理化用高等算學

上 册

梅 路 著
徐 燮 均 譯

商務印書館發行

理化用高等算學

上　　册

J. W. Mellor 著
徐燮均譯

商務印書館發行

『在閱讀任何代數學的論著時，第一件要做到的，是對於其中所見的各種方法及其與其他方法的關聯，須有一個完全的了解。無論如何用心，只靠讀讀書本，這種境界是不會達到的。一册算學的著作中，欲將每種方法寫得如此詳盡，使合於尚未完全精通的學生之腦筋，實爲不可能的事。許多結果的寫出，其細到處不得不受限制，如加法如乘法如開方法等等，這是研究者所用得最多的。學生關於這些，決不可輕易信任，必須用自己的筆來演過；筆，在從事於任何代數方法時，決不可離開手頭的』。—— De Morgan 著 On the Study and Difficulties of Mathematics, 1881。

原著第一版序言

缺乏高等算學上很有效用的知識，欲追隨於物理化學或普通化學最近的發展，幾乎是不可能的事。著者覺得通常的算學教本，對於向這種知識欲走捷徑的化學學生，只有糾纏而沒有補助，因爲研究自然定律的學生日常所遇到之問題與形式算學的純粹抽象性之間的關係是不易發見的，欲了解算學方法與物理變化間彼此的補充性，更是難事。

最近五年間，著者將算學家的 x 與 y 應用於物理化學時遇到主要困難之點，每記錄下來；這些摘錄增積得不少，就想將實驗結果上如何可以用算學處理的方法弄個明白。嘗試之結果知道這些很可引起化學學生的趣味，並使他們在物理或化學上觀測結果的處理中，得到算學上很有效用的知識。

要不是我在烏溫斯大學(Owens College) 見到一組學生熱烈的從事於物理化學各分支的工作，他們的大多數在研究他們的結果時都須尋求幫助，我還遲疑而不會跨出那嘗試的階段。我把我的計劃告訴給化學教授時，他鼓勵我寫成此書。實現他的提議即是我的目的，故此附錄他的原函以見本書精神之所在，我只希望我能實行着原函中所說的。

錄 Dixon 教授來函：

烏温斯大學，孟卻斯忒。

親愛的梅路先生：

你若能够以你的思想轉變爲文字，寫成一册書籍，說明算學運算應用於化學結果時的內部情形，我相信你會給與許多學習化學的學生以一種恩惠。我們化學家，如同一個部落，打起仗來，見着不是自己的符號就怕。我很知道你有能力可在化學上贏得新的結果且用算學來討論之。你能領導我們從那平坦的山坡而登峯造極麼？用化學的口吻講給我們聽，使我們不感旅途之苦麼？必要時給些藥劑我們吃吃，『輕輕的放進些學問，如藥粉之撒入果醬內』一樣麼？要是你覺得叫牠來領路的，我們當勉力追隨，亦許在我們的後輩中有些人是可以成功的。這種勝利不是值得工作的麼？請試着罷。

你的忠實的

H. B. Dixon.

一九〇二年五月

原著第二版序言

我很高興，見到自己欲於科學工作所應用的假設與量測方面引入算學處理的企圖，受得從事於化學與物理學者如許的欣賞。在本版中題材已重行寫過，許多部份且經擴充，以應物理化學家欲用算學的確切語言而敍述其思想的趨向。

J. W. Mellor.

一九〇五年七月四日。

原著第四版序言

在材料方面第四版與第三版是相同的。但本書的許多讀者提起我注意所及的錯印之處，已經給改正了；內容也加以少數文字上的變更與擴充。我很歡喜德文本已曾出版，又本書與拙著化學的靜力學與動力學 (Chemical Statics and Dynamics) 所特有的許多例題等等已受現代文獻所汲取。

J. W. Mellor

The Villas, Stoke-on-Trent,

一九一二年十二月十三日。

目　　錄

第七章　微分方程式的解法 ……………………522

英漢對照表

理化用高等算學

緒　論

『算學對於化學家的用處，不久將與天平一樣。』❶ ——P. Schützenberger.

