是取材於家庭所習用之食品，衣着，燃料，傢具等物品之零售物價；如爲研究工人購買力之強弱，則搜集關于工人實際收入額之材料；如爲測量貨幣購買力之大小，則取材於躉售物價；如欲測商情之變遷，則當選取變化最早應變最速之物品而用其價值；如爲表示工業製造品成本之高下，則當搜集原料價格，工資，利率等材料；如欲明普通物價之變遷，則對於市場各類貨物，均須揀樣以作材料。設若編製指數之目的不定，則編製各指數，應取何種材料，不得而知，如竟隨便蒐取，必多不當，取材不當，則雖編成指數，固未可代表事實相對變更之眞情勢焉。

第二步，選擇指數材料。 編製指數之目的既定，卽須選擇爲達到該目的所必需充分之材料。惟材料必如何始可敷用，此不可不加以研究，蓋取材太少，固屬掛一漏萬，不足以確示事實之一般狀

況，過多，則搜集匪易，旣費材力，更需技術，所得往往不償所失。於是有美國哥倫比亞大學教授米乞爾氏（Wesley C. Mitchell）對此問題，謀所以解答之，嘗取1890年至1913年美國物價編製指數六種如表54所示，其所不同者只在所選物品之數目與種類。在

表54　1890—1913年美國六種物價指數

(1890—1899年平均價格=100)

年別＼物品數	242至261品	145品	50品	40品	25品	25品
1890	113	114	114	113	115	113
1891	112	113	114	114	112	118
1892	106	106	105	105	103	112
1893	106	105	105	101	103	107
1894	96	96	94	93	92	96
1895	94	93	94	95	95	93
1896	90	89	87	88	88	85
1897	90	89	89	89	90	84
1898	93	93	95	95	96	90
1899	102	103	103	108	107	103
1900	111	111	112	115	113	109
1901	109	110	1[illegible]9	116	111	107
1902	113	114	116	122	116	117
1903	114	114	115	118	118	117
1904	113	114	116	118	122	110
1905	116	116	118	122	123	115
1906	123	122	123	128	130	122
1907	130	130	132	138	132	132
1908	122	121	125	129	124	122
1909	125	124	132	135	133	128
1910	130	131	135	141	133	134
1911	126	130	129	135	129	131
1912	130	134	138	142	140	138
1913	130	131	138	139	142	133
1890—1899之平均	100	100	100	100	100	100
1900—1909之平均	118	118	120	124	122	118
1910—1913之平均	129	132	135	139	136	134

表中第一行之指數乃用1913年勞動統計局所調查二百四十以上物品之價格編成，其中以一物而列有數種不同之價者頗多，如燕麥粉有二種，革有四種，女衣類有六種，鋼具有十一種等是。第二

行之指數所選用之物品，因其同類者之價格僅以一平均數代表之，故減至一百四十五。第三行之指數所選用之物品僅五十項。第四行之指數所採用物品僅四十項，代表物品二十種，以每物各有兩價，一爲原料價，一爲製品價，例如牛與牛肉 銅塊與銅絲，大麥與麥麪等是。第五及第六行之指數各依揀樣法任取重要物品二十五種編成，但二者物品仍不相同也。由此六行之指數，視其趨勢，大致相同，可證材料之多寡固未必妨碍其所編指數之正確程度。於是吾人可對於選擇材料之法，蔽之以一言，曰，取賅且當。所謂賅者，卽採用之材料無論其爲全體事實之一大部分或一小部分，必須能代表全體，所謂能代表全體者，卽材料之分子本身之性質，彼此相差極遠，而其性質與未經採用者之性質相較極近，例如編製物價指數，須選用產銷甚旺而能代表各種性質之各種物品，其價格之變動須能彼此無直接關係，而與未選用者相較極有關係，如此行之，則選用之物可以代表全體。所謂當者，卽選用之材料須能適合編製指數之目的，而材料之來源須極可靠也，例如欲編製指數以覘人民之生計，則須選用零售物價，而其來源乃在忠實之小商人，零售物品商店等處。

第三步，擇定基期，基本地點或基本事項。 指數之材料既經搜集齊全，則視材料如爲時間性者，卽須確定一基期，如爲空間性者，卽須確定一基本地點或基本事項，然後按此基期或基本地點或基本事項計算指數。惟基期應定於何時，基本地點應定於何處，基本事項應定於何項，可答之曰，均宜定於主要之部分。至三者之中以基期常爲學者所研究，蓋大多數之指數乃屬於時間性者也。學者對于擬定基期之意見頗爲參差，茲撮其大要，分基期之種類及基期之確定兩項言之。

(一)基期之種類 基期有二種：卽固定基期 (The fixed base system)與遞推基期(The chain base system) 是也。前者又

可分爲兩種：一曰惟一固定基期 (One fixed base system)，二曰擴大基期 (The broadened base system)。惟一固定基期定於一較短時期，如一年，一月等。擴大基期定於一較長時期，如五年，六月等。兩者時期雖有長短，而時期一定，卽不易變更。至遞推基期則須隨時變換，譬以 1913 年之物價合成100求1914年物價之百分比率，復以1914年之物價合成100求1915年之百分比率，依次類推，是各年皆有爲基期之機會也。固定基期與遞推基期互有所不及。固定基期不如遞推基期能使各時期百分比率直接遞相比較，遞推基期當推移計算百分比率時，偶有差誤，將愈積愈多，則不如固定基期雖或發生差誤，其影響於全體頗微也。

(二)基期之確定　基期究以定於何時爲宜，應以去年或某一年或某數年或前一月或某一月或某數月乎，曰，皆可。但須注意下列三種原則：

1. 基期宜定於一般經濟及社會狀況穩定之時不宜在經濟及社會狀況變動劇烈之時。苟對於經濟及社會狀況之穩定與否難以決定，宜用擴大基期，蓋其時期稍長，經濟及社會狀況雖有劇烈變動，可以相銷而呈穩定之局面。
2. 視編製指數屬於何種，選擇基期須在該種狀況平穩之時，例如編製物價指數，則須採用物價平穩之時爲基期。雖然時期之平穩，何由知之，恃目光與經驗以審定之乎，曰，未盡可也；蓋目光與經驗皆主觀之工具，對於事實恐有時不易爲準確之判別，最好用客觀的方法以審定之，其法乃根據求平均差或標準差差異係數之算式求之，因所謂平穩時期者卽合於常軌而呈常態之之一時期，凡一事實呈常態者，其中平均差或標準差必小，非然者必大，故極宜取一事實平均差或標準差最小之時爲平穩之時。惟欲辨平均差或標準差之爲小

抑爲大，須用求平均差或標準差係數之方法；其法爲先測量每一個次數分配之離中趨勢，以求平均差或標準差，然後用公式$V.=\frac{A.D.\times 100}{M}$求平均差係數，或用公式$V=\frac{\sigma\times 100}{M}$求標準差係數，求出差異係數卽可比較兩個或兩個以上之次數分配之差異程度，而辨其大小，玆舉例如下以說明之：

表55　　上海躉售物價指數離中差數

中華民國十二年至十六年

年別／指數離中差／月別	十二年		十三年		十四年		十五年		十六年	
	指數	離中差	指數	離中差	指數	離中差	指數	離中差	指數	離中差
一月	152.7	3.7	155.8	1.9	159.9	.5	164.0	.1	172.8	2.4
二月	157.5	1.1	159.5	5.6	159.2	.2	163.0	1.1	172.0	1.6
三月	158.7	2.3	157.5	3.6	160.3	.9	164.4	.3	174.7	4.3
四月	157.7	1.3	153.7	.2	159.3	.1	162.8	1.3	173.1	2.7
五月	158.4	2.0	154.3	.4	157.8	1.6	159.7	4.4	171.3	.9
六月	155.2	1.2	151.8	2.1	157.3	2.1	155.8	8.3	169.3	1.1
七月	155.4	1.0	151.5	2.4	162.8	3.4	156.9	7.2	171.0	.6
八月	153.1	3.3	148.8	5.1	160.3	.9	160.5	3.6	170.8	.4
九月	156.8	.4	149.0	4.9	160.2	.8	164.2	.1	171.8	1.4
十月	156.1	.3	152.8	1.1	159.0	.4	171.1	7.0	163.7	1.7
十一月	157.3	.9	154.9	1.0	158.6	.8	174.4	10.3	165.7	4.7
十二月	157.5	1.1	157.4	3.5	158.1	1.3	172.0	7.9	163.5	6.9
總數	1876.4	18.6	1847.0	31.8	1912.8	13.0	1968.8	51.6	2044.7	28.7
平均數	156.4	A.D. 1.55	153.9	A.D. 2.65	159.4	A.D. 1.08	164.1	A.D. 4.3	170.4	A.D. 2.39

指數材料來源　財政部駐滬貨價調查局

先求出每年十二個月之平均指數與該年各月指數相較，求出各月指數離中差，以其和除以十二，其結果爲該年指數之平均差，然後以該年之平均指數除平均差乘100，卽得該年平均差系數，各年指數之平均差系數計算如下：

民國十二年 $\frac{1.55\times100}{156.4}=.0099\times100=.99$

民國十三年 $\frac{2.65\times100}{153.9}=.0172\times100=1.72$

民國十四年 $\frac{1.08\times100}{159.4}=.0068\times100=.68$

民國十五年 $\frac{4.3\times100}{164.1}=.0262\times100=2.62$

民國十六年 $\frac{2.39\times100}{170.4}=.0140\times100=1.4$

由上可知民國十四年指數之差異係數最小，故此年比較可謂爲平穩之年。

3.基期必爲一時間能供給十分正確之材料者，譬如調查時期正在施行調查，搜集材料未易準確，卽不宜選爲基期，蓋在基期所選用之材料如不正確，更何能希望根據此種材料算出之指數不生錯誤耶。

第四步，選定權數。 指數有簡單與加權之分，視事實之各項於其全體中所佔勢力之重輕而表示之以一種數目卽所謂權數，增減高下其變化之影響，務使事項之重要者佔適當之勢力，以編之指

數，曰，加權指數。不問事實之各項於其全體中所佔勢力之重輕以用權數增減高下其變化之影響者編成指數，曰，簡單指數。簡單指數既不加權，則計算簡便，且權數之材料搜集不易，加權與否，影響指數編製之結果甚微；故一般學者頗樂於用之。然欲臻指數於正確健全，若能得權數之材料，指數仍有加權之必要也。惟何數據為權數乎，曰，當視編製指數之目的而定，例如欲知工人生活之狀況，則取材於工人消費品之零售價以編指數，而此種消費品在工人家庭所佔之成分，乃最適宜之權數也；如欲推測商情之變化，則取材於最富代表性而感應商情變化最速之躉售物價以編指數，其權數則視所選用物品對於商情變化反映之程度而定。

權數既定，若受其影響之指數屬於時間性者，此權數能始終如一乎，抑逐時變更乎，學者不一其說。主不變之說者以為欲測某事之變化，則當摒去其節外生枝之變化，權數若隨時變更，則指數至少有兩重變化：一為事情之變化，一為權數之變化，二者混結，不能分清，足以攪亂主要變化程度之準確，例如編製歷年物價指數以測物價之變化，若逐年變更物品權數，則編成指數有兩重變化；一為物價之變化，一為權數之變化，因後者之變化，乃使編製指數所欲測度物價之變化，失其準確之趨勢。然則權數須始終不變乎，主變更之說者以為不可，謂權數經久不變，則其影響指數之正確程度甚大，蓋指數之有時代性者，所取之材料有為昔之所重而非今之所重，今之所重而非昔之所重，昔之所有今之所無，今之所有昔之所無者，若權數固定，是使材料之重要性如一，以此種材料編成指數，必生錯誤，例如編製歷年物價指數，所選之物品，昔之所用者今已不再製造或絕迹市場，昔之所無者，今已為大宗買賣，昔之所棄如敝屣者，今已成為時尚之品，其於指數之影響有前後軒輕之不同，能不變其權數耶。兩說各具理

由，互有短長，乃有折衷之說，權數不必僅取材於一時期之數，可用若干時期之平均數爲之，蓋如此則權數之差異數(dispersion)縮小，而不正確之弊稍減也；又有一法，卽每一長期(如十年二十年等)將權數修改一次，而於銜接新舊權數之若干短時期(例如年)用新舊權數各自計算指數，則權數變更之結果不難比較而知，故以此法編成指數，旣可免兩重變化之病，又可避加權時謬其輕重之稱，並可省每一短時期換算權數之麻煩，學者稱之。

編製指數欲加權於其材料，在材料易於搜集時，固無問題，惟材料如不易徵集，則其自身之輕重未可明悉，自不易定其權數，於是有揀樣法，自全體事實之各部分依其重要程度之高下，選取充分適當比例之分量以爲權數。

第五步，計算指數。 指數之材料已經搜集，基期及權數均已確定，乃須從事於指數之計算。惟指數計算之方法頗多，公式逾百，計算時，詎能一一應用，只可用其中之最適當者，然此適當者，何由辨別，此則不能不先加以深切之研究，俾明何者適用於何時，至應用時乃不致臨事張皇應付失當。然而指數之計算法極多，研究其法之運用乃爲指數編製程序中問題最複雜之一步，故吾將另闢第四節以述之。

第四節

指數之計算方法

指數之計算方法，大都根據求集中量數之各法演成各種公式；因每種公式，至少又可分爲簡單的與加權的 (unweighted and weighted) 兩種，於是算出公式一百餘種，惟其中計算煩難，意義

晦澀者頗多，故只舉其最切於實用者，言之於后。

計算指數之方法，為人所習用者，大別之有三種：即綜合比例法(Ratio of Aggregates)，比例之平均法Average of Ratios)及平均之比例法(Ratio of Averages)是也。茲分述之如下：——

一.綜合比例法 以綜合比例法，求出之指數，即所謂綜合的指數(The Aggregation Index Number)。此種指數係將擬算時期或擬算地點或擬算事項之各種數量之總和以基期或基本地點或基本事項之各種數量之總和除之，而得一種比例數，復乘以 100 求出百分比率，（學者多有主張此百分比率即為指數欲明其理由可參閱平均之比例法之算術平均公式）再綜合各百分比率而平均之，以求出平均數。茲為明此解說起見，將求綜合的指數所依據之公式，錄之如下：

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100 \text{ 或 } \frac{P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots}{P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots}\times 100$$

$P_0', P_0'', P_0''', \cdots$ 為基期或基本地點或基本事項之各種數量

$P_1', P_1'', P_1''', \cdots$ 為擬算期或擬算地點或擬算事項之各種數量

在每 P字右上角之記號為數量之類別

在每 P字右下角之記號代表某時期某地點或某事項

Σ 為各數量相加之和之符號

舉例如下，以說明依據上列公式求出指數之法：

表56　　　某地歷年物價表

（物價以元計）

物名 \ 單位 \ 民國年份		九年	十年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年	十六年	十七年
蠶豆	石	5.02	5.88	5.89	5.00	6.67	6.30	7.41	8.13	8.70
玉蜀黍	石	4.88	5.86	6.05	4.96	6.77	6.62	7.60	8.27	8.44
熒昌火柴	百包	4.86	6.27	6.25	5.08	6.35	6.25	7.23	7.30	7.70
牛肉	斤	.21	.25	.25	.27	.29	.30	.40	.30	.32
花生仁	斤	.18	.19	.19	.28	.34	.34	.24	.35	.38
白[illegible]布	丈	1.95	2.20	2.20	2.50	2.15	2.50	2.71	2.20	2.74
黃豆	石	8.17	7.49	7.99	7.39	8.14	7.82	6.36	7.23	8.60
中等棉花	担	34.98	37.99	40.06	40.00	48.00	48.00	50.00	50.00	52.00
僧牌洋燭	十包	1.87	2.02	2.22	2.20	2.50	2.70	3.10	3.20	3.38
鉛粉	斤	.31	.39	.39	.42	.56	.59	.73	.99	1.17
紅兎麵粉	包	1.98	2.34	2.40	2.50	3.03	3.37	3.57	4.00	5.11
樹炭	百斤	2.49	3.31	3.52	4.00	4.30	4.46	4.29	4.48	4.09

如以九年爲基年，則其物價作爲 100；乃用公式 $\frac{\Sigma P}{\Sigma P_0}\times 100$ 先算民國十年貨物之比價price relative 卽物價百分比率）如下：

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100=$$

$$\frac{5.88+5.86+6.27+.25+.19+2.20+7.49+37.99+2.02+.39+2.34+3.31}{5.02+4.88+4.86+.21+.18+1.95+8.17+34.98+1.87+.31+1.98+2.49}$$

$$\times 100=\frac{74.19}{66.90}\times 100=110.9$$

再用公式 $\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100$ 計算十一年十二年等年之比價，其結果並列於下表：

表57

年份	物價綜合	比價 九年物價=100	年份	物價綜合	比價 九年物價=100
民國九年	66.90元	100.00	民國十四年	89.25元	133.41
民國十年	74.19元	110.90	民國十五年	93.64元	139.97
民國十一年	77.41元	115.71	民國十六年	96.45元	144.17
民國十二年	74.60元	111.51	民國十七年	102.63元	153.41
民國十三年	89.10元	133.18			

由上表可知比價凡九，則求其指數，必將九種比價相加而除以9，其算式如次：

$$\frac{100.0+110.9+115.71+111.51+133.18+133.41+139.97+144.17+153.41}{9}$$

$$=\frac{1142.26}{9}=126.92$$

物價指數即126.92

2.加權的公式

$$\frac{\Sigma P_1W}{\Sigma P_0W}\times 100 \quad 或 \quad \frac{P_1'W_1+P_1''W_2+P_1'''W_3+\cdots\cdots}{P_0'W_1+P_0''W_2+P_0'''W_3+\cdots\cdots}\times 100$$

W_1，W_2，W_3，……為各項權數

惟此 $W_1W_2W_3$…為基期或基本地點或基本事項抑擬算時期或擬算地點或擬算事項所有之量數乎，學者於此主張頗不一致，曾化算公式多種，茲舉其最著者如下：

設以 P_0代表基本數

Q_0代表基本數之權數

P_1代表擬算數

Q_1代表擬算數之權數

(1) $$\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}$$

此公式爲拉斯貝爾 (Laspagre) 氏所權與，故有人名之爲拉斯貝爾綜合法(Laspagre Aggregative Method)。

(2) $$\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}$$

此公式爲派許(Paaschi)氏所立，故有人名之曰派許綜合法(Paaschi Aggregative Method)。

(3) $$\sqrt{\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}\times\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}}$$

此公式卽費雪 (Fisher) 氏所認爲最佳之理想公式(Ideal Formula)。

(4) $$\frac{\Sigma\frac{Q_0+Q_1}{2}P_1}{\Sigma\frac{Q_0+Q_1}{2}P_0} \text{ 或 } \frac{\Sigma(Q_0+Q_1)P_1}{\Sigma(Q_0+Q_1)P_0}$$

此公式爲愛奇華士及馬沙氏 (Edgeworth and Marshall) 所倡用，故有人名之曰愛奇華士馬涉綜合法(Edgeworth and Marshall Aggregative Method)。

(5) $$\frac{\Sigma P_1\times\text{若干時期之權數之平均數}}{\text{若干時期之某事項之數之平均數}\times\text{若干時期之權數之平均數}}$$

此公式頗爲人所採用，其法名曰，基期擴張綜合法(Broadened Base Aggregative Method)。

二、比例之平均法 比例之平均法係將擬算時期或擬算地點，或擬算事項之各數量，以基期或基本地點或基本事項之各數量，分別除之，所得商數乘以100得百分比率，亦可謂爲比較數（在物價指數上則稱爲比價 ），然後綜合所有百分比率而平均之，求出之平均數卽指數也。此種指數有五：一曰算術平均的指數(Arithmetic Index Number)，二曰幾何平均的指數（The Geometric Index Number)，三曰調和平均的指數（The Harmonic Index Number)，四曰中點數的指數（The Median Index Number)，五曰衆數的指數(The Mode Index Number)。其公式分述如下：

1. 算術平均的指數

(1)簡單的公式

$$\frac{\left(\Sigma\frac{P_1}{P_0}\right)\times 100}{N} \quad \text{或} \quad \frac{\left(\frac{P_1'}{P_0'}+\frac{P_1''}{P_0''}+\frac{P_1'''}{P_0'''}+\cdots\cdots\right)\times 100}{N}$$

舉例

表58 某地物價表

貨物		每年平均價格		
		民國元年	民國二年	民國三年
乾草	每噸	20.4104元	16.0288元	15.6863元
牛肉	每百磅	9.3585	8.9288	9.6520
豬肉	每百磅	7.5954	8.3654	8.3608
穀	每斗	.6855	.6251	.6953
燕麥	每斗	.4380	.3758	.4191
皮革	每磅	.1760	.1839	.1963
棉	每磅	.1150	.1279	.1210

如以民國元年爲基年求民國二年之物價指數

$$則\frac{\left(\Sigma\frac{P_1}{P_0}\right)\times 100}{N}$$

$$=\frac{\left(\frac{16.0288}{20.4104}+\frac{8.9288}{9.3585}+\frac{8.3654}{7.5954}+\frac{.6251}{.6855}+\frac{.3758}{.4380}+\frac{.1839}{.1760}+\frac{.1279}{.1150}\right)\times 100}{7}$$

$$=\frac{(.7853+.9541+1.1014+.9119+.858+1.0449+1.1122)\times 100}{7}$$

$$=\frac{6.7678\times 100}{7}=96.68$$

如以民國元年爲基年求民國三年之物價指數，其法亦如上，惟P_1須代以民國三年之物價耳。民國三年之物價指數爲100.56。今將三年物價指數詳爲列明於表59。

表59　某地物價指數表
（用簡單算術平均法求出指數）

貨物	單位	民國元年	民國二年	民國三年
乾草	噸	100	78.53	76.85
牛肉	百磅	100	95.41	103.14
猪肉	百磅	100	110.14	110.08
穀	斗	100	91.19	101.43
燕麥	斗	100	85.80	95.69
皮革	磅	100	104.49	111.53
棉	磅	100	111.22	105.22
比率之總數		700	676.78	703.94
指數（比率之平均數）		100	96.68	100.56

(2)加權的公式

$$\frac{(\Sigma\frac{P_1}{P_0}W)\times 100}{\Sigma W} \quad 或 \quad \frac{\frac{P_1'}{P_0'}W_1+\frac{P_1''}{P_0''}W_2+\frac{P_1'''}{P_0'''}W_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}\times 100$$

此公式之計算法與簡單的公式大致相同，其所異者僅加權與否及除數一爲項數之總和一爲權數之總和耳。

2.幾何平均的指數

(1)簡單的公式

$$\sqrt[N]{\pi(\frac{P_1}{P_0}\times 100)}$$

$$或\ \sqrt[N]{(\frac{P_1'}{P_0'}\times 100)\times(\frac{P_1''}{P_0''}\times 1(0)\times(\frac{P_1'''}{P_0'''}\times 100)\times\cdots\times(\frac{P_1N}{P_0N}\times 100)}$$

π爲乘積之符號

計算上列公式頗覺煩瑣，最好用對數方法計算之，此公式乃可變爲下式：一

$$\frac{\log(\frac{P_1'}{P_0'}\times 100)+\log(\frac{P_1''}{P_0''}\times 100)+\log(\frac{P_1'''}{P_0'''}\times 100)+\cdots+\log(\frac{P_1N}{P_0N}\times 100)}{N}$$

現用表58之一部分材料，代入公式，以民國元年爲基年，求民國二年之物價指數。

$$\frac{\log(\frac{P_1'}{P_1'}\times 100)+\log(\frac{P_1''}{P_0''}\times 100)+\log(\frac{P_1'''}{P_0'''}\times 100)+\cdots\cdots+\log(\frac{P_1N}{P_0N}\times 100)}{N}$$

$$=\frac{\log\ \frac{16.0288}{20.4104}\times 100)+\log(\frac{8.9288}{9.3585}\times 100+)\log\ \frac{8.3654}{7.5954}\times 100)+\log(\frac{.6251}{.6855}\times 100) +\log(\frac{.3758}{.4380}\times 100)+\log(\frac{.1839}{.1760}\times 100)+\log(\frac{.1279}{.1150}\times 100)}{7}$$

$$=\frac{\log 78.53+\log 95.41+\log 110.14+\log 91.19+\log 85.80+\log 104.49+\log 111.22}{7}$$

$$=\frac{1.89504+1.97959+2.04194+1.95995+1.93349+2.01908+2.04618}{7}$$

$$=\frac{13.87527}{7}=1.98218$$

因　$\log 95.9=1.98218$

故　95.9為民國二年之物價指數

用對數法計算簡單幾何的公式求出民國二年之物價指數，更可編成一表如下以顯示之：

表60

貨物	單位	民國元年 物價	民國元年 比價	民國元年 對數	民國二年 物價	民國二年 比價	民國二年 對數
乾草	噸	元 20.4104	100	2.00000	元 16.0288	78.53	1.89504
牛羊肉	百磅	9.3585	100	2.00000	8.9288	95.41	1.97959
豬肉	百磅	7.5954	100	2.00000	8.3654	110.14	2.04194
穀	斗	.1855	100	2.00000	.6251	91.19	1.95995
燕麥	斗	.4380	100	2.00000	.3758	85.80	1.93349
皮革	磅	.1760	100	2.00000	.1839	104.49	2.01908
棉	磅	.1150	100	2.00000	.1279	111.22	2.04618
				7)14.00000			7)13.87527
				log100=2.00000			log95.9=1.98218
				民國元年物價指數=100			民國二年物價指數=95.9

(2)加權的公式

$$\sqrt[\Sigma W]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right)W}$$

或 $$\sqrt[(W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots)]{\left(\frac{P_1'}{P_0'}\times 100\right)W_1\times\left(\frac{P_1''}{P_0''}\times 100\right)W_2\times\left(\frac{P_1'''}{P_0'''}\times 100\right)W_3\times\cdots\cdots}$$

此公式之計算法與簡單的公式大致相同，所異者僅加權與否及根號位置之易項數之和爲權數之和耳。

3.調和平均的指數

(1)簡單的公式

$$\frac{N}{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}\times 100 \text{ 或 } \frac{N}{\left(\frac{P_0'}{P_1'}+\frac{P_0''}{P_1''}+\frac{P_0'''}{P_1'''}+\cdots\cdots\right)}\times 100$$

仍用表58之材料代入公式以求民國二年物價指數

$$\frac{N}{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}\times 100$$

$$=\frac{7}{\frac{20.4104}{16.0288}+\frac{9.3585}{8.9288}+\frac{7.5954}{8.3654}+\frac{.6855}{.6251}+\frac{.4380}{.3758}+\frac{.1760}{.1839}+\frac{.1150}{.1279}}\times 100$$

$$=\frac{7}{1.273+1.048+0.908+1.097+1.166+0.957+0.899}\times 100$$

$$=\frac{700}{7.348}=95.27$$

民國二年之物價指數爲95.27

爲易於明瞭公式 $\frac{N}{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}\times 100$ 之運用起見，可製成如下之表式以表示之:

