教育部審定

太倉顧裕魁譯述

紹興 壽孝天 駱師曾 挍訂

漢譯 温德華士三角法

上海商務印書館印行

民國五年十一月景唐置於武昌陸軍預備學校

温德華士三角法

序言

美人温德華士氏(Wentworth)近世算學大家也。其所著算學各書，為我國各學校所採用者。已不止一種。蓋以温氏之書。說理則明晰。選材則詳備。教者易於教。學者易於學。以視他種教科書。實有比較的優點也。惟原書概為英文。在已通英文者。不難就原書而研求。在未通英文者。同抱此研求之志。而為文字所阻。致不得一窺美備之著作。亦為憾事。三角一法。在算學中。程度已高。學校中習是法者。大都為中學以上已通英文之生徒。故各學校用温氏書。多直接用原書講授。似無藉乎譯本。雖然。學堂之高等生。無慮不能讀温氏書。而喜讀温氏書者。必不以學校高等生為限。為普及計。則譯本之不可少者一。各種術語。中西本難强同。但誦習西書。知彼而不知此。於應用必多窒礙。為貫通計。則譯本之不可少者二。夫學術之為物。傳播愈多其途。則昌明愈趨於速。本館前於温氏之書。如代數學。如幾何學。已先後譯成漢文。豈好為駢枝哉。誠欲使不能讀原書者。有捷徑以探其奧。已曾讀原書者。可對照而會其通云爾。今此三角法之譯。亦猶前志也。印既成。用述其原意如此。

目次

平面部

第壹編 銳角之三角函數

第貳編 直角三角形

第叁編 測角法

第肆編 斜角三角形

第伍編 雜題

第陸編 表之構造

球面部

第柒編 球面直角三角形

第捌編 球面斜角三角形

第玖編 球面三角法之應用

溫德華士三角法

平面部

第壹編

銳角之三角函數

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF ACUTE ANGLES

第一章

角之測法

ANGULAR MEASURE

測量長度時。恆用粎，呎等爲單位。故測量角度時，亦有種種單位。

常度或六十分法(common or sexagesimal system)分圓周爲360等份。以每等份所對之圓心角爲單位角。而名之爲**度**(degree)。每度再分爲**六十分**(minute)。每分再分爲**六十秒**(second)。度分與秒。各以記號表之。如6度5分7秒，書作6°5′7″。

注意 六十分法者。古代巴比倫天文家用以定360日爲一年者也。

眞弧度法 (circular system) 於圓周上截一與半徑等長之弧，而取其所對之圓心角，定爲單位角。名之曰**本位弧** (radian)。

$360°$內本位弧之數，等於圓周內所含半徑長之倍數，用幾何學。可以證明任何圓中。此數恆爲 2π。其 π 之値約等於3.1416。故本位弧在任何圓內。恆爲同度之角。

圓周爲其半徑之 2π 倍，

於是 $\qquad 2\pi$ 本位弧 $=360°$

而 $\qquad \pi$ 本位弧 $=180°$

故 $\qquad 1$ 本位弧 $=\dfrac{180°}{\pi}=57°\,17'\,45''$

而 $\qquad 1$ 度 $=\dfrac{\pi}{180}$ 本位弧 $=0.017453$ 本位弧。

由最後之二方程式。乃有由本位弧求度。或由度求本位弧兩種之變換。

如 2 本位弧 $=2\times\dfrac{180°}{\pi}=2\times(57°\,17'\,45'')=114°\,35'\,30''$

〔注意〕 眞弧度法。始用於十八世紀之初，此法於高等數學內，最爲便利，蓋其本位弧，僅以眞數表之。如 $\angle\pi$。意謂本角爲 π 本位弧，又 $\angle 3$ 爲 3 本位弧，

十八世紀之末。度量衡悉改粎制，其時有人提議，分直角爲100等份，定爲單位。而名之爲度(grade)。每度又分爲 100 分。每分爲 100 秒。是之謂**百分法** (centesimal system)。然此法於實際上，未聞有用之者。

例題 I.

〔設 $\pi=3.1416$〕

1. 化下列諸角爲眞弧度。而以 π 之分數式。表示其結果。

$60^\circ,\ 45^\circ,\ 150^\circ,\ 195^\circ,\ 11^\circ 15',\ 123^\circ 45',\ 37^\circ 30'$。

2 於 $\frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{15}{16}\pi,\ \frac{7}{15}\pi$ 本位弧內。各有若干度。

3. 本位弧爲 1°。其小數部分若何。又 $1'$ 若何。

4. 一個本位弧內有若干秒。

5. 試以本位弧表示八角形及十二角形之一內角。

6. 於 50 呎半徑之圓周上。截取 10 呎之弧。問此弧所對之圓心角若干度。

7. 地球赤道半徑約 3963 哩，設於赤道上有相距 1000 哩之兩點。問經度之差。

8. 設赤道上兩點之經度差爲 1°。問兩點間相距若干哩，

9. 設 1° 之圓心角所乘之弧爲 1 呎，求圓半徑。

10. 由地球之旋轉。而移赤道上一點。於其周上經過與地球半徑相等之距離，問須幾小時。

11. 設時鐘分針之長爲 $3\frac{1}{2}$ 呎。問其極端於 25 分鐘內所行之長，

(令 $\pi=\frac{22}{7}$。下題仿此)。

12. 一輪每秒鐘旋轉 15 次。問旋過 4 本位弧，須時幾何。

第二章

三角函數

THE TRIGONOMETRIC FUNCTION

平面三角形邊角相關之理。卽以已知之任何三項。可以決定三角形之形狀及大小。惟已知三項中。至少必有一項爲邊。

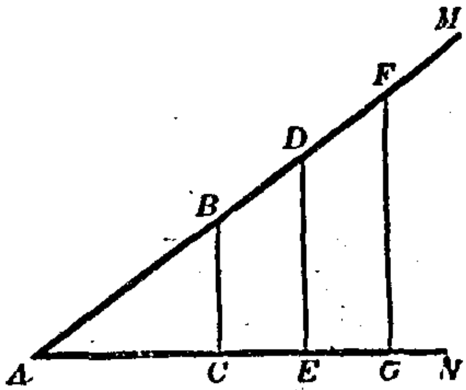
幾何學者。由已知之三項。表示其如何構造(construct)此三角形也。

三角法(trigonometry)者。由已知部分之眞數值。而表示其如何計算(compute)此三角形之未知部分也。

幾何學以普通法示三角形之邊角互相依屬。三角法，始則於直角三角形(right triangle)內。示此依屬之眞相。於是乃用各邊之比(ratios of the sides)。以計算之。

設 MAN (1圖) 爲銳角。自一邊上之任何點 B, D, F。至又一邊作 BC, DE, FG 諸垂綫。則 ACB, AED, AGF 直角三角形。有 A 角爲公共。故互爲等角而相似。於是其各組相當邊之比相等。卽

1 圖



$$\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{AG}{AF};\ \frac{AC}{BC}=\frac{AE}{DE}=\frac{AG}{FG};\ \frac{BC}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{FG}{AF}.$$

<u>故此諸比。無論A爲何如。其值恆不變。</u>

所以於銳角A之任何值，必有若干數，假公共此銳角A之諸直角三角形。以表各邊之比之各值，

玆共有六個不同之比，

I. 對邊與斜邊之比，謂之**A之正弦** (Sine)。書作 $\sin A$.

II. 鄰邊與斜邊之比。謂之**A之餘弦** (Cosine)。書作 $\cos A$.

III. 對邊與鄰邊之比。謂之**A之正切**(Tangent)。書作 $\tan A$.

IV. 鄰邊與對邊之比。謂之**A之餘切** (Cotangent)。書作 $\cot A$.

V. 斜邊與鄰邊之比，謂之**A之正割**(Secant)。書作 $\sec A$.

VI. 斜邊與對邊之比。謂之**A之餘割** (Cosecant)。書作 $\csc A$.

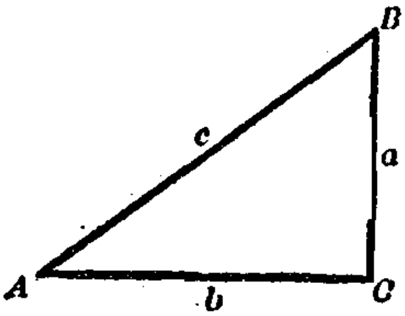
此六個比。謂之A角之**三角函數**。

此外尙有兩個函數。亦僅依屬於A角者。恆與上六個相幷而爲八個。

VII. **A之正矢** (Versed sine)。爲 $1-\cos A$。書作 $\text{vers}\, A$.

VIII. **A之餘矢** (Coversed sine)。爲 $1-\sin A$。書作 $\text{covers}\, A$.

2 圖



於 ACB 直角三角形內(2 圖)。以 $a, b, c,$ 表示銳角 $A, B,$ 及直角 C 各對邊之長。而所表者爲同類單位。則

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}},\qquad \cos A=\frac{b}{c}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}},$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}},$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}},\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}},$$

$$\operatorname{vers} A=1-\frac{b}{c}=\frac{c-b}{c},\qquad \operatorname{covers} A=1-\frac{a}{c}=\frac{c-a}{c}.$$

例題 II.

1. ABC 三角形(2 圖)內餘一銳角 B 之各函數爲何。

2. 試比較 A 及 B 之各函數。而示其

$$\sin A=\cos B \qquad \sec A=\csc B$$
$$\cos A=\sin B \qquad \csc A=\sec B$$
$$\tan A=\cot B \qquad \operatorname{vers} A=\operatorname{covers} B$$
$$\cot A=\tan B \qquad \operatorname{covers} A=\operatorname{vers} B$$

3. 設 $a, b, c,$ 有下之各值。試求 A 之各函數值。

(i) 3, 4, 5.　　(iii) 8, 15, 17.　　(v) 3.9, 8, 8.9.

(ii) 5, 12, 13.　　(iv) 9, 40, 41.　　(vi) 1.19, 1.20, 1.69.

4. 欲 a, b, c (2 圖) 三綫。爲直角三角形之三邊，則各綫必長若干而後可。又問 3 題內各數。是否卽所需之長。

5. 設 a, b, c，有下之各值，試求 A 之各函數值。

(i) $2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2,$　　(iii) $pqr,\ qrs,\ rsp,$

(ii) $\dfrac{2xy}{x-y},\ x+y,\ \dfrac{x^2+y^2}{x-y},$　　(iv) $\dfrac{mn}{pq},\ \dfrac{mv}{sq},\ \dfrac{nr}{ps}.$

6. 求證前題 (i) 及 (ii) 內 a, b, c 之值，爲合於直角三角形之三邊，

7. 欲令 5 題 (iii) 及 (iv) 內 a, b, c 之各值，爲直角三角形之各邊，問當立何種方程式，

已知 $a^2+b^2=c^2$，求下列六題中 A 及 B 之函數。

8. $a=24,\ b=143.$

9. $a=0.264,\ c=0.265.$

10. $b=9.5,\ c=19.3.$

11. $a=\sqrt{p^2+q^2},\ b=\sqrt{2pq}.$

12. $a=\sqrt{p^2+pq},\ c=p+q.$

13. $b=2\sqrt{pq},\ c=p+q.$

已知 $a^2+b^2=c^2$，求下列四題中 A 之函數，

14. $a=2b.$

15. $a=\frac{2}{3}c.$

16. $a+b=\frac{5}{4}c.$

17. $a-b=\frac{1}{4}c.$

18. 設 $\sin A=\frac{3}{5}$，而 $c=20.5$，求 a.

19. 設 $\cos A=0.44$，而 $c=3.5$，求 b.

20. 設 $\tan A=\frac{11}{3}$ 而 $b=2\frac{6}{11}$，求 a.

21. 設 $\cot A=4$，而 $a=17$，求 b.

$\frac{b}{a}=\tan B=\cot A$

$\frac{a}{c}=\sin A=\cos B$

$\frac{b}{c}=\cos A=\sin B$

$\frac{a}{b}=\tan A=\cot B$

22. 設 $\sec A=2$, 而 $b=20$, 求 c.

23. 設 $\csc A=6.45$, 而 $a=35.6$, 求 c.

有下列已知各件。求作一直角三角形。

24 $c=6$, $\tan A=\frac{3}{2}$.

25. $a=3.5$, $\cos A=\frac{1}{2}$.

26. $b=2$, $\sin A=0.6$.

27. $b=4$, $\csc A=4$.

28. 於直角三角形內 $c=2.5$ 哩, $\sin A=0.6$, $\cos A=0.8$, 求餘二邊。

29. 以分角器作 20°, 40°, 及 70° 之三角。由測其必需之綫。以決定其函數。并以所得值。與下表中所列較近各值比較之。

	sin	cos	tan	cot	sec	csc
20°	0.342	0.940	0.364	2.747	1.064	2.924
40°	0.643	0.766	0.839	1.192	1.305	1.556
70°	0.940	0.342	0.747	0.364	2.924	1.064

30. 由上表設 $A=20°$, $c=1$, 又設 $A=20°$, $c=4$, 試各求直角三角形之餘二邊。

31. 由直立竿之水平影長度竿長。測時得太陽之仰角之正切爲 0.82。同時有塔之水平影長 174.3 碼。求塔高。

〔增註〕 參攷例題 IX 圖解及增註。

第三章

直綫表示之函數式

REPRESENTATION OF THE FUNCTIONS BY LINES

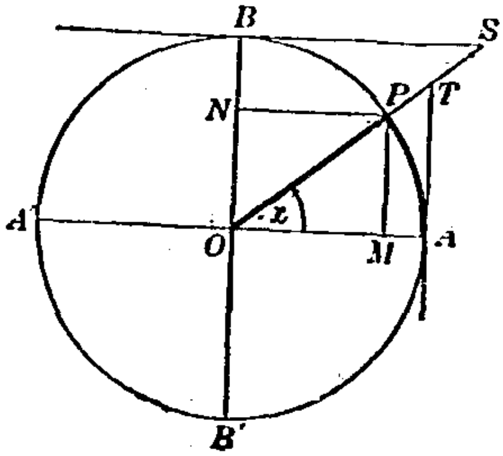
一角之函數均爲比。故皆爲數。然亦可用直綫表之。其法先擇某長爲單位。乃造成一直角三角形。而其比式內之分母。均須與此單位相等。

其最便利之法如下。

以一點 O(3 圖)爲心。及與長之單位相等者爲半徑。作一圓。又作一水平直徑 AA'。及其垂直徑 BB'。

其以 1 爲半徑之圓，謂之單位圓。設 AOP 爲一銳角。而其值(度，分，秒)以 x 表之。

3 圖



則此 x 角，可謂由 OP 直綫，以 O 爲心，自**最始位置** (initial position) OA，至**最終位置** (terminal position) OP，旋轉而成。

作　$PM \perp OA,\ PN \perp OB$

於　rt. $\triangle OMP$ 內，其斜邊 $OP=1$

故
$$\sin x=\frac{MP}{OP}=MP$$
$$\cos x=\frac{OM}{OP}=OM.$$

經 A, B 兩點,作圓之切綫,交 OP 之延長綫於 T 及 S。則於 rt. $\triangle\ OAT$ 及 rt. $\triangle\ OBS$ 內,$OA=1$,其 OB 邊$=1$。又 $\angle OSB=\angle x$。故

$$\tan x=\frac{AT}{OA}=AT \qquad \cot x=\frac{BS}{OB}=BS$$

$$\sec x=\frac{OT}{OA}=OT \qquad \csc x=\frac{OS}{OB}=OS$$

$$\text{vers}\ x=1-OM=MA \qquad \text{covers}\ x=1-ON=NB$$

此八個函數之綫值,概用圓半徑爲單位以表之。且無論其角值若何改變,其函數之綫值(line values)恆與比值(ratio values)之數相等。

故欲研究角變值時,函數若何改變,則可用簡單之綫值以代比值。

例題 III.

1. 試以直綫表示與3圖內x較大之銳角之各函數,

設x爲一銳角,設明其

2. $\sin x$小於$\tan x$.

3. $\sec x$大於$\tan x$.

4. $\csc x$大於$\cot x$.

求作 x 角。若

5. $\tan x=3$.　　8. $\sin x=\cos x$.

6. $\csc x=2$.　　9. $\sin x=2\cos x$.

7. $\cos x=\frac{1}{2}$.　　10. $4\sin x=\tan x$.

11. 証明一角之正弦。必等於其倍角之弦之半。

12. 設 $\sin x$ 等於內接正十角形一邊之半。求 x。

已知 x 及 y, $x+y$ 小於 $90°$。求作

13. $\sin(x+y)-\sin x$ 之值。

14. $\tan(x+y)-\sin(x+y)+\tan x-\sin x$ 之值，

已知 x 角。求作一 y 角，而令

15. $\sin y=2\sin x$.　　17. $\tan y=3\tan x$.

16. $\cos y=\frac{1}{2}\cos x$.　　18. $\sec y=\csc x$.

19. 試以圖明 $2\sin A>\sin 2A$。

20. 已知兩角 A 及 B。$A+B<90°$。試明

$$\sin(A+B)<\sin A+\sin B.$$

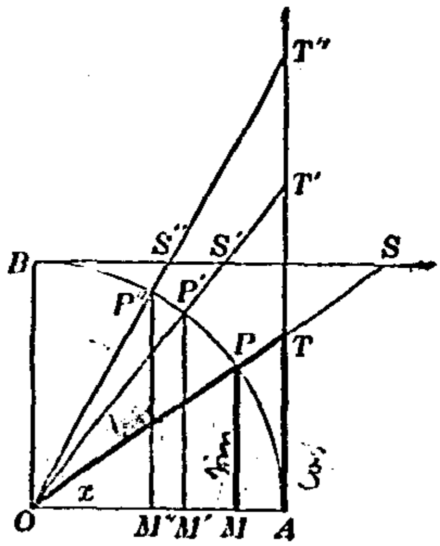
21. 已知單位圓內之 $\sin x$。求 r 半徑之圓內與 $\sin x$ 相當位置之綫之長。

22. 於直角三角形內。已知斜邊 c。又 $\sin A=m$, $\cos A=n$, 求餘二邊。

第四章
函數隨其角而改變
CHANGES IN THE FUNCTIONS AS THE ANGLE CHANGES

設4圖之$\angle AOP$或x。藉繞O旋轉之半徑OP。而漸增至90°。其P點沿AB弧向B移動。T沿切綫AT背A移動。S沿切綫BS向B移動。而M沿半徑OA向O移動。

圖



於是MP, AT, OT各綫漸次增大。而OM, BS, OS各綫漸次減小。即

一銳角漸增至90°時。其正弦正切正割。亦從而增大。而餘弦餘切餘割。反從而減小。

反之。設x漸次減小。則其各函數之改變。與上相反。

設x減小至0°。則OP與OA符合。而與BS平行。故MP及AT消滅。OM等於OA。而BS及OS各爲無限長。其值以∞表之。

又設x增至90°。則OP與OB符合。而與AT平行。故MP及OS各等於OB。OM及BS消滅。而AT及OT各爲無限長。

於是 x 角自 0° 增至 90° 時。

$\sin x$ 自 0 增至 1。

$\cos x$ 自 1 減至 0。

$\tan x$ 自 0 增至 ∞。

$\cot x$ 自 ∞ 減至 0。

$\sec x$ 自 1 增至 ∞。

$\csc x$ 自 ∞ 減至 1。

0° 及 90° 之函數值。爲銳角函數之限制值。因於銳角內。

正弦及餘弦恆小於 1。

正割及餘割恆大於 1。

正切及餘切。有 0 及 ∞ 間之各值。

〔釋義〕 然則正弦，餘弦，等數，何以名爲角函數，其理可知矣。蓋任何量之函數。係別指一量。與第一量有關係。或同爲恆數，或同變其值也。此卽正弦，餘弦，等數對於角之關係也。

第五章
餘角之函數
FUNCTIONS OF COMPLEMENTARY ANGLES

凡兩餘角之普通式。爲 A 及 $90^\circ-A$。

於 rt. $\triangle ACB$(5圖)內。

$$A+B=90^\circ \text{ 則 } B=90^\circ-A$$

以$90°-A$代B於例題II之公式內。則

$\sin A=\cos B=\cos(90°-A)$

$\cos A=\sin B=\sin(90°-A)$

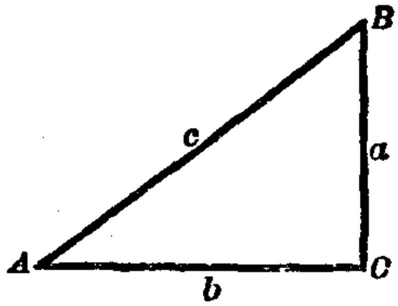
$\tan A=\cot B=\cot(90°-A)$

$\cot A=\tan B=\tan(90°-A)$

$\sec A=\csc B=\csc(90°-A)$

$\csc A=\sec B=\sec(90°-A)$

5 圖



故

一銳角之各函數。等於其餘角之餘函數。

〔注意〕餘弦,餘切,餘割。有時謂之餘函數(co-functions)。蓋卽餘角之正弦,餘角之正切,餘角之正割之省筆也。

於是又得下法。

凡求45°及90°間之角之任何函數可由其0°及45°間餘角之餘函數而得。

〔增註〕於上六式中。$90°-A$及A之各函數。其同數之項。互爲餘函數。

例題 IV.

1. 試求餘角之函數

$\sin 30°$.	$\tan 89°$.	$\csc 18°\,10'$.	$\cot 82°\,19'$.
$\cos 45°$.	$\cot 15°$.	$\cos 37°\,24'$.	$\csc 54°\,46'$.

2. 試求小於45°之一角之函數。

$\sin 60°$.	$\tan 57°$.	$\csc 69°\,2'$.	$\cot 89°\,59'$.
$\cos 75°$.	$\cot 84°$.	$\cos 85°\,39'$.	$\csc 45°\,1'$

3. 已知 $\tan 30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$；求 $\cot 60^\circ$。
4. 已知 $\tan A=\cot A$，求 A。
5. 已知 $\cos A=\sin 2A$，求 A。
6. 已知 $\sin A=\cos 2A$，求 A。
7. 已知 $\cos A=\sin(45^\circ-\frac{1}{2}A)$，求 A。
8. 已知 $\cot\frac{1}{2}A=\tan A$，求 A。
9. 已知 $\tan(45^\circ+A)=\cot A$，求 A。
10. 設 $\sin A=\cos 4A$，求 A。
11. 設 $\cot A=\tan 8A$，求 A。
12. 設 $\cot A=\tan nA$，求 A。

第六章

一角之函數之關係

RELATIONS OF THE FUNCTIONS OF AN ANGLE

因(6圖) $a^2+b^2=c^2$，故

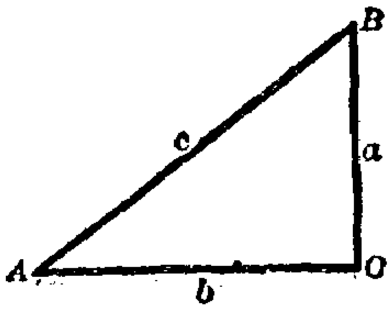
$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1,\text{或}\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

但 $\frac{a}{c}=\sin A$，而 $\frac{b}{c}=\cos A$。

故 $(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$。

或從便利之寫法。爲

6 圖



$$\sin^2 A+\cos^2 A=1。\tag{1}$$

即　<u>一角之正弦方及餘弦方之和，等於一。</u>

由公式〔1〕。已知一角之正弦。即可求其餘弦。已知餘弦。即可求其正弦。

由〔1〕推之。$\sin A$ 及 $\cos A$ 之值為

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A},\qquad \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

因
$$\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\times\frac{c}{b}=\frac{a}{b}.$$

而 $\frac{a}{c}=\sin A,\quad \frac{b}{c}=\cos A,\quad \frac{a}{b}=\tan A$。

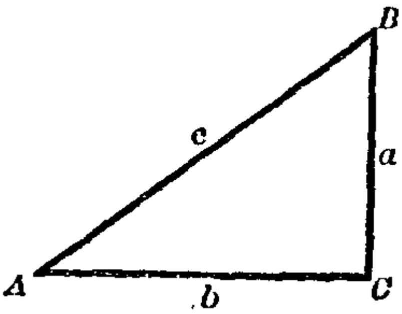
故
$$\mathbf{\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}}\tag{2}$$

即　<u>一角之正切，等於其餘弦除其正弦。</u>

由公式〔2〕。已知一角之正弦及餘弦。即可求其正切。

令 $\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}=1,\quad \frac{b}{c}\times\frac{c}{b}=1,\quad \frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$。

7 圖



而 $\frac{a}{c}=\sin A,\quad \frac{b}{c}=\cos A,\quad \frac{a}{b}=\tan A$。

$\frac{b}{a}=\cot A,\quad \frac{c}{b}=\sec A,\quad \frac{c}{a}=\csc A$。

故
$$\left.\begin{aligned}\mathbf{\sin A\times\csc A=1}\\ \mathbf{\cos A\times\sec A=1}\\ \mathbf{\tan A\times\cot A=1}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

即　<u>一角之正弦與餘割。餘弦與正割，及正切與餘切，互為反商。</u>

由公式(3)。已知上式中任一組之函數。卽可求此組中所含未知之他一函數。

例題 V

1. 試以第三章所示單位圓內表函數之綫值。證明公式(1), (2), (3)。

試證下列各式，

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{2.} & 1+\tan^2 A=\sec^2 A。\\ \textbf{3.} & 1+\cot^2 A=\csc^2 A。\end{array}\right\}\text{(算)公式}$$

(注意) 2, 3 兩題之方程式。學者須熟記之。

4. $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

5. $\sin A\sec A=\tan A$。

6. $\sin A\cot A=\cos A$。

7. $\cos A\csc A=\cot A$。

8. $\tan A\cdot\cos A=\sin A$。

9. $\sin A\sec A\cot A=1$。

10. $\cos A\csc A\tan A=1$。

11. $(1-\sin^2 A)\tan^2 A=\sin^2 A$。

12. $\sqrt{1-\cos^2 A}\cot A=\cos A$。

13. $(1+\tan^2 A)\sin^2 A=\tan^2 A$。

14. $(1-\sin^2 A)\csc^2 A=\cot^2 A$。

15. $\tan^2 A\cos^2 A+\cos^2 A=1$。

16. $(\sin^2 A-\cos^2 A)^2=1-4\sin^2 A\cos^2 A$。

17. $(1-\tan^2 A)^2=\sec^4 A-4\tan^2 A$。

18. $\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}=\sec A\csc A$。

19. $\sin^4 A-\cos^4 A=\sin^2 A-\cos^2 A$。

20. $\sec A-\cos A=\sin A\tan A$。

21. $\csc A-\sin A=\cos A\cot A$。

22. $\dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$。

第七章

公式 (1) (2) (3) 之應用

APPLICATION OF FORMULAS (1) (2) (3)

由公式(1),(2),(3)。已知一角之任一函數,即可求其餘各函數。故由任一函數之假定值。可以決定其餘各函數。

例 1. 已知$\sin A=\frac{2}{3}$。求其餘各函數。

由(1), $\cos A=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{5}$。

由(2), $\tan A=\frac{2}{3}\div\frac{1}{3}\sqrt{5}=\frac{2}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$

由(3), $\cot A=\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\sec A=\frac{3}{5}\sqrt{5}$, $\csc A=\frac{3}{2}$。

例 2. 已知 $\tan A=3$。求其餘各函數。

由 (2) $$\frac{\sin A}{\cos A}=3。$$

而由 (1) $$\sin^2 A+\cos^2 A=1。$$

以 $\sin A$ 及 $\cos A$ 爲未知量。而解此二式。則得

$$\sin A=\tfrac{3}{10}\sqrt{10},\quad \cos A=\tfrac{1}{10}\sqrt{10}。$$

乃由 (3) $$\cot A=\tfrac{1}{3},\quad \sec A=\sqrt{10},\quad \csc A=\tfrac{1}{3}\sqrt{10}。$$

例 3. 已知 $\sec A=m$。求其餘各函數。

由 (3) $$\cos A=\frac{1}{m}。$$

由 (1) $$\sin A=\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}=\sqrt{\frac{m^2-1}{m^2}}=\frac{1}{m}\sqrt{m^2-1}。$$

由 (2) $$\tan A=\sqrt{m^2-1}。$$

由 (3) $$\cot A=\frac{1}{m^2-1}\sqrt{m^2-1};\quad \csc A=\frac{m}{m^2-1}\sqrt{m^2-1}。$$

例題 VI.

已知下列諸值。求其餘各函數之值。

1. $\sin A=\frac{12}{13}$。
2. $\sin A=0.8$。
3. $\cos A=\frac{60}{61}$。
4. $\cos A=0.28$。
5. $\tan A=\frac{4}{3}$。
6. $\cot A=1$。
7. $\cot A=0.5$。
8. $\sec A=2$。

9. $\csc A=\sqrt{2}$。　　11. $\sin A=\frac{2m}{1+m^2}$。

10. $\sin A=m$。　　12. $\cos A=\frac{2mn}{m^2+n^2}$。

13. 設 $\tan 45^\circ=1$。求 45° 之他函數,

14. 設 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,求 30° 之他函數,

15. 設 $\csc 60^\circ=\frac{2}{3}\sqrt{3}$。求 60° 之他函數,

16. 設 $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$,求 15° 之他函數,

17. 設 $\cot 22^\circ 30'=\sqrt{2}+1$。求 $22^\circ 30'$ 之他函數。

18. 設 $\sin 0^\circ=0$。求 0° 之他函數。

19. 設 $\sin 90^\circ=1$,求 90° 之他函數。

20. 設 $\tan 90^\circ=\infty$。求 90° 之他函數。

試用下列各項,表示其餘各函數之值。

21. $\sin A$。　22. $\cos A$。　23. $\tan A$。　24. $\cot A$。

25. 設 $2\sin A=\cos A$。求 $\sin A$ 及 $\cos A$。

26. 設 $4\sin A=\tan A$。求 $\sin A$ 及 $\tan A$。

27. 若 $\sin A:\cos A=9:40$。求 $\sin A$ 及 $\cos A$。

28. 試化 $\tan^2 A+\cot^2 A-\sin^2 A-\cos^2 A$ 為僅含 $\cos A$ 之式。

29. 證明 $\sin A+\cos A=(1+\tan A)\cos A$。

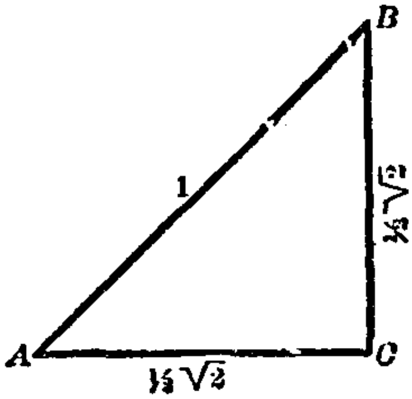
30. 證明 $\tan A+\cot A=\sec A\times\csc A$.

第八章

45° 之函數

FUNCTIONS OF 45°

8 圖



設 ACB (8圖) 爲等腰直角三角形。其斜邊 AB 之長等於 1。又 $AC=BC$。而 $\angle A=45°$。因 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=1$。故 $2\,\overline{AC}^2=1$。而 $AC=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$。

故由第二章之說，

$\sin 45°=\cos 45°=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$。

$\tan 45°=\cot 45°=1$。

$\sec 45°=\csc 45°=\sqrt{2}$。

第九章

30° 及 60° 之函數

FUNCTIONS OF 30° and 60°

設 ABC (9圖) 爲等邊三角形。其各邊之長等於 1。又設 CD 平分 C 角。則 CD 必爲 AB 之垂綫。平分 AB。

所以 $AD=\tfrac{1}{2}$。而 $CD=\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}=\sqrt{\tfrac{3}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$。

於 ADC 直角三角形內。$\angle ACD=30°$。而 $\angle CAD=60°$。

於是由第二章之說。

$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$。

$\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

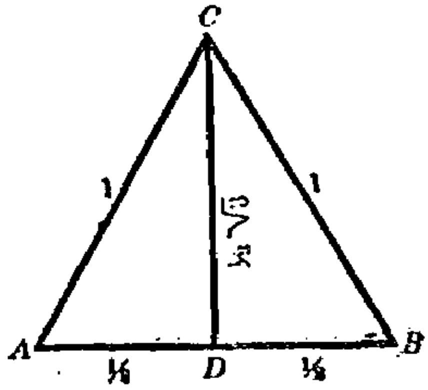
$\tan 30^\circ=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{\ }$

$\cot 30^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$。

$\sec 30^\circ=\csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$。

$\csc 30^\circ=\sec 60^\circ=2$。

9 圖



其30°, 45°, 60°之正弦及餘弦之結果，視下列之式記之自易，

角　度	30°	45°	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=0.5$
正　弦	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.70711$
餘　弦	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}=0.86603$

例題 VII.

求解下之各方程式。

1. $2\cos x=\sec x$。
2. $4\sin x=\csc x$。
3. $\tan x=2\sin x$。
4. $\sec x=\sqrt{2}\tan x$。
5. $\sin^2 x=3\cos^2 x$。
6. $2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{3}{2}$。
7. $3\tan^2 x-\sec^2 x=1$。
8. $\tan x+\cot x=2$。
9. $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$。
10. $\tan^2 x-\sec x=1$。

11. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$。

12. $\tan^2 x+\csc^2 x=3$。

13. $2\cos x+\sec x=3$。

14. $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$。

15. $2\sin x+\cot x=1+2\cos x$。

16. $\sin^2 x+\tan^2 x=3\cos^2 x$。

17. $\tan x+2\cot x=\frac{5}{2}\csc x$。

〔注意〕溫德華士(Wentworth)與希爾(Hill)合著之五位對數及三角表,解釋頗詳。且有用表之方法,學者於進習第貳編之先,須知其各表之用法。

第六表用以分解而無對數,此四位之表。含有相間 $1'$ 之角之自然函數。其小數點。除表內顯出外。應加入於所設數之前。

第貳編

直角三角形

THE RIGHT TRIANGLE

第十章

已知部分

THE GIVEN PARTS

欲解直角三角形。於直角外。須有兩項爲已知。而兩項中。至少必有一項爲邊。 其已知之兩項。可爲

I. 一銳角及斜邊。

II. 一銳角及對邊。

III. 一銳角及鄰邊。

IV. 斜邊及又一邊。

V. 直角之二邊。

第十一章

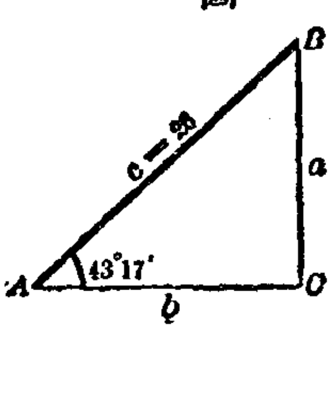
不用對數之解法

SOLUTION WITHOUT LOGARITHMS

以下各例。乃表不用對數時解直角三角形之各法者也。

例 I.

10 圖



已知 $A=43°\,17'$, $c=26$ 求 B, a, b

1. $B=90°-A=46°\,43'$

2. $\dfrac{a}{c}=\sin A$, $\therefore a=c\sin A$

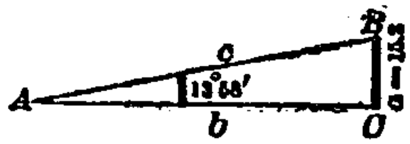
3. $\dfrac{b}{c}=\cos A$, $\therefore b=c\cos A$

$\sin A = 0.6856$	$\cos A = 0.7280$
$c = 26$	$c = 26$
41136	43680
13712	14560
$a = 17.8256$	$b = 18.9280$

例 II.

已知 $A = 13°58'$, $a = 15.2$。求 B, b, c。

11 圖



1. $B = 90° - A = 76° 2'$

2. $\dfrac{b}{a} = \cot A$, $\therefore b = a\cot A$

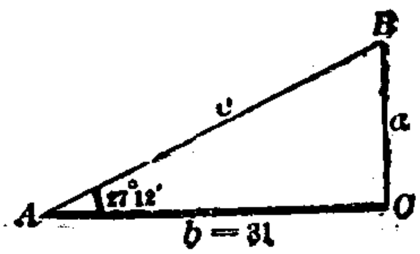
3. $\dfrac{a}{c} = \sin A$, $\therefore c = \dfrac{a}{\sin A}$

$\cot A = 4.0207$	$a = 15\ 2$, $\sin A = 0.2414$
$a = 15.2$	$0.2414)\ 15.200\ (62.9$
80414	$14\ 484$
201035	7160
40207	4828
$b = 61.11464$	$c = 62.9$　　2332

例 III.

已知 $A = 27°12'$, $b = 31$。求 B, a, c。

12 圖



1. $B = 90° - A = 62°48'$

2. $\dfrac{a}{b} = \tan A$, $\therefore a = b\tan A$

3. $\dfrac{b}{c} = \cos A$, $\therefore c = \dfrac{b}{\cos A}$

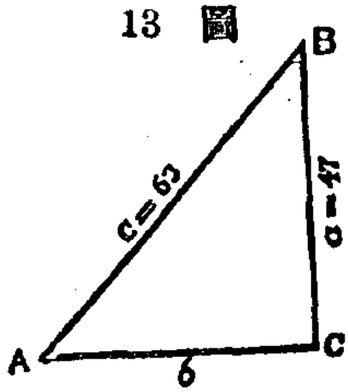
$\tan A = 0.5139$
$b = \quad 31$
5139
15417
$a = 15.9309$

$b = 31,\ \cos A = 0.8894.$

$0.8894)\,31.000\,(34.9$
$26\,682$
43180
35576
7604

$c = 34.9$

13 圖



例 IV.

已知 $a=47,\ c=63$。求 A, B, b。

1. $\sin A = \dfrac{a}{c}$
2. $B = 90° - A$
3. $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$。

$a=47,\ c=63.$

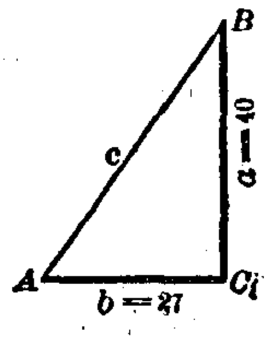
$63)\,47.0\,(0.7460$
441
290
252
380
378
2

$\sin A = 0.7460$
$\therefore\ A = 48°\ 15'$
$B = 41°\ 45'$

$c+a = 110$
$c-a = \quad 16$
660
110
$b^2 = 1760$
$b = \sqrt{1760}$
$= 41.95$

例 V.

14 圖



已知 $a=40,\ b=27$。求 A, B, c。

1. $\tan A = \dfrac{a}{b}$
2. $B = 90° - A$
3. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$a=40,\ b=27 \qquad a^2=1600$$

$$\tfrac{40}{27}=1.4815 \qquad b^2=\ \ 729$$

$$\tan A=1.4815 \qquad c^2=2329$$

$$\therefore A=55^\circ 59' \qquad \therefore c=\sqrt{2329}$$

$$B=34^\circ 1' \qquad =48.26$$

第十二章

解直角三角形之通法

GENERAL METHOD OF SOLVING THE RIGHT TRIANGLES

由以上五例。乃得一普通法，可以求直角三角形內任一未知量。如下。

於$A+B=90^\circ$式及三角函數之成立式中。擇一僅以所求量爲未知數之式而解之。有時亦須計算未知量之値。

(注意)　於例IV內。若其已知之兩邊(a與c)之値漸近相等。則A漸近90°。而其値不能於表內確實求得。蓋大角之正弦値微異故也。於此可從第三十一章(下第三編內)之公式先求B。卽

$$\tan\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$$

例 已知$a=49$, $c=50$。求A, B, b。

$$c-a=1,\ c+a=99$$
$$\frac{c-a}{c+a}=0.01010$$
$$\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}=0.1005$$
$$\tan\tfrac{1}{2}B=0.1005$$
$$\therefore\ \tfrac{1}{2}B=5^\circ 44'$$
$$B=11^\circ 28'$$
$$A=78^\circ 32'$$

$$c-a=1$$
$$c+a=99$$
$$c^2-a^2=99$$
$$b^2=99$$
$$b=\sqrt{99}$$
$$=9.95$$

例題 VIII.

1. 於例II內。既得b後。求c之別種解法。
2. 於例III內。既得a後。求c之別種解法。
3. 於例IV內。既得諸角。求b之別種解法。
4. 於例V內。既得諸角。求c之別種解法
5. 已知B及c。求A, a, b。
6. 已知B及b。求A, a, c。
7. 已知B及c。求A, b, c。
8. 已知b及c。求A, B, a。

有直角三角形已知下之各項。求餘三項。

9. $a=3$, $b=4$。
10. $a=7$, $c=13$。
11. $a=5.3$, $A=12^\circ 17'$。
12. $a=10.4$, $B=43^\circ 18'$。
13. $c=26$, $A=37^\circ 42'$。
14. $c=140$, $B=24^\circ 12'$。

15. $b=19,\ c=23$。

16. $b=98,\ c=135.2$。

17. $b=42.4,\ A=32°14'$。

18. $b=200,\ B=46°11'$。

19. $a=95,\ b=37$。

20. $a=6,\ c=103$。

21. $a=3.12,\ B=5°8'$。

22. $a=17,\ c=18$。

23. $c=57,\ A=38°29'$。

24. $a+c=18,\ b=12$。

25. $a+b=9,\ c=8$。

第十三章

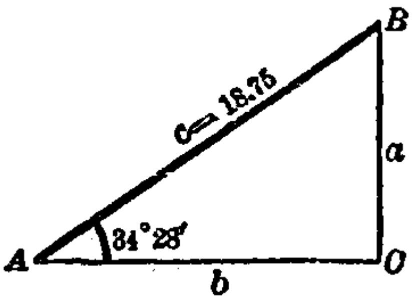
對數解法

SOLUTION BY LOGARITHMS

例 I.

已知 $A=34°28',\ c=18.75$。求 B,a,b。

15 圖



1. $B=90°-A=55°32'$。

2. $\dfrac{a}{c}=\sin A$, $\therefore a=c\sin A$。

3. $\dfrac{b}{c}=\cos A$, $\therefore b=c\cos A$。

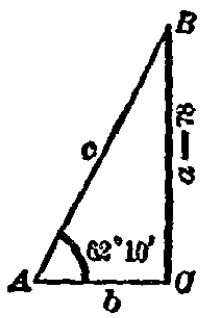
$$\left.\begin{aligned}\log a &= \log c+\log\sin A\\ \log c &= 1.27300\\ \log\sin A &= \underline{9.75276-10}\\ \log a &= 1.02576\\ a &= 10.611\end{aligned}\right\}\text{得 } a$$

$$\left.\begin{aligned}\log b &= \log c + \log\cos A\\ \log c &= 1.27300\\ \log\cos A &= \underline{9.91617-10}\\ \log b &= 1.18917\\ b &= 15.459\end{aligned}\right\}\text{得 } b$$

例 II.

已知$A=62°10'$, $a=78$。求B, b, c。

16 圖



1. $B=90°-A=27°50'$。

2. $\frac{b}{a}=\cot A$, $\therefore b=a\cot A$。

3. $\frac{a}{c}=\sin A$, $\therefore a=c\sin A$, 而 $c=\frac{a}{\sin A}$。

$$\left.\begin{aligned}\log b &= \log a + \log\cot A\\ \log a &= 1.89209\\ \log\cot A &= \underline{9.72262-10}\\ \log b &= 1.61471\\ b &= 41.182\end{aligned}\right\}\text{得 } b$$

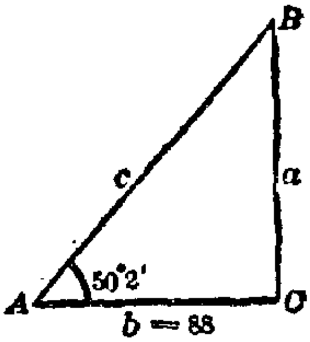
$$\left.\begin{aligned}\log c &= \log a + \operatorname{colog}\sin A\\ \log a &= 1.89209\\ \operatorname{colog}\sin A &= \underline{0.05340}\\ \log c &= 1.94549\\ c &= 88.204\end{aligned}\right\}\text{得 } c$$

〔增註〕 一數之餘對數，以colog之記法表之。

例 III.

已知$A=50°2'$, $b=88$。求B, a, c。

17 圖



1. $B=90°-A=39°58'$。

2. $\frac{a}{b}=\tan A$, $\therefore a=b\tan A$。

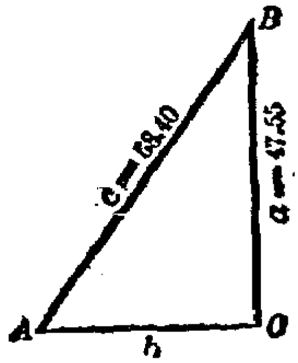
3. $\frac{b}{c}=\cos A$, $\therefore b=c\cos A$, 而$c=\frac{b}{\cos A}$。

$$\left.\begin{array}{r} \log a=\log b+\log\tan A \\ \log b=\ \ 1.94448 \\ \log\tan A=\underline{10.07670-10} \\ \log a=\ \ 2.02118 \\ a=105.00 \end{array}\right\}\text{得 } a$$

$$\left.\begin{array}{r} \log c=\log b+\operatorname{colog}\cos A \\ \log b=1.94448 \\ \operatorname{colog}\cos A=\underline{0.19223} \\ \log c=2.13671 \\ c=137.00 \end{array}\right\}\text{得 } c$$

例 IV.

18 圖



已知$c=58.40$, $a=47.55$。求A, B, b。

1. $\sin A=\frac{a}{c}$。

2. $B=90°-A$。

3. $\frac{b}{a}=\cot A$, $\therefore b=a\cot A$。

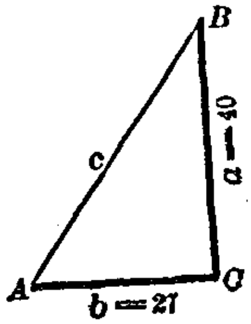
$$\left.\begin{aligned} \log\sin A &= \log a + \operatorname{colog} c \\ \log a &= 1.67715 \\ \operatorname{colog} c &= \underline{8.23359-10} \\ \log\sin A &= 9.91074-10 \\ A &= 54^\circ\ 31' \\ B &= 35^\circ\ 29' \end{aligned}\right\}\text{得 } A,\ B$$

$$\left.\begin{aligned} \log b &= \log a + \log\cot A \\ \log a &= 1.67715 \\ \log\cot A &= \underline{9.85300-10} \\ \log b &= 1.53015 \\ b &= 33.896 \end{aligned}\right\}\text{得 } b$$

例 V.

已知$a=40$, $b=27$。求A, B, c。

19 圖



1. $\tan A=\dfrac{a}{b}$。

2. $B=90^\circ-A$。

3 $\dfrac{a}{c}=\sin A$, $\therefore a=c\sin A$,而 $c=\dfrac{a}{\sin A}$。

$$\left.\begin{aligned} \log\tan A &= \log a + \operatorname{colog} b \\ \log a &= 1.60206 \\ \operatorname{colog} b &= \underline{8.56864-10} \\ \log\tan A &= 10.17070-10 \\ A &= 55^\circ\ 59' \\ B &= 34^\circ\ 1' \end{aligned}\right\}\text{得 } A,\ B$$

$$\left.\begin{aligned} \log c &= \log a + \operatorname{colog} \sin A \\ \log a &= 1.60206 \\ \operatorname{colog} \sin A &= \underline{0.08151} \\ \log c &= 1.68357 \\ c &= 48.258 \end{aligned}\right\}\text{得 } c$$

〔注意〕於例IV及例V內,其未知之一邊,可由下式求之。

(於例IV) $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$。

(於例V) $c=\sqrt{a^2+b^2}$。

此二式,直接用已知之兩邊,表示b及c之值,設三邊之值均爲單簡之數(如5, 12, 13),則b或c以此法求之甚易。惟此c之值不適用於對數,故以對數求b值,不若例IV所示b值求法之易。

第十四章

直角三角形之面積

AREA OF THE RIGHT TRIANGLE

三角形之面積,等於底高相乘之半,故設以a, b表示直角三角形之兩邊,而F爲面積,則$F=\frac{1}{2}ab$。

所以已知a與b,卽可以求其面積。

〔增註〕直角三角形恆以$rt\,\Delta$表之。

例 已知下各事。求面積。

例 I.(第十三章)

$A=34°28'$, $c=18.75$

先求 $\log a$ 及 $\log b$ (如第十三章)

$$\log F=\log a+\log b+\text{colog }2$$

$$\begin{aligned}\log a&=1.02576\\ \log b&=1.18917\\ \text{colog }2&=\underline{9.69897-10}\\ \log F&=1.91390\\ F&=82.016\end{aligned}$$

例 IV(第十三章)

$a=47.55$, $c=58.40$

先求 $\log a$ 及 $\log b$(如第十三章)

$$\log F=\log a+\log b+\text{colog }2$$

$$\begin{aligned}\log a&=1.67715\\ \log b&=1.53015\\ \text{colog }2&=\underline{9.69897-10}\\ \log F&=2.90627\\ F&=805.88\end{aligned}$$

例題 IX.