當1669年牛頓(Isaac Newton)以其『流動法』(methodus fluxionum)傳給友人的時候，他已給與科學以一個最為有力而精深的研究工具。物質在自然界所顯露的情狀，永遠是流動不居的；牠們的性質，祇要能量之以器，表之以數(無論實數或虛數)，終可用牛頓的方法作有效的研究。利用牛頓的算法，自然變化(natural changes)刻刻動作的姿態，能夠很忠實的暴露無遺，正像我們現在利用文字來表現腦中的思想一樣。從此，支配整個變化過程的定律，可以用純粹的計算——即所謂高等算學——絕無錯誤而決定之。

本書從一個論文❷出發，如該文作者所說，

高等算學是關於自然現象間數值關係的推理技能；高等算學的各部份是這些關係的各種不同的看法。

---

❶ "Bientôt le calcul mathématique sera tout aussi utile au chimiste que la balance"(1880).

❷ W. Ostwald 在 Annalen der Naturphilosophie, 1, 50, 1902 中主張算學只是一種語言可使實驗的結果，很便利的表示出來；並從這個觀點而批評 I. Kant 氏所著的 Metaphysical Foundations of Natural Science.

例如，我們認為微分法的目的是推究自然現象怎樣的刻刻在變化。這變化可以是一致的簡單的(第一章)也可以含有某種『奇異性』(singularities) 的 (第三章)。積分法(第四第七章)預備從支配着片刻情狀的定律中求得支配着自然變化整個過程內的基本原則。解析幾何學(第二章)講的是以幾何圖形來研究自然變化。無限級數(第五第八章)供給自然變化方面的一個近似觀念，以濟其他方法之窮。從此我們再進而研究高等算學中所應用到的各種方法或工具。

高等算學目標的如此限制，可使我們在規則與原理上，免去許多拘泥於形式的證法。Sidgwick ❶氏關於形式邏輯的教育價值所發的許多鋒利的申訴，請向流行於『學校』算學中的精微深入的形式色彩，去要求罷。雖說不可須臾寬縱者莫過於邏輯的推理，不過『牠們大多的工作往往像在溝渠上架設橋樑，然這種溝渠對於伶俐的人很可絕無憑藉而越跨過去的。』❷

若就初學的人而說，理論的證法，並不會如想像的那樣易於使人信服。必須學習『於字母中思想』(think in letters)且以記號來把握住數量，與學習游泳或騎駛自行車沒有兩樣。普遍證法的無用，是教師們日常的經驗。初學者，當他思考什麼的時候，只有能將結果作錯誤與否的試驗者，方敢信任；只有當原理被實際的量測與數字的特例所覆證後，他們方得眞正信服。Oliver Heaviside 在某一期 Electrician 雜誌中說，『最好的證法要使一個事實敍述得看着就是一個事實』。我們要記得

---

❶ A. Sidgwick 著, The Use of Words in Reasoning. A. & C. Black, London.

❷ O. W. Holmes 著, Autocrat of the Breakfast Table. W. Scott, London.

大部份的學生,只會與他自己工作上的問題有直接關係的範圍之內,對於算學發生興趣;故此本書,尤其在最初的部份,在解釋任何麻煩的原理或規則時,用幾個有名的自然變化敍述出來。

例如,微係數與極限比的意義,用化學反應的速度來敍述;指數函數的求微係數法引導我們到複利息,於是,就得到自然界的複利律(Compound Interest Law in Nature);直線的普遍方程式是從可溶性曲線求出;不連續函數引導我們研究 Mendeléeff 關於溶液中含水物(hydrate)存在性的工作;質量作用(mass action)的 Wilhelmy 定律使我們對於積分法的步驟作詳盡的研究;Harcourt 與 Esson 的工作引入聯立微分方程式的研究;運動方程式作爲研究二次微分方程式的基礎;傅氏級數應用於擴散現象,等等。所不幸者,由於這種計劃本書的卷帙弄得非常龐大,若全用算學家的明確嚴正的言語是不致於如此的。

作者有時避去繁重乏味的證法,而使讀者向通常的教本去參考。這些情形中,讀者欲求深入,可依照科目從下列各書之一,得到滿足:B. Williamson 著 Differential Calculus 及其 Integral Calculus, London, 1899; A. R. Forsyth 著 Differential Equations, London, 1902; W. W. Johnson 著 Differential Equations, New York, 1899.