表 61

貨物	單位	民國元年 物價	民國元年 比價	民國元年 倒數	民國二年 物價	民國二年 比價	民國二年 倒數
乾草	噸	20.4104	100	.01	16.0288	78.53	.01273
牛羊肉	百磅	9.3585	100	.01	8.9288	95.41	.01048
豬肉	百磅	7.5954	100	.01	8.3654	110.14	.00908
穀	斗	.6855	100	.01	.6251	91.19	.01097
燕麥	斗	.4380	100	.01	.3758	85.80	.01166
皮革	磅	.1760	100	.01	.1839	104.41	.00957
棉	磅	.1150	100	.01	.1279	111.22	.00899
				7)|.07 .01			7)|.07348 .010497

民國元年物價指數$=\frac{1}{.01}=100$

民國二年物價指數$=\frac{1}{.010497}=95.27$

(2)加權的公式

$$\frac{\Sigma W}{\Sigma(\frac{P_0}{P_1})W}\times 100 \text{ 或 } \frac{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}{(\frac{P_0'}{P_1'})W_1+\frac{P_0''}{P_1''}W_2+\frac{P_0'''}{P_1'''})W_3+\cdots\cdots}\times 100$$

此公式與簡單的公式大略相同，其所不同之處卽在加權與否及代項數之總和以權數之總和耳。

4.中點數的指數

(1)簡單的　此種指數係就$\frac{P_1'}{P_0'}\times 100$，$\frac{P_1''}{P_0''}\times 100$……等百分比率，內擇其居中者爲之因此種指數旣爲各比率之中間一數，故計算時，先須將百分比率按照大小依次排列，然後以第$\frac{N+1}{2}$的百分比率爲指數。

(2)加權的　此種指數之異於簡單的僅在加權之一事。

5.乘數的指數

(1)簡單的　此種指數卽於$\frac{P_1'}{P_0'}\times 100$，$\frac{P_1''}{P_0''}\times 100$……等百分比率中擇其最常見者爲之，

(2)加權的　此種指數之異於簡單的亦僅在加權之一事。

三。平均之比例法　此法係將擬算時期或擬算地點或擬算事項之數量綜合平均，再將基期或基本地點或基本事項之數量綜合平均，然後以後者之平均數除前者之平均數，算出比率，以求指數，此種指數亦有五種如下：

1.算術平均的指數

(1)簡單的　其公式爲

$$\text{公式}\quad \frac{\dfrac{P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots+P_1N}{N}}{\dfrac{P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots+P_0N}{N}}\times 100$$

$$\text{因}\quad \frac{\dfrac{P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots+P_1N}{N}}{\dfrac{P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots+P_0N}{N}}\times 100$$

$$=\frac{P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots+P_1N}{N}$$

$$\times\frac{N}{P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots+P_0N}\times 100$$

$$=\frac{P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots+P_1N}{P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots+P_0N}\times 100$$

$$\text{故}\quad \frac{\dfrac{P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots+P_1N}{N}}{\dfrac{P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots+P_0N}{N}}\times 100$$

$$\text{可變爲}\frac{P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots P_1N}{P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots P_0N}\times 100$$

(2)加權的

公式 $$\frac{\dfrac{P_1'W_1+P_1''W_2+P_1'''W_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}}{\dfrac{P_0'W_1+P_0''W_2+P_0'''W_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}}\times 100$$

因 $$\frac{\dfrac{P_1'W_1+P_1''W_2+P_1'''W_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}}{\dfrac{P_0'W_1+P_0''W_2+P_0'''W_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}}\times 100$$

$$=\frac{P_1'W_1+P_1''W_2+P_1'''W_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}$$

$$\times\frac{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}{P_0'W_1+P_0''W_2+P_0'''W_3+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{P_1'W_1+P_1''W_2+P_1'''W_3+\cdots\cdots}{P_0'W_1+P_0''W_2+P_0'''W_3+\cdots\cdots}\times 100$$

故 $$\frac{\dfrac{P_1'W_1+P_1''W_2+P_1'''W_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}}{\dfrac{P_0'W_1+P_0''W_2+P_0'''W_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}}\times 100$$

可變爲 $$\frac{P_1'W_1+P_1''W_2+P_1'''W_3+\cdots\cdots}{P_0'W_1+P_0''W_2+P_0'''W_3+\cdots\cdots}\times 100$$

2.幾何平均的指數

(1)簡單的

公式 $$\frac{\sqrt[N]{P_1'\times P_1''\times P_1'''\times\cdots\cdots\times P_1^N}}{\sqrt[N]{P_0'\times P_0''\times P_0'''\times\cdots\cdots\times P_0^N}}\times 100$$

(2)加權的

公式 $$\frac{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_1 W}}{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_0 W}}\times 100$$

或 $$\frac{\sqrt[W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots]{P_1'W_1\times P_1''W_2\times P_1'''W_3\times\cdots\cdots}}{\sqrt[W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots]{P_0'W_1\times P_0''W_2\times P_0'''W_3\times\cdots\cdots}}\times 100$$

3.調和平均的指數

(1)簡單的

$$公式\ \frac{\dfrac{N}{\Sigma\left(\dfrac{1}{P_1}\right)}}{\dfrac{N}{\Sigma\left(\dfrac{1}{P_0}\right)}}\times 100\text{或}\ \frac{\dfrac{N}{\dfrac{1}{P_1{}'}+\dfrac{1}{P_1{}''}+\dfrac{1}{P_1{}'''}+\cdots+\dfrac{1}{P_1N}}}{\dfrac{N}{\dfrac{1}{P_0{}'}+\dfrac{1}{P_0{}''}+\dfrac{1}{P_0{}'''}+\cdots+\dfrac{1}{P_0N}}}\times 100$$

(2)加權的

$$公式\ \frac{\dfrac{\Sigma W}{\Sigma\dfrac{W}{P_1}}}{\dfrac{\Sigma W}{\Sigma\dfrac{W}{P_0}}}\times 100\text{或}\ \frac{\dfrac{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}{\dfrac{W_1}{P_1{}'}+\dfrac{W_2}{P_1{}''}+\dfrac{W_3}{P_1{}'''}+\cdots\cdots}}{\dfrac{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots}{\dfrac{W_1}{P_0{}'}+\dfrac{W_2}{P_0{}''}+\dfrac{W_3}{P_0{}'''}+\cdots\cdots}}\times 100$$

其餘如乘數及中點數之比例皆可仿照算術平均幾何平均及調和平均之比例求法求之。

以上所舉計算指數之各種公式可供各種指數計算時採用，至其外尚有數種公式專用以計算特種指數，如實在工資指數，兩地物價折算指數等，玆略述之如下：——

$$實在工資指數=\frac{貨幣工資指數}{生活費指數}\times 100$$

例如英國與德國貨幣工資指數之比較為100:80，而生活費指數之比較為100:120，於是英國與德國實在工資指數之比例如下：

$$英國實在工資指數=\frac{100}{100}\times 100=100$$

$$德國實在工資指數=\frac{80}{120}\times 100=66.77$$

英國與德國實在工資指數之比例為$\frac{66.77}{100}$

$$兩地物價折算指數=\frac{甲地物價指數}{在甲地之乙地貨幣匯價指數}\times 100$$

例如英國躉售物價指數及英國美金匯價指數，皆以1913年爲基年算出。1920年物價指數爲 307.3，美金匯價指數爲 133.0。若欲將英國物價指數折成美金計算者，其算式如下：

$$\frac{307.3}{133.0}\times 100=231.1$$

第五節

三大顚倒測驗(Three Great Reversal Tests)

費霞教授曾以 1913 年爲基期，1918年爲擬算期，用同種貨價，以一百三十餘種不同之公式計算指數，比較結果，最大指數爲244，最小指數爲178，相差66，是公式甚多而求出之結果有懸殊者，吾人不可無適當之方法以考察其正確程度，於是指數上有所謂三大顚倒測驗：其一曰時間還元測驗(Time Reversal Test)，二曰因數還元測驗(Factor Reversal Test)，三曰循環測驗(Circular Test)，欲知任何一公式計算結果之正確程度，卽視其能否適合此三大測驗或其中之一二以爲斷也。

一.時間還元測驗　時間還元測驗者卽以兩時期任一爲基期，將各期之數求出比率，使其相乘還元爲 1 也。例如米價去年平均每石十元，今年十五元，若以去年爲基期，則去年與今年米價之比爲 100:150，今年米之比價爲 $\frac{150}{100}$(以 R_0 代之)，若以今年爲基期，則去年與今年米價之比爲66.67:100，去年米之比價爲 $\frac{66.67}{100}$

(以R_1代之)；設以$R_0 \times R_1$，其結果爲$\frac{150}{100} \times \frac{66.67}{100} = 1.00005$。其所以等於1者，以去年爲基期所求之比價等於今年爲基期所求之比價之倒數也。公式中之合於時間還元測驗者，有簡單中點數，乘數，幾何平均，綜合比例等公式及理想公式．不合者，有簡單算術平均，調和平均等公式。今舉簡單算術平均及幾何平均兩公式爲例，述明時間還元測驗法如下：

設去年米價平均每石十元，今年十五元，去年麥價每袋三元，今年一元五角，如以去年爲基期，則去年米之價比爲100，今年爲150，去年麥之價比爲100，今年爲50，如以今年爲基期，則今年米之價比爲100，去年爲66.67，今年麥之價比爲100，去年爲200。今將米麥價比之平均數排列於下列兩表：

表 62 去年爲基年

平均數別 / 年	算術平均數	幾何平均數
去年	$\frac{100+100}{2}=100$	$\sqrt{100\times100}=100$
今年	$\frac{150+50}{2}=100$	$\sqrt{150\times50}=87$

(I)

今年爲基年

平均數別 / 年	算術平均數	幾何平均數
去年	$\frac{200+66.67}{2}=133.3$	$\sqrt{200\times66.67}$ $=115.5$
今年	$\frac{100+100}{2}=100.0$	$\sqrt{100\times100}$ $=100$

(II)

對於算術平均法加以測驗

$$\frac{100}{100}\times\frac{133.3}{100}=1.33$$

因1.33與1之差數當1之33%，其相差甚遠，故算術平均法不適合時間還元測驗。

對於幾何平均法加以測驗

$$\frac{87}{100}\times\frac{115.5}{100}=1.005$$

因1.005與1之差數僅當1之$\frac{5}{1000}$，故幾何平均法頗適合於時間還元測驗。

二.因數還元測驗　因數還元測驗者，即某事項之數爲其因子相乘之積或相加之和或因子之積或和之平均數，而欲測驗該事項之數，即推算其數與其因子之積或和或其平均數相等與否也。例如物值爲其二因子價與量相乘之積，以此推測物值之指數，即計算物價之指數與量之指數相乘之積，視其究與物值之指數相等否，如其等也，即爲合於因子顛倒之試驗，否則即爲不合。又如有甲乙丙丁四種物品之價，在民國十九年，甲物價格較十八年高一倍，在十九年乙物價格較十八年減低一半，丙丁物價兩年來未有變更，於是可知兩年來物價固未變也，蓋若以十八年爲基年，則甲乙丙丁各物之價當爲100，十八年之平均物價亦爲100，而十九年甲物之價比爲200，乙物之價比爲50，丙丁各物之價比仍爲100，用幾何平均法平均之則 $\sqrt[4]{200\times50\times100\times100}=100$，似此算式確合於因數還元測驗，因物品之因子甲乙丙丁各物之十九年價比之平均數仍與十八年相同也。然若用算術平均法平均十九年物品之價比，則$\frac{200+50+100+100}{4}=\frac{450}{4}=112.5$，似此算式不合於因數還元測驗，因十九年之平均物價固未變更，而其因子甲乙丙丁各物之十九年價比之平均數，竟與十八年不相同也。

公式中能合於因數還元測驗者，除幾何平均的公式外，另有理想公式等。

三. 循環測驗 循環測驗者，乃對於兩種或兩種以上之指數之正確程度為一種間接之試驗也。例如以甲地為基本地點，其物價指數為100，乙地物價指數乃為130，丙地物價指數乃為150，則甲乙兩地物價之比為$\frac{130}{100}$，如折合乙地物價指數130為100以與丙地物價指數比，則為$\frac{\frac{150}{130}\times 100}{100}$或$\frac{115.38}{100}$，夫以甲地與丙地物價指數直接相較為 100:150，故若用甲乙兩地物價指數之比率與乙丙兩地物價指數之比率間接的演算，亦可得甲地與乙地物價指數之比為 100:150，即可謂為合於循環測驗，否則，不合，今姑以$\frac{130}{100}\times\frac{115.38}{100}$，其得數為1.5，即以甲地物價當為1所得丙地物價之比較數，若以甲地物價為100，則丙地物價即為 150，故此種算法已適合循環測驗。此其理可譬證之以路程，例如由甲地至丙地，必經過乙地，甲乙丙地相距路程為 A，乙丙兩地相距路程為B，則甲丙兩地距離之長自當為 A+B，決不能因由甲至丙之路程分兩部分相加，與甲丙直接相通之路程遠近不同也。

循環測驗之用法，經費霞教授認為在理論上頗有欠缺之點。彼以物品為譬，謂同一物品在各地之重要程度不同；例如有甲乙丙三地用同種物品十五種編成物價指數，物品之中有木材五種，棉五種，紙五種，假定木材在甲乙兩地同為重要之商品，棉在乙丙兩地同為重要之商品，紙在甲丙兩地同為重要之商品，則甲乙兩地之物價指數，常為木材所支配，而使有一致之趨勢，因棉在甲地之重要程度不如乙丙兩地，紙在乙地之重要程度不如甲丙兩地，輕重之勢固可相銷也，依此類推，棉之勢力可以支配乙丙

兩地之物價指數而使有一致之趨勢，紙之勢力可以支配甲乙兩地之物價指數而使有一致之趨勢，按照數學定理，設甲等於乙，乙等於丙，則甲必等於丙，今甲乙兩地物價有一致之趨勢，乙丙兩地物價有一致之趨勢，則甲丙兩地物價似亦有一致之趨勢，惟其一致果係相等耶，僅因各受其重要商品勢力支配而相等，固非物價趨勢之真相等也，由此可知循環測驗本身卽爲一錯誤之方法。況一公式能適合循環測驗，必其所採用之權數一成不變，此在事實上，往往因時間及空間之重要性之差異所不許，則此種測驗自不能常用也。故優良之指數公式無須適合此種測驗，若果用之，則視公式求出之數如與測驗結果相差不遠，卽可認爲滿意。

指數公式中之能適合循環測驗者，只有簡單幾何平均的公式而已。雖理想公式亦不能適合，惟據試驗結果相差無幾也。

第六節
指數之特性

計算指數之公式，果盡適合三大測驗，卽能用於各種指數之計算而無誤乎，未可也，蓋以各種公式所求出之指數各有其特性，其能合於代表經計算之指數所屬之甲種情形，未必能合於乙種，能合於乙種者，未必合於甲種。故欲公式之應用適宜，不僅求其能合三大測驗，以驗其得數之正確，並須知指數之特性，斯可用之得當，指數之特性可分爲兩類：

一、用簡單的公式求出之指數之特性。如指數材料不全，其輕重不易估定，則計算指數，只可用簡單的公式。簡單的公式之特性可別爲六種言之：

1. 綜合比例的公式　用綜合比例的公式求出之指數常有錯誤發生。玆舉例如下以明之：

表63

物　品	價　格		價　比	
	1929(基期)	1930	1929(基期)	1930
糯米(石)	元 10.00	元 16.00	100	160
小麥(升)	.70	.90	100	129
豬肉(斤)	.30	.35	100	107

按簡單綜合比例的公式 $\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100$ 本由 $\frac{\frac{\Sigma P_1}{N}}{\frac{\Sigma P_0}{N}}\times 100$ 演出

是則1930年物價指數為 $\frac{\frac{16+.9+.35}{3}}{\frac{10+.7+.3}{3}}\times 100=\frac{16+.9+.35}{10+.7+.3}\times 100=156.8$

指數156.8實不正確，因糯米小麥與豬肉量之單位不相同，一為石，一為升，一為斤，今以此三種不同單位之價相加，而以3除之，以求三物之平均價，得156.8；設若有一單位變更，則三物之平均價必非156.8，例如米價不以石計而以斗計，每石十元改為每斗一元，在價值固仍相等，其改變理應對於指數不發生影響，乃竟不然，一覽下表，即可知矣。

表64

物　品	價　格		價　比	
	1929(基期)	1930	1929(基期)	1930
糯米(斗)	元 1.00	元 1.60	100	160
小麥(升)	.70	.90	100	129
豬肉(斤)	.30	.35	100	107

依簡單綜合比例的公式求出1930年之指數為 $\frac{1.6+.9+.35}{1+.7+.3}$

$\times 100=\frac{2.85}{2}\times 100=142.5$

此處 142.5 與原來材料所求出之 156.8 相差遠甚，是可知簡單綜合比例的公式求出之指數之性質爲無定 (indeterminate)，自不合於求正確之指數也。

簡單綜合比例的公式亦有所長，蓋其計算法乃自眞實數目的總合數求出指數，其代表性可以普及於編製指數所用之全部材料，其意義易於了解，其手續亟爲簡便。

2. 算術平均的公式　用算術平均的公式計算指數，雖數學智識極淺之人亦易了解。然其缺點卽在求出指數有上偏性 (upward bias)，蓋百分數漲勢無限，而跌勢最低至零爲止，極漲與極跌之勢相比，牽上之勢遠過於扯下，故全體事實中如有一二事項具極大漲勢，則全體蒙其影響，而所呈示之趨勢劇升，反失其眞相也。再者以此種公式計算有時間性之指數，一經時間還元測驗，則不獨擬算時期與基期之指數不能相乘爲 1，並可發生矛盾之結果，舉例如下以明之：

表65　　米麵價格表

物品＼民國年別	十八年	十九年
米（石）	元 8	元 16
麵（袋）	4	2

表66　以民國十八年爲基年計算指數

物品＼民國年別	十八年	十九年
米（石）	100	200
麵（袋）	100	50
指　數	2|200 100	2|250 125

表67 以民國十九年爲基年計算指數

民國年別 物品	十八年	十九年
米（石）	50	100
麵（袋）	200	100
指數	$2\,\lvert\,\underline{250}$ 125	$2\,\lvert\,\underline{200}$ 100

以十八年爲基年，則該年指數爲100；十九年爲125。以十九年爲基年，則十八年之指數爲125，十九年爲100。此其謬誤，已甚顯然。

B.調和平均的公式　調和平均數爲算術平均數之倒數，因算術平均的公式求出之指數有上偏性，故調和平均的公式求出之指數實得其反，而有下偏性(downward bias)，以算術平均的公式計算有時間性之指數，一經時間還元測驗，則擬算時期與基期之指數不僅不能相乘爲1，並可發生矛盾之結果。調和平均的公式亦然，惟其發生矛盾之結果與前者兩相背馳。例如前者擬算時期之指數較基期爲多，則後者反少。仍用表65之材料用調和平均的公式計算以明之。

$$將材料代入\frac{N}{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}\times 100或\frac{\Sigma\left(\frac{1}{P_0}\right)}{\Sigma\left(\frac{1}{P_1}\right)}\times 100$$

A.若以民國十八年爲基年

$$則十九年之指數爲\frac{2}{\frac{200}{100}+\frac{50}{100}}\times 100=80$$

$$\text{或爲}\frac{\frac{1}{100}+\frac{1}{100}}{\frac{1}{200}+\frac{1}{50}}\times 100=\frac{\frac{2}{100}}{\frac{5}{200}}\times 100$$

$$=\frac{2}{100}\times\frac{200}{5}\times 100=\frac{4}{5}\times 100=80$$

B.若以民國十九年爲基年

$$\text{則十八年之指數爲}\frac{2}{\frac{50}{100}+\frac{200}{100}}\times 100=80$$

$$\text{或爲}\frac{\frac{1}{100}+\frac{1}{100}}{\frac{1}{50}+\frac{1}{200}}\times 100=\frac{\frac{2}{100}}{\frac{5}{200}}\times 100=80$$

以民國十八年爲基年，則十八年與十九年指數之比爲100:80，而以民國十九年爲基年則十九年與十八年指數之比亦爲100:80，甚矣其矛盾也。

4.幾何平均的公式　用算術及調和平均的公式求出某事項之指數，常因此事項有劇烈之變動，一則偏於上漲，一則偏於下落。設用幾何平均的公式求同事項之指數，則雖此事項有劇烈之變動，不能影響於大體；例如以甲乙兩類物價編算指數，已知甲類物價較基期上升十倍，乙類物價較基期跌落十倍，若用算術平均的公式求出擬算期物價指數，則爲$\frac{\frac{1000}{100}+\frac{10}{100}}{2}\times 100=505$，用調和平均的公式求出擬算期物價指數，則爲$\frac{2}{\frac{1000}{100}+\frac{10}{100}}\times 100=20$，而以幾何平均的公式求出物價指數，則爲$\sqrt{1000\times 10}$

＝100，是平均物價固未變耳，至其理由乃以幾何平均數對于同等比例之變化，授以同等之力量，故兩類物價之一加十倍，一減十倍，其增減之比例相等，而物價未變也。夫幾何平均的公式能減低被平均數中之劇裂變動之勢，而生平正之結果，不似算術平均及調和平均之結果畸重畸輕，固其優點，但其弱點，則為計算手續頗繁，卽利用對數表查算，亦頗費時間，致不甚通俗也。

5.中點數的公式　此種公式所求出之指數，因取之於諸比率或平均數間之最中部分，不受極端比率或平均數之影響，故大數極漲時，不致發生如算術平均的指數偏高之弊，且計算時只須將百分比率或平均數按照大小，依次排列，然後取其中間一項為指數，如為偶數，則以最中兩項之數之平均數為指數，故求法極為簡便也。雖然，中點數的公式有時缺乏敏銳性（intensive），有時為任性（freakish），是其大病，蓋此種公式所求出之指數，於其兩極端之比率或平均數有劇烈變動時，幾無所感覺，而於中間一二數之改變時，受影響甚大，致其差誤或高或低，無一定之方向也。但若在材料項數多時，兩種特性之有無，於求出之指數不生大礙。如材料項數稀少，則此兩種特性之一有一無，足使指數不能代表其所示事實之眞相。

6.衆數的公式　計算此種公式，手續極為簡便，惟其缺乏敏銳性及有任性甚於中點數的公式，求出指數，不易正確，故學者鮮用之。

二.用加權的公式求出之指數之特性。　編製指數所用材料，如經彙齊，則計算指數公式時，常須加權，以支配相當勢力，使代表各種材料之重要程度。然而採用何種權數；基年，基本地點或基本事項之權數乎，擬算期，擬算地點或擬算事項之權數乎，抑兩者參用乎，學者對此意見紛歧，各衷一是。主張基期基本地點或基

本事項之權數者謂加基期基本地點或基本事項之權數以計算某種指數，則權數既一定，而指數即足以表示某種事實之真相。主張採用擬算時期擬算地點或擬算事項之權數者亦如前述。主張兩種權數參用者謂前者之分量常與後者之分量不同，各於指數計算有相當影響；即雖兩者之重要性不等，然不能謂其重要性稍弱者對於指數無絲毫影響，如用其一而舍其餘，是爲不當，故必參用權數，使單取前者或後者偏高偏低之弊稍減，而趨於公平。反對第一主張者謂時間性之權數不能固定，蓋權數所代表者事物之重要程度，至此種程度，絕不能持久不變也。反對第二主張者，謂擬算時期擬算地點或擬算事項之狀況，未經充分時期之考察，恐不易得其真相，何能輕于決定各事實之重要程度，各事實之重要程度既未能決定，則權數之分量即勉强擬定，恐遺莫大之錯誤也。反對最後之主張者謂編製某種指數，其目的在編成指數以表示某種事實之狀況，自不能以加權之關係而移變其真相，例如編製物價指數以表示物價之變遷，決不能使權數與物價並變而紛擾物價變化之真趨勢，今乃以一種公式而含有兩種權數，是使計算之結果原欲表示之事實，爲此兩種權數纏繞之關係而發生之變化，究歸原於何者，不易分別，更何能以此結果即謂足以代表某種事實之狀況乎。

關于反對第一及第二主張之理由可想像而辨其是非，關于反對第三主張之理由，如不用公式以實在材料計算，視其結果如何，則無以明之。故以權數配合之公式一種即 $\dfrac{\Sigma\frac{q_0+q_1}{2}p_1}{\Sigma\frac{q_0+q_1}{2}p_0}$ 或 $\dfrac{\Sigma(q_0+q_1)p_1}{\Sigma(q_0+q_1)p_0}$ 演算表68之材料，求出結果以證此主張之當否焉。

表 68

物品 \ p及q \ 民國年別	十七年 價(p)	十七年 量(q)	十八年 價(p)	十八年 量(q)	十九年 價(p)	十九年 量(q)
	元	石	元	石	元	石
上等米(石)	10	10000	10	12000	8	10
中等米(石)	8	15000	9	40	8	14000
下等米(石)	5	20	4	16000	6	18000

1.以十七年爲基期求十八年米價指數如下

$$\frac{(10000+12000)\times10+(15000+40)\times9+(20+16000)\times4}{(10000+12000)\times10+(15000+40)\times8+(20+16000)\times5}\times100=$$

$$=\frac{220000+135360+164080}{220000+120320+80100}\times100=\frac{419440}{420420}\times100=99.77$$

2.以十七年爲基期求十九年之指數如下

$$\frac{(10000+10)\times80+(15000+14000)\times8+(20+18000)\times6}{(10000+10)\times10+(15000+14000)\times8+(20+18000)\times5}\times100$$

$$=\frac{80080+232000+108120}{100100+232000+90100}\times100=\frac{420200}{422200}\times100=99.53$$

3.若以十八年爲基期則十九年之指數如下

$$\frac{(12000+10)\times\ 8+(40+14000)\times8+(16000+18000)\times6}{(12000+10)\times10+(40+14000)\times9+(16000+18000)\times4}\times100$$

$$=\frac{96080+112320+204000}{120100+126360+136000}\times100=107.83$$

按上例以十七年爲基年，則十七年之米價指數爲100，十八年爲99.77，十九年爲99.53，若以十八年爲基年，則十八年米價指數爲100，十九年爲107.83，然則以十七年爲基年，十八年米價指數乃大於十九年，以十八年爲基年，十九年米價指數乃大於十八年，此係何故，卽以米價與量同時變化，易言之，卽物價與權數同時變更，

遂使計算時纏混不清，結果謬誤矣。

關于加權計算指數之三種主張，各有是之者，亦各有非之者，並各有是非其一部分者．於是加權的公式愈演愈夥，然歸納之，其淵源大都出於此三種加權方法，而各種加權的公式之特性，概言之不過三類：一卽採用第一主張以編成之公式之特性，二卽採用第二主張以編成之公式之特性，三卽採用第三主張以編成之公式之特性。此三類特性可於各種主張之正反面理由中辨別之。大都含有第一類特性之公式宜於計算長時期指數材料及空間性指數材料時用之。含有第二類特性之公式宜於時間性及空間性之材料不易搜集而擬算之材料較爲齊全時用之。含有第三類特性之公式宜於計算短時期指數材料時用之。

第十章

商情之預測 (Business Forecasting)

第一節

商情之變化

宇宙間凡百事業莫不形成連鎖，互爲維繫，而交相感應者也，尤以商業與其他事業之關係爲然，蓋商業者調劑盈朒，貿遷有無，農工之所生產，社會之所消費，幾無不恃爲媒介，授受其間，以易雙方之所欲得，是故商情變動，則農工及各種消費者無不受深切之影響，而農工及消費者方面一有變動，商業亦受深切之影響，此其一也；商業所經營者爲貨物，貨物幾千百種，倏忽之間，變化萬狀，顧此種變化程度何若，必取一能爲各種貨物之身分之代表以測量之，此種代表，卽物品之價値也，當農工所成貨物，不敷應市場之需要，是供給少而需要急，物價乃漲，農工所成物品逾市場所需要，是供給多而需要緩，價必低落，至需要之所以有緩急者，由於人之欲望與購買力未可持久不變而時有增減也，由此可知物價受供求律之支配以漲落，供求復由生產之多寡及人類之欲望變遷與購買力强弱而增減，此其二也；物價一漲落之間，各種企業因之而有興衰，誠以一業之成功常有待於他業，如物品之製成必經許多業，方其製造也，須搜集他業之產品以爲原料，及其成也，又必有待另

一業之購求，是一業前前後後成一連環，此連環中一節失其所，全體有瓦解之勢，故一業興盛，則所需者多而所供者亦多，與其有供求關係之各業亦隨之而興盛，一業衰敗，則所供者少而所需者亦少，與其有供求關係之各業，或以出品銷路頓減，或以供不應求，亦隨之而衰敗，於是由零售商而批發商而工廠而他業，復由他業輾轉以至零售商，影響所及，範圍甚廣，此其三也。夫商業既與各業勾繫牽引，互有敏銳之感應，則吾人對於商情之研究，詎容忽視，只以商業界如淼漫大海，波濤洶涌，澒瀾濆瀑，起伏無常，苟經營者盲然涉足其間，一遇風浪，鮮有不張皇失措，致於覆沒者，其於個人所損猶小，其於社會影響綦巨。至若商界以外各業經營者昧然不問商情之變化，如經濟風潮陡然發生，則不知其源委何在，奚能為適當之應付耶。是故商情之研究，誠為立身社會之人士切要之圖也。

第二節

商情變化之原因

無論一般商業抑特種商業之情形有所變化，必有其變化之原因，蓋事變之來未有無因而致者。商情變化之原因，概別之有四：

1. 循環作用(Cyclical movements).
2. 恆差或長期趨向(Secular trend or long time trend).
3. 月差或季節變化(Seasonal variation or seasonal fluctuation).
4. 意外變動(Accidental movements, residual or irregular fluctuations).