已知直角三角形之兩項。如下(1—30)。試以對數求各角之值。及最近之分爲止。

1. $a=6$, $c=12$。
2. $A=60°$, $b=4$。
3. $A=30°$, $a=3$。
4. $a=4$, $b=4$。
5. $a=2$, $c=2.82843$。
6. $c=627$, $A=23°30'$。
7. $c=2280$, $A=28°5'$。
8. $c=72.15$, $A=39°34'$。
9. $c=1$, $A=36°$。
10. $c=200$, $B=21°47'$。
11. $c=93.5$, $B=76°25'$。
12. $a=637$, $A=4°35'$。
13. $a=48.532$, $A=36°44'$。
14. $a=0.0008$, $A=86°$。
15. $b=50.937$, $B=43°48'$。
16. $b=2$, $B=3°38'$。
17. $a=992$, $B=76°19'$。
18. $a=73$, $B=68°52'$。

19. $a=2.189$, $B=45°25'$。
20. $b=4$, $A=37°56'$。
21. $c=8590$, $a=4476$。
22. $c=86.53$, $a=71.78$。
23. $c=9.35$, $a=8.49$。
24. $c=2194$, $b=1312.7$
25. $c=30.69$, $b=18.256$。
26. $a=38.313$, $b=19522$。
27. $a=1.2291$, $b=14.950$。
28. $a=415.38$, $b=62.080$。
29. $a=13.690$, $b=16.926$。
30. $c=91.92$, $a=2.19$。

有下之各項。試計算其未知量。幷求面積。

31. $a=5$, $b=6$。
32. $a=0.615$, $c=70$。
33. $b=\sqrt[3]{2}$, $c=\sqrt{3}$。
34. $a=7$, $A=18°14'$。
35. $b=12$, $A=29°8'$。
36. $c=68$, $A=69°54'$。
37. $c=27$, $B=44°4'$。
38. $a=47$, $B=48°49'$。
39. $b=9$, $B=34°44'$。
40. $c=8462$, $B=86°4'$。

41. 試以 c 及 A 表 F 之值。

42. 試以 a 及 A 表 F 之值。

43. 試以 b 及 A 表 F 之值。

44. 試以 a 及 c 表 F 之值。

已知下之各項。試解各三角形(45—48)。

45. $F=58$, $a=10$。
46. $F=18$, $b=5$。
47. $F=12$, $A=29°$。
48. $F=100$, $c=22$。

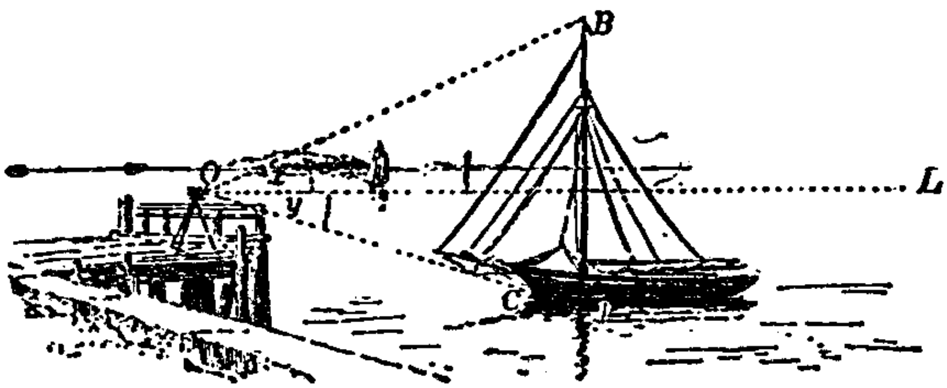
49. 設直角三角形之斜邊。等於其一邊之三倍。求各角。

50 設直角三角形之斜邊爲6。而其一角爲餘一角之二倍。求餘二邊。

51. 於rt. △內。已知c及$A=nB$。求a及b。

52. 於rt. △內，其斜邊與大邊之較。等於大小二邊之較。求各角。

20 圖



凡一目的物之仰角(angle of elevation)或俯角(angle of depression)者。卽自目至目的物之一綫，與其在同一直立面(vertical plane)內之水平綫(horizontal line)相交所成之角也，

如20圖 O爲目之所在，x爲B之仰角。y爲C之俯角。

〔增註〕 過一點及地球中心之直綫或平面。謂之此點之直立綫或直立面。

過一點而在此點與直立綫或直立面正交之直綫或平面。謂之此點之水平綫或水平面(又水平亦稱地平)。

53. 自尖塔底之水平距120呎之地。測其頂之仰角爲$60°30'$。求塔高。

54. 一石垂直出於水面上326呎。自其頂測得一艇之俯角爲$24°$。求此艇與石底之距。

55. 設一碑之高爲200呎，而其頂之仰角，測得爲$3°30'$。問自測點至碑之水平距。

56. 沿江岸測得AB距爲96呎，而A與隔岸一樹C相對，已知ABC角爲$21°14'$。求江寬。

57. 設一倚面。於水平距40呎之地升起1呎，則此面之仰角爲何。

58. 高120呎之塔影(水平影)長70呎。求太陽之高度。

〔增註〕天象之仰角，或稱爲高度，下遇單稱影者，均指水平影也。

59. 樹影長80呎，太陽之高度爲$50°$。求樹高。

60. 一船向東北行。其速率爲每小時10哩，求向東及向北之速率。

61. 於20呎高之窗前。有6呎寬之一床。今以梯置於床邊。而適與窗齊，求梯長。

62. 40呎長之梯，置於街之一邊。適與33呎高之窗齊。若置於彼邊而不動其梯根。適與彼邊21呎高之窗齊，求街寬。

63. 於山頂測平地上直路內表哩石之連續兩點,得俯角$5°$, $15°$。求山高。

64. 自平面內某點望礮台。測得仰角爲$30°$。再自某點近礮台100呎測之,得$45°$。求礮台之高。

65. 自地上某點。測教堂鐘樓及塔頂。各得仰角$40°$及$51°$。再自某點於水平綫內遠行300呎測之。得塔尖之仰角爲$33° 45'$。求鐘樓與塔尖之距。

66. 自一點A。測一不可到之礮台頂C。得C之仰角爲$12°$。再自正交AC之AB綫內距A爲219呎之一點B測之。得ABC角爲$61° 45'$。求此礮台之高。

第十五章

等腰三角形

THE ISOSCELES TRIANGLE

凡等腰三角形。由其自頂至底之垂直綫。可分爲兩個相等直角三角形。

故任何兩部分。可以決定其兩個直角三角形之一者。卽可以決定此等腰三角形。

令CD爲高之CAB等腰三角形(21圖)。如下記之。

a=等邊之一。

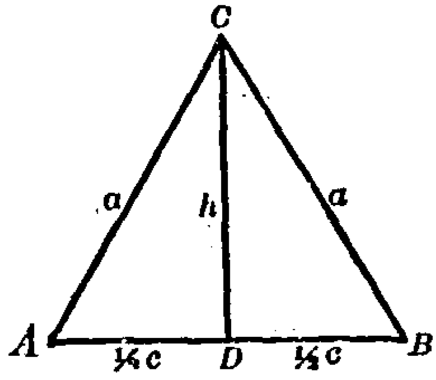
c=底,

h=高。

A=等角之一。

C=頂角。

21 圖



例　已知a及c。求A, C, h。

1. $\cos A=\frac{\frac{1}{2}c}{a}=\frac{c}{2a}$

2. $C+2A=180°$ $\therefore$ $C=180°-2A=2(90°-A)$

3. h可由諸式中之任一式求之,

$$h^2+\frac{c^2}{4}=a^2,$$

於是　$$h=\sqrt{(a+\tfrac{1}{2}c)(a-\tfrac{1}{2}c)}。$$

又　$\frac{h}{a}=\sin A$,而$\frac{h}{\frac{1}{2}c}=\tan A$,

於是　$h=a\sin A$,而$h=\frac{1}{2}c\tan A$。

設已知c及h。則面積可由公式$F=\frac{1}{2}ch$求之,

例題 X.

試解下列之等腰三角形。其角之值,核至最近之秒。

1. 已知a及A。求C, c, h。
2. 已知a及C。求A, c, h。
3. 已知c及A。求C, a, h。
4. 已知c及C。求A, a, h。
5. 已知h及A。求C, a, c。
6. 已知h及C。求A, a, c。
7. 已知a及h。求A, C, c。
8. 已知c及h。求A, C, a

9. 已知$a=14.3$, $c=11$。求A, C, h。

10. 已知$a=0.295$, $A=68°10'$。求c, h, F。

11. 已知$c=2.352$, $C=69°49'$。求a, h, F。

12. 已知$h=7.4847$, $A=76°14'$。求a, c, F。

13. 已知$a=6.71$, $h=6.6$。求A, C, c。

14. 已知$c=9$, $h=20$。求A, C, a。

15. 已知$c=147$, $F=2572.5$。求A, C, a, h。

16. 已知$h=16.8$, $F=43.68$。求A, C, a, c。

17. 試以a及c表F值。

18. 試以a及C表F值。

19. 試以a及A表F值。

20. 試以h及C表F值。

21. 有40×80呎之穀倉,其屋頂之傾斜爲45°。求桷長及屋頂之全面積。

22. 問於單位圓內45°圓心角所對之弦。長爲若干。

23. 設圓半徑爲30。弦長44。求此弦所對之圓心角。

24. 設弦長爲5。而其所對之圓心角爲133°。求圓半徑。

25. 設一弦等於其圓半徑之$\frac{3}{5}$。求此弦所對之圓心角。

26. 設圓半徑爲12。扇形(sector)角爲30°。求此扇形之面積。

第十六章

正多角形

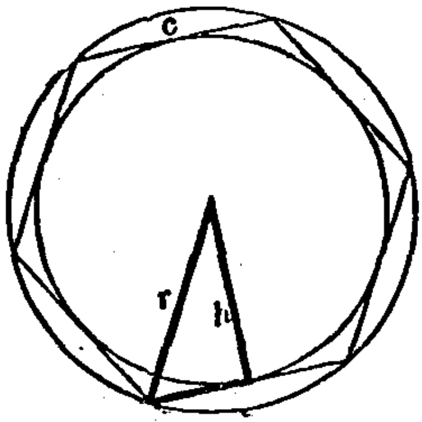
THE REGULAR POLYGON

自正多角形(22圖)之中心至各頂點所作之綫。爲其外接圓之半徑。自心至各邊中點所作之綫(或云自心達各邊之垂綫)。爲其內切圓之半徑。此諸綫。分多角形爲若干相等直角三角形。故凡正多角形。恒由某直角三角形而決定。其三角形之三邊。即外接及內切兩圓之半徑。及多角形一邊之半也。

設多角形之邊數爲n。則此直角三角形在多角形中心之一角。等於$\frac{1}{2}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$或$\frac{180^\circ}{n}$。而此三角形。若已知多角形一之邊或兩半徑之一。即可解之。

令

22 圖



n=邊數，

c=一邊之長，

r=外接圓半徑，

h=內切圓半徑，

p=周，

F=面積。

則由幾何學。$F=\frac{1}{2}hp$。

例題 XI.

有正多角形。已知之兩項如下。試求其餘各項。(1–6)

1. $n=10, c=1$。
2. $n=18, r=1$。
3. $n=20, r=20$。
4. $n=8, h=1$。
5. $n=11, F=20$。
6. $n=7, F=7$。

7. 求單位圓之內接正十角形之一邊。

8. 求單位圓之外切正十角形之一邊。

9. 設內接正六角形之邊為1。求內接正十二角形之邊。

10. 已知n及c。又設b為內接 $2n$ 邊數之正多角形之邊。試以n及c表b之值。

11. 設正八角形及正九角形之周各為 16, 求兩面積之較。

12. 設正五角形及正六角形之面積各為 12。求兩周之較。

13. 截去以1為邊之正方形之各角。而成一正八角形。求此形之面積。

14. 求對角綫各等於12之正五角形之面積。

15. 設圓內接正五角形之面積為331.8。問圓內接之正十一角形。面積若干。

16. 今有內切於正三角形之圓。若三角形之周爲20。求圓之面積。

17. 設圓內切正十六角形之面積爲100。求圓內切正十五角形之面積。

18. 某圓之周爲1。求外切正十二角形之周。

19. 正二十五角形之面積爲40。求其內切及外接兩圓間所含環形之面積。

第 叁 編

測角法

GONIOMETRY

第 十 七 章

測 角 法 之 定 義

DEFINITION OF GONIOMETRY

欲求斜角三角形之解法。當擴張大小各角三角函數之定義。而得各角函數之重要關係。

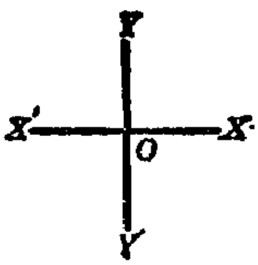
三角法之一分支。專論三角函數及其關係者。謂之測角法。

第 十 九 章

正 量 及 負 量

POSITIVE AND NEGATIVE QUANTITIES

23 圖



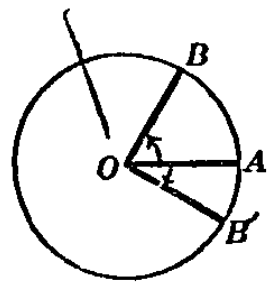
爲測度反對方向(opposite directions)之利便計。故名一向爲正 (positive)。一向爲負 (negative)。

設 OX(23圖)爲正。則 OX' 爲負。設 OY 爲正。則 OY' 爲負。

凡此區別。亦可施之於角。設其角之旋綫。與計時針之方向相反。則此角爲正。反之。若與計時針之方向相同。則此角爲負。

正角之弧爲正。負角之弧爲負。

24 圖



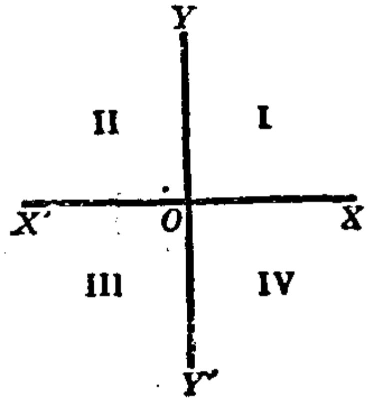
如自O由OA旋轉至OB所成之AOB角(24圖)爲正。則AB弧爲正。又自O由OA旋轉至OB'所成之AOB'角爲負。則AB'弧爲負。

第十九章

平面內一點之坐標

CO-ORDINATES OF A POINT IN A PLANE

25 圖



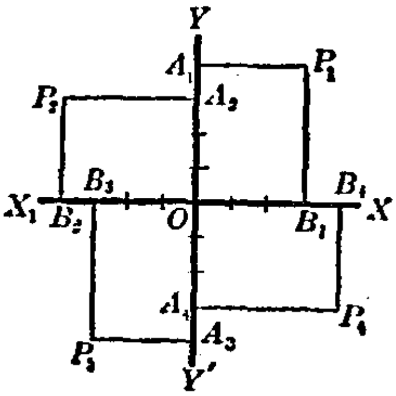
設XX'(25圖)爲一水平綫。而YY'正交XX'於O。則由XX'及YY'兩綫所決定之平面。分爲四個象限(quadrant)。記之爲 I, II, III, IV。

平面內之任一點。乃由其垂直綫XX'或YY'之距離(distance)及方向(direction)而決定。一點與YY'之距離。於XX'上測得者。謂之一點之橫坐標(卽橫綫 abscissa)。其與XX'之距離。於YY'上測得者。謂之一點之縱坐標(卽縱綫 ordinate)。

一點之橫坐標與縱坐標，謂之一點之坐標(co-ordinates)。其 XX' 及 YY' 綫。謂之坐標之軸(axes of co-ordinates)。XX' 謂之橫坐標之軸(axis of abscissas)。或 X 軸(axis of X)。YY' 謂之縱坐標之軸(axis of ordinates)。或 Y 軸(axis of Y)。而其一點 O 謂之原點(origin)。

於26圖內。P_1, P_2, P_3, P_4 之坐標如下。

26 圖



P_1 之橫坐標爲 OB_1,
　　縱坐標爲 OA_1;
P_2 之橫坐標爲 OB_2,
　　縱坐標爲 OA_2;
P_3 之橫坐標爲 OB_3,
　　縱坐標爲 OA_3;
P_4 之橫坐標爲 OB_4,
　　縱坐標爲 OA_4。

橫坐標在 YY' 之 $\left\{\begin{array}{l}\text{右者爲正。}\\ \text{左者爲負。}\end{array}\right.$

縱坐標在 XX' 之 $\left\{\begin{array}{l}\text{上者爲正。}\\ \text{下者爲負。}\end{array}\right.$

故

於象限I。$\left.\begin{array}{l}\text{橫}\\ \text{縱}\end{array}\right\}$ 坐標 $\left.\right\}$ =正。　　於象限III。$\left.\begin{array}{l}\text{橫}\\ \text{縱}\end{array}\right\}$ 坐標 $\left.\right\}$ =負。

於象限II。$\begin{array}{l}\text{橫}\\ \text{縱}\end{array}$ 坐標 $\left\{\begin{array}{l}\text{=負。}\\ \text{=正。}\end{array}\right.$　　於象限IV。$\begin{array}{l}\text{橫}\\ \text{縱}\end{array}$ 坐標 $\left\{\begin{array}{l}\text{=正。}\\ \text{=負。}\end{array}\right.$

第二十章

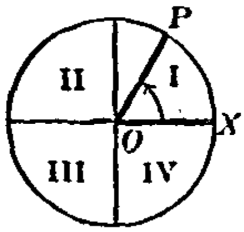
任何角

ANGLES OF ANY MAGNITUDE

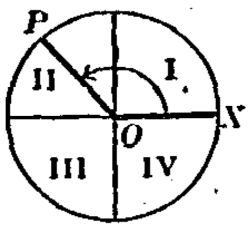
設一線 OP (27－30 圖) 自 O 由最始位置 OX 逆計時針而旋轉。如弧矢之所示，則此線旋轉一周時，必與 OX 成 0° 至 360° 間之各角。

某角，之最終邊在某象限者。卽爲某象限之角。

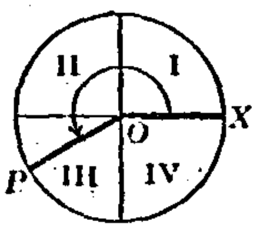
27 圖



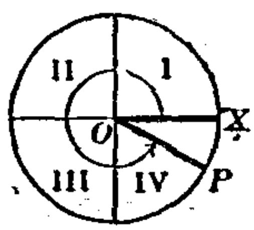
28 圖



29 圖

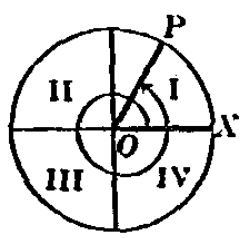


30 圖

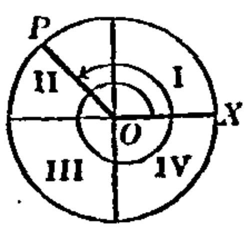


0° 及 90° 間之角，爲象限 I 之角。
90° 及 180° 間之角，爲象限 II 之角。
180° 及 270° 間之角，爲象限 III 之角。
270° 及 360° 間之角，爲象限 IV 之角。

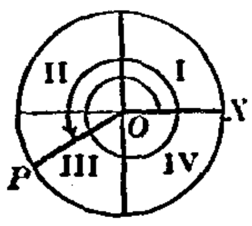
31 圖



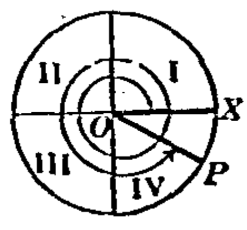
32 圖



33 圖

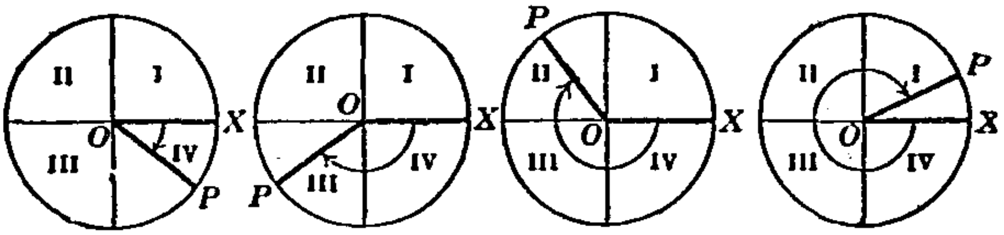


34 圖



設旋線再於第二次旋轉一周。(31－34 圖) 則成 360° 及 720° 間之各角。餘類推。

35 圖　36 圖　37 圖　38 圖



設 OP 線由 OX 順計時針而旋轉(35—38 圖)。則成負角。於是任何角之或正或負,可以想見矣。

第二十一章

任何角之函數

FUNCTIONS OF ANY ANGLE

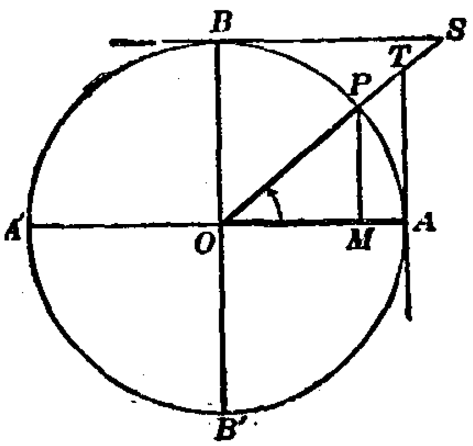
39 圖至 42 圖。乃表單位圓內依次於各象限內所繪 AOP 角之各函數也。其圓之切線常經 A, B 兩點。

設由 OA 與旋轉半徑 OP 所成之 AOP 角。記之爲 x。則於各象限內。

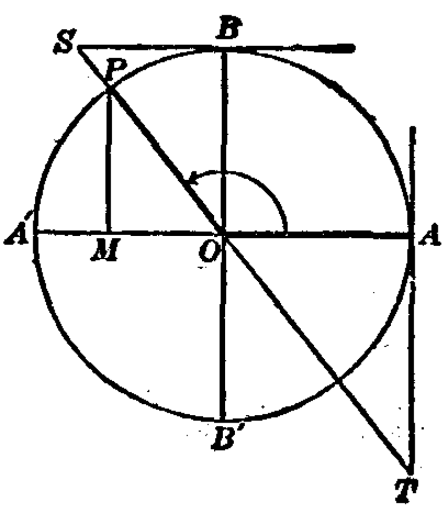
$\sin x = MP$,　$\tan x = AT$,　$\sec x = OT$,

$\cos x = OM$,　$\cot x = BS$,　$\csc x = OS$。

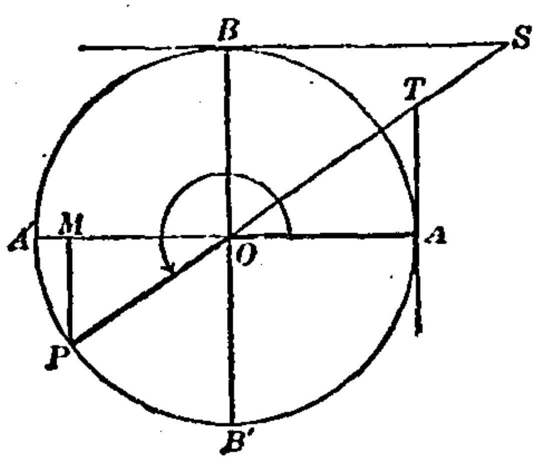
39 圖



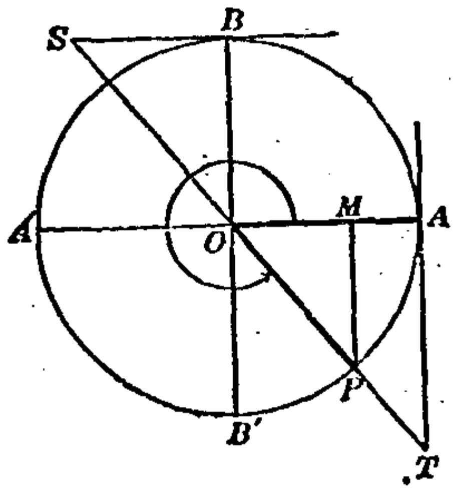
40 圖



41 圖



42 圖



設 x 角之終線，經頂點擴張至無限長，又設單位圓之圓周，交終線於 P。而交橫坐標之軸於 A 及縱坐標之軸於 B。則

$\sin x = P$ 之縱坐標。

$\cos x = P$ 之橫坐標。

$\tan x =$ 與終線相交之 A 點上之切線。

$\cot x =$ 與終線相交之 B 點上之切線。

$\sec x =$ 頂點及餘切間所含之終線。

$\csc x =$ 頂點及正切間所含之終線。

自橫坐標之軸擴張之正弦及正切，向上者爲正，向下者爲負。

自縱坐標之軸擴張之餘弦及餘切。向右者爲正。向左者爲負。

正割及餘割之符號。乃由餘弦及正弦之符號決定。故自心擴張之正割及餘割。與終綫同向者爲正。異向者爲負。於是得

象　限	I	II	III	IV
sin 正弦及 csc 餘割	+	+	−	−
cos 餘弦及 sec 正割	+	−	−	+
tan 正切及 cot 餘切	+	−	+	−

於象限I　內。各函數均爲正，

於象限II　內，僅正弦及餘割爲正，

於象限III 內。僅正切及餘切爲正，

於象限IV 內。僅餘弦及正割爲正，

於任何象限內。知其正弦及餘弦之符號。必能知其餘各函數之符號。

設正弦及餘弦之符號相同。則正切及餘切爲正。相異則爲負。又正弦之符號與餘割同。餘弦之符號與正割同。

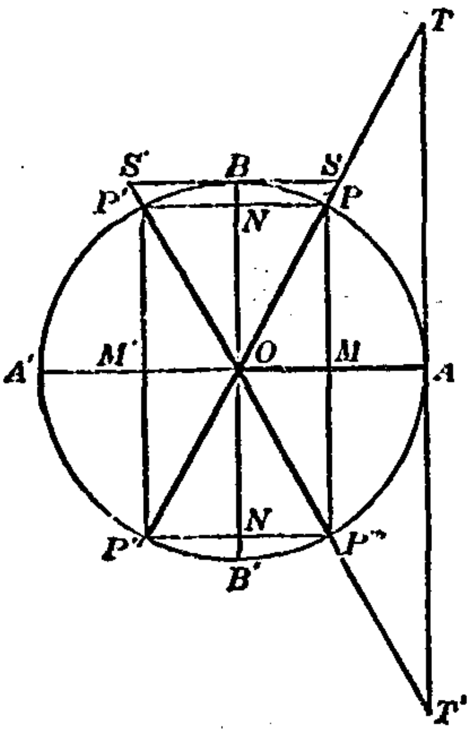
第二十二章

變角之函數

FUNCTIONS OF A VARIABLE ANGLE

設AOP角(43圖)自0°至360°。連續增大，則其函數值之變化如下。

43 圖



1. **正弦** 於象限I。其正弦MP自0增至1。於II仍爲正，惟自1減至0。於III爲負，而於絕對值自0增至1，於IV爲負。而於絕對值自1減至0。

2. **餘弦** 於象限I。其餘弦OM自1減至0。於II變爲負。而於絕對值自0增至1。於III爲負，而於絕對值自1減至0。於IV爲正。自0增至1。

3. **正切** 於象限I。其正切AT自0增至∞。於II變爲負。而於絕對值自∞減至0。於III爲正。自0增至∞。於IV爲負。而於絕對值自∞減至0。

4. **餘切** 於象限I。其餘切BS自∞減至0。於II爲負。而於絕對值自0增至∞。於III及IV。其符號與變化。與I及II兩兩相同。

5. **正割** 於象限I。其正割OT自1增至∞。於II爲負。而於絕對值自∞減至1。於III爲負。而於絕對值自1增至∞。於IV爲正。自∞減至1。

6 **餘割** 於象限I。其餘割OS自∞減至1。於II爲正。自1增至∞。於III爲負。而於絕對值自∞減至1。於IV爲負。而於絕對值自1增至∞。

各函數之限值如下。

	0°	90°	180°	270°	360°
正弦	±0	+1	±0	−1	±0
餘弦	+1	±0	−1	±0	+1
正切	±0	±∞	±0	±∞	±0
餘切	±∞	±0	±∞	±0	±∞
正割	+1	±∞	−1	±∞	+1
餘割	±∞	+1	±∞	−1	±∞

其各值之變化。正弦及餘弦。乃自+1。至−1。正切及餘切。自+∞至−∞。正割及餘割。自+∞至+1及自−1至−∞。

於上表內。其重疊符號±置於0及∞之前。由前之推究。可知各函數恆於0及∞變其符號。而符號+或−置於0或∞之前者。蓋僅表各值所由來之方向也。

第二十三章

大於 $360°$ 之角之函數

FUNCTIONS OF ANGLES LARGER THAN 360°

$360°+x$之各函數。其符號及絕對值。與x之各函數相同。因其旋線之方向亦互相同故也。設n爲正整數。

$(n\times 360+x)$之各函數。與x之各函數同。

例如$2200°(6\times 360°+40°)$之函數。等於$40°$之函數。

第二十四章

公式之擴張

EXTENSION OF FORMULAS

第六章成立之公式(1)(2)(3)。乃對於諸銳角而認爲眞確者也。如於各象限內。

$$\overline{MP}^2+\overline{OM}^2=\overline{OP}^2。$$

故　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$。　(1)

由各象限內相似三角形OMP, OAT, OBS則得比例式，如下。

$AT : OA=MP : OM$,

或$\tan x:1=\sin x:\cos x$;

$MP : OP=OB : OS$,

或$\sin x:1=1:\csc x$;

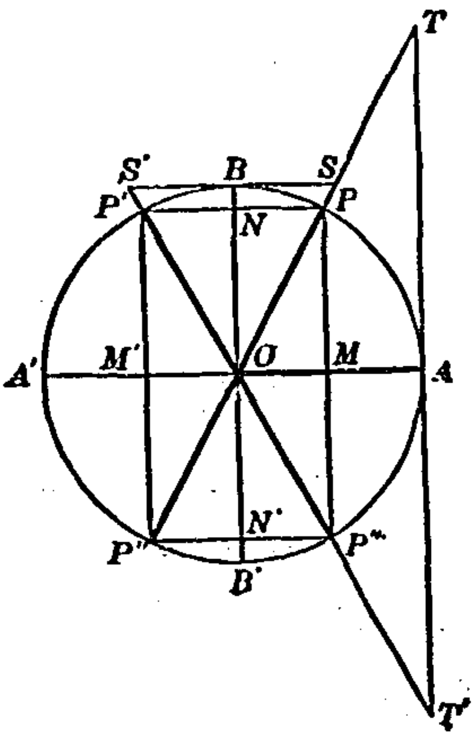
$OM : OP=OA : OT$,

或$\cos x:1=1:\sec x$;

$AT : OA=OB : BS$,

或$\tan x:1=1:\cot x$。

44 圖



即 $$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}。\tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin x\times\csc x=1\\ \cos x\times\sec x=1\\ \tan x\times\cot x=1\end{array}\right\}。\tag{3}$$

由公式〔1〕-〔3〕。已知一函數之值。即可求其餘五個函數之絕對值。及反商函數之符號。惟欲決定餘四個函數前之符號。則不可不知問題內角之屬何象限。或四個中任一函數之符號。因由第二十一章。可見兩個非反商之任何函數之符號。可以決定角所屬之象限也。

例　已知 $\sin x=+\frac{4}{5}$ 而 $\tan x$ 爲負。求餘各函數之值。

因 $\sin x$ 爲正。則 x 角必在象限 I 或 II 內。惟 $\tan x$ 爲負。則象限 I 爲不合。

由〔1〕。　　$\cos x=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\frac{3}{5}$。

因其角在象限 II 內。當取負號。

$$\cos x=-\frac{3}{5}。$$

由〔2〕及〔3〕，

$$\tan x=-\frac{4}{3},\quad \cot x=-\frac{3}{4},\quad \sec x=-\frac{5}{3},\quad \csc x=\frac{5}{4}。$$

例題 XII.

1. 試作象限 II 內一角之各函數。且定其符號。
2. 試作象限 III 內一角之各函數。且定其符號。
3. 試作象限 IV 內一角之各函數。且定其符號。

4. 下列各角之函數之符號爲何。

340°, 239°, 145°, 400°, 700°, 1200°, 3800°。

5. 小於360°而其正弦等於$\frac{4}{5}$者。問有若干角，並問在何象限內。

6. 設$\cos x=+\frac{2}{3}$。問此x角小於720°。能有若干值。並問在何象限內。

7. 有下之各件。問小於180°之x角，各有若干值。

$\sin x=\frac{5}{7}$, $\cos x=\frac{1}{5}$, $\cos x=-\frac{4}{5}$ $\tan x=\frac{2}{3}$, $\cot x=-7$。

8. 有下之各件。問各角x在何界內。

$\cos x=-\frac{2}{3}$, $\cot x=4$, $\sec x=80$, $\csc x=-3$，(設$x<360°$)

9. 設一角之正弦及餘弦均爲負，或餘弦及正切均爲負。或餘切爲正及正弦爲負。問各角在何象限內。

10. 於0°及3600°之間。其正弦有絕對值$\frac{2}{3}$，問有若干角，又此諸正弦中。若干爲正。若干爲負，

11. 設由$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$。求$\cos x$如何而取正號，如何而取負號。

12. 設$\cos x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$。而$x$在象限II內。求餘各函數。

13. 設$\tan x=\sqrt{3}$。而x在象限III內。求餘各函數。

14. 已知$\sec x=+7$。及$\tan x$爲負，求x之餘各函數。

15. 已知$\cot x=-3$。求餘各函數可有之值。

16. 三角形一角之何函數可爲負，又如何而此諸函數爲負。

17. $\cot 360°$。可或等於$+\infty$。或等於$-\infty$。何故。

18. 試以公式(1)−(3)求餘各函數。已知

(i) $\tan 90^\circ=\infty$。　(iii) $\cot 270^\circ=0$。

(ii) $\cos 180^\circ=-1$。　(iv) $\csc 360^\circ=-\infty$。

19. 求 $\sin 450^\circ$, $\tan 540^\circ$, $\cos 630^\circ$, $\cot 720^\circ$, $\sin 810^\circ$, $\csc 900^\circ$ 之各值。

計算下式之各值。

20. $a\sin 0^\circ+b\cos 90^\circ-c\tan 180^\circ$。

21. $a\cos 90^\circ-b\tan 180^\circ+c\cot 90^\circ$。

22. $a\sin 90^\circ-b\cos 360^\circ+(a-b)\cos 180^\circ$。

23. $(a^2-b^2)\cos 360^\circ-4ab\sin 270^\circ$。

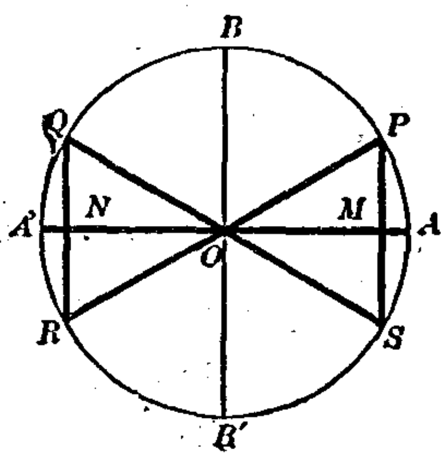
第二十五章

化各函數爲第一象限內之函數

REDUCTIONS OF FUNCTIONS TO THE FIRST QUADRANT

於單位圓內(45圖)。作兩直徑 PR 及 QS。與水平徑 AA', 作相等之倚度。或令 AOP, $A'OQ$, $A'OR$, AOS 諸角皆相等。又自 P,Q,R,S 點作線正交 AA'。則於公共頂尖 O, 成四個直角三角形。且皆相等。因其斜邊(圓半徑)及 O 點間之一銳角相等故也。故諸垂線 PM, QN, RN, SM 均相等。而各爲 AOP, AOQ, AOR, AOS 諸角之正弦。

45 圖

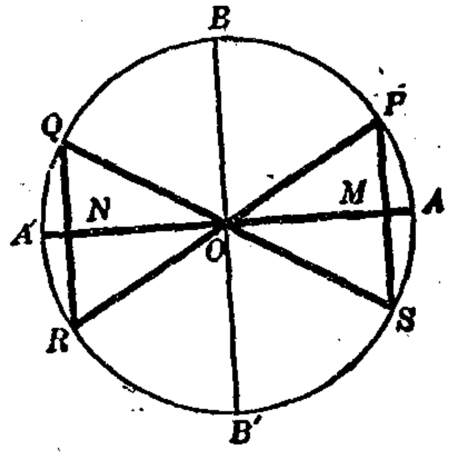


故以絕對值計之。

$$\sin AOP=\sin AOQ=\sin AOR=\sin AOS。$$

由第二十章。知凡此諸角之餘弦。於絕對值均相等。其正切,餘切,正割,餘割*同。

46 圖



所以於任一銳角。必有一角在較高之象限內。其各函數以絕對值計之。與此銳角之各函數相等。

令 $\angle AOP=x$, $\angle POB=y$。則 $x+y=90°$。而 x 之各函數,等於 y 之餘函數,又

$\angle AOQ$(象限 II 內)$=180°-x=90°+y$。

$\angle AOR$(象限 III 內)$=180°+x=270°-y$。

$\angle AOS$(象限 IV 內)$=360°-x=270°+y$。

於是以適宜符號置於其前,得

象限 II 內之角

$\sin(180°-x)=\sin x$。	$\sin(90°+y)=\cos y$。
$\cos(180°-x)=-\cos x$。	$\cos(90°+y)=-\sin y$。
$\tan(180°-x)=-\tan x$。	$\tan(90°+y)=-\cot y$。
$\cot(180°-x)=-\cot x$。	$\cot(90°+y)=-\tan y$。

*將來正割,餘割,正矢,餘矢可略。正割及餘割。可由公式(3)求得。正矢及餘矢。可由第七第八章求得。然於計算上。皆不常用也。

象限III內之角

$\sin(180°+x)=-\sin x$　　$\sin(270°-y)=-\cos y$。

$\cos(180°+x)=-\cos x$　　$\cos(270°-y)=-\sin y$。

$\tan(180°+x)=\tan x$　　$\tan(270°-y)=\cot y$。

$\cot(180°+x)=\cot x$　　$\cot(270°-y)=\tan y$。

象限 IV 內之角

$\sin(360°-x)=-\sin x$　　$\sin(270°+y)=-\cos y$。

$\cos(360°-x)=\cos x$　　$\cos(270°+y)=\sin y$。

$\tan(360°-x)=-\tan x$　　$\tan(270°+y)=-\cot y$。

$\cot(360°-x)=-\cot x$　　$\cot(270°+y)=-\tan y$。

〔附註〕 正切及餘切。可由公式(2)或直接由圖求之。

由此諸公式。可得次之各定理。

1. 凡諸角之各函數。可以化成第一象限內諸角之各函數。有化成45°以內之角之各函數。(參看第五章)。

2. 一銳角與180°或360°相加或相減後之各函數。以絕對值計之。等於銳角之各同名函數。一銳角與90°或270°相加或相減後之各函數。以絕對值計之。等於銳角之各餘函數。

3. 已知正弦或餘割之值。可以決定一銳一鈍之兩補角。已知任何他一函數值。僅可決定一角。若值為正。則角為銳。若值為負。則角為鈍。(參看$(180°-x)$之各函數)。

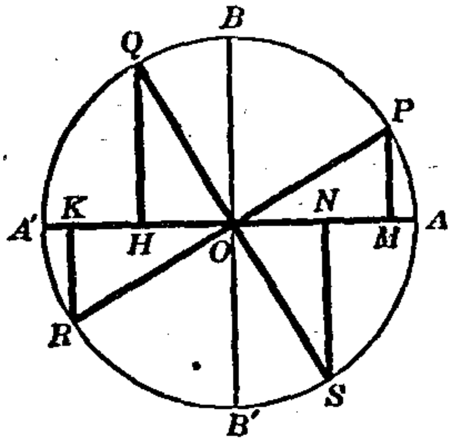
第二十六章

相差爲 90° 之兩角之函數

FUNCTIONS OF ANGLES DIFFERING BY 90°

凡相差爲 90° 之兩角。必在相鄰之象限內。其普通式爲 x 及 $90°+x$。其各函數之關係。已於第二十五章求得者。乃僅就 x 爲銳角而言。此章蓋示此種關係。實可用於 x 之一切諸值者也。

47 圖



於單位圓內 (47 圖)。作兩直徑 PR 及 QS。互相垂直。又作 PM, QH, RK 及 SN。垂直於 AA'。則 OMP, QHO, OKR 及 SNO 四個直角三角均相等。因其斜邊及 POM, OQH, ROK, OSN 四角相等故也。

故　$OM=QH=OK=NS$,

而　$PM=OH=RK=ON$。

於是以代數的符號記之。

$$\sin AOQ = \cos AOP, \qquad \sin AOS = \cos AOR,$$

$$\cos AOQ = -\sin AOP, \qquad \cos AOS = -\sin AOR,$$

$$\sin AOR = \cos AOQ, \qquad \sin(360°+AOP) = \cos AOS.$$

$$\cos AOR = -\sin AOQ, \qquad \cos(360°+AOP) = -\sin AOS。$$

於此諸式內設 x 表示右邊之角。則左邊之角爲 $90°+x$。

故設x爲任一象限內之角。則得,

$$\sin(90^\circ+x)=\cos x,\qquad \tan(90^\circ+x)=-\cot x。$$

$$\cos(90^\circ+x)=-\sin x,\qquad \cot(90^\circ+x)=-\tan x。$$

同法可示第二十五章之諸公式,不論其爲x及y之何值,均爲眞確。

故無論何例。所求角*之函數之代數的符號,與X及Y共爲銳角時相同。

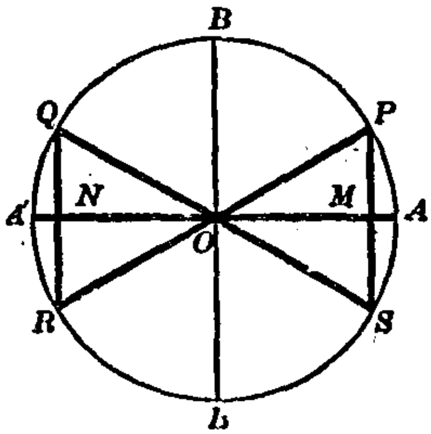
第二十七章

負角之函數

FUNCTIONS OF A NEGATIVE ANGLE

設x角由半徑自OA至OS旋轉而成。則其符號當爲負。而其旋轉之一邊,將與$360^\circ-x$角之位置符合。故$-x$角之各函數。與$360^\circ-x$之角之各函數同。或按二十五章言之。

48 圖



$$\sin(-x)=-\sin x,$$
$$\cos(-x)=\cos x,$$
$$\tan(-x)=-\tan x,$$
$$\cot(-x)=-\cot x。$$

* 所求角原文爲resulting angle。直譯之。當爲結果角。惟此三字。於數學書中。實所罕見。故不用。

例題 XIII.

1. 試以小於45°之一銳角之函數表示$\sin 250^\circ$。

〔解〕 $\sin 250^\circ=\sin(270^\circ-20^\circ)=-\cos 20^\circ$。

試以小於45°之角之函數,表下之函數。

2. $\sin 172^\circ$。	8. $\sin 204^\circ$。	14. $\sin 163^\circ 49'$。
3. $\cos 100^\circ$。	9. $\cos 359^\circ$。	15. $\cos 195^\circ 33'$。
4. $\tan 125^\circ$。	10 $\tan 300^\circ$。	16. $\tan 269^\circ 15'$。
5. $\cot 91^\circ$。	11. $\cot 264^\circ$。	17. $\cot 139^\circ 17'$。
6. $\sec 110^\circ$。	12. $\sec 244^\circ$。	18. $\sec 299^\circ 45'$。
7. $\csc 157^\circ$。	13. $\csc 271^\circ$。	19. $\csc 92^\circ 25'$。

試以小於45°之正角之函數。表下列負角之各函數。

20. -75°。	22. -200°。	24. $-52^\circ 37'$。
21. -127°。	23. -345°。	25. $-196^\circ 54'$。

26. 求120°之各函數。

〔授意〕 $120^\circ=180^\circ-60^\circ$ 或 $90^\circ+30^\circ$。再用第二十五章之法求之。

求下列諸角之各函數。

27. 135°。	29. 210°。	31. 240°。	33. -30°。
28. 150°。	30. 225°。	32. 300°。	34. -225°。

35. 已知$\sin x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$。及$\cos x$爲負。求$x$之其餘各函數。及$x$之值。

36. 已知$\cot x=-\sqrt{3}$。及x在象限II內。求x之其餘各函數及x之值。

37. 求3540°之各函數。

38. 何角之正弦等於$-\frac{1}{2}$。又問何角之正切等於$-\sqrt{3}$。(二角均須小於360°。)

39. 問於27—34題中。何角之餘弦爲$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$。又何角之餘切爲$-\sqrt{3}$。

40. 問x於0°及720°間爲何值，方能合於$\sin x=+\frac{1}{2}$。

41. 已知$\sin 12^\circ$, $\cos 26^\circ$, $\tan 45^\circ$, $\cos 72^\circ$, $\sin 191^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 244^\circ$, $\cot 357^\circ$外。求0°與360°間與此相當函數(符號含內)同値之他角。

42. 已知$\tan 238^\circ=1.6$。求$\sin 122^\circ$。

43. 已知$\cos 333^\circ=0.89$。求$\tan 117^\circ$。

試將下列各式簡單之(44—50)。

44. $a\cos(90^\circ-x)+b\cos(90^\circ+x)$。

45. $m\cos(90^\circ-x)\sin(90^\circ-x)$。

46. $(a-b)\tan(90^\circ-x)+(a+b)\cot(90^\circ+x)$。

47. $a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-x)$。

48. $\sin(90^\circ+x)\sin(180^\circ+x)+\cos(90^\circ+x)\cos(180^\circ-x)$。

49. $\cos(180^\circ+x)\cos(270^\circ-y)-\sin(180^\circ+x)\sin(270^\circ-y)$。

50. $\tan x+\tan(-y)-\tan(180^\circ-y)$。

51. 問x爲何值。則$\sin x+\cos x$式爲正。又何值則爲負。

52. 問51題之式爲$\sin x-\cos x$時。答數爲何。

53. 求$x-90^\circ$之各函數，以x之函數表之。

54. 求$x-180^\circ$之各函數。以x之函數表之。

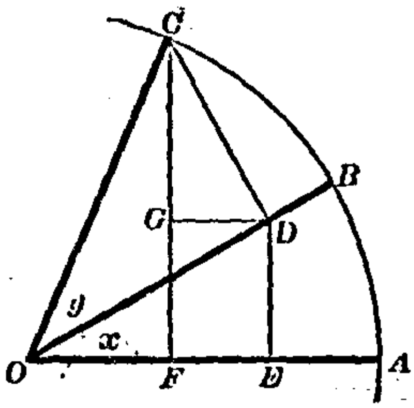
第二十八章

兩角和之函數

FUNCTIONS OF THE SUM OF TWO ANGLES

於單位圓內(49圖)。命 AOB 角 $=x$, BOC 角 $=y$。則 AOC 角 $=x+y$。

49 圖



欲以 x, y 之正弦及餘弦。表 $\sin(x+y)$ 及 $\cos(x+y)$,故作 $CF\perp OA$, $CD\perp OB$, $DE\perp OA$, $DG\perp CF$。於是 $CD=\sin y$, $OD=\cos y$ 而 $\angle DCG=x$。

又 $\sin(x+y)=CF=DE+CG$。

今 $\dfrac{DE}{OD}=\sin x$,

於是 $DE=\sin x\times OD=\sin x\cos y$。

又 $\dfrac{CG}{CD}=\cos x$,

於是 $CG=\cos x\times CD=\cos x\sin y$。

故 $$\mathbf{\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y}。\qquad (4)$$

又 $\cos(x+y)=OF=OE-DG$。

今 $\dfrac{OE}{OD}=\cos x$,

於是 $OE=\cos x\times OD=\cos x\cos y$。

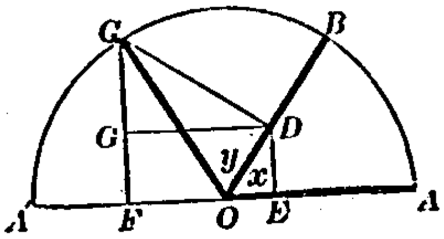
又 $\dfrac{DG}{CD}=\sin x$,

於是 $DG=\sin x\times CD=\sin x\sin y$。

故 $$\mathbf{\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y}。\qquad (5)$$

上文證明中。乃假定x, y, 及 $x+y$ 之和俱爲銳角。設兩銳角x及y之和$x+y$爲鈍（如50圖）。則其證明。一如上法。字字相同。所異者。惟 OF 之符號爲負。因50圖中 DG 大於 OE 故也。故公式〔4〕〔5〕對於一切銳角x, y。俱爲真確。

50 圖



設此二公式。對於任何兩銳角x及y爲真確。則兩角中之一角增大$90°$時。亦必真確。

例如，設 $x'=90°+x$。則由第二十五章。得

$$\sin(x'+y)=\sin(90°+x+y)=\cos(x+y),$$
$$\cos(x'+y)=\cos(90°+x+y)=-\sin(x+y),$$

於是由〔5〕　$\sin(x'+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$

由〔4〕　$\cos(x'+y)=-\sin x\cos y-\cos x\sin y$。

再由第二十五章

$$\cos x=\sin(90°+x)=\sin x',$$
$$\sin x=-\cos(90°+x)=-\cos x'。$$

以 $\cos x$ 及 $\sin x$ 之各值代入，則

$$\sin(x'+y)=\sin x'\cos y+\cos x'\sin y,$$
$$\cos(x'+y)=\cos x'\cos y-\sin x'\sin y。$$

於是知任一角或再增大$90°$時。公式〔4〕及〔5〕仍爲真確。故此二公式。可用於一切任何角者也。

由第二十四章公式〔2〕。

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}。$$

以 $\cos x\cos y$ 除最右分數式母子之各項。則得

$$\tan(x+y)=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin y}{\cos y}}{1-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}。$$

卽
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}。\tag{6}$$

又 $\cot(x+y)=\dfrac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\dfrac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\cos y+\cos x\sin y}$。

以 $\sin x\sin y$ 除母子之各項。且記 $\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ 及 $\dfrac{\cos y}{\sin y}=\cot y$。則得

$$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x}。\tag{7}$$

第二十九章

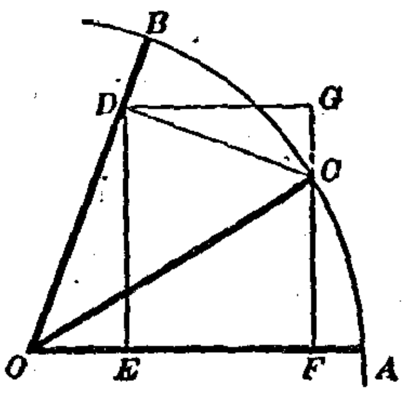
兩角較之函數

FUNCTIONS OF THE DIFFERENCE OF TWO ANGLES

於單位圓內、51圖)。令 AOB 角 $=x$。COB 角 $=y$。則 AOC 角 $=x-y$。

欲以 x, y 之正弦及餘弦，表示 $\sin(x-y)$ 及 $\cos(x-y)$。故作 $CF\perp OA$, $CD\perp OB$, $DE\perp OA$, $DG\perp FC$ 之延線。於是 $CD=\sin y$。$OD=\cos y$。而 $\angle DCG=x$。

51 圖



今 $\sin(x-y)=CF=DE-CG$。

$\frac{DE}{OD}=\sin x$。 於是 $DE=\sin x\times OD=\sin x\cos y$。

$\frac{CG}{CD}=\cos x$。 於是 $CG=\cos x\times CD=\cos x\sin y$。

故 $$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y。\quad(8)$$

又 $\cos(x-y)=OF=OE+DG$。

$\frac{OE}{OD}=\cos x$。 於是 $OE=\cos x\times OD=\cos x\cos y$,

$\frac{DG}{CD}=\sin x$。 於是 $DG=\sin x\times CD=\sin x\sin y$,

故 $$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y。\quad(9)$$

上文之證明。乃假定x及y俱爲銳角。然x及y不論爲何值。常可用同式之證法。以得公式(8)及(9)。惟須注意於其代數的符號耳。

斯二公式之普通應用。可由第二十八章之公式而推論之。茲列之如下。

今$(x-y)+y=x$明甚。設用公式(4)及(5)於$(x-y)+y$。則

$\sin\{(x-y)+y\}$ 或 $\sin x=\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y$,

$\cos\{(x-y)+y\}$ 或 $\cos x=\cos(x-y)\cos y-\sin(x-y)\sin y$。

以$\cos y$乘第一式。以$\sin y$乘第二式。

$$\sin x\cos y=\ \ \sin(x-y)\cos^2 y+\cos(x-y)\sin y\cos y,$$

$$\cos x\sin y=-\sin(x-y)\sin^2 y+\cos(x-y)\sin y\cos y,$$

兩式相減。

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)(\sin^2 y+\cos^2 y)。$$

但　　$\sin^2 y+\cos^2 y=1$。(第十四章)

代入幷移項。卽得

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y。$$

又,設以 $\sin y$ 乘第一式。以 $\cos y$ 乘第二式。而加其結果。則得

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y。$$

故公式(8)及(9)。與其所從來式(4)及(5)同。均爲完全眞確。

由(8)及(9)。再如第二十八章之法進而求之。得

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}。\qquad(10)$$

$$\cot(x-y)=\frac{\cot x\cot y+1}{\cot y-\cot x}。\qquad(11)$$

公式(4)-(11)。可結合之如下。

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y},$$

$$\cot(x\pm y)=\frac{\cot x\cot y\mp 1}{\cot y\pm\cot x}。$$

第三十章

二倍角之函數

FUNCTIONS OF TWICE AN ANGLE

設 $y=x$。則公式(4)-(7)。變爲

$$\sin 2x=2\sin x\cos x。\qquad (12)$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x。\qquad (13)$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}。\left\{=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\right\}\qquad (14)$$

$$\cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}。\qquad (15)$$

(補)　公式(13)。猶可化爲簡式。如

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x。$$

由此四公式。已知一角之各函數。則其二倍角之各函數。卽可求得。

第三十一章

半角之函數

FUNCTIONS OF HALF AN ANGLE

公式(1)　　$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

公式(13)　　$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

相減　　$2\sin^2 x=1-\cos 2x$

相加　　$2\cos^2 x=1+\cos 2x$。

於是　$\sin x=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$，　$\cos x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$。

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

設以z代$2x$。則x爲$\frac{1}{2}z$。卽得

$$\sin\tfrac{1}{2}z=\pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}。\tag{16}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}z=\pm\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}。\tag{17}$$

於是由除法(第二十四章)

$$\tan\tfrac{1}{2}z=\pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{1+\cos z}}。\tag{18}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}z=\pm\sqrt{\frac{1+\cos z}{1-\cos z}}。\tag{19}$$

由此四公式。已知一全角之餘弦。卽可計算其半角之各函數。

根號前之適宜符號。當視$\frac{1}{2}z$角所在之象限而定(第二十二章)。

學者試由公式(18)。顯

$$\tan\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}。$$ (參看第十二章注意)

第三十二章

函數之和及較

SUMS AND DIFFERENCES OF FUNCTIONS

由(4),(5),(8)及(9)加減之。

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y。$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y。$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y。$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y。$$

令 $x+y=A$, $x-y=B$。則

$x=\frac{1}{2}(A+B)$ 而 $y=\frac{1}{2}(A-B)$, 故得

$$\sin A+\sin B=\ \ 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)。\qquad (20)$$

$$\sin A-\sin B=\ \ 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)。\qquad (21)$$

$$\cos A+\cos B=\ \ 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)。\qquad (22)$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)。\qquad (23)$$

由 (20) 及 (21) 相除。得

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\tan\tfrac{1}{2}(A+B)\cot\tfrac{1}{2}(A-B)。$$

因
$$\cot\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}。$$

故
$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}。\qquad (24)$$

例題 XIV.