當然,以一種摘要的形式而避去證法,並非常是可取的辦法。基本的假定,即所謂前提,從之而可求得公式者,必須注意的校核與明白的懂得。無論用如何正確的推理,作爲前提而引用的限制,必在結論中重

行發見。結果所得的公式自然只能應用於適合此種限制的材料。第九章的結果是一個很有力的例證，說明不加辨別濫用算學公式於實驗所得材料時的危險。有些公式特別易於引入歧途。或然誤差(probable error)是這方面最大的罪人。應用抽象的問題來教授算學是一個很老的方法，最易誤用。從這錯誤已產生出一個普遍的定案說『算學是解題的技術』，或者這種偏見，從我們在小學時算術上的痛苦回憶中，已經開始。

習題中我所收集的是實驗室中量測所得的結果，著名的公式，實用的問題，與足以說明該節教材的練習。少數的問題是純粹算學上的抽象練習，是有十種以上的教本所大家採用的熟題目。不過，大多數的習題是採取於歐美近代出版的科學雜誌所載論文中的實驗紀錄等等，這樣的用法還是初次。算學若要真的用為有效的工具，而不僅僅引取人家現成的結果，則在有些階段，某種訓練，甚至苦功，是必要的；若說改變了這種態度，結果會得一無實用。顯然，正當的辦法要使初學者在訓練中能自覺能力的獲得。欲引讀者趨於正軌，那些預知含有困難的練習都是附有示意與說明。所有題材，中等智力的讀者，雖無教師的助力，儘可精通而不見困難。

本書的讀者，我們假定已能演算初等代數學至解決聯立方程式的程度並於幾個三角公式已能知其意義。若於這些尙感困難則在附錄一中可以得到必要的知識。我可確乎相信初學高等算學的人，對於第十第十一節與附錄中所討論的問題，常常因為忽於磨洗的緣故，會得如同生銹的一樣。

還有，我們假定讀者於物理上化學上初步的原理已經相當的熟習。

假使所舉的例含有他所不知的現象，則有兩種救濟的辦法，不是根本略去不讀，便是翻閱這方面的教本。讀者對於不感興趣的例題而浪費時間，是沒有理由的。

讀者須有一份常用對數與三角函數自然值表。這些所費無幾卽能購得的。其他在高等算學上所必須參考的數值表，都已複印在附錄二中。

第一章　微分法

『哲學家或許會樂於他觀點的寬廣，技術家或許會樂於他手脚的敏捷，不過前者要記得，沒有機械的實行，精思只等於空夢，後者也要記得，沒有理論的思考，靈巧無異乎獸性。』❶——S. Johnson.

§ 1. 論算學推理的性質 (On the Nature of Mathematical Reasoning)

自然定律，Herbert Spencer 說，是一個命題敍述着我們在某種現象的關係中所發見的一致性。這樣說來，自然定律表示着所觀察的現象間的算學關係。所以每條物理定律可用一個算學方程式的形式代表之。科學研究的一個主要目的是要求出一物與他物有怎樣的關係；以此關係表示成算學方程式的形式——或用記號或用其他——亦是實驗者的理想目標。❷

---

❶ "The philosopher may be delighted with the extent of his views, the artificer with the readiness of his hands, but let the one remember that without mechanical performance, refined speculation is an empty dream, and the other that without theoretical reasoning, dexterity is little more than brute instinct."—S. Johnson.