循環作用　凡事盛久必衰，衰久必盛，未有常盛而不衰，亦未有常衰而不盛。此種盛衰之遞變，即所謂循環作用也。夫商業非由於管理經營之得失，往往經過若干年而有盛衰成敗者，大都以此種作

用爲之階梯。

恆差或長期趨向　人類文明程度日高，科學發達，技術改良，各種企業遂無不進步。商業不居於例外，自亦有趨上之傾向，卽如今年今日之物價必高於數十年前今日之物價也。惟趨上之傾向非猝然而起，其由來也漸。此種逐漸趨上之自然趨勢，卽所謂恆差或長期趨向。因多數學者習用『恆差』，故以後舍長期趨向而用恆差二字。恆差之爲用卽在表示一事情長時期變遷之真況，例如某處物價恆差在昔數十年間爲每年增加百分之七，若今年一月之物價比去年一月物價僅增百分之五此今年一月之物價似已增加，實不逮去年一月之物價也。

月差或季節變化　年有四季，季分三月，不僅季與季之氣候不同，卽月與月之氣候亦不相同。夫農產品旣與氣候之溫寒有密切之關係，則其發榮滋長自不得不隨季因月而異，以農產品多半爲工業品之原料，則原料之供給亦隨之而異，而工業製造品之產量亦因之而有不同，多半之工業製造品卽爲市上之商品，是市上商品之供給亦因之而異，至市上之消費者因習慣風俗之變遷，銷用物品亦常隨季因月而異，是則商品之需要亦因之而異；商品之供給與需要皆可隨季因月而異，遂使商情因之而有升降之異趣，是卽月差或季節變化，因多數學者大都稱爲『月差』故以後只用月差二字。再有進者，以一事實之材料按月統計，繪成曲線或直線相比較，以顯示各月事實盛衰之迹，然而每不足以顯示之，誠以月有大小，各月統計結果有時不相同者，或以月份大小不同之故耳，此種因月份大小而發生統計結果之差異，是亦月差也。

意外變動　循環作用，恆差及月差足以影響商情，吾人已知之矣。惟尙有意外事項，如罷工，戰爭，暴掠，火災，水患，地震等亦足以影響商業之一部或全體。故研究商情之變遷，意外事項之變動不可置之度外焉。

第三節

恆差月差及循環作用之計算方法

商情變化之原因有四，除意外變動乃因事而異無一定之計算法外，其他三者皆有計算方法以確定之。故吾人果能善用此三者之計算方法，復能臨事而窮其意外變動之眞相，則推測商情之變遷，雖不中亦不遠矣。茲將恆差月差及循環作用之計算方法分述於後。

一. 恆差

欲求一事實之恆差，必先搜集關于此事實之長期材料。此時期中包含年數不得少於四五年，並不得少於變遷趨勢一起一伏所含有之年數，最好以十年爲最低限度，愈多愈妙，但因某種意外大事發生而使某年受極大影響，此年寧舍之也。如時期中首末兩年適在循環期中之同一種時期，選用此時期之材料尤佳。長期材料既經搜集，卽可計算恆差。計算恆差之方法有五：

1. 繼動平均數法(Moving average or running average).
2. 最小平方法(Method of least squares).
3. 半平均數法(Method of semi-average).
4. 隨手畫法(Free-hand method).
5. 拋物線趨向法(Parabola trend).

繼動平均數法　將指數按時間之先後，依次排列。然後每兩項，每三項，或每四項之指數相加，求出結果而平均之，如此類推，卽每五項，六項，七項等亦無不可。但有須注意者，卽每加指數一次，須由相加之指數中減去最前一時期之指數，而另加隨後一時期之指數。茲舉例如下以述明之。

表 69　　某處零售物價指數繼動平均數

A	B	C		D		E	
年份	指數	二年		四年		八年	
		總計	繼動平均數	總計	繼動平均數	總計	繼動平均數
1888	110.1	221.8	110.9				
1889	111.7	226.0	113.0	454.1	113.5		
1890	114.3	232.3	116.7	457.0	114.3		
1891	118.0	231.0	115.5	456.4	114.1	938.8	117.4
1892	113.0	224.1	112.1	468.3	117.1	963.9	120.5
1893	111.1	237.3	118.7	484.7	121.2	977.8	122.2
1894	126.2	260.6	130.3	506.9	126.7	978.0	122.3
1895	134.4	269.6	134.8	521.4	130.4	974.0	121.9
1896	135.2	260.8	130.4	509.7	127.4	980.8	122.6
1897	125.6	240.1	120.1	489.3	122.3	995.9	124.5
1898	114.5	228.5	114.3	473.9	118.5	998.8	124.9
1899	114.0	233.8	116.9	474.5	118.6	987.9	123.5
1900	119.8	246.0	123.0	489.1	122.3	974.2	121.8
1901	126.2	255.3	127.7	498.6	124.7	968.9	121.1
1902	129.1	252.6	126.3	500.3	125.1	975.6	122.0
1903	123.5	245.0	122.5	494.4	123.6	981.3	122.7
1904	121.5	241.8	120.9	486.5	121.6	981.8	122.7
1905	120.3	241.5	120.8	482.7	120.7	974.9	121.9
1906	121.2	240.9	120.5	481.5	120.4	967.2	120.9
1907	119.7	240.0	120.0	480.5	120.1	966.7	120.8
1908	120.3	239.6	119.8	480.7	120.2	979.0	122.4
1909	119.3	240.7	120.4	484.0	121.0	990.6	123.8
1910	121.4	244.4	122.2	497.5	124.4	997.5	124.7
1911	123.0	256.8	128.4	510.1	127.5	1004.1	125.5
1912	133.8	265.7	132.9	516.8	129.2	1005.9	125.7
1913	131.9	260.0	130.0	520.1	130.0	1012.3	124.0
1914	128.1	254.4	127.2	508.4	127.1	1014.5	126.8
1915	126.3	248.4	124.2	502.2	125.6	1023.2	125.4
1916	122.1	247.8	123.9	497.7	124.4		
1917	125.7	249.3	124.7	503.1	125.8		
1918	123.6	255.3	127.7				
1919	131.7						

C 行所列之繼動平均數爲物價指數每兩年相加一次之總數之平均數。

例：

$$110.9=\frac{110.1+111.7}{2}=\frac{221.8}{2}$$

$$或=\frac{(110.1-0)+111.7}{2}=\frac{221.8}{2}$$

$$113.0=\frac{111.7+114.3}{2}=\frac{226}{2}$$

$$或=\frac{(221.8-110.1)+114.3}{2}=\frac{226}{2}$$

D 行所列之繼動平均數爲物價指數每四年相加一次之總數之平均數。

例：

$$113.5=\frac{110.1+111.7+114.3+118.0}{4}=\frac{4541}{4}$$

$$或=\frac{110.1+111.7+114.3-0+118.0}{4}=\frac{4541}{4}$$

$$114.3=\frac{111.7+114.3+118.0+113.0}{4}=\frac{4570}{4}$$

$$或=\frac{4541-110.1+113.0}{4}=\frac{4570}{4}$$

E 行所列之繼動平均數爲物價指數每八年相加一次之總數之平均數。

例：

$$117.4=\frac{110.1+111.7+114.3+118.0+111.1+126.2+134.4}{8}=\frac{938.8}{8}$$

$$或=\frac{110.1+111.7+114.3+118.0+111.1+126.2-0+134.4}{8}=\frac{938.8}{8}$$

$$120.5=\frac{111.7+114.3+118.0+113.0+111.1+126.2+134.4+135.2}{8}=\frac{963.9}{8}$$

$$\text{或}=\frac{938.8-110.1+135.2}{8}=\frac{963.9}{8}$$

將表96所列三種繼動平均數各繪成一線如圖66所示，則知四

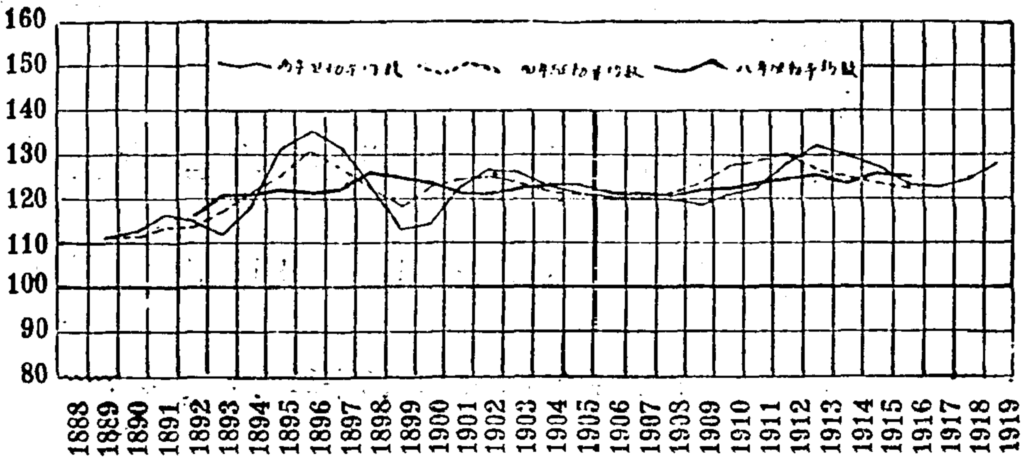


圖 66. 　某處零售物價升降趨勢圖

年繼動平均數之線較二年者爲有規則而平滑，八年之繼動平均數之線較四年者爲有規則而平滑。於是可知含愈多之項數而繼動平均之，則代表其趨向之線愈有規則而平滑也。有此種極有規則而平滑之線，吾人乃易於窮其所示某時期連貫事情之變遷而決定其恆差。惟用此法決定恆差似甚簡易，而有一缺點，卽將連貫事情所作成之繼動平均數之項數，因繼動平均數有集中之趨向，常較原有事項爲少，於是包括項數愈多之繼動平均數之線乃愈短。例如求五年繼動平均數，則第一平均數列入第三年項下，而第一年及第二年項下無平均數列入，最後一平均數列入最後第三年項下，而最後第一年與第二年項下亦無平均數列入。若求七年繼動平均數，則最前後第一第二及第三年均無平均數。若求九年之繼動平均數，則最前

後第一第二第三及第四年均無平均數。是故年數愈多，而平均數之項數愈少，其所表示之線愈短，如線短太甚卽難以表示事情之趨向矣。雖然今有一法可以彌補繼動平均數方法之缺陷，例如表 69 所列八年繼動平均數行內第一，第二，第三及第四年項下俱無平均數，吾人如認爲有增補第三四年間及第二三年間繼動平均數之必要，可依下式求之：

$$\text{第三四年間之八年繼動平均數} = \frac{2\times110.1+111.7+114.3+118.0+113.0+111.1+126.2}{8} = \frac{914.5}{8} = 114.3$$

$$\text{第二三年間之八年繼動平均數} = \frac{2\times110.1+2\times111.7+114.3+118.0+113.0+111.1}{8} = \frac{900}{8} = 112.5$$

用以上方法仍可使繼動平均數之項數等於原來材料之項數而便於察其變遷之趨向焉。

最小平方法　如欲以一直線能表示恆差，有一最佳之方法，卽最小平方法。法以最小平方名者，蓋以此法所求出表示恆差之一直線爲最小平方線 (Line of least squares)。至線所以名最小平方者，因統計事項對此直線所有離中差之平方，就其縱線量之，常爲最小耳，最小平方法之公式如下：——

$$S = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

S 爲最小平方線之斜度或其角之正切

X 爲時間離中差

Y 爲各時間某事實之變量

舉例：用表70之材料計算其所表示之直線之斜度。

表70

年 別	指 數	增加之數	減少之數
1923	100	0	
1924	95		5
1925	96		4
1926	98		2
1927	99		
1928	101	1	
1929	104	4	
1930	107	7	

年份	Y	X	X^2	XY	y 最小平方線所經過各點之位置
1924	—5	—3	9	15	—5.88
1925	—4	—2	4	8	—3.92
1926	—2	—1	1	2	—1.96
1927	—1	0	0	0	0
1928	1	1	1	1	1.96
1929	4	2	4	8	3.92
1930	7	3	9	21	5.88
	0		28	28|55	
				S=1.96	

求y之法，乃由中項0起，在負號方面每距離一年，卽將斜度1.96增加一次，在正號方面如之。y既經求出，乃以一線連綴其所代表各點，此線卽最小平方線。可閱圖67。

圖67爲X與Y尺度相等之方格圖。

以UU′爲單位斜度之直線，所謂單位斜度者卽向右在XX′線上移動一單位；亦必向上在YY′線上移動一單位 而每移動一次後兩邊單位距離之斜度也。單位斜度之直線卽平分此斜度之一直線。以TT′爲最小平方線。

上舉最小平方線之求法須在某事實各時間之變量相加而平均

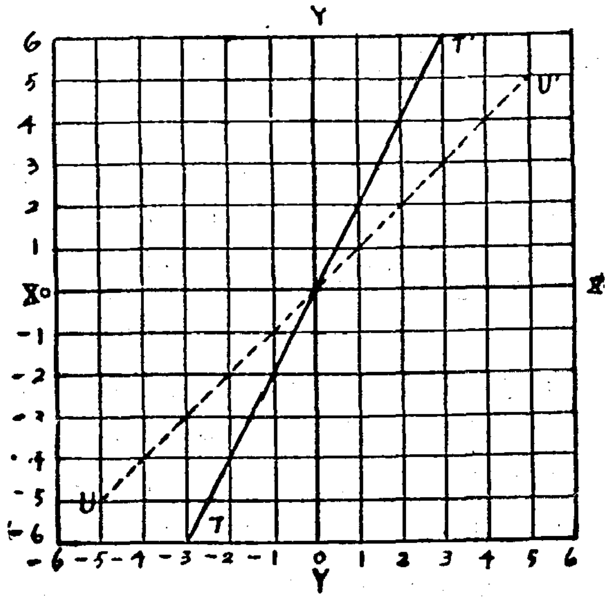


圖67

之爲零時用之，如非零而爲任何其他數值，計算之法即須稍有更改，茲舉例如下以說明之：

表 71　求世界中央銀行及政府歷年存金總額之恆差

年份	每年存金總額（單位爲百萬美元） Y	時間離中差 X	每年存金乘其時間離中差 XY	各時間離中差之自乘 X^2	最小平方線所經過各點之位置 y	Y離y之差 Y—y
1914	5530	—7	—38710	49	5753.76	—223.76
1915	6229	—6	—37374	36	6049.08	179 92
1916	6504	—5	—32545	25	6344.40	164.6)
1917	7086	—4	—28344	16	6639.72	446.28
1918	6751	—3	—20503	9	6935.04	—184.04
1919	6751	—2	—13502	4	7230.36	—479.36
1920	7141	—1	— 7141	1	7525.68	—384.68
1921	7954	0	0	0	7821.00	133.00
1922	8314	1	8314	1	8116.32	197.68
1923	8583	2	17166	4	8411.64	171.36
1924	8916	3	26748	9	8706.96	209.04
1925	8891	4	35564	16	9002.28	—111.28
1926	9163	5	45815	25	9297.60	—134.6)
1927	9514	6	57084	36	9592 92	— 78.92
1928	9981	7	69867	49	9888.24	92.76
	15 | 117313		82689	280		
	7821					

求y行內各數之步驟。

1. 先尋時期之中點，知爲1921年，因前於此者之年數確等後於此者之年數。

2. 各年前於時期中點之時間差須加一負號，後於時間中點之時間差須加一正號。時期中點本身因無何種差數，故等於零。例如X行內1920年之時間離中差爲－1，卽以1920年前於1921年之時間差爲一年之故；1919年之時間離中差爲－2，卽以1919年前於1921年之時間差爲二年；1922年之時間離中差爲1，卽以1922年後於1921年之時間差爲一年；1923年之時間離中差爲2，卽以1923年後於1921年之時間差爲二年；餘可類推，至1921年之時間離中差爲零，卽以其本身爲時期之中點也。

3. 將完全時期所研究事實之量數之總和除以時期數，求出各時期量數之平均數以b代表之，表中之7821卽是，其求法說明如下：——

$$b=\frac{\Sigma Y}{N}=\frac{117313}{15}=7821$$

4. b旣爲一事實各時期量數之平均數，則時期中點之量數，如在各時期量數爲有規則增減之趨向時，似應爲b，故假定b爲時期中點之量數，例如以7821爲1921年之量數（可參閱圖68）。

5 用S公式計算最小平方線之斜度。

$$S=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}=\frac{82689}{280}=295.32$$

6. 將S乘各時期之時間離中差，以其積與b相加求各時期在量數如爲有規則增減之趨向時之量數，例如 $295.32\times2+7821=590.64+7821=8411.64$，8411.64卽1923年之量數也。

7. 聯各時之任何　代表兩量數之點以一直線，此卽最小平方線（可參閱圖68）。

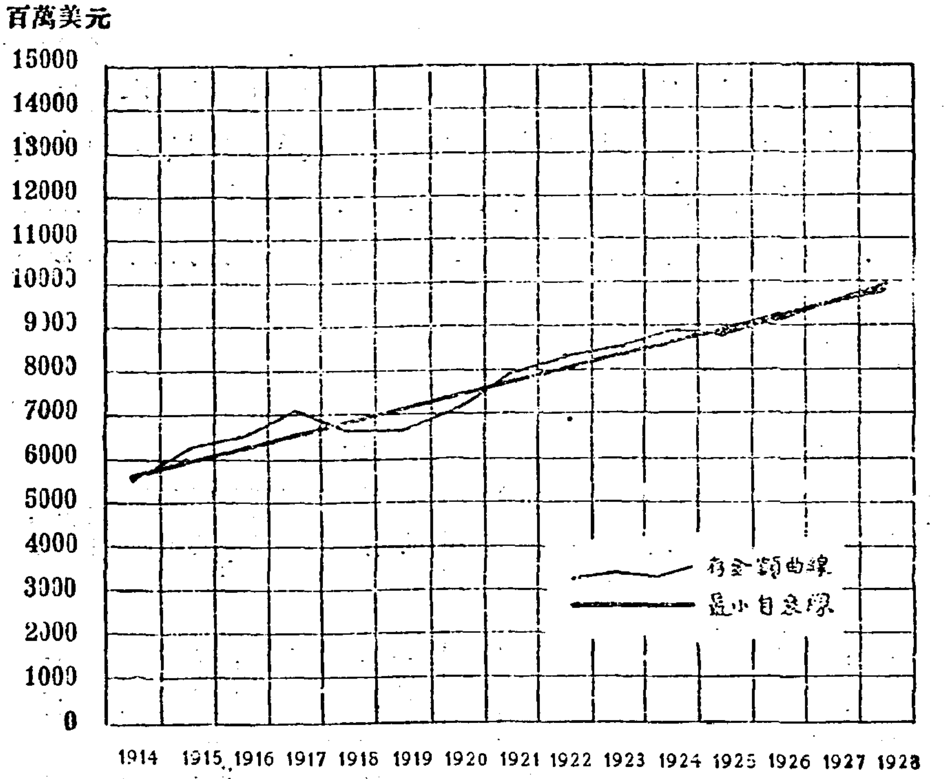


圖 68　世界中央銀行及政府歷年存金總額勢趨圖

如更欲明恆差與原來事實之變量差異之情形，可由Y—y求得各時期Y離y之差，繪成曲線以表示之，此曲線亦卽原來代表事實變遷趨勢之線(可閱圖68)，視此曲線與最小自乘線之差距，其間差異之情形自可洞鑒無遺矣。

上舉之例係求表示十五年間世界中央銀行及政府歷年存金額長期趨向之最小自乘線，因十五年爲奇數，故將中間一年之時間離中差定爲零，而其他各年之時間離中差均以一年爲單位計算　設若年數非十五而爲偶數十六，則占時期之中間位置者非一年而爲兩年，此兩年之時間距離，使改爲一年，則此一年須在兩年之中，而由此一年之中點算起，兩年應各得其半，故中間兩年中之前一年爲0.5，後一年爲0.5，至其他各年之時間離中差仍以一年爲單位計

算，惟在中間兩年前各年之時間離中差應自中間兩年中之前一年算起，在中間兩年後各年之時間離中差應自中間兩年中之後一年算起。例如表72所列 1919年之離中差爲－1.5 1922年之離中差爲1.5。但用表72求 X^2 時，必須將1.5，2.5，等自乘，殊形煩瑣，遂可將1.5，2.5等數改爲整數如表73所列者。惟用此表之材料求S，必須用公式 $\frac{\Sigma XY}{\frac{X^2}{2}}$ 耳。

表72

年份	世界中央銀行及政府存金總額 Y	時間離中差 X
	百萬美元	
1913	4831	—7.5
1914	5530	—6.5
1915	6229	—5.5
1916	6509	—4.5
1917	7086	—3.5
1918	6751	—2.5
1919	6751	—1.5
1920	7141	—0.5
1921	7954	0.5
1922	8314	1.5
1923	8583	2.5
1924	8916	3.5
1925	8891	4.5
1926	9163	5.5
1927	9514	6.5
1928	9981	7.5

表73

年份	世界中央銀行及政府存金總額 Y	時間離中差 X
	百萬美元	
1913	4831	15
1914	5530	13
1915	6229	11
1916	6509	9
1917	7086	7
1918	6751	5
1919	6751	3
1920	7141	1
1921	7954	1
1922	8314	3
1923	8583	5
1924	8916	7
1925	8891	9
1926	9163	11
1927	9.14	13
1928	9981	15

半平均數法　先將長時期連貫事實所屬完全時期分成兩半，再計算每半時期所有事實之量數求得一平均數，而作一點於該半時期之中項時間縱線上以代表之。然後經過兩代表平均數之點繪一直線，此直線殆與繼動平均數及最小平方線之趨向頗相類似也。

隨手畫法　吾人對于長時期連貫事實，若以粗知其趨勢爲已

足，則最簡捷之法，可不事計算，但依事實之量數先繪成曲線以表示之然後視此線升落之勢隨手或用曲線板繪成指示恆差之直線或近似之直線。惟此種直線着手繪時，必使其離中差數之在線上者與在線下者大略相等。然離中差有時有例外之漲縮與直線之大體無關者，可置不問。

拋物線趨向法　設恆差非直線所可表示，而必用一種拋物形之曲線，則必須用拋物線趨向之求法。其法乃須用下列之方程式：

$$y = a + bx + cx^2$$

y為拋物線所經過一連貫事實各時期量數之位置

用下列材料以說明此方程式之計算法：

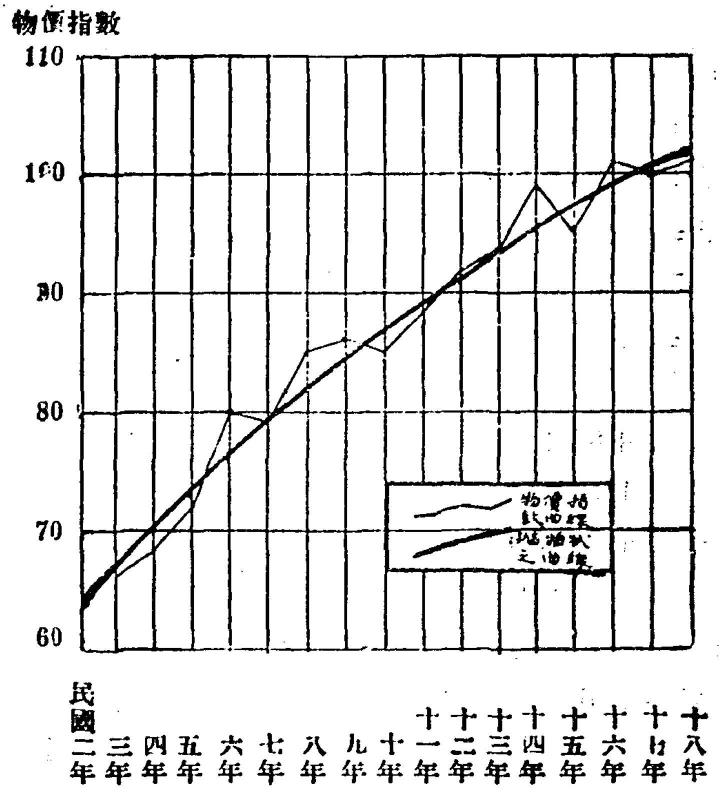


圖69

民國年份	三年	四年	五年	六年	七年	八年	九年	十年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年	十六年	十七年	十八年
物價指數	66	68	72	80	79	85	86	85	88	92	94	99	95	101	100	101