1. 設 $\sin x=\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$, $\sin y=\frac{5}{13}$, $\cos y=\frac{12}{13}$。求 $(x+y)$ 之正弦及餘弦值。

2. 設由公式 (8) 及 (9)。令 $x=90°$。求 $\sin(90°-y)$ 及 $\cos(90°-y)$ 之值。

試由公式 (4)-(11)。求下各題之首四個函數。

3. $90°+y$。	8. $360°-y$。	13. $-y$。
4. $180°-y$。	9. $360°+y$。	14. $45°-y$。
5. $180°+y$。	10. $x-90°$。	15. $45°+y$。
6. $270°-y$。	11. $x-180°$。	16. $30°+y$。
7. $270°+y$。	12. $x-270°$。	17. $60°-y$。

18. 求以 $\sin x$ 表 $\sin 3x$。

19. 求以 $\cos x$ 表 $\cos 3x$。

20. 已知 $\tan\frac{1}{2}x=1$。求 $\cos x$。

21. 已知 $\cot\frac{1}{2}x=\sqrt{3}$。求 $\sin x$。

22. 已知 $\sin x=0.2$。求 $\sin\frac{1}{2}x$ 及 $\cos\frac{1}{2}x$。

23. 已知 $\cos x=0.5$。求 $\cos 2x$ 及 $\tan 2x$。

24. 已知 $\tan 45^\circ=1$。求 $22^\circ 30'$ 之各函數。

25. 已知 $\sin 30^\circ=0.5$。求 15° 之各函數。

26. 求證 $\tan 18^\circ=\dfrac{\sin 33^\circ+\sin 3^\circ}{\cos 33^\circ+\cos 3^\circ}$。

求證下之諸公式。

27. $\sin 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$。

28. $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$。

29. $\tan\frac{1}{2}x=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$。

30. $\cot\frac{1}{2}x=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$。

31. $\sin\frac{1}{2}x\pm\cos\frac{1}{2}x=\sqrt{1\pm\sin x}$。

32. $\dfrac{\tan x\pm\tan y}{\cot x\pm\cot y}=\pm\tan x\tan y$。

33. $\tan(45^\circ-x)=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$。

設 A, B, C 為三角形之三角。求證

34. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$。

35. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$。

36. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\times\tan B\times\tan C$。

37. $\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C=\cot\frac{1}{2}A\times\cot\frac{1}{2}B\times\cot\frac{1}{2}C$。

求化下各題爲便於對數計算之式。

38. $\cot x+\tan x$。

39. $\cot x-\tan x$。

40. $\cot x+\tan y$。

41. $\cot x-\tan y$。

42. $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$。

43. $1+\tan x\tan y$。

44. $1-\tan x\tan y$。

45. $\cot x\cot y+1$。

46. $\cot x\cot y-1$。

47. $\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}$。

第三十三章

逆三角函數

ANTI-TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

設y爲某角x之任一函數,則x謂爲y之相當逆三角函數。

例如$y=\sin x$。則x爲y之逆正弦或反正弦,

(增註) 逆三角函數,或稱反函數。

y之逆三角函數,寫爲

$\sin^{-1}y$, $\tan^{-1}y$, $\sec^{-1}y$, $\text{vers}^{-1}y$,

$\cos^{-1}y$, $\cot^{-1}y$, $\csc^{-1}y$, $\text{covers}^{-1}y$.

凡此可讀爲正弦爲y之角,餘仿此,

例 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$。於是 $30^\circ=\sin^{-1}\frac{1}{2}$。同例 $90^\circ=\cos^{-1}0=\sin^{-1}1$。又 $45^\circ=\tan^{-1}1=\sin^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{2}$。餘類推。

其記號-1。切勿與指數-1相混。例如 $\sin^{-1}x$ 與 $\frac{1}{\sin x}$ 絕異。而 $\frac{1}{\sin x}$ 當寫爲 $(\sin x)^{-1}$。歐洲之數學著述家。用 arc sin, arc cos 等之記法以代 $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ 等。

三角函數與逆三角函數。有一重要之異點。設一角爲已知。則其各函數可完全決定。設各函數中之一函數爲已知。則此角可有無限數之任一值。例如，設 $\sin y=\frac{1}{2}$，則 y 可爲 30° 或 150° 或以 360° 或 2π 之整倍數增大或減小之諸角。惟不能有何他值耳。是故 $\sin^{-1}\frac{1}{2}=30^\circ\pm 2n\pi$ 或 $150^\circ\pm 2n\pi$。而 n 爲正整數。同例言之。$\tan^{-1}1=45^\circ\pm 2n\pi$ 或 $225^\circ\pm 2n\pi$。即 $\tan^{-1}1=45^\circ\pm n\pi$。

因正弦爲 x 之一角與餘弦爲 x 之一角相併爲 90°。故其餘各函數之關係亦同。乃有

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2},\qquad \sec^{-1}x+\csc^{-1}x=\frac{\pi}{2},$$

$$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2},\qquad \mathrm{vers}^{-1}x+\mathrm{covers}^{-1}x=\frac{\pi}{2},$$

於此須知各方程式。僅對於函數各種特別可有之值。乃爲眞確。例如，設 x 爲正。又設此角常在第一象限內。於是諸方程式乃爲合理。

例題 XV.

1. 求下各函數之一切值。

$\sin^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\text{vers}^{-1}\frac{1}{2}$, $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}\sqrt{2})$,

$\csc^{-1}\sqrt{2}$, $\tan^{-1}\infty$, $\sec^{-1}2$, $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$。

2. 求證

$$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x,\quad \cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x。$$

3. 設 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\pi$。求證 $x=y$。

4. 設 $y=\sin^{-1}\frac{1}{3}$。求 $\tan y$。

5. 求證 $\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$。

6. 求證 $\cos(2\sin^{-1}x)=1-2x^2$。

7. 求證 $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)=\dfrac{x+y}{1-xy}$。

8. 設 $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$。求 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ 之一切值。

9. 求證 $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\sin^{-1}x$。

10. 求 $\sin(\tan^{-1}\frac{5}{12})$ 之值。

11. 求 $\cot(2\sin^{-1}\frac{3}{5})$ 之值。

12. 求 $\sin(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3})$ 之值。

13. 設 $\sin^{-1}x=2\cos^{-1}x$。求 x。

14. 求證 $\tan(2\tan^{-1}x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$。

15. 求證 $\sin(2\tan^{-1}x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$。

第 肆 編

斜角三角形

THE OBLIQUE TRIANGLE

第 三 十 四 章

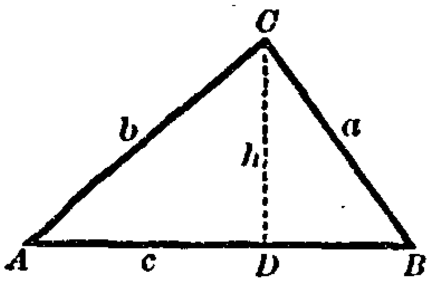
正弦之定律

LAW OF SINES

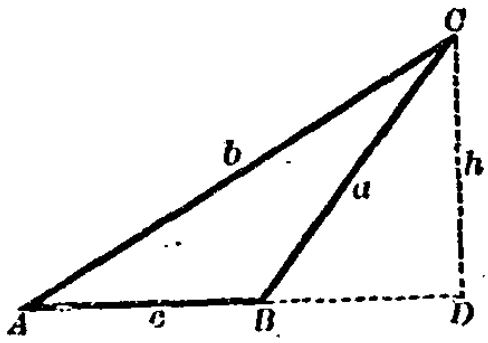
設A,B,C表示ABC三角形(52與53圖)之各角，而a,b,c表示其各對邊。

作$CD\perp AB$。遇AB(52圖)或AB之延綫(53圖)於D。令$CD=h$。

52 圖



53 圖



於任一圖。 $\frac{h}{b}=\sin A$。

於52圖。 $\frac{h}{a}=\sin B$。

於53圖。 $\frac{h}{a}=\sin(180^\circ-B)=\sin B$。

故不論h在三角形內或形外。相除得

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}。\tag{25}$$

自頂點A及B。至各對邊作垂綫。則以同法。可得

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}。\qquad\qquad \frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}。$$

於是正弦之定則，爲

三角形之各邊。與其對角之正弦成正比例。

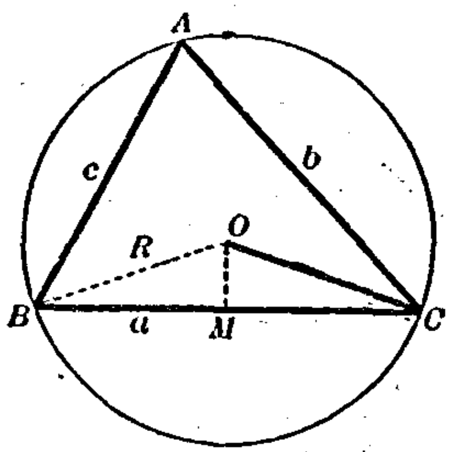
若以此三方程式互相轉換。則可寫爲對稱式，如

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$

此三個等比。各有一簡單之幾何性質。茲將正弦之定律。證之如次。

作一圓。外接於ABC三角形(54圖)。又作OB, OC半徑以R表之。作$OM\perp BC$。由幾何學$\angle BOC=2A$。於是$\angle BOM=A$。而

24　圖



$BM=R\sin BOM=R\sin A$。

$\therefore BC$或$a=2R\sin A$。

同例　　$b=2R\sin B$。

$c=2R\sin C$。

於是得

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$

卽　三角形之任一邊與其對角之正弦之比。其數值等於其外接圓之直徑。

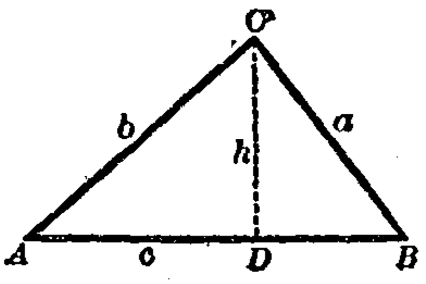
第三十五章

餘弦之定律

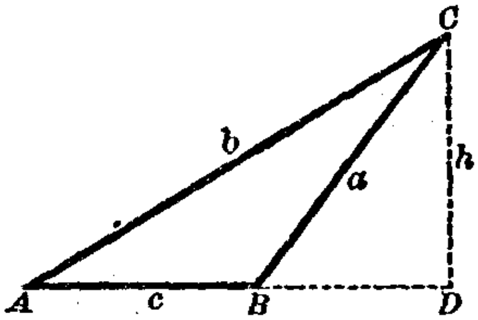
LAW OF COSINES

本定律。乃以三角形之兩邊及夾角。表示第三邊之值者也。

55 圖



56 圖



於55及56圖。　$a^2=h^2+\overline{BD}^2$。

於55圖。　$BD=c-AD$。

於56圖。　$BD=AD-c$。

於任一式。　$\overline{BD}^2=\overline{AD}^2-2c\times AD+c^2$。

故於上之各式，得　$a^2=h^2+\overline{AD}^2+c^2-2c\times AD$。

今　$h^2+\overline{AD}^2=b^2$。

而　$AD=b\cos A$。

故　$\mathbf{a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A}$。　(26)

同理證得　$b^2=a^2+c^2-2\,ac\cos B$。

$c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C$。

此三公式相同，而餘弦之定律。可定之如次。

<u>三角形任一邊之平方。等於其餘兩邊平方之和，減餘兩邊與夾角餘弦之積之二倍。</u>

第三十六章

正切之定律

LAW OF TANGENTS

由第三十四章。$a:b=\sin A:\sin B$。故由比例定理。得

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}。$$

惟由公式(24)(第三十二章)。

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}。$$

故

$$\frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{a+b}}=\frac{\mathbf{\tan\frac{1}{2}(A-B)}}{\mathbf{\tan\frac{1}{2}(A+B)}}。\tag{27}$$

祇須變其字母。卽得

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-C)}{\tan\frac{1}{2}(A+C)}, \qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}。$$

所以正切之定律。爲

三角形兩邊之較,與其和之比。等於其對角半較之正切,比其半和之正切。

〔注意〕 若於(27)內 $b>a$。則 $B>A$。而此公式仍爲眞確。惟須避其負數。故此式當寫爲

$$\frac{b-a}{b+a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-A)}{\tan\frac{1}{2}(B+A)}。$$

例題 XVI.

1. 問於第三十四章內。若有一角爲直角。則其公式變爲若何。

2. 試以正弦之定律。證三角形一角之二等分綫。分對邊爲兩分。與其兩鄰邊成正比例。

3. 設 $A=90°$ 或 $A=0°$ 或 $A=180°$。問公式(26)及其三角形。各當變爲若何。

(注意) 於 $A=90°$ 之例。說明第三十五章之定理。何以有時稱之謂闢塔果拉司*氏之概定理 (Generalized Theorem of Pythagoras)。

4. 不論B角之或鈍或銳。求證 $c=a\cos B+b\cos A$ (55及56圖)。若變其字母。將得如何之兩個對稱式。又設 $B=90°$。則其公式變爲若何。

5. 試由下列三方程式(前題所求得者)。證第三十五章之定理。

$$\left\{\begin{array}{l} c=a\cos B+b\cos A, \\ b=a\cos C+c\cos A, \\ a=b\cos C+c\cos B. \end{array}\right\}$$

注意

(提示) 以 c 乘第一式。b 乘第二式。a 乘第三式。次由第一式減去餘兩式之和。

6. 於公式(27)內。$\frac{1}{2}(A-B)$ 之最大值爲何。

7. 求公式(27)導出之式。並論此三角形之狀態。設

(i) $C=90°$, (ii) $A-B=90°$, 而 $B=C$。

*闢塔果拉司氏。紀元前約580年生。501年死。證明 $a^2+b^2=c^2$ 之定理者也。

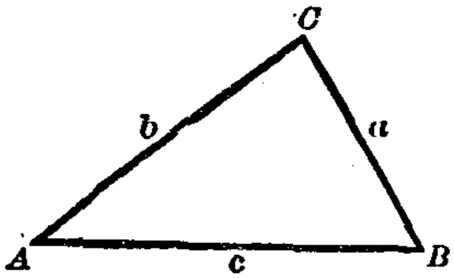
第三十七章

已知部分

THE GIVEN PARTS

用第三十四至三十六章內成立之諸公式。與$A+B+C=180°$式，相集以解斜角三角形之任何例。已綽乎有餘裕焉。其決定一斜角三角形之三項。可爲

57 圖



I. 一邊及兩角。

II. 兩邊及一對角，

III. 兩邊及夾角。

IV. 三邊。

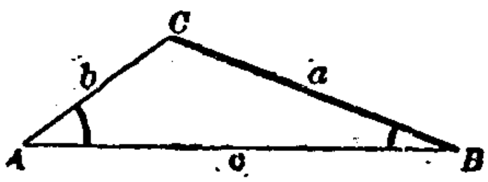
第三十八章

斜角三角形之解法

SOLUTION OF AN OBLIQUE TRIANGLE

例 I.

58 圖



已知一邊a及兩角A與B，求餘各項卽C，b及c。

1. $C=180°-(A+B)$。

2. $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$, $\therefore b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{a}{\sin A}\times\sin B$。

3. $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$, $\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{a}{\sin A}\times\sin C$。

例如 $a=24.31$, $A=45°18'$, $B=22°11'$。

其算式可列之如下。

$a=24.31$	$\log a=1.38578$	$=1.38578$
$A=45°18'$	$\operatorname{colog}\sin A=0.14825$	$=0.14825$
$B=22°11'$	$\log\sin B=\underline{9.57700}$	$\log\sin C=\underline{9.96556}$
$A+B=67°29'$	$\log b=1.11103$	$\log c=1.49959$
$C=112°31'$	$b=12.913$	$c=31.593$

(注意) 若對數或餘對數後。省去−10時。須牢記此log或colog倘多10。必須默減。

例題 XVII.

1. 設 $a=500$, $A=10°12'$, $B=46°36'$,
   求 $C=123°12'$, $b=2051.5$, $c=2362.6$。
2. 設 $a=795$, $A=79°59'$, $B=44°41'$,
   求 $C=55°20'$, $b=567.69$, $c=663.99$。
3. 設 $a=804$, $A=99°55'$, $B=45°1'$,
   求 $C=35°4'$, $b=577.31$, $c=468.93$。
4. 設 $a=820$, $A=12°49'$, $B=141°59'$,
   求 $C=25°12'$, $b=2276.6$, $c=1573.9$。
5. 設 $c=1005$, $A=78°19'$, $B=54°27'$,
   求 $C=47°14'$, $a=1340.6$, $b=1113.8$。
6. 設 $b=13.57$, $B=13°57'$, $C=57°13'$,
   求 $A=108°50'$, $a=53.276$, $c=47.324$。

7. 設 $a=6412$, $A=70°55'$, $C=52°9'$,
求 $B=56°56'$, $b=5685.9$, $c=5357.5$。

8. 設 $b=999$, $A=37°58'$, $C=65°2'$,
求 $B=77°$, $a=630.77$, $c=929.48$。

9. 設於某點 B。測敵壘 A。得 AB 綫及 ABC, BCA 兩角爲 322.55 碼及 $60°34'$, $56°10'$。求 AB 距。

10. ABC 三角形之 B 及 C 爲 $50°30'$ 及 $122°9'$。而 BC 爲 9 哩,求 AB 及 AC。

11. 二測者。於一平面上距 5 哩之處,相對而立。測一同直立面內之輕氣球。各得仰角 $55°$ 及 $58°$。求球與測者之各距。並距平面之高。

12. 已知平行四邊形之一對角綫 d。及此對角與兩邊所成之角 x 及 y,求兩邊。設 $d=11.237$, $x=19°1'$ 而 $y=42°54$。求兩邊兩値。

13. 自船測燈塔。爲北 $34°$ 東,船向北駛行三哩。再測之。爲北 $23°$ 東,求塔與船兩次各距。

〔注意〕 北 $34°$ 東。言自船至塔之視綫,在地平之東北。而與直北綫作 $34°$ 之角也。

14. 已知梯形之平行兩邊 a, b。及平行邊一端之兩角 x, y。求不平行之兩邊。設 $a=15$, $b=7$, $x=70°$, $y=40°$。計算其結果。

解下列各題,而不用對數。

15. 設 $b=7.07107$, $A=30°$, $C=105°$。求 a 及 c。

16. 設 $c=9.562$, $A=45°$, $B=60°$。求 a 及 b。

17. 三角形之底為600呎。兩底角為 $30°$ 及 $120°$。求餘二邊及高。

18. 三角形之兩角為 $20°$ 及 $40°$。求其兩對邊之比。

19. 三角形之三角為 $5:10:21$。而其最小角之對邊為3。求餘二邊。

20. 已知三角形之一邊為27。而其兩鄰角各為 $30°$。求外接圓之半徑(參看第三十四章)。

第三十九章

例 II.

已知兩邊 a 與 b。及 a 之對角 A。求餘各項卽 B, C, c。

此例同前。以正弦之定律解之。

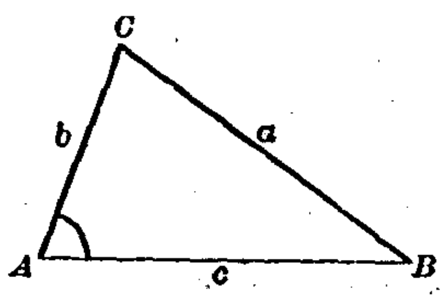
因 $$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a},\quad 故\ \sin B=\frac{b\sin A}{a}。$$

$$C=180°-(A+B)。$$

又 $$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A},\quad 故\ c=\frac{a\sin C}{\sin A}。$$

設一角由其正弦決定。則可有兩值。而互為補角(第二十五章)。若無特別阻礙。則 B 之二值。可任取其一。

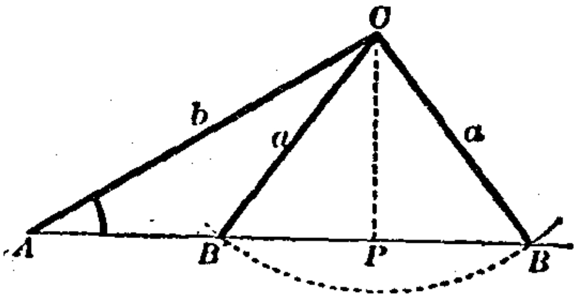
59 圖



若 $a>b$。則由幾何學。$A>B$。不論 A 值如何。B 必為銳角。因一個三角形。祇可有一個鈍角故也。所以祇有一個三角形合於所設之境。

若$a=b$。則由幾何學，$A=B$。其A與B。必俱爲銳角。而所求之三角形爲等腰。

60 圖



若 $a<b$。則由幾何學。$A<B$。而A必爲銳角，設A爲銳角。由60圖$\angle BAC=A$，$AC=b$，$CB=CB'=a$。可見能有兩個三角形ACB及ACB'。合於所設之境，惟a須大於垂綫CP。卽大於$b\sin A$（第十一章）。其ABC及$AB'C$。互爲補角（因$\angle ABC=\angle BB'C$）。卽由公式$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$所求得者也。

若$a=b\sin A=CP$（60圖）。則$\sin B=1$，$B=90°$。而所求之三角形。爲直角三角形。

若 $a<b\sin A$。卽$<CP$。則 $\sin B>1$。而此三角形爲不合理。

凡此諸結果，爲便利計。可述之如次。

兩個解法　卽A爲銳角，而a值在b及$b\sin A$間也。

不可解　卽A爲銳角。而$a<b\sin A$。

或　　A爲鈍角，而$a<b$或$a=b$時也。

一個解法　卽其他各例也，

凡解法之有若干。可由視察而決定之如在疑惑之間。則可求其$b\sin A$之值。

或可進而計算 $\log\sin B$。若 $\log\sin B=0$。則所求之三角形爲直角三角形。若 $\log\sin B>0$。則三角形爲不合理。若 $\log\sin B<0$。則於 $a>b$ 時。僅有一解。於 $a<b$ 時。乃有兩解。

當有兩解時。令 B', C', c', 表示第二個三角形之未知量。則

$$B'=180^\circ-B,\ C'=180^\circ-(A+B')=B-A,$$

$$c'=\frac{a\sin C'}{\sin A}$$

例 1. 已知 $a=16, b=20, A=106^\circ$ 求餘各項。

於此例 $a<b$ 而 $A>90^\circ$ 不合理。

例 2. 已知 $a=36, b=80, A=30^\circ$。求餘各項。

今 $b\sin A=80\times\frac{1}{2}=40$。如是 $a<b\sin A$。亦不合理。

例 3. 已知 $a=72{,}630, b=117{,}480, A=80^\circ0'50''$。求 B, C, c。

$a=72{,}630$	$\operatorname{colog} a=5.13888$	今 $\log\sin B>0$.
$b=117{,}480$	$\log b=5.06997$	∴ 不可解.
$A=80^\circ0'50''$	$\log\sin A=\underline{9.99337}$	
	$\log\sin B=0.20222$	

例 4. 已知 $a=13.2, b=15.7, A=57^\circ13'15''$。求 B, C, c。

$a=13.2$	$\operatorname{colog} a=8.87943$	$c=b\cos A$
$b=15.7$	$\log b=1.19590$	$\log b=1.19590$
$A=57^\circ13'15''$	$\log\sin A=\underline{9.92467}$	$\log\cos A=\underline{9.73352}$
今 $\log\sin B=0$.	$\log\sin B=0.00000$	$\log c=0.92942$
故爲 rt. △	$B=90^\circ$	$c=8.5$
	∴ $C=32^\circ46'45''$	

例 5. 已知$a=767$, $b=242$, $A=36°53'2''$。求B, C, c。

$a=767$	$\text{colog}\ a=7.11520$	$\log a=2.88480$
$b=242$	$\log b=2.38382$	$\log\sin C=9.86970$
$A=36°53'2''$	$\log\sin A=9.77830$	$\text{colog}\sin A=0.22170$
今 $a>b$	$\log\sin B=9.27732$	$\log c=2.97620$
而 $\log\sin B<0$	$B=10°54'58''$	$c=946.68$
∴祇有一解	$\therefore C=132°12'0''$	

例 6. 已知$a=177.01$, $b=216.45$, $A=35°36'20''$。求餘各項。

$a=177.01$	$\text{colog}\ a=7.75200$	$\log a=2.24800$	2.24800
$b=216.45$	$\log b=2.33536$	$\log\sin C=9.99462$	9.23035
$A=35°36'20''$	$\log\sin A=9.76507$	$\text{colog}\sin A=9.23493$	0.23493
今 $a<b$	$\log\sin B=9.85243$	$\log c=2.47755$	1.71328
而 $\log\sin B<0$	$B=45°23'28''$	$c=300.29$ 或	51.675
∴有兩解	或 $134°36'32''$		
	$\therefore C=99°0'12''$		
	或 $9°47'8''$		

例題 XVIII.

1. 下列各項,間有解法若干。

(i) $a=80$,　$b=100$,　$A=30°$。

(ii) $a=50$,　$b=100$,　$A=30°$。

(iii) $a=40$,　$b=100$,　$A=30°$。

(iv) $a=13.4$,　$b=11.46$,　$A=77°20'$。

(v) $a=70$,　$b=75$,　$A=60°$。

(vi) $a=134.16$,　$b=84.54$,　$A=52°9'11''$。

(vii) $a=200$,　$b=100$,　$A=30°$。

2. 設 $a=840$,　$b=485$,　$A=21°31'$;

求 $B=12°13'34''$,　$C=146°15'26''$,　$c=1272.1$。

3. 設 $a=9.399$,　$b=9.197$,　$A=120°35'$;

求 $B=57°23'40''$,　$C=2°1'20''$,　$c=0.38525$。

4. 設 $a=91.06$,　$b=77.04$,　$A=51°9'6''$;

求 $B=41°13'$,　$C=87°37'54''$,　$c=116.82$。

5. 設 $a=55.55$,　$b=66.66$,　$B=77°44'40''$;

求 $A=54°31'13''$,　$C=47°44'7''$,　$c=50.481$。

6. 設 $a=309$,　$b=360$,　$A=21°14'25''$;

求 $B=24°57'54''$,　$C=133°47'41''$,　$c=615.67$,

$B'=155°2'6''$,　$C'=3°43'29''$,　$c'=55.41$。

7. 設 $a=8.716$,　$b=9.787$,　$A=38°14'12''$;

求 $B=44°1'28''$,　$C=97°44'20''$,　$c=13.954$,

$B'=135°58'32''$,　$C'=5°47'16''$,　$c'=1.4202$。

8. 設 $a=4.4$,　$b=5.21$,　$A=57°37'17''$;

求 $B=90°$,　$C=32°22'43''$,　$c=2.7901$。

9. 設 $a=34$,　$b=22$,　$B=30°20'$;

求 $A=51°18'27''$,　$C=98°21'33''$,　$c=43.098$,

$A'=128°41'33''$,　$C'=20°58'27''$,　$c'=15.593$。

10. 設 $b=19$,　$c=18$,　$C=15°49'$;

求 $B=16°43'13''$,　$A=147°27'47''$,　$a=35.519$,

$B'=163°16'47''$,　$A'=0°54'13''$,　$a'=1.0415$。

11. 設 $a=75$, $b=29$, $B=16°15'36''$。求相當兩三角形面積之較。

12. 已知平行四邊形之一邊 a, 對角綫 d, 及兩對角綫之交角 A。求第二對角綫。

特例 $a=35$, $d=63$, $A=21°36'30''$。

第四十章

例 III.

已知兩邊 a 與 b, 及夾角 C。求其餘之 A, B, 與 c。

解 I. 兩角 A 與 B。可由三十六章之公式〔27〕求之，寫爲

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\times\tan\tfrac{1}{2}(A+B)。$$

因 $\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(180°-C)$。則 $\frac{1}{2}(A+B)$ 爲已知。如是由上式。可得 $\frac{1}{2}(A-B)$ 之值。於是有

$$\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)=A$$

及

$$\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)=B。$$

既知 A 與 B。則 c 邊可以正弦之定律求之。其式有二。

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}, \text{ 或 } c=\frac{b\sin C}{\sin B}。$$

解 II. 第三邊 c。可直接用下之方程式(第三十五章)求得。

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}。$$

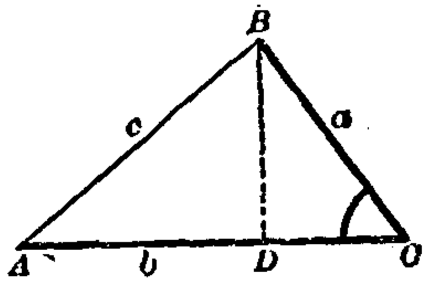
次以正弦之定律。於下式得A, B各値。

$$\sin A = a\times\frac{\sin C}{c},\quad \sin B = b\times\frac{\sin C}{c}。$$

解 III. 設於ABC三角形內。作BD正交AC邊。則

$$\tan = \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{AC-DC}。$$

61 圖



今　$BD = a\sin C$。

而　$DC = a\cos C$。

$$\therefore \tan A = \frac{a\sin C}{b-a\cos C}。$$

祗須變其字母。卽得

$$\tan B = \frac{b\sin C}{a-b\cos C}。$$

然此二式不必全用。蓋任一角如A，若已求得。則他角B，可由$A+B+C=180^\circ$之關係求之。

旣知各角。其第三邊。以正弦之定律如第一解法求之。

〔注意〕 設三未知量俱爲必要之件。則於習練上。當以第一解法爲最便利。設祗需第三邊c。則用第二解法爲便，惟須a^2與b^2之値。能直接求得而不用對數耳。因第二第三解法。不適宜於對數故也。

例 1. 已知$a=748, b=375, C=63°35'30''$。求$A, B$，與$c$。

$a+b=1123$		
$a-b=373$	$\log(a-b)=2.57171$	$\log b=2.57403$
$A+B=116°24'30''$	$\text{colog}(a+b)=6.94962$	$\log\sin C=9.95214$
$\frac{1}{2}(A+B)=58°12'15''$	$\log\tan\frac{1}{2}(A+B)=0.20766$	$\text{colog}\sin B=0.30073$
$\frac{1}{2}(A-B)=28°10'54''$	$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=9.72899$	$\log c=2.82690$
$A=86°23'9''$	$\frac{1}{2}(A-B)=28°10'54''$	$c=671.27$
$B=30°1'21''$		

〔注意〕上題之求 c 邊。乃用 B 角而不用 A 角。因 A 近於 $90°$。故其正弦避而不用。(參看第十二章注意)。

例2. 已知 $a=4, c=6, B=60°$。求第三邊 b。

此題用第二解法為便。

$$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{16+36-24}=\sqrt{28},$$

$$\log 28=1.44716,\quad \log\sqrt{28}=0.72358,\quad \sqrt{28}=5.2915,$$

即　$b=5.2915$。

例題 XIX.

1.	設 $a=77.99$,	$b=83.39$,	$C=72° 15'$;
	求 $A=51° 15'$,	$B=56° 30'$,	$c=95.24$。
2.	設 $b=872.5$,	$c=632.7$,	$A=80°$;
	求 $B=60° 45' 2''$,	$C=39° 14' 58''$,	$a=984.83$。
3.	設 $a=17$,	$b=12$,	$C=59° 17'$;
	求 $A=77° 12' 53''$,	$B=43° 30' 7''$,	$c=14.987$。
4.	設 $b=\sqrt{5}$,	$c=\sqrt{3}$,	$A=35° 53'$;
	求 $B=93° 28' 36''$,	$C=50° 38' 24''$,	$a=1.3131$,
5.	設 $a=0.917$,	$b=0.312$,	$C=33° 7' 9''$;
	求 $A=132° 18' 27''$,	$B=14° 34' 24''$,	$c=0.6775$。
6.	設 $a=13.715$,	$c=11.214$,	$B=15° 22' 36''$;
	求 $A=118° 55' 49''$,	$C=45° 41' 35''$,	$b=4.1554$。
7.	設 $b=3000.9$,	$c=1587.2$,	$A=86° 4' 4''$;
	求 $B=65° 13' 51''$,	$C=28° 42' 5''$,	$a=3297.2$。

8. 設 $a=4527$, $b=3465$, $C=66°6'27''$;

求 $A=68°29'15''$, $B=45°24'18''$, $c=4449$。

9. 設 $a=55.14$, $b=33.09$, $C=30°24'$;

求 $A=117°24'32''$, $B=32°11'28''$, $c=31.431$。

10. 設 $a=47.99$, $b=33.14$, $C=175°19'10''$,

求 $A=2°46'8''$, $B=1°54'42''$, $c=81.066$。

11. 設三角形之兩邊各等於6。而其夾角爲60°。求第三邊。

12. 設三角形之兩邊各等於6。而其夾角爲120°。求第三邊。

13. 試以第一解法。用於二等邊三角形。

14. 設三角形之兩邊爲10, 11。夾角爲50°。求第三邊。

15. 設三角形之兩邊爲43.301, 25, 夾角爲30°。求第三邊。

16. 自某處C。測A, B兩點。得$CA=3825$碼, $CB=3475.6$碼。而$\angle ACB=62°31'$。求AB距。

17. 有不可近之兩物A與B。自AB綫之同傍相距562碼之兩站C, D望之。得$\angle ACB=62°12'$, $\angle BCD=41°8'$, $\angle ADB=60°49'$, $\angle ADC=34°51'$。求AB距。

18. 兩火車於同時同站開車。各沿成30°角之兩直軌進行。其一車速率爲每點鐘30哩。又一車每點鐘40哩。問半點鐘後。二車距遠若干。

19. 已知平行四邊形之兩對角綫為5與6。而其所成之角為49°18′。求兩邊。

20. 三角形兩邊之比，為5 : 9。而其夾角為139°54′。求餘兩角。

21. 今欲求隔池之兩物A與B之距。故擇一C站。量得CA=426碼，CB=322.4碼，$\angle ACB$=68°42′。求AB距。

第四十一章

例 IV.

已知三邊a, b, c。求A, B, C。

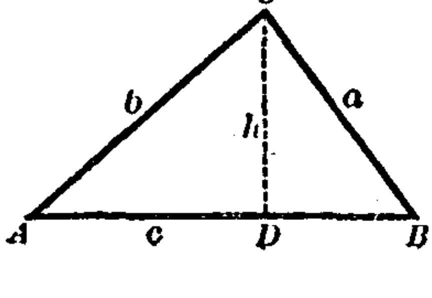
此三角。可直接由三十五章之公式(26)求得。例如由公式

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A,$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}.$$

由此可推解下之諸公式。

62 圖



令 $a+b+c=2\,s,$

則 $b+c-a=2(s-a),$

$a-b+c=2(s-b),$

$a+b-c=2(s-c)$。

其 $1-\cos A$ 之值爲

$$1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc},$$

而 $1+\cos A$ 之值爲

$$1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc}。$$

但由公式(16)及(17)。

$$1-\cos A=2\sin^2\tfrac{1}{2}A,\ 1+\cos A=2\cos^2\tfrac{1}{2}A。$$

$$\therefore 2\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc},\quad 2\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{2s(s-a)}{bc},$$

於是 $$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\tag{28}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\tag{29}$$

由(2) $$\tan\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}。\tag{30}$$

祇須變其字母。即得

$$\sin\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},\quad \sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}。$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},\quad \cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}。$$

$$\tan\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\quad \tan\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}。$$

ρ

$r = (s-a)\tan\frac{1}{2}A$ | $2a = \beta$

$r = (s-b)\tan\frac{1}{2}B$

$r = (s-c)\tan\frac{1}{2}C$

用此三公式以求各角。不得不定一選擇之法。設半角極近於 0°。則求餘弦之公式。不能得精密之結果。因近於 0° 之諸角之餘弦其值不甚相差故也。設半角極近於 90°。則求正弦之公式。同理不能得精密結果。所以由前之例。當用第一式以求正弦。由後之例。當用第二式以求餘弦。

但通例常用第三式以求正切。

由上之公式。祗求得兩角而已足。因其第三角可由 $A+B+C=180^\circ$ 求之。

然由公式以計算三角。亦有便利處。卽用諸角之和。可以核驗結果之精確也。

設欲計算諸角。其正切公式。可化為較簡之式。

其 $\tan\frac{1}{2}A$ 之值。可寫為

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)^2}}$$

或
$$\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}。$$

令
$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = r, \qquad (31)$$

則得
$$\tan\tfrac{1}{2}A = \frac{r}{s-a}。 \qquad (32)$$

同理 ρ $\tan\frac{1}{2}B = \frac{r}{s-b}$, $\tan\frac{1}{2}C = \frac{r}{s-c}$。

$2a = s\,tg\frac{1}{2}A$

$2b = s\,tg\frac{1}{2}B$

$2c = s\,tg\frac{1}{2}C$

例 1. 已知$a=3.41$, $b=2.60$, $c=1.58$。求各角。

用公式(30)。及求$\tan\frac{1}{2}B$之相當公式。其算式如下。

$a=3.41$	$\operatorname{colog} s=9.42079$	$\operatorname{colog} s=9.42079-10$
$b=2.60$	$\operatorname{colog}(s-a)=0.41454$	$\log(s-a)=9.58546-10$
$c=1.58$	$\log(s-b)=0.07737$	$\operatorname{colog}(s-b)=9.92263-10$
$2s=7.59$	$\log(s-c)=0.34537$	$\log(s-c)=0.34537$
$s=3.795$	$2)\ \underline{0.25807}$	$2)\ \underline{19.27425-20}$
$s-a=0.385$	$\log\tan\frac{1}{2}A=0.12903$	$\log\tan\frac{1}{2}B=9.63713-10$
$s-b=1.195$	$\frac{1}{2}A=53^\circ23'20''$	$\frac{1}{2}B=23^\circ26'37''$
$s-c=2.215$	$A=106^\circ46'40''$	$B=46^\circ53'14''$

$\therefore A+B=153^\circ39'54''$, 而$C=26^\circ20'6''$。

例 2. 以公式(31)及(32)。解例1以求各角。

此處若由$\log r$內減去$\log(s-a)$等。則不必將餘對數相加。可以求得$\log\tan\frac{1}{2}A$等。而其算式可列之如下。

$a=3.41$	$\log(s-a)=9.58546$	$\log\tan\frac{1}{2}A=10.12903$
$b=2.60$	$\log(s-b)=0.07737$	$\log\tan\frac{1}{2}B=9.63713$
$c=\underline{1.58}$	$\log(s-c)=0.34537$	$\log\tan\frac{1}{2}C=\underline{9.36912}$
$2s=\underline{7.59}$	$\operatorname{colog} s=\underline{9.42079}$	$\frac{1}{2}A=53^\circ23'20''$
$s=3.795$	$\log r^2=9.42899$	$\frac{1}{2}B=23^\circ26'37''$
$s-a=0.385$	$\log r=9.71450$	$\frac{1}{2}C=\underline{13^\circ10'3''}$
$s-b=1.195$		$A=106^\circ46'40''$
$s-c=\underline{2.215}$		$B=46^\circ53'14''$
$2s=7.590$ (驗算).		$C=\underline{26^\circ20'6''}$

驗算, $A+B+C=180^\circ0'0''$

〔注意〕有時卽於算式中並無差誤。而其三角之和。與180°亦有微異。蓋對數之計算。無論若何精確。僅能求得近似之值也。如遇此類之差。則當於諸角中照所誤之約數均分之。

例題 XX.

已知三邊。試解下列各三角形。

1. 51, 65, 20。
2. 78, 101, 29。
3. 111, 145, 40。
4. 21, 26, 31。
5. 19, 34, 49。
6. 43, 50, 57。
7. 37, 58, 79。
8. 73, 82, 91。
9. 14.493, 55.4363, 66.9129。
10. $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$。

已知下之各件。求各角(11－16)。

11. $a=6, b=8, c=10$。
12. $a=6, b=6, c=10$。
13. $a=6, b=6, c=6$。
14. $a=6, b=9, c=12$。
15. $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}-1$。
16. $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}+1$。

17. A, B, C 三城之相距爲 $AB=165$ 哩。$AC=72$ 哩，$BC=185$ 哩。其 B 在 A 之直東。問 C 在 A 之何方。並有若何二答。

18. 測者視 7 呎長之一物，自目距此物兩端之視綫。爲 5 呎，8 呎。求此兩視綫之交角。

19. 設用公式(28)以求一角。何以於例 II 內遇之。並無別義。

20. 三角形之三邊爲 3, 4, 6。求最大角之正弦。

21. 有 A, B, C 三市。A 距 B 200 哩。距 C 184 哩。而 B 在 C 之直北。相距 150 哩。問 A 在 C 北若干哩。

22. 三角形之三邊爲78.9, 65.4, 97.3。求最大角。

23. 三角形之三邊爲487.25, 512.33, 544.37。求最小角。

24. 三角形之三邊爲 $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求各角。

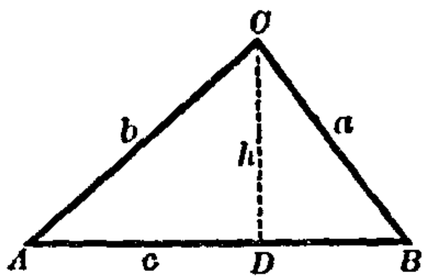
25. 三角形之三邊爲14.6吋, 16.7吋, 18.8吋。求自最大角之頂點至對邊所作垂綫之長。

第四十二章
三角形之面積
AREA OF A TRIANGLE

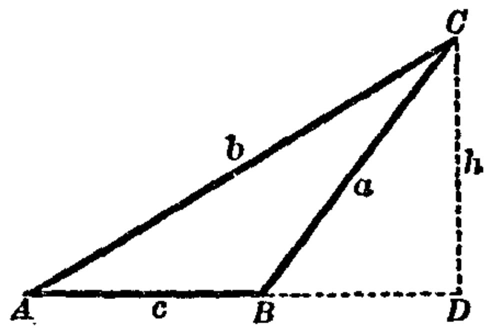
例 I.

已知兩邊及夾角。

63 圖



64 圖



於 ABC 三角形內(63或64圖)。

$$F=\tfrac{1}{2}c\times CD。$$

今 $$CD=a\sin B。$$

故 $$\mathbf{F=\tfrac{1}{2}ac\sin B}。\quad(33)$$

又 $$F=\tfrac{1}{2}ab\sin C,\ F=\tfrac{1}{2}bc\sin A。$$

例 II.

已知兩角及夾邊。

$$\sin A : \sin C = a : c \quad \text{(第三十四章)}。$$

故 $$c = \frac{a \sin C}{\sin A}。$$

以 c 值代入公式 (33)。

$$F = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}。$$

惟 $\sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ (第二十五章)。

於是 $$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{a^2 \sin B \sin C}}{\mathbf{2 \sin (B+C)}}。 \tag{34}$$

例 III.

已知三邊。

由公式 (12)。

$$\sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2} B \times \cos \tfrac{1}{2} B。$$

今由公式 (28)。

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

又由公式 (29),

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}。$$

以 $\sin \frac{1}{2} B$ 及 $\cos \frac{1}{2} B$ 之各值。代入第一方程式,則得

$$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

以此 $\sin B$ 值代入 (33)。得

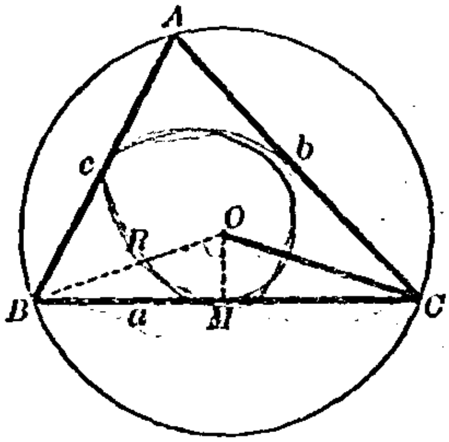
$$\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{s(s-a)(s-b)(s-c)}}, \tag{35}$$

$F = rs$

例 IV.

已知三邊及外接或內切圓之半徑,

65 圖



設 R 表示其外接圓之半徑。則由第三十四章,得

$$\sin B=\frac{b}{2R}。$$

以此 $\sin B$ 之值代入 (33)。得

$$\mathbf{F}=\frac{\mathbf{abc}}{\mathbf{4R}}。\qquad (36)$$

設 r 表示其內切圓之半徑。則原三角形。被自頂點至圓心之各綫分為三個三角形。而每個三角形之高等於 r。故

$$\mathbf{F}=\tfrac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{rs}。\qquad (37)$$

以 (35) 內之 F 值代入此公式,

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}。$$

於是第四十一章 (31) 內之 r。等於內切圓半徑。

例題 XXI.

已知下各事。求面積 (1－10)。

1. $a=4474.5$, $\quad b=2164.5$, $\quad C=116°30'20''$。
2. $b=21.66$, $\quad c=36.94$, $\quad A=66°4'19''$。

3. $a=510$, $c=173$, $B=162°30'28''$。

4. $a=408$, $b=41$, $c=401$。

5. $a=40$, $b=13$, $c=37$。

6. $a=624$, $b=205$, $c=445$。

7. $b=149$, $A=70°42'30''$, $B=39°18'28''$。

8. $a=215.9$, $c=307.7$, $A=25°9'31''$。

9. $b=8$, $c=5$, $A=60°$。

10. $a=7$, $c=3$, $A=60°$。

11. 已知$a=60$, $b=40°35'12''$,面積$=12$。求內切圓半徑。

12. 求以平行四邊形之兩鄰邊及夾角表面積之公式,

13. 求以二等邊梯形之兩平行邊及一銳角表面積之公式,

14. 三角形之兩邊及夾角爲2416, 1712, 30°。又一三角形之兩邊及夾角爲1948, 2848, 150°。求此兩形面積之和。

15. 二等邊三角形之底爲20。其面積爲$100\div\sqrt{3}$。求各角。

16. 四邊形之面積。等於其兩對角綫乘夾角正弦之半。求證。

例題 XXII.

1. 一船下駛於英國海峽。自船測一石。爲北 33°45′ 西。船向南 67°30′ 西行 18 哩再測之。爲北 11°15′ 東。求石與船兩次之距。

2. 自一船同時測 A, B 兩物。在北 15° 東之一綫內。船向西北行 5 哩。測得 A 在正東。B 在東北。求 AB 距。

3. 一堡與一碑。在同一水平面內。自堡頂望之。得碑尖與碑底之俯角爲 40° 與 80°。但堡高爲 140 呎。求碑高。

4. 設太陽之高度爲 60°。問一杖與水平綫當作何角。能令其影在水平面上爲最長。

5. 設太陽之高度爲 30°。問 10 呎長之一杖在水平面上所照最長影之長。

6. 於半徑爲 3 之一圓內。有長爲 4 與 5 之平行兩弦。求此兩弦間所含之面積。(有兩解法)。

求高之公式

$$h_a = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}$$

$$h_b = \frac{b \sin A \sin C}{\sin B}$$

$$h_c = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}$$

$$d = \frac{\sin A}{a+b}$$ 求分角線之公式

$$d = \frac{bc \cos \frac{1}{2}A}{b+c}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{d(b+c)}{2bc}$$

第伍編

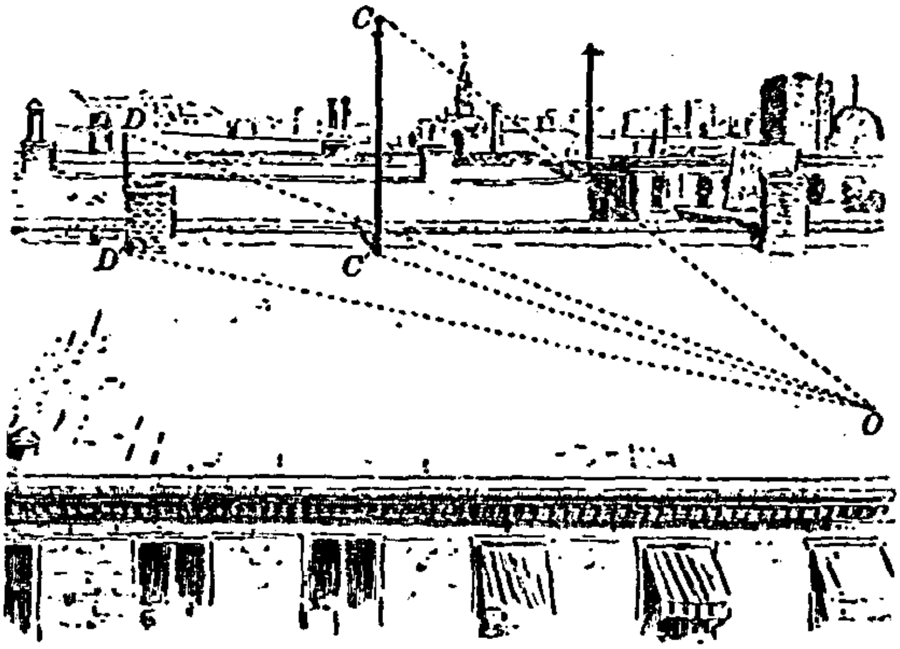
雜題

MISCELLANEOUS EXAMPLES

平面三角問題

PROBLEMS IN PLANE TRIGONOMETRY

66 圖



設兩物體之互對。或其對於測點。不在同一平面之內。則可假設一垂直綫,通過兩物而遇測點之水平面於兩點。此兩點之角距。爲此物距彼物之方位。例如 $C'OD'$ 角(66圖)爲 C 距 D 之方位。

〔注意〕 本編各題。均自西浮氏(Mr. Charles W. Seaver)所出版之平三角問題中選擇。其全本另訂薄本。可向著者購取。

例題 XXIII.