❷ 故 M. Berthelot 在他的名著 Essai de Mécanique chimique fondée sur la thermochemie 1879 一書的序中描寫他的工作說是想以化學基礎全部建築在已經流行於各門物理科學中的力學原理之上。E. Kant 在他的 Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft 的序中曾經說，在物理科學的每分門中，只有算學存在的地方，才能正確的稱之爲科學。結果他自然否認稱化學爲科學。但在他那個時候(1786)還沒有 Journal of Physical Chemistry 這本雜誌。

有些人的腦筋中，有一個錯誤的觀念，說是高等算學的方法有無從接近的困難。卽使有何困難，還是屬於現象本身有着複雜的性質。A. Comte 在他的 Philosophie Positive 中說，『每當我們要想同時把握住兩個或三個以上的重要因子時，我們微弱的腦筋常是不復能追蹤着自然現象的定律的邏輯結果』。❶ 故普通救急的辦法便是於算學解析中採取『可使問題簡單的假定』(simplifying assumptions)。例如在溶液的理論中我假定已溶的物質的行爲與無甚區別的氣體一樣。氣體的動力理論，熱力學，以及應用力學的其他分支多有這類的假定。

沒有一種健全的推理手續，可使從有限制的材料所得出的結果，應用到限制範圍以外。就是當觀測的結果與計算的結果對比起來認爲滿意的時候，觀測的誤差很可使建築於不完全或簡化過的前提上的公式的缺點，恰好隱而不彰。『假使』『假使』……用得夠多時，將爲無盡期的織造着『學問的蛛網，絲質與功夫雖然細緻得使人豔羨，惜無實質與實益』。❷ 唯一妥當的辦法是以算學演繹所得者與觀察及實驗相比較，『理由是很簡單，因爲牠們只是演繹，所根據的前提未必一定正確而完全的。我們必須記得，從算學這機器裏，我們決不會得到多於放入時的東西，雖然出品的形式，可以弄得無窮適合於我們目的之用』。❸

前句話的上半節常被人云亦云者引用來反對算學。唯有對於算學

❶ 我信這是解釋 A. Comte 的奇怪語句的關鍵:『想用算學方法去研究化學問題的各種努力，可以認爲根本的無理且與化學的精神是抵觸的。……假使算學解析能在化學中佔有顯著的地位，——這種反常的事幸得幾乎是不可能——就會使這門科學發生迅速而普及的退化』。——Philosophie Positive, 1830.

❷ F. Bacon 著，The Advancement of Learning, Oxford, 32, 1869.

❸ J. Hopkinson 著，James Forrest Lecture, 1894.

推理的性質眞正絕無知識者才會如此想法。在健全的推理過程中，決不會建立出前提中所不包含的結果來。這是人人可以承認的，任何證法，若能於結論中包含着多於前提中所有的東西，就是舞弊。那末，算學爲什麼要例外，且因具有一切健全推理的重要性質而受處分呢？

論理學與算學都不過是工具，用了牠們『腦筋可以決斷得正確些』，但牠們都須受腦筋的指揮。我不相信在下面兩句話中，那一句的錯誤是容易發見些：『太陽光照卽爲白晝；太陽是永久光照的，故此永久是白晝；』『因爲 $\left(\frac{5}{2}-3\right)^2=\left(\frac{5}{2}-2\right)^2$，開方，得 $\frac{5}{2}-3=\frac{5}{2}-2$，故 $3=2$。』在我們應用算法方法以前，必須對於物理變化得有一個清晰的觀念；算學沒有代表糊塗觀念的記號。

曾經有人說過，一門科學的普遍結論若不能以數量表示，則無穩固的基礎，算學的專職卽是幫助研究者去求出現象間的數量關係。科學尙在實驗或觀測的階段，不會有注意數量關係的意向的。只有在許多研究者有着積聚的材料之後算學家方能求出一個必要的普遍結論。故此 Faraday 之後有着一個 Maxwell；一個 Newton 能夠完成 Kepler 的工作。