求拋物線當先定三點：即起點，中點與終點是也，今先假定起點在民國二年，中點自應在十年，終點自應在十八年。按上列物價指數材料繪成 曲線，並依曲線升落之迹勾一拋物狀之線：起自民國二年，如圖69所示，則可尋出落於此拋物狀線上之民國二年之指數為64，民國十年之指數為87，民國十八年之指數為102。於是定起點為指數64，中點為指數87，終點為指數102。今設以x為由一連貫事實全時期之起點計算之時期數，則x之數如下：

民國年份	二年	三年	四年	五年	六年	七年	八年	九年	十年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年	十六年	十七年	十八年
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

將始點中點及終點之量數與三點距時期起點之各時期數代入方程式$y=a+bx+cx^2$。

$$64=a+o+o$$

$$87=a+8b+64c$$

$$102=a+16b+256c$$

依聯立方程式求 a b c 之數值如下：——

$$64=a+o+o$$

$$a=64$$

$$87=a+8b+64c=64+8b+64c$$

$$87-64=8b+64c$$

$$102=a+16b+256c=64+16b+256c$$

$$102-64=16b+256c$$

$$(8b+64c)\times 4=(87-64)\times 4$$

$$32b+256c=23\times 4=92$$

$$(32b+256c)-(16b+\ 56c)=92-(102-64)$$

$$=92-38=54$$

$$(32b+256c)-(16b+256c)=32b+256c-16b-256c$$

$$=32b-16b=16b$$

$$16b=54$$

$$b=\frac{54}{16}=3.375$$

$$87-64=8b+64c=8\times3.375+64c=27+64c$$

$$87-64-27=64c$$

$$c=\frac{87-64-27}{64}=\frac{-4}{64}=-.0625$$

a b c 之數値旣皆求得，則可代入方程式 $y=a+bx+cx^2$ 以求某事實之於各時期之變量。今仍用上例說明如下：

民國三年之物價指數 $=64+3.375\times1+.0625\times1=67.3125$

民國七年之物價指數 $=64+3.375\times5+(-.0625\times25)$

$=64+16.875-1.5625=79.3125$

茲將上例各年之物價指數假定爲抛物線各點所在之位置，其數可列於表72。

表 72

民國年份	x	y
三年	1	67.3
四年	2	70.5
五年	3	73.6
六年	4	76.0
七年	5	79.3
八年	6	82.0
九年	7	84.6
十年	8	87.0
十一年	9	89.3
十二年	10	91.5
十三年	11	93.6
十四年	12	95.5
十五年	13	97.3
十六年	14	99.0
十七年	15	100.0
十八年	16	102.0

旣用方程式 $y=a+bx+cx^2$ 求出一事實各時期之變量，則於各時期變量之位置定一點以代表之，連綴此各點以一線，此線卽所謂抛物線，但抛物線究能代表一事實所呈抛物狀之趨勢耶，恐未必然，蓋用目力看定起點中點及終點，不免稍有差誤也。卽如上舉之例所求 y 欄內各數，本應由原有各年指數按年減去，所餘各差數或正或負之和(ΣD)，適相抵銷，則經過 y 欄內各數之位置之抛物線斯爲正確；乃竟不然，其差數在正號方面者相加之和爲 14.8，在負號方面者相加之和

為12.3（可查閱表73），兩者之和為25，此即定起點中點及終點時所遺之差誤也。現欲改正此種錯誤，必須求差數之和，以項數除之，得 $\frac{\Sigma D}{N}$，是為改正數（K）然後加此改正數於拋物線所經過之各時期量數上，乃可求出每時期量數改正數相加之和，而以一點代表其位置，連綴此各點，重繪一正確之拋物線。似此拋物線既經改正，則原用方程式$y=a+bx+cx^2$亦須改為$y=a+k+bx+cx^2$斯得其當焉。

表73

民國年份	物價指數	x	y	D	D改正後
三年	66	1	67.3	−1.3	−1.46
四年	68	2	70.5	−2.5	−2.66
五年	72	3	73.6	−1.6	−1.76
六年	80	4	76.0	4.0	3.84
七年	79	5	79.3	−.3	−.46
八年	85	6	82.0	3.0	2.84
九年	86	7	84.6	1.4	1.24
十年	85	8	87.0	−2.0	−2.16
十一年	88	9	89.3	−1.3	−1.46
十二年	92	10	91.5	.5	.34
十三年	94	11	93.6	.4	.24
十四年	99	12	95.5	3.5	3.34
十五年	95	13	97.3	−2.3	−2.46
十六年	101	14	99.0	2.0	1.84
十七年	100	15	100.0	0	−.16
十八年	101	16	102.0	−1.0	−1.16
				14.8 −12.3 16 | 2.5 K=.16	

二. 月差

在計算月差之先，須求能依多年之根據；蓋此種計算根據之時

期愈長，年份愈多，而求出之月差乃愈正確也。計算月差之法有二：

甲。平均法(The method of averages). 年復一年，某事實無劇烈之變動，幾爲直線之趨向者，可用此法，以求其月差。此法在計算上甚爲簡易，先求一事實變量歷年各月之平均數，然後以此各月平均數按月除恆差線可以經過各月之量，求得一百分數，即所謂月差指數(Seasonal Indexes). 此種指數即用以表示某種事實以月令關係而升降之程度者也，復以各月平均數作爲 100，由此種指數減去之，可得月差數。今舉某處民國十年至十五年黃絲每斤價格爲例，列表如下 (閱表74)。將各行各列之物價各求其平均數，以得各年每月之平均數與每年各月之平均數，然後用計算恆差斜度法求出恆差線每年斜度得 0.49，而以 12 除之，所得商數爲 .041 即恆差線每月斜度，復以 2 除之，得 .0205，以此數與各年各月之平均數之和之平均數 6.2 相加，即可求出恆差線經過七月之一點，其所代表之量數爲 6.2205，若 .0205 由 6.2 減去，即可求出恆差線經過六月之一點，其所代表之量數爲 6.1795，由恆差線經過七月一點所代表之量數 6.2205 加每月斜度 .041 一次，即得恆差線經過八月一點所代表之量數 6.2615，加二次，即得九月一點所代表之量數 6.3025，依次類推；若由恆差線經過六月一點所代表之量數 6.1795 減每月斜度 .041 一次，即得恆差線經過五月一點所代表之量數 6.1385，減二次即得四月一點所代表之量數 6.0975，依次類推，俟恆差線經過月份各點所代表之量數，皆經求出，乃以 6.2 分別除之，求月差指數，然後將 6.2 作爲 100，以指數分別減之即可求出月差，如 D 行所列各數是也。

某處黃絲價格之月差

表74 (黃絲以每斤計,價格以元計)

月份	民國年份 九年	十年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年	各年每月平均	恆差 y	月差指數	D %
	元	元	元	元	元	元	元	元			
一月	2.9	4.6	5.6	6.0	6.3	6.5	6.7	5.5	5.9745	92	—8
二月	2.9	4.6	5.7	6.1	6.5	6.6	6.7	5.6	6.0155	93	—7
三月	3.9	4.8	5.9	6.3	6.5	6.7	6.7	5.8	6.0565	96	—4
四月	4.0	5.2	6.1	6.5	6.6	6.9	6.7	6.0	6.0975	98	—6
五月	4.0	5.3	6.2	6.7	6.6	6.9	6.9	6.1	6.1385	100	0
六月	4.0	5.3	6.1	6.7	6.6	7.0	7.0	6.1	6.1795	99	—1
七月	4.7	5.8	6.7	7.3	7.1	7.8	7.9	6.8	6.2205	109	9
八月	4.2	5.4	6.2	7.0	6.7	7.2	7.6	6.3	6.2615	101	1
九"	4.4	5.5	6.3	7.1	6.8	7.4	7.7	6.5	6.3025	103	3
十月	4.6	5.6	6.4	7.2	7.0	7.5	7.8	6.6	6.3435	104	4
十一月	4.7	5.9	6.8	7.5	7.2	7.8	5.0	6.8	6.3845	107	7
十二月	4.4	5.5	6.2	7.5	6.8	7.0	7.6	6.3	6.4255	98	—2
每年各月平均	4.1	5.3	6.2	6.7	6.7	7.1	7.3	6.2	6.2000	100	0

用最小平均方法求恆差直線斜度如下

民國年份	各年黃絲價格 Y	X	X^2	XY
九年	4.1	—3	9	—12.3
十年	5.3	—2	4	—10.6
十一年	6.2	—1	1	— 6.2
十二年	6.7	0	0	0
十三年	6.7	1	1	6.7
十四年	7.1	2	4	14.2
十五年	7.3	3	9	21.9
			28	42.8
				—29.1
				13.7

$$S=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}=\frac{13.7}{28}=0.49 \quad \text{(每年斜度)}$$

$$\frac{0.49}{12}=.041 \quad \text{(每月斜度)}$$

$$.041\div 2=.025$$

乙. 環比法 (The link-relative method). 平均法雖甚簡便，然其應用不如環比法之普遍也。玆說明其計算之步驟如下：

1. 計算每月之環比。將一時期中某事實各月之實在數除以各該月前一月之實在數而以100乘之，例如$\frac{\text{三月之數}}{\text{二月之數}}\times 100$，$\frac{\text{四月之數}}{\text{三月之數}}\times 100$等。此等所求各月對於前月之比例數相銜若環故曰環比。

2. 求環比中點數 (Median relative). 將全時期所有各同月之環比各自爲組，由小至大，依次排列，而取其中間一項爲環比中點數。例如有五年之三月環比爲 85, 103, 97, 101 及92，依次列之，則爲85, 92, 97, 101, 103, 此五項之中間一項數爲97，故97卽爲環比中點數。但項數如爲偶數，則取其中間二項數目之平均數爲環比中點數。用此環比中點數而不用各環比數之平均數代表一月各環比數者，所以避免極端變量之影響也。

3. 求鎖比 (Chain relatives). 環比者所以示某事實各月與其前月之關係。鎖比者乃以某事實某月之量數爲100，而以其他各月之量數與之爲比例者也。當環比中點數旣定，吾人欲知全時期各月之環比中點數與某月之量數之關係，卽以某月之環比中點數爲根據求該月與其他各月環比中點數之比例，所謂鎖比。至鎖比之求法，可舉例以爲說明。譬以一月爲根據，則一月之鎖比當爲百分一百，二月之鎖比同二月之環比，三月之鎖比則以某事實一月之量數除三月之量數而得之百分比率，或以三月之環比與二月之鎖比相乘更除以100所得之數。蓋三月之環比等於某事實$\frac{\text{三月之量數}}{\text{二月之量數}}\times 100$，二

月之鎖比等于某事實$\frac{\text{二月之量數}}{\text{一月之量數}}\times 100$，二者相乘除以100得某事實$\frac{\text{三月之量數}}{\text{一月之量數}}\times 100$也。循是類推，各月之環比亦可各乘其前一月之鎖比，得各本月之鎖比焉。

4.求改正數. 設以一年之正月爲出發點求鎖比，仍應至於後年之正月爲止。其鎖比之求法乃以最後正月之環比乘十二月之鎖比除以100。惟其求得之數應仍爲百分之一百，方與出發時相合，然此種得數往往因恆差與計算之影響，不爲百分一百，是與出發時相異，自應加以改正。其改正之法，則以其鎖比作爲100，而將原得之數與100相差之數，依幾何或算術平均方法，平均分配於各月鎖比之內。因算術平均方法在計算上較易，故人多用之。至此法之運用，譬如從二月份之鎖比中減去差數十二分之一，從三月份之鎖比中減去差數十二分之二，如是而上至於一月爲止，所得結果卽改正數，亦卽月差指數也。

5.集中. 上述之月差指數乃依據一個月之環比中點數求出，固不足以呈現一事情因月令而發生變化之準度。蓋事情升降之變遷，僅視一個月之環比中點數爲依歸，殊欠公正。是故吾人爲求指數足以表示事情變遷之準度，必須將各月月差指數集中，求出平均數，以除每月月差指數，所得商數，復乘以100，其積卽集中之月差指數。舉例如下：——

$$\text{集中之一月月差指數}=\frac{\text{一月之月差指數}}{\frac{\text{十二個月之月差指數之總和}}{12}}$$

$$\text{集中之二月月差指數}=\frac{\text{二月之月差指數}}{\frac{\text{十二個月之月差指數之總和}}{12}}$$

今仍用表74之材料，按環比法之步驟，以求月差指數及月差數如下：

某處黃絲價格之月差

表75 （其所根據之材料見表74）

月	環比 九年	十年	十一年	十二年	十三年	十四年	十五年	環比次序							環比中點數	鏈比	改正數	月指數差（集中）	D %
一月	——	47.9	101.8	96.8	96.9	95.6	95.7	95.6	95.7	96.8	96.9	97.9	101.8		96.9	100.0	100	95.2	—4.8
二月	100.0	100.0	101.8	101.7	103.2	101.5	100.0	100	100	100	101.5	101.7	101.8	103.2	101.5	101.5	100.575	95.8	—4.2
三月	134.5	104.3	103.5	103.3	100.0	101.5	100.0	100	100	101.5	103.3	103.5	104.3	134.5	103.3	104.8	102.94	102.8	2.8
四月	102.6	108.3	103.4	103.2	101.5	103.0	101.0	100	101.5	102.6	103	103.2	103.4	108.3	103.0	107.9	105.125	95.4	—4.6
五月	100.0	101.9	101.6	103.1	100.0	100.0	103.0	100	100	100	101.6	101.9	103	103.1	101.6	109.6	105.90	100.9	.9
六月	100.0	100.0	98.4	100.0	100.0	114.5	101.4	98.4	100	100	100	100	101.4	114.5	100.0	109.6	104.975	99.8	— .2
七月	117.5	109.4	109.8	109.0	107.6	111.4	112.9	107.6	109	109.4	109.8	111.4	112.9	117.5	109.8	120.3	114.75	109.3	9.3
八月	89.4	93.1	92.5	95.9	94.4	72.3	96.2	89.4	92.3	92.5	93.1	94.4	95.9	96.2	93.1	111.0	104.525	99.5	— .5
九月	104.8	101.9	101.6	101.4	101.5	102.8	101.3	101.3	101.4	101.5	101.6	101.9	102.8	104.8	101.6	112.8	105.4	100.4	.4
十月	104.5	101.8	101.6	101.4	102.4	101.4	101.3	101.3	101.4	101.4	101.6	101.8	102.9	104.5	101.6	114.6	106.275	101.2	1.2
十一月	102.2	105.4	106.3	104.2	102.9	104.0	102.6	102.2	102.6	102.9	104	104.2	105.4	106.3	104.0	119.2	109.95	104.7	4.7
十二月	93.6	93.2	91.2	86.7	94.4	89.7	95.0	86.7	89.7	91.2	93.2	93.6	94.4	95	93.2	111.1	100.925	96.1	—3.9
														一月					
															100.0	111.1 100.0 12|11.1 .925	100.00	改正數之和 21 =105	

環比法之所以較平均法為人所習用者，誠以求環比而取其中點數，則不受循環作用與意外變動劇烈之影響，用改正之法，則恆差之勢力亦減至至微，此其優點也。

三．循環作用

商情之變遷大致分為四期：一曰繁盛 (prosperity)，二曰停滯 (crisis)，三曰衰落(depression)，四曰復興 (revival)．

1．繁盛期　在此時期之顯著現象為企業樂觀 (business optimism)，物價上升 (rising prices)，利息膨脹 (swelling profits)等。

2．停滯期　在此時期表示之現象概別之有二：

(1) 金融停滯(financial crisis)．其現象為商業票據貼現率高昂，證券價格跌落，銀行從事緊縮忙於清理担保品股票及債務。

(2)商業停滯 (commercial crisis)．其現象為商人清理貨物，投機事業之活動減少，物價上漲等。

3．衰落期　在此時期之現象為失業者增加，物價降落，工資減少，企業費用 (business costs) 減低，錢莊銀行存款淤積，利息甚微，企業管理效率 (managerial efficiency) 增進，浪費之事 (wasteful practices) 收縮，不經濟之方法 (expensive methods)減少，企業上利益之邊際(profit margins)狹窄，貨物之屯積 (stock of goods) 甚少，生產及商業之體積縮小 (volume of production and trade is low)，股票價落，投機市場發生恐慌等。

4．復興期　在此時期之現象為債務已清理，凝固之信用已融解 (frozen credits thawed out)，積存之貨幾已售罄，消費者之需要增加，工業工具之投資需要加增，生產費用增多，物價漸

有起色，企業上利益之邊際擴張，入心向上，新事業增加，投機活動漸熱等。

四期之次比如下圖，由繁盛期入停滯期以至於衰落期，然後由復興

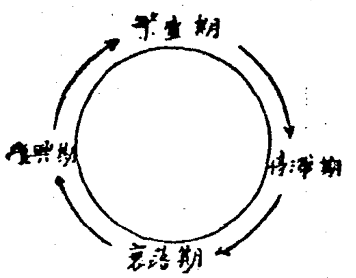


圖70

期以返於繁盛期，如是往復不已，是一循環現象 (unceasing round of depression, revival, prosperity and crisis)。每四期一往復，謂之爲一次循環，一次循環有經三年，有經五年不等，或起速而降緩或起緩而降速，皆視循環之屬於何種事業以爲準也。

至欲明商情之循環作用，先須將足使商情發生變化之恆差，月差及意外事項剔除。但意外事項變異萬狀，其影響不能一律，固須逐事逐項爲個別之研究，决不能以一通用之方法遽下論斷。故只有先研究剔去月差與恆差以求出商情循環作用之方法。此種方法可分爲下列兩步：

1. 以代表各月在恆差線上之位置之量數，除各月之實在數，乘以100，求得之百分數，減去月差指數，所得之數或正或負即循環作用之百分離中差。
2. 求出百分離中差之標準差以除百分離中差，則循環作用乃依標準差表示者也。

今舉某國生鐵歷年生產額以說明求循環作用之方法如下：

某國生鐵生產狀況之循環作用

年	月	(a) 生鐵生產額 (單位千噸)	(b) 恆差數 (1903-1916)	(c) a÷b 之百分數	(d) 月差指數 (1903-1920)	(e) 百分離中差 c−d	(f) 百分離中差² σ = 19.1	(g) 循環 e÷σ
一九〇三年	一月	1472	1416	104.0	98.5	5.5	30.3	0.3
	二月	1390	1424	97.6	93.1	4.5	20.2	0.2
	三月	1590	1432	111.0	105.2	5.8	33.6	0.3
	四月	1608	1440	111.7	102.0	9.7	94.1	0.5
	五月	1713	1448	118.3	103.6	14.7	216.1	0.8
	六月	1673	1456	114.9	98.5	16.4	269.0	0.9
	七月	1546	1463	105.7	98.3	7.4	54.8	0.4
	八月	1571	1471	106.8	99.8	7.0	49.0	0.4
	九月	1553	1479	105.0	98.3	6.7	44.9	0.4
	十月	1425	1487	95.8	103.7	−7.9	62.4	−0.4
	十一月	1039	1495	69.5	99.0	−29.5	870.2	−1.5
	十二月	846	1503	56.3	100.0	−43.7	1909.7	−2.3
總數		17426					3654.2	
一九〇四年	一月	921	1511	61.0	98.5	−37.5	1406.2	−2.0
	二月	1205	1519	79.3	93.1	−13.8	190.4	−0.7
	三月	1447	1527	94.8	105.2	−10.4	108.2	−0.5
	四月	1555	1535	101.3	102.0	−0.7	.5	0.0
	五月	1534	1543	99.4	103.6	−4.2	17.6	−0.2
	六月	1292	1551	83.3	98.5	−15.2	231.0	−0.8
	七月	1106	1559	70.9	98.3	−27.4	750.8	−1.4
	八月	1167	1567	74.5	99.8	−25.3	640.1	−1.3
	九月	1352	1575	85.8	98.3	−12.5	156.2	−0.7
	十月	1450	1583	91.6	103.7	−12.1	146.4	−0.6
	十一月	1486	1591	93.4	99.0	−5.6	31.4	−0.3
	十二月	1616	1598	101.1	100.0	1.1	1.2	−0.1
總數		16131					3680.0	

一九〇五年	一月	1781	1606	110.9	98.5	12.4	153.8	0.6
	二月	1597	1614	98.9	93.1	5.8	33.6	0.3
	三月	1935	1622	119.4	15.2	14.2	201.6	0.7
	四月	1922	1630	117.9	102.0	15.9	252.8	0.8
	五月	1936	1938	118.2	103.6	14.6	213.2	0.8
	六月	1793	1646	198.9	98.5	10.4	108.2	0.5
	七月	1741	1654	195.3	98.3	7.0	49.0	0.4
	八月	1843	1662	110.9	99.8	11.0	123.2	0.6
	九月	1899	1670	113.7	98.3	15.4	237.2	0.8
	十月	2053	1678	122.3	103.7	18.6	346.0	1.0
	十一月	2041	1686	121.1	99.0	22.1	488.4	1.2
	十二月	2045	1694	120.7	100.0	20.0	428.5	1.1
總數		22587					2635.5	

一九〇六年	一月	2068	1702	121.5	98.5	23.0	529.0	1.2
	二月	1904	1710	111.3	93.1	18.2	331.2	1.0
	三月	2155	1718	125.4	105.2	20.2	408.0	1.1
	四月	2073	1726	120.1	102.0	18.1	327.6	0.9
	五月	2098	1733	121.1	103.6	17.5	306.2	0.9
	六月	19[illegible]6	1741	113.5	98.5	15.0	225.0	0.8
	七月	2013	1749	115.1	98.3	16.8	282.2	0.9
	八月	1926	1757	109.6	99.8	9.8	96.0	0.5
	九月	1960	1765	111.0	98.3	12.7	161.3	0.7
	十月	2196	1773	123.9	103.7	20.2	408.0	1.1
	十一月	2187	1781	122.8	99.0	23.8	566.4	1.2
	十二月	2235	1789	124.9	100.0	24.9	620.0	1.3
總數		24791					4260.9	

一九〇七年	一月	2205	1797	122.7	98.5	24.2	585.6	1.3
	二月	2045	1805	113.3	93.1	20.2	408.0	1.1
	三月	2226	1813	122.8	105.2	17.6	309.8	0.9
	四月	2216	1821	121.7	102.0	19.7	388.1	1.0
	五月	2295	1829	125.5	103.6	21.9	479.6	1.1
	六月	2234	1837	121.6	98.5	23.1	533.6	1.2
	七月	2255	1845	122.2	98.3	23.9	571.2	1.3
	八月	2250	1853	121.4	99.8	21.[illegible]	466.6	1.1
	九月	2183	1861	117.3	98.3	19.0	361.0	1.0
	十月	2336	1868	125.1	103.7	21.4	458.0	1.1
	十一月	1823	1876	97.4	99.0	—1.6	2.6	—0.1
	十二月	1234	1884	65.5	100.0	34.5	1190.2	—1.8
總數		25307					5754.3	

一九〇八年	一月	1045	1892	55.2	98.5	—43.3	1874.9	—2.3
	二月	1077	1900	56.7	93.1	—36.4	1325.0	—1.9
	三月	1228	1908	64.4	105.2	—40.8	1664.6	—2.1
	四月	1149	1916	60.0	102.0	—42.0	1764.0	—2.2
	五月	1165	1924	60.6	103.6	—43.0	1849.0	—2.3
	六月	1092	1932	56.5	98.5	—42 0	1764.0	—2.2
	七月	1218	1940	62.8	98.3	—35.5	1260.2	—1.9
	八月	1348	1948	69.2	99.8	—30.6	936.4	—1.6
	九月	1418	1956	72.5	98.3	—25.8	665.6	—1.4
	十月	1563	1964	79.6	103.7	—24.1	580.8	—1.3
	十一月	1577	1972	80.0	99.0	—19.0	361.0	—1.0
	十二月	1740	1980	87.9	100.0	—12.1	146.4	—0.6
總數		15620					1419[illegible].9	
一九〇九年	一月	1801	1988	90.6	98.5	— 7.9	62.4	—0.4
	二月	1703	1996	85.3	93.1	— 7.8	60.8	—0.4
	三月	1832	2003	91.5	105.2	—13.7	187.7	—0.7
	四月	1738	2011	86.4	102.0	—15.6	243.4	—0.8
	五月	1880	2019	93.1	103.6	—10.5	110.2	—0.5
	六月	1929	2027	95.2	98.5	— 3.3	10.9	—0.2
	七月	2101	2035	103.2	98.3	4.9	24.0	0.3
	八月	2246	2043	109.9	99.8	10.1	102.0	0.5
	九月	2385	2051	116.3	98.3	18.0	324.0	0.9
	十月	2600	2059	126.3	103.7	22.6	510.8	1.2
	十一月	2547	2067	123.2	99.0	24.2	585.6	1.3
	十二月	2635	2075	127.0	100.0	27.0	729.0	1.4
總數		25397					2950.8	
一九一〇年	一月	2608	2083	125.2	98.5	26.7	712.9	1.4
	二月	2397	2091	114.6	93.1	21.5	462.2	1.1
	三月	2617	2099	124.7	105.2	19.5	380.2	1.0
	四月	2483	107	117.8	102.0	15.8	249.6	0.8
	五月	2390	2115	113.0	103.6	9.4	88.4	0.5
	六月	2265	2123	106.7	98.5	8.2	67.2	0.4
	七月	2148	2131	100.8	98.3	2.5	6.2	0.1
	八月	2106	2138	98.5	99.8	— 1.3	1.7	—0.1
	九月	2056	2146	95.8	98.3	— 2.5	6.2	—0.1
	十月	2093	2154	97.2	103.7	— 6.5	42.2	—0.3
	十一月	1909	2[illegible]62	88.3	99.0	—10.7	114.5	—0.6
	十二月	1777	2170	81.9	100.0	—18.1	327.6	—0.9
總數		26849					24[illegible]8.9	