直角三角形

(標題或名詞。凡前所已見者。概不註以英文。下準此)。

1. 塔之仰角爲48° 19′ 14″。而其底距測點95呎。求塔高及頂與測點之距。

2. 自 1000 呎高之山上。測得一船之俯角爲77° 35′ 11″。求船與山頂之距。

3. 90呎高之旗杆。於水平面上照影117呎。求太陽之高度。

4. 設太陰之光落於地上某點。太陰對於通過某點之地球半徑。其所對之角爲57′ 3″。其地球半徑爲3956.2哩。求太陰與地心之距。

5. 太陽半徑所對之地心角爲16′ 2″。而太陽距爲92400000哩。求太陽之直徑。

6. 開姆自利其(Cambridge)之緯度爲42° 22′ 49″。求此緯度平行綫之半徑長。

7. 問何處緯度平行綫之周。等於赤道周之半。

8. 於半徑6.7之圓內。接一正十三邊形。求每邊長。

9. 圓內接正七邊形之一邊爲5.73。求圓半徑。

10. 有93.97呎高之一塔在江邊。其對邊一物之俯角爲25° 12′ 54″。求江寬。

11. 自58呎高之一塔上。測得與塔底同平面內之二物之仰角爲$30°13'18''$及$45°46'14''$。求二物之距。

12. 一人直立於150呎長之平頂屋一角之前。測得長所對之水平角之餘弦爲$\sqrt{\frac{1}{3}}$。及高所對之直立角之正弦爲$\frac{3}{\sqrt{34}}$。求屋高。

13. 有底爲正方形之正稜錐體。其旁稜長150呎，而底之一邊爲200呎，求此面與底之倚度。

14. 自36呎寬之溝之一邊。測對邊一牆之仰角。得$62°39'10''$。設以梯自測點達至牆頂。需長幾何。

15. 旗杆折斷。一部分倒地距杆根15呎，設其折斷部分爲39呎，求全杆之長。

16. 自一城直上之輕氣球。測得又一城之俯角爲$10°14'9''$。其兩城相離8哩。求氣球之高。

17. 自3哩高之山頂。測地球面上可見之最遠物。得其俯角爲$2°13'50''$。求地球之直徑。

18. 40呎長之梯，倚於街之一邊33呎高之窗。設移梯頂於街之對邊而不動梯根。則見其倚於21呎高之窗。求街之寬。

19. 屋之高度，對一直角於其街之他邊之窗上。自同點測得屋頂之仰角爲60°。而街寬爲30呎，求屋之高。

20. 54呎高之一燈臺。在磐石上。自一船測得燈臺及磐石之仰角。爲$4°52'$與$4°2'$。求石之高及船與石之距。

21. 一人自輕氣球測得地上在南一物之俯角$35°30'$。其氣球向東平行$2\frac{1}{2}$哩。得同物之俯角$23°14'$。求氣球之高。

22. 一人立於同一水平面上之一塔之南。測其仰角得$54°16'$。後乃東行100碼。得仰角$50°8'$。求塔高。

23. 自塔南之某點A。測得塔之仰角爲$30°$。又自塔西相距爲a之一點B測之。得仰角$18°$。試證塔高爲$\frac{2}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$。其$18°$之正切爲$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$。

24. 一竿定於堤頂。竿之仰角及俯角。爲$60°$及$30°$。試證竿長爲堤高之二倍。

25. 自與塔底相距爲a之某點。測得塔頂之仰角A。爲其塔頂上旗杆之仰角之餘角。試證竿長爲$2a\cot 2A$。

26. 眞實的水平綫者。綫上各點與地心等距離者也。眞實的水平綫上任何點之切綫。爲可見的水平綫。設於任何點作此二綫。而延長至1哩。求他端之距離。

27. 於本例題之問題1。問計算仰角或距離時之錯誤。對於塔高有何影響。

斜角三角形

28. 由不可卽近之某物之底。在同直綫內之兩點。測得此物之仰角及兩點距。試決定此物之高。

29. 水平面上一不可近之塔之仰角爲$63°26'$。又遠行距塔底500呎測之。得其頂之仰角爲$32°14'$。求塔高。

30. 有一塔築於江邊。自對邊測之，得其仰角 $60^\circ 13'$。再遠 40 呎測之。得仰角 $50^\circ 19'$。求江之寬。

31. 向北進行之一船。見相距 8 哩之兩燈臺於正西綫內。歷一小時。其一臺之方位在南西，而又一臺在南南西。求此船每小時之速率。

〔補〕 航海用之羅盤。各分四方爲八等分。共得三十二方位如次之 67 圖。

67 圖

32. 試決定斜面一個可近物之高。

33. 距塔底 40 呎之處，塔身所對之角爲 $41^\circ 19'$。再遠 60 呎，塔身所對之角爲 $23^\circ 45'$。求塔之高。

34. 一塔與其所在之斜面成 $113^\circ 12'$ 之角，又向下距塔底 89 呎之地。得塔身所對之角爲 $23^\circ 27'$。求塔高。

35. 自42呎高之屋之頂及底。測得竿尖之仰角爲$14^\circ 13'$及$23^\circ 19'$。求竿高。

36 三角形之三邊爲17, 21, 及28。試證平分最大邊至其對角所作之綫之長爲13。

37. 一探船在港之南西。見一敵船由港駛行。其方向爲南80°東。而速率爲每小時9哩。問此探船須行何方向及何速率。始能於$1\frac{1}{2}$小時內捕獲敵船。

38. 一人自江邊上行斜坡70碼爲$3\frac{1}{2}$內之1。測得對岸一物之俯角爲$2\frac{1}{4}^\circ$。求江寬。

39. 在某點由湖長所對之角爲$46^\circ 24'$。而自此點至湖之兩端。爲346呎與290呎。求湖長。

40. 兩船相距一哩。自此船測得彼船與岸上礮台之角距爲$35^\circ 14' 10''$。自彼船測得此船與礮台之角距爲$42^\circ 11' 53''$。求兩船與礮台之各距。以呎數表之。

41. 沿江邊作500呎之基綫。自綫之此端。測得彼端與對邊一物之角距爲53°。又自彼端測得此端與同物之角距爲$79^\circ 12'$。求江寬。

42. 與地平傾斜15°之斜面上。直立一塔。一人自塔底上行斜面80呎。得塔身所對之角30°。求塔高。

43. 在某點由斜面上一塔所對之角爲$42^\circ 17'$。向下遠行325呎。得$21^\circ 47'$。而面之傾斜爲$8^\circ 53'$。求塔高。

44 自船望見一土角在北微東。船向西北行30哩。則土角在正東。求此土角與第二測點之距。

45. 兩測者相對立於雲之兩旁。相距 700 呎。測得仰角爲 $44°56'$ 及 $36°4'$。求雲高。

46. 自山足之一點 B。得其 A 頂之仰角爲 $60°$。再自與地平 $30°$ 傾斜之山路上行一哩。達於 C 點。得 ACB 角爲 $135°$。求以呎數表此山之高。

47. 自船見二石與船在同一直綫內。其方位爲北 $15°$ 東。船向西北行 5 哩。則其第一石在直東。第二石在東北。求二石距。

48. 自與尖塔底同平面上之一窗。測得塔之仰角爲 $40°$。又自 18 呎高之窗測之。得仰角 $37°30'$。求此尖塔之高。

49. 設測角於已知長之一綫之兩端而決定不可近之兩物距。

50. 將以決定隔江禮拜堂 A 及一塔 B 之距離。沿江先測一綫 $CD=600$ 呎 (C 大約與 A 相對)。又得 $\angle ACB=58°20$, $\angle ACD=95°20'$, $\angle ADB=53°30'$, $\angle BDC=98°45'$。問所求之距離。

51. 將求空中一點 A 之高度。先測一水平的基綫 CD 440 碼。自 C 得 A 之仰角 $37°18'$。及 AD 間之水平角 $76°18'$。自 D 得 AC 間之水平角 $67°14'$。求高。

52. 自相距 3000 呎之兩站測一氣球。自此站得球與彼站間之水平角 $75°25'$。及球之仰角 $18°$。自彼站得球與此站間之水平角 $64°30'$。求氣球之高。

53. 有一爲 410 磅一爲 320 磅之二力。成 $51°37'$ 之角。求其結果之集力及方向。

54. 一未知力。與128磅之一力相併。得200磅之結果。而此結果與已知力成$18°24'$之角，求未知力之集力及方向，

55. 自兩站由風箏之高所乘之角同為A。而自此站由風箏與彼站之聯綫所乘之角為B。其兩站距為a。試題風箏之高為$\frac{1}{2}a\sin A\sec B$。

56. 水平面上有二塔。相距120呎。一人連續立於其底，測得一塔之仰角。為又一塔仰角之二倍。但於兩塔間之中點測之。得二仰角互為餘角。求證二塔之高為90呎及40呎;

57. 設無測角器。而欲求A,B兩點與一不可近之C點間之距。延長CA至a，CB至b。又聯AB, Ab, Ba。測得AB 500, aA 100, aB 560, bB 100, Ab 550。計算AC及BC兩距。

58. 有不可近之二物A及B。除於D點外。無他點可俱見之。任取一點C。可望見A及D。測得CD 200呎, ADC $89°$, ACD $50°30'$。再取一點E。可望見D及B。得DE 200呎。BDE $54°30'$, BED $88°30'$。自D得ADB $72°30'$。計算AB距。

59. 有不可近之二物A及B。無一點可俱見之。取兩點C及D。相距200碼。令其由C可見A。由D可見B。自C至可見A之F點，及自D至可見B之E點。測得CF及DE各為200碼。又得AFC $83°$, ACD $53°30'$, ACF $54°31'$, BDE $54°30'$, BDC $156°25'$, DEB $88°30'$。計算AB之水平距，

60. 北溫帶內之一柱。在測者之東南東，而正午時。其影之一端。在其東北。其影長爲80呎，而自測者之位置。得柱之仰角爲45°。求柱高。

61. 自山頂測得山底同水平面內兩物之俯角爲45°及30°。而其兩物間之水平角爲30°。試證山高等於兩物之距，

62. 將以知江面寬AB。於BA之延線內，取AC爲100碼，又於AC上過C點之垂線內，取CD爲200碼，其BDA角爲$37^\circ18'30''$。求AB。

63. 三角形之三邊和爲100。但知$\angle A=2\angle B$，$\angle B=2\angle C$。求三邊。

64. 設$\sin^2 A+5\cos^2 A=3$。求A。

65. 設$\sin^2 A=m\cos A-n$。求$\cos A$。

66. 已知$\sin A=m\sin B$。及$\tan A=n\tan B$。求$\sin A$及$\cos B$。

67. 設$\tan^2 A+4\sin^2 A=6$。求A。

68. 設$\sin A=\sin 2A$。求A。

69. 設$\tan 2A=3\tan A$。求A。

70. 求證$\tan 50^\circ+\cot 50^\circ=2\sec 10^\circ$。

71. 已知正n邊形之一邊爲a。求以n及a示其內切及外接圓之半徑之式。

設P, H, D爲內接正五，六，十，邊形之邊。求證$P^2=H^2+D^2$。

面積

72. 試以三角形之兩邊b, c,及夾角A表面積公式。

73. 試以三角形之兩角A, B及夾邊c表面積公式。

74. 試以三角形之三邊表面積公式。

75. 設a爲等邊三角形之一邊,求證其面積爲$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$。

76. 矩形之兩鄰邊爲52.25鏈及38.24鏈,求面積。

77. 平行四邊形之兩邊爲59.8鏈及37.05鏈,而其夾角爲72°10′。求面積。

78. 平行四邊形之兩邊爲15.36鏈及11.46鏈,而其夾角爲47°30′。求面積。

79. 三角形之兩邊爲12.38鏈及6.78鏈,而其夾角爲46°24′。求面積。

80. 直角三角形成直角之兩邊爲18.37鏈及13.44鏈,求面積。

81. 三角形之兩角爲76°54′及57°33′12″,而其夾邊爲9鏈,求面積。

82. 三角形之兩邊爲19.74鏈及17.34鏈,其一在北82°30′西,而又一在南24°15′東,求面積。

83. 三角形之三邊爲49鏈,50.25鏈及25.69鏈,求面積。

84. 三角形之三邊爲10.64鏈,12.28鏈及9鏈,求面積。

85. 有三角形之田。面積共 14 英畝。其三邊之比。若 3: 5: 7。求三邊。

86. 於 $ABCD$ 四邊形。已知 $AB=17.22$ 鏈, $AD=7.45$ 鏈, $CD=14.10$ 鏈, $BC=5.25$ 鏈,及對角綫 $AC=15.04$ 鏈。求面積。

87. 四邊形之兩對角綫爲 a 及 b。其交角爲 D。試證其面積爲 $\frac{1}{2}ab\sin D$。

88 四邊形之兩對角綫爲 34 與 56。其交角爲 $67°$。求面積。

89. 四邊形之兩對角綫爲 75 與 49。其交角爲 $42°$。求面積。

90. 正 n 邊形之一邊爲 a。試證其面積爲 $\frac{na^2}{4}\cot\frac{180°}{n}$。

91. 正五邊形之一邊爲 25。求面積。

92. 正六邊形之一邊爲 32。求面積。

93. 正十邊形之一邊爲 46。求面積。

94. 求周爲 74 呎之圓面積。

95. 求半徑爲 125 呎之圓面積。

96. 於徑爲 125 呎之圓內。求 $22°$ 弧之扇形面積。

97. 於半徑爲 44 呎之圓內。求 $25°$ 弧之扇形面積。

98. 於徑爲 50 呎之圓內,求 $280°$ 弧之弧矢形面積。

99. 有弧矢形(小於半圓)。其弦爲20。而此弦與小弧之中點距爲2。求此弧矢形之面積。

100. 設r爲圓半徑。則外切正n邊形之面積爲$nr^2\tan\frac{180^\circ}{n}$。內接正$n$邊形之面積爲$\frac{n}{2}r^2\sin\frac{360^\circ}{n}$。

101. 設a爲正n邊形之一邊。則內切圓之面積爲$\frac{\pi a^2}{4}\cot^2\frac{180^\circ}{n}$。外接圓之面積爲$\frac{\pi a^2}{4}\csc^2\frac{180^\circ}{n}$。

102. 圓內接正多邊形之面積。與外切等邊數之正多邊形之面積相比，如3:4，求邊數。

103. 圓內接正多邊形之面積。爲內接及外切半邊數之正多邊形兩面積之等比中項。

104. 圓外切之正多邊形之面積。爲內接等邊數之正多邊形與外切半邊數之正多邊形兩面積之調和中項。

105. 外切等邊三角形之周。爲內接等邊三角形之周之二倍。

106. 外切正方形。爲內接正十二邊形之三分之四。

107. 三角形之兩邊爲3與12。夾角爲30°。求與此形等面積之二等邊直角三角形之斜邊。

平面航海術

PLANE SAILING

平面航海者。爲航海術之支派。假定地球面爲平面者也。故其問題。以平面三角法解之。

兩地之緯度差 (difference of latitude) 云者，卽經過兩地之平行緯綫間所含之經綫弧也。

兩經綫間之經距 (departure) 云者。卽兩經綫間所含平行緯綫之弧也，經距減小。則與赤道之距離增大。

設一船依相等之角。次第駛過諸經綫。則謂之行於同角航線 (rhumb-line) 上，此角謂之航路 (course)。而其兩地之距。由同角航綫上測之。

假設兩地之距。經距及緯度差。各爲直線。且在同一平面內。則成一直角三角形。而稱之爲平面航海三角形。如 ABC 爲平面三角形。其直角在 B。而 BC 爲表示 B 與 C 之緯度差。則 ACB 爲自 C 至 A 之航路。CA 爲距。又 D 爲自 B 測得 A 及 B 兩經綫間之經距。

108. 令地球赤道直徑爲 7925.6 哩。試以呎數表大圓之一分弧之長*。

109. 一船自南緯 $43°\ 45'$ 駛行。航路爲北微東 2345 浬，求所達之緯度。及所成之經距。

*地球大圓之一分弧之長謂之海里(knot)。省筆爲浬。下各題有"哩"，"浬"之分者以此。

110. 一船自北緯1°45′駛行，航路爲南東微東，而達於南緯2°31′。求距及經距。

111. 一船自南緯13°17′駛行。航路爲北東微東$\frac{3}{4}$東。直至經距爲207浬。求距及所達之緯度。

112. 一船之航路。在南東之間駛行244浬。但知始於南緯2°52′而達於南緯5°8′。求航路及經距。

113. 一船自北緯32°18′。在北西之間駛行344浬。其經距爲103浬。求航路及所達之緯度。

114. 一船在南東之間駛行。得緯度差136浬及經距203浬。求距及航路。

115. 一船向北駛行終日。其速率每小時15浬。問起點與所達之地點，在一直綫內相距若干。(令地球半徑爲3962.8浬)。

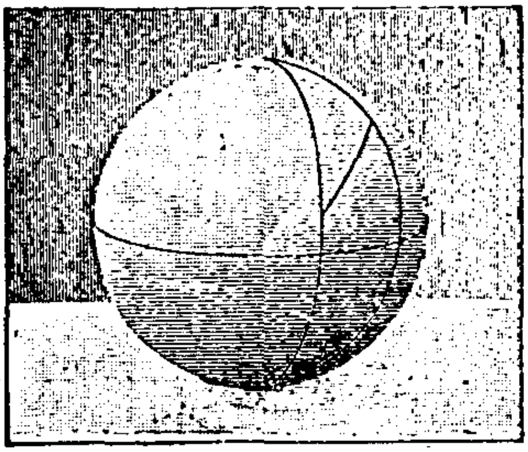
平行及中緯綫航海術

PARALLEL AND MIDDLE LATITUDE SAILING

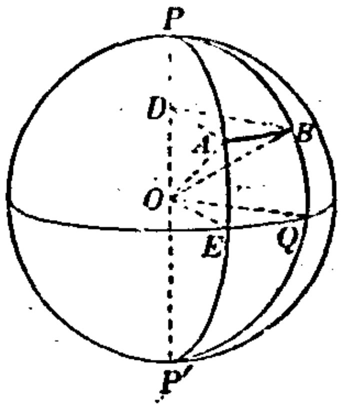
兩地之**經度差**(difference of longitude)云者。卽兩地之經綫所成之極角。或卽其兩經綫間所含赤道之弧也。

平行航海時。假定船之駛向。或爲正東，或爲正西。其所行之距離。爲所成之經距。而其經度差。可如下法求之。

68 圖



69 圖



116. 已知任何兩經綫間於任何緯綫上之經距，求於兩經綫上之任何兩點之經度差。

解 於直角三角形 $\triangle ODA$ 內，$\angle AOD=90^\circ-$緯度。

於是 $\dfrac{DA}{OA}=\sin(90^\circ-\text{緯度})=\cos\text{緯度}$。

其 $\triangle DAB$ 與 $\triangle OEQ$ 相似。

故 $\dfrac{DA}{OE}=\dfrac{AB}{EQ}$，或 $\dfrac{DA}{OA}=\dfrac{AB}{EQ}$。

於是 $\cos\text{緯度}=\dfrac{AB}{EQ}$。

故 $EQ=\dfrac{AB}{\cos\text{緯度}}=AB\times\sec\text{緯度}$。

即 **經度差＝經距×sec緯度。**

117. 一船自北緯 42°16′ 西經 72°16′ 向東駛行 149 浬，問所到處之位置。

118. 一船自南緯44°49′東經119°42′向西駛行。直至東經117°16′。求駛行距。

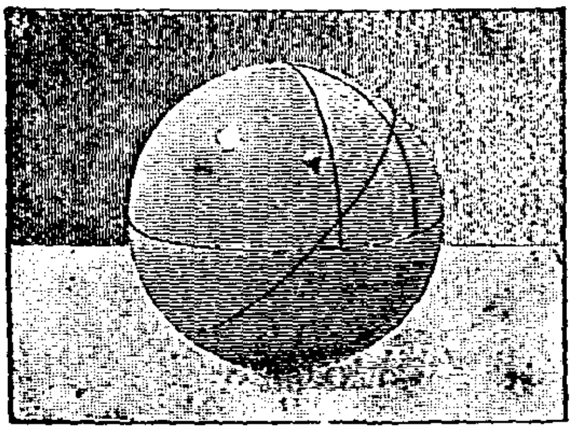
中緯綫航海時。其兩地之經距。乃於兩地緯綫中間之平行綫上測得之。

除極高之緯度或過大之綫外。上文之法。不至有何大誤。

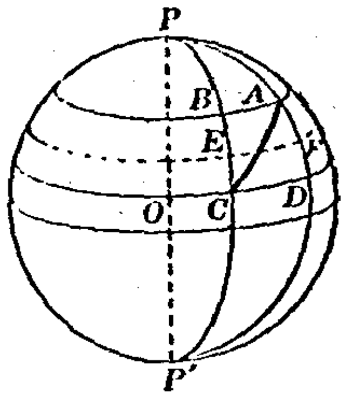
於是以中緯線航海術。求經度差。得

經度差＝經距×sec中緯度。

69 圖



70 圖



119. 一船自北緯31°14′西經42°19′。向東北東駛行325浬。求所到之位置。

120. 求自哈佛安那(Havana)至夸角(Cape Cod)之方位及距離(哈佛安那在北緯23°9′西經82°22′。夸角在北緯42°2′西經70°3′)。

121. 一船離北緯 49° 57′ 西經 15° 16′。向南西間駛至某處。其經距爲 194 浬。緯度爲 47° 18′ 北。求江寬,距離,及某處之經度。

122. 一船離北緯 42° 30′ 西經 58° 51′。向南東微南駛行 300 浬。求所到處之位置。

123. 一船離北緯 49° 57′ 西經 30°。向南 39° 西駛至北緯 47° 44′。求距及所到地之經度。

124. 一船離北緯 37° 西經 32° 16′。向北西間駛行 300 浬。至北緯 41°。求航路及所到地之經度。

125. 一船離南緯 50° 10′ 東經 30°。向東南東駛行。成 160 浬之經距。求距及所到之位置。

126. 一船離北緯 49° 30′ 西經 25° 向南東間駛行 215 浬。成 167 浬之經距。求航路及所到之位置。

127. 一船離南緯 43° 西經 21° 駛行 273 浬,至南緯 40° 17′。問有何二航路及經度。

128. 一船離北緯 17° 東經 119° 駛行 219 浬。而成 162 浬之經距。問此答有何者四種。

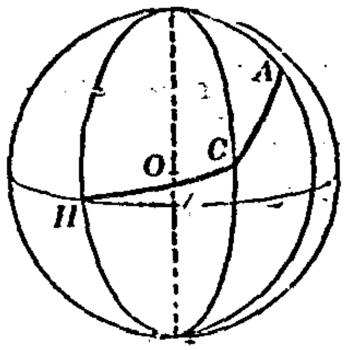
129. 一船自緯綫 30° 向東駛行 360 哩。求起點與所到處之最短距。又設緯綫爲 45° 及 60°。試解之。

迴遊航海術

TRAVERSE SAILING

迴遊航海者。乃船隻於兩種或兩種以上之航路上自一點至他點時。實用平面及中緯度航海之各法也。其每種航路。皆獨自演算。不相依屬。後將諸結果集合之。如下各題之解法。

71 圖



130. 一船離南緯 37° 18′ 西經 18° 42′ 駛行。向北東行 104 浬。再向北北西行 60 浬。再向西微南行 216 浬。求所到之位置。及自起點之方位及距離。

於第一航路。得北緯差 73.5。東經距 73.5。於第二航路。得北緯差 55.4, 西經距 23。於第三航路。得南緯差 42.1。西經距 211.8。

合之。此船駛行北緯 128.9 浬及南緯 42.1 浬。故其所到之地。爲在距所離北緯綫 86.8 浬之平行緯綫上。即爲南緯 35° 49.2′。

同例得經距爲 161.3 浬西。而其中緯度爲 36° 32.6′。以此諸關係及 118 題後之公式。得經度差爲 201′ 或 3° 21′ 西。所以所到之地爲西經 22° 3′。

由 86.8 哩之緯度差及 161.3 哩之經距。得航路爲北 61°43′ 西。距爲 183.2 哩。設自原點直接駛行北 61°43′ 西之航路及 183.2 之距。則必達於相同之一點。

131. 一船離神角(120 題)駛行。向南東微南 114 哩。再向北微東 94 哩。再向西北西 42 哩。如 130 題解之。

132. 一船離好望角(南緯 34° 22′ 東經 18° 30′)駛行。向北西 126 哩。再向北微東 84 哩。再向西南西 217 哩。如 130 題解之。

例題 XXIV.

測角法內之問題

PROBLEMS OF GONIOMETRY

試證

1. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)$。
2. $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)$。
3. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)$。
4. $\sin\left(x+\frac{1}{3}x\right)+\sin\left(x-\frac{1}{3}\pi\right)=\sin x$。
5. $\cos\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)+\cos\left(x-\frac{1}{6}\pi\right)=\sqrt{3}\cos x$。
6. $\tan x+\sec x=\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi\right)$。
7. $\tan x+\sec x=\dfrac{1}{\sec x-\tan x}$。
8. $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=\dfrac{\cot x-1}{\cot x+1}$。

9. $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=2\csc x$。

10. $\tan x+\cot x=2\csc 2x$。

11. $\cot x-\tan x=2\cot 2x$。

12. $1+\tan x\tan 2x=\sec 2x$。

13. $\sec 2x=\frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x}$。

14. $2\sec 2x=\sec(x+45°)\sec(x-45°)$。

15. $\tan 2x+\sec 2x=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$。

16. $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$。

17. $2\sin x+\sin 2x=\frac{2\sin^3 x}{1-\cos x}$。

18. $\sin 3x=\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{\sin x}$。

19. $\tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$。

20. $\frac{\tan 2x+\tan x}{\tan 2x-\tan x}=\frac{\sin 3x}{\sin x}$。

21. $\sin(x+y)+\cos(x-y)=2\sin(x+\frac{1}{4}\pi)\sin(y+\frac{1}{4}\pi)$。

22. $\sin(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin(x-\frac{1}{4}\pi)\sin(y-\frac{1}{4}\pi)$。

23. $\tan x+\tan y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$。

24. $\tan(x+y)=\dfrac{\sin 2x+\sin 2y}{\cos 2x+\cos 2y}$。

25. $\dfrac{\sin x+\cos y}{\sin x-\cos y}=\dfrac{\tan\{\frac{1}{2}(x+y)+45^\circ\}}{\tan\{\frac{1}{2}(x-y)-45^\circ\}}$。

26. $\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos x$。

27. $\sin 4x=4\sin x\cos x-8\sin^3 x\cos x$
$=8\cos^3 x\sin x-4\cos x\sin x$。

28. $\cos 4x=1-8\cos^2 x+8\cos^4 x=1-8\sin^2 x+8\sin^4 x$。

29. $\cos 2x+\cos 4x=2\cos 3x\cos x$。

30. $\sin 3x-\sin x=2\cos 2x\sin x$。

31. $\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x=\cos^3 2x$。

32. $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$。

33. $\cos^4 x+\sin^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$。

34. $\cos^6 x-\sin^6 x=(1-\sin^2 x\cos^2 x)\cos 2x$。

35. $\cos^6 x+\sin^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$。

36. $\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{\cos 3x-\cos 5x}=\cot x$。

37. $\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{\sin x+\sin 3x}=2\cos 2x$。

38. $\csc x-2\cot 2x\cos x=2\sin x$。

39. $(\sin 2x-\sin 2y)\tan(x+y)=2(\sin^2 x-\sin^2 y)$。

40. $(1+\cot x+\tan x)(\sin x-\cos x)=\dfrac{\sec x}{\csc^2 x}-\dfrac{\csc x}{\sec^2 x}$。

41. $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=\dfrac{\sin^2 3x}{\sin x}$。

42. $\dfrac{3\cos x+\cos 3x}{3\sin x-\sin 3x}=\cot^3 x$。

43. $\sin 3x=4\sin x\sin(60^\circ+x)\sin(60^\circ-x)$。

44. $\sin 4x=2\sin x\cos 3x+\sin 2x$。

45. $\sin x+\sin(x-\frac{2}{3}\pi)+\sin(\frac{1}{3}\pi-x)=0$。

46. $\cos x\sin(y-z)+\cos y\sin(z-x)+\cos z\sin(x-y)=0$。

47. $\cos(x+y)\sin y-\cos(x+z)\sin z$
$=\sin(x+y)\cos y-\sin(x+z)\sin z$。

48. $\cos(x+y+z)+\cos(x+y-z)+\cos(x-y+z)$
$+\cos(y+z-x)=4\cos x\cos y\cos z$。

49. $\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(y+z)\cos(y-z)$
$+\sin(z+x)\cos(z-x)=\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$。

50. $\dfrac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}=\tan 60^\circ$。

51. $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=0$。

52. $\cos 36^\circ+\sin 36^\circ=\sqrt{2}\cos 9^\circ$。

53. $\tan 11^\circ 15'+2\tan 22^\circ 30'+4\tan 45^\circ=\cot 11^\circ 15'$。

設A, B, C為平面三角形之各角。求證

54. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$。

55. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$。

56. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$。

57. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$。

設 $A+B+C=90^\circ$。試證下列諸式。

58. $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$。

59. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\sin A\sin B\sin C$。

60. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\cos B\cos C$。

試證下列諸式。

61. $\sin(\sin^{-1}x+\sin^{-1}y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$。

62. $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)=\frac{x+y}{1-xy}$。

63. $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$。

64. $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$。

65. $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$。

66. $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$。

67. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{y}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{y-x}}$。

68. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-y}{x-z}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-y}{y-z}}$。

69. $\sin^{-1}x=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

70. $2\sec^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{2-x^2}$。

71. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=45°$。

72. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{4}{7}$。

73. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{63}{65}$。

74. $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{82}}+\sin^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{41}}=45°$。

75. $\sec^{-1}\frac{5}{3}+\sec^{-1}\frac{13}{12}=75°\,45'$。

76. $\tan^{-1}(2+\sqrt{3})-\tan^{-1}(2-\sqrt{3})=\sec^{-1}2$。

77. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=45°$。

78. $\tan^{-1}\dfrac{1}{1-2x+4x^2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{1+2x+4x^2}=\tan^{-1}\dfrac{1}{2x^2}$。

79. 設 $\cos x=\frac{3}{5}$, 求 $\sin\frac{1}{2}x$ 及 $\cos\frac{1}{2}x$。

80. 設 $\tan x=\frac{1}{2}$, 求 $\tan\frac{1}{2}x$。

81. 設 $\sin x+\cos x=\sqrt{\frac{1}{2}}$, 求 $\cos 2x$。

$x-\cos^2 x$。

82. 設 $\tan 2x=\frac{24}{7}$, 求 $\sin x$。

83. 設 $\cos 3x=\frac{23}{27}$, 求 $\tan x$。

84. 設 $2\csc x-\cot x=\sqrt{3}$, 求 $\sin\frac{1}{2}x$。

85. 求 $\sin 18°$ 及 $\cos 36°$。

求次之各值,

86. $a\sec x+b\csc x$, 已知 $\tan x=\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$。

87. $\sin 3x$, 已知 $\sin 2x=\sqrt{1-m^2}$。

88. $\sin x$, 已知 $\tan^2 x+3\cot^2 x=4$。

89. $\dfrac{\csc^2x-\sec^2x}{\csc^2x+\sec^2x}$, 已知 $\tan x=\sqrt{\frac{1}{7}}$。

90. $\cos x$, 已知 $5\tan x+\sec x=5$。

91. $\sec x$, 已知 $\tan x=\dfrac{a}{\sqrt{2a+1}}$。

試將下列各式簡單之。

92. $\dfrac{(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2}{\cos^2\frac{1}{2}(x-y)}$。

93. $\dfrac{\sin(x+2y)-2\sin(x+y)+\sin x}{\cos(x+2y)-2\cos(x+y)+\cos x}$。

94. $\dfrac{\sin(x-z)+2\sin x+\sin(x+z)}{\sin(y-z)+2\sin y+\sin(y+z)}$。

95. $\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{\sin 6x+\sin 4x}$。

96. $\tan^{-1}(2x+1)+\tan^{-1}(2x-1)$。

97. $\dfrac{1}{1+\sin^2x}+\dfrac{1}{1+\cos^2x}+\dfrac{1}{1+\sec^2x}+\dfrac{1}{1+\csc^2x}$。

98. $\sec^2 x-\sec^4 x-2\csc^2 x+\csc^4 x$。

單獨方程式之解法

SOLUTION OF SINGLE EQUATIONS

單個方程式之含有同角各函數,或相關角之同函數或異函數者。解之之法。先將方程變成相當式。令其所含之函數,爲同角之單個函數。

次用代數求因法演出之。

末將各式完全解之。而將所得之結果。代入原方程式。以核驗之。

試解 $\cos x=\sin 2x$。

由公式(12)，　$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$\therefore \cos x=2\sin x\cos x。$$

$$\therefore (1-2\sin x)\cos x=0。$$

$$\therefore \cos x=0 \text{ 或 } 1-2\sin x=0。$$

$$\therefore x=90° \text{ 或 } 270°, \text{ 或 } x=30° \text{ 或 } 150°。$$

以此各值代入原式。俱合。

求解下列之各方程式。

99. $\sin x=2\sin(\frac{1}{3}\pi+x)$。

100. $\sin 2x=2\cos x$。

101. $\cos 2x=2\sin x$。

102. $\sin x+\cos x=1$。

103. $\sin x+\cos 2x=4\sin^2 x$。

104. $4\cos 2x+3\cos x=1$。

105. $\sin x+\sin 2x=\sin 3x$。

106. $\sin 2x=3\sin^2 x-\cos^2 x$。

107. $\cot\theta=\frac{1}{3}\tan\theta$。

〔增註〕 θ 爲希臘第八字母。讀音爲"賽塔"。

108. $2\sin\theta=\cos\theta$。

109. $2\sin^2 x+5\sin x=3$。

110. $\tan x\sec x=\sqrt{2}$。

111. $\sin x=\cos 2x$。

112. $\tan x\tan 2x=2$。

113. $\sec x=4\csc x$。

114. $\cos\theta+\cos 2\theta=0$。

115. $\cot\frac{1}{2}\theta+\csc\theta=2$。

116. $\cot x\tan 2x=3$。

117. $\sin x\sec 3x=1$。

118. $\sin^2 x+\sin 2x=1$。　　**120.** $\cot x\tan 2x=\sec 2x$。

119. $\cos x\sin 2x\csc x=1$。　　**121.** $\sin 2x=\cos 4x$。

122. $\sin 2z\cot z-\sin^2 z=\frac{1}{2}$。

123. $\tan x+\tan 2x=\tan 3x$。

124. $\cot x-\tan x=\sin x+\cos x$。

125. $\tan^2 x=\sin 2x$。

126. $\tan x+\cot x=\tan 2x$。

127. $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=\cos 2x$。

128. $\sin x+\sin 2x=1-\cos 2x$。

129. $\sec 2x+1=2\cos x$。

130. $\tan 2x+\tan 3x=0$。

131. $\tan(\frac{1}{4}\pi+x)+\tan(\frac{1}{4}\pi-x)=4$。

132. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\cos x$。

133. $\tan x\tan 3x=-\frac{3}{5}$。

134. $\sin(45^\circ+x)+\cos(45^\circ-x)=1$。

135. $\tan x+\sec x=a$。

136. $\cos 2x=a(1-\cos x)$。

137. $(1-\tan x)\cos 2x=a(1+\tan x)$。

138. $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{12}\sin^2 2x$。

139. $\cos 3x+8\cos^3 x=0$。

140. $\sec(x+120^\circ)+\sec(x-120^\circ)=2\cos x$。

141. $\csc x=\cot x+\sqrt{3}$。

142. $4\cos 2x+6\sin x=5$。

143. $\cos x-\cos 2x=1$.

144. $\sin 4x-\sin 2x=\sin x$。

145. $2\sin^2 x-\sin^2 2x=2$。

146. $\cos 5x+\cos 3x+\cos x=0$。

147. $\sec x-\cot x=\csc x-\tan x$。

148. $\tan^2 x+\cot^2 x=\frac{10}{3}$。

149. $\sin 4x-\cos 3x=\sin 2x$.

150. $\sin x+\cos x=\sec x$。

151. $2\cos x\cos 3x+1=0$。

152. $\cos 3x-2\cos 2x+\cos x=0$。

153. $\tan 2x\tan x=1$。

154. $\sin(x+12^\circ)+\sin(x-8^\circ)=\sin 20^\circ$。

155. $\tan(60^\circ+x)\tan(60^\circ-x)=-2$。

156. $\sin(x+120^\circ)+\sin(x+60^\circ)=\frac{3}{2}$。

157. $\sin(x+30^\circ)\sin(x-30^\circ)=\frac{1}{2}$。

158. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$。

159. $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{7}{25}$。

160. $\tan(x+30^\circ)=2\cos x$。

161. $\sec x = 2\tan x + \frac{1}{4}$。

162. $\sin 11x \sin 4x + \sin 5x \sin 2x = 0$。

163. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$。

164. $\sin(x+12^\circ)\cos(x-12^\circ) = \cos 33^\circ \sin 57^\circ$。

165. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} \frac{1}{2}x = 120^\circ$。

166. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \tan^{-1} 3\sqrt{3}$。

167. $\sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x = \frac{2}{3}\pi$。

168. $\sin^{-1} x + 3\cos^{-1} x = 210^\circ$。

169. $\tan^{-1} x + 2\cot^{-1} x = 135^\circ$。

170. $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} 2x$。

171. $\tan^{-1} \dfrac{x+2}{x+1} + \tan^{-1} \dfrac{x-2}{x-1} = \frac{3}{4}\pi$。

172. $\tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2} = 60^\circ$。

173. $\cos 2\theta \sec \theta + \sec \theta + 1 = 0$。

174. $\sin x \cos 2x \tan x \cot 2x \sec x \csc 2x = 1$。

175. $\sin \frac{1}{2}x(\cos 2x - 2)(1 - \tan^2 x) = 0$。

〔授意〕 各因子。除第二個外。各等於0。其第二個因子。不能等於0。

176. $\sin 3x = \cos 2x - 1$。

177. $\tan x + \tan 2x = 0$。

178. $\sin 2\theta = \cos 3\theta$。

179. $(3 - 4\cos^2 x)\sin 2x = 0$。

180. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$。

181. $\sin\theta+2\sin 2\theta+3\sin 3\theta=0$。

182. $\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x+1=0$。

183. $\sin x+\sin 3x=\cos x-\cos 3x$。

184. $(1-\sqrt{1-\tan^2 x})\cos 2x \operatorname{vers} 3x=0$。

185. $\tan(\theta\times 45^\circ)=8\tan\theta$。

186. $\sin(x-30^\circ)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x$。

187. $\tan(\theta+45^\circ)\tan\theta=2$。

188. $\sin^{-1}\frac{1}{2}x=30^\circ$。

方程式之一切解法

SYSTEMS OF EQUATIONS

189. 解下之兩方程式。以求x及y。

$$x\sin\alpha+y\sin\beta=a, \tag{1}$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=b. \tag{2}$$

$(1)\times\cos\alpha$, $\quad x\sin\alpha\cos\alpha+y\sin\beta\cos\alpha=a\cos\alpha$, $\quad(3)$

$(2)\times\sin\alpha$, $\quad x\sin\alpha\cos\alpha+y\cos\beta\sin\alpha=b\sin\alpha$. $\quad(4)$

$(3)-(4)$, $\quad y(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)=a\cos\alpha-b\sin\alpha$. $\quad(5)$

$$\therefore y=\frac{a\cos\alpha-b\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

同例

$$x=\frac{b\sin\beta-a\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

〔增註〕 α 讀"挨爾發"。β 讀"倍搭"。均希臘字母也，又 ϕ 讀"非"。見下。

190. 試解下式以求 x 及 y。

$$\sin x+\sin y=a, \tag{1}$$

$$\cos x+\cos y=b。 \tag{2}$$

由第三十二章化(1)及(2)。

由(20)， $$2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)=a, \tag{3}$$

由(22)， $$2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)=b。 \tag{4}$$

(3) ÷ (4)， $$\tan\tfrac{1}{2}(x+y)=\frac{a}{b}。 \tag{5}$$

$$\therefore \sin\tfrac{1}{2}(x+y)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}。 \tag{6}$$

以 $\sin\frac{1}{2}(x+y)$ 之值代入(3)。

$$\cos\tfrac{1}{2}(x-y)=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}。 \tag{7}$$

由(5)， $$x+y=2\tan^{-1}\frac{a}{b}。 \tag{8}$$

由(7)， $$x-y=2\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}。 \tag{9}$$

於是 $$x=\tan^{-1}\frac{a}{b}+\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}。$$

而 $$y=\tan^{-1}\frac{a}{b}-\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}。$$

191. 試解下式以求r及θ。

$$r\sin\theta=a, \qquad (1)$$

$$r\cos\theta=b. \qquad (2)$$

(1)÷(2), $$\tan\theta=\frac{a}{b}. \qquad (3)$$

由(3), $$\theta=\tan^{-1}\frac{a}{b}. \qquad (4)$$

將(1)及(2)方之。相加

$$r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^2+b^2.$$

$$\therefore r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

192. 試解下式以求r及θ。

$$r\sin(\theta+\alpha)=a, \qquad (1)$$

$$r\cos(\theta+\beta)=b. \qquad (2)$$

展開(1)及(2),

$$r\sin\theta\cos\alpha+r\cos\theta\sin\alpha=a. \qquad (3)$$

$$r\cos\theta\cos\beta-r\sin\theta\sin\beta=b. \qquad (4)$$

如189題解(3)及(4)。以求$r\sin\theta$及$r\cos\theta$。再如191題求r及θ。

193. 試解下式以求r, θ及ϕ。

$$r\cos\phi\sin\theta=a, \qquad (1)$$

$$r\cos\phi\cos\theta=b, \qquad (2)$$

$$r\sin\phi=c. \qquad (3)$$

(1)÷(2),　　$\tan\theta=\frac{a}{b}$.

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\frac{a}{b}. \tag{4}$$

方(1)及(2),相加

$$r^2\cos^2\phi=a^2+b^2. \tag{5}$$

(3)÷(5),　　$\tan\phi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\therefore\ \phi=\tan^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{6}$$

方(3)加於(5)。

$$r^2=a^2+b^2+c^2.$$

$$\therefore\ r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \tag{7}$$

試解下列方程式之各羣,以求r, θ, ϕ, x及y。

194. $x\sin 21^\circ+y\cos 44^\circ=179.70,$

$x\cos 21^\circ+y\sin 44^\circ=232.30.$

195. $\sin x-\sin y=0.7038,$

$\cos x-\cos y=-0.7245.$

196. $r\sin\theta=92.344,$

$r\cos\theta=205.309.$

197. $r\sin(\theta-19^\circ 18')=59.4034,$

$r\cos(\theta-30^\circ 54')=147.9347.$

198. $r\cos\phi\cos\theta=-46.7654,$

$r\sin\phi\cos\theta=81,$

$r\sin\theta=-54.$

199. 於下式消去θ。

$$x=r(\theta-\sin\theta),$$

$$y=r(1-\cos\theta).$$

(授意) $1-\cos\theta=\operatorname{vers}\theta,\quad \therefore\ \theta=\operatorname{vers}^{-1}\frac{y}{r}.$

紀 已 化

第陸編 化

表之構造

CONSTRUCTION OF TABLES

表 見

第四十三章

對數 号

LOGARITHMS

對數之性質 (Properties of Logarithms) 除單位外。任取某正數爲底。若此數之若干方等於某數。則此若干方之指數。謂之某數之某底對數。

例如 $a^n=N$。則 $n=\log_aN$。而讀爲 n 爲 N 之 a 底對數。

令 a 爲底。M 及 N 爲任何正數。而 m 及 n 爲其 a 底之對數。如是得

$$a^m=M, \qquad a^n=\mathrm{N},$$

$$m=\log_aM, \qquad n=\log_aN.$$

則於任意之對數。可知

1. 1之對數爲0。

因 $\qquad a^0=1. \qquad \therefore 0=\log_a1.$

$a^{-1}=\frac{1}{a}$

乘相加
除相減 分子減分母

2. 一數之自底對數爲1.

因　　$a^1=a$.　　　　$\therefore 1=\log_a a$.

3. 一正數之反商之對數。爲其數之對數之負數。

因設　　$a^n=N$.　　　　則 $\frac{1}{N}=\frac{1}{a^n}=a^{-n}$.

$$\therefore \log_a\left(\frac{1}{N}\right)=-n=-\log_a N.$$

4. 兩個或多個正數積之對數。爲其因子之對數之和。

因　　$M\times N=a^m\times a^n=a^{m+n}$.

$$\therefore \log_a(M\times N)=m+n=\log_a M+\log_a N.$$

同理。可得兩個以上之因子之積之對數。

5. 兩個正數商之對數。爲被除數之對數減除數之對數。

因　　$\frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

$$\therefore \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=m-n=\log_a M-\log_a N.$$

6. 一正數之乘方之對數。爲其數之對數乘方指數。

因　　$N^p=(a^n)^p=a^{np}$.

$$\therefore \log_a(N^p)=np=p\log_a N.$$

7. 一正數之方根之對數。爲其數之對數被除於根指數。

因　　$\sqrt[r]{N}=\sqrt[r]{a^n}=a^{\frac{n}{r}}$.

$$\therefore \log_a\sqrt[r]{N}=\frac{n}{r}=\frac{\log_a N}{r}.$$

對數底之變換 以任何數a爲底之對數。可變爲以任何他數b爲底之對數。如次。

令N爲任意數。又設

$$n=\log_a N,\ 及\ m=\log_b N.$$

則 $$N=a^n,\ 又\ N=b^m.$$

$$\therefore a^n=b^m.$$

取任何底之對數。

$$n\log a=m\log b,$$

或 $$\log a\times\log_a N=\log b\times\log_b N.$$

由此已知$\log a$, $\log b$, $\log_a N$。可求得$\log_b N$。反之。已知$\log a$, $\log b$, $\log_b N$。可求得$\log_a N$。

兩種重要對數 對數之種數。雖爲無限。然常用者。僅有兩種。卽

1. 常用對數。亦名蒲理古斯氏對數。或十進對數。或小數對數。蓋以10爲底者也。

2. 自然對數。其底爲定值。卽與級數

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots$$

項數無限增大時之各項和相近者也。此定值。計算至小數七位。爲2.7182818。而以字母e表之。

常用對數。用於眞確之計算。自然對數。用於高等數學。

例題 XXV.

1. 已知 $\log_{10}2=0.30103$, $\log_{10}3=0.47712$, $\log_{10}7=0.84510$。求 $\log_{10}6$, $\log_{10}14$, $\log_{10}21$, $\log_{10}4$, $\log_{10}12$, $\log_{10}5$, $\log_{10}\frac{1}{2}$, $\log_{10}\frac{1}{4}$, $\log_{10}\frac{7}{2}$, $\log_{10}\frac{21}{20}$.

2. 以 1 題之已知各件。求 $\log_2 10$, $\log_3 5$, $\log_3 5$, $\log_7\frac{1}{2}$, $\log_{.35}\frac{9}{343}$.

3. 已知 $\log_{10}e=0.43429$, 求 $\log_e 2$, $\log_e 3$, $\log_e 5$, $\log_e 7$, $\log_e 8$, $\log_e 9$, $\log_e\frac{2}{3}$, $\log_e\frac{4}{5}$, $\log_e\frac{35}{27}$, $\log_e\frac{7}{60}$.

4. 於下之各方程式求 x

$$5^x=12,\ 16^x=10,\ 27^x=4.$$

第四十四章

指數級數及對數級數

EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC SERIES

指數級數　由二項式定理。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\times\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{1.2}\times\frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1.2.3}\times\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots \qquad (1)$$

此方程式。對於x之一切實數值。俱爲眞確。因二項式之定理。可推而用諸不可通約之指數也。(參看温氏中學代數學§299)。然亦僅對於n之數值大於1時爲眞確，蓋$\frac{1}{n}$之數值必小於1也。(温氏中學代數學§418)。

如(1)旣對於x之一切值爲眞確，則於$x=1$時。自亦眞確。

$$\therefore\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots \quad (2)$$

惟
$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

所以由(1)及(2)

$$\left[1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\right]^x$$
$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots$$

此方程式，於n之一切數值大於1時。俱爲眞確。取兩端之極限。如其n增大至無限。則得

$$\left(1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots \quad (3)$$

此式乃對於x之一切值。均爲眞確。可知兩級數對於x之一切值，均爲斂級數(convergent series)。

其左邊括弧內之無限級數之和。爲自然底 e

所以由(3)。 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \cdots$ (4)

計算 e 值如次。

	1.000000
2	1.000000
3	0.500000
4	0.166667
5	0.041667
6	0.008333
7	0.001388
8	0.000198
9	0.000025
	0.000003

相加　　$e = 2.71828.$

取小數十位　　$e = 2.7182818284.$

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 之極限　由二項定理

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + n \times \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2} \times \frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \times \frac{x^3}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}} x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}} x^3 + \cdots$$

此式對於n之一切值大於x時。俱爲眞確(温氏中學代數學§418)。試於n增大至無限時。取其極限。而x仍爲有限數。則得

$$\lim_{n \doteq \infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots$$

$$=e_x=\lim_{n \doteq \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} \quad (5)$$

〔增註〕$\underset{n \doteq \infty}{極限}\left(\quad\right)$讀爲因$n$而變之$\left(\quad\right)$之極限。

對數級數

令 $$y=\log_e(1+x),$$

則 $$1+x=e^y=\underset{n \doteq \infty}{極限}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

若n僅爲大數而非無限。則

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=1+x+\epsilon,$$

〔增註〕ϵ讀爲"愛潑雪倫,"

其ϵ爲n增大至無限時之近於極限0之一變數。所以

$$1+\frac{y}{n}=\sqrt[n]{1+x+\epsilon},$$

$$y=n\sqrt[n]{1+x+\epsilon}-n.$$

若n增大至無限。因之ϵ近於0而爲其極限，則有

$$y=\underset{n \doteq \infty}{極限}\left[n\sqrt[n]{1+x}-n\right].$$

設x小於1。則可由二項式定理。展開此式之右端，其結果為

$$y=\underset{n\doteq\infty}{\text{極限}}\left[n\left\{1+\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right\}-n\right]$$

$$=\underset{n\doteq\infty}{\text{極限}}\left[x+\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{x^2}{\lfloor 2}+\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right]$$

$$=x-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{\lfloor 2\,x^3}{\lfloor 3}-\frac{\lfloor 3\,x^4}{\lfloor 4}+\cdots$$

$$\therefore \log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

是謂對數級數。此級數僅於x在-1及$+1$之間，或x等於$+1$時。乃為斂級數。然即在此界限內，該級數之收斂極緩。故不適用於對數之計算。不若下文所得之級數，較為簡便也。

對數之計算(Calculation of Logarithms) 下文方程式

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots \qquad (1)$$

對於y之一切值小於1時。俱為眞確。故若能對於y之任何特別值小於1時為眞確，則以$-y$代y亦必眞確。如

$$\log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\cdots \qquad (2)$$

由(1)減(2)。

$$\log_e(1+y)-\log_e(1-y)=\log_e\left(\frac{1+y}{1-y}\right)。$$

求得 $$\log_e\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\right)。$$

令 $$y=\frac{1}{2z+1}。$$

則 $$\frac{1+y}{1-y}=\frac{z+1}{z}。$$

而 $$\log_e\left(\frac{z+1}{z}\right)=\log_e(z+1)-\log_e z$$

$$=2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\cdots\right)。$$

此級數對於z之一切正數值。恆為斂級數。

任何底a之對數。可由下之級數求之。

$\log_a(z+1)-\log_a z$

$$=\frac{2}{\log_e a}\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\cdots\right)。$$

例 計算$\log_e 2$至小數後五位為止。

令 $z=1$。 則$z+1=2$, $2z+1=3$。

而 $$\log_e 2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3\times 3^3}+\frac{2}{5\times 3^5}+\frac{2}{7\times 3^7}+\cdots$$

其算式可列之如次。

$$\begin{array}{r|lrl}
3 & \underline{2.000000} & & \\
9 & \underline{0.666667} \div & 1 = & 0.666667 \\
9 & \underline{0.074074} \div & 3 = & 0.024691 \\
9 & \underline{0.008230} \div & 5 = & 0.001646 \\
9 & \underline{0.000914} \div & 7 = & 0.000131 \\
9 & \underline{0.000102} \div & 9 = & 0.000011 \\
 & 0.000011 \div & 11 = & \underline{0.000001} \\
 & & \log_e 2 = & 0.693147
\end{array}$$

〔注意〕 於計算對數時。其演算之精確。可以隨時核驗。其法遇有集合數時。加其因子之各對數，於實際上言之，其集合數之對數，用加法爲最便。因如是則惟質數之對數。須用級數計算之耳。

例題 XXVI.

1. 計算 $\log_e 3$ 至小數五位止。

2. 計算 $\log_e 5$ 至小數五位止。

3. 計算 $\log_e 7$ 至小數五位止。

4. 計算 $\log_e 10$ 至小數十位止。

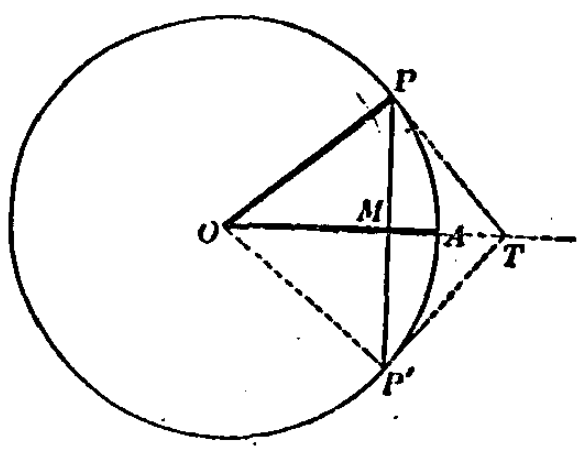
5. 計算 $\log_{10} 2$, $\log_{10} e$, $\log_{10} 11$。各至小數五位止。

第四十五章

小角之三角函數

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF SMALL ANGLES

72 圖



設 AOP(72圖)爲小於90°之任何角，而 x 爲其弧度。以 O 爲圓心，作一單位半徑之圓，而令 $\angle AOP' = \angle AOP$。自 P 及 P'，作圓之切綫，遇 OA 於 T。則由幾何學，得

PP' 弦 $<PP'$ 弧

$<PT+P'T$。

或以2除之。

$$MP<AP\text{弧}<PT。$$

或
$$\sin x<x<\tan x。$$

於是以 $\sin x$ 除之。

$$1<\frac{x}{\sin x}<\sec x。$$

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x。 \qquad (1)$$

則 $\frac{\sin x}{x}$ 必在 $\cos x$ 及1之間。

今設x角減小。則$\cos x$漸近於1。

因之x漸近於0時。$\frac{\sin x}{x}$之極限爲1。換言之。若x爲一極小之角。則$\frac{\sin x}{x}$之差。爲一極小值ϵ。而此極小值ϵ。與x同時漸近於0。

例 求1'之正弦及餘弦。

設x爲1'之弧度。則

$$x=\frac{2\pi}{360\times 60}=\frac{3.14159+}{10800}=0.00029088+$$

其次之數字爲8。

今$\sin x>0$。而$<x$。於是$\sin 1'$必在0及0.000290889之間。

又$\cos 1'=\sqrt{1-\sin^2 1'}>\sqrt{1-0.0003^2}>0.9999999$。

於是 $\cos 1'=0.9999999+$。

惟由(1) $\sin x>x\cos x$。

$$\begin{aligned}\therefore \sin 1'&>0.000290888\times 0.9999999\\&>0.000290888(1-0.0000001)\\&>0.000290888-0.0000000000290888\\&>0.000290887\text{。}\end{aligned}$$

於是$\sin 1'$。必在0.000290887及0.000290889之間。

求至八位小數。即爲

$$\sin 1'=0.00029088+\text{。}$$

其次之數字爲7或8。

例題 XXVII.