但不要以爲這句話的含意是說 Newton 的定律已經被算學式子代表得十全十美的確切。在最好的普遍結論中，假定的條件，常是代替着自然界實際的複雜情境。

卽使不是全部，大部份物理與化學方面的公式還在進化過程的較初階段。例如 Forbes 與 Tait 的正確實驗指出 Fourier 的熱的傳導

公式，有些不大合符的結果，因爲包含着不甚確切而且化爲簡單的假定：『沿線而傳導的熱量與溫度的變化率成比例』；Weber 指出 Fick 關於鹽類在溶液中擴散的方程式必須修正，使可用之於因濃度增加而鹽類的擴散性減低的現象；最後如 Van der Waals, Clausius, Rankine, Sarrau 等人曾想校正簡單的氣體方程式：$pv=RT$，於氣體內部結構上加以某種假定。

這是一個流行的信仰，以爲一個算學的公式，一經用理論的方法求得，則與公式合爲一體的定律已夠證明，只要計算與觀測兩方面的結果之差是在實驗誤差(experimental error)的範圍之內。業經注重的要點反被輕鬆放過，卽是理論與事實的差歧統統隱蔽於『觀測誤差』(errors of observation)這假面之下。用了改良的工具與更好的量測方法，可以隨時有更爲正確的材料。觀測誤差於是得以減小，公式的眞面目漸漸可以顯明。最後，理論與事實的差歧到了不容忽視的程度。公式必得根本推翻。新的公式再建立起來，必使包含假定少些而事實多些。故此從富有創造能力者的勇敢的猜度起始，一代一代是向着幾個自然定律的公式之明白與完全方面，逐步進展。

§ 2. 微係數(The Differential Coefficient)

Heracleitos 曾經說『萬物皆動』，日常的經驗告訴我們，周圍所有物體的性質都在連續不斷的變化。位置運動，溫度，體積，化學成份等的變化，不過是一般物體的千變萬化中極小的例罷了。

普遍的說，高等算學是研究着以連續狀態不斷變化的數量。欲使這種變化易受算學的處理，我們假設數量的變化，發生於一串極短促的時

間之中。每節時間縮得愈短，則其中的變化愈一致。這個觀念是基本重要的。我們以下列方程式所表示的化學反應爲例：

蔗糖→轉化糖。

化學反應的速度，或一個單位時間內蔗糖轉化的總量，❶ 將爲

$$化學反應的速度=\frac{產生物質的總量}{觀察的時間}, \tag{1}$$

這個式子不過決定在觀察時間內反應的平均速度 V。若以 x_1 表示開始觀察的時，卽 t_1 時，物質的總量；x_2 表示 t_2 時的總量，則反應的平均速度，將爲

$$V=\frac{x_1-x_2}{t_2-t_1}; \quad \therefore V=\frac{\delta x}{\delta t} \tag{2}$$

此中 δx 與 δt 各自代表 x_1-x_2 與 t_1-t_2。就事實而論，歷時愈久則反應進程愈慢。當然，設於一分鐘末產生出六十克的轉化糖，且反應的速度在觀察時間內十分一致，則可說每秒鐘產生一克的轉化糖。我們知道在已知的時間之內，所謂反應的**平均速度**（mean or average velocity），是在所論的時間內，速度若一致不變，每單位時間產生物質的總量。但是速度是從不一致的——等速度在自然變化中很少見到。結果，平均速度，每分鐘六十克，並不能代表其某一秒中轉化糖的產生率，所舉的事實不過是觀察時間內轉化糖的平均產生率而已。

我們若再量取一秒鐘內反應的速度，得到在這時間內產生轉化糖

---

❶ 『一個物質的總量』，我們指每升溶液的『克分子量』而言。『一個克分子量』是以克來表示這物質的分子量。例如 18 克的水是一個克分子量；27 克卽爲 1.5 個克分子量；36 克卽爲 2 個克分子量等是。我們以『總量』，『量』，『濃度』，『活動質量』用作同一意義的。

半克，我們只能說，在此觀察的時間內轉化糖的產生率是每秒半克。不過此時所得平均速度，用以代表觀察時間內的實在速度，比前較爲正確了，因爲在一秒鐘內要比在六十秒鐘內，容許反應速度發生變化的機會，要少得許多。