一九一一年	一月	1759	2178	80.8	98.5	—17.7	313.3	—0.9
	二月	1794	2186	82.1	93.1	—11.0	121.0	—0.6
	三月	2188	2194	99.7	105.2	— 5.5	30.2	—0.3
	四月	2066	2202	93.8	102.0	— 8.2	67.2	—0.4
	五月	1893	2210	85.7	103.6	—17.9	320.4	—0.9
	六月	1787	2218	80.6	98.5	—17.9	320.4	—0.9
	七月	1793	2226	80.5	98.3	—17.8	316.8	—0.9
	八月	1926	2234	86.2	99.8	—13.6	185.0	—0.7
	九月	1977	2242	88.2	98.3	—10.1	102.0	—0.5
	十月	2102	2250	93.4	103.7	—10.3	106.1	—0.5
	十一月	1999	2258	88.5	99.0	—10.5	110.2	—0.5
	十二月	2043	2266	90.2	100.0	— 9.8	96.0	—0.5
總數		23326					2088.6	
一九一二年	一月	2057	2273	90.5	98.5	— 8.0	64.0	—0.4
	二月	2100	2281	92.1	93.1	— 1.0	1.0	—0.1
	三月	2405	2289	105.1	105.2	— 0.1	0.0	0.0
	四月	2375	2297	103.4	102.0	1.4	2.0	0.1
	五月	2512	2305	109.0	103.0	5.4	29.2	0.3
	六月	2440	2313	105.5	98.5	7.0	49.0	0.4
	七月	2410	2321	103.8	98.3	5.5	30.2	0.3
	八月	2512	2329	107.9	99.8	8.1	65.6	0.4
	九月	2463	2337	105.4	98.3	7.1	50.4	0.4
	十月	2689	2345	114.7	103.7	11.0	121.0	0.6
	十一月	2630	2353	111.8	99.0	12.8	163.8	0.7
	十二月	2782	2361	117.8	100.0	17.8	316.8	0.9
總數		29375					893.0	
一九一三年	一月	2795	2369	118.0	98.5	19.5	380.2	1.0
	二月	2586	2377	108.8	93.1	15.7	246.5	0.8
	三月	2763	2385	115.8	105.2	10.6	112.4	0.6
	四月	2752	2393	115.1	102.1	13.0	169.0	0.7
	五月	2822	2401	117.5	103.6	13.9	193.2	0.7
	六月	2628	2408	109.1	98.5	10.6	112.4	0.6
	七月	2560	2416	106.0	98.3	7.7	59.3	0.4
	八月	2543	2424	104.9	99.8	5.1	26.0	0.3
	九月	2505	2432	103.0	98.3	4.7	22.1	0.2
	十月	2546	2440	104.4	103.7	0.7	0.5	0.0
	十一月	2233	2448	91.2	99.0	— 7.8	60.8	—0.4
	十二月	1983	2456	80.7	100.0	—19.3	372.5	—1.0
總數		30716					1754.9	

一九一四年	一月	1885	2464	76.5	98.5	—22.0	484.0	—1.2
	二月	1888	2472	76.4	92.1	—16.7	278.9	—0.9
	三月	2348	2480	94.7	105.2	—10.5	110.2	—0.5
	四月	2270	2488	91.2	102.0	—10.8	116.6	—0.6
	五月	2093	2496	83.9	103.6	19.7	388.1	—1.0
	六月	1918	2504	76.6	98.5	—21.9	479.6	—1.1
	七月	1958	2512	78.0	98.3	—20.3	412.1	—1.1
	八月	1995	2520	79.2	99.8	—20.6	424.4	—1.1
	九月	1883	2528	74.5	98.3	—23.8	566.4	—1.2
	十月	1778	2536	70.1	103.7	—33.6	1129.0	—1.8
	十一月	1518	2543	59.7	99.0	—39.3	1544.5	—2.1
	十二月	1516	2551	59.4	100.0	—40.9	16[illegible]8.4	—2.1
總數		23050					7582.2	
一九一五年	一月	1601	2559	62.6	98.5	—35.9	1288.8	—1.9
	二月	1675	2567	65.3	93.1	—27.8	772.8	—1.5
	三月	2064	2575	80.2	105.2	—25.0	625.0	—1.3
	四月	2116	2583	81.9	102.0	—20.1	404.0	—1.1
	五月	2263	2591	87.3	103.6	—16.3	265.7	—0.9
	六月	2381	2599	91.6	98.5	— 6.9	47.6	—0.4
	七月	2563	2607	98.3	98.3	0.0	0.0	0.0
	八月	2780	2615	106.3	99.8	6.5	42.2	0.3
	九月	2853	2923	108.8	98.3	10.5	110.2	0.5
	十月	3125	2631	118.8	103.7	15.1	228.0	0.8
	十一月	3037	2639	115.1	99.0	16.1	259.2	0.8
	十二月	3203	2647	121.0	100.0	21.0	441.0	1.1
總數		29661					4484.5	
一九一六年	一月	3185	2655	120.0	98.5	21.5	462.3	1.1
	二月	3087	2663	115.9	93.1	22.8	519.8	1.2
	三月	3338	2671	125.0	105.2	19.8	392.0	1.0
	四月	3228	2678	120.5	102.0	18.5	342.2	1.0
	五月	3351	2686	124.8	103.6	21.2	449.4	1.1
	六月	3212	2694	119.2	98.5	20.7	428.5	1.1
	七月	3226	2702	119.4	98.3	21.1	445.2	1.1
	八月	3204	2710	118.2	99.8	18.4	338.6	1.0
	九月	3202	2718	117.8	98.3	19.5	380.2	1.0
	十月	3509	2726	128.7	103.7	25.0	625.0	1.3
	十一月	3312	2734	121.1	99.0	22.1	488.4	1.2
	十二月	3171	2742	115.6	100.0	15.6	243.4	1.8
總數		39025					5114.9	

一九一七年	一月	3151	2750	114.6	98.5	16.1	259.2	0.8
	二月	2645	2758	195.9	93.1	2.8	7.9	0.1
	三月	3261	2766	117.5	105.2	12.3	15 .3	0.6
	四月	3335	2774	120.2	102.0	18.2	331.2	1.0
	五月	3417	2782	122.8	103.6	19.2	368.6	1.0
	六月	3270	2790	117.2	93.5	18.7	349.7	1.0
	七月	3342	2798	119.4	98.3	21.1	445.2	1.1
	八月	3248	2806	115.8	99.8	16.0	256.0	0.8
	九月	3134	2813	111.4	98.3	13.1	171.6	0.7
	十月	3303	2821	117.1	103.7	13.4	179.6	0.7
	十一月	3206	2829	113.3	99.0	14.3	204.5	0.7
	十二月	2883	2837	101.6	100.0	1.6	2.6	0.1
總數		38185						
一九一八年	一月	2412	2845	84.8	98.5	—13.7	187.7	-0.7
	二月	2319	2853	81.3	93.1	—11.8	139.2	—0.6
	三月	3213	2861	112.3	105.2	7.1	50.4	0.4
	四月	3288	2869	114.6	102.0	12.6	158.8	0.7
	五月	3446	2877	119.8	103.6	16.2	262.4	0.8
	六月	3324	2885	115.4	98.5	16.7	278.9	0.9
	七月	3421	2893	118.2	98.3	19.9	396.0	1.0
	八月	3390	2901	116.9	99.8	17.1	292.4	0.9
	九月	3418	2909	117.5	98.3	19.2	368.6	1.0
	十月	3487	2917	119.5	103.7	15.8	249.6	0.8
	十一月	3354	2925	114.7	99.0	15.7	246.5	0.8
	十二月	3434	2933	117.1	100.0	17.1	292.4	0.9
總數		38506						
一九一九年	一月	3302	2941	112.3	98.5	13.8	190.4	0.7
	二月	2940	2948	99.7	93.1	6.6	43.6	0.3
	三月	3090	2956	104.5	105.2	— 0.7	.5	0.0
	四月	2478	2964	83.6	102.0	—18.4	338.6	—1.0
	五月	2103	2972	70.9	103.2	—32.7	1069.3	—1.7
	六月	2115	2980	71.0	98.5	—27.5	756.3	—1.4
	七月	2429	2988	81.3	98.3	—17.0	289.0	—0.9
	八月	2743	2996	91.6	99.8	— 8.2	67.2	-0.4
總數	九月	2488	3004	82.8	98.3	—15.5	240.3	—0.8
	十月	1864	3012	61.9	103.7	41.8	1747.2	—2.2
	十一月	2392	3020	79.2	99.0	—19.8	392.0	—1.0
	十二月	2633	3028	87.0	100.0	—13.0	169.0	—0.7
		30582						

一九二〇年	一月	3015	3036	99.3	98.5	0.8	.6	0.0
	二月	2979	3044	97.9	93.1	4.8	23.0	0.3
	三月	3376	3052	110.6	105.2	5.4	29.2	0.3
	四月	2740	3060	89.5	102.0	—12.5	156.3	—0.7
	五月	2936	3068	97.3	103.6	— 6.3	39.7	—0.3
	六月	3044	3076	99.0	98.5	0.5	.3	0.0
	七月	3067	3083	99.5	98.3	1.2	1.4	0.1
	八月	3147	3091	101.8	99.8	2.0	4.0	0.1
	九月	3129	3099	101.0	98.3	2.7	7.3	0.1
	十月	3293	3107	106.0	103.7	2.3	5.3	0.1
	十一月	2935	3115	94.2	99.0	— 4.8	23.0	—0.3
	十二月	2704	3123	86.6	100.0	—13.4	179.6	—0.7
總數		36415						

上列實際材料係在a行。至b行所列者爲代表各月在恆差線上之位置之量數。c行所列者爲b除a之百分數，至此恆差之影響乃去。及以b除a之百分數減去d行之月差指數所得之數置於e行，而月差與恆差之影響遂皆除去。故此數卽可表示循環現像，但僅能顯示一業者，若以與他業相較，未見其可也；蓋兩事項之百分離中差卽雖變化相同，而兩事項所受變化之影響亦未必同，是故欲以兩事業之循環作用相比較，必各求出標準差，以之除百分離中差，所得結果，繪成曲線卽循環現象之依標準差表示而可兩相比較者也。至於求標準差之方法，卽以各月之百分離中差自乘，以其結果相加所得之和數除以歷年中所有月數，求出商數復開平方，其結果卽爲標準差。

二種事業之循環作用既各以標準差爲單位算出，卽可繪成兩曲線以表示之，置其一於另一者之上，觀其起伏相應之迹，以辨兩事業相互關係之爲正負高低或中平，若以繪於一紙不便比較，可用透明之紙繪一曲線於一紙，而以兩紙相對照以視兩曲線之變動焉。

第四節
商情預測之方法

吾人既知商情變化之原因及其變化之程度，則鑒往知來宜可以爲商情之預測矣。惟如何推已往，測未來，則必有賴於一種指數，此卽歐美人士所謂商情風雨表或名經濟風雨表（Business Barometer or Economic Barometer）。蓋風雲變幻莫測，晴雨未可預知，商情亦猶是也，自有風雨表而風雨可以推測，今有指數，乃可爲商情之預測，是此種指數殆如風雨表之可測不測，可知未知，名之曰商情風雨表，誰曰不宜。商情風雨表，概別之，有二種：一曰普通商情風雨表，二曰特種商情風雨表。兩者不同之處卽在構成指數之材料，在前者須能對於全體社會經濟生活有重大之影響，在後者須能偏重於影響一部份經濟生活，前者可藉以預測普通商情之變遷，後者可藉以預測特種商情之變遷。夫各業各有其特殊之情形，則構成特種商情風雨表之材料能影響于經濟生活者自因業而異，絕非數言所可概論，故但就普通商情風雨表述之，能明此者，則構造特種商情風雨表，自非難事。

普通商情風雨表須以能影響一般經濟生活之材料構成之，是所需之材料甚多，如物價，利率，股票價格等能反映全體社會經濟狀況者，皆須蒐集。然而各種材料，須搜羅無遺，在事實上殊非易易，於是只有採用揀樣法，擇其足以代表一大部分之材料而影響經濟生活最切者編輯之。惟經濟生活易地而殊，故集兩地同作普通商情風雨表，而所取之材料不盡相同。今舉世界最著名之商情風雨表構成之材料爲例。

一。哈佛修正指數（The Revised Harvard Business Index）。

此項指數載於美國哈佛大學經濟調查委員會印行之經濟統計

評論(Review of Economic Statistics), 係用以表示美國經濟狀況者。其主編人爲哈佛大學教授勃生氏(W. M. Persons)其所取材料如下:

第一組 投機事業

1.紐約各銀行之欠項

2.實業股票之價格

第二組 商業

1.紐約市外一百四十城市之銀行欠項

2.十種影響最易之貨物之價格指數

第三組 金融事業

1.四個月至六個月商業票據之利率

2.六十日至九十日商業票據之利率

二. 倫敦及侃不類幾經濟討論處之指數 (The Indices of th London and Cambridge Economic Service). 構成此項指數所取之材料如下:

(一)投機事業

二十種實業股票之價格

(二)短期放款指數

1.英蘭銀行短期(三月內)匯票貼現率及短期貸款利率

2.銀行存款額

3.即期率

4.三月票據率

(三)商業

1.出口製造品之價值

2.薏鲁物價指數

三. 莫斯科一般市況指數。 莫斯科市況研究所作成一般市況指數。此項指數乃彙編下列各事項之指數所成者:

1.物價
2.貨幣數量
3.信用
4.商業
5.交通
6.重工業
7.輕工業
8.勞動

四.德國之市場指數. 德國市況研究所選擇代表下列三市場之指數,作成三曲線以觀察市場之狀況。

(一)代表證券市場之指數 其所依據之材料如下;
1.證券市價
2,交易所上場229種股票之平均市價
3. 5% gold pfarrbiraf 之市價

(二)代表商品市場之指數 其所依據之材料爲下列各種物品之價格指數:
1.變動較大之十種商品
2.躉售商品
3.躉售商品中之原料粗製品
4.躉售商品中之精製品

(三)代表金融市場之指數 其所依據之材料如下:
1.押匯利率
2.平均利率

五.瑞典經濟評論之瑞典風雨表(The Barometer for Sweden published in the Swedish Economic Review). 其所取材料如下:

(一)實業股票之價格

(二)平均躉售物價

(三)不能移轉之本國公債券之數額

(四)另加數圖以表示

1.生鐵鋼條與製紙之化學原料之生產及木器輸運之變遷

2.商業聯合會會員之失業狀況

六.拔不生統計協會所印行之經濟風雨表 (The Economic Barometer published by the Babson Statistical Association). 此種經濟風雨表乃以代表新建築,僑民移入,商業失敗,銀行清算,物價,對外貿易,貨幣行情,農業生產,鐵路,警務,股票,交易所行情,政治,社會等情形之二十五種指數組成者。

七.紐約紀年週報所披露之商情指數. 此項商情指數乃取材於經濟統計雜誌之物價,利率,生鐵生產量,紐約銀行票據清算數,紐約市以外之銀行票據清算數等指數而求其變量之加權平均數之倒數,以圖表示之,並略附說明。

由上觀之,各機關同爲商情之預測,而採取之材料互不相同,例如倫敦及倪不類幾經濟討論處編輯之指數所用材料包含有出口製造品之價值,而在哈佛大學經濟調查委員會所印行之美國經濟狀況之修正指數所用之材料未包含出口製造品之價值。雖然,所取材料大都不出投機,商業及金融三類之事項焉。至三者之受經濟影響最速者,當推投機事項,次爲商業,再次爲金融,故哈佛大學編1903—1914年投機,商業及金融事項之指數而以三曲線表示之,投機曲線之起落,在同時期商業曲線前約四個月至六個月,商業曲線之起落在同時期金融曲線前約六個月。是則投機曲線升高,又可以預測商業曲線之升高,而商業曲線之升高,又可以預測金融曲線之升高,投機曲線之降落,亦可以預測商業及金融曲線之降落也。然則有此種指數曲線,社會人士之經濟利益乃可得一重堅固之保障,使其足

以致損失之一切行動，可以避免。例如推測下月商業曲線有增高之趨勢，則製造家於本月可以購置原料，增加貨物生產量，同時商人速進貨物，若下月商業曲線有降落之趨勢，則製造家即不能多購原料並增加貨物生產量，商人即應停止進貨，盡力推銷存貨，似此立足於經濟社會之人士皆知利害之所歸，即能遠害而赴利，則社會之供求趨於調和，如有經濟恐慌，其影響必微，社會經濟生命乃致於穩定矣。

至足以代表商情之材料既經搜齊，將用如何方法以構成商情風雨表。簡言之即依據材料繪成一曲線，引而伸之，觀其或然之趨勢而已，例如作成曲線之趨勢依下列之級數進行：

1 3 9 27 81 243

在最相近之二級中，後者恆三倍於前者，則可引長此曲線而推測未來之一數將為729，雖非必然，必與此數頗相近也。

推測未來之商情趨勢固如上述之簡單乎，未也。蓋商情變化有恆差，月差，循環作用與意外變動四種原因，推測未來之趨勢固不可不有以分析之而推算其趨向。設若所選之材料為長時期而能充分表現恆差月差之作用者，則此項恆差及月差變動之趨勢不妨推測於未來數年中，意外變動因事而異，自應視事之性質如何，與社會之關係如何，以推測之，且其影響所及，常在短時期中，不足以左右遠大之趨勢，暫可置之勿論。至循環作用有二：一曰普通商情循環作用，二曰特種商情循環作用。前者屬於一般商業者，後者屬於特種商業者。欲預測普通商情，則須推測前者。欲預測特種商情，則須推測後者。兩者推測之步驟如下：

一. 推測普通商情循環

第一步 確定與普通商情有關係之某特種商情

第二步 推測某特種商情之未來趨勢

第三步 依某特種商情之趨勢擬定普通商情之趨勢

第四步　將擬定商情趨勢以曲線表示之，並將此線譯成數量。

二。推測特種商情循環

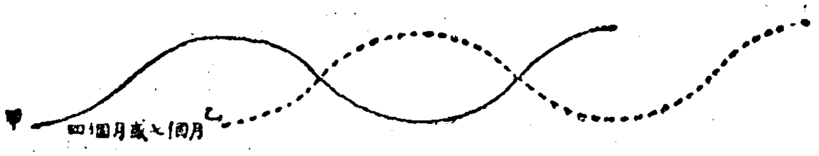
第一步　決定所推測之甲特種商情循環與普通商情循環或乙特種商情循環之關係

第二步　推測普通商情或乙特種商情之未來趨勢

第三步　依普通商情或乙特種商情之趨勢擬定甲特種商情之趨勢

第四步　將擬定之商情趨勢以曲線表示之，並將此線譯成數量。

然若普通商情循環與某特種商情循環，或甲特種商情循環與乙特種商情循環關係甚淺，或竟無甚關係，則推測任何一種循環作用時，須別求與之有關係之某業商情循環以比較之。統計事實中往往有二列項，其循環作用有甚密切之關係；例如躉售物價之漲落常先於零售物價，生貨售價之漲落常先於熟貨，半製成物品之價較全製成物品之價漲落爲速，工資增加常隨物價增加之後，利率之升降常隨銀行準備金增減之後，銀行即期貸款率之升起常先於長期貸款之貼現率，而長期貸款貼現率之升起常先於長期貸款之利率，甚有二列項相距約有一定時期如四個月或七個月者，例如圖 71 所示甲



項與乙項之行動有步趨一致之勢，乙項之上落恆在甲項上落四個月或七個月後，苟遇此種事項，則商情循環之推測甚易，蓋此項之循環儘可就彼項之起伏而推得也。

推測普通或特種商情循環作用之法各分四步，已如上述。第一

步爲一相關問題，吾嘗論之。第二步須視社會經濟之趨勢及供求之原理而定，此爲一統計兼社會經濟之問題。第三步則依普通商情趨勢與某特種商情趨勢之關係或甲乙兩種商情趨勢之關係而定一擬議之線。第四步則須就擬議曲線之各項，依圖上之距離，決定其所含有量數，此則將求循環作用之法回元以求之可矣，蓋擬議之線即依據循環作用之線而延長者。今爲說明循環作用回元求法起見，先將計算循環數所取各步列舉於下：

1. 以代表各月在恆差線上位置之量數除實在量數，然後乘100 以得百分數。
2. 以所得百分數減月差指數得或正或負之百分離中差。
3. 將標準差除百分離中差所得之商數卽循環數也。

現在計算乃回元作用，則須將三步之次序倒置之，並改減爲加改除爲乘如下：

1. 將擬議曲線上各項之數字乘標準差所得之積爲百分離中差。
2. 以百分離中差加上月差指數。
3. 以百分離中差加上月差指數所得之和乘以100 再乘以代表恆差線上位置之量數，所得結果卽預測之暫定量數，此種量數僅能大致不差，絕不易與實得數完全符合，將來有實得數，仍須加以修正也。

第十一章

人生統計(Demography)

第一節

人生統計之意義

人生統計者爲研究人之健康，疾病，身體，才智，經濟，生育，婚姻，死亡統計之科學也。(Demogrgphy is the science which deals with the statistics of health and diseases, of the physical, intellectual, physiological and economical aspects, of birth, marriage and mortality.) 直言之，卽可謂爲研究人生狀態之一種統計也。(Demography may be d fined as that branch of statistics which deals with the life-conditions of peoples.) 此種統計與人羣有莫大之關係。誠以人生爲政治社會經濟及其他一切事業活動之中心，政治，社會經濟及其他各種問題之發生無非爲人生也。苟對於人生狀態，無確切之認識，而欲謀政治社會經濟及其他一切事業之安定，而欲解決政治社會經濟及其他各種問題，殆猶緣木求魚，未見其可也。是故研究人生狀態，誠爲人生之要舉。然而人生狀態極變幻錯綜之致，欲綜合而觀察之，則必借重人生統計。蓋有人生統計，則人生之內因以顯，外緣以明，執天下之鈞軸者，對於人生之歷程，遂得辨其利害，察其因果，或爲扶掖，或爲裁

制，必得其當，如此則政治社會經濟等問題漸可解决，政治社會經濟及其他各種事業自趨於安定，而人羣乃可付託於安全之境域矣。

第二節

人生統計之研究方法

芸芸人事，萬象紛呈，彼此互爲動機，互爲影響，因果倚伏，息息相關。固欲加以普徧研究，編製統計，則必應用求相關係數法(此曾於第六章第五節論之)，斯可明其全體各部分相關之脈絡。至如欲明人事各部分之秘奥，則須類別人生狀况爲三態：一曰靜態，二曰動態，三曰病態，分別研究而統計之。所謂靜態卽人生之狀况，經吾人依固定之目的而爲靜的研究者也，例如須經一長時期清查一次之人口數是。所謂動態卽人口變動之狀况，例如出生，死亡，婚姻，繼承，收養，分居，同居，遷徙等狀况是。病態者卽反人生之自然與美滿之狀態 例如離婚，廢疾，失蹤，自殺，犯罪等狀况是。玆將關於人生之三態統計分別述之於後。

第三節

人生靜態統計

人生靜態統計卽普通所謂人口統計，乃依固定之目的對于人生爲靜態的研究之統計也。此種統計之法有二：一爲間接的，二爲直接的。間接統計法卽以數年或數十年前之人口爲基礎，而依其增減數額，以算出現在人口之方法。直接統計法乃由調查者親臨調查地點對于人口直接調查所搜集之材料，加以統計之一種方法。由此可知前者係根據現成材料，後者必須自行搜集材料，是前者固較後者爲易，應叙述後者，則前者自明，又以後者較難，乃由于自行搜

集材料之一步麻煩手續，故敘述後者，首及搜集材料之法，更以搜集材料時，對於人之職業不易分類，故繼搜集材料之法以敘述職業分類法，至材料之分析及人口統計應用之公式則最後述之。

一. 搜集材料之方法

直接搜集人口統計之材料，必須有一定之時間，範圍及實地調查方法，茲分述之於後。

(一)搜集材料之時間　搜集材料之時間隨時隨國而異，若周之三年大比與前清會典所稱之現行例五年編審直省人丁一次，固以三年或五年搜集材料一次，德，法，日本則五年一次，英美則十年一次。惟際此社會情事，複雜日甚，搜集材料之次數相隔時間不宜過長，但搜集材料頗爲煩費，例如俄國於 1897 年調查人口，用調查員二十三萬餘人，美國舉行第十二次國勢調查時，用費竟達美金八百萬元以上，煩神之巨，費錢之多，可概知矣，故次數相隔時間亦不宜太短。於是有人折衷論定，國境狹者不妨五年一次，廣者要以十年一次爲佳。若以十年時間太長，地方搜集材料不妨五年一次，恰在全國搜集一次之中間，以此結果與十年間各年人口變動估計數相比較，當可糾正一部分之錯誤也。至年數末位宜擇其爲0或5如1920或1925是。

搜集材料不僅須定施行次數相隔時間，並須規定施行之日期及當日之時間。此日期大多數國家規定在十二月三十一日，如意大利，奥大利，匈牙利，比利時，荷蘭，瑞典，那威，西班牙等國皆是。尚有其他國家規定稍異，如德意志，葡萄牙定於十二月一日，瑞士定於一月一日，丹麥定於二月一日，印度定於三月一日，英吉利定於四月六日，法蘭西定於四月十二日，美利堅定於六月一日。誠以各國氣候，經濟狀況，社會習慣以及行政機關事務之繁閑互有不同之處，故不能置之一律，但總

須定於人口變動最少之日期。至搜集材料施行日之時間，通常定于午夜十二時起至翌日午十二時止。惟此猶嫌太長，能於夜間竣事為最宜，蓋過宿人口狀況必有多少變動也。

(二)搜集材料之範圍　材料之搜集或以各地現居之人口為範圍，或以各地常川居住之人口為範圍。主張前者有英吉利澳大利亞，印度，埃及及南非聯邦。主張後者有美利堅，瑞典，那威，丹麥，坎拿大等處。尙有德意志，法蘭西，瑞士，日本等國兼前述兩者而主張之。

就搜集之手續言之，以各地現居人口為範圍搜集材料，較為簡易，然其統計結果往往非各該地之實在人口數，若欲研究地方居宅問題，失業問題，就不宜以之為根據；劃分選舉區域及行政區域，因在大多數憲政國家，須依據各地方常川居住之人口數以為定，亦不宜以之為根據。是故就理論上言之，以各地常川居住之人口為範圍搜集材料較為適當。然易發生種種困難，其最大者則為無法區別臨時住址與永久住址，蓋富人往往擁有住宅數處，分隔數區，以供休止，究以何者為其永久住址，旅行之人每每轉徙無定，有時即其家屬亦不能確知其旅居之地址。苟欲清查此等居民，頗難獲一善法。是則兩者各有所長，亦各有所短，究取何者，斯為適當，則須依據國情以定之可矣。