設 $\pi=3.141592653589$。

1. 計算 $\sin 1'$, $\cos 1'$ 及 $\tan 1'$ 至小數十一位。

2. 試以同法及公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 計算 $\sin 2'$ 至小數九位止。又此兩結果。能和協否。

3. 計算 $\sin 1^\circ$ 至小數四位。

4. 試由公式 $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$, 顯 $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$。

5. 試以自然正弦表,顯小於 $4^\circ 40'$ 之一切角,其 $\sin x$ 及 x。常有四位小數和協。

6. 設 $\log x$ 及 $\log\sin x$ 有小數五位和協。試由表內求 x 可有之最大值。

第四十六章

造三角表之沁氏法則

SIMPSON'S METHOD OF CONSTRUCTING A TRIGONOMETRIC TABLE.

由三十二章。

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B。$$

設令 $$A=x+2y,\ B=y,$$

則得 $$\sin(x+3y)+\sin(x+y)=2\sin(x+2y)\cos y,$$

或　$\sin(x+3y)=2\sin(x+2y)\cos y-\sin(x+y)$。

同理　$\cos(x+3y)=2\cos(x+2y)\cos y-\cos(x+y)$。　(1)

設$y=1'$。則後二方程式。變爲

$$\sin(x+3')=2\sin(x+2')\cos 1'-\sin(x+1'),$$

$$\cos(x+3')=2\cos(x+2')\cos 1'-\cos(x+1')。$$

於是令x依次等於$-1', 0', 1', 2', \cdots$。則得

$$\sin 2'=2\sin 1'\cos 1'。$$

$$\sin 3'=2\sin 2'\cos 1'-\sin 1'。$$

$$\sin 4'=2\sin 3'\cos 1'-\sin 2'。$$

. . . . .

及　$\cos 2'=2\cos^2 1'-1$。

$$\cos 3'=2\cos 2'\cos 1'-\cos 1'。$$

$$\cos 4'=2\cos 3'\cos 1'-\cos 2'。$$

. . . . . .

$\sin 1'$及$\cos 1'$既爲已知。則由以上諸方程式。可逐步計算任何角之正弦及餘弦。其正切,可將餘弦除正弦以求得之。

然此法亦祇可求至30°。因

$$\sin(30°+x)+\sin(30°-x)=\quad 2\sin 30°\cos x=\quad\cos x。$$

$$\cos(30°+x)-\cos(30°-x)=-2\sin 30°\sin x=-\sin x。$$

$$\therefore \sin(30^\circ+x)=\quad \cos x-\sin(30^\circ-x)。$$

$$\cos(30^\circ+x)=-\sin x+\cos(30^\circ-x)。$$

又正弦及餘弦。祇可計算至45°。

因
$$\sin(45^\circ+x)=\cos(45^\circ-x)。$$

$$\cos(45^\circ+x)=\sin(45^\circ-x)。$$

若用此法，則每次用$\cos 1'$相乘時。可簡單之，而令

$$\cos 1'=0.9999999=1-0.0000001。$$

〔注意〕此沁氏之法。實際上不甚適用。不若用三角函數中無限級數之展開式，較爲簡便且捷速也。

例題 XXVIII.

1. 計算$\sin 6'$及$\cos 6'$至小數七位。

於公式(1)。令$y=1^\circ$。假定

$$\sin 1^\circ=0.017454+,\ \cos 1^\circ=0.999848+。$$

2. 計算二度之正弦及餘弦。

3. 計算三度之正弦及餘弦。

4. 計算四度之正弦及餘弦。

5. 計算五度之正弦及餘弦。

第四十七章

馬氏定理

DE MOIVRE'S THEOREM

形狀爲$\cos x+i\sin x$之式。乃近世解析法內之重要部分。其$i=\sqrt{-1}$。

已知之兩式

$$\cos x+i\sin x,\qquad \cos y+i\sin y。$$

其乘積爲

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)$$
$$=\cos x\cos y-\sin x\sin y+i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)$$
$$=\cos(x+y)+i\sin(x+y))。$$

故如

$$\cos x+i\sin x,\qquad \cos y+i\sin y$$

形之兩式。其積與原式同形。惟變x或y爲$x+y$耳。換言之。卽此類乘積之角。爲其各因子諸角之和也。

若x與y相等。則由前卽得

$$(\cos x+i\sin x)^2=\cos 2x+i\sin 2x。$$

再
$$(\cos x+i\sin x)^3=(\cos x+i\sin x)^2(\cos x+i\sin x)$$
$$=(\cos 2x+i\sin 2x)(\cos x+i\sin x)$$
$$=\cos 3x+i\sin 3x。$$

同理
$$(\cos x+i\sin x)^4=\cos 4x+i\sin 4x。$$

又於通例。設n爲正整數。

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx。\qquad (1)$$

所以於n爲正整數時。欲求$\cos x+i\sin x$式之n方。祇須以n乘x角。

又設n爲正整數如前。則

$$\left(\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n}\right)^n=\cos x+i\sin x.$$

$$\therefore (\cos x+i\sin x)^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n}$$

但x可以2π之任何整倍數增加。而不變$\cos x+i\sin x$。於此得一切n個式，

$$\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n},$$

$$\cos\frac{x+2\pi}{n}+i\sin\frac{x+2\pi}{n},$$

$$\cos\frac{x+4\pi}{n}+i\sin\frac{x+4\pi}{n},\cdots,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cos\frac{x+(n-1)2\pi}{n}+i\sin\frac{x+(n-1)2\pi}{n},$$

爲$\cos x+i\sin x$之n次方根。而此外別無他根。因

$$\cos\frac{x+n2\pi}{n}+i\sin\frac{x+n2\pi}{n}$$

$$=\cos\left(\frac{x}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{x}{n}+2\pi\right)=\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n},$$

而 $$\cos\frac{x+(n+1)2\pi}{n}+i\sin\frac{x+(n+1)2\pi}{n}$$

$$=\cos\left(\frac{x+2\pi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{x+2\pi}{n}+2\pi\right)$$

$$=\cos\frac{x+2\pi}{n}+i\sin\frac{x+2\pi}{n}$$

餘類推。

所以設n爲正整數。

$$(\cos x+i\sin x)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\cos\frac{x+2k\pi}{n}+i\sin\frac{x+2k\pi}{n} \tag{2}$$

($k=0, 1, 2, \ldots n-1$. 下仿此)。

由(1)及(2)，設m, n，均爲正整數。即得

$$(\cos x+i\sin x)^{\frac{m}{n}}=\{(\cos x+i\sin x)^{\frac{1}{n}}\}^m$$

$$=\cos\frac{m}{n}(x+2k\pi)+i\sin\frac{m}{n}(x+2k\pi). \tag{3}$$

終設$-\frac{m}{n}$爲一負分數

$$(\cos x+i\sin x)^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{(\cos x+i\sin x)^{\frac{m}{n}}}.$$

但 $$\frac{1}{\cos x+i\sin x}=\frac{\cos x-i\sin x}{(\cos x+i\sin x)(\cos x-i\sin x)}$$

$$=\frac{\cos x-i\sin x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$$

$$=\cos x-i\sin x$$

$$=\cos(-x)+i\sin(-x).$$

所以 $(\cos x+i\sin x)^{-\frac{m}{n}}=\{\cos(-x)+i\sin(-x)\}^{\frac{m}{n}}$

$$\cos\frac{m}{n}(-\overline{x+2k\pi})+i\frac{m}{n}(-\overline{x+2k\pi}),$$

$$=\cos\left\{-\frac{m}{n}(x+2k\pi)\right\}+i\sin\left\{-\frac{m}{n}(x+2k\pi)\right\}. \tag{4}$$

因之不論n或正或負或整數或分數。

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos(n(x+2k\pi))+i\sin(n(x+2k\pi)). \quad (5)$$

例 求-1之三個立方根。

因 $$-1=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ.$$

$$\therefore (-1)^{\frac{1}{3}}=\cos\frac{180^\circ+2k\pi}{3}+i\sin\frac{180^\circ+2k\pi}{3}(k=0,\ 1,\ 2).$$

故得-1之三個立方根爲

$$\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ,\quad \cos 180^\circ+i\sin 180^\circ,\quad \cos 300^\circ+i\sin 300^\circ.$$

或 $$\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\quad -1,\quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

由馬氏定理。則於n爲整數時。可以$\sin\theta$及$\cos\theta$表$\sin n\theta$及$\cos n\theta$。

如 $$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

$$=\cos^n\theta+in\cos^{n-1}\theta\sin\theta+i^2\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+i^3\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\dots$$

或，因 $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=+1,\ \dots,$

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos^n\theta+in\cos^{n-1}\theta\sin\theta$$

$$-\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta-i\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\dots$$

今以方程分表其實量及幻量。得

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots,$$

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\lfloor 5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots$$

例題 XXIX.

1. 求 -1 及 $+1$ 之六方根。
2. 求 i 之三個立方根。
3. 求 $-i$ 之四個四方根。
4. 試以 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 表 $\sin 4\theta$ 及 $\cos 4\theta$。

第四十八章

展開 SIN X, COS X 及 TAN X 爲無限級數

EXPANSION OF SIN X, COS X AND TAN X IN INFINITE SERIES

設有一本位弧。簡單表之爲1。

又命　$\cos 1+i\sin 1=k$。

則　$\cos x+i\sin x=(\cos 1+i\sin 1)^x=k^x$。

以 $-x$ 代 x。

$$\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x=k^{-x}.$$

即　　$$\cos x + i\sin x = k^x,$$

及　　$$\cos x - i\sin x = k^{-x}.$$

將兩式相加及相減。而以2除其和。$2i$除其較。得

$$\cos x = \frac{1}{2}(k^x + k^{-x}), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(k^x - k^{-x}).$$

但　　$$k^x = (e^{\log k})^x = e^{x\log k}, \qquad k^{-x} = e^{-x\log k},$$

而　　$$e^{x\log k} = 1 + x\log k + \frac{x^2(\log k)^3}{\lfloor\!\underline{2}} + \frac{x^3(\log k)^2}{\lfloor\!\underline{3}} + \cdots,$$

$$e^{-x\log k} = 1 - x\log k + \frac{x^2(\log k)^2}{\lfloor\!\underline{2}} - \frac{x^3(\log k)^3}{\lfloor\!\underline{3}} + \cdots$$

$$\therefore \quad \cos x = \frac{1}{2}(k^x + k^{-x}) = 1 + \frac{x^2(\log k)^2}{\lfloor\!\underline{2}} + \frac{x^4(\log k)^4}{\lfloor\!\underline{4}} + \cdots,$$

$$\sin x = \frac{1}{i}\left\{x\log k + \frac{x^3(\log k)^3}{\lfloor\!\underline{3}} + \frac{x^5(\log k)^5}{\lfloor\!\underline{5}} + \cdots\right\}.$$

於此祇須求k之值。即以x除上文之末方程式，並令x漸近於0。即得。

如是乃有

$$x\text{近於}0\text{之}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\text{之極限} = \frac{1}{i}\log k.$$

但　　$$x\text{近於}0\text{之}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\text{之極限} = 1.$$

$$\therefore \log k = i.$$

$$\therefore k = e^i.$$

故得

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{xi}+e^{-xi})=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

$$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{xi}-e^{-xi})=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots$$

以此兩級數相除。

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}\cdots$$

由此級數。則任意角之三角函數。計算甚易也。

惟計算時。須記憶x爲已知角之弧度。

例題 XXX.

試以適纔所得之級數,證明

1. $\sin^2x+\cos^2x=1$.
2. $\sin(-x)=-\sin x$ 及 $\cos(-x)=\cos x$.
3. $\sin 2x=2\sin x\cos x$.
4. $\cos 2x=1-2\sin^2x$.
5. 求$\sec x$之級數。直至含有x之6方之項爲止。
6. 求$x\cot x$之級數。令其

$$x\cot x=\frac{x}{\sin x}\cos x.$$

7. 計算 $\sin 10^\circ$ 及 $\cos 10'$ 至小數五位,

8. 計算 $\tan 15'$ 至小數五位。

9. 由 $\cos x$ 之指數值。顯

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

10. 由 $\sin x$ 之指數值。顯

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

球　面　部

第柒編

球面直角三角形

THE RIGHT SPHERICAL TRIANGLE

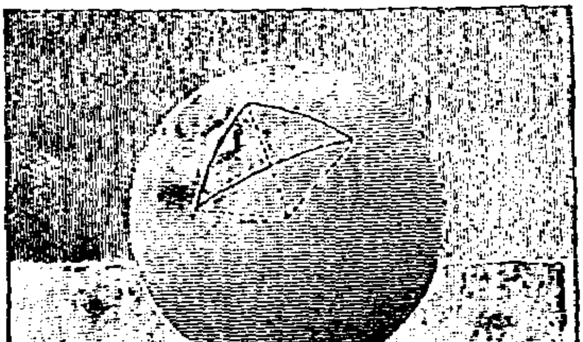
第四十九章

緒　論

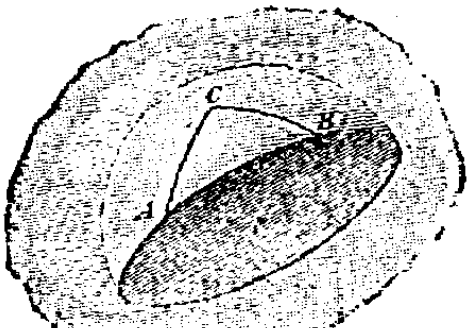
INTRODUCTION

球面三角法 (Spherical Trigonometry) 之目的。在釋明球面三角形之解法。欲解球面三角形。須由已知之任何三項。而計算其餘三事。

73 圖



74 圖



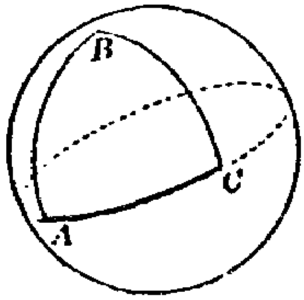
球面三角形之三邊。爲三個大圓之弧。如 AB (74 圖) 爲大圓之弧。球面三角形之三邊。以度分秒測之。卽以球半徑至三角形各頂點所成之平面角測之也。故三邊之測度。與半徑之長無關。因半徑可有何之數值如 1 者也。

球面三角形之三角，以三邊之平面所成之二面角測之。其每角之度數，以某大圓弧之度測之。即以角頂爲極，而夾於角之兩邊間之大圓弧也。

各邊可有自0°至360°之任何值，但本書僅及於小於180°之各邊，各角可有自0°至180°之任何值。

一個球面直角三角形。可有一個兩個三個直角。

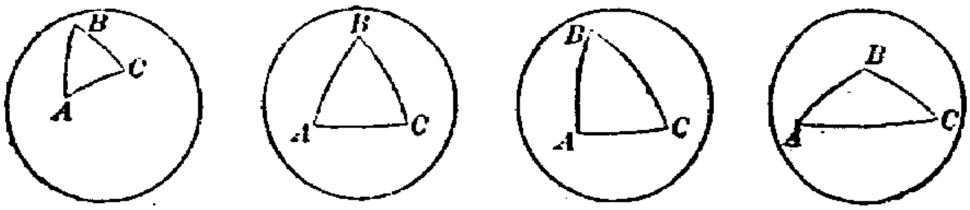
75 圖



設一球面三角形。有一邊或多邊等於一象限。則此三角形謂之象限三角形(Quadrantal Triangle)。如75圖。

設一球面三角形之任何兩項或同小於90°，或同大於90°。則稱爲同類(Alike in Kind)。設一小於90°，而一大於90°。則稱爲異類(Unlike in Kind)。

76 圖



二等邊　　等邊　　直角　　斜角

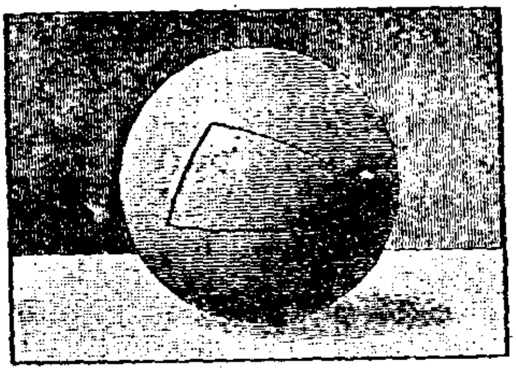
球面三角形之名，爲二等邊，等邊，等角，直角及斜角。其定義均如平面三角形。

下列之定理。已於幾何學內證明。(參看溫氏幾何學§§815, 790, 795, 793)。

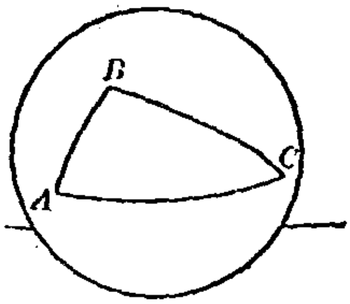
1. 設一球面三角形之兩角不等。則其兩對邊亦不等。大邊恆對大角，反之亦然。

2. 球面三角形三邊之和。必小於360°。

77 圖



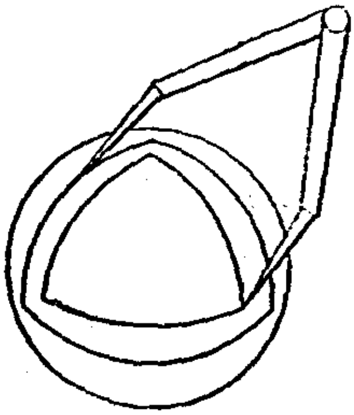
78 圖



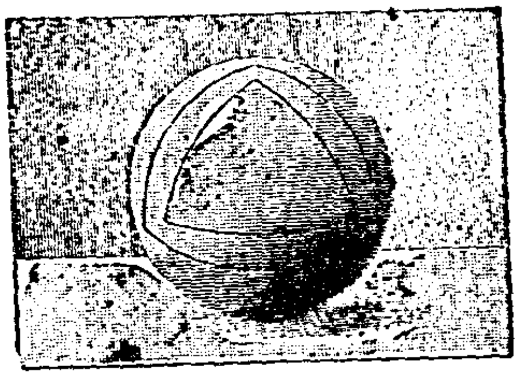
3. 球面三角形三角之和。必大於180°而小於540°。

4. 設以球面三角形之各頂點爲極。作大圓弧。則成第二個三角形。與第一個有關係。卽任一形內之各角。爲其他一形內各對邊之補角。

79 圖



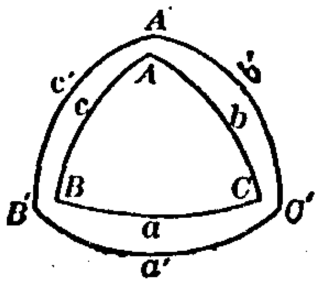
80 圖



如定理4所示之兩個球面三角形(卽79圖,80圖)。謂之極三角形(Polar Triangles)。或名互爲補角之三角形(Supplemental Triangles)。

設以A, B, C（81圖）表示某三角形之角，而a, b, c為其各對邊，又設以A', B', C'及a', b', c'表示其極三角形之相當各角及各邊。則由定理4。得下列之六個方程式，

81 圖



$$A+a'=180°,$$
$$B+b'=180°,$$
$$C+c'=180°,$$
$$A'+a=180°,$$
$$B'+b=180°,$$
$$C'+c=180°,$$

例題 XXXI.

1. 三角形之各角為70°, 80°及100°。求其極三角形之各邊。

2. 三角形之各邊為40°, 90°及125°。求其極三角形之各角。

3. 設一個三角形有三直角。求證其各邊俱為象限。

4. 試證有兩直角之三邊形。其對直角之兩邊俱為象限，而其第三角以其對邊上之度數測之。

5. 已知球半徑之長。如欲以長之單位。求一球面三角形之各邊，（卽向用弧度測算者）。當用何法。

6. 設球半徑為4呎。求2題內之三角形各邊之長。

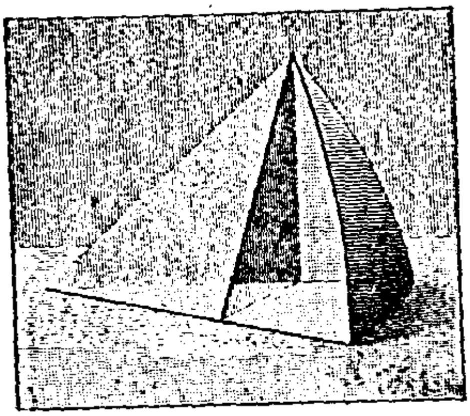
第五十章

關於球面直角三角形之公式

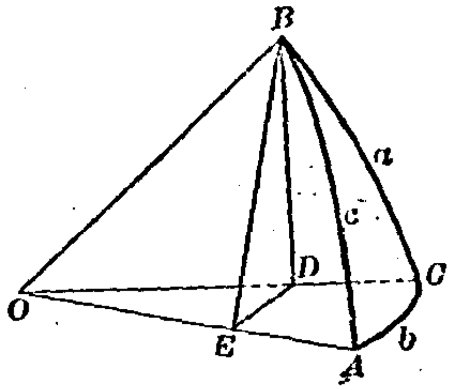
FORMULAS RELATING TO RIGHT SPHERICAL TRIANGLES

由例題XXXI內之3題及4題。可知尙須推究者。惟僅含一直角之球面直角三角形耳。

82 圖



83 圖



設ABC(83圖)爲僅含一直角之球面直角三角形。而A, B, C爲其各角。a, b, c爲其各對邊。

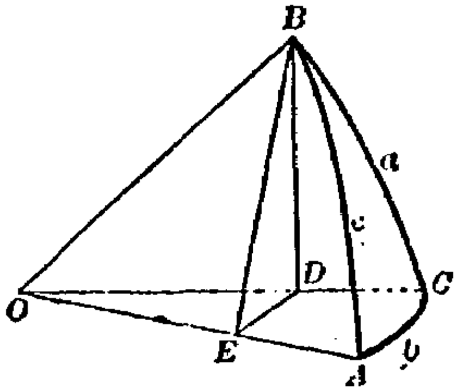
令C爲直角。而令其餘各項。皆小於$90°$。又令其球半徑爲1。

設通過各邊之平面。交於OA, OB, OC諸半徑。

又設一平面⊥OA。通過B點而截OA於E，及OC於D。作BE, BD及DE。

BE及DE各⊥OA(温氏幾何學§501)。故$\angle BED=A$。其平面BDE⊥平面AOC(温氏幾何學§554),所以BDE及BOC兩平面之交綫BD⊥平面AOC(温氏幾何學§556)。故卽⊥OC及DE。

84 圖



今

$$\cos c=OE=OD\times\cos b,$$

而 $$OD=\cos a.$$

故

$$\cos c=\cos a\cos b. \qquad [38]$$

又 $$\sin a=BD=BE\times\sin A,$$

而 $$BE=\sin c.$$

故 $$\left.\begin{aligned}\sin a&=\sin c\sin A\\ \sin b&=\sin c\sin B\end{aligned}\right\}. \qquad [39]$$

換字母

又 $$\cos A=\frac{DE}{BE}=\frac{OE\tan b}{OE\tan c}.$$

所以 $$\left.\begin{aligned}\cos A&=\tan b\cot c\\ \cos B&=\tan a\cot c\end{aligned}\right\}. \qquad [40]$$

換字母

又 $$\cos A=\frac{DE}{BE}=\frac{OD\sin b}{\sin c}=\cos a\frac{\sin b}{\sin c}.$$

由(39)代$\dfrac{\sin b}{\sin c}$值。得

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\cos a\sin B\\ \cos B&=\cos b\sin A\end{aligned}\right\}. \qquad [41]$$

換字母

又 $$\sin b=\frac{DE}{OD}=\frac{BD\cot A}{OD}=\tan a\cot A.$$

所以　　$\left.\begin{array}{l}\sin b=\tan a\cot A\\ \sin a=\tan b\cot B\end{array}\right\}$　　(42)

換字母

設由(41)代$\cos a$及$\cos b$之各值於(38)內，得

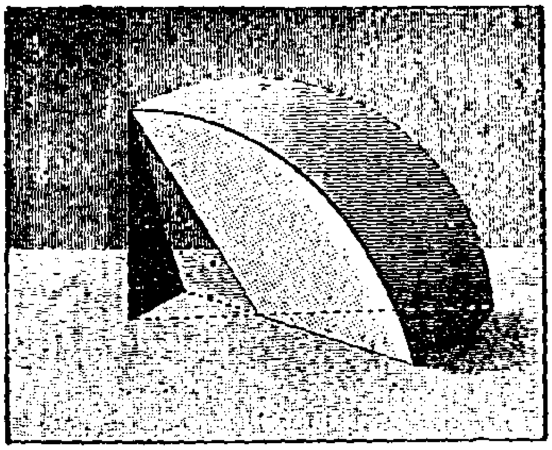
$$\cos c=\cot A\cot B. \qquad (43)$$

〔注意〕欲得(39)－(42)內之第二公式。須作一輔助平面。過A而與OB正交。

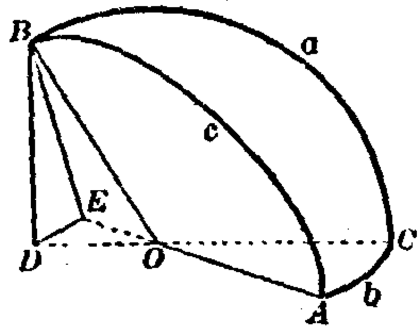
以上十個公式。用以解任何球面直角三角形已足。於推論此諸公式時。其三角形之各項。除直角外。俱假定爲小於90°。然卽不如此假定時。其公式仍準確也。

設一邊a爲大於90°。而於此例按83圖作一同樣之圖(如86圖)。

85 圖



86 圖



其輔助平面BDE。交CO及AO之延綫於球心O外。則得

$$\begin{aligned}\cos c&=-OE=-OD\cos DOE\\ &=-(-\cos a)\cos b=\cos a\cos b.\end{aligned}$$

結果與(38)同。

又其餘各公式〔39〕—〔43〕。對於此例亦眞確，

於任何例。可得同類之結果，

換言之。卽公式〔38〕—〔43〕。乃完全眞確者也，

例題 XXXII.

1. 試由公式〔38〕。顯明球面直角三角形之斜邊小於或大於90°。視其兩邊之爲同類或異類而定，

2. 試由公式〔41〕。顯明球面直角三角形內之任一角。與其對邊恆爲同類，

3. 已知下列諸項。試由公式〔38〕—〔43〕推解其餘各項之值。設(i)$c=90°$,(ii)$a=90°$,(iii)$c=90°$及$a=90°$,(iv)$a=90°$及$b=90°$。

設由〔38〕—〔43〕及〔18〕—〔23〕。推論次之諸公式。

4. $\tan^2\frac{1}{2}b=\tan\frac{1}{2}(c-a)\tan\frac{1}{2}(c+a)$.

〔提示〕 由〔38〕代$\cos b$值於〔18〕內。

5. $\tan^2(45°-\frac{1}{2}A)=\tan\frac{1}{2}(c-a)\cot\frac{1}{2}(c+a)$.

6. $\tan^2\frac{1}{2}B=\sin(c-a)\csc(c+a)$.

7. $\tan^2\frac{1}{2}c=-\cos(A+B)\sec(A-B)$.

8. $\tan^2\frac{1}{2}a=\tan[\frac{1}{2}(A+B)-45°]\tan[\frac{1}{2}(A-B)+45°]$.

9. $\tan^2(45°-\frac{1}{2}c)=\tan\frac{1}{2}(A-a)\cot\frac{1}{2}(A+a)$.

10. $\tan^2(45°-\frac{1}{2}b)=\sin(A-a)\csc(A+a)$.

11. $\tan^2(45°-\frac{1}{2}B)=\tan\frac{1}{2}(A-a)\tan\frac{1}{2}(A+a)$

第五十一章

訥氏規則

NAPIER'S RVLES

前章內之十個公式。益顯直角三角形三邊及兩斜角五者之關係。而此諸關係。可以對數鼻祖訥白爾氏所造之兩規則示之。

按訥氏之設想。直角(公式所無)不在計算之內。而其斜邊及兩斜角。各以其餘角代之。故其所定之五個部分。爲 $a, b, Co. A, Co. c, Co. B$。

五部分中之任一分。可稱之爲**中部**(middle part)。與之直接相鄰之二分。謂之**鄰部**(adjacent parts)。而其餘二分。謂之**對部**(opposite parts)。訥氏之規則如下。

規則 I. 任何中部之正弦。等於其鄰(ad.)部之正切(tan)之積。

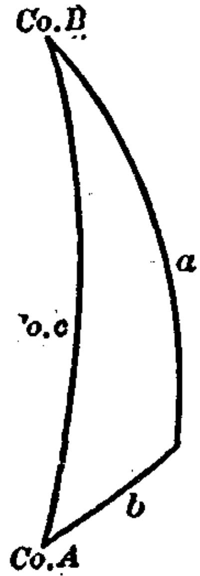
規則 II. 任何中部之正弦。等於其對(op.)部之餘弦(cos.)之積。

此二規則。由 tan. ad. 及 cos. op. 各字樣表之。尤易記憶。

驗此二規則之謬誤與否。可取五部分中之任一分爲中部。依規則計算。而以其結果。與公式(38)–(43)內所含之式比較。卽得。

例如任取$Co.c$爲中部，則$Co.A$及$Co.B$爲鄰部，而a及b爲對部，觀87圖自明。則由訥氏規則，

87 圖



$$\sin(Co.c)=\tan(Co.A)\tan(Co.B),$$

或 $$\cos c=\cot A\cot B;$$

$$\sin(Co.c)=\cos a\cos b,$$

或 $$\cos c=\cos a\cos b.$$

凡此結果，各與公式〔43〕及〔38〕相同。

〔補〕 若取a爲中部，則$Co.B$與b爲鄰部，若取$Co.B$爲中部，則$Co.c$與a爲鄰部。

例題 XXXIII.

1. 證明訥氏規則，可用以推出(39)－(42)內之諸式。

2. 設取斜邊，兩斜角及兩邊之餘角爲三角形之五部，則訥氏之規則，變成何式。

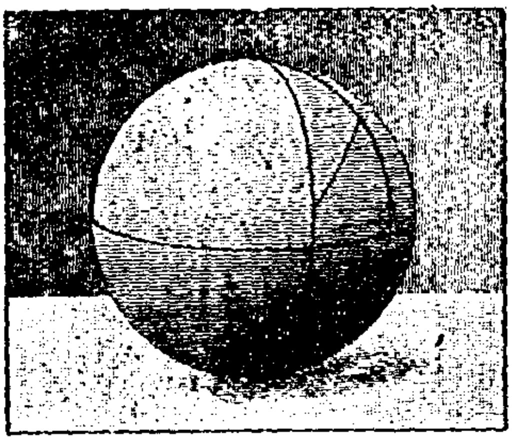
第五十二章

球面直角三角形之解法

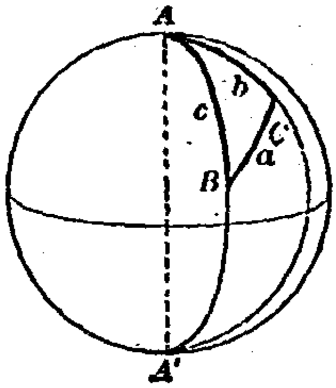
SOLUTION OF THE RICHT SPHERICAL TRIANGLE

由公式(38)－(43)，可解一切可有例之直角三角形，但於任何例，除直角外須有二項爲已知。

88 圖



89 圖



例 I

已知兩邊 a 及 b。

由 (38) 及 (42)。得

$$\cos c = \cos a \cos b,$$
$$\tan A = \tan a \csc b,$$
$$\tan B = \tan b \csc a.$$

用 $\cos c = \cot A \cot B$ (43) 試驗之。

例　已知 $a = 27° 28' 36''$, $b = 51° 12' 8''$。求解三角形。

$\log \cos a = 9.94802$
$\log \cos b = 9.79697$
$\log \cos c = 9.74499$
$c = 56° 13' 41''$

$\log \tan a = 9.71605$
$\log \csc b = 0.10826$
$\log \tan A = 9.82431$
$A = 33° 42' 51''$

$\log \tan b = 10.09476$
$\log \csc a = 0.33594$
$\log \tan B = 10.43070$
$B = 69° 38' 54''$

試驗

$\log \cot A = 10.17569$
$\log \cot B = 9.56930$
$\log \cos c = 9.74499$

例 II

已知斜邊c及一邊a。

由(38),(39)及(40)。得

$$\cos b=\cos c\sec a,$$

$$\sin A=\sin a\csc c,$$

$$\cos B=\tan a\cot c.$$

試用$\cos B=\cos b\sin A$ (41)核驗之。

此二角通例與$\sin A$相當。一為銳而一為鈍。但此處A之或銳或鈍。甚易決定。因A與a必為同類故也。(參看例題XXXII之2題。)

例 III

已知一邊a及對角A。

由(39),(42),及(41)。得

$$\sin c=\sin a\csc A,$$

$$\sin b=\tan a\cot A,$$

$$\sin B=\sec a\cos A.$$

或由(38)及(40)。得

$$\cos b=\cos c\sec a,$$

$$\cos B=\tan a\cot c.$$

試用$\sin b=\sin c\sin B$ (39)核驗之。

c 值既得。則 b 與 B 可由其餘弦值而決定。惟 c 必由其正弦求得。故 c 通例可有互爲補角之兩值。於此可有兩解。

於實際上言之。設 b, c, 兩邊擴張相遇於 A' (89 圖)。則 ABC 及 $A'BC$ 兩個直角三角形。同用 a 邊，而 $A=A'$。又 $A'C=180^\circ-B$, $A'B-180^\circ-c$, 而 $\angle A'BC=180^\circ-B$。故設 ABC 爲一解。其 $A'BC$ 必爲又一解。

例　IV

已知一邊 a 及鄰角 B。

由〔40〕,〔42〕及〔41〕。得

$$\tan c=\tan a\sec B,$$
$$\tan b=\sin a\tan B,$$
$$\cos A=\cos a\sin B.$$

試用 $\cos A=\tan b\cot c$〔40〕核驗之,

例　V

已知斜邊 c 及一角 A。

由〔39〕,〔40〕及〔43〕。得

$$\sin a=\sin c\sin A,$$
$$\tan b=\tan c\cos A,$$
$$\cot B=\cos c\tan A.$$

此處 a 由 $\sin a$ 決定。因 a 與 A 必爲同類故也。(參看例題 XXXII 內之 2 題)。

試用 $\sin a=\tan b\cot B$〔42〕核驗之,

例 VI

已知兩角A及B。

由〔43〕及〔41〕。得

$$\cos c=\cot A\cot B,$$

$$\cos a=\cos A\csc B,$$

$$\cos b=\cos B\csc A.$$

試用$\cos c=\cos a\cos b$〔38〕核驗之。

〔注意1〕 於例I(已知a及b)。若c爲極近於0°或180°。則先求B。再如例IV求c。較爲準確。

〔注意2〕 於例II(已知c及a)。若b極近於0°或180°。則由推出之公式計算之。較爲準確。如下。

$$\tan^2\tfrac{1}{2}b=\tan\tfrac{1}{2}(c-a)\tan\tfrac{1}{2}(c+a) \qquad \text{(五十章4題)}$$

若A極近於90°。而不能於表內準確求得。則可由推出之公式計算之。如下。

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}A)=\tan\tfrac{1}{2}(c-a)\cot\tfrac{1}{2}(c+a). \qquad \text{(五十章5題)}$$

若B不能確切求得。可用下公式計算之。

$$\tan^2\tfrac{1}{2}B=\sin(c-a)\csc(c+a). \qquad \text{(五十章6題)}$$

〔注意3〕 於例III(已知a及A)。設諸公式不能得確切之結果。則可用推出之公式計算之。如下。

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}c)=\tan\tfrac{1}{2}(A-a)\cot\tfrac{1}{2}(A+a), \qquad \text{(五十章9題)}$$

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}b)=\sin(A-a)\csc(A+a), \qquad \text{(五十章10題)}$$

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)=\tan\tfrac{1}{2}(A-a)\tan\tfrac{1}{2}(A+a). \qquad \text{(五十章11題)}$$

〔注意4〕 於例IV（已知a及B）。若A極近於0°或180°。則可先計算b而後求A。較爲準確。

〔注意5〕 於例V（已知c及A）。若a極近於90°。則先計算b。而後由公式〔42〕計算a。

〔注意6〕 於例VI（已知A及B）。其各邊之值。由推出之公式計算之。較爲準確，如下。

$\tan^2\frac{1}{2}c=-\cos(A+B)\sec(A-B)$,　　（五十章7題）

$\tan^2\frac{1}{2}a=\tan[\frac{1}{2}(A+B)-45^\circ]\tan[45^\circ+\frac{1}{2}(A-B)]$,（五十章8題）

$\tan^2\frac{1}{2}b=\tan[\frac{1}{2}(A+B)-45^\circ]\tan[45^\circ-\frac{1}{2}(A-B)]$.

〔注意7〕 於例I, IV, 及V。其解法恆可用。於其餘各例。欲求解法適用。則下列各件爲必需。且祗此已足。可不必他求。卽於例II, $\sin a<\sin c$, 於例III, a與A爲同類，而$\sin A<\sin a$, 於例VI, $A+B+C>180^\circ$。而A與B之較$<90^\circ$是也。

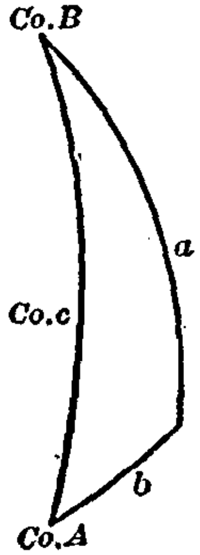
〔注意8〕 解球面直角三角形。及平面直角三角形。其兩種公式間相似之點。辨之甚易。設球半徑之長爲無限。則前者與後者相同。於是其各邊之餘弦。各等於1。而其各邊正弦之比。及各邊正切之比。必等於各邊之比。

〔注意9〕 解球面三角形時。其各函數之代數的符號，須特別注意。必加各函數之符號於函數之上。於是方程式第一項函數之符號或＋或－。視正弦之定律。使方程式之第二項成或正或負（參看下六十二章例1）。而斷定之。

若其函數爲餘弦,正切,餘切。則由＋符號可知其角$<90°$。由－符號可知其角$>90°$。而由表內所得之補角。爲不可少之件。

若其函數爲正弦。因一角之正弦與其補角之正弦相同。故由表求得之銳角。及其補角。即可視作解法。否則必含有兩義之條例也。其兩義之條例。視例題XXXII之1題及2題。

90圖



由訥氏規則。甚易求其所要之公式。

用此規則時。須取一中部。令其已知之兩項。爲其鄰部或對部。

〔補〕若已知之兩項爲相鄰者。則先取已知兩項中之任一項爲中部。以求其兩鄰部中之一未知項。

例 已知a及B。求解三角形。

求b時。取a爲中部。則b與$Co.B$爲鄰部。而由規則I。

$$\sin a = \tan b \cot B.$$

於是 $$\tan b = \sin a \tan B.$$

求c時。取$Co.B$爲中部。則a與$Co.c$爲鄰部。而由規則I。

$$\cos B = \tan a \cot c.$$

於是 $$\tan c = \tan a \sec B.$$

求A時。取$Co\,A$爲中部。則a與$Co.B$爲對部。而由規則II。

$$\cos A = \cos a \sin B.$$

例題 XXXIV.

已知次之I行及II行內之各件。求解直角三角形。

	I	II	III	IV	V
	a	*b*	*c*	*A*	*B*
1	36° 27′	43° 32′ 31″	54° 20′	46° 59′ 43″	57° 59′ 19″
2	86° 40′	32° 40′	87° 11′ 40″	88° 11′ 58″	32° 42′ 39″
3	50°	36° 54′ 49″	59° 4′ 26″	63° 15′ 13″	44° 26′ 22″
4	120° 10′	150° 59′ 44″	63° 55′ 43″	105° 44′ 21″	147° 19′ 47″
	c	*a*	*b*	*A*	*B*
5	55° 9′ 32″	22° 15′ 7″	51° 53′	27° 28′ 38″	73° 27′ 11″
6	23° 49′ 51″	14° 16′ 35″	19° 17′	37° 36′ 49″	54° 49′ 23″
7	44° 33′ 17″	32° 9′ 17″	32° 41′	49° 20′ 16″	50° 19′ 16″
8	97° 13′ 4″	132° 14′ 12″	79° 13′ 38″	131° 43′ 50″	81° 58′ 55″
	a	*A*	*c*	*b*	*B*
9	77° 21′ 50″	83° 56′ 40″	78° 53′ 20″ 101° 6′ 40″	28° 14′ 31″ 151° 45′ 29″	28° 49′ 57″ 151° 10′ 3″
10	77° 21′ 50″	40° 40′ 40″	不能有		

〔注意〕 其9題之末三行之各值。不可與I及II行內之各值混合。

若$a<90°$。而$b>90°$。當取$B>90°$及$c>90°$。若$b<90°$。同理。當取$B<90°$及$c<90°$(參看例題XXXII之1題及2題)。

	I	II	III	IV	V
	a	B	c	b	A
11	92°47′32″	50° 2′ 1″	91°47′40″	49°59′58″	92° 8′23″
12	2° 0′55″	12°40′	2° 3′56″	0°27′10″	77°20′28″
13	20°20′20″	38°10′10″	25°14′38″	15°16′50″	54°35′17″
14	54°30′	35°30′	59°51′21″	30° 8′39″	70°17′35″
	c	A	a	b	B
15	69°25′11″	54°54′42″	50°	56°50′49″	63°25′ 4″
16	112°48′	56°11′56″	50°	127° 4′30″	120° 3′50″
17	46°40′12″	37°46′ 9′	26°27′24″	39°57′42″	62° 0′ 4″
18	118°40′ 1″	128° 0′ 4″	136°15′32″	48°23′38″	58°27′ 4″
	A	B	a	b	c
19	63°15′12″	135°33′39″	50° 0′ 4″	143° 5′12″	120°55′34″
20	116°43′12″	116°31′25″	120°10′ 3″	119°59′46″	75°26′58″
21	46°59′42″	57°59′17″	36°27′	43°32′30″	54°20′
22	90°	88°24′35″	90°	88°24′35″	90°

23. 求作一象限三角形之定義。並顯明象限三角形之解法，亦可用爲直角三角形之解法。

24. 已知下三邊。試解象限三角形。

$$a=174°\,12'\,49'',\ b=94°\,8'\,20'',\ c=90°.$$

25. 已知下列諸項，試解象限三角形。

$$c=90°,\ A=110°\,47'\,50'',\ B=135°\,35'\,34.5''$$

26. 已知球面三角形內 A, C 及 c 各等於 $90°$。試解之。

27. 已知 $A=60°$, $C=90°$ 及 $c=90°$。試解三角形。

28. 有球面直角三角形。已知 $A=42° 24' 9''$, $B=3° 4' 11''$。試解之。

29. 有球面直角三角形。已知 $A=119° 11'$, $B=126° 54'$。試解之。

試解 (30−35)。之球面直角三角形。

已知下列諸項。

30 $c=50°$, $b=44° 18' 39''$。

31. $A=156° 20' 30''$, $a=65° 15' 45''$。

32. $A=74° 12' 31''$, $c=64° 28' 47''$。

33. $a=112° 42' 38''$, $B=44° 28' 44''$。

34. $b=48° 12' 48''$, $A=108° 14' 44''$。

35. $A=122° 58' 47''$, $B=104° 17' 55''$。

36. 設球面直角三角形之兩邊 a 與 b 相等。證明 $\cos a=\cot A=\sqrt{\cos c}$。

於球面直角三角形內。證明下列各件(37−41)。

37. $\cos^2 A \sin^2 c=\sin(c+a)\sin(c-a)$。

38. $\tan a \cos c=\sin b \cot B$。

39. $\sin^2 A=\cos^2 B+\sin^2 a \sin^2 B$。

40. $\sin(b+c)=2\cos^2\frac{1}{2}A \cos b \sin c$。

41. $\sin(c-b)=2\sin^2\frac{1}{2}A \cos b \sin c$。

42. 設於球面直角三角形內，p 表通過直角點而與斜邊正交之大圓之弧，m 及 n 爲斜邊上被此弧所截與 a, b, 相鄰之兩段。證明

$$\text{(i)}\tan^2 a=\tan c\tan m,\ \text{(ii)}\sin^2 p=\tan m\tan n.$$

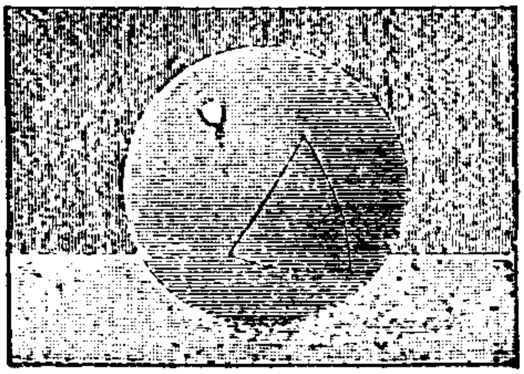
第五十三章

球面等腰三角形之解法

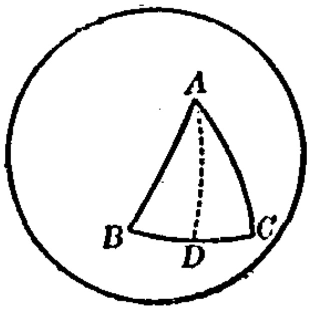
SOLUTION OF THE ISOSCELES SPHERICAL TRIANGLE

若過球面等腰三角形之頂點及其底之中點，而作大圓，則其弧(92圖)。必分原形爲兩個等積之球面直角三角形。故由球面等腰三角形之解法，可推出而爲球面直角三角形之解法。

91 圖

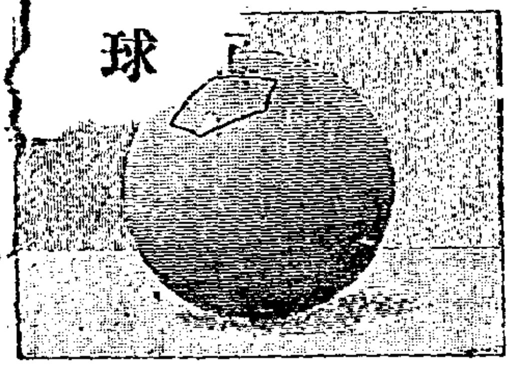


92 圖

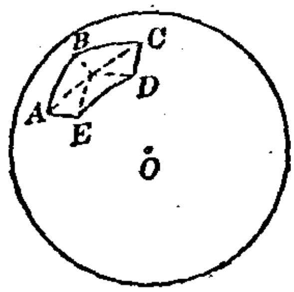


又由球面正多角形之解法。可以推出球面直角三角形 法。

93 圖

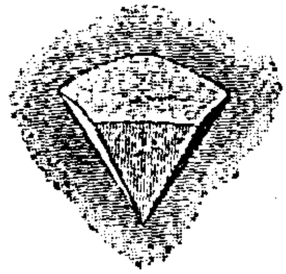


94 圖



若過多角形之中心及其各頂點而作一大圓。則其弧必分多角形爲相等之等腰三角形多個(94 圖)。而每個三角形。又可分爲兩個等積之直角三角形。

95 圖



球面正多角形者(95 圖)。卽以球心爲頂點之正稜錐體之各面,與球面之交綫,所成之多角形也。

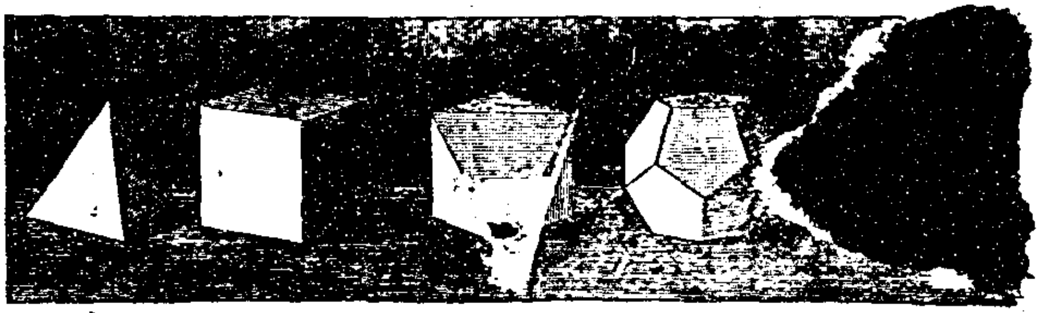
例題 XXXV.

1. 已知球面等腰三角形之底爲 b。及邊爲 a。求底角 A,頂角 B 及高 h。

2. 已知球面等邊三角形之邊爲 a。求 A 角。

3. 已知球面正 n 角形之一邊 a。求多角形之 A 角。自多角形之心至頂點之 R 距。及自心至一邊之中點之 r 距.

96 圖



四面體 六面體 八面體 十二面體 二十面體

4. 計算正五面體之各面所成之二面角(96圖)，

5. 球面正方形。卽爲球面正四角形。若已知一邊a。求正方形之A角。

第 捌 編

球 面 斜 角 三 角 形

THE OBLIQUE SPHERICAL TRIANGLE

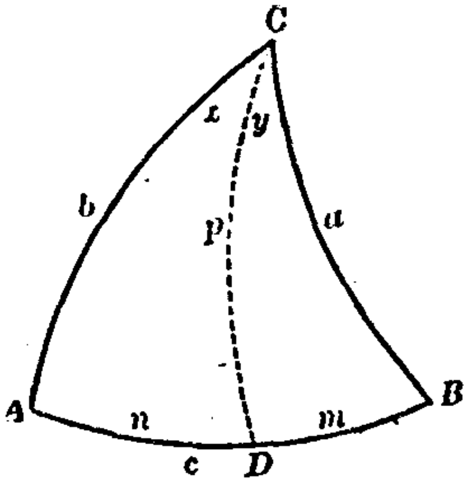
第 五 十 四 章

基 礎 公 式

FUNDAMENTAL FORMULAS

設 ABC (97 圖) 為一球面斜角三角形。A, B, C 為其三角。a, b, c 為其各對邊。過 C 作大弧 CD。垂直於 AB 邊。而遇 AB D。今為省略法。命

97 圖



$$CD=p,\ AD=n,\ BD=m,$$

$$\angle ACD=x,\ \angle BCD=y$$

1. 由 (39) 則於直角三角形 BDC 及 ADC 內。得

$$\sin p=\sin a \sin B,$$

及

$$\sin p=\sin b \sin A.$$

故 同理 及

$$\left.\begin{aligned}\sin a \sin B&=\sin b \sin A\\ \sin a \sin C&=\sin c \sin A\\ \sin b \sin C&=\sin c \sin B\end{aligned}\right\}. \qquad (44)$$

此三個方程式。又可寫爲比例式。如

$$\sin a:\sin b:\sin c=\sin A:\sin B:\sin C.$$

卽球面三角形各邊之正弦。與其對角之正弦成正比例也。

於97圖。其 CD 弧。交 AB 邊於三角形內。若 CD 落於形外。設在 CB 之右。則當用 $\sin(180^\circ-B)$ 而不用 $\sin B$。但 $\sin(180^\circ-B)=\sin B$ (第二十五章)。所以此公式(44)。乃對於一切例而俱爲眞確者也。

2. 由(38)。則於直角三角形 BDC 內。得

$$\cos a=\cos p\cos m$$

$$=\cos p\cos(c-n)$$

由(9)　$$=\cos p\cos c\cos n+\cos p\sin c\sin n.$$

今於直角三角形 ADC 內。由(38)得

$$\cos p\cos n=\cos b.$$

於是　$$\cos p=\cos b\sec n,$$

而　$$\cos p\sin n=\cos b\tan n.$$

由(40)　$$\tan n=\tan b\cos A.$$

$$\therefore\cos p\sin n=\cos b\tan b\cos A$$

$$=\sin b\cos A.$$

以 $\cos p\cos n$ 及 $\cos p\sin n$ 之各值代入 $\cos a$ 值內。則得

同理
$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ \cos b&=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\end{aligned}\right\}.\quad(45)$$

3. 由(41)。則於直角三角形 ADC 內。得

$$\cos A=\cos p\sin x$$
$$=\cos p\sin(C-y)$$

由(8) $$=\cos p\sin C\cos y-\cos p\cos C\sin y.$$

今由(41) $\cos p\sin y=\cos B$.