(三)實地調查法　直接搜集之人口統計材料必經實地調查，調查之方法有四種如下：

1.官吏調查。　官吏調查原係臨時性質，當調查完竣以後，此等官吏即行解職。但不久有少數國家，已由政府設立固定機關，施行調查，如美國之人口統計局即其一也。當調查之先，例如美國，依人口之疎密，道路建築之優劣，氣候之溫寒，雨量之多寡等情形，分全國為若干司法區域，每區域又

分爲若干人口數目相彷彿之調查區域，各司法區域置人口調查監督，各調查區域置人口調查員專任實地調查之事；在調查時期之內，必須逐戶細查，親自塡表，如各區調查不能於一時間竣事，稍有參差，乃定一日爲人口調查日，以便將調查時期內所得之人口數折成人口調查日之人口數，譬如某人之死適在人口調查日之前，則此人不應加入人口總數之內，如恰在人口調查日之內，則必須加入，又某嬰兒出生之期適在人口調查日之前，此嬰兒當可加入人口總數之內，如在人口調查日後，則無須加入，又某甲遷至永久住址，此項遷徙雖發生於人口調查日後，亦必加入新遷之地之人口數內，然若此項遷徙之人早經調查員在原籍調查，卽不必加入新遷之地之人口數內；調查旣畢，調查員須將所有塡就之調查表格寄交調查監督，調查監督將所轄各調查區之調查表匯齊寄送人口統計局。此種調查方法，除美國外，坎拿大，拉第維爾，立陶宛等處皆應用之。

2.由人民自行登載各調查事項於調查表。採用此種方法者爲，英，法，德，意，澳，匈，瑞士，日本等國。此法乃由政府令人民自行塡答政府頒行之調查表格所查詢各事項，人口調查員僅負分配及收集調查表格之責。玆舉英國爲例：英國之人口調查事務，在 1841 年以前，原由政府飭國內各地之和平裁判官及各市政府之祕書辦理，此等官吏將調查表格分發人口調查員塡報，此種調查員或爲里正或爲小學敎師，而小學敎師更由警察長官指揮之；自 1841 年以後，塡報調查表卽由各家長負責；至 1920 年訂戶籍法，規定調查人口之責屬於衛生部，自調查以至統計完全由該部註册總監主持，當調查之先，分全國爲若干註册區域，每區置註册主任一人，每一註册區域復分爲若干調查區域，每區置人口調查員

一人，此種調查員爲臨時聘任或支取薪津或不支薪而於調查後由政府頒給特製之奬章，調查表格即由調查員分發各所在區住戶塡報，迄人口調查夜，調查員即須赴各戶收集表格，至停泊於英國海面之船隻以及燈塔上之人口，則由海關負責調查，無家可歸之人口如流氓乞丐等則由當地警察調查，亦須儘於人口調查夜辦理完竣，所謂人口調查夜者即法定之調查時刻正當夜間十二時也，全國人口數應折成該時間人口數，在調查夜之次日上午，各註册主任即可彙齊各調查員之塡就調查表格，先算出各該註册區之人口總數，報告註册總監，以備即日發表，隨後再將調查表格寄去，使于表中事項能爲詳細之分析焉。

3.先使人民記載各調查事項，然後由官吏改正之。此法係先將人口全行調查，而於人口調查夜復查。實行之者爲印度與埃及。玆舉印度爲例。印度旣併於英，對于人口調查事情即於各省特設人口調查局施行之。至1990年，始設立人口調查委員會以計畫全國人口調查統計事宜。此種調查委員會爲臨時性質，每當十年調查一次之時始設立之，委員會統轄各省人口統計局，各局置省監督一人。每省依其劃定之政治區域分爲若干調查道，道置道調查監督一人。道之下，又分若干調查邑，邑置邑監督一人。邑之下復分爲十至十五調查區域，每區約有三百家，置調查員一人以調查之。在人口調查夜之前若干星期，調查員即須就本調查區內常川居住之各戶，逐一加以調查，將調查結果記入筆記册內，然後呈筆記册與邑監督審核，如邑監督認爲有可疑之處，仍須重行調查，直至滿意以後，邑監督乃指導調查員將調查結果塡入調查表格。及至人口調查夜，調查員須攜塡就之表格，親至各住戶核對，如有死於當夜十二時以前之人口曾列入調查表者，

必須自調查表上除去，如有生於該時間以前之人口而未列入調查表者，必須加入，如有在該時間以前遷至本區者，亦必加入。在人口調查夜之次日上午，各調查員須依據各調查表，先將本調查區之戶數及男女人數核算清楚，塡入調查區戶口總計表，送邑監督核對；邑監督核對所轄調查區戶口總計表後，遂將邑戶數及男女人數塡入調查邑戶口總計表，呈道監督；道監督彙齊所轄各調查邑戶口總計表以後，遂將本調查道之戶數及男女人數核算清楚，電告省監督；省監督根據各調查道之報告，算出本省戶數及男女人數，再電告人口調查委員會；人口調查委員會根據各省報告，卽可得印度戶數及男女人數。至關于全印度人口狀況之詳細統計，須待委員會將調查表搜齊始可辦理。

4. 敎士調查。 此法爲瑞典，丹麥，那威等國所採用。而瑞典固爲此法首創者，蓋瑞典受宗敎之影響甚深，其人民之婚嫁生死等事悉用敎士爲之祈禱祝福，故敎士對於各敎區內之人口數及婚嫁生死等事皆有詳細之記錄，政府乃利用此等敎士，使對於中央統計局，每間十年，將人口總數及男女分配，年齡分配等材料報告一次，卽使其敎區人口遠適他處，仍視爲該區之人口，須列於報告之內。各敎士本對於人口狀況有所記錄，自政府飭令負調查報告之責，遂特備簿冊，登記區內人民狀況，每年查明去歲歲底本區居住男女人數並本年所生嬰兒總數，遷至本敎區之人數及失蹤者之人數，以去歲歲底之人口加本年新增之人口，減去死亡遷居及失蹤之人口，以得本年人口數。

四種調查法均由各國依據本國國情，採擇行之。故各有其特點，任何國家因而採用之，亦必先視其國情以爲定也。

二. 職業

人口統計材料之項目，分爲人數，性別，年齡，生日，體力，家庭身分關係，配偶，宗教，語言，職業，國籍，出生地，現在住所等。其間各項，除家庭身分關係，配偶及職業外，顧名思意，易於明瞭。家庭身分關係者何，蓋卽被調查者各人在家屬內與家長或戶主之關係，易言之，卽爲家長或戶主之父，母，妻，子，兄，弟，姊，妹，叔，姪，教師，書記，抑或其他之親屬關係也。配偶者卽男女相配以結夫妻之關係也，因此種關係而發生之狀況，如已婚，未婚，已嫁，未嫁，鰥，寡等是。職業者卽被調查者在社會上任務之類別也。此三項一經解釋，其意義似可了然，須知謂前二項如此則可，後者猶未必，蓋職業之種類綦繁，若不明爲劃分，則一事之來，往往茫然無所歸，或竟誤歸於一類；然而劃分過於縝密，則支節零碎，不易窺其大概；若粗爲劃分，則各類之特性及其在社會上之關係又將含混不淸。故解决職業分類問題，頗爲不易，卽至今日，各國尙無一定之分類方法也。惟吾人須知各國職業分類，大都視各國事業之情形而定，如其事業着重分工，講究效率，則職業分類至爲詳細；如事業未呈繁密狀態，則職業分類頗爲簡單。雖然，際此世界文明日進，人生需要之事日多，職業自日臻繁複，其類別若含混籠統，必不足以盡事業之眞相而闡明其間之關係，允宜詳列類別，將職業能剖至可以適用之點也。玆參酌萬國統計學會，美國，日本等職業分類法，擬定職業類別如下：

職業分類綱目

類別	總業別	分	業別
農業類	農業	1.農作	種穀類，豆類，薯類等充糧食者；茶，果，蔬菜屬充食品者及桑，蔴，棉，葛等充紡織物

		原料者屬之。
		2.園藝　蒔花卉屬之。
		3.樹藝　種漆樹 桐樹，橡樹等屬之。
		4.墾荒
		5.其他
	林業	1.造林 2.採伐木料 3.薪炭 4.狩獵
	畜業	1.畜牧(放牧牛馬雞豕等) 2.養禽 3.養蠶 4.養蜂 5.奶油搾製 6.皮毛剝採 7.其他
	漁業	1.水產物取捕 2.水產物養殖 3.其他
礦業類	採礦業	1.金屬　金,銀,銅,鐵,錫,鉛,鋅,鋁,錳,鎳,銻,鎢,鉬,鉍等鑛。 2.非金屬　煤,石油,天然瓦斯,硝酸,燐酸,鹽類,鹹類,硫磺等礦。
	土石採掘業	
工業類	原力工業	1.電力 2.汽力 3.瓦斯 4.水道 5.其他
	冶煉工業	1.礦砂冶化 2. 金屬材料精煉 3.其他
	機械工業	1.原動力機械（如汽機,瓦斯發動機,石油發動機,電氣發動機等。） 2.各業應用機械(如農,礦，交通，學術，家庭及其他各種事業應用之機械。)
	金屬品製造	1.金銀器 2.銅器 3.錫器 4.鐵器 5.白鐵器 6.硬質通貨 7.銅鐵絲 8.釘針 9.各種機械金屬附件 10.

	船舶金屬附件 11.飛機金屬附件 12.車輛金屬附件 13.製罐 14.鐵箱 15.度量衡金屬器 16.兵工製造品（如鎗炮子彈刀劍等） 17.其他
化學工業	1.造紙 2.火柴 3.火藥 4.醫藥品製造 5.顏料 6.塗料 7.肥料 8.油蠟品製造 9.化粧品製造 10.皮革製煉 11.玻璃 12.琺瑯 13.香料 14.胰皂 15.酸類 16.碱類 17.硝磺 18.礬 19.電鍍 20.漂染 21.其他
木草籐竹品製造	1.木器製造（如木製傢具，風箱，水車等。） 2.草製品（如蓆類製品·藁席，草帽辮等。） 3.藤製品 4.竹製品
紡績工業	1.製絲 2.製棉 3.績絲 4.績棉 5.麻類紡績 6.毛類紡績 7.棉織物 8.絲織物 9.絲棉交織物 10.麻織物及其交織物 11.毛織物及其交織物 12.其他
飲食品業	1.碾米 2.麵粉 3.米粉 4.酒類釀造 5.製鹽 6.製藥 7.製糖 8.煙類製造 9.調味品製造 10.蔬果精製 11.糕餅製造 12.水產品製造 13.畜產品製造 14.冰汽水及其他飲料製造 15.罐頭食物製造 16.豆類食品製造 17.牛乳煉製 18.蜜蠟溶製 19.蛋品製造 20.澱粉製品 21.其他
	1.磚瓦 2.灰石 3.水泥 4.陶器

		5.瓷器 6.其他
	建築業	1.木匠 2.泥水匠 3.舖設工業 4.疏濬工業 5.其他
	服用品製造	1.成衣 2.紐扣 3.製帽 4.靴鞋 5.硝皮 6.雨衣 7.其他
	交通工業	1.車輿 2.船舶 3.飛機 4.其他
	公用工業	1.自來水 2.電話用具製造 3.其他
	教育工業	1.文具 2.油墨 3.印刷 4.裝訂 5.儀器 6.影片 7.照相器具 8.玩具 9.其他
	美術工業	1.雕刻 2.刺繡 3.裝花 4.牙工 5.油漆 6.織補 7.裝潢 8.其他
	雜料製造	1.製傘 2.編物 3.樂器 4.電器 5.馬具 6.皮革品製造 7.羽毛品製造 8.骨介品製造 9.膠漆品製造 10.橡皮品製造 11.紙製品 12.麻製品 13.珠寶玉器 14.石器 15.煤球 16.洋燈 17.鐘表 18.其他
商業類	貨品販賣業	1.農產品販賣業（如糧食店，水菓店，蔬菜攤等屬之。） 2.林產品販賣業(如木行，柴炭舖等屬之。) 3.畜產品販賣業（如肉店，雞鴨行，牲畜商、油乳商等屬之。） 4.水產品販賣業(如魚蝦行 海菜舖等屬之。) 5.礦產品販賣業(如煤炭舖，石油店等

屬之。)

6.機械販賣業(如機器店等屬之。)

7.金屬製品販賣業(如五金舖,銀樓,銅器舖,錫器舖等屬之。)

8.化學工業品販賣業(如玻璃店,紙店,油漆店,顏料店,化粧品店等屬之。)

9.木草藤竹器販賣業(如木器舖,蓆店,藤竹器店等屬之。)

10.紡績工業品販賣業(如絲行,棉紗行,綢緞店,布莊等屬之。)

11.飲食品販賣業(如南貨店,茶食店,酒店,麪店,鹽店等屬之。)

12.土石製品販賣業(如陶貨舖,瓷器舖,磚瓦舖,石灰舖等屬之。)

13.服用品販賣業(如靴鞋店,帽店,衣店等屬之。)

14.交通用品販賣業(如汽車公司等屬之。)

15.教育用品販賣業(如書局,筆店等屬之。)

16.美術品販賣業(如雕刻店,繡貨店,骨角貝牙細工製品店等屬之。)

17.雜材製品販賣業(如傘店,電器行,樂器店珠寶店鐘表店藥店等屬之。)

18.雜貨業(如小雜貨店,廣貨店,零售百貨公司,郵寄百貨公司等屬之。)

		19.廢物業(如破布店等屬之。)
		20.其他
	經紀介紹業	1.各種牙行(如房牙,地產公司等。)
		2.各種交易所(如金業交易所,紗布交易所等。)
		3.保險公司經理
		4.洋行買辦
		5.捐賣業(如證券,輪船票,棉紗,五金等之攬售人及轉運,保險等業之捐客皆屬之。)
		6.代售業
		7.廣告業
		8.荐頭業
		9.其他
	產物賃貸業	1.房地產租賃業(如市場業,堆棧業等。)
		2.物品貸賃業(如家具,服裝,書籍等貸賃業。)
		3.其他
	金融保險業	1.銀行業 2.錢莊業 3.儲蓄業 4.典當業 5.押匯業 6.兌換業 7.保險業 8.其他
	生活供應業	1.旅館業 2.飲食店業 3.娛樂場業 4.整妝業(如理髮業美容業等) 5.澡淅業 6.圖書館業 7.新聞業 8.雜誌社業 9.閱報社業 10.其他
交通類	通訊業	1.郵便業 2.有線電報 3.無線電報

		4.電話 5.其他
	運輸業	1.鉄道運輸 2.電車運輸 3.汽車運輸 4.畜力運輸 5.人力運輸 6.汽船運輸 7.帆船轉運 8.航空運輸 9.轉運公司 10.其他
公務人員類	政務人員	1.政黨服務人員 2.行政官吏 3.立法官吏 4.司法官吏 5.考試官吏 6.監察官吏 7.外交官吏 8.其他
	軍警人員	1.海軍官兵 2.陸軍官兵 3.空軍官兵 4.警察 5.消防隊員 6.其他
	人民團體辦事人員	
	各機關雇員	
	差役	
自由職業類	醫師看護士及藥劑師	
	律師	
	工程師	
	會計師	
	宗教師	
	教育家	
	新聞家	
	藝術家	1.影戲家 2.戲劇家 3.音樂家 4.跳舞家 5.雕刻家 6.繪畫家 7.魔術家 8.卜巫家 9.星相家 10.其他
	著述家	1.科學家 2.文學家 3.哲學家 4.史事家 5.其他
家庭服務類	家庭經理	
	家庭工業	

家事使用

其他

無業者 本無生產業務之兒童及學生

無所事事完全依產業生活者

無所事事完全依他人生活者

中斷職業者

準備職業者

疾病殘廢恃人贍養者

非法職業如娼妓賭徒等

監犯

其他

設一人有兩種以上職業,則將何所屬乎,曰,應屬於其主業,至他業則認爲其副業。惟主業與副業如何劃分,則須依下列三種標準:

1. 以酬報多寡爲準。 A業酬報多於B業, 則以A業爲主業,B業爲副業。例如一工人製造機器,兼造金屬附件, 其由製造機器所得之酬報較製造金屬附件者爲多,故製造機器爲主業,製造金屬附件爲副業。
2. 以工作久暫爲準。 兩種以上之職業, 如不能判其酬報之多寡,則以其中從事最久者爲主業,他業爲副業。例如一農人種稻,兼事植棉,兩者之報酬相埒,而其終歲致力於種稻時爲多,遂以種稻爲主業,植棉爲副業。
3. 以現任業務爲準。 一人有兩種以上職業,不能分其酬報之多寡及工作之久暫,若其因季節而有變換,則以調查時現任之職業爲主業,餘爲副業。例如一農婦夏秋時傭作田間,冬春時爲某家庭之女僕。當調查時適爲女僕, 則其主業乃爲家事使用也。

三. 人口統計應用之公式

人口調查旣不宜每年舉行，大多數國家乃取五年或十年調查一次之辦法，似此則每間五年或十年始可一知人口之數，而於其間未調查之年之人口數，則茫然不知，此於一國之政府，施行政治，頗有窒碍，故應得一方法以推算之。推算之法須先求得五年或十年內平均每年人口增加率或減少率，然後依此率推算各年人口數。至求增加率或減少率之公式如下：——

A。求增加率之公式爲 $(1+r)^n=\frac{P_n}{P_o}$

B。求減少率之公式爲 $(1-r')^n=\frac{P_n}{P_o}$

r爲增加率

r'爲減少率

n爲年數

P_n 爲本期調查年之人口數

P_o 爲前期調查年之人口數

茲將A公式加以解釋，B公式可推想而知其所以矣。

因 P_o 爲前期調查年之人口數

故 $P_o(1+r)$爲本期第一年之人口數

$P_o(1+r)(1+r)$或$P_o(1+r)^2$爲本期第二年之人口數

$P_o(1+r)^n$ 爲本期第n年之人口數

又因 第n年之人口數爲 P_n

故 $P_o(1+r)^n=P_n$

$$(1+r)^n=\frac{P_n}{P_o}$$

爲便於計算起見，可將 $(1+r)^n=\frac{P_n}{P_o}$ 變爲

$$\log(1+r)=\frac{\log P_n-\log P_e}{n}\text{。}$$

舉例：設某村人口總數在 1921 年爲 4717，在 1931 年爲 4932，求其十年來人口增加之比率。

因 $P_0 = 4717$

$P_n = 4932$

則 $\log(1+r) = \dfrac{\log P_n - \log P_0}{n} = \dfrac{\log 4932 - \log 4717}{10}$

$= \dfrac{3.69302 - 3.67367}{10} = \dfrac{.01935}{10}$

$= .001935 = \log 1.0045$

$1+r = 1.0045$

$r = .0045$

如欲知1924年之人口總數，卽依下列算式求之：

$P_0(1+r)^4$ 爲 P_4 卽 1924 年之人口總數

則 $\log P_4 = \log P_0 + 4 \times \log(1+r)$

$= \log 4717 + 4 \times \log 1.0045$

$= 3.67367 + 4 \times .0019499$

$= 3.67367 + .0077996$

$= 3.6814696 = \log 4803$

$P_4 = 4803$

假設吾人已知人口每年增加率，更欲知若干年可增加一倍，則須用下列公式：——

$n \log(1+r) = \log 2$

因 $n \log(1+r) = \log 2$

故 $n = \dfrac{\log 2}{\log(1+r)}$

仍用前例之人口數代入公式。

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.0045} = \frac{.30103}{.001935} = 150$$

某村人數約須150年始可增加一倍。

若吾人須知在一長時間人口增加之趨勢，可用求恆差之法算出之，下舉之例卽用其中之最小平方法以算出人口增加之趨勢者也。

表 76　某地人口總數長時期之趨勢

年份	各年人口總數 Y	時間離中差 X	XY	X^2	y
1912	456864	—9	—4111776	81	455732
1913	457864	—8	—3662912	64	457799
19 4	461177	—7	—3228239	49	459865
1915	462667	—6	—2776002	36	461931
1916	463922	—5	—2319610	25	463998
1917	465829	—4	—1863316	16	466064
1918	467571	—3	—1402713	9	468130
1919	469576	—2	— 939152	4	470196
1920	471659	—1	— 471659	1	472263
1921	474044	0	0	0	474329
1922	477849	1	477849	1	476395
1923	474228	2	948456	4	478462
1924	479502	3	1438506	9	480528
1925	480845	4	1923380	16	482594
1926	484344	5	2421720	25	484661
1927	486905	6	2921430	36	486727
1928	490686	7	3434802	49	488793
1929	493489	8	3947912	64	480859
1930	493234	9	4439106	81	492926
	19)9012255		1177782	570	
	474329				

因　最小平方法所用公式爲 y＝b＋SX

y 代表最小平方線所經過各點之位置之量數

b在此處爲平均每年人口總數蓋 $b = \frac{\Sigma Y}{N}$

S爲最小平方之斜度其公式如下：——

$$S=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

X 爲時間離中差

Y 爲各時期某事實之量數

則 以表76之材料代入公式如下：——

$$b=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{9012255}{19}=474329$$

$$S=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}=\frac{1177782}{570}=2066.3$$

$$y_{1912}=b+SX=474329+2066.3\times(-9)$$
$$=474329-18596.7=455732$$

$$y_{1913}=b+SX=474329+2066.3\times(-8)$$
$$=474329-16530.4=457799$$

由1914年至1930年各年之y俱如上法求出，乃將其任何兩年之y所居位置以兩點代表之，連綴此兩點以一線，卽所謂最小平方線，此線可以表示長時期之趨勢矣。

若吾人欲知人口數與地域面積之關係，則須求人口密度，其公式如下：——

$$D=\frac{P}{A}$$

D 爲人口密度

P 爲人口總數

A 爲地域之面積

例如中國土地面積爲4781915方哩，在民國十八年有485163386人。則人口密度爲$\frac{485163386}{4781915}=101$卽每平方哩平均人口數爲101也。

若吾人欲知人數按性別，年齡，宗教，職業，教育程度，地方，已婚，未婚，鰥，寡等分配之狀況，則須用百分比法，例如表77所示者。

表77 某處工人年齡分配之比較

年齡組	工人數	百分比
1—5	482	12
6—10	445	11
11—15	336	8
16—20	366	9
21—25	338	8
26—30	444	11
31—35	309	7
36—40	330	8
41—45	281	7
46—50	218	5
51—55	200	5
56—60	176	4
61—65	117	3
66—70	101	2
71—75	19	0
總數	4162	100

因人口百分比之公式爲 $\frac{\text{一部分人數}}{\text{全體人數}}\times 100$，故表77所列工人數百分比卽用此公式求出，例如 $12=\frac{482}{4162}\times 100, 11=\frac{445}{4162}\times 100$ 等。但有須注意者，卽按教育程度分配人數所應用之百分比公式，雖仍爲 $\frac{\text{一部分人數}}{\text{全體人數}}\times 100$，然有國家(如美國等)主張全體人數內應減去十歲以下之兒童，因十歲以下之兒童受教育時間極短，不應與成年人混合比較；有主張全體人數內應減去未屆普通教育年齡之人數，所謂普通教育年齡，以狹義言之，大都在七歲至十四歲，廣義言之，則自三歲至二十歲，因其中由三歲至六歲爲幼稚齡，七歲至十四歲爲小學齡，十五歲至二十歲爲中學齡，總之未屆教育年齡者至少須爲三歲以下之小兒，卽至少此種小兒不能混於全體人數內以求教育程度之人數分配百分比。兩說各有相當理由，應用者可視地方情形以採擇之。

除推算未調查年之人口，人口增進之比率與趨勢及人口密度與百分比所用公式外，尙有一種公式求各自然地帶容納人口之能力；卽奧房鈕君 (Aurouseau) 所稱爲人口擴張比率 (expansion ratio)。其計算方法係以可容之人口數除已有之人口數，求得一百分數。惟可容人口數何從得知，或以爲當依一定生活程度爲準；或以爲須對於小地帶估計可容之人口數，然後再合各地估計結果而

融貫之;以估計一複雜大地帶或一國家之可容人口數;或(如法、比特 Edward Constant Biot 美國哈佛大學教授奇士特 E.M. East等)以為應依據可耕土地之面積,例如中國估計有可耕土地736000000畝,若平均一人有3.3畝可耕之地,卽能維持生活,是則中國可以維持223000000人之生活,此 22300000 人卽為中國可容之人數;或(如澳洲氣象學者泰樂爾Griffith Taylor)以為決定一地人口容納能力之要素有四:卽雨量,溫度,煤藏及高度是也。四種意見各具理由,吾人可視各地之情形酌量採用焉。

第四節

人生動態統計

人生動態統計者,乃研究人生新陳代謝變移行止之狀態之統計,如出生,死亡,婚姻,繼承,收養,分居,同居,遷徙等統計是也。當辦理此等統計之先,自須搜集材料,關于此種統計之材料之搜集,各國大都採用登記方法,例如出生登記,死亡登記,婚姻登記等等。惟登記雖有多種,大都含有强制性質,蓋有多數國家曾規定法律,如英國公布之出生婚姻及死亡登記法律,瑞典公布之該國各區教士須編製本區住民移出移入之報告及辦理生死登記之法令,美國頒佈生死及婚姻登記之法律强制人民厲行登記是。在登記法中規定有最要之項目三種:卽登記申請人,登記期限及登記事項。此三種項目之規定,各國各種登記法互不相同。卽以出生及死亡登記述之(閱表78及79),當可知各國登記法不同情形之一斑矣。

若嬰兒為死產時,則登記方法更不一致。如美國模範登記法中規定凡死產,應同時作出生及死亡之登記,呈報時,在申請書姓名一格內填寫死產"stillbirth"字樣,以代替名字,但距受孕時期在五個月以內者,可以無須登記。英國定每一死產皆須登記。比利時,和

表78 出生登記

申請人	生產情形	登記期限	規定期限之各國
嬰兒之父母	合法生產時	五日	中國 義大利
嬰兒之母	養私生子	三日	法 比 和蘭 瑞士 西班牙 羅馬尼亞
看護生產之人	嬰兒之父母死亡或不在時	七日	德意志 匈加利 布加利亞
		一月	那威 葡萄牙
助產醫生及接生婦	一定時期或養兒之父母死亡時	六週	英國 蘇格蘭在外，瑞典
戶主	當該戶任何人生產時	八日	奧國
房主	當該房屋有人生產時	城市二日 鄉村八日	丹麥
		三週	蘇格蘭
病院監獄或其他公共處所之主管人	在病院監獄或公共處所出生產兒父母不能申請時	十日	美國多數省分所規定
		十四日	日本
教士（如瑞典那威芬蘭丹麥等國人口生產登記皆付託之）	不論生產情形如何	一年	坎拿大
		無定期	捷克斯拉夫

蘭，西班牙，奧大利亞，葡萄牙等國亦强制登記死產，惟登記方法互有參差耳。各國不僅方法不同，卽涵意亦不同，譬如在匈牙利，凡嬰兒在出生以前或正在出生之時喪失其性命者謂之死產，如在出生之時，有絲微氣息，當視爲出生；在比利時，凡嬰兒之落蓐卽死者及死於申請登記以前者（卽三日前）皆視爲死產；在奧國，凡落蓐卽死之嬰兒，如經醫生驗明確有獨立生存之可能者，當視爲死產；在捷克斯拉夫，凡脫離母體之嬰兒如無呼吸與脈搏當視作死產；在瑞士，凡嬰兒在妊娠六個月後，無論是否按時降生，抑是先期降生，若在落蓐以後卽無呼吸，當視爲死產；在西班牙，凡出生之嬰兒如無絲微氣

息，應視作死產，即嬰兒出生雖於二十四小時後始死亡者，亦作為死產論；在意大利，凡嬰兒在妊娠中死亡或生產時死亡，皆作為死產；

表79 死亡登記

申請人	死亡時情形	登記期限	規定期限之各國
死者之親屬	死者死時親屬在旁	三日至五日	中國市區限死後三日內登記，其他地方限五日內登記
死者之房東	死於其屋親屬不在旁		
死者之地主	死於其地親屬不在旁	不得遲延	美利堅 保加利亞 挪威 葡萄牙 坎拿大等國
醫院院長	死於醫院親屬不在旁		
死者近鄰村里長	死者死時其親屬房東及地主均不在旁	二十四小時	德意志 意大利 羅馬尼亞 西班牙 比利時等國
經理喪葬人（如美國之專以辦理喪葬事務為業者）	死者死時其親屬房東及地主均不在旁或不論死亡時情形如何由經理喪葬人申請登記	一日至二日	匈加利
棺木商人 棺木商人須預備一種册簿記明購棺人姓名及通信地址與死者姓名死亡日期及死亡地點	不論死亡時之情形如何	二日	捷克 瑞士
管墓地人 如美國法律規定死者登記後即發給一種執照，管墓地人見此執照始能將死者在墓地安葬，並須將埋葬情形登記於一種册籍，以便政府隨時派人檢查	不論死亡時之情形如何	五日	英國各地（除蘇格蘭定八日外）和蘭
		七日	日本
教士 如瑞典丹麥挪威芬蘭等國人口死亡登記皆由教士施行之	不論死亡時之情形如何	無定期	法蘭西 瑞典 丹麥 捷克斯拉夫 奧地利等國

在法國，凡嬰兒之出生，未及登記卽夭折者，視爲死產；在荷蘭，凡先期或按時降生落蓐卽死之嬰兒與未及登記卽夭折之嬰兒皆視爲死產；在德國凡妊娠滿一百二十日以後落蓐卽無呼吸之嬰兒視作死產；在美國凡妊娠滿五個月落蓐無呼吸者當作爲死產論。

至登記事項，在出生方面，爲嬰兒姓名（如尚未命名將來補報），性別，出生年月日時，出生地點，父母之年齡，國籍，種族，出生地，結婚時期，職業住所及產母已生產數（連出生者在內），活產現存者，活產已死者，死產數等，死亡登記之事項爲死者之姓名，年齡，性別，國籍，種族，出生地，出生年月日時，職業，死亡年月日時，享壽年齡，死亡主因與副因，死亡地址，在死亡地址已住若干時，埋葬日期，死時爲獨身，已婚離婚，或鰥寡，如已婚或離婚或鰥寡，其夫或妻爲何姓名，死者父母之姓名，出生地，及死亡證明（死亡之原因及情形大都須由最後爲死者診治之醫生或由衞生官吏或由地方官指派現行執業之醫生證明。）

統計材料既經用登記法搜齊，吾人乃可從事於分析，其關于出生者，須按年份，時令，地方及嬰兒之父母之年齡，種族，職業等分析比較；其關於死亡者，須按年份，時令，性別，地方，種族，職業，敎育程度，婚姻狀況，死因，年齡等分析比較；其關于婚姻者，須按年份，時令，地方，種族，職業，敎育程度，年齡，宗敎信仰等分析比較；其關于繼承收養分居同居者，須按年份，性別，地方，種族，職業等分析比較；至遷徙統計之材料，除按年份，原因，時令，地方，種族等分析外，並須按寓況分析比較，所謂寓況者卽在居留地爲獨客抑攜帶家屬，在居留地有無不動產等狀況也。

材料分析後，乃須計算，計算有三種：一爲實數計算，二爲比率計算，三爲平均計算。所謂實數者卽實在之數，如出生人口實數，死亡人口實數，婚姻宗數，繼承人數，收養人數，分居人數，同居人數，國內各地遷徙人口數，國際遷徙人口數等是也。比率者大都以

每千人或百人為基本數計算者也，例如人口出生率，死亡率，死亡百分比率(又名生殖指數 Vital Index)，結婚率等皆是。平均者即算實在數而平均之之意，如平均年齡是也。三種計算之中以實在數之計算較易，可不必置論。其他二者較為複雜，且須用數種公式，故述之如下：

一，出生率　出生率者於一時期內在若干人口中有若干人口出生之比率也。通常時期以一年計，比例以千分計，其計算公式有二種：

1. $$出生率=\frac{出生人口數}{人口總數}\times1000$$

舉例：　某國某年人口總數為450兆，該年出生人口數為50兆。

$$出生率=\frac{50兆}{450兆}\times1000=111.11$$

某國某年每千人內出生111人。

2. $$出生率=\frac{出生人口數}{生育年齡女子數}\times1000$$

舉例：　某國某年有生育年齡(通常以女子十五歲以上四十五歲以下為生育年齡。)女子 100 兆，而於本年共出生人口50兆。

$$出生率=\frac{50兆}{100兆}\times1000=500$$

某國某年每達生育年齡之女子一千人出生500人。

公式2較公式1為精當，蓋一社會中男子之未娶婦者，已娶婦者及娶婦而無生育能力者各佔男子總數中之一部分。女子之正在生育年齡者，未達生育年齡者及已過生育年齡者又各佔女子總數中之一部分，男女人數之分配情形極不相同，有如此

者；至若特種社會則更爲不規則之分配，例如礦業區及工業區往往男多於女，農業區則男女之數約相等，以此各種社會總人數爲分母計算其出生率而比較之，誠爲不當。求出生率固宜以生育年齡女子數爲分母也。

二，死亡率　某年某地農人死亡三千人，商人死者一千人，視其比例爲3:1，將謂農人之健康遠遜於商人乎。曰，未可。蓋不問全羣之大小，但據其死亡人數之多寡以判其健康程度，誤矣。故必齊其分量，以其總人數求死亡者之千分比卽死亡率而後比較之，斯爲得當。求死亡率之公式如下：——

$$死亡率=\frac{死亡人口數}{人口總數}\times 1000$$

舉例：　1930年某國農人數爲200兆，死亡者1兆。

$$死亡率=\frac{1兆}{200兆}\times 1000=5$$

在1930年某國每千農人死亡5人。

又某年某國有未滿一歲之嬰兒500000，死亡者20000。

$$死亡率=\frac{20000}{500000}\times 1000=40$$

某年某國每千未滿一歲之嬰兒中有死亡者40。

三，生殖指數　此種指數係用以測驗人口之增減程度，其數逾一百，卽爲人口增長之徵象，反之，卽爲人口減少之徵象。其公式如下：——

$$V=\frac{B}{D}\times 100$$

V 爲生殖指數

B 爲出生率(須以求死亡率之總人數爲分母求之)

D 爲死亡率(須以求出生率總人數爲分母求之)

舉例： 某國在1924年人口出生率爲$\frac{42.2}{1000}$，死亡率爲$\frac{27.9}{1000}$。

$$V=\frac{\frac{42.2}{1000}}{\frac{27.9}{1000}}\times 100=\frac{42.2}{27.9}\times 100=151.25$$

某國1924年生殖指數爲151.1，超過100甚遠，可知該國1924年人口增長之程度甚高也。

四．結婚率 此處所謂結婚，乃曾無配偶之人之結婚也。結婚率之計算公式如下：——

1． $$結婚率=\frac{結婚宗數}{人口總數}\times 1000$$

舉例： 某年某城之結婚宗數爲5000，人口總數爲250000。

$$結婚率=\frac{5000}{250000}\times 1000=20$$

某年某城每千人內有結婚者20宗。

2． $$結婚率=\frac{結婚人數}{人口總數}\times 1000$$

舉例： 某年某城有人口300000，其中男女結婚者6000人。

$$結婚率=\frac{6000}{300000}\times 1000=20$$

某年某城每千人中有20人結婚。

3. $$結婚率=\frac{某年齡之結婚男子或女子人數}{某年齡之男子數或女子數}\times 1000$$

在分母分子地位所書三字「某年齡」須爲同一年齡。

舉例: 某城有三十歲之男子50000人，三十歲之結婚男子1000人。

$$結婚率=\frac{1000}{50000}\times 1000=20$$

某城每三十歲男子千人中有結婚者20人。

4. $$結婚率=\frac{結婚人數}{已達結婚年齡曾無配偶之人口總數}\times 1000$$

舉例: 某城某年結婚人數爲4000，已達結婚年齡曾無配偶之人口總數爲250000。

$$結婚率=\frac{4000}{250000}\times 1000=16$$

某城某年每已達結婚年齡曾無配偶者千人中有結婚者16人。

惟至若干歲始可謂爲已達結婚年齡，是則各國規定不同，例如法國規定男十八歲，女十五歲，羅馬尼亞男十八歲，女十六歲，日本，男滿十七歲，女滿十五歲等。故吾人計算一國人民之結婚率，卽依據該國已達其規定之結婚年齡之人數可也。

四種公式中之前兩者稍有未妥之處，蓋一宗婚姻男女兩人未必同屬一社會。例如甲國某女子嫁與乙國某男子爲妻，若以此種夫妻併入結婚宗數計算甲乙任何一國之結婚率，豈非錯誤。至本年人口總數實包含曾未結婚之人口數及已婚之人

口數在內，用爲求結婚率之分母，亦屬不當。是故求結婚率，以應用後兩種公式爲是也。

五。平均年齡 平均年齡者即以某一時期某羣人數除同一時期該羣全體之年齡所得之平均數也（有時用乘數法求平均年齡亦可）。例如死亡男子或女子平均年齡，即以一時期之死亡男子或女子人數除死亡男子或女子之總年齡所得之平均數。結婚男子或女子平均年齡，即以一時期結婚男子或女子人數除結婚男子或女子之總年齡所得之平均數等等。計算平均年齡所應用之公式如下：——

$$A=\frac{Y_1P_1+Y_2P_2+Y_3P_3+\cdots\cdots+Y_nP_n}{P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n}$$

A 爲平均年齡

$Y_1Y_2Y_3\cdots\cdots\cdots Y_n$ 爲各級年齡

$P_1P_2P_3\cdots\cdots\cdots P_n$ 爲各級年齡之人數

以死亡者平均年齡之計算較其他爲複雜，姑解釋之，苟明此者，則觸類旁及，計算其他人事之平均年齡極易。關于死亡者年齡之計算，大都凡一歲又未滿六個月者作一歲計，一歲又六個月以上者作二歲計。各級年齡皆以四捨五入法歸納。平均年齡之大小算至月爲止，月以下亦以四捨五入法歸納。未滿週歲之嬰兒之死亡率特高，最好除外計算，以免牽動全體之平均數，若併加入，可作一歲計。今若計算死亡男子或女子平均年齡，自須用A之公式。

$$A=\frac{Y_1P_1+Y_2P_2+Y_3P_3+\cdots\cdots Y_nP_n}{P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n}$$

惟此處之A爲死亡之男子或女子之平均年齡。

$Y_1Y_2Y_3\cdots\cdots\cdots Y_n$ 爲各級年齡

$P_1P_2P_3\cdots\cdots\cdots P_n$ 爲各級年齡之死亡男子或

女子人數

如求結婚男子或女子平均年齡亦可用A之公式。惟以A代表結婚男子或女子之平均年齡，而$P_1P_2P_3\cdots P_n$代表各級年齡之結婚男子或女子之人數。

姑舉一例以演算A之公式；譬如某村某月有年二十歲之女子三人，三十歲之女子二人，三十一歲之女子五人逝世。求某村死亡女子之平均年齡如下：——

$$A=\frac{20\times3+30\times2+31\times5}{3+2+5}=\frac{275}{10}=27.5$$

第五節

人生病態統計

人生病態統計者乃研究反人生自然與美滿之狀態之統計也。此等狀態之統計最著者可分爲五種：卽自殺，離婚，失踪，犯罪及廢疾統計。其材料之搜集，或用調查法，或用登記法。材料之分析則視所編統計而定，例如自殺統計材料須按自殺原因（如羞悔，失望，家庭苦惱等。）日期，時刻，季節，氣候，人種，地質，敎育程度，宗敎，體力，性別，婚姻，年齡，家庭，經濟，職業，心理，自殺地點，自殺結果等分析比較；離婚統計材料須按經濟狀況，離婚原因，生理狀況等分析比較；失蹤統計材料須按年份，失蹤原因，失踪者之原籍地或居留地，種族，體性，生理狀態，職業，敎育程度，家屬狀況（父母存否，子女有無等。），婚姻狀況，失踪地點，最後通信地方等分析比較；犯罪統計材料須按年份，原因，犯罪地點，種族，體性，生理狀態，敎育程度等分析比較；廢疾統計材料須按原因，職業，種族，地方等分析比較。材料既經分析，卽須從事計算，計算亦如動態統計，有三種：卽實數計算，比率計算及平均計算是也。如自殺次數，

自殺者人數，離婚宗數，失踪人數，犯罪次數，犯罪人數，有廢疾者人數等之計算，即實數計算。如自殺率，離婚率，失踪率，犯罪率及廢疾率之計算，即比率計算。如自殺之男子或女子平均年齡，離婚之男子或女子平均年齡，犯罪之男子或女子平均年齡等計算，即平均計算。實數計算及平均計算可不贅論，因前者計算頗易，後者曾於第一節言之。今仍可用 A 之公式，惟 A 所代表者為自殺，離婚，犯罪等之男子或女子之平均年齡，$P_1P_2P_3 \cdots\cdots Pn$ 為各級年齡之自殺，離婚，犯罪等之男子或女子人數耳。至自殺，離婚，失踪，犯罪及廢疾比率計算，各有其公式，與出生死亡結婚等比率計算之公式頗有不同之處，故列舉之於下：——

一。自殺率

$$自殺率=\frac{自殺數}{人口總數}\times 1000000$$

例： 1930年某城人口總數為一千萬，同年自殺數為六百。

$$自殺率=\frac{600}{10000000}\times 1000000=60$$

在1930年某城每百萬人口中有自殺者六十人。

又1930年某國有工人一百萬，其自殺數為二百。

$$自殺率=\frac{200}{1000000}\times 1000000=200$$

在1930年某國每百萬工人中有自殺者二百人。

二。離婚率 計算離婚率有公式二：

1. $$離婚率=\frac{離婚宗數}{結婚宗數}\times 1000$$

例： 1930年某國結婚宗數已達五萬，離婚宗數為一百。

$$離婚率=\frac{100}{50000}\times 1000=2$$

在1930年，某國每千宗結婚數與兩宗離婚數相比

2　$\text{離婚率}=\dfrac{\text{離婚人數}}{\text{結婚人數}}\times 1000$

例.　1930年某國學生結婚人數爲四千，其離婚人數爲八十。

$$\text{離婚率}=\frac{80}{4000}\times 1000=20$$

在1930年某國結婚學生每千人與離婚學生二十人相比。

第一公式乃用以求全體社會之離婚率。至於第二公式乃用以求某特種人羣之離婚率，蓋在一特種人羣間，每宗結婚之二人非能盡屬於此一種人羣，若用第一公式求其離婚率，必致錯誤也。

三。失踪率

$$\text{失踪率}=\frac{\text{失踪人數}}{\text{人口總數}}\times 1000000$$

例:　1929年某城人口總數爲一千萬，同年失蹤數爲五十。

$$\text{失蹤率}=\frac{50}{10000000}\times 1000000=5$$

在1929年某城每百萬人口中有失踪者五人。

又1930年某國有工人一百萬，失踪者三人。

$$\text{失踪率}=\frac{3}{1000000}\times 1000000=3$$

在1930年，某國每百萬工人中有失踪者三人。

四。犯罪率

$$犯罪率=\frac{犯罪人數}{人口總數}\times 100000$$

例： 1929年某國人口總數爲五千萬，同年犯罪者四千人。

$$犯罪率=\frac{4000}{50000000}\times 100000=8$$

在1929年某國每十萬人中有犯罪者八人。

又1930年某國有工人五十萬，曾犯殺人罪之工人二百人。

$$犯罪率=\frac{200}{500000}\times 100000=40$$

在 1930 年某國每十萬工人中有犯殺人罪者四十人。

五，廢疾率

$$廢疾率=\frac{廢疾者人數}{人口總數}\times 100000$$

例： 1926年某國人口總數爲五千萬，廢疾者人數爲二萬五千。

$$廢疾率=\frac{25000}{50000000}\times 100000=50$$

在1926年某國每十萬人口中有廢疾者五十人。

又1930年某國工人數爲五十萬，聾盲人數爲五百。

$$聾盲率=\frac{500}{500000}\times 100000=100$$

某國在1930年每十萬工人中有聾盲者一百人。

附　　錄

計算上應用之各種表

表I.　　　由 ρ 之值求 r 表

ρ 係由公式 $\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$ 求出，r 乃由公式 $r = 2\sin(\frac{\pi}{6}\rho)$ 求出，此表所列 ρ 之值係從 .01 起至 1.00止，而與r之各相當價值並列。

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8039
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	.0838	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3955	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9173
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9269
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7363	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9909
.25	.2611	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

表II.　　由R之值求r表

R係由公式$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}$求出，r係由公式

$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$求出，此表所列R之值，

係從.01起至1.00止，而與r之各相當價值並列。

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.04	.071	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.05	.08[illegible]	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.06	.107	.32	.514	.57	.801	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.08	.141	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.09	.158	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.10	.176	.36	.567	.61	.836	.86	.979
.11	.192	.37	.580	.62	.844	.87	.981
.12	.209	.38	.593	.63	.852	.88	.984
.13	.226	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	.630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.18	.307	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.19	.323	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.20	.338	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.21	.354	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.22	.369	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.23	.384	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.24	.399	.50	.732	.75	.932	1.00	1.0000
.25	.414						

表III. 由U之百分比例數求r表

U爲異號各對差數總數之百分比例數。此表所列U之值，係從.00起至.50止而與r之正數各相當價值並列。若U過.50至1.00時，則r爲負數，可由相反之關係求r之值

U	r	U	r	U	r	U	r
.00	1.0000	.13	.9174	.26	.6848	.39	.3387
.01	.9996	.14	.9044	.27	.6615	.40	.3089
.02	.9982	.15	.8905	.28	.6375	.41	.2788
.03	.9958	.16	.8757	.29	.6129	.42	.2485
.04	.9924	.17	.8602	.30	.5877	.43	.2180
.05	.9880	.18	.8439	.31	.5620	.44	.1873
.06	.9826	.19	.8268	.32	.5358	.45	.1564
.07	.9762	.20	.8089	.33	.5091	.46	.1253
.08	.9688	.21	.7902	.34	.4819	.47	.0941
.09	.9604	.22	.7707	.35	.4542	.48	.0628
.10	.9511	.23	.7504	.36	.4260	.49	.0314
.11	.9409	.24	.7293	.37	.3973	.50	.0000
.12	.9295	.25	.7074	.38	.3682		

表IV. 常態曲線下各 $\frac{x}{\sigma}$ 之縱橫高度表

假定由平均數所在之點引出之縱線高度爲100,000,
x 爲離平均數之差數,σ 爲標準差。

x/σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94055	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91399	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88250	81805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80429	79896	79359	78817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	56097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54607	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48675	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34445	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	30550	30082	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10129	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	02343	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	01674	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

表V.　常態曲線下各 $\frac{x}{\sigma}$ 之部份面積之值表

假定全面積爲10,000，x 爲離平均數之差數，σ 爲標準差。

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3290	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4383	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	3732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4939	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4986.9	4987.4	4987.8	4988.2	4988.6	4988.9	4989.3	4989.7	4990.0
3.1	4990.3	4990.6	4991.0	4991.3	4991.6	4991.8	49.·2.1	4992.4	4992.6	4992.9
3.2	4993.129									
3.3	4995.166									
3.4	4996.631									
3.5	4997.674									
3.6	4998.409									
3.7	4998.922									
3.8	4999.277									
3.9	4999.519									
4.0	4999.683									
4.5	4999.966									
5.0	4999.997133									

表VI.　根據常態曲線下底線5σ上之面積測定問題難易表

一常態曲線圖之底線距離定爲±2 5σ，以2.5σ所在之點爲0，平均數所在之點爲50，+2.5σ所在之點爲100。認定研究問題之能力分配與常態曲線一致，以研究者解決問題之多寡分配與曲線面積相對照，表中數字之種類如下：

(1)　甲欄指研究人數中之錯答問題者之百分數。

(2)　乙欄指標準差分數部分之距離。

(3)　丙欄指該題百分比之地位。

例：若干學生同作一題，百分之78作錯，該題應佔之次序卽爲65；作錯者若爲百分之94，該題應佔之次序卽爲80，其餘類推。

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
.02	.01		.73	.29		2.12	.58		4.43	.86	
.04	.02		.77	.30	6	2.19	.59		4.53	.87	
.06	.03		.81	.31		2.25	.60	12	4.64	.88	
.07	.04		.84	.32		2.32	.61		4.75	.89	
.09	.05	1	.88	.33		2.39	.62		4.86	.90	18
.11	.06		.92	.34		2.45	.63		4.97	.91	
.13	.07		.96	.35	7	2.52	.64		5.08	.92	
.16	.08		1.00	.36		2.60	.65	13	5.20	.93	
.18	.09		1.04	.37		2.67	.66		5.32	.94	
.20	.10	2	1.08	.38		2.74	.67		5.44	.95	19
.22	.11		1.12	.39		2.82	.68		5.55	.96	
.25	.12		1.17	.40	8	2.89	.69		5.68	.97	
.27	.13		1.21	.41		2.97	.70	14	5.81	.98	
.29	.14		1.26	.42		3.05	.71		5.93	.99	
.32	.15	3	1.30	.43		3.13	.72		6.06	1.00	20
.34	.16		1.35	.44		3.22	.73		6.19	1.01	
.37	.17		1.40	.45	9	3.30	.74		6.32	1.02	
.40	.18		1.45	.46		3.39	.75	15	6.46	1.03	
.42	.19		1.50	.47		3.47	.76		6.59	1.04	
.45	.20	4	1.55	.48		3.57	.77		6.73	1.05	21
.48	.21		1.60	.49		3.65	.78		6.87	1.06	
.51	.22		1.65	.50	10	3.74	.79		7.02	1.07	
.54	.23		1.71	.51		3.84	.80	16	7.16	1.08	
.57	.24		1.76	.62		3.93	.81		7.31	1.09	
.60	.25	5	1.80	.53		4.03	.82		7.46	1.10	22
.63	.26		1.88	.54		4.13	.83		7.61	1.11	
.67	.27		1.94	.55	11	4.23	.84		7.76	1.12	
.70	.28		2.00	.56		4.33	.85	17	7.91	1.13	
			2.06	.57							

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
8.07	1.14		17.00	1.57		30.23	2.00	40
8.23	1.15	23	17.26	1.58		30.59	2.01	
8.39	1.16		17.52	1.59		30.94	2.02	
8.55	1.17		17.79	1.60	32	31.30	2.03	
8.72	1.18		18.05	1.61		31.66	2.04	
8.89	1.19		18.32	1.62		32.02	2.05	41
9.06	1.20	24	18.60	1.63		32.38	2.06	
9.23	1.21		18.87	1.64		32.74	2.07	
9.46	1.22		19.15	1.65	33	33.10	2.08	
9.58	1.23		19.43	1.66		33.47	2.09	
9.76	1.24		19.71	1.67		33.84	2.10	42
9.94	1.25	25	19.99	1.68		34.21	2.11	
10.13	1.26		20.28	1.69		34.58	2.12	
10.31	1.27		20.57	1.70	34	34.95	2.13	
10.50	1.28		20.86	1.71		35.32	2.14	
10.69	1.29		21.15	1.72		35.70	2.15	43
10.89	1.30	26	21.44	1.73		36.07	2.16	
11.08	1.31		21.74	1.74		36.45	2.17	
11.28	1.32		22.04	1.75	35	36.83	2.18	
11.48	1.33		22.34	1.76		37.21	2.19	
11.68	1.34		22.65	1.77		37.59	2.20	44
11.89	1.35	27	22.96	1.78		37.97	2.21	
12.09	1.36		23.26	1.79		38.35	2.22	
12.30	1.37		23.58	1.80	36	38.74	2.23	
12.52	1.38		23.89	1.81		39.12	2.24	
12.73	1.39		24.20	1.82		39.51	2.25	45
12.95	1.40	28	24.52	1.83		39.97	2.26	
13.17	1.41		24.84	1.84		40.28	2.27	
13.39	1.42		25.16	1.85	37	40.67	2.28	
13.61	1.43		25.49	1.86		41.06	2.29	
13.84	1.44		25.81	1.87		41.45	2.30	46
14.07	1.45	29	26.14	1.88		41.85	2.31	
14.30	1.46		26.47	1.89		42.24	2.32	
14.53	1.47		26.81	1.90	38	42.63	2.33	
14.77	1.48		27.14	1.91		43.02	2.34	
15.00	1.49		27.48	1.92		43.42	2.35	47
15.25	1.50	30	27.81	1.93		43.81	2.36	
15.49	1.51		28.15	1.94		44.21	2.37	
15.73	1.52		28.50	1.95	39	44.60	2.38	
15.98	1.53		28.84	1.96		45.00	2.39	
16.23	1.54		29.19	1.97		45.40	2.40	48
16.49	1.55	31	29.53	1.98		45.70	2.41	
16.74	1.56		29.88	1.99		46.19	2.42	