故 $$\cos p=\cos B\csc y,$$

而 $$\cos p\cos y=\cos B\cot y.$$

由(43) $$=\cos B\tan B\cos a$$
$$=\sin B\cos a.$$

以 $\cos p\sin y$ 及 $\cos p\cos y$ 之各值代入 $\cos A$ 值內，則得

同理
$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\\ \cos B&=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos b\\ \cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\end{aligned}\right\}.\quad(46)$$

公式(45)及(46)。亦俱為完全真確，因於 CD 弧交 AB 邊於三角形外時，亦可得同樣之方程式故也。

例題 XXXVI.

1. 若 $A=90°$, 或 $B=90°$, 或 $C=90°$, 或 $a=90°$, 或 $A=B=90°$, 或 $a=b=90°$。則公式(44)當各變為若何。

2. 若 $A=90°$, 或 $B=90°$, 或 $C=90°$, 或 $A=B=C=90°$。則公式(45)當各變為若何。

3. 若 $A=0°$, 或 $A=90°$, 或 $A=180°$。則公式(45)當各變為若何。

4. 試以極三角形間之關係，由公式(45)推論(46)。

第五十五章

半角及半邊之公式

FORMULAS FOR THE HALF ANGLES AND SIDES

由(45)之第一式,

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

故 $$1-\cos A=\frac{\sin b\sin c+\mathrm{sos}\,b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

由(9) $$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}$$

由(23) $$=\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b\sin c}.$$

又 $$1+\cos A=\frac{\sin b\sin c-\cos b\cos c+\cos a}{\sin b\sin c}$$

由(5) $$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}$$

由(23) $$=\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b\sin c}.$$

因由(16)

$$1-\cos A=2\sin^2\tfrac{1}{2}A,$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A=\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)\csc b\csc c.$$

又由(17) $$1+\cos A=2\cos^2\tfrac{1}{2}A,$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A=\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\csc b\csc c.$$

今設 $\frac{1}{2}(a+b+c)=s.$

則 $\frac{1}{2}(b+c-a)=s-a,$

$\frac{1}{2}(a-b+c)=s-b,$

$\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c.$

於是代入，並開平方，得

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\sin(s-b)\sin(s-c)\csc b\csc c}\\ \cos\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\sin s\sin(s-a)\csc b\csc c}\\ \tan\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\csc s\csc(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}\end{aligned}\right\}. \quad (47)$$

同樣，可示其

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-c)\csc a\csc c}\\ \cos\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\sin s\sin(s-b)\csc a\csc c}\\ \tan\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\csc s\csc(s-b)\sin(s-a)\sin(s-c)}\\ \sin\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\csc a\csc b}\\ \cos\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\sin s\sin(s-c)\csc a\csc b}\\ \tan\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\csc s\csc(s-c)\sin(s-a)\sin(s-b)}\end{aligned}\right\}. \quad (47)$$

再由〔46〕之第一式

$$\cos a=\frac{\cos B\cos C+\cos A}{\sin B\sin C}.$$

故 $$1-\cos a=\frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C-\cos A}{\sin B\sin C}$$

由〔5〕 $$=\frac{-\cos(B+C)-\cos A}{\sin B\sin C}$$

由〔22〕 $$=\frac{-2\cos\frac{1}{2}(B+C+A)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C};$$

又 $$1+\cos A=\frac{\sin B\sin C+\cos B\cos C+\cos A}{\sin B\sin C}$$

由〔9〕 $$=\frac{\cos(B-C)+\cos A}{\sin B\sin C}$$

由〔22〕 $$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(B-C+A)\cos\frac{1}{2}(B-C-A)}{\sin B\sin C}.$$

因由〔16〕 $$1-\cos a=2\sin^2\tfrac{1}{2}a,$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a=-\cos\tfrac{1}{2}(B+C+A)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)\csc B\csc C,$$

又由〔17〕 $$1+\cos a=2\cos^2\tfrac{1}{2}a,$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a=\cos\tfrac{1}{2}(B-C+A)\cos\tfrac{1}{2}(B-C-A)\csc B\csc C.$$

今設 $$\tfrac{1}{2}(A+B+C)=S.$$

則 $$\tfrac{1}{2}(B+C-A)=S-A,$$

$$\tfrac{1}{2}(A-B+C)=S-B,$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B-C)=S-C.$$

於是代入。并開平方。得

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\csc B\csc C}\\ \cos\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{\cos(S-B)\cos(S-C)\csc B\csc C}\\ \tan\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\sec(S-B)\sec(S-C)}\end{aligned}\right\}. \quad (48)$$

同樣

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{-\cos S\cos(S-B)\csc A\csc C}\\
\cos\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{\cos(S-A)\cos(S-C)\csc A\csc C}\\
\tan\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{-\cos S\cos(S-B)\sec(S-A)\sec(S-C)}\\
\sin\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{-\cos S\cos(S-C)\csc A\csc B}\\
\cos\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{\cos(S-A)\cos(S-B)\csc A\csc B}\\
\tan\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{-\cos S\cos(S-C)\sec(S-A)\sec(S-B)}
\end{aligned}\right\}\cdot(48)$$

第五十六章

蓋氏方程式及訥氏比例式

GAUSS'S EQUATIONS AND NAPIER'S ANALOGIES

由(5)　$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B-\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$,

或以公式(47)內所示 $\cos\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}B$, $\sin\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$ 之各值代入而化之,得

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(A+B)&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\times\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\\
&\quad-\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\times\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}\\
&=\frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\\
&\quad-\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\\
&=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\times\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}.
\end{aligned}$$

由〔21〕

$$\sin s-\sin(s-c)=2\cos\tfrac{1}{2}(s+s-c)\sin\tfrac{1}{2}(s-s+c)$$

$$=2\cos(s-\tfrac{1}{2}c)\sin\tfrac{1}{2}c.$$

由〔12〕 $$\sin c=2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c.$$

再由〔47〕 $$\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}=\sin\tfrac{1}{2}C.$$

代入 $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ 值。得

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos(s-\frac{1}{2}c)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$=\frac{\cos(s-\frac{1}{2}c)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C.$$

$\therefore\ \cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos(s-\frac{1}{2}c)\sin\frac{1}{2}C.$

因 $$s-\tfrac{1}{2}c=\tfrac{1}{2}(a+b),$$

則 $\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C.$

同例。求 $\sin\frac{1}{2}(A+B)$, $\cos\frac{1}{2}(A-B)$ 及 $\sin\frac{1}{2}(A-B)$ 之各值，則得三個相類之方程式。

今四個方程式

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c&=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C\\ \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c&=\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C\\ \cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c&=\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C\\ \sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c&=\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C\end{aligned}\right\},\qquad [49]$$

謂之蓋氏方程式。

以蓋氏方程式中之第一式除第二式。第三式除第四式，第一式除第三式，及第二式除第四式：則得

$$\left.\begin{aligned}\tan\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C\\ \tan\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C\\ \tan\tfrac{1}{2}(a+b)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c\\ \tan\tfrac{1}{2}(a-b)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c\end{aligned}\right\}. \qquad (50)$$

依三角形所用其餘之原理，於各例內。尙有他式，

此諸式。謂之訥氏比例式。

於第一式內。其因子 $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ 及 $\cot\frac{1}{2}C$ 恆爲正。故 $\tan\frac{1}{2}(A+B)$ 與 $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ 之符號。必恆相同。

故若 $a+b<180°$, $\cos\frac{1}{2}(a+b)>0$。而 $\tan\frac{1}{2}(A+B)>0$。所以 $A+B<180°$。

若 $a+b>180°$。則 $A+B>180°$。

若 $a+b=180°$。則 $\cos\frac{1}{2}(a+b)=0$。而 $\tan\frac{1}{2}(A+B)=\infty$。所以 $\frac{1}{2}(A+B)=90°$。而 $A+B=180°$。

反之。可由第三式示其 $a+b$ 之小於，大於，或等於 $180°$。乃視 $A+B$ 之小於，大於，或等於 $180°$ 而定。

第五十七章

例 I

已知兩邊a, b及夾角C。

其A, B兩角。可由訥氏比例式中之前二式求之。

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C.$$

既得A及B後。其c邊可由(44)或(50)求之。然用蓋氏方程式爲更妙。因其含有訥氏比例式內同角之各函數。而其四式中。可用其任一式。如

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\sin\tfrac{1}{2}C.$$

例 已知$a=73°58'54''$, $b=38°45'$, $c=46°33'41''$。求解三角形。

$$a=73°58'54'',\quad b=38°45'\ 0'',\quad C=46°33'41''.$$

所以
$$\tfrac{1}{2}(a-b)=17°36'57'',\quad \tfrac{1}{2}(a+b)=56°21'57'',\quad \tfrac{1}{2}C=23°16'50.5''.$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\tfrac{1}{2}(a-b)&=9.97914\\
\log\sec\tfrac{1}{2}(a+b)&=0.25658\\
\log\cot\tfrac{1}{2}C&=\underline{0.36626}\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(A+B)&=\underline{0.60198}\\
\log\sec\tfrac{1}{2}(A+B)&=0.61515\\
\log\cos\tfrac{1}{2}(a+b)&=9.74342\\
\log\sin\tfrac{1}{2}C&=\underline{9.59685}\\
\log\cos\tfrac{1}{2}c&=9.95542\\
\tfrac{1}{2}c&=25°31'12''
\end{aligned}$$

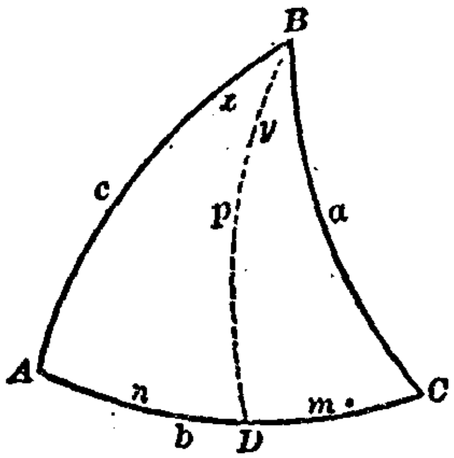
$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(a-b)&=9.48092\\
\log\csc\tfrac{1}{2}(a+b)&=0.07956\\
\log\cot\tfrac{1}{2}C&=\underline{0.36626}\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(A-B)&=\underline{9.92674}\\
\tfrac{1}{2}(A+B)&=75°57'40.8''\\
\tfrac{1}{2}(A-B)&=40°11'25.4''
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned}A&=116°\ 9'\ 6''\\ B&=35°46'15''\\ c&=51°\ 2'24''\end{aligned}\right.$$

其演算之準確。可用第五十四章所示正弦比例之規則驗之。

若祗需 c 邊。則可由 (45) 求得。而不必先求 A 及 B。惟此公式 (45)。不宜於對數計算。將欲化之爲適宜於對數之式。可用下文法則。以推相同之結果。且於用時亦甚便利。蓋祗須記憶訥氏之規則已足。不求其他。

98 圖



過 B (98 圖) 作一大圓弧。正交 AC 於 D。令 $BD=P$, $CD=m$, $AD=n$。

由規則 I。

$$\cos C=\tan m\cot a.$$

於是 $$\tan m=\tan a\cos C. \tag{1}$$

由規則 II。

$$\cos a=\cos m\cos p,\ \text{於是}\ \cos p=\cos a\sec m.$$

$$\cos c=\cos n\cos p,\ \text{於是}\ \cos p=\cos c\sec n.$$

故 $$\cos c\sec n=\cos a\sec m.$$

因 $$n=b-m,$$

則 $$\cos c=\cos a\sec m\cos(b-m). \tag{2}$$

今由 (1), (2) 兩方程式。卽可計算 c 值。

〔注意〕若BD落於三角形外。設在BC之右。則$n=b+m$。

$$\therefore \cos c=\cos a \sec m \cos(b+m).$$

例 已知$a=97^\circ 30'$, $b=55^\circ 12'$, $C=39^\circ 58'$。求c。

$$\begin{aligned}
\log\tan a &= 0.88057\ (n)\\
\log\cos C &= \underline{9.88447}\\
\log\tan m &= 0.76504\ (n)\\
m &= 99^\circ 44' 49''\\
b-m &= -44^\circ 32' 49''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos a &= 9.11570\ (n)\\
\log\sec m &= 0.77135\ (n)\\
\log\cos(b-m) &= \underline{9.85289}\\
\log\cos c &= 9.73994\\
c &= 56^\circ 40' 9''
\end{aligned}$$

例題 XXXVII.

1. 已知b, c, A求a。及已知a, c, B求b。問其公式若何。

2. 已知$a=88^\circ 12' 20''$, $b=124^\circ 7' 17''$, $C=50^\circ 2' 1''$;
 求$A=63^\circ 15' 11''$, $B=132^\circ 17' 58''$, $c=59^\circ 4' 17''$.

3. 已知$a=120^\circ 55' 35''$, $b=88^\circ 12' 20''$, $C=47^\circ 42' 1''$;
 求$A=129^\circ 58' 2''$, $B=63^\circ 15' 8''$. $c=55^\circ 52' 40''$.

4. 已知$b=63^\circ 15' 12''$, $c=47^\circ 42' 1''$, $A=59^\circ 4' 25''$;
 求$B=88^\circ 12' 24''$, $B=55^\circ 52' 42''$, $a=50^\circ 1' 40''$.

5. 已知$b=69^\circ 25' 11''$, $c=109^\circ 46' 19''$, $A=54^\circ 54' 42''$;
 求$B=56^\circ 11' 57''$, $C=123^\circ 21' 12''$, $a=67^\circ 11' 47''$.

第五十八章

例 II

已知兩角A,B及夾角c。

其a,b兩邊，可由訥氏比例式中之後二式求之。

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c;$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c.$$

其C角，可由公式(44)。或訥氏第二比例式(50)。或蓋氏任一方程式求之。如蓋氏第二方程式，爲

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cos\tfrac{1}{2}c.$$

例 已知$A=107°47'7''$, $B=38°58'27''$, $C=51°41'14''$。求解三角形，

$A=107°47'\ 7''$,
$B=\ 38°58'27''$,
$c=\ 51°41'14''$.

所以 $\tfrac{1}{2}(A-B)=34°24'20''$,
$\tfrac{1}{2}(A+B)=73°22'47''$,
$\tfrac{1}{2}c=25°50'37''$.

$\log\cos\tfrac{1}{2}(A-B)=9.91648$
$\log\sec\tfrac{1}{2}(A+B)=0.54359$
$\log\tan\tfrac{1}{2}c=\underline{9.68517}$
$\log\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=\underline{0.14524}$
$\log\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=9.98146$
$\log\sec\tfrac{1}{2}(a-b)=0.01703$
$\log\cos\tfrac{1}{2}c=\underline{9.95423}$
$\log\cos\tfrac{1}{2}C=9.95272$
$\tfrac{1}{2}C=26°15'10''$

$\log\sin\tfrac{1}{2}(A-B)=9.75208$
$\log\csc\tfrac{1}{2}(A+B)=0.01854$
$\log\tan\tfrac{1}{2}c=\underline{9.68517}$
$\log\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=\underline{9.45579}$
$\tfrac{1}{2}(a+b)=54°24'24.4''$
$\tfrac{1}{2}(a-b)=15°56'25.6''$

$$\begin{cases}a=70°20'50''\\ b=38°27'58''\\ C=52°30'20''\end{cases}$$

若祇需C角，則如例I內祇需c邊時解之。

令(99圖)$\angle ABD=x$, $\angle CBD=y$, $BD=p$。則

規則I。 $\cos c=\cot x\cot A$.

於是 $\cot x=\tan A\cos c$. (1)

規則II。 $\cos A=\cos p\sin x$.

於是 $\cos p=\cos A\csc x$.

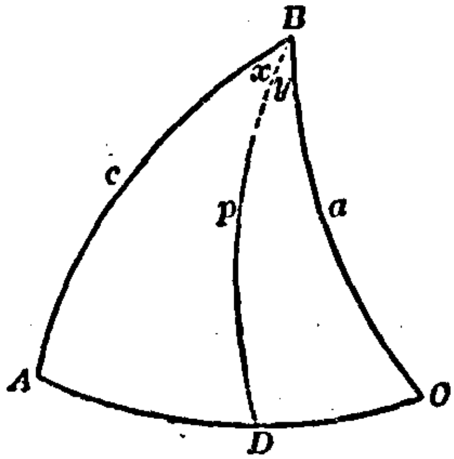
規則II。 $\cos C=\cos p\sin y$.

於是 $\cos p=\cos C\csc y$.

$\therefore \cos C=\cos A\csc x\sin y$

$=\cos A\csc x\sin(B-x)$. (2)

99 圖



今由(1),(2)兩方程式，即可計算C值。

〔注意〕 設BD落於BC之右，則(2)變爲

$$\cos C=\cos A\csc x\sin(x-B).$$

例 已知$A=35°46'15''$, $B=115°9'7''$, $c=51°2'$。求C。

$\log\tan A=9.85760$	$\log\cos A=9.90992$
$\log\cos c=9.79856$	$\log\csc x=0.04056$
$\log\cot x=9.65616$	$\log\sin(B-x)=9.88121$
$x=65°37'35''$	$\log\cos C=9.83069$
$\therefore B-x=49°31'32''$	$C=47°22'42''$

例題 XXXVIII.

1. 已知B, C, a。求A。及已知A, C, b求B。問其公式若何。

2. 已知$A=26°58'46''$, $B=39°45'10''$, $c=154°46'48''$;
   求 $a=37°14'10''$, $b=121°28'10''$, $C=161°22'11''$.

3. 已知$A=128°41'49''$, $B=107°33'20''$, $c=124°12'31''$;
   求 $a=125°41'43''$, $b=82°47'34''$, $C=127°22'$.

4. 已知$B=153°17'6''$, $C=78°43'36''$, $a=86°15'15''$;
   求 $b=152°43'51''$, $c=88°12'21''$, $A=78°15'48''$.

5. 已知$A=125°41'44''$, $C=82°47'35''$, $b=52°37'57''$;
   求 $a=128°41'46''$, $c=107°33'20''$, $B=55°47'40''$.

第五十九章

例 III

已知兩邊a, b及對a之一角A。

其B角由(44)求之。於是得

$$\sin B=\sin A\sin b\csc a.$$

既得B後。C及c。可由訥氏比例式之第二及第四式求得。卽

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\cot\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\tan\tfrac{1}{2}(A-B).$$

其第一第三式。亦可用之。

〔注意1〕 B由其正弦決定。故問題通例有兩解。若$\sin B>1$。則問題將爲不可解。此可以幾何圖顯之。凡遇何種境地。即有若干解法。或兩解，或一解，或不可解。悉如平面三角法內相當之各例(第三十九章)。但於實用時。其三角形之形狀。必先知其大概。故不難知何種解法，合於何種問題。固無須特別推究也。

於此可以證明A與a爲同類。而$\sin b>\sin a>\sin A\sin b$時。可有兩解。$A$與$a$爲不同類(包含$A$或$a$爲$90°$之例)。而$\sin b \nless \sin a$或$\sin a<\sin A\sin b$時。則爲不可解。於其餘之各例。則皆僅有一解。

〔注意2〕 其c邊或C角。可由下列之公式計算。而不必先求B。

$$\tan m=\cos A\tan b,\text{ 而 }\cos(c-m)=\cos a\sec b\cos m,$$

$$\cot x=\tan A\cos b,\text{ 而 }\cos(C-x)=\cot a\tan b\cos x.$$

此等公式。可將三角形分解爲直角三角形。幷用訥氏規則而得之。其m之長。等於頂點A及自C所作之垂綫底兩點間c邊之一段。而x等於C角之相當部分。

〔注意3〕 旣得B之兩值後。則解法之可有若干。可由第四十九章之定理1決定之。

若$\log\sin B$爲正。則不可解。

例　已知 $a=57^\circ 36'$, $b=31^\circ 14'$, $A=104^\circ 25' 30''$.

於此例　$A>90^\circ$,	$\log\sin A=9.98609$
而　$a+b<180^\circ$,	$\log\sin b=9.71477$
故　$A+B<180^\circ$,	$\log\csc a=\underline{0.07349}$
而　$B<90^\circ$.	$\log\sin B=9.77435$
所以僅有一解	$B=36^\circ 29' 46''$

$a+b=88^\circ 50'$	$\frac{1}{2}(a+b)=44^\circ 25'$
$a-b=26^\circ 22'$	$\frac{1}{2}(a-b)=13^\circ 11'$
$A+B=140^\circ 55' 16''$	$\frac{1}{2}(A+B)=70^\circ 27' 38''$
$A-B=67^\circ 55' 44''$	$\frac{1}{2}(A-B)=33^\circ 57' 52''$
$\log\sin\frac{1}{2}(A+B)=9.97424$	$\log\sin\frac{1}{2}(a+b)=9.84502$
$\log\csc\frac{1}{2}(A-B)=0.25284$	$\log\csc\frac{1}{2}(a-b)=0.64194$
$\log\tan\frac{1}{2}(a-b)=\underline{9.36966}$	$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=\underline{9.82840}$
$\log\tan\frac{1}{2}c=9.59674$	$\log\cot\frac{1}{2}C=0.31536$
$\frac{1}{2}c=21^\circ 33' 37''$	$\frac{1}{2}C=25^\circ 48' 58''$
$c=43^\circ 7' 14''$	$C=51^\circ 37' 56''$

例題　XXXIX.

1. 已知 $a=73^\circ 49' 38''$, $b=120^\circ 53' 35''$, $A=88^\circ 52' 42''$;
   求 $B=116^\circ 42' 30''$, $c=120^\circ 57' 27''$, $C=116^\circ 47'$.

2. 已知 $a=150^\circ 57' 5''$, $b=134^\circ 15' 54''$, $A=144^\circ 22' 42''$;
   求 $B_1=120^\circ 47' 45''$, $c_1=55^\circ 42' 8''$, $C_1=97^\circ 42' 55''$;
   $B_2=59^\circ 12' 15''$, $c_2=23^\circ 57' 17''$, $C_2=29^\circ 8' 39''$.

3. 已知 $a=79^\circ 0' 54''$, $b=82^\circ 17' 4''$, $A=82^\circ 9' 26''$;
   求 $B=90^\circ$, $c=45^\circ 12' 19''$, $C=45^\circ 44' 5''$.

4. 已知 $a=30^\circ 52' 37''$, $b=31^\circ 9' 16''$, $A=87^\circ 34' 12''$;

證明此三角形爲不可解之問題.

第六十章

例 IV

<u>已知兩角A, B及對A之一邊a。</u>

其b邊可由(44)求之。於是得

$$\sin b=\sin a \sin B \csc A.$$

其c與C之各值。可由訥氏比例式中之第四式及第二式求之。

$$\tan \tfrac{1}{2} c=\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \tan \tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C=\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \tan \tfrac{1}{2}(a-b).$$

〔注意1〕 於此例內,其解法之有無及多少。可直接由五十九章例III之相當各條例。以極三角形之定理推論之。卽A與a爲同類。而$\sin B>\sin A>\sin a \sin B$時。當有兩解,$A$與$a$爲不同類(包含$A$或$a$爲$90^{\circ}$之例)。而$\sin B \leqq \sin A$或$\sin A<\sin a \sin B$時。則爲不可解。其餘各例,則皆僅有一解。

〔注意2〕 按例III內注意2之所示而論之。則計算c或C(與b邊無關)之公式。可以求得。卽

$$\tan m=\tan a \cos B, \text{而} \sin(c-m)=\cot A \tan B \sin m,$$

$$\cot x=\cos a \tan B, \text{而} \sin(C-x)=\cos A \sec B \sin x.$$

公式內$m=BD$, $x=\angle BCD$，而D爲自頂點C所作之垂綫底。

〔注意3〕 於例III內。b值之大於或小於a。視B之大於或小於A而定。若$\log\sin b$爲正。則三角形爲不可解。

例題 XL.

1. 已知$A=110°\,10'$, $B=133°\,18'$, $a=147°\,5'\,32''$;
   求 $b=155°\,5'\,18''$, $c=33°\,1'\,37''$, $C=70°\,20'\,40''$.
2. 已知$A=113°\,39'\,21''$, $B=123°\,40'\,18''$, $a=65°\,39'\,46''$;
   求 $b=124°\,7'\,20''$, $c=159°\,50'\,15''$, $C=159°\,43'\,34''$.
3. 已知$A=100°\,2'\,11''$, $B=98°\,30'\,28''$, $a=95°\,20'\,39''$;
   求 $b=90°$, $c=147°\,41'\,50''$, $C=148°\,5'\,40''$.
4. 已知$A=24°\,33'\,9''$, $B=38°\,0'\,12''$, $a=65°\,20'\,13''$;
證明其三角形爲不可解。

第六十一章

例 V

已知三邊a, b及c。

其各角可由公式〔47〕及B與C之相當公式求之。

於其諸公式中。以用正切式爲便。

設以方程式 $1=\dfrac{\sin(s-a)}{\sin(s-a)}$

乘方程式

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\csc s\csc(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

而以 $\tan r$ 代 $\sqrt{\csc s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$，又於同時作相同之變化於 $\tan\frac{1}{2}B$ 及 $\tan\frac{1}{2}C$ 之方程式內，則得

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\tan r\csc(s-a),$$

$$\tan\tfrac{1}{2}B=\tan r\csc(s-b),$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\tan r\csc(s-c).$$

此爲三角均須計算時最適用之公式。

例 1. 已知 $a=50°54'32''$, $b=37°47'18''$, $c=74°51'50''$. 求 A。

$a=$	$50°\ 54'\ 32''$	$\log\csc s=$	0.00448
$b=$	$37°\ 47'\ 18''$	$\log\csc(s-a)=$	0.28979
$c=$	$74°\ 51'\ 50''$	$\log\sin(s-b)=$	9.84171
$2s=$	$163°\ 33'\ 40''$	$\log\sin(s-c)=$	9.08072
$s=$	$81°\ 46'\ 50''$	2)	19.21670
$s-a=$	$30°\ 52'\ 18''$	$\log\tan\frac{1}{2}A=$	9.60835
$s-b=$	$43°\ 59'\ 32''$	$\frac{1}{2}A=$	$22°\ 5'\ 20''$
$s-c=$	$6°\ 55'$	$A=$	$44°\ 10'\ 40''$

例 2. 已知 $a=124°\,12'\,31''$, $b=54°\,18'\,16''$, $c=97°\,12'\,25''$, 求 $A=127°\,22'\,7''$, $B=51°\,18'\,11''$, $C=72°\,26'\,40''$.

$$\begin{aligned}
a&=124°\,12'\,31''\\
b&=\ \ 54°\,18'\,16''\\
c&=\ \ 97°\,12'\,25''\\
\hline
2s&=275°\,43'\,12''\\
s&=137°\,51'\,36''\\
\\
\log\sin(s-a)&=9.37293\\
\log\sin(s-b)&=9.99725\\
\log\sin(s-c)&=9.81390\\
\log\csc s&=0.17331\\
\hline
\log\tan^2 r&=9.35739\\
\log\tan r&=9.67870
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s-a&=13°\,39'\,5''\\
s-b&=83°\,33'\,20''\\
s-c&=40°\,39'\,11''\\
\\
\log\tan\tfrac{1}{2}A&=0.30577\\
\log\tan\tfrac{1}{2}B&=9.68145\\
\log\tan\tfrac{1}{2}C&=9.86480\\
\hline
\tfrac{1}{2}A&=63°\,41'\,3.8''\\
\tfrac{1}{2}B&=25°\,39'\,5.6''\\
\tfrac{1}{2}C&=36°\,13'\,20''\\
\hline
A&=127°\,22'\,7''\\
B&=51°\,18'\,11''\\
C&=72°\,26'\,40''
\end{aligned}$$

例題 XLI.

1. 已知 $a=120°\,55'\,35''$, $b=59°\,4'\,25''$, $c=106°\,10'\,22''$;
求 $A=116°\,44'\,50''$, $B=63°\,15'\,10''$, $C=91°\,7'\,22''$.

2. 已知 $a=50°\,12'\,4''$, $b=116°\,44'\,48''$, $c=129°\,11'\,42''$;
求 $A=59°\,4'\,28''$, $B=94°\,23'\,12''$, $C=120°\,4'\,52''$.

3. 已知 $a=131°\,35'\,4''$, $b=108°\,30'\,14''$, $c=84°\,46'\,34''$;
求 $A=132°\,14'\,21''$, $B=110°\,10'\,40''$, $C=99°\,42'\,24''$.

4. 已知 $a=20°\,16'\,38''$, $b=56°\,19'\,40''$, $c=66°\,20'\,44''$;
求 $A=20°\,9'\,55''$, $B=55°\,52'\,35''$, $C=114°\,20'\,21''$.

第六十二章

例 VI

已知三角A, B及C。

其各邊可由公式〔48〕求之。而此諸公式中。以用正切式為便。

設以方程式
$$1=\frac{\sec(S-A)}{\sec(S-A)}$$

乘方程式

$$\tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\sec(S-B)\sec(S-C)}$$

而以$\tan R$代$\sqrt{-\cos S\sec(S-A)\sec(S-B)\sec(S-C)}$。又於同時作相同之變化於$\tan\frac{1}{2}b$及$\tan\frac{1}{2}c$之方程式內。則得

$$\tan\tfrac{1}{2}a=\tan R\cos(S-A),$$
$$\tan\tfrac{1}{2}b=\tan R\cos(S-B),$$
$$\tan\tfrac{1}{2}c=\tan R\cos(S-C).$$

此為三邊均須計算時最適用之公式。

例 1. 已知$A=220°$, $B=130°$, $C=150°$。求a。

既得$S, S-A$, $S-B, S-C$之各值後。試寫一求$\tan\frac{1}{2}a$之公式。而以代數的符號記於各函數上。如下

$$\tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{-\overset{-}{\cos} S\overset{+}{\cos}(S-A)\overset{-}{\sec}(S-B)\overset{-}{\sec}(S-C)},$$

$$\begin{aligned}
A&=220^\circ\\
B&=130^\circ\\
C&=150^\circ\\
\hline
2S&=500^\circ\\
S&=250^\circ\\
S-A&=\ \ 30^\circ\\
S-B&=120^\circ\\
S-C&=100^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos S&=9.53405\ (n)\\
\log\cos(S-A)&=9.93753\\
\log\sec(S-B)&=0.30103\ (n)\\
\log\sec(S-C)&=0.76033\ (n)\\
2\,)\,&\overline{0.53294}\\
\log\tan\tfrac{1}{2}a&=0.26647\\
\tfrac{1}{2}a&=\ 61^\circ\ 34'\ \ 6''\\
a&=123^\circ\ \ 8'\ 12''
\end{aligned}$$

〔注意〕由代數的符號而論。其三個負因子之效力。爲其總積前之負符號所消滅。

例 2. 已知 $A=20^\circ 9' 56''$, $B=55^\circ 52' 32''$, $C=114^\circ 20' 14''$。求 $a=20^\circ 16' 38''$, $b=56^\circ 19' 41''$, $c=66^\circ 20' 43''$.

既得 $S, S-A, S-B, S-C$ 之各值後。試寫一求 $\tan R$ 之公式。而以代數的符號記於各函數上。如下。

$$\tan R=\sqrt{-\overset{-}{\cos} S\ \overset{+}{\sec}(S-A)\ \overset{+}{\sec}(S-B)\ \overset{+}{\sec}(S-C)}.$$

$$\begin{aligned}
A&=\ \ 20^\circ\ \ 9'\ 56''\\
B&=\ \ 55^\circ\ 52'\ 32''\\
C&=114^\circ\ 20'\ 14''\\
\hline
2S&=190^\circ\ 22'\ 42''
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
S&=\ \ 95^\circ\ 11'\ 12''\\
S-A&=\ \ 75^\circ\ \ 1'\ 25''\\
S-B&=\ \ 39^\circ\ 18'\ 49''\\
S-C&=-19^\circ\ \ 8'\ 53''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos S&=8.95638(n)\\
\log\sec(S-A)&=0.58768\\
\log\sec(S-B)&=0.11143\\
\log\sec(S-C)&=0.02472\\
\hline
\log\tan^2 R&=9.68021\\
\log\tan R&=9.84010
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\log\tan\tfrac{1}{2}a&=9.25242\\
\log\tan\tfrac{1}{2}b&=9.72367\\
\log\tan\tfrac{1}{2}c&=9.81538\\
\hline
\tfrac{1}{2}a&=10^\circ\ \ 8'\ 18.9''\\
\tfrac{1}{2}b&=28^\circ\ \ 9'\ 50.3''\\
\tfrac{1}{2}c&=33^\circ\ 10'\ 21.4''\\
\hline
a&=20^\circ\ 16'\ 38''\\
b&=56^\circ\ 19'\ 41''\\
c&=66^\circ\ 20'\ 43''
\end{aligned}$$

例題 XLII.

1 已知 $A=130°$, $B=110°$, $C=80°$;

求 $a=139°\,21'\,22''$, $b=126°\,57'\,52''$, $c=56°\,51'\,48''$.

2. 已知 $A=59°\,55'\,10''$, $B=85°\,36'\,50''$, $C=59°\,55'\,10''$;

求 $a=51°\,17'\,31''$, $b=64°\,2'\,47''$, $c=51°\,17'\,31''$.

3. 已知 $A=102°\,14'\,12''$, $B=54°\,32'\,24''$, $C=89°\,5'\,46''$;

求 $a=104°\,25'\,9''$, $b=53°\,49'\,25''$, $c=97°\,44'\,19''$.

4. 已知 $A=4°\,23'\,35''$, $B=8°\,28'\,20''$, $C=172°\,17'\,56''$;

求 $a=31°\,9'\,13''$, $b=84°\,18'\,28''$, $c=115°\,10'$.

第六十三章

球面三角形之面積

AREA OF A SPHERICAL TRIANGLE

I. <u>A, B, C 三角爲已知,</u>

令 R=球半徑,

E=球面之剩餘 (spherical excess)$=A+B+C-180°$,

F=三角形之面積。

通過球心各正交餘二面於之三平面,平分球面爲八個三直角三角形 (tri-rectangular triangle。參看溫氏幾何學 § 802)。

爲便利計。將八個三角形。各分爲90等分。而其每一分。名之曰弧度(spherical degree)。故任何球面。皆含有720弧度。

今以弧度計算。$\triangle ABC=E$ (温氏幾何學§834)。而球面等於720弧度。

所以　　$\triangle ABC$: 球面$=E:720$。

惟球面$=4\pi R^2$(温氏幾何學§824)。

故　　$\triangle ABC:4\pi R^2=E:720$。

於是　　$$\mathbf{F}=\frac{\pi \mathbf{R}^2\mathbf{E}}{180}.\tag{51}$$

II. a, b, c三邊爲已知。

求其面積之公式，論之如下。

由公式〔49〕之第一式。

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

今　　$$\sin\tfrac{1}{2}C=\cos(90^\circ-\tfrac{1}{2}C).$$

故　　$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos(90^\circ-\frac{1}{2}C)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

則由比之分理及合理。

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)-\cos(90^\circ-\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos(90^\circ-\frac{1}{2}C)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c}.\tag{a}$$

以(22)除(23)。

$$\frac{\cos A-\cos B}{\cos A+\cos B}=-\tan\tfrac{1}{2}(A+B)\tan\tfrac{1}{2}(A-B).\qquad\text{(b)}$$

以$\frac{1}{2}(A+B)$及$90°-\frac{1}{2}C$代A及B於(b)內，則得

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)-\cos(90°-\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos(90°-\frac{1}{2}C)}$$

$$=-\tan\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+90°-\tfrac{1}{2}C)\tan\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B-90°+\tfrac{1}{2}C)$$

$$=-\tan\tfrac{1}{4}(A+B-C+180°)\tan\tfrac{1}{4}(A+B+C-180°)$$

令　　　　$E=A+B+C-180°.$

$$\therefore\tan\tfrac{1}{4}(A+B-C+180°)=\tan\tfrac{1}{4}(360°-2C+A+B+C-180°)$$

$$=\tan\tfrac{1}{4}(360°-2C+E)$$

$$=\tan[90°-\tfrac{1}{4}(2C-E)]$$

$$=\cot\tfrac{1}{4}(2C-E).$$

今以E代$A+B+C-180°$及$\cot\frac{1}{4}(2C-E)$代$\tan\frac{1}{4}(A+B-C+180°)$，則得

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)-\cos(90°-\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos(90°-\frac{1}{2}C)}=-\cot\tfrac{1}{4}(2C-E)\tan\tfrac{1}{4}E.\qquad\text{(c)}$$

再由(b)內以$\frac{1}{2}(a+b)$及$\frac{1}{2}c$代A及B，又以s代$\frac{1}{2}(a+b+c)$，及$s-c$代$\frac{1}{2}(a+b-c)$，則得

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c}=-\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-c).\qquad\text{(d)}$$

將(a),(c),(d)比較之。得

$$\cot\tfrac{1}{4}(2C-E)\tan\tfrac{1}{4}E=\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-c). \qquad (e)$$

再由〔49〕之第二式為始。而以同法推之。得其結果

$$\tan\tfrac{1}{4}(2C-E)\tan\tfrac{1}{4}E=\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b). \qquad (f)$$

將(e)及(f)兩式相乘。則得一優美之公式。

$$\tan^2\tfrac{1}{4}\mathbf{E}=\tan\tfrac{1}{2}\mathbf{s}\tan\tfrac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{a})\tan\tfrac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{b})\tan\tfrac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{c}). \qquad [25]$$

此謂之幼氏公式(l'Huilier's Formula)。

由〔52〕。其E可由三邊計算之。而後由〔51〕求其三角形之面積。

III. 其餘各例之面積之求法。可先解三角形。以得其各角或各邊。然後以任一種由〔51〕或〔52〕計算之。

例1. 已知$A=102°\,14'\,12''$, $B=54°\,32'\,24''$, $C=89°\,5'\,46''$, 求三角形之面積。

$A=102°\ 14'\ 12''$	$\log R^2=\log R^2$
$B=\ 54°\ 32'\ 24''$	$\log E=5.37501$
$C=\ \underline{89°\ \ 5'\ 46''}$	* $\log\dfrac{\pi}{648000}=4.68557-10$
$245°\ 52'\ 22''$	$\log F=\overline{0.06058+\log R^2}$
$E=\ 65°\ 52'\ 22''$	$F=1.1497R^2$
$=237142''$	
$180°=648000''$	

* 參看溫氏與希氏合著之對數及三角表p. 20.

例2　已知 $a=133°26'19''$, $b=64°50'53''$, $c=144°13'45''$, 求 $E=200°46'46''$。

$a=133°26'19''$	$\log\tan\frac{1}{2}s=1.11669$
$b=64°50'53''$	$\log\tan\frac{1}{2}(s-a)=9.53474$
$c=144°13'45''$	$\log\tan\frac{1}{2}(s-b)=0.12612$
$2s=342°30'57''$	$\log\tan\frac{1}{2}(s-c)=9.38083$
$s=171°15'28.5''$	$\log\tan^2\frac{1}{4}E=0.15838$
$s-a=37°49'9.5''$	$\log\tan\frac{1}{4}E=0.07919$
$s-b=106°24'35.5''$	$\frac{1}{4}E=50°11'41.5'$
$s-c=27°1'43.5''$	$E=200°46'46''$

例題 XXIII.

1. 已知 $A=84°20'19''$, $B=27°22'40''$, $C=75°33'$。求 $E=26159''$, $F=0.12682\,R^2$.

2. 已知 $a=69°15'6''$, $b=120°42'47''$, $c=159°18'33''$。求 $E=216°40'18''$.

3. 已知 $a=33°1'45''$, $b=155°5'18''$, $C=110°10'$。求 $E=133°48'53''$.

已知下文各件。試求各三角形之面積(4—13)。

4. $c=114°27'57''$, $A=78°42'33''$, $B=127°13'7''$.

5. $a=76°14'47''$, $b=82°40'15''$, $A=60°22'44''$.

6. $A=80°12'35''$, $B=77°38'22''$, $a=76°42'28''$.

7. $b=44°27'40''$, $c=15°22'44''$, $A=167°42'27''$.

8. $b=67°15'42''$, $C=84°55'8''$, $C=96°18'49''$.

9. $b=72°19'38''$, $c=54°53'52''$, $B=77°15'14''$.

10. $B=127°16'4''$, $C=42°34'19''$, $b=54°47'55''$.

11. $a=128°42'56''$, $b=107°13'48''$, $c=88°37'51''$.

12. $A=127°22'28''$, $C=131°45'27''$, $C=100°52'16''$.

13 $a=116°19'45''$, $A=160°42'24''$, $C=171°27'15''$.

14 設地球面上(作球面論)有一三角形。其各邊等於1°。試求其面積(地球半徑=3958哩)。

第玖編

球面三角法之應用

APPLICATIONS OF SPHERICAL TRIGONOMETRY

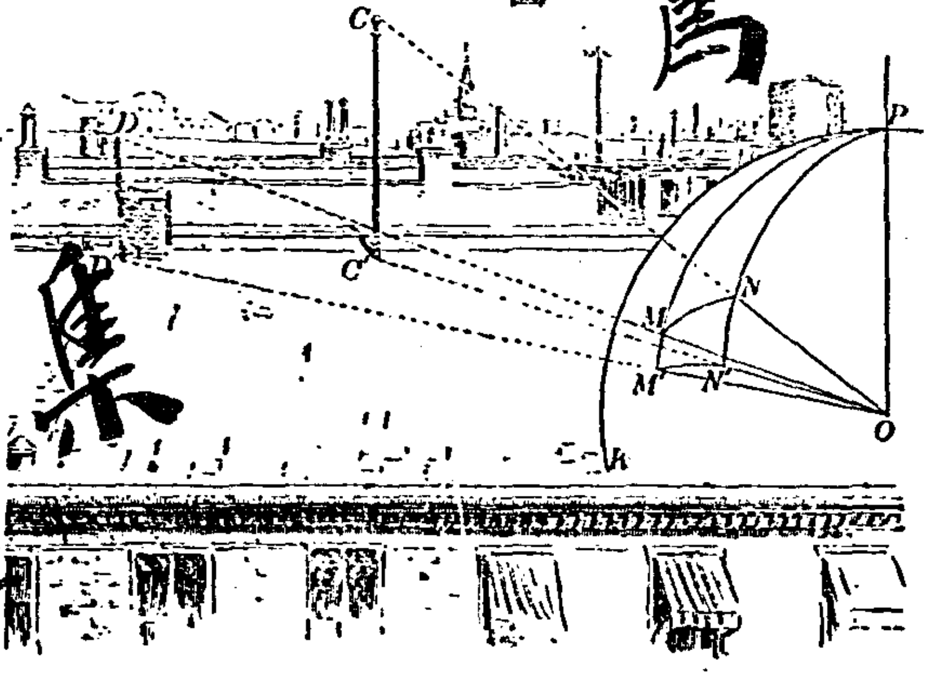
第六十四章

問題

PROBLEM

試以空中所測之一角。化爲水平角。

100 圖



設 O (100圖)爲人目所在之處，$DOC=h$ 爲於空中所測之角。OD' 及 OC' 爲其角之兩邊在水平面上之射影。$DOD'=m$ 及 $COC'=n$ 爲 OD 及 OC 之倚角。求水平面上射影所成之角 $D'OC'=x$。

其 DOD'，及 COC' 之兩平面，相交於水平面之垂直綫 OP (溫氏幾何學§556)。

以 O 爲心作一球。令此球面割三面角 $O-DCP$ 之各稜於 M, N 及 P。

於球面三角形 MNP 內，$MN=h$，$MP=90^\circ-m$，$NP=90^\circ-n$，均爲已知。而 $P=x$ 爲所求者。

由〔47〕

$$\cos\tfrac{1}{2}x=\sqrt{\frac{\sin(90^\circ+\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n)\sin(90^\circ-\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n)}{\sin(90^\circ-m)\sin(90^\circ-n)}}.$$

令 $\frac{1}{2}(h+m+n)=s$，則得

$$\cos\tfrac{1}{2}x=\sqrt{\frac{\sin[90^\circ+(s-h)]\sin(90^\circ-s)}{\cos m\cos n}}$$

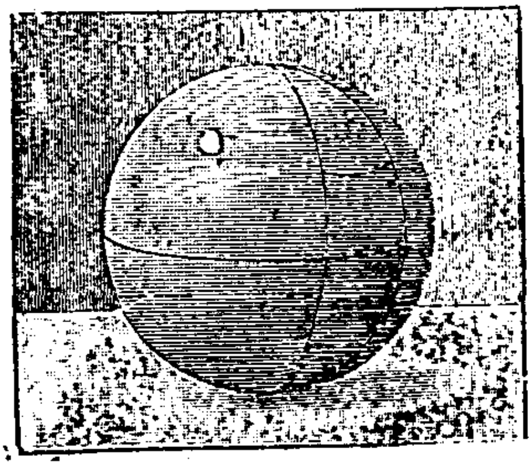
$$=\sqrt{\cos(s-h)\cos s\sec m\sec n}.$$

第六十五章

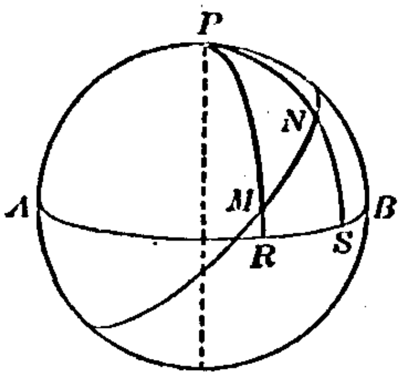
問題

<u>已知地球面上(作球面論)兩地之緯度及其經度差。求兩地之距。</u>

101 圖



102 圖



設 M 及 N (102 圖) 為兩地，則 MN 之距，為經過兩地之大圓弧，又設 P 為其極，ARB 為赤道，則 MR 及 NS 兩弧。為其兩地之緯度。而 RS 弧或 MPN 角，為其經度差。介 $MR=b$, $NS=a$, $RS=l$。則於球面三角形 MNP 內，其兩邊 $MP=90^\circ-b$, $NP=90^\circ-a$。而其夾角 $MPN=l$。均為已知。於是由五十七章，得

$$\tan m=\cot a\cos l,$$

$$\cos MN=\sin a\sec m\sin(b+m).$$

由此兩方程式，先求 m。次求 MN 弧，再以 MN 變為海里。於是每度有 60 海里，

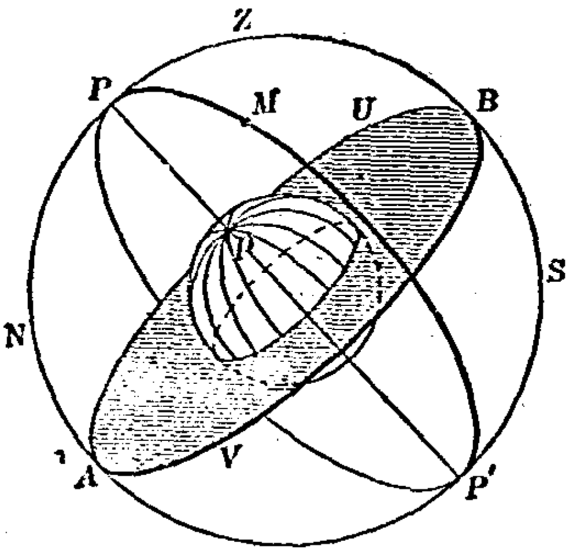
第六十六章

天球（或天體儀）

THE CELESTIAL SPHERE

天球云者，一無定半徑之想像球面，各天象均在其凹面中運行者也。

103 圖



天體赤道(Celestial Equator 或 Equinoctial) $AVBU$ (103 圖)，卽地球赤道之平面與天球面相交時所成之大圓。

天體赤道之極 (Pole) P 及 P'(103 圖)，爲地球軸之引長綫達天球面之交點。

天體子午綫(Celestial Meridian) PBP'(104 圖)，卽地球子午綫之平面引長時，達天球面所成之大圓。

時圈(Hour Circles)或**倚圈** (Circles of Declination) PMP' (104 圖)，卽經過兩極之大圓，與天體赤道正交者。

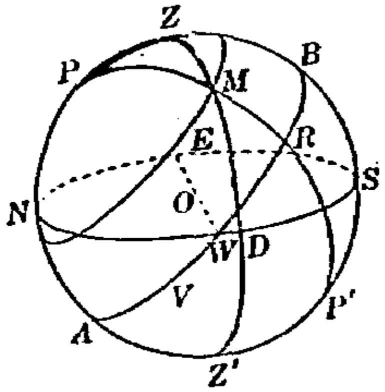
某點之地平 (Horizon) $NWSE$ (104 圖)，卽地球上某點之切面展開時，達天球面所成之大圓。

測者之天頂(Zenith)Z(104圖)云者。卽地平之極,適在測者之頂上者也。

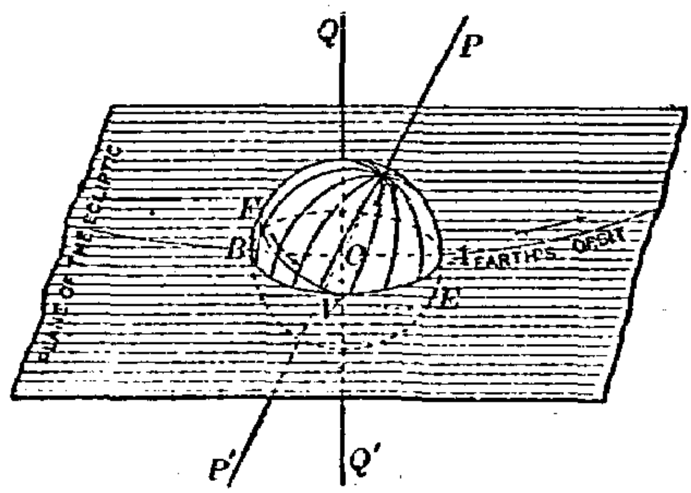
垂直圈(Vertical Circles)如$NPZS$(104圖)。爲經過某點之天頂所作之大圈,垂直於地平者。

垂直圈經過地平之東西兩點者。謂之原垂直(Prime Vertical)。過南北兩點者。與其天體子午綫符合。

104 圖



105 圖

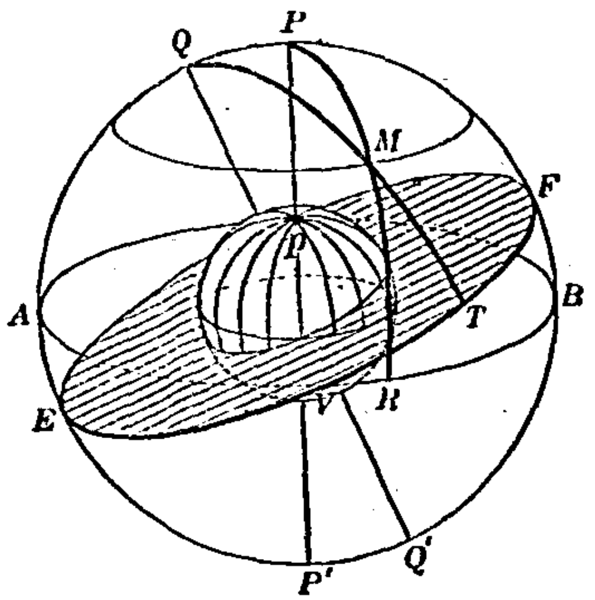


黃道(Ecliptic)AVB(105圖)爲太陽於一年內自西至東環繞一週時所成於天球上之大圈。亦卽地球環繞太陽一週時運行之路也。

分點(Equinoxes)云者。黃道與天體赤道之兩交點也。其一曰春分(Vernal equinox)。又一曰秋分(Autumnal equinox)。其太陽每年之行程。經過春分點,在西歷三月二十一號。經過秋分點,在西歷九月二十一號。其春分點,圖中以V表之。(106圖)。

緯度圈(Circles of Latitude)如 QMT(106 圖)。乃過黃道極所作之大圈而與黃道之平面垂直者也。

106 圖



黃道與天體赤道所成之角。謂之**黃道之傾**(Obliquity of Ecliptic)。其角度約等於 $23°27'$。恆以字母 e 表之。

地球每日之運動。令一切天象,視若自東向西旋轉。其平均速度。每小時為 $15°$。設於104圖內。設想一觀者在 O 心。而其天頂,地平,及天體子午綫。各為之定其位置。又一切天象繞 PP' 軸自東向西旋轉。速率每小時為 $15°$。則於一切天象每日之運動。可想見其概矣,太陽或星辰每日行過子午綫時。謂之過子午綫而成一**子午儀** (Transit)。其行過地平面之 NWS 部分時。謂為**沒或入** (Set)。而行過地平之 NES 部分時。謂為**升為出**(Rise)(折光之效果。今從略。)任一星如 M。日日作一小圓。與天體赤道平行。此之謂星之**日圈** (Diurnal Circle)。星愈近於極。則其日圈愈小。若於 P, P' 極上亦有數星。則該星等必無逐日之運行。若觀者在赤道之北。則北極 P 為地平之上極(106 圖)。若在赤道之南。則南極 P' 為地平之上極。

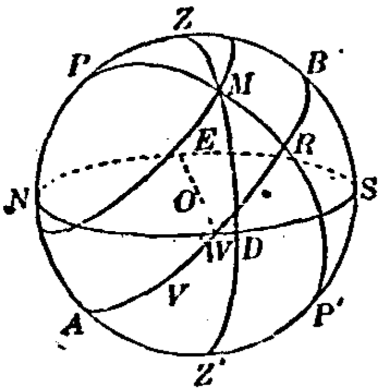
第六十七章

球面坐標

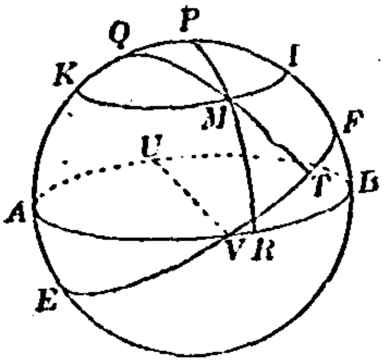
SPHERICAL CO-ORIDINATES

於天球面上定星之位置。其法不一。惟任何一法之中。每以大圓及其極爲標準。而星之位置，由球面坐標之二量決定之。

107 圖



108 圖



I. 設地平及天頂爲已定(107 圖)。則星之坐標，爲其高度及地平經度。

星之高度 (Altitude) 爲地平以上垂直圓內所測之角距 DM。其緯度之餘度 MZ。謂之天頂距(Zenith Distance)。

星之地平經度(Azimuth)爲天頂之某角 PZM。卽測者之子午綫與經過此星之垂直圓所成者故其角度以地平之弧測之，若星在北緯度。則自地平之北點計算。若在南緯度。則自南點計算。其東西計算之法。亦依其星在子午綫之或東或西爲準。

II. 設天體赤道及其極爲已決定(108圖)。則星之位置。可由其赤緯度及時角定之。

星之赤緯度(Declination)云者。時圈上自天體赤道所測之角距 RM 也。其於時圈上自上極所測之角距 PM。謂之星之極距(Polar Distance)。

星之赤緯度。或南或北均可。與地球面上一地之緯度同。惟於實習問題內。緯度則恆視作爲正。赤緯度既與緯度異名，則不可不視爲負。

若赤緯度爲負，極距之數值等於90°+赤緯度。

星之時角(Hour Angle)。爲在極之角 MPQ。卽測者之子午綫 APB 與過星之時圈 PMR 所成者也。因有每日之旋轉。故時角依每時15°之速率。時常改變。時角乃自天體子午綫計算。其向西者爲正。向東者爲負。

III. 仍以天體赤道及其極爲已決定。則可用其赤緯度及赤經度，爲星之坐標。

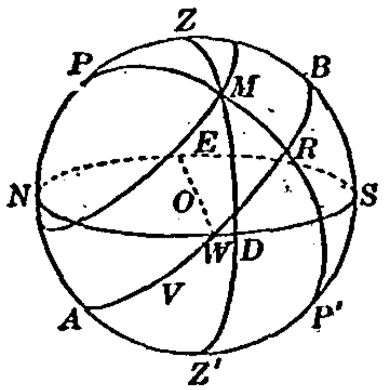
星之赤經度(Right Ascension)。爲天體赤道上之 VR 弧。卽夾於春分點及星之時圈與天體赤道之交點間者也。赤徑度，自春分點向東計算。自0°至360°。

IV. 黃道(Ecliptic) EVF 及其極 Q。亦可用作標準，於是星之坐標。爲其緯度及經度。

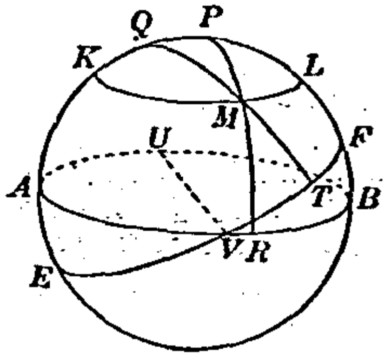
星之緯度(Latitude)。爲其角距 MT(110圖)，卽於緯度圈上自黃道測得者也。

星之經度(Longitude)。爲黃道上之VT弧(110圖)卽夾於春分點及過星之緯度圈與黃道之交點間者也。星之經度。恆自春分點向東測算之。

109 圖



110 圖



於一點星M(109圖及110圖)。令

l=觀者之緯度。

h=　DM=星之高度(109圖)。

z=　ZM=星之天頂距。

$a=\angle PZM$=星之地平經度。

$t=\angle ZPM$=星之時角。

d=　RM=星之赤緯度。

p=　PM=星之極距。

r=　VR=星之赤經度(110圖)。

u=　MT=星之緯度。

v=　VT=星之經度。

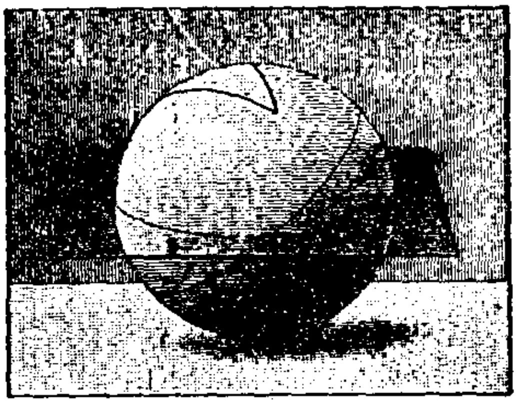
NZS=天體子午綫(109圖)。

ARB=天體赤道(110圖)。

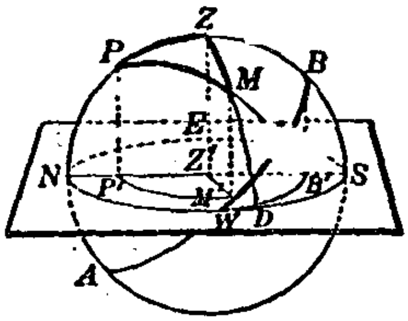
EVF=黃道。

亦有多數問題，以射於地平面上之球，代表所測之量。如112圖及113圖。

111 圖

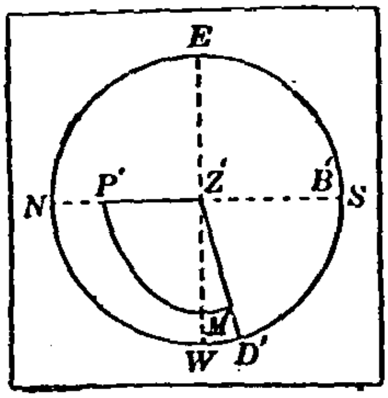


112 圖



NESW 爲地平。*Z* 爲天頂。*NZS* 爲天體子午綫。*WZE* 爲原垂直。*WBE* 爲天體赤道之弧。*P* 爲極。*M* 爲星。*DM* 爲其高度。*ZM* 爲其天頂距。$\angle PZM$ 爲其地平經度。*MR* 爲其赤緯度。*PM* 爲其極距。$\angle ZPM$ 爲其時角。

113 圖



第六十八章

天文三角形

THE ASTRONOMICAL TRIANGLE

航海天文學(Nautical Astronomy)之各問題內，*ZPM* 三角形 (109 圖)，至爲重要。恆稱之曰天文三角形。

∴其PZ邊等於測者之緯度之餘度。因O(114圖)爲球心，則夾於觀者之天頂及天體赤道間之ZOB角。必等於其緯度。而POZ角爲ZOB之餘角。又因NP爲PZ之餘弧。故上極之高度。等於測地之緯度。

則ZPM三角形(其形狀依M星之位置可任何變換之)。恆有下之五量。

PZ＝觀者之餘緯度

$=90°-l$。

ZM＝星之天頂距

$=z$。

$\angle PZM$＝星之地平經度

$=a$。

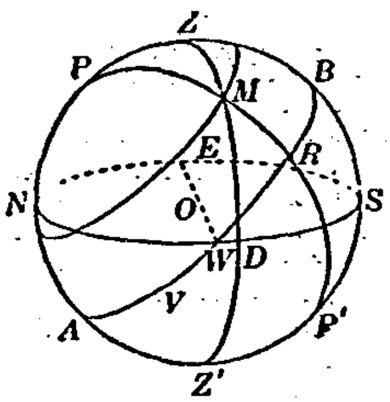
PM＝星之極距

$=p$。

$\angle ZPM$＝星之時角

$=t$。

114 圖



於是太陽之時角。與各地之時候。有一極簡單之關係。太陽之運行。恍若自東而西。每小時速率爲15°。其在任何地之子午綫上。則此地顯爲正午。所以時角爲0°時爲正午。15°時爲下午一點鐘。75°時爲下午五點鐘。$-15°$時爲上午十一點鐘。$-75°$時爲上午七點鐘。餘類推。

通例所用。設 t 表其時角之絕對值。則於太陽在子午綫西之時。

$$時候爲\frac{t}{15}下午。$$

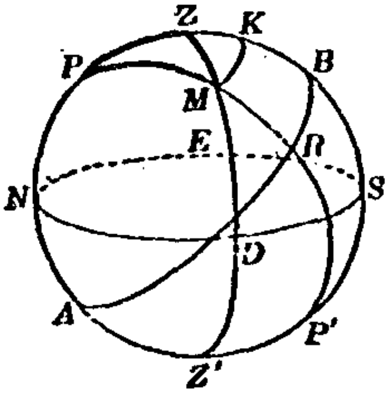
於太陽在子午綫東之時。

$$時候爲12-\frac{t}{15}上午。$$

第六十九章
問題

已知測者之緯度及一星之高度，與地平經度。求其赤緯度及時角，

115 圖



於三角形 ZPM 內(115圖)。已知

$PZ=90°-l=$ 餘緯度。

$ZM=90°-h=$ 餘高度。

$\angle PZM=a$　　$=$ 地平經度。

求　$PM=90°-d=$ 極距。

$\angle ZPM=t$　　$=$ 時角。

作 $MK\perp NZS$。

令　　$ZK=m.$

則於　$a<90°$ 時。$PK=90°-(l+m)$.

而於　$a>90°$ 時。$PK=90°-(l-m)$

由訥氏規則 $\cos a=\pm\tan m\tan h,$ (1)

$\sin d=\cos PK\cos MK,$ (2)

$\sin h=\cos m\cos MK.$ (3)

自(1) $\tan m=\pm\cot h\cos a.$ (A)

自(3) $\cos MK=\sin h\sec m.$ (4)

自(2) $\sin d=\cos\left[90^\circ-(l\pm m)\right]\cos MK.$

$\therefore \sin d=\sin(l\pm m)\cos MK.$ (5)

以 $\cos MK$ 值代入(5)。

則 $\sin d=\sin(l\pm m)\sin h\sec m.$ (B)

方程式(A)及(B)內。其負符號須於 $a>90^\circ$ 時用之。於是其時角可由(44)求得。如下。

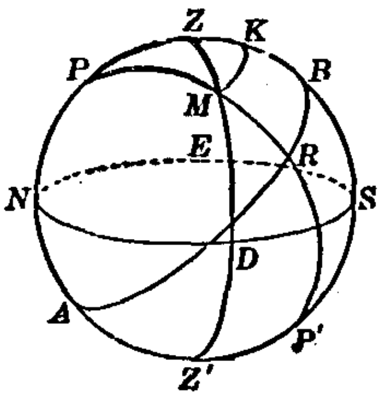
$$\sin t=\sin a\cos h\sec d.$$

第七十章

問題

已知一天象之赤緯度,高度及地之緯度,求時角。

116 圖



於三角形 ZPM 內(116 圖)。已知

$$PZ=90^\circ-l,$$
$$PM=90^\circ-d=p,$$
$$ZM=90^\circ-h.$$

求 $\angle ZPM=t.$

於(47)之第一式。若

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\sin(s-b)\sin(s-c)\csc b\csc c}.$$

令 $A=t,\ a=90^\circ-h,\ b=p,\ c=90^\circ-l,$

又 $$2s=a+b+c.$$

則 $$2s=90^\circ-h+p+90^\circ-l,$$

卽 $$=180^\circ-l+p-h;$$

於是 $$s=90^\circ-\tfrac{1}{2}l+\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}h,$$

$$s-b=90^\circ-\tfrac{1}{2}(l+p+h),$$

$$s-c=\tfrac{1}{2}(l+p-h);$$

而其公式變為

$$\sin\tfrac{1}{2}t=\pm\sqrt{\sin(90^\circ-\tfrac{1}{2}(l+p+h))\sin\tfrac{1}{2}(l+p-h)\csc p\csc(90^\circ-l)}$$
$$=\pm\sqrt{\cos\tfrac{1}{2}(l+p+h)\sin\tfrac{1}{2}(l+p-h)\csc p\sec l}.$$

其根號前之負號。須於天象在子午綫東之時用之。

若天象為太陽。問於時角旣得之後如何而求其地方之時候(六十八章)。

第七十一章

問題

<u>已知一天象之赤緯度,時角及地之緯度。求其高度及地平經度。</u>

於三角形 ZPM 內(116 圖)。

已知 $$PZ=90^\circ-l,$$

$$PM=90^\circ-d=p,$$

$$\angle ZPM=t.$$

求 $$ZM=90^\circ-h,$$

$$\angle PZM=a.$$

作 $MK\perp NZS$ 而令 $PK=m$.

若 $a<90^\circ$, 則 $ZK=90^\circ-(l+m)$;

若 $a>90^\circ$, 則 $ZK=(l+m)-90^\circ$.

由訥氏規則。

$$\cos t=\tan m\tan d, \tag{1}$$

$$\sin h=\sin(l+m)\cos MK, \tag{2}$$

$$\sin d=\cos MK\cos m, \tag{3}$$

$$\cos(l+m)=\cot a\tan MK, \tag{4}$$

$$\sin m=\cot t\tan MK. \tag{5}$$

自(1), $$\tan m=\cot d\cos t. \tag{A}$$

自(3), $$\cos MK=\sin d\sec m. \tag{6}$$

以 $\cos MK$ 代入(2),

$$\sin h=\sin(l+m)\sin d\sec m. \tag{B}$$

自(5), $$\tan MK=\sin m\tan t.$$

以 $\tan MK$ 代入(4),

$$\tan a=\sec(l+m)\sin m\tan t. \tag{C}$$

此(A), (B), (C)爲所求之方程式,

於(C)內 a 之或東或西。與時角相同。

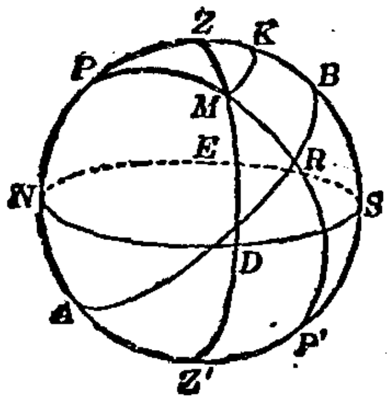
第七十二章

問題

<u>已知一天象之高度赤緯度及時角。求地之緯度。</u>

於三角形 ZPM 內 (117 圖)。已知

117 圖



$$ZM=90^\circ-h,$$

$$PM=90^\circ-d,$$

$$\angle ZPM=t.$$

求 $\qquad PZ=90^\circ-l.$

作 $MK\perp NZS.$

命 $\qquad PK=m,\ ZK=n.$

則由訥氏規則

$$\cos t=\tan m\tan d,$$

$$\sin h=\cos n\cos MK,$$

$$\sin d=\cos m\cos MK;$$

於是 $\qquad \tan m=\cot d\cos t,$

$$\cos n=\cos m\sin h\csc d.$$

由圖可見 $\qquad l=90^\circ-(m\pm n),$

於上式內其符號之正負。當視天象與上極在原垂直之同旁(Same side)或異旁(Opposite side)而定。

於實際上。所示 l 之兩值。於同高度及同時角時。俱爲合理但非 n 值極小。則兩值相差必大。故欲決定何號爲可用。甚易易也。

第七十三章

問題

已知一星之赤緯度，赤經度及黃道之傾。求此星之緯度及經度。

設 M (119 圖) 爲星。P 爲天體赤道之極。而 Q 爲黃道之極。

則於三角形 PMQ 內。

已知 $PQ=e=23°\,27'$,

$PM=90°-d$,

$\angle MPQ=90°+r$.

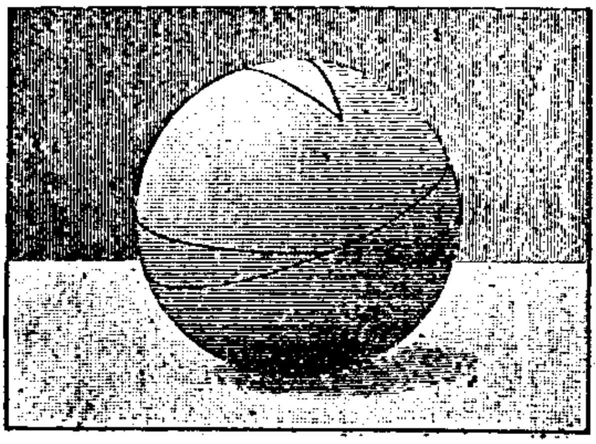
求 $QM=90°-u$,

及 $\angle PQM=90°-v$.

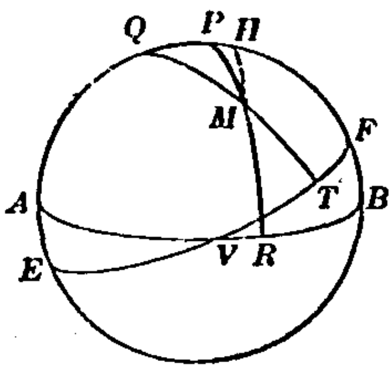
此中 $r=$ 赤經度 $=VR$,

$u=M$ 之緯度 $=MT$,

$v=M$ 之經度 $=VT$.



118 圖

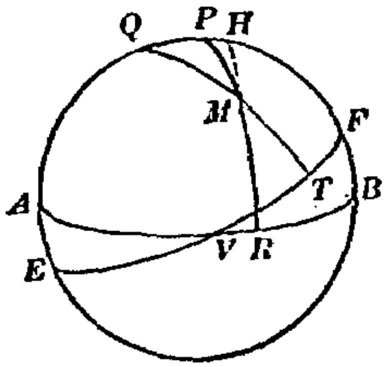


119 圖

今兩邊及夾角爲已知。作$MH \perp PQ$。而與其引長綫遇於H。令$PH=n$。

由訥氏規則

120 圖



$$\sin r=\tan n\tan d, \qquad (1)$$

$$\sin u=\cos(e+n)\cos MH, \qquad (2)$$

$$\sin d=\cos n\cos MH, \qquad (3)$$

$$\sin(e+n)=\tan v\tan MH, \qquad (4)$$

$$\sin n=\tan r\tan MH. \qquad (5)$$

自 (1)，
$$\tan n=\cot d\sin r. \qquad \text{(A)}$$

自 (3)，
$$\cos MH=\sin d\sec n.$$

以$\cos MH$值代入 (2)。

$$\sin u=\cos(e+n)\sin d\sec n. \qquad \text{(B)}$$

自 (4)，
$$\tan v=\sin(e+n)\cot MH. \qquad (6)$$

自 (5)，
$$\cot MH=\tan r\csc n.$$

以$\cot MH$代入(6)。

$$\tan v=\sin(e+n)\tan r\csc n. \qquad \text{(C)}$$

(A),(B),(C)三方程式。決定u及v。

若欲捨正弦以求u。則可用下法計算之。

於QMH直角三角形內。取Q爲QM及QH兩鄰邊之中部。

由訥氏規則。 $\cos Q = \tan QH \cot QM.$

但 $Q = 90° - v,$

$QH = e + n,$

$QM = 90° - u.$

故 $\cos Q = \tan QH \cot QM$

可寫爲 $\sin v = \tan(e+n) \tan u.$

$\therefore \tan u = \sin v \cot(e+n).$

例題 XLIV.

1. 今有一正十邊之稜錐體。已知其頂點上爲相鄰兩側稜所成之角$V=18°$。求相鄰側面所成之二面角。

2. 一木杆與平面成A角。經過杆底。而於平面內作一直綫。與其平面上杆之射影相交成B角。求此直綫與杆之交角。

3 已知斜角平行方體之三不等稜爲a, b, c。而其各稜互成之三角爲l, m, n。求體積。

4. 亞洲形狀大略爲一等邊三角形。其頂點爲東角(East Cape),羅門尼角(Cape Romania)及排排士角(Promontory of Baba)。假定其每邊爲4800哩。而地球半徑爲3440哩。求此三角形之面積。(i)以平面計算。(ii)以球面計算。

5. 一船自緯度l之一港。於大圓弧上駛行。其航路(卽其駛行之方向與子午綫之交角)自起點爲a。問此船於何處越過赤道。並求其赤道上之航路及駛行之距離。

6. 有同緯度l之兩地其於大圓弧上之距離爲d。問此兩地間平行緯綫之弧大於大圓弧者若干。設$l=45°$；$d=90°$。試計算其結果。

7. 已知兩地之距離d。及其緯度l與l'。求其經度差。

8. 已知地球面上三地之緯度及經度，與地球半徑。如欲求以此三地爲頂點之球面三角形之面積。當用何法。

9. 巴黎與柏靈之距離(大圓之弧)。等於472浬。其緯度。巴黎爲$48°\,50'\,13''$。柏靈爲$52°\,30'\,16''$。問巴黎在正午時。柏靈爲何時。

〔注意〕由太陽之運行。其地球面上之各地時間。任於何例。必依每小時15°經度之速率而變。又地方愈東。則其地方時間愈晚。

10. 已知極之高度45°及地平面上某星之地平經度45°。求星之極距。

11. 已知測者之緯度l。及太陽之赤緯度d。求日出及日入之地方時間(太陽時間)。又此兩時太陽之地平經度(折光從略)爲何。又問波斯頓Boston ($l=42°\,21'$)於一年中最長之日。(此時$d=+23°\,27'$)。太陽之出。當在何時何處。而自日出至日入時。日長若干。又問波斯頓Boston於一年中最短之日(此時$d=-23°\,27'$)。日出於何時及何處。並求此日之長。

12. 問如何而11題爲不可解。又於何處爲不可解。

13. 已知一地之緯度。及太陽之赤緯度。求其上午六點鐘時之高度及地平經度(折光從略)。設以密尼希Munich ($l=48°\,9'$)一年中最長之日。計算其結果。

14. 吾人若自赤道至極，問某日(Given day)上午六點鐘時。太陽之高度，如何變化。又問一年中之何日太陽，於某地(Given place)達最高處(已知$\sin h=\sin l\sin d$)。

15. 已知赤道北一地之緯度，及太陽之赤緯度。設太陽之方位為正東及正西。求是日之時間。設用聖彼得堡 (St. Petersburg, $l=59°56'$)之最長日。計算其結果。

16. 試以15題之普通結果($\cos t=\cot l\tan d$)，用於晝夜等長(卽$d=0°$時)之例。又問太陽之在夏季。何以上午六點之前，永不向正東。下午六點之後。永不向正西。又問正東向及正西向之時間。與太陽之赤緯度，如何變化。試以普通結果。用於$l<d$及$l=d$之各例。又問在北極上。此結果為何。

17. 設於太陽在正東時。已知其赤緯度及高度。求測者之緯度。

18. 自地平面MN內之一點O。定一標杆OA。令其與平面所成之倚角AOB。等於其地之北緯度$51°30'$。苟其方向OB為正北。問於下午一點鐘太陽在天體赤道上時。其OB與平面上之OA影。相交作何角。

19. 北緯$52°30'$處之一牆。於最長日之上午六點鐘時無影。求此牆之方向。

20. 於某地之最長日。太陽出自東北方。求此地之緯度。

21. 某地之最長日。太陽沒於十點鐘。求此地之緯度。

22. 第七十章時角之普通公式內，若(i)$h=0°$,(ii)$l=0°$及$d=0°$,(iii)l或$d=90°$。問公式變爲若何。

23. 第七十一章天象之地平經度之普通公式內。若$t=90°=6$小時。則此式變爲若何。

24. 證明七十二章內之公式。若$t=90°$。則變爲$\sin l=\sin h\csc d$。又若$d=0°$。則變爲$\cos l=\sin h\sec t$。

25. 已知測地之緯度$52°\,30'\,16''$。星之赤緯度$38°$。及其時角$28°\,17'\,15''$。求星之高度。

26. 已知測地之緯度$51°\,19'\,20''$。星之極距$67°\,59'\,5''$。及其時角$15°\,8'\,12''$。求星之高度及地平經度。

27. 已知星之赤緯度$7°\,54'$。高度$22°\,45'\,12''$。及地平經度$129°\,45'\,37''$。求時角及測者之緯度。

28. 已知$e=23°\,27'$。及太陽之經度v。求赤緯度d及赤經度r。

29. 已知$e=23°\,27'$。星之緯度$51°$。經度$315°$。求赤緯度及赤經度。

30. 已知測者之緯度$44°\,50'$。星之地平經度$138°\,58'$及時角$20°$。求其赤緯度。

31. 已知測者之緯度$51°\,31'\,48''$。太陽在子午綫西之高度$35°\,14'\,27''$。及其赤緯度$+21°\,27'$。求地方時間。

32. 已知一地之緯度l。星之極距p。及其高度h。求地平經度a。

$$\tan^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A} \qquad \sin\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 = \cos\left(\frac{2\sqrt{m}}{m+1}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

$$\sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

公 式 彙 錄

FORMULAS

平 面 三 角 法

1. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$

2. $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}.$ $\quad \cancel{\cot A = \frac{\sin A}{\cos A}} \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

3. $\begin{cases} \sin A \times \csc A = 1. \\ \cos A \times \sec A = 1. \\ \tan A \times \cot A = 1. \end{cases}$

4. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$

5. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$

6. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$

7. $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}.$

8. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$

9. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$

10. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$

11. $\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}.$

12. $\sin 2x = 2\sin x\cos x.$

13. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$

14. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$

15. $\cot 2x = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}.$

16. $\sin \frac{1}{2} z = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos z}{2}}.$

17. $\cos \frac{1}{2} z = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos z}{2}}$

18. $\tan \frac{1}{2} z = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos z}{1+\cos z}}.$

19. $\cot \frac{1}{2} z = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos z}{1-\cos z}}.$

20. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B).$

21. $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B).$

22. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B).$

23. $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B).$

24. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$

25. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B}.$

26. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$

27. $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$

28. $\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$

29. $\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$

30. $\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$

31. $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=r.$

32. $\tan\frac{1}{2}A=\frac{r}{s-a}.$

33. $F=\frac{1}{2}ac\sin B.$

34. $F=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$

35. $F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

36. $F=\frac{abc}{4R}.$

37. $F=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs.$

球 面 三 角 法

38. $\cos c=\cos a\cos b.$

39. $\begin{cases}\sin a=\sin c\sin A,\\ \sin b=\sin c\sin B.\end{cases}$

40. $\begin{cases}\cos A=\tan b\cot c.\\ \cos B=\tan a\cot c,\end{cases}$

41. $\begin{cases}\cos A=\cos a\sin B.\\ \cos B=\cos b\sin A.\end{cases}$

42. $\begin{cases}\sin b=\tan a\cot A.\\ \sin a=\tan b\cot B.\end{cases}$

43 $\quad\cos c=\cot A\cot B$

44. $\begin{cases}\sin a\sin B=\sin b\sin A.\\ \sin a\sin C=\sin c\sin A.\\ \sin b\sin C=\sin c\sin B.\end{cases}$

45. $\begin{cases}\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.\\ \cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B.\\ \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.\end{cases}$

46. $\begin{cases}\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a.\\ \cos B=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos b.\\ \cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.\end{cases}$

47. $\begin{cases}\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\sin(s-b)\sin(s-c)\csc b\csc c}.\\ \cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\sin s\sin(s-a)\csc b\csc c}.\\ \tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\csc s\csc(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}.\end{cases}$

48. $\begin{cases}\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\csc B\csc C}.\\ \cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\cos(S-B)\cos(S-C)\csc B\csc C}.\\ \tan\frac{1}{2}a=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\sec(S-B)\sec(S-C)}.\end{cases}$

49. $\begin{cases}\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C.\\ \sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.\\ \cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C.\\ \sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.\end{cases}$

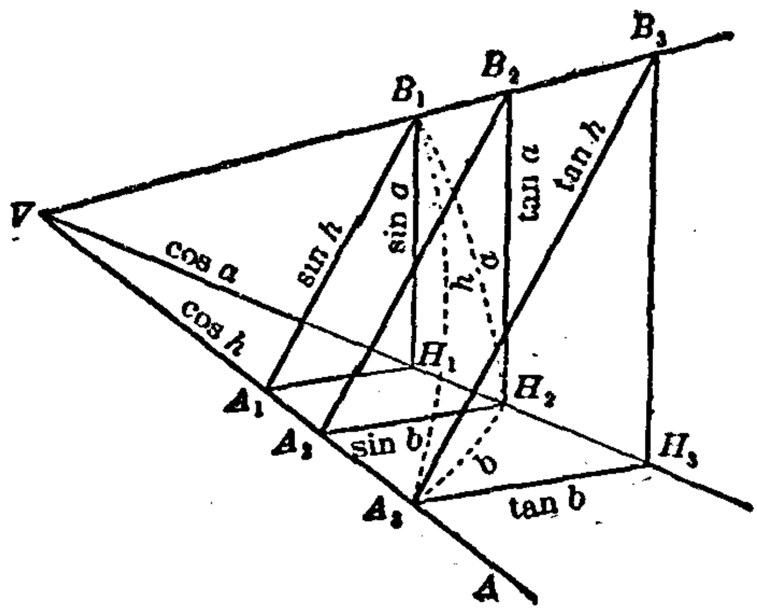
$$50.\quad \begin{cases} \tan\frac{1}{2}(A+B)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C. \\ \tan\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C. \\ \tan\frac{1}{2}(a+b)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c. \\ \tan\frac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c. \end{cases}$$

51. $F=\dfrac{\pi R^2E}{180}.$

52. $\tan^2\frac{1}{4}E=\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c).$

次圖題數學教授白氏之作法(Prof. Blakslee's construction)。由此對於平面直角三角形之方向比直接由圖現有直角三面角或球面直角三角形之比例式。

121 圖



其作法含有兩部分。

1. 自頂點V。作單位距離於其各稜上。

2. 過此距離之三點,作三平面正交於其任一稜如VA。今三平行面必割成三個相似直角三角形。

因其平面角A_1, A_2, A_3均等於二面角A。而其三面內之九個直角三角形。由圖現其各値。於是有

(1) $\sin A = \sin a : \sin h$; 同理 $\sin B = \sin b : \sin h$.

(2) $\cos A = \tan b : \tan h$; 同理 $\cos B = \tan a : \tan h$.

(3) $\tan A = \tan a : \sin b$; 同理 $\tan B = \tan b : \sin a$.

(4) $\cos h = \cos a \cos b$; 由(3), $\cos h = \cot A \cot B$.

(5) $\sin A = \cos B : \cos b$; $\sin B = \cos A : \cos a$.

〔注意〕 設以V爲心。作一單位半徑之球。則其三面割成一球面直角三角形。其三邊爲a, b, h。而三角爲A, B, H。於是可見上之公式。爲下各式之比例式。如

(1) $\sin A = a : h$; $\sin B = b : h$.

(2) $\cos A = b : h$; $\cos B = a : h$.

(3) $\tan A = a : b$; $\tan B = b : a$.

(4) $h^2 = a^2 + b^2$; $1 = \sin^2 + \cos^2$; $1 = \cot A \cot B$.

(5) $\sin A = \cos B$; $\sin B = \cos A$.

訥氏規則。僅有次之數條與比例式相符合者。今記之爲

$$\text{由 (1)}\quad\left\{\begin{aligned}\sin a &= \sin A\sin h = \tan b\cot B\\ \sin b &= \sin B\sin h = \tan a\cot A\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}\cos A &= \sin B\cos a = \tan b\cot h\\ \cos B &= \sin A\cos b = \tan a\cot h\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$(4)\quad\{\cos h = \cos a\cos b = \cot A\cot B\}\quad(4)$$

蓋氏方程式

$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C.$

$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.$

$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C.$

$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.$

答　數

平　面　部

例題 I.

1. $\frac{1}{8}\pi$; $\frac{1}{4}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{13}{12}\pi$; $\frac{1}{16}\pi$; $\frac{11}{16}\pi$; $\frac{5}{24}\pi$.
2. $120°$; $135°$; $112° 30'$; $168° 45'$; $84°$.
3. 0.017453; 0.0002909.
4. $206,265''$.
5. $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$.
6. $11° 27' 33''$.
7. $14° 27' 28''$.
8. 69.166 哩。
9. 57 呎 3.55 吋。
10. 3 小時 49 分 11 秒。
11. 9 呎 2 吋。
12. $\frac{7}{165}$ 秒。

題例 II.

1. $\sin B = \frac{b}{c}$; $\cos B = \frac{a}{c}$; $\tan B = \frac{b}{a}$; $\cot B = \frac{a}{b}$;

$\sec B = \frac{c}{a}$; $\csc B = \frac{c}{b}$.

3. (i) $\sin = \frac{3}{5}$, $\cos = \frac{4}{5}$, $\tan = \frac{3}{4}$, $\cot = \frac{4}{3}$, $\sec = \frac{5}{4}$, $\csc = \frac{5}{3}$;

(ii) $\sin = \frac{5}{13}$, $\cos = \frac{12}{13}$, $\tan = \frac{5}{12}$, $\cot = \frac{12}{5}$, $\sec = \frac{13}{12}$, $\csc = \frac{13}{5}$;

(iii) $\sin=\frac{8}{17}$, $\cos=\frac{15}{17}$, $\tan=\frac{8}{15}$, $\cot=\frac{15}{8}$, $\sec=\frac{17}{15}$, $\csc=\frac{17}{8}$;

(iv) $\sin=\frac{9}{41}$, $\cos=\frac{40}{41}$, $\tan=\frac{9}{40}$, $\cot=\frac{40}{9}$, $\sec=\frac{41}{40}$, $\csc=\frac{41}{9}$;

(v) $\sin=\frac{39}{89}$, $\cos=\frac{80}{89}$, $\tan=\frac{39}{80}$, $\cot=\frac{80}{39}$, $\sec=\frac{89}{80}$, $\csc=\frac{89}{39}$;

(vi) $\sin=\frac{119}{169}$, $\cos=\frac{120}{169}$, $\tan=\frac{119}{120}$, $\cot=\frac{120}{119}$,

$\sec=\frac{169}{120}$, $\csc=\frac{169}{119}$.

4. 當以 $a^2+b^2=c^2$ 之例補之. 是也,

5 (i) $\sin=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$, $\cos=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$, $\tan=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$,

$\cot=\dfrac{m^2-n^2}{2mn}$, $\sec=\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ $\csc=\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$;

(ii) $\sin=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $\cos=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\tan=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$,

$\cot=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$, $\sec=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $\csc=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$;

(iii) $\sin=\dfrac{q}{s}$, $\cos=\dfrac{q}{p}$, $\tan=\dfrac{p}{s}$, $\cot=\dfrac{s}{p}$, $\sec=\dfrac{p}{q}$, $\csc=\dfrac{s}{q}$;

(iv) $\sin=\dfrac{ms}{qr}$, $\cos=\dfrac{mpv}{nqr}$, $\tan=\dfrac{ns}{pv}$,

$\cot=\dfrac{pv}{ns}$, $\sec=\dfrac{nqr}{mpv}$, $\csc=\dfrac{qr}{ms}$.

7. 在 (iii) $p^2q^2+q^2s^2=p^2s^2$; 在 (iv) $m^2n^2s^2+m^2p^2v^2=n^2q^2r^2$.

8. $\sin A=\frac{24}{145}=\cos B$; $\cos A=\frac{143}{145}=\sin B$;

$\tan A=\frac{24}{143}=\cot B$; $\cot A=\frac{143}{24}=\tan B$;

$\sec A=\frac{145}{143}=\csc B$; $\csc A=\frac{145}{24}=\sec B$.

9. $\sin A=\frac{264}{265}=\cos B$; $\cos A=\frac{23}{265}=\sin B$;

$\tan A=\frac{264}{23}=\cot B$; $\cot A=\frac{23}{264}=\tan B$;

$\sec A=\frac{265}{23}=\csc B$; $\csc A=\frac{265}{264}=\sec B$.

10. $\sin A=\frac{168}{193}=\cos B$; $\cos A=\frac{95}{193}=\sin B$;

$\tan A=\frac{168}{95}=\cot B$; $\cot A=\frac{95}{168}=\tan B$;

$\sec A=\frac{193}{95}=\csc B$; $\csc A=\frac{193}{168}=\sec B$.

11. $\sin A=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p+q}=\cos B$; $\cos A=\frac{\sqrt{2pq}}{p+q}=\sin B$;

$\tan A=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{2pq}}=\cot B$; $\cot A=\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{p^2+q^2}}=\tan B$;

$\sec A=\frac{p+q}{\sqrt{2pq}}=\csc B$; $\csc A=\frac{p+q}{\sqrt{p^2+q^2}}=\sec B$.

12. $\sin A=\frac{\sqrt{p^2+pq}}{p+q}=\cos B$; $\cos A=\frac{\sqrt{q^2+pq}}{p+q}=\sin B$;

$\tan A=\sqrt{\frac{p}{q}}=\cot B$; $\cot A=\sqrt{\frac{q}{p}}=\tan B$;

$\sec A=\frac{p+q}{\sqrt{q^2+pq}}=\csc B$; $\csc A=\frac{p+q}{\sqrt{p^2+pq}}=\sec B$.

13. $\sin A=\dfrac{p-q}{p+q}=\cos B$; $\cos A=\dfrac{2\sqrt{pq}}{p+q}=\sin B$;

$\tan A=\dfrac{p-q}{2\sqrt{pq}}=\cot B$; $\cot A=\dfrac{2\sqrt{pq}}{p-q}=\tan B$;

$\sec A=\dfrac{p+q}{2\sqrt{pq}}=\csc B$; $\csc A=\dfrac{p+q}{p-q}=\sec B$.

14. $\sin A=\frac{2}{5}\sqrt{5}$; $\cos A=\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $\tan A=2$;

$\cot A=\frac{1}{2}$; $\sec A=\sqrt{5}$; $\csc A=\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

15. $\sin A=\frac{2}{3}$; $\cos A=\frac{1}{3}\sqrt{5}$; $\tan A=\frac{2}{5}\sqrt{5}$;

$\cot A=\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\sec A=\frac{3}{5}\sqrt{5}$; $\csc A=\frac{3}{2}$.

16. $\sin A=\frac{1}{8}(5+\sqrt{7})$; $\cos A=\frac{1}{8}(5-\sqrt{7})$;

$\tan A=\frac{1}{9}(16+5\sqrt{7})$; $\cot A=\frac{1}{9}(16-5\sqrt{7})$;

$\sec A=\frac{4}{9}(5+\sqrt{7})$; $\csc A=\frac{4}{9}(5-\sqrt{7})$.

17. $\sin A=\frac{1}{8}(\sqrt{31}+1)$; $\cos A=\frac{1}{8}(\sqrt{31}-1)$;

$\tan A=\frac{1}{15}(16+\sqrt{31})$; $\cot A=\frac{1}{15}(16-\sqrt{31})$;

$\sec A=\frac{4}{15}(\sqrt{31}+1)$; $\csc A=\frac{4}{15}(\sqrt{31}-1)$.

18. $a=12.3$. **20.** $a=9$. **22.** $c=40$.

19. $b=1.54$. **21.** $b=68$. **23.** $c=229.62$

24. 作一直角三角形。使其夾直角之兩邊等於3與2。又作一相似三角形。使其斜邊等於6。

28. $a=1.5$ 哩，$b=2$ 哩，

30. $a=0.342$, $b=0.940$; $a=1.368$, $b=3.760$

31. 142.926碼。

例題 III.

5. 過A(3圖)作一切綫，使AT等於3。則角AOT爲所求之角，

6. 以O(3圖)爲中心。2爲半徑。作一弧，截過B之切線於S。則角AOS爲所求之角，

7. 於3圖內。取OM等於$\frac{1}{2}$。作$MP \perp OA$。截圓周於P。則角POM爲所求之角，

8. 因$\sin x=\cos x$。故$OM=PM$ (3圖)。而$x=45°$。故作x等於45°可也，

9. 作一直角三角形。使其夾直角之兩邊，此爲彼之二倍。則對長邊之角爲所求之角，

10. 分OA(3圖)爲四等分。自O之第一等分點。作一垂線，遇圓周於任一點P，聯結OP。則角AOP爲所求之角，

12. $x=18°$.　　21. $r\sin x$.　　22. $a=mc$; $b=nc$.

例題 IV.

1. $\cos 60^\circ$; $\sin 45^\circ$; $\cot 1^\circ$; $\tan 75^\circ$;
 $\sec 71^\circ 50'$; $\sin 52^\circ 36'$; $\tan 7^\circ 41'$; $\sec 35^\circ 14'$.

2. $\cos 30^\circ$; $\sin 15^\circ$; $\cot 33^\circ$; $\tan 6^\circ$;
 $\sec 20^\circ 58'$; $\sin 4^\circ 21'$; $\tan 0^\circ 1'$; $\sec 44^\circ 59'$.

3. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. 6. 30°. 9. $22^\circ 30'$.

4. 45°. 7. 90°. 10. 18°. 12. $\dfrac{90^\circ}{n+1}$.

5. 30°. 8. 60°. 11. 10°.

例題 VI.

1. $\cos A = \frac{5}{13}$; $\tan A = \frac{12}{5}$; $\cot A = \frac{5}{12}$;
 $\sec A = \frac{13}{5}$; $\csc A = \frac{13}{12}$.

2. $\cos A = 0.6$; $\tan A = 1.3333$; $\cot A = 0.75$;
 $\sec A = 1.6667$; $\csc A = 1.25$.

3. $\sin A = \frac{11}{61}$; $\tan A = \frac{11}{60}$; $\cot A = \frac{60}{11}$;
 $\sec A = \frac{61}{60}$; $\csc A = \frac{61}{11}$.

4. $\sin A = 0.96$; $\tan A = 3.4286$; $\cot A = 0.2917$;
 $\sec A = 3.5714$; $\csc A = 1.0417$.

5. $\sin A = 0.8$; $\cos A = 0.6$; $\cot A = 0.75$;
 $\sec A = 1.6667$; $\csc A = 1.25$.

6. $\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;　$\cos A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;　$\tan A = 1$;

$\sec A = \sqrt{2}$;　$\csc A = \sqrt{2}$.

7. $\sin A = 0.90$;　$\cos A = 0.45$;　$\tan A = 2$;

$\sec A = 2.22$;　$\csc A = 1.11$.

8. $\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;　$\cos A = \frac{1}{2}$;　$\tan A = \sqrt{3}$;

$\cot A = \frac{1}{3}\sqrt{3}$;　$\csc A = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

9. $\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;　$\cos A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;　$\tan A = 1$;

$\cot A = 1$;　$\sec A = \sqrt{2}$.

10. $\cos A = \sqrt{1-m^2}$;　$\tan A = \frac{m}{1-m^2}\sqrt{1-m^2}$;

$\cot A = \frac{1}{m}\sqrt{1-m^2}$;　$\sec A = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$;　$\csc A = \frac{1}{m}$.

11. $\cos A = \frac{1-m^2}{1+m^2}$;　$\tan A = \frac{2m}{1-m^2}$;　$\cot A = \frac{1-m^2}{2m}$;

$\sec A = \frac{1+m^2}{1-m^2}$;　$\csc A = \frac{1+m^2}{2m}$.

12. $\sin A = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$;　$\tan A = \frac{m^2-n^2}{2mn}$;　$\cot A = \frac{2mn}{m^2-n^2}$;

$\sec A = \frac{m^2+n^2}{2mn}$;　$\csc A = \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

13. $\sin=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\cos=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\cot=1$; $\sec=\sqrt{2}$; $\csc=\sqrt{2}$.

14. $\cos=\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\tan=\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\cot=\sqrt{3}$; $\sec=\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\csc=2$.

15. $\sin=\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos=\frac{1}{2}$; $\tan=\sqrt{3}$; $\cot=\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\sec=2$.

16. $\sin=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\cos=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $\cot=2+\sqrt{3}$;

$\sec=2(2-\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $\csc=2(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

17. $\sin=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\cos=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\tan=\sqrt{2}-1$;

$\sec=(2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\csc=(2+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

18. $\cos=1$; $\tan=0$; $\cot=\infty$; $\sec=1$; $\csc=\infty$.

19. $\cos=0$; $\tan=\infty$; $\cot=0$; $\sec=\infty$; $\csc=1$.

20. $\sin=1$; $\cos=0$; $\cot=0$; $\sec=\infty$; $\csc=1$.

21. $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$; $\tan A=\dfrac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$;

$\cot A=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$; $\sec A=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$;

$\csc A=\dfrac{1}{\sin A}$.

22. $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$; $\tan A=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$;

$\cot A=\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$; $\sec A=\frac{1}{\cos A}$;

$\csc A=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$.

23. $\sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$; $\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$;

$\cot A=\frac{1}{\tan A}$; $\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}$;

$\csc A=\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$.

24. $\sin A=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$; $\cos A=\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$;

$\tan A=\frac{1}{\cot A}$; $\sec A=\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$;

$\csc A=\sqrt{1+\cot^2 A}$.

25. $\sin A=\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $\cos A=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

26. $\sin A=\frac{1}{4}\sqrt{15}$; $\tan A=\sqrt{15}$.

27. $\sin A=\frac{9}{41}$; $\cos A=\frac{40}{41}$.

28. $\frac{1-3\cos^2 A+3\cos^4 A}{\cos^2 A-\cos^4 A}$.

例題 VII.

1. $x=45^\circ$.
2. $x=30^\circ$.
3. $x=0^\circ$, 或 60°.
4. $x=45^\circ$.
5. $x=60^\circ$.
6. $x=45^\circ$.
7. $x=45^\circ$.
8. $x=45^\circ$.
9. $x=60^\circ$.
10. $x=60^\circ$.
11. $x=30^\circ$.
12. $x=45^\circ$.
13. $x=0^\circ$, 或 60°.
14. $x=30^\circ$.
15. $x=30^\circ$, 或 45°.
16. $x=45^\circ$.
17. $x=60^\circ$.

例題 VIII.

1. $c=\dfrac{b}{\cos A}$.
2. $c=\dfrac{a}{\sin A}$.
3. $b=c\cos A$.
4. $c=\dfrac{a}{\sin A}$.
5. $A=90^\circ-B$; $a=c\cos B$; $b=c\sin B$.
6. $A=90^\circ-B$; $a=b\cot B$; $c=\dfrac{b}{\sin B}$.
7. $A=90^\circ-B$; $b=a\tan B$; $c=\dfrac{a}{\cos B}$.
8. $\cos A=\dfrac{b}{c}$; $B=90^\circ-A$; $a=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.
9. $A=36^\circ 52'$; $B=53^\circ 8'$; $c=5$.
10. $A=32^\circ 35'$; $B=57^\circ 25'$; $b=10.954$.

11. $B=77°43'$; $b=24.342$; $c=24.918$.

12. $A=46°42'$; $b=9.800$; $c=14.290$.

13. $B=52°18'$; $a=15.900$; $b=20.572$.

14. $A=65°48'$; $a=127.694$; $b=57.386$.

15. $A=34°18'$; $B=55°42'$; $a=12.961$.

16. $A=43°33'$; $B=46°27'$; $a=93.139$.

17. $B=57°46'$; $a=26.733$; $c=50.124$.

18. $A=43°49'$; $a=191.900$; $c=277.160$.

19. $A=68°43'$; $B=21°17'$; $c=101.951$.

20. $A=3°21'$; $B=86°39'$; $b=102.825$.

21. $A=84°52'$; $b=0.280$; $c=3.133$.

22. $A=70°48'$; $B=19°12'$; $b=5.916$.

23. $B=51°31'$; $a=35.471$; $b=44.620$.

24. $A=22°37'$; $B=67°23'$; $a=5$; $c=13$.

25. $A=82°18'$; $B=7°42'$; $a=7.928$; $b=1.072$.

例題 IX.

1. $A=30°$; $B=60°$; $b=10.392$.

2. $B=30°$; $c=8$; $a=6.9282$.

3. $B=60°$; $c=6$; $b=5.1961$.

4. $A=B=45°$; $c=5.6568$.

5.	$A=B=45°$;	$b=2.$	
6.	$B=66°\,30'$;	$a=250.02$;	$b=575.0.$
7.	$B=61°\,55'$;	$a=1073.3$;	$b=2011.5.$
8.	$B=50°\,26'$;	$a=45.958$;	$b=55.620.$
9.	$B=54°$;	$a=0.58779$;	$b=0.80902.$
10.	$A=68°\,13'$;	$a=185.72$;	$b=74.22.$
11.	$A=13°\,35'$;	$a=21.936$;	$b=90.788.$
12.	$B=85°\,25'$;	$b=7946$;	$c=7971.5.$
13.	$B=53°\,16'$;	$b=65.031$;	$c=81.144.$
14.	$B=4°$;	$b=0.0000559$;	$c=0.000802.$
15.	$A=46°\,12'$;	$a=53.116$;	$c=73.59.$
16.	$A=86°\,22'$;	$a=31.496$;	$c=31.559.$
17.	$A=13°\,41'$;	$b=40.745$;	$c=4193.5.$
18.	$A=21°\,8'$;	$b=188.86$;	$c=202.47.$
19.	$A=44°\,35'$;	$b=2.2211$;	$c=3.1185.$
20.	$B=52°\,4'$;	$a=3.1176$;	$c=5.0714.$
21.	$A=31°\,24'$;	$B=58°\,36'$;	$b=7332.8.$
22.	$A=56°\,3'$;	$B=33°\,57'$;	$b=48.324.$
23.	$A=65°\,14'$;	$B=24°\,46'$;	$b=3.917.$
24.	$A=53°\,15'$;	$B=36°\,45'$;	$a=1758.$
25.	$A=53°\,30'$;	$B=36°\,30'$;	$a=24.67.$

26. $A=63°$;　$B=27°$;　$c=43$.

27. $A=4°42'$;　$B=85°18'$;　$c=15$.

28. $A=81°30'$;　$B=8°30'$;　$c=420$.

29. $A=38°58'$;　$B=51°2'$;　$c=21.769$.

30. $A=1°22'$;　$B=88°38'$;　$b=91.894$.

31. $c=7.8112$; $A=39°48'$; $B=50°12'$;　$F=15$.

32. $b=69.997$; $A=30'12''$; $B=89°29'48''$; $F=21.525$.

33. $a=1.1885$; $A=43°20'$; $B=46°40'$;　$F=0.74876$.

34. $b=21.249$; $c=22.372$; $B=71°46'$;　$F=74.372$.

35. $a=6.6882$; $c=13.738$; $B=60°52'$;　$F=40.129$.

36. $a=63.859$; $b=23.369$; $B=20°6'$;　$F=746.15$.

37. $a=19.40$; $b=18.778$; $A=45°56'$;　$F=182.15$.

38. $b=53.719$; $c=71.377$; $A=41°11'$;　$F=1262.4$.

39. $a=12.981$; $c=15.796$; $A=55°16'$;　$F=58.416$.

40. $a=0.58046$; $b=8.442$; $A=3°56'$;　$F=2.4501$.

41. $F=\frac{1}{2}c^2\sin A\cos A$.　43. $F=\frac{1}{2}b^2\tan A$.

42. $F=\frac{1}{2}a^2\cot A$.　44. $F=\frac{1}{2}a\sqrt{c^2-a^2}$.

45. $b=11.6$; $c=15.315$; $A=40°45'48''$; $B=49°14'12''$.

46. $a=7.2$; $c=8.7658$; $A=55°13'20''$; $B=34°46'40''$.