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
46.59	2.43		64.68	2.86		79.14	3.29	
46.99	2.44		65.05	2.87		79.43	3.30	66
47.39	2.45	49	65.42	2.88		79.72	3.31	
47.79	2.46		65.79	2.89		80.01	3.32	
48.18	2.47		66.16	2.90	58	80.29	3.33	
48.58	2.48		66.53	2.91		80.57	3.34	
48.98	2.49		66.90	2.92		80.85	3.35	67
50.00	2.50	50	67.26	2.93		81.13	3.36	
51.02	2.51		67.62	2.94		81.40	3.37	
51.42	2.52		67.88	2.95	59	81.68	3.38	
51.82	2.53		68.34	2.96		81.95	3.39	
52.21	2.54		68.70	2.97		82.21	3.40	68
52.61	2.55	51	69.06	2.98		82.48	3.41	
53.01	2.56		69.41	2.99		82.74	3.42	
53.41	2.57		69.77	3.00	60	83.00	3.43	
53.81	2.58		70.12	3.01		83.26	3.44	
54.21	2.59		70.47	3.02		83.51	3.45	69
54.60	2.60	52	70.81	3.03		83.77	3.46	
55.00	2.61		71.16	3.04		84.02	3.47	
55.40	2.62		71.50	3.05	61	84.27	3.48	
55.79	2.63		71.85	3.06		84.51	3.49	
56.19	2.64		72.19	3.07		84.75	3.50	70
56.58	2.65	53	72.52	3.08		85.00	3.51	
56.98	2.66		72.86	3.09		85.23	3.52	
57.37	2.67		73.19	3.10	62	85.47	3.53	
57.76	2.68		73.53	3.11		85.70	3.54	
58.15	2.69		73.86	3.12		85.93	3.55	71
58.55	2.70	54	74.19	3.13		86.16	3.56	
58.94	2.71		74.51	3.14		86.39	3.57	
59.33	2.72		74.84	3.15	63	86.61	3.58	
59.72	2.73		75.16	3.16		86.83	3.59	
60.10	2.74		75.48	3.17		87.05	3.60	72
60.49	2.75	55	75.80	3.18		87.27	3.61	
60.88	2.76		76.11	3.19		87.48	3.62	
61.26	2.77		76.42	3.20	64	87.70	3.63	
61.65	2.78		76.74	3.21		87.91	3.64	
62.03	2.79		77.04	3.22		88.11	3.65	73
62.41	2.80	56	77.35	3.23		88.32	3.66	
62.79	2.81		77.66	3.24		88.52	3.67	
63.07	2.82		77.96	3.25	65	88.72	3.68	
63.55	2.83		78.26	3.26		88.92	3.69	
63.93	2.84		78.56	3.27		89.11	3.70	74
64.30	2.85	57	78.85	3.28		89.31	3.71	

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
89.50	3.72		95.67	4.15	83	98.74	4.58	
89.69	3.73		95.77	4.16		98.79	4.59	
89.87	3.74		95.87	4.17		98.83	4.60	92
90.06	3.75	75	95.97	4.18		98.88	4.61	
90.24	3.76		96.07	4.19		98.92	4.62	
90.42	3.77		96.16	4.20	84	98.96	4.63	
90.59	3.78		96.26	4.21		99.00	4.64	
90.77	3.79		96.35	4.22		99.04	4.65	93
90.94	3.80	76	96.44	4.23		99.08	4.66	
91.11	3.81		96.53	4.24		99.12	4.67	
91.28	3.82		96.61	4.25	85	99.16	4.68	
91.45	3.83		96.70	4.26		99.20	4.69	
91.61	3.84		96.78	4.27		99.23	4.70	94
91.77	3.85	77	96.87	4.28		99.27	4.71	
91.93	3.86		96.95	4.29		99.30	4.72	
92.09	3.87		97.03	4.30	86	99.33	4.73	
92.24	3.88		97.11	4.31		99.37	4.74	
92.39	3.89		97.18	4.32		99.40	4.75	95
92.54	3.90	78	97.26	4.33		99.43	4.76	
92.69	3.91		97.33	4.34		99.46	4.77	
92.84	3.92		97.40	4.35	87	99.49	4.78	
92.98	3.93		97.48	4.36		99.52	4.79	
93.13	3.94		97.55	4.37		99.55	4.80	96
93.27	3.95	79	97.61	4.38		99.58	4.81	
93.41	3.96		97.68	4.39		99.60	4.82	
93.54	3.97		97.75	4.40	88	99.63	4.83	
93.68	3.98		97.81	4.41		99.66	4.84	
93.81	3.99		97.88	4.42		99.68	4.85	97
93.94	4.00	80	97.94	4.43		99.71	4.86	
94.07	4.01		98.00	4.44		99.73	4.87	
94.19	4.02		98.06	4.45	89	99.75	4.88	
94.32	4.03		98.12	4.46		99.78	4.89	
94.44	4.04		98.20	4.47		99.80	4.90	98
94.56	4.05	81	98.24	4.48		99.82	4.91	
94.68	4.06		98.29	4.49		99.84	4.92	
94.80	4.07		98.35	4.50	90	99.87	4.93	
94.92	4.08		98.40	4.51		99.88	4.94	
95.03	4.09		98.45	4.52		99.91	4.95	99
95.14	4.10	82	98.50	4.53		99.93	4.96	
95.25	4.11		98.55	4.54		99.94	4.97	
95.36	4.12		98.60	4.55	91	99.96	4.98	
95.47	4.13		98.65	4.56		99.98	4.99	
95.57	4.14		98.70	4.57		100.00	4.00	100

表VII. 根據常態曲線下底線 6σ 上之面積測定問題難易表

一常態曲線圖之底線定爲 $\pm 3\sigma$。以 -3σ 所在之點爲0，平均數所在之點爲50，$+3\sigma$ 所在之點爲100。

例：設有若干學生，同作一題，百分之20作錯，該題應佔之次序爲36；百分之80作錯，該題應佔之次序爲64；其餘類推。

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
.00	.01		.24	.33		.80	.65	
.00	.02		.25	.34		.82	.66	11
.01	.03		.26	.35		.85	.67	
.01	.04		.27	.36	6	.88	.68	
.02	.05		.29	.37		.90	.69	
.02	.06	1	.30	.38		.93	.70	
.03	.07		.31	.39		.96	.71	
.04	.08		.33	.40		.99	.72	12
.04	.09		.34	.41		1.02	.73	
.05	.10		.35	.42	7	1.05	.74	
.05	.11		.37	.43		1.08	.75	
.06	.12	2	.38	.44		1.11	.76	
.07	.13		.40	.45		1.15	.77	
.07	.14		.41	.46		1.18	.78	13
.08	.15		.43	.47		1.22	.79	
.09	.16		.45	.48	8	1.25	.80	
.09	.17		.46	.49		1.29	.81	
.10	.18	3	.48	.50		1.32	.82	
.11	.19		.50	.51		1.36	.83	
.12	.20		.52	.52		1.40	.84	14
.12	.21		.54	.53		1.44	.85	
.13	.22		.55	.54	9	1.48	.86	
.14	.23		.57	.55		1.52	.87	
.15	.24	4	.59	.56		1.56	.88	
.16	.25		.61	.57		1.60	.89	
.17	.26		.64	.58		1.65	.90	15
.18	.27		.66	.59		1.69	.91	
.19	.28		.68	.60	10	1.74	.92	
.20	.29		.70	.61		1.78	.93	
.21	.30	5	.73	.62		1.83	.94	
.22	.31		.75	.63		1.88	.95	
.23	.32		.77	.64		1.93	.96	16

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
1.98	.97		5.23	1.39		11.56	1.81	
2.03	.98		5.34	1.40		11.76	1.82	
2.08	.99		5.45	1.41		11.96	1.83	
2.14	1.00		5.57	1.42		12.16	1.84	
2.19	1.01		5.68	1.43		12.37	1.85	
2.25	1.02	17	5.80	1.44	24	12.57	1.86	31
2.30	1.03		5.92	1.45		12.78	1.87	
2.36	1.04		6.03	1.46		13.00	1.88	
2.42	1.05		6.16	1.47		13.21	1.89	
2.48	1.06		6.29	1.48		13.43	1.90	
2.54	1.07		6.41	1.49		13.65	1.91	
2.60	1.08	18	6.54	1.50	25	13.87	1.92	32
2.67	1.09		6.67	1.51		14.09	1.93	
2.73	1.10		6.80	1.52		14.32	1.94	
2.80	1.11		6.94	1.53		14.55	1.95	
2.87	1.12		7.07	1.54		14.78	1.96	
2.93	1.13		7.21	1.55		15.01	1.97	
3.00	1.14	19	7.35	1.56	26	15.25	1.98	33
3.08	1.15		7.50	1.57		15.48	1.99	
3.15	1.16		7.64	1.58		15.73	2.00	
3.22	1.17		7.79	1.59		15.97	2.01	
3.30	1.18		7.94	1.60		16 21	2.02	
3.37	1.19		8.09	1.61		16.46	2.03	
3.45	1.20	20	8.24	1.62	27	16.71	2.04	34
3.53	1.21		8.39	1.63		16.96	2.05	
3.61	1.22		8.55	1.64		17.22	2.06	
3.70	1.23		8.71	1.65		17.48	2.07	
3.78	1.24		8.87	1.66		17.74	2.08	
3.87	1.25		9.04	1.67		18.00	2.09	
3.95	1.26	21	9.20	1.68	28	18.27	2.10	35
4.04	1.27		9.37	1.69		18.53	2.11	
4.13	1.28		9.54	1.70		18.80	2.12	
4.22	1.29		9.71	1.71		19.08	2.13	
4.32	1.30		9.89	1.72		19.35	2.14	
4.41	1.31		10.06	1.73		19.63	2.15	
4.51	1.32	22	10.24	1.74	29	19.91	2.16	36
4.61	1.33		10.42	1.75		20.19	2.17	
4.71	1.34		10.61	1.76		20.47	2.18	
4.81	1.35		10.79	1.77		20.76	2.19	
4.91	1.36		10.98	1.78		21.05	2.20	
5.02	1.37		11.17	1.79		21.34	2.21	
5.12	1.38	23	11.37	1.80	30	21.63	2.22	37

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
21.92	2.23		36.18	2.65		52.93	3.07	
22.22	2.24		36.55	2.66		53.33	3.08	
22.52	2.25		36.93	2.67		53.73	3.09	
22.82	2.26		37.31	2.68		54.12	3.10	
23.13	2.27		37.99	2.69		54.52	3.11	
23.44	2.28	38	38.07	2.70	45	54.92	3.12	52
23.75	2.29		38.45	2.71		55.31	3.13	
24.06	2.30		38.83	2.72		55.71	3.14	
24.32	2.31		39.22	2.73		56.10	3.15	
24.69	2.32		39.60	2.74		56.50	3.16	
25.00	2.33		39.99	2.75		56.89	3.17	
25.32	2.34	39	40.38	2.76	46	57.28	3.18	53
25.64	2.35		40.76	2.77		57.67	3.19	
25.97	2.36		41.15	2.78		58.07	3.20	
26.29	2.37		41.54	2.79		58.46	3.21	
26.62	2.38		41.93	2.80		58.85	3.22	
26.95	2.39		42.33	2.81		59.24	3.23	
27.29	2.40	40	42.72	2.82	47	59.62	3.24	54
27.62	2.41		43.11	2.83		60.01	3.25	
27.96	2.42		43.50	2.84		60.40	3.26	
28.29	2.43		43.90	2.85		60.78	3.27	
28.63	2.44		44.29	2.86		61.17	3.28	
28.98	2.45		44.69	2.87		61.55	3.29	
29.32	2.46	41	45.08	2.88	48	61.93	3.30	55
29.67	2.47		45.46	2.89		62.31	3.31	
30.01	2.48		45.88	2.90		62.69	3.32	
30.36	2.49		46.27	2.91		63.07	3.33	
30.71	2.50		46.67	2.92		63.45	3.34	
31.07	2.51		47.07	2.93		63.82	3.35	
31.42	2.52	42	47.47	2.94	49	64.20	3.36	56
31.78	2.53		47.87	2.95		64.57	3.37	
32.14	2.54		48.26	2.96		64.94	3.38	
32.50	2.55		48.66	2.97		65.31	3.39	
32.86	2.56		49.06	2.98		65.68	3.40	
33.22	2.57		49.46	2.99		66.05	3.41	
33.58	2.58	43	50.00	3.00	50	66.42	3.42	57
33.95	2.59		50.54	3.01		66.78	3.43	
34.32	2.60		50.94	3.02		67.14	3.44	
34.69	2.61		51.34	3.03		67.50	3.45	
35.06	2.62		51.74	3.04		67.86	3.46	
35.43	2.63		52.13	3.05		68.22	3.47	
35.80	2.64	44	52.53	3.06	51	68.58	3.48	58

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
68.93	3.49		82.00	3.91		90.96	4.33	
69.29	3.50		82.26	3.92		91.13	4.34	
69.64	3.51		82.52	3.93		91.29	4.35	
69.99	3.52		82.78	3.94		91.45	4.36	
70.33	3.53		83.04	3.95		91.61	4.37	
70.63	3.54	59	83.29	3.96	66	91.76	4.38	73
71.02	3.55		83.54	3.97		91.91	4.39	
71.37	3.56		83.79	3.98		92.06	4.40	
71.71	3.57		84.63	3.99		92.21	4.41	
72.04	3.58		84.27	4.00		92.36	4.42	
72.38	3.59		84.52	4.01		92.50	4.43	
72.71	3.60	60	84.75	4.02	67	92.65	4.44	74
73.05	3.61		84.99	4.03		92.79	4.45	
73.38	3.62		85.22	4.04		92.93	4.46	
73.71	3.63		85.45	4.05		93.06	4.47	
74.03	3.64		85.68	4.06		93.20	4.48	
74.36	3.65		85.91	4.07		93.33	4.49	
74.68	3.66	61	86.13	4.08	68	93.46	4.50	75
75.00	3.67		86.35	4.09		93.59	4.51	
75.31	3.68		86.57	4.10		93.71	4.52	
75.63	3.69		86.79	4.11		93.84	4.53	
75.94	3.70		87.00	4.12		93.97	4.54	
76.25	3.71		87.22	4.13		94.08	4.55	
76.56	3.72	62	87.43	4.14	69	94.20	4.56	76
76.87	3.73		87.63	4.15		94.32	4.57	
77.18	3.74		87.84	4.16		94.43	4.58	
77.48	3.75		88.04	4.17		94.55	4.59	
77.78	3.76		88.24	4.18		94.66	4.60	
78.08	3.77		88.44	4.19		94.77	4.61	
78.37	3.78	63	88.63	4.20	70	94.88	4.62	77
78.66	3.79		88.83	4.21		94.98	4.63	
78.95	3.80		89.02	4.22		95.09	4.64	
79.24	3.81		89.21	4.23		95.19	4.65	
79.53	3.82		89.39	4.24		95.29	4.66	
79.81	3.83		89.58	4.25		95.39	4.67	
80.09	3.84	64	89.76	4.26	71	95.49	4.68	78
80.37	3.85		89.94	4.27		95.59	4.69	
80.65	3.86		90.11	4.28		95.68	4.70	
80.92	3.87		90.29	4.29		95.78	4.71	
81.20	3.88		90.46	4.30		95.87	4.72	
81.47	3.89		90.63	4.31		95.96	4.73	
81.73	3.90	65	90.80	4.32	72	96.05	4.74	79

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
96.13	4.75		98.64	5.17		99.66	5.59	
96.22	4.76		98.68	5.18		99.67	5.60	
96.30	4.77		98.71	5.19		99.69	5.61	
96.39	4.78		98.75	5.20		99.70	5.62	
96.47	4.79		98.78	5.21		99.71	5.63	
96.55	4.80	80	98.82	5.22	87	99.73	5.64	94
96.63	4.81		98.85	5.23		99.74	5.65	
96.70	4.82		98.89	5.24		99.75	5.66	
96.78	4.83		98.92	5.25		99.76	5.67	
96.85	4.84		98.95	5.26		99.77	5.68	
96.92	4.85		98.98	5.27		99.78	5.69	
97.00	4.86	81	99.01	5.28	88	99.79	5.70	95
97.06	4.87		99.04	5.29		99.80	5.71	
97.13	4.88		99.07	5.30		99.81	5.72	
97.20	4.89		99.10	5.31		99.82	5.73	
97.27	4.90		99.12	5.32		99.83	5.74	
97.33	4.91		99.15	5.33		99.84	5.75	
97.40	4.92	82	99.18	5.34	89	99.85	5.76	96
97.46	4.93		99.20	5.35		99.86	5.77	
97.52	4.94		99.23	5.36		99.87	5.78	
97.58	4.95		99.25	5.37		99.88	5.79	
97.64	4.96		99.27	5.38		99.88	5.80	
97.70	4.97		99.30	5.39		99.89	5.81	
97.75	4.98	83	99.32	5.40	90	99.90	5.82	97
97.81	4.99		99.34	5.41		99.91	5.83	
97.86	5.00		99.36	5.42		99.91	5.84	
97.92	5.01		99.39	5.43		99.92	5.85	
97.97	5.02		99.41	5.44		99.93	5.86	
98.02	5.03		99.43	5.45		99.93	5.87	
98.07	5.04	84	99.45	5.46	91	99.94	5.88	98
98.12	5.05		99.46	5.47		99.95	5.89	
98.17	5.06		99.48	5.48		99.95	5.90	
98.22	5.07		99.50	5.49		99.96	5.91	
98.26	5.08		99.52	5.50		99.96	5.92	
98.31	5.09		99.54	5.51		99.97	5.93	
98.35	5.10	85	99.55	5.52	92	99.98	5.94	99
98.40	5.11		99.57	5.53		99.98	5.95	
98.44	5.12		99.59	5.54		99.99	5.96	
98.48	5.13		99.60	5.55		99.99	5.97	
98.52	5.14		99.62	5.56		100.00	5.98	
98.56	5.15		99.63	5.57		100.00	5.99	
98.60	5.16	86	99.65	5.58	93	100.00	6.00	100

表VIII 根據常態曲線下底線10σ上之面積，測定問題難易表——常態曲線圖之底線距離定爲±5σ。以−5σ所在之點爲0，平均數所在之點爲50，+5σ所在之點爲100。表中之每一標準差用10乘之。

標準差之價值	百分率	標準差之價值	百分率	標準差之價值	百分率	標準差之價值	百分率
0	99.999971	25	99.38	50	50.00	75	0.62
0.5	99.999963	25.	99.29	50.5	48.01	75.5	0.54
1	99.999952	26	99.18	51	46.02	76	0.47
1.5	99.999938	26.5	99.06	51.5	44.04	76.5	0.50
2	99.99992	27	98.93	52	42.07	77	0.35
2.5	99.99990	27.5	98.78	52.5	40.13	77.5	0.30
3	99.99987	28	98.61	53	38.21	78	0.26
3.5	99.99983	28.5	98.42	53.5	36.32	78.5	0.22
4	99.99979	29	98.21	54	34.46	79	0.19
4.5	99.99973	29.5	97.98	54.5	32.64	79.5	0.16
5	99.99966	30	97.72	55	30.85	80	0.13
5.5	99.99957	30.5	97.44	55.5	29.12	80.5	0.11
6	99.99946	31	97.13	56	27.43	81	0.097
6.5	99.99932	31.5	96.78	56.5	25.78	81.5	0.082
7	99.99915	32	96.41	57	24.20	82	0.069
7.5	99.9989	32.5	95.99	57.5	22.66	82.5	0.058
8	99.9987	33	95.54	58	21.19	83	0.048
8.5	99.9983	33.5	95.05	58.5	19.77	83.5	0.040
9	99.9979	34	94.52	59	18.41	84	0.034
19.5	99.9974	34.5	93.94	59.5	17.11	84.5	0.028
10	99.9968	35	93.32	60	15.87	85	0.023
10.5	99.9961	35.5	92.65	60.5	14.69	85.5	0.019
11	99.9952	36	91.92	61	13.57	86	0.016
11.5	99.9941	36.5	91.15	61.5	12.51	86.5	0.013
12	99.9928	37	90.32	62	11.51	87	0.011
12.5	99.9912	37.5	89.44	62.5	10.56	87.5	0.009
13	99.989	38	88.49	63	9.68	88	0.007
13.5	99.987	38.5	87.49	63.5	8.85	88.5	0.0059
14	99.984	39	86.43	64	8.08	89	0.0048
14.5	99.981	39.5	85.31	64.5	7.35	89.5	0.0039
15	99.977	40	84.13	65	6.68	90	0.0032
15.5	99.972	40.5	82.89	65.5	6.06	90.5	0.0026
16	99.966	41	81.59	66	5.48	91	0.0021
16.5	99.960	41.5	80.23	66.5	4.95	91.5	0.0017
17	99.952	42	78.81	67	4.46	92	0.0013
17.5	99.942	42.5	77.34	67.5	4.01	92.5	0.0011
18	99.931	43	75.80	68	3.59	93	0.0009
18.5	99.918	43.5	74.22	68.5	3.22	93.5	0.0007
19	99.903	44	72.57	69	2.87	94	0.0605
19.5	99.886	44.5	70.88	69.5	2.56	94.5	0.00043
20	99.865	45	69.15	70	2.28	95	0.00034
20.5	99.84	45.5	67.36	70.5	2.02	95.5	0.00027
21	99.81	46	65.54	71	1.79	96	0.00021
21.5	99.78	46.5	63.68	71.5	1.58	96.5	0.00017
22	99.74	47	61.79	72	1.39	97	0.00013
22.5	99.70	47.5	59.87	72.5	1.22	97.5	0.00010
23	99.65	48	57.93	73	1.07	98	0.00008
23.5	99.60	48.5	55.96	73.5	0.94	98.5	0.000062
24	99.53	49	53.98	74	0.82	99	0.000048
24.5	99.46	49.5	51.99	74.5	0.71	99.5	0.000037
						100	0.000029

參考書

陳其鹿——統計學
孟　森——統計通論
金國寶——統計新論
陳炳權——統計學概要
鄭堯拌——統計學概要
周　燮——統計學概論
趙文銳——統計學原理
顧　澄——統計學之理論
陳炳權——統計方法
甯恩承——統計方法
許炳漢——統計法概論
王仲武——統計學原理及應用
李一飛——應用統計學
壽毅成——應用統計淺說
俞子夷——測驗統計法概要
朱君毅——教育統計學
薛鴻志——教育統計學
周調陽——教育統計學
朱君毅——教育統計學綱要
薛鴻志——教育統計學大綱
周調陽——教育測量法精義
秦古溫——實用經濟統計學
林光澂——商業統計
金國寶——物價指數淺說
趙人儁——物價指數論提要
盛　俊——上海生活費指數
丁國力——生活費指數之編製法
樊　弘——社會調查方法
蔡毓驄——社會調查之原理及方法

Adams, A. B.——Economics of Business Cycles.

Adams, Thos. Sewall——Index Numbers and Standard of Value.

Alexander Carter——School Statistics and Publicity.

Bailey and Cummings——Statistics.

Bauer. G. N.——Mathematics Preparatory to Statistics and Finance.

Bodddington, A. L.——Statistics and their Application to Commerce.

Bowley, Arthur L.——An Elementary Manual of Statistics.

——Elements of Statistics.

——The Measurement of Groups and Series.

Brington W. C.——Graphic Methods for Presenting Facts.

Brown and Thomson——Essentials of Mental Measurement.

Brumbaugh, M. A.——Direct Method of Determining Cyclical Fluctuations of Economic Data.

Chaddock, R. E.——An Application of Statistical Methods.

——Principles and Methods of Statistics.

Chambers——Introduction to Statistical Analysis.

Copeland, Meluin T.——Business Statistics.

Crum and Paton——Introduction to the Methods of Economic Statistics.

Day, E. E.——Statistical Analysis.

Davenport, C. B.——Statistical Methods.

Davies. George R.——Introduction to Economic Statistics.

Day, E. E.——Statistical Methods.

Davies, George R.——Introduction to Economic Statistics.

Elderton, W. P.——Frequency Curves and Correlation.

Elderton, W. P. and E. M.——Primer of Statistics.

Fauntain H.——The Construction of Index Numbers of Prices.

Fisher, Arne——Elementary Treatise on Frequency Curves and Their Application in the Analysis of Death Curves and Life Tables.

——The Mathematical Theory of Probabilities and Its Application to Frequency Curves and Statistical Methods.

Fisher, Irving——The Making of Index Numbers.

Frederick, J G.——Business Research and Statistics.

Galton, Francis——Correlat on and their Measurements,

Garrett, H. E.——Statistics In Psychology and Education.

Giffen, Sir R.——Statistics.

Hardy, C. O. and G. V. Cox——Forecasting Business Conditions.

Harper, F. H.——Elements of Practical Statistics.

Helen M. Walker——Studies in the History of Statistical

Methcd.
Hickernell, W. F.——Financial and Business Forecasting
Holland, R. W.——Business Statistics.
Jones, D. C.——A First Course in Statistics.
Jorden, D. F.——Practical Business Forecasting.
Kelley, T. L.——Statistical Method.
King, W. L.——The Elements of Statistical Method.
Koren, John——The History of Statistics.
Li——Business Statistics.
Lovetel and Hatzchur——Statistics.
Marshall Wm. C.——Graphical Methods.
Meitzen, August——Statistics.
Mills F. C.——Statistical Methods Applied to Economics and Business.
Mills and Davenport——A Manual of Problems and Tables in Statistics.
Mitchell W. C.——Business Cycles.
Moore, H. L.——Economic Cycles; Their Law and Causes
——Generating Economic Cycles.
Pearson, Karl——The Grammar of Science.
Peddle, John B.——The Construction of Grapeical Charts.
Printon——Graphic Methods for Presenting Facts.
Riegel, R.——Element of Business Statis ics.
Riggleman, J. R.——Graphic Methods of Presenting Business Statistics.
Ritez, H. O.——Handbook of Mathematical Statistics,

Rugg. H. O.——A Primer of Statistics.

——Statistical methods Applied to Education.

Smith, Wm. H.——Graphic Statistics in Management.

Snyder, C.——Business Cycles and Business Measurements: Studies in Quantitative Economics.

Secrist, Horace——An Introduction to Statistical Methods.

——Readings and Problems in Statistical Methods.

——Statistics in Business: Their Analysis, Charting and Use.

Soper, H. E.——Frequency Arrays.

Thorndike, E. L.——An Introduction to the Theory of Menaal aud Social Measurements.

Thurstone L. L.——Fundamentals of Statistics.

Vance, R. ——Business and Investment Forecasting

Wallace, Wm.——Business Forecasting and its Practical Application.

Warren Milton Persons.——The construction of Index Numbers.

Whipple, G. M.——Vital Statist'cs.

Willian Brown——The Essentials of Mental Measurements.

Young, B. F.——Statistics as Applied to Business.

Yule G. Udny——An Introduction to the Theory of Statistics.

——Introduction to Statistics.

Zizek Franz——Statistical Averages.

統計學

每冊實價大洋一元八角

外埠酌加運費匯費

著者兼發行人　唐啓賢

總代發行　黎明書局
上海福州路五十七號

分售處　國內各大都市各大書局均有代售

印刷者　華豐印刷鑄字所
上海浙江路五三六號

初版 民國二十年十一月　再版 民國二十一年十一月

STATISTICS

by

C. H. Tang

Price: $ 1.80 postage extra

1st ed., Nov., 1931　2nd ed., Nov., 1932

LEE-MING BOOK Co. Ltd., Shanghai