47. $a=3.6474$; $b=6.58$; $c=7.5233$;　$B=61°$.

48. $a=10.283$; $b=19.449$; $A=27°52'$;　$B=62°8'$.

49. 19°28′17″與 70°31′43″.

50. 3 與 5.1961.

51. $a=c\cos\frac{90°}{n+1}$;

$b=c\sin\frac{90°}{n+1}$

52. 36°52′12″與 53°7′48″.

53. 212.1 呎。

54. 732.22 呎。

55. 3270 呎。

56. 37.3 呎。

57. 1°25′56″.　58. 69°44′35″.　59. 95.34 呎。

60. 各爲 7.0712 哩。　61. 20.88 呎。　62. 56.65 呎。

63. 685.9 呎。　64. 136.6 呎。　65. 140 呎。

66. 84.74 呎。

例題 X.

1. $C=2(90°-A)$; $c=2a\cos A$; $h=a\sin A$.
2. $A=\frac{1}{2}(180°-C)$; $c=2a\cos A$; $h=a\sin A$.
3. $C=2(90°-A)$; $a=\frac{c}{2\cos A}$; $h=a\sin A$.
4. $A=\frac{1}{2}(180°-C)$; $a=\frac{c}{2\cos A}$; $h=a\sin A$.
5. $C=2(90°-A)$; $a=\frac{h}{\sin A}$; $c=2a\cos A$.
6. $A=\frac{1}{2}(180°-C)$; $a=\frac{h}{\sin A}$; $c=2a\cos A$.
7. $\sin A=\frac{h}{a}$; $c=2(90°-A)$; $c=2a\cos A$.

8. $\tan A = \frac{2h}{c}$;　$C = 2(90° - A)$;　$a = \frac{h}{\sin A}$.

9. $A = 67°22'50''$;　$C = 45°14'20''$;　$h = 13.2$.

10. $c = 0.21943$;　$h = 0.27384$;　$F = 0.03004$.

11. $a = 2.055$;　$h = 1.6852$;　$F = 1.9819$.

12. $a = 7.706$;　$c = 3.6676$;　$F = 13.725$.

13. $A = 79°36'30''$;　$C = 20°47'$;　$c = 2.4206$.

14. $A = 77°19'11''$;　$C = 25°21'38''$;　$a = 20.5$

15. $A = 25°27'47''$;　$C = 129°4'26''$;　$a = 81.41$;　$h = 35$.

16. $A = 81°12'9''$;　$C = 17°35'42''$;　$a = 17$;　$c = 5.2$.

17. $F = \frac{1}{4}c\sqrt{4a^2 - c^2}$.

18. $F = a^2 \sin\frac{1}{2}C \cos\frac{1}{2}C$.

19. $F = a^2 \sin A \cos A$.

20. $F = h^2 \tan\frac{1}{2}C$.

21. 28.284 呎; 4525.44 方呎。

22. 0.76536.

23. 94° 20′.

24. 2.7261.

25. 38° 56′ 33″.

26. 37 699.

例題 XI.

1. $r = 1.618$;　$h = 1.5388$;　$F = 7.694$.

2. $h = 0.9848$;　$p = 6.2514$;　$F = 3.0782$.

3. $h = 19.754$;　$c = 6.257$;　$F = 1236$.

4. $r=1.0824$; $c=0.82842$; $F=3.3137$.

5. $r=2.5933$; $h=2.4882$; $c=1.4615$.

6. $r=1.5994$; $h=1.441$; $p=9.716$.

7. 0.61803.

8. 0 64984.

9. 0.51764.

10. $b=\dfrac{c}{2\cos\dfrac{90^\circ}{n}}$.

11. 0.2238.

12. 0.310.

13. 0.82842.

14. 94.63.

15. 414.97.

16. 11.636.

17. 99.640.

18. 1.0235.

19. 0.635.

例題 XII.

5. 有二角。一在象限I。一在象限II。

6 有四值。二在象限I。二在象限IV。

7. x在第一式內有二值。在其餘各式內有一值，

8. 設$\cos x=-\frac{2}{3}$，x在90°與270°之間。設$\cot x=4$，x在0°與90°或180°與270°之間。設$\sec x=80$，x在0°與90°或270與360°之間。設$\csc x=-3$，x在180°與360之間。

9. 在象限III內。在象限II內。在象限III內。

10 有40角。20爲正。20爲負。

11. x在象限I或IV內。則取＋號。在象限II或III內。則取－號。

12. $\sin x = +\frac{1}{2}\sqrt{2}$;　$\tan x = -1$;　$\cot x = -1$;

$\sec x = -\sqrt{2}$;　$\csc x = +\sqrt{2}$.

13. $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$;　$\cos x = -\frac{1}{2}$;　$\cot x = +\frac{1}{3}\sqrt{3}$;

$\sec x = -2$;　$\csc x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

14. $\sin x = -\frac{4}{7}\sqrt{3}$;　$\cos x = \frac{1}{7}$;　$\tan x = -4\sqrt{3}$;

$\cot x = -\frac{1}{12}\sqrt{3}$;　$\csc x = -\frac{7}{12}\sqrt{3}$.

15. $\sin x = \pm\frac{1}{10}\sqrt{10}$;　$\cos x = \mp\frac{3}{10}\sqrt{10}$;　$\tan x = -\frac{1}{3}$;

$\sec x = \mp\frac{1}{3}\sqrt{10}$;　$\csc x = \pm\sqrt{10}$.

16. 角爲鈍角時。餘弦，正切，餘切，正割可爲負。

18. $\sin 90^\circ = 1$,　$\cos 90^\circ = 0$,　$\cot 90^\circ = 0$,

$\sec 90^\circ = \infty$,　$\csc 90^\circ = 1$;

$\sin 180^\circ = 0$,　$\tan 180^\circ = 0$,　$\cot 180^\circ = \infty$,

$\sec 180^\circ = -1$,　$\csc 180^\circ = \infty$;

$\sin 270^\circ = -1$,　$\cos 270^\circ = 0$,　$\tan 270^\circ = \infty$,

$\sec 270^\circ = \infty$,　$\csc 270^\circ = -1$;

$\sin 360^\circ = 0$,　$\cos 360^\circ = 1$,　$\tan 360^\circ = 0$,

$\cot 360^\circ = \infty$,　$\sec 360^\circ = 1$.

19. $\sin 450^\circ = 1$;　$\tan 540^\circ = 0$;　$\cos 630^\circ = 0$;

$\cot 720^\circ = \infty$;　$\sin 810^\circ = 1$;　$\csc 900^\circ = \infty$.

20. 0.　**21** 0.　**22.** 0.　**23.** $a^2 - b^2 + 4ab$.

例題 XIII.

1. $-\cos 20°$.
2. $\sin 8°$.
3. $-\sin 10°$.
4. $-\cot 35°$.
5. $-\tan 1°$.
6. $-\csc 20°$.
7. $\csc 23°$.
8. $-\sin 24°$.
9. $\cos 1°$.
10. $-\cot 30°$.
11. $\tan 6°$.
12. $-\csc 26°$.
13. $-\sec 1°$.
14. $\sin 16° 11'$.
15. $-\cos 15° 33'$.
16. $\cot 0° 45'$.
17. $-\cot 40° 43'$.
18. $\csc 29° 45'$.
19. $\sec 2° 25'$.

20. $\sin(-75°) = -\cos 15°$;
$\cos(-75°) = \sin 15°$;
$\tan(-75°) = -\cot 15°$;
$\cot(-75°) = -\tan 15°$.

21. $\sin(-127°) = -\cos 37°$;
$\cos(-127°) = -\sin 37°$;
$\tan(-127°) = \cot 37°$;
$\cot(-127°) = \tan 37°$.

22. $\sin(-200°) = \sin 20°$;
$\cos(-200°) = -\cos 20°$;
$\tan(-200°) = -\tan 20°$;
$\cot(-200°) = -\cot 20°$.

23. $\sin(-345°) = \sin 15°$;
$\cos(-345°) = \cos 15°$;
$\tan(-345°) = \tan 15°$;
$\cot(-345°) = \cot 15°$.

24. $\sin(-52° 37') = -\cos 37° 23'$;
$\cos(-52° 37') = \sin 37° 23'$;
$\tan(-52° 37') = -\cot 37° 23'$;
$\cot(-52° 37') = -\tan 37° 23'$.

25. $\sin(-196°\,54') = \sin 16°\,54'$;

$\cos(-196°\,54') = -\cos 16°\,54'$;

$\tan(-196°\,54') = -\tan 16°\,54'$;

$\cot(-196°\,54') = -\cot 16°\,54'$.

26. $\sin 120° = +\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$; $\tan 120° = -\sqrt{3}$;

$\cot 120° = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

27. $\sin 135° = +\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\cos 135° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\tan 135° = -1$;

$\cot 135° = -1$.

28. $\sin 150° = \frac{1}{2}$; $\cos 150° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\tan 150° = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$;

$\cot 150° = -\sqrt{3}$.

29. $\sin 210° = -\frac{1}{2}$; $\cos 210° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\tan 210° = +\frac{1}{3}\sqrt{3}$;

$\cot 210° = +\sqrt{3}$.

30. $\sin 225° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\cos 225° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\tan 225° = 1$;

$\cot 225° = 1$.

31. $\sin 240° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 240° = -\frac{1}{2}$; $\tan 240° = +\sqrt{3}$;

$\cot 240° = +\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

32. $\sin 300° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 300° = \frac{1}{2}$; $\tan 300° = -\sqrt{3}$;

$\cot 300° = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

33. $\sin(-30°) = -\frac{1}{2}$; $\cos(-30°) = +\frac{1}{2}\sqrt{3}$;

$\tan(-30°) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\cot(-30°) = -\sqrt{3}$.

34. $\sin(-225^\circ)=+\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\cos(-225^\circ)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$;
$\tan(-225^\circ)=-1$; $\cot(-225^\circ)=-1$.

35. $\cos x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\tan x=1$; $\cot x=1$; $x=225^\circ$.

36. $\sin x=\frac{1}{2}$; $\cos x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\tan x=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $x=150^\circ$.

37. $\sin 3540^\circ=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 3540^\circ=\frac{1}{2}$; $\tan 3540^\circ=-\sqrt{3}$;
$\cot 3540^\circ=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

38. 210° 與 330°; 120° 與 300°.

39. 135°, 225° 與 -225°; 150° 與 -30°.

40. 30°, 150°, 390° 與 510°.

41. $\sin 168^\circ$; $\cos 334^\circ$; $\tan 225^\circ$; $\cot 252^\circ$;
$\sin 349^\circ$; $\cos 240^\circ$; $\tan 64^\circ$; $\cot 177^\circ$.

42. 0.8480.

43. -1.9522.

44. $(a-b)\sin x$.

45. $m\sin x\cos x$.

46. $(a-b)\cot x-(a+b)\tan x$.

47. $a^2+b^2+2ab\cos x$.

48. 0.

49. $\cos x\sin y-\sin x\cos y$.

50. $\tan x$.

51. $x=0^\circ$ 與 $x=135^\circ$, 及 $x=315^\circ$ 與 $x=360^\circ$ 之間爲正。
$x=135^\circ$ 與 $x=315^\circ$ 之間爲負。

52. $x=45^\circ$ 與 $x=225^\circ$ 之間爲正。$x=0^\circ$ 與 $x=45^\circ$, 及
$x=225^\circ$ 與 $x=360^\circ$ 之間爲負。

53. $\sin(x-90^\circ)=-\cos x$; $\cos(x-90^\circ)=\sin x$;
$\tan(x-90^\circ)=-\cot x$; $\cot(x-90^\circ)=-\tan x$.

54. $\sin(x-180^\circ)=-\sin x$; $\cos(x-180^\circ)=-\cos x$;
$\tan(x-180^\circ)=\tan x$; $\cot(x-180^\circ)=\cot x$.

例題 XIV.

1. $\sin(x+y)=\frac{56}{65}$; $\cos(x+y)=\frac{33}{65}$.

2. $\sin(90^\circ-y)=\cos y$; $\cos(90^\circ-y)=\sin y$.

3. $\sin(90^\circ+y)=\cos y$; $\cos(90^\circ+y)=-\sin y$;
   $\tan(90^\circ+y)=-\cot y$; $\cot(90^\circ+y)=-\tan y$.

4. $\sin(180^\circ-y)=\sin y$; $\cos(180^\circ-y)=-\cos y$;
   $\tan(180^\circ-y)=-\tan y$; $\cot(180^\circ-y)=-\cot y$.

5. $\sin(180^\circ+y)=-\sin y$; $\cos(180^\circ+y)=-\cos y$;
   $\tan(180^\circ+y)=\tan y$; $\cot(180^\circ+y)=\cot y$.

6. $\sin(270^\circ-y)=-\cos y$; $\cos(270^\circ-y)=-\sin y$;
   $\tan(270^\circ-y)=\cot y$; $\cot(270^\circ-y)=\tan y$.

7. $\sin(270^\circ+y)=-\cos y$; $\cos(270^\circ+y)=\sin y$;
   $\tan(270^\circ+y)=-\cot y$; $\cot(270^\circ+y)=-\tan y$.

8. $\sin(360^\circ-y)=-\sin y$; $\cos(360^\circ-y)=\cos y$;
   $\tan(360^\circ-y)=-\tan y$; $\cot(360^\circ-y)=-\cot y$.

9. $\sin(360^\circ+y)=\sin y$; $\cos(360^\circ+y)=\cos y$;
   $\tan(360^\circ+y)=\tan y$; $\cot(360^\circ+y)=\cot y$.

10. $\sin(x-90^\circ)=-\cos x$; $\cos(x-90^\circ)=\sin x$;
    $\tan(x-90^\circ)=-\cot x$; $\cot(x-90^\circ)=-\tan x$.

11. $\sin(x-180^\circ)=-\sin x$; $\cos(x-180^\circ)=-\cos x$;
    $\tan(x-180^\circ)=\tan x$; $\cot(x-180^\circ)=\cot x$.

12. $\sin(x-270^\circ)=\cos x$; $\cos(x-270^\circ)=-\sin x$;

$\tan(x-270^\circ)=-\cot x$; $\cot(x-270^\circ)=-\tan x$.

13. $\sin(-y)=-\sin y$; $\cos(-y)=\cos y$;

$\tan(-y)=-\tan y$; $\cot(-y)=-\cot y$.

14. $\sin(45^\circ-y)=\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos y-\sin y)$;

$\cos(45^\circ-y)=\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos y+\sin y)$;

$\tan(45^\circ-y)=\dfrac{1-\tan y}{1+\tan y}$; $\cot(45^\circ-y)=\dfrac{\cot y+1}{\cot y-1}$.

15. $\sin(45^\circ+y)=\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos y+\sin y)$;

$\cos(45^\circ+y)=\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos y-\sin y)$;

$\tan(45^\circ+y)=\dfrac{1+\tan y}{1-\tan y}$; $\cot(45^\circ+y)=\dfrac{\cot y-1}{\cot y+1}$.

16. $\sin(30^\circ+y)=\frac{1}{2}(\cos y+\sqrt{3}\sin y)$;

$\cos(30^\circ+y)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos y-\sin y)$;

$$\tan(30^\circ+y)=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}+\tan y}{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\tan y};$$

$$\cot(30^\circ+y)=\frac{\sqrt{3}\cot y-1}{\cot y+\sqrt{3}}.$$

17. $\sin(60^\circ-y)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos y-\sin y)$;

$\cos(60^\circ-y)=\frac{1}{2}(\cos y+\sqrt{3}\sin y)$;

$$\tan(60^\circ-y)=\frac{\sqrt{3}-\tan y}{1+\sqrt{3}\tan y};$$

$$\cot(60^\circ-y)=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}\cot y+1}{\cot y-\frac{1}{3}\sqrt{3}}.$$

18. $3\sin x-4\sin^3 x.$

19. $4\cos^3 x-3\cos x.$

20. 0.

21. $\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

22. $$\sin\tfrac{1}{2}x=\sqrt{\frac{1-0.4\sqrt{6}}{2}}=0.10051;$$

$$\cos\tfrac{1}{2}x=\sqrt{\frac{1+0.4\sqrt{6}}{2}}=0.99493.$$

23. $\cos 2x=-\frac{1}{2},\ \tan 2x=-\sqrt{3}.$

24. $\sin 22\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}=0.3827;$

$\cos 22\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}=0.9239;$

$\tan 22\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{2}-1=0.4142;$

$\cot 22\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{2}+1=2.4142.$

25. $\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=0.2588;$

$\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=0.9659;$

$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}=0.2679;$

$\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}=3.7321.$

34. $\sin A+\sin B+\sin C$

$=\sin A+\sin B+\sin(180^\circ-(A+B))$

$=\sin A+\sin B+\sin(A+B)$

由 (20) 及 (12),

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}$

由 (22),

$$=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)(2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B)$$

$$=4\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B.$$

但 $\cos\tfrac{1}{2}C=\cos(90^\circ-\tfrac{1}{2}(A+B))=\sin\tfrac{1}{2}(A+B).$

$$\therefore \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

35. 證與34相同。

38. $\dfrac{2}{\sin 2x}$.

39. $2\cot 2x$.

40. $\dfrac{\cos(x-y)}{\sin x\cos y}$

41. $\dfrac{\cos(x+y)}{\sin x\cos y}$.

42. $\tan^2 x$.

43. $\dfrac{\cos(x-y)}{\cos x\cos y}$.

44. $\dfrac{\cos(x+y)}{\cos x\cos y}$

45. $\dfrac{\cos(x-y)}{\sin x\sin y}$.

46. $\dfrac{\cos(x+y)}{\sin x\sin y}$

47. $\tan x\tan y$

例題 XV.

1. $\sin^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{3}=60^\circ+2n\pi$ 或 $120^\circ+2n\pi$;

$\tan^{-1}\tfrac{1}{3}\sqrt{3}=30^\circ+2n\pi$ 或 $210^\circ+2n\pi$;

$\text{vers}^{-1}\tfrac{1}{2}=60^\circ+2n\pi$ 或 $300^\circ+2n\pi$;

$\cos^{-1}(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2})=135^\circ+2n\pi$ 或 $225^\circ+2n\pi$;

$\csc^{-1}\sqrt{2}=45^\circ+2n\pi$ 或 $135^\circ+2n\pi$;

$$\tan^{-1}\infty = 90^\circ + 2n\pi \text{ 或 } 270^\circ + 2n\pi;$$

$$\sec^{-1}2 = 60^\circ + 2n\pi \text{ 或 } 300^\circ + 2n\pi;$$

$$\cos^{-1}(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = 150^\circ + 2n\pi \text{ 或 } 210^\circ + 2n\pi.$$

4. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$.
8. $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.
10. $\pm\frac{5}{13}$.
11. $\pm\frac{7}{24}$.
12. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
13. $x=0$ 或 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

例題 XVI.

1. 設 $C=90^\circ$, 則 (25) 變爲 $\frac{a}{c}=\sin A$.

3. $a^2=b^2+c^2$; $a^2=b^2+c^2-2bc$; $a^2=b^2+c^2+2bc$; 一直角三角形; 一直線; 一直線.

4. $b=a\cos C+c\cos A$; $a=b\cos C+c\cos B$; $c=b\cos A$.

6. 90°.

7. (i) $\frac{a-b}{a+b}=\tan(A-45^\circ)$; 一直角三角形。

(ii) $a+b=(a-b)(2+\sqrt{3})$; 一等腰三角形。其角爲 $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$。

例題 XVII.

9. 300碼.

10. $AB=59.564$ 哩,
$AC=54.285$ 哩.

11. 4.6064 哩; 4.4494 哩; 3.7733 哩.

12. 4.1501 與 8.67.

13. 6.1433哩與8.7918哩,

15. $a=5$; $c=9.6593$.

14. 8與5.4723.

16. $a=7$; $b=8.573$.

17. 邊600呎與1039.2呎,高519.6呎。

18. 855:1607.

19. 5.438與6.857.

20. 15.588.

例題 XVIII.

1. 有二解;有一解;無解;有一解;有二解;無解;有一解。

11. 420.

12. 124.617.

例題 XIX.

11. 6.

14. 8.9212.

16. 3800碼,

12. 10.392.

15. 25.

17. 729.67碼,

18. 10.266哩,

20. $26°0'10''$與$14°5'50''$

19 5.0032與2.3385.

21. 430.85碼,

例題 XX.

1. $A=38°52'48''$; $B=126°52'12''$; $C=14°15'$.

2. $A=32°10'55''$; $B=136°23'50''$; $C=11°25'15''$.

3. $A=27°20'32''$; $B=143°7'48''$; $C=9°31'40''$.

4. $A=42°6'13''$; $B=56°6'36''$; $C=81°47'11''$.

5. $A=16°25'36''$; $B=30°24'$; $C=133°10'24''$.

6. $A=46°49'35''$; $B=57°59'44''$; $C=75°10'41''$.

7. $A=26°\ 0'29''$; $B=43°25'20''$; $C=110°34'11''$.

8. $A=49°34'58''$; $B=58°46'58''$; $C=71°38'\ 4''$.

9. $A=8°20'\ 1''$; $B=33°40'\ 5''$; $C=137°59'54''$.

10. $A=51°53'12''$; $B=59°31'48''$; $C=68°35'$.

11. $A=36°52'12''$; $B=53°\ 7'48''$; $C=90°$.

12. $A=B=33°33'27''$; $C=112°53'6''$.

13. $A=B=C=60°$.

14. $A=28°57'18''$; $B=46°34'6''$; $C=104°28'36''$.

15. $A=45°$; $B=120°$; $C=15°$.

16. $A=45°$; $B=60°$; $C=75°$.

17. 在北西或南西 $4°23'2''$.

18. $60°$.

20. 0.88877.

21. 54.516 哩。

22. $84°14'34''$.

23. $54°48'54''$.

24 $105°$; $15°$; $60°$.

25. 12.434 吋。

例題 XXI.

1. 4,333,600.

2. 365.68.

3. 12,260.

4. 8160.

5. 240.

6. 26,208.

7. 15,540.

8. 29,450 或 6982.8.

9. 17.3206.

10 10.392.

11. 0.19975.

12. $F=ab\sin A$.

13. $F=\frac{1}{4}(a^2-b^2)\tan A$.

14. 2,421,000.

15. $30°$; $30°$; $120°$.

例題 XXII.

1. 21.166 哩; 24.966 哩。
2. 6.3399 哩。
3. 119.29 呎。
4. 30°.
5. 20 呎。
6. 2.6247 或 21.4587.

例題 XXIII.

1. 106.70 呎。
   142.86 呎。
2. 1023 9 呎。
3. 37° 34′ 5″.
4. 238,410 哩。
5. 861,860 哩。
6. 2922.4 哩。
7. 60°.
8. 3.2068.
9. 6.6031.
10. 199.56 呎。
11. 43.107 呎。
12. 45 呎。
13. 26° 34′.
14. 78.367 呎。
15. 75 呎。
16. 1.4446 哩。
17. 7912.8 哩。
18. 56.649 呎。
19. 69.282 呎。
20. 260.21 呎。
    3690.3 呎。
21. 1.3438 哩。
22. 235.81 碼。
26. 8.0076 吋。
29. 460.46 呎。
30. 88 936 呎。
31. 每小時
    13.657 哩。
33. 56.564 呎。
34. 51.595 呎。
35. 101.892 呎。
37. 北 76° 56′ 東。
    每小時
    13.938 哩。
38. 442.11 碼。
39. 255.78 呎。
40. 3121.1 呎。
    3633.5 呎。

41. 529.49 呎，
42. 41.411 呎。
43. 234.51 呎，
44. 25.433 哩。
45. 294.69 呎，
46. 12,492.6 呎，
47. 6.3397 哩，
48. 210.44 呎，
50. 757.50 呎，

51. 520.01 碼。
52. 1366.4 呎。
53. 658.36 磅，在第一力 $22^\circ 23' 47''$.
54. 88.326 磅。在已知力 $45^\circ 37' 16''$.
57. 536.28; 500.16.

58 345.48 呎。
59. 345.46 碼。
60. 61.23 呎。
62. 307.77 碼。
63. 19.8; 35.7; 44.5.
64. 45°, 135°, 225°, 或 315°.

65. $\cos A = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4(n+1)}}{2}$.

66. $\sin A = \sqrt{\dfrac{m^2 - n^2}{1 - n^2}}$; $\cos B = \dfrac{n}{m}\sqrt{\dfrac{1 - m^2}{1 - n^2}}$.

67. 60°, 120°, 240°, 或 300°.

68. 0°, 60°, 180°, 或 300°.

69. 0°, 30°, 150°, 180°, 210°, 330°.

71. $r = \dfrac{a}{2} \cot \dfrac{180^\circ}{n}$; $R = \dfrac{a}{2} \csc \dfrac{180^\circ}{n}$

72. $F = \frac{1}{2} bc \sin A$.

73. $F = \frac{1}{2} c^2 \sin A \sin B \csc(A+B)$.

74. $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

76. 199英畝8方鍊，

77. 210英畝9.1方鍊，

78. 12英畝9.78方鍊，

79. 3英畝0.392方鍊，

80. 12英畝3.45方鍊。

81. 4英畝6.634方鍊，

82. 14英畝5.54方鍊。

83. 61英畝4.97方鍊，

84. 4英畝6.633方鍊，

85. 13.93鍊。23.21鍊，
32.50鍊，

86. 9英畝0.055方鍊。

88. 876.34.

89. 1229.5.

91. 1075.3.

92. 2660.4.

93. 16,281.

94. 435 76方呎，

95. 49,088方呎，

96. 749.95方呎，

97. 422.38方呎。

98. 1834.95方呎。

99. 26.88.

102. 6.

107. 6.

108. 6086.4呎。

109. 南緯5° 25′ 6″;
457.49浬。

110. 460.79浬; 383.13浬。

111. 228.98浬;
南緯11° 39′ 6″.

112. 南56° 7′ 32″東;
202.58浬。

113. 北17° 25′ 22″西;
北緯37° 46′ 13″.

114. 244.35浬;
南56° 10′ 49″東。

115. 359.87浬。

117. 西經68° 54′ 39″.

118. 103.57浬

119. 北緯 33° 18′ 22″; 西經 36° 23′ 53″.

120. 北 28° 47′ 26″ 東; 1292.8 浬。

121. 南 50° 39′ 44″ 西; 250.84 浬; 西經 20° 9′ 30″.

122. 北緯 38° 20′ 34″; 西經 55° 12′ 4″.

123. 171.14 浬; 西經 32° 43′ 38″.

124. 北 36° 52′ 12″ 西; 西經 36° 7′ 37″.

125. 173.18 浬; 南緯 51° 16′ 16″; 東經 34° 12′ 43″.

126. 南 50° 57′ 48″ 東; 北緯 47° 14′ 35″; 西經 20° 48′ 37″.

127. 北 53° 20′ 21″ 東, 西經 16° 6′ 57″;
或北 53° 20′ 21″ 西, 西經 25° 53′ 3″.

128. 北 47° 42′ 33″ 東, 北緯 19° 27′ 22″, 東經 121° 50′ 34″;
或北 47° 42′ 33″ 西, 北緯 19° 27′ 22″, 東經 116° 9′ 26″;
或南 47° 42′ 33″ 東, 北緯 14° 32′ 38″, 東經 121° 48′ 20″;
或南 47° 42′ 33″ 西, 北緯 14° 32′ 38″, 東經 116° 11′ 40″.

129. 359.82 浬; 359.73 浬; 359.50 浬。

130. 南緯 35° 49′ 10″, 西經 22° 2′ 44″; 北 61° 42′ 西;
183.16 浬。

131. 北緯 42° 15′ 29″, 西經 69° 5′ 11″; 北 72° 32′ 40″ 東;
44.939 浬。

132. 南緯 32° 53′ 34″, 東經 13° 1′ 53″; 北 72° 3′ 43″ 西;
287.16 浬。

例題 XXIV.

(是處所解皆爲小於360°之角)。

79. $\sin\frac{1}{2}x=\pm\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $\cos\frac{1}{2}x=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

80. $\pm\sqrt{5}-2$. 81. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 82. $\pm\frac{3}{5}$ 或 $\pm\frac{4}{5}$.

83. $\pm2\sqrt{2}$, $\pm\frac{1}{23}(9\sqrt{3}+8\sqrt{2})$, 或 $\pm\frac{1}{23}(9\sqrt{3}-8\sqrt{2})$

84. $\pm\frac{1}{2}$.

85. $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.

86. $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

87. $\left(\frac{1\pm m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1\mp2m\right)$

88. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 或 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

89. $\frac{3}{4}$.

90. $\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{3}{5}$.

91. $\pm\frac{a+1}{\sqrt{2a+1}}$.

92. 4.

93. $\tan(x+y)$.

94. $\frac{\sin x}{\sin y}$.

95. $-\tan x$.

96. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-2x^2}$.

97. 2.

98. $-\tan^4 x+\cot^4 x$.

99. $x=\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{3}{2}\pi$.

100. $x=90°$ 或 $270°$.

101. $x=21°\,28'$ 或 $158°\,32'$.

102. $x=0°$ 或 $90°$.

103. $x=30°$, $150°$, $199°\,28'$, 或 $340°\,32'$.

104. $x=51°\,19'$, $180°$, 或 $308°\,41'$.

105. $x=0°$, $120°$, $180°$, 或 $240°$.

106. $x=45°$, $161°\,34'$, $225°$, 或 $341°\,34'$

107. $\theta=60^\circ, 120^\circ, 240^\circ,$ 或 300°.

108. $\theta=26^\circ 34'$ 或 $206^\circ 34'$.　**110.** $x=45^\circ$ 或 135°.

109. $x=30^\circ$ 或 150°.　**111.** $x=30^\circ, 150^\circ$ 或 270°.

112. $x=35^\circ 16'', 144^\circ 44', 215^\circ 16',$ 或 $324^\circ 44'$.

113. $x=75^\circ 58'$ 或 $255^\circ 58'$.

114. $\theta=60^\circ, 180^\circ,$ 或 300°.　**115** $\theta=90^\circ$ 或 $143^\circ 8'$.

116. $x=30^\circ, 150^\circ, 210^\circ$ 或 330°.

117. $x=30^\circ, 150^\circ,$ 或 270°.

118. $x=26^\circ 34', 90^\circ, 206^\circ 34',$ 或 270°.

119. $x=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ,$ 或 315°.

120. $x=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ,$ 或 315°.

121. $x=15^\circ, 75^\circ, 135^\circ, 195^\circ, 255^\circ,$ 或 315°.

122. $z=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ,$ 或 315°.

123. $x=0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ,$ 或 300°.

124. $x=27^\circ 58', 135^\circ, 242^\circ 2',$ 或 315°.

125. $x=0^\circ, 45^\circ, 180^\circ,$ 或 225°.

126. $x=32^\circ 46', 147^\circ 14', 212^\circ 46',$ 或 $327^\circ 14'$.

127. $x=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 225^\circ,$ 或 270°.

128. $x=0^\circ, 65^\circ 42', 180^\circ,$ 或 $204^\circ 18'$.

129. $x=0^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 240^\circ,$ 或 270°.

130. $x=0^\circ, 36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ, 180^\circ, 216^\circ, 252^\circ, 288^\circ,$ 或 324°.

131. $x=30°, 150°, 210°$ 或 $330°$.

132. $x=60°$, 或 $240°$.

133. $x=54° 44', 125° 16', 234° 44'$, 或 $305° 16'$.

134. $x=105°$ 或 $345°$.

135. $x=\tan^{-1}\dfrac{a^2-1}{2a}$.

136. $x=\cos^{-1}\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+8a+8}}{4}$.

137. $x=135°, 315°$, 或 $\frac{1}{2}\sin^{-1}(1-a)$.

138. $x=30°, 60°, 120°, 150°, 210°, 240°, 300°$, 或 $330°$.

139. $x=60°, 90°, 120°, 240°, 270°$, 或 $300°$.

140. $x=60°, 90°, 120°, 240°, 270°$, 或 $300°$.

141. $x=120°$. **142.** $x=14° 29', 30°, 150°$, 或 $165° 31'$.

143. $x=60°, 90°, 270°$, 或 $300°$.

144. $x=0°, 20°, 100°, 140°, 180°, 220°, 260°$, 或 $340°$.

145. $x=45°, 90°, 135°, 225°, 270°$, 或 $315°$.

146. $x=30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 210°, 240°, 270°, 300°$, 或 $330°$.

147. $x=0°, 45°, 90°, 180°, 225°$, 或 $270°$.

148. $x=30°, 60°, 120°, 150°, 210°, 240°, 300°$, 或 $330°$.

149. $x=30°, 90°, 150°, 210°, 270°$, 或 $330°$.

150. $x=0°, 45°, 180°$, 或 $225°$.

151. $x=45°, 60°, 120°, 135°, 225°, 240°, 300°$, 或 $315°$.

152. $x=0°, 45°, 135°, 225°$, 或 $315°$.

153. $x=30°, 90°, 150°, 210°, 270°$, 或 $330°$.

154. $x=8°$, 或 $168°$.

155. $x=40°\,12', 139°\,48', 220°\,12'$, 或 $319°\,48'$.

156. $x=30°$, 或 $330°$.

157. $x=60°, 120°, 240°$, 或 $300°$.

158. $x=30°, 60°, 120°, 150°, 210°, 240°, 300°$, 或 $330°$.

159. $x=53°\,8', 126°\,52', 233°\,8'$, 或 $306°\,52'$.

160. $x=30°$.

161. $x=22°\,37'$, 或 $143°\,8'$.

162. $x=0°, 20°, 40°, 60°, 80°, 100°, 120°, 140°, 160°, 180°, 200°, 220°, 240°, 260°, 280°, 300°, 320°$, 或 $340°$.

163. $x=22°\,30', 45°, 67°\,30', 90°, 112°\,30', 135°, 157°\,30', 202°\,30', 225°, 247°\,30', 270°, 292°\,30', 315°$, 或 $337°\,30'$.

164. $x=45°$ 或 $225°$.

165. $x=\pm 1$ 或 $\pm\frac{1}{7}\sqrt{21}$.

166. $x=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 或 $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

167. $x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

168. $x=\frac{1}{2}$.

169. $x=1$.

170. $x=0$ 或 ± 1.

171. $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

172. $x=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

173. $\theta=120°$ 或 $240°$.

174. $x=60°, 120°, 240°$, 或 $300°$.

175. $x=0°$; $45°$, $135°$, $225°$, 或 $315°$.

176. $x=0°$, $180°$, $220° 39'$, 或 $319° 21'$.

177. $x=0°$, $60°$, $120°$, $180°$, $240°$, 或 $300°$.

178. $\theta=18°$, $90°$, $162°$, $234°$, $270°$, 或 $306°$.

179. $x=0°$, $30°$, $90°$, $150°$, $180°$, $210°$, $270°$, 或 $330°$.

180. $x=0°$, $90°$, $120°$, $180°$, $240°$, 或 $270°$.

181. $\theta=0°$, $74° 5'$, $127° 25'$, $180°$, $232° 35'$, 或 $285° 55'$.

182. $x=0°$, $90°$, $180°$, 或 $270°$.

183. $x=0°$, $45°$, $90°$, $180°$, $225°$, 或 $270°$.

184. $x=0°$, $45°$, $120°$, $135°$, $180°$, $225°$, $240°$, 或 $315°$.

185. $\theta=10° 12'$, $34° 48'$, $190° 12'$, 或 $214° 48'$.

186. $x=90°$ 或 $270°$.

187. $\theta=29° 19'$, $105° 41'$, $209° 19'$, 或 $285° 41'$.

188. $x=1$.

189. $x=\dfrac{b\sin\beta-a\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$; $y=\dfrac{a\cos\alpha-b\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$.

190. $x=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}+\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$,

$$y=\tan^{-1}\frac{a}{b}-\cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

190. $\theta=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}$; $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

192. $r=\dfrac{a}{\sin\left(\tan^{-1}\dfrac{a\cos\beta-b\sin\alpha}{a\sin\beta+b\cos\alpha}+\alpha\right)}$

$=\dfrac{b}{\cos\left(\tan^{-1}\dfrac{a\cos\beta-b\sin\alpha}{a\sin\beta+b\cos\alpha}+\beta\right)}$;

$\theta=\tan^{-1}\dfrac{a\cos\beta-b\sin\alpha}{a\sin\beta+b\cos\alpha}$.

193. $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $\theta=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}$; $\phi=\tan^{-1}\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

194. $x=100$; $y=200$.

195. $x=76^\circ 10'$; $y=15^\circ 30'$.

196. $r=225.12$, $\theta=24^\circ 13'$; 或 $r=-225.12$, $\theta=204^\circ 13'$.

197. $r=151$, $\theta=42^\circ 28'$; 或 $r=-151$, $\theta=222^\circ 28'$.

198. $r=108$, $\phi=120^\circ$, $\theta=330^\circ$; $r=108$, $\phi=300^\circ$, $\theta=210^\circ$; $r=-108$, $\phi=120^\circ$, $\theta=150^\circ$; 或 $r=-108$, $\phi=300^\circ$, $\theta=30^\circ$.

199. $x=r\operatorname{vers}^{-1}\left(\dfrac{y}{r}\right)\mp\sqrt{2ry-y^2}$.

例題 XXV.

1. $\log_{10}6=0.77815$; $\log_{10}14=1.14613$;
$\log_{10}21=1.32222$; $\log_{10}4=0.60206$;
$\log_{10}12=1.07918$; $\log_{10}5=0.69897$;
$\log_{10}\frac{1}{2}=\bar{1}.69897$; $\log_{10}\frac{1}{4}=\bar{1}.39794$;
$\log_{10}\frac{7}{9}=\bar{1}.89086$; $\log_{10}\frac{21}{20}=0.02119$.

2. $\log_2 10 = 3.3219$; $\log_2 5 = 2.3219$;

$\log_3 5 = 1.4650$; $\log_7 \frac{1}{2} = -0.3562$;

$\log_5 \frac{9}{343} = -2.2620$.

3. $\log_e 2 = 0.69315$; $\log_e 3 = 1.09862$;

$\log_e 5 = 1.60945$; $\log_e 7 = 1.94593$;

$\log_e 8 = 2.07946$; $\log_e 9 = 2.19724$;

$\log_e \frac{2}{3} = -0.40547$; $\log_e \frac{4}{5} = -0.22315$;

$\log_e \frac{35}{27} = 0.25952$; $\log_e \frac{7}{60} = -2.14845$.

4. $x = 1.54396$; $x = 0.83048$; $x = 0.42062$.

例題 XXVI.

1. $\log_e 3 = 1.09861$.
2. $\log_e 5 = 1.60944$.
3. $\log_e 7 = 1.94591$.
4. $\log_e 10 = 2.3025850930$.
5. $\log_{0} 2 = 0.30103$; $\log_{10} e = 0.43429$;

$\log_{10} 11 = 1.04139$.

例題 XXVII.

1. $\sin 1' = 0.00029088820$; $\cos 1' = 0.99999995769$;

$\tan 1' = 0.000290888212$.

2. $\sin 2' = 0.000581776$.
3. $\sin 1^\circ = 0.0175$.
6. $0^\circ 40' 9''$.

例題 XXVIII.

1. $\sin 6' = 0.0017453$; $\cos 6' = 0.9999985$.

2. $\sin 2^\circ = 0.034902$; $\cos 2^\circ = 0.999392$.

3. $\sin 3^\circ = 0.052339$; $\cos 3^\circ = 0.998632$.

4. $\sin 4^\circ = 0.069760$; $\cos 4^\circ = 0.997564$.

5. $\sin 5^\circ = 0.087160$; $\cos 5^\circ = 0.996193$.

例題 XXIX.

1. -1之六方根爲

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ i,\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{-\sqrt{3}-i}{2},\ -i,\ \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

$+1$之六方根爲

$$1,\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ -1,\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2}.$$

2. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2},\ \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2},\ -i.$

3. $\cos 67\tfrac{1}{2}^\circ + i \sin 67\tfrac{1}{2}^\circ$, $\cos 157\tfrac{1}{2}^\circ + i \sin 157\tfrac{1}{2}^\circ$,

$\cos 247\tfrac{1}{2}^\circ + i \sin 247\tfrac{1}{2}^\circ$, $\cos 337\tfrac{1}{2}^\circ + i \sin 337\tfrac{1}{2}^\circ$.

4. $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta$;

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta$.

例題 XXX.

5. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots$

6. $x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \cdots$

7. $\sin 10^\circ = 0.173648$; $\cos 10^\circ = 0.984808$.

8. $\tan 15^\circ = 0.267949$.

球面部

例題 XXXI.

1. 110°; 100°; 80°.　　2. 140°; 90°; 55°.

5. 以 $\frac{\pi r}{180}$ 乘所測度數。　6. $\frac{8}{9}\pi$ 呎; 2π 呎; $\frac{25}{9}\pi$ 呎。

例題 XXXII.

3. (i) a 或 $b=90^\circ$;　　(ii) $A=90^\circ$ 及 $B=b$;

(iii) $A=90^\circ$ 及 $B=b$;　　(iv) $c=90^\circ$ 及 $b=B=90^\circ$.

例題 XXXIII.

2. 規則 I. 任何中部之餘弦。等於其鄰部之餘切之積。

規則 II. 任何中部之餘弦。等於其對部之正弦之積。

例題 XXXIV.

24. $A=175°57'10''$; $B=135°42'50''$; $C=135°34'\ 7''$.

25. $a=104°53'\ 2''$; $b=133°39'48''$; $C=104°41'39''$.

26. $a=90°$; $b=B$; b與B又可爲無定.

27. $a=60°$; $b=90°$; $B=90°$.

28. 此三角形不能成立。

29. $b=130°41'42''$; $c=71°27'43''$; $A=112°57'\ 2''$.

30. $a=26°\ 3'51''$; $A=35°$; $B=65°46'$.

31. 此三角形不能成立。

32. $a=60°16'17''$; $b=29°41'\ 4''$; $B=33°16'54''$.

33. $b=42°10'17''$; $c=106°37'37''$; $A=105°41'39''$.

34. $a=113°51'\ 5''$; $c=105°37'54''$; $B=50°44'19''$.

35. $a=124°10'37''$; $b=107°\ 7'22''$; $c=80°28'49''$.

例題 XXXV.

1. $\cos A=\cot a\tan\frac{1}{2}b$; $\sin\frac{1}{2}B=\csc a\sin\frac{1}{2}b$;

   $\cos h=\cos a\sec\frac{1}{2}b$.

2. $\sin\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\sec\frac{1}{2}a$.

3. $\sin\frac{1}{2}A=\sec\frac{1}{2}a\cos\frac{180°}{n}$; $\sin R=\sin\frac{1}{2}a\csc\frac{180°}{n}$;

   $\sin r=\tan\frac{1}{2}a\cot\frac{180°}{n}$

4. 四面體 $70°31'46''$；六面體 $90°$；八面體 $109°28'14''$；十二面體 $116°33'45''$；二十面體 $138°11'36''$.

5. $\cot\frac{1}{2}A=\sqrt{\cos a}$.

例題 XXXVI.

1. (i) $\sin a\sin B=\sin b$, $\sin a\sin C=\sin c$;

(ii) $\sin a=\sin b\sin A$, $\sin b\sin C=\sin c$;

(iii) $\sin a=\sin c\sin A$, $\sin b=\sin c\sin B$;

(iv) $\sin B=\sin b\sin A$, $\sin C=\sin c\sin A$;

(v) $\sin a=\sin b$, $\sin c=\sin a\sin C=\sin b\sin C$;

(vi) $\sin B=\sin A$, $\sin C=\sin c\sin A=\sin c\sin B$.

2. (i) $\cos a=\cos b\cos c$;

(ii) $\cos b=\cos a\cos c$;

(iii) $\cos c=\cos a\cos b$;

(iv) $\cos a=\cos b\cos c$, $\cos b=\cos a\cos c$,

$\cos c=\cos a\cos b$.

3. (i) $\cos a=\cos(b-c)$; (ii) $\cos a=\cos b\cos c$;

(iii) $\cos a=\cos(b+c)$.

例題 XXXVII.

1. (i) $\tan m=\tan b\cos A$, $\cos a=\cos b\sec m\cos(c-m)$;

(ii) $\tan m=\tan c\cos B$, $\cos b=\cos c\sec m\cos(a-m)$.

例題 XXXVIII.

1. (i) $\cot x=\tan B\csc a$, $\cos A=\cos B\csc x\sin(C-x)$;

(ii) $\cot x=\tan C\csc b$, $\cos B=\cos C\csc x\sin(A-x)$.

例題 XLIII.

4. $2.2298\,R^2$.　　5. $1.4956\,R^2$ 或 $0.17058\,R^2$.

6. $0.95484\,R^2$.　　9. $0.7105\,R^2$.　　12. $3.1416\,R^2$.

7. $0.024832\,R^2$.　　10. $0.09301\,R^2$.　　13. $5.4206\,R^2$.

8. $1.1891\,R^2$.　　11. $2.8624\,R^2$.　　14. 2070.1方哩。

例題 XLIV.

1. $148°42'$.　　2. $\cos x=\cos A\cos B$.

3. 令w等於c稜與a, b之平面之傾角。則易知其$V=abc\sin l\sin w$。今設想以a, b, c三稜所成三面角之頂點爲心。作一球。則得一球面三角形。其角點爲a, b, c與球面相交之點。其各邊爲l, m, n。而w等於從對頂至l邊之垂直弧。令L, M, N表此三角形之角。由(39)與(47)

$$\sin w=\sin m\sin N$$

$$=2\sin m\sin\tfrac{1}{2}N\cos\tfrac{1}{2}N$$

$$=\frac{2}{\sin l}\sqrt{\sin s\sin(s-l)\sin(s-m)\sin(s-n)},$$

此處　$s=\frac{1}{2}(l+m+n)$.

$$V=2abc\sqrt{\sin s\sin(s-l)\sin(s-m)\sin(s-n)}.$$

4. (i) 9,976,500方哩; (ii) 13,316,560方哩。

5. 設m等於船橫過赤道時之經度。B爲在赤道上之航路。d爲駛行之距離。

則
$$\tan m=\sin l\tan a,$$
$$\cos B=\cos l\sin a,$$
$$\cot d=\cot l\cos a.$$

6. 設k等於兩地間之平行弧。x爲所求之差。

則
$$x=2\cos l\sin^{-1}(\sin\tfrac{1}{2}d\sec l)-d.$$
$$x=90^\circ(\sqrt{2}-1).$$

7. $\tan\frac{1}{2}(m-m')=\sqrt{\sec s\sec(s-d)\sin(s-l)\sin(s-l')}$; 此處$2s=l+l'+d$, 而$m$及$m'$爲兩地之經度。

9. 12點鐘後44分。　　10. 60°.

11. $\cos t=-\tan d\tan l$; 日出時＝午前$12-\frac{t}{15}$點鐘; 日入時＝午後$\frac{t}{15}$點鐘; $\cos a=\sin d\sec l$。在Boston日最長時。日出在午前4點26分50秒; 日入在午後7點33分10秒; 此時日之地平經度爲57°25′15″; 日長15點6分20秒。日最短時。日出在午前7點33分10秒; 日入在午後4點26分50秒; 日之地平經度爲122°34′45″; 日長8點53分40秒。

12. 當$\cot d<\tan l$時。此題爲不可解。如在寒帶之地是也。

13. 在北半球而赤緯度爲正者。

$\sin h=\sin l\sin d,$　　$\cot a=\cos l\tan d;$

$h=17^\circ 14' 35''$,　　$a=$東$73^\circ 51' 34''$.

14. 地之距赤道愈遠者。太陽之高度。在夏季午前6點鐘時爲最高。在赤道爲0°。在北極與太陽之赤緯度等。在定地太陽之高度在午前6點鐘時爲一年最長日中之最大者。而$\sin h=\sin l\sin e$(此處$e=23^\circ 27'$)。

15. $\cos t=\cot l\tan d$. 正東及正西之時爲午前$12-\frac{t}{15}$點鐘與午後$\frac{t}{15}$點鐘；午前6點58分10秒與午後5點1分50秒。

16. 晝與夜相等時。$d=0^\circ$, $\cos t=0$, $t=90^\circ$。則無論何處。太陽皆於午前6點鐘向正東。午後6點鐘向直西。因l與d必皆小於90°。則$\cos t$不能爲負。故t不能大於90°。如d增大t減小。則所問之時間。兩者皆近於正午。

設$l<d$, 則$\cos t>1$。故此例爲不可解。

設$l=d$, 則$\cos t=1$。而$t=0^\circ$。則此兩時間皆與正午符合。此結果之解說。因$l=d$。故太陽於正午時在天頂。於餘各時在原垂直之北。

設$l>d$, 則太陽之日圈與此地之原垂直相交之二點。因l增大而相離愈遠。在極上則此原垂直無定。惟近於極時。則$t=90^\circ$。而太陽常於午前6點鐘向正東。

17. $\sin l=\sin d\csc h$.　　**18.** $11^\circ 50' 35''$.

19. 牆之方向從地平之北點計者。可用方程式$\cot x=\cos l\tan d$求之。則由已知之例得$x=75^\circ 12' 28''$.

20. 北緯 $55^\circ 45' 6''$.

21. 北緯或南緯 $63^\circ 23' 41''$.

22. (i) $\cos t = -\tan l \cot p$; (ii) $t = z$; (iii) 此結果無定。

23. $\cot a = \cos l \tan d$.

25. $h = 65^\circ 37' 20''$.

26. $h = 58^\circ 25' 8''$; $a = 152^\circ 28'$.

27. $t = 45^\circ 42'$; $l = 67^\circ 58' 54''$.

28. $\sin d = \sin e \sin v$; $\tan r = \cos e \tan v$.

29. $d = 32^\circ 24' 12''$; $r = 301^\circ 48' 17''$.

30. $d = 20^\circ 48' 38''$.

31. 午後3點50分$27\frac{4}{15}$秒。

32. $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\cos \frac{1}{2}(l+h+p) \cos \frac{1}{2}(l+h-p) \sec l \sec h}$

新編民國新教科書

中學校師範學校用

算術 一元四角

徐善祥秦汾編 此書分十三章後附對數及圖解二章專爲高級生徒之用習題新穎而富卷末幷列中西名詞表尤便檢閱

代數學 一元

秦沅秦汾編 篇首緒論一章爲算術代數中之過渡提綱挈領喚起興味後數章詳論代數主要之定義及原則循序而進有條不紊

教育部審定 三角學 一元

秦汾著 是書依據新令編輯說理務求完備俾學者思想得漸趨精密豫備進習專門凡三角之要理莫不條論詳盡一覽瞭然

動物學 近刊

丁文江編 是書依新令編輯務使學者得普通動物學之知識且可略知研究科學之方法及天演學說之大概其論動物也體功而外於生物生計學頗極注意持論詳贍析理分明

植物學 一元三角

王兼善編 是書內容務使學者習得植物緊要之知識領悟其中相互之關係及對於人生之關係凡植物學普通知識已畢具且插畫甚多每節上角更附有要略故敎授時極便提示

鑛物學 一元二角

徐善祥編 是書依新令編輯務使學者於普通之鑛物一目了然而於巖石之成因地質學之要旨敍述尤詳全書共分十章附錄三章略述鑛物分析之法條論詳明考據精確

教育部審定 化學 一元六角

王兼善編【敎育部批】是書按新法令編輯條理分明文字簡晰理論實驗相輔而行且自首至尾一線相貫由淺入深循序漸進以啓學者之心思而引起其進取之興味合乎敎授法之原理與本部所定中學校師範學校課程標準亦適合准予審定作爲中學校師範學校敎科書

教育部審定 物理學 紙面二册各八角 布面一册一元六角

王兼善編【敎育部批】是書按新法令編輯提要鈎玄刪繁就簡實驗理論又能兼而有之且能節段相銜前後一氣雖間有深邃繁難之處妙用四號字五號字之別各學校敎員相所授學校敎科時間之多寡任學生程度之深淺自由刪節似無妨礙准予審定作爲中學校師範學校敎科書

Wentworth's Plane and Spherical Trigonometry

(Translated into Chinese)

Approved by the Board of Education

COMMERCIAL PRESS, LTD.

亥年十一月初版

華民國三年五月三版

(漢譯)溫德華士三角法一冊

(每冊定價大洋壹元貳角)

譯述者 太倉顧裕魁

校訂者 紹興壽孝天 紹興駱師曾

發行者 商務印書館

上海北河南路北首寶山路

印刷所 商務印書館

上海棋盤街中市

總發行所 商務印書館

北京天津保定奉天龍江吉林長春西安太原濟南開封成都

重慶漢口長沙安慶蕪湖南京南昌杭州蘭谿福州廣州潮州

分售處 商務印書分館