將觀察時間漸漸的縮短，則平均速度漸漸接近於整個觀察時間內反應的實在速度。欲量測某一時刻反應的速度，必須量測在此無限短促的時間內所產生物質的總量。但是我們可能舉行的任何量測方法，必須佔有一些時間，於是質點的速度便有改變的機會，當量測正在進行的時候。故此要想得到任何時刻的速度，在物理上有其不可能性；不過，雖有這樣事實的限制，但這種理想的情形常有思考的必要。

於是我們知道**任何時刻的速度**(velocity at any instant)即極短時間內的平均速度，但附帶的條件是只須此觀察時間短得充分，即可使與這時刻的實在速度任意接近。代表任何時刻的速度，其記號是

$$\frac{dx}{dt}=V, \tag{3}$$

此中 dx 這記號，算學家用於代表一物的無限小的量（在上例中即爲轉化糖），dt 代表與此相當的極短時間。所以這些記號的本身都無若何實用的價值可言，不過牠們的比值卻代表着一個十分確定的觀念，在上例即爲化學變化的速度，因爲所量測的時間是如此短促，使得由於速度變化而發生的誤差沒有存在的可能。

數值的例題 乙醯氯代胺基苯(acetochloranilide) 轉化爲對氯胺基苯乙醯 (p-chloracetanilide) 的速度於反應開始後恰恰四分鐘的時

候，已經求得爲每分鐘 4.42 克分子量。所取的觀測時間是無限之小的。若量測須費整整四分鐘的時間，則其平均速度爲每分鐘 8.87 克分子量；若須費時二分鐘，則平均速度爲每分鐘 5.90 克分子量；最後若量測須費時一分鐘，則平均速度爲每分鐘 4.70 克分子量。這是顯而易見的，當我們的觀察時縮得愈短，則愈可與實在速度每分鐘 4.42 克分子量近似。

一瞬間的速度，卽是於小到無顯見的誤差足以影響其結果的短促時間內所量測而得的速度，這個觀念爲物理問題中所常用，不久，將要見到微分法可以實際使得我們在這些條件下求得速度或變化率。比値 $\frac{dx}{dt}$，稱爲 x 關於 t 的**微係數**(differential coefficient)。x 的値顯然隨着觀察時間 t 的値而定；因此 x 稱爲**因變數**(dependent variable)，t 稱爲**自變數** (independent variable)。**微係數是在任何時刻一個速度的唯一眞實的量數。**自變數有時稱爲主變數，因變數有時稱爲屬變數。

正像化學反應的速度的觀念，代表在已知時間內所產生的物質總量一樣，任何運動的速度可用距離關於時間的微係數表示之；所謂運動如火車，電車，槍彈，音波，管內流水，電流等的動作都是。

速度這名詞的意義非但包括運動的快慢，並且含有運動的方向。我們若同意取向南駛行到倫敦去的火車的速度爲正，則向北駛行往阿陪登(Aberdeen)去的火車的速度爲負。同樣我們可定從蔗糖變成轉化糖的產生率爲正速度，則轉化糖分解成蔗糖時爲負速度。

速度原是有方向的速率，在目前不加區別，作爲同樣意義亦無關緊要。

速度的觀念不必附着於物體。大家都熟悉於這些名詞的，如『光的速度』，『音的速度』，『爆炸浪的速度』。讀過化學者當有這些辭句的觀念，如『化學作用的速度』，『接觸作用的速度』，『分解的速度』，『擴散的速度』，『蒸發的速度』等等。不費多少腦力便能將這個觀念推廣得更遠。設有一個熱量 Q 是以等速度加於一個物質之上，溫度 θ 每高一度時所加之熱量，其觀念恰與時間上每分鐘所經過的距離相仿。所以『比熱』可以用微係數 $\frac{dQ}{d\theta}$ 代表之。同樣，溫度每高一度時體積的增加量可用微係數 $\frac{dv}{d\theta}$ 代表之；壓力 p 每加一單位時體積的減少量亦可寫爲 $-\frac{dv}{dp}$，此中負號即表示體積因壓力的增加而減少。在這幾個例中，運算時都假定用單位質量與單位體積，故微係數即表示比熱，膨脹係數，壓縮係數等等。

從前節的例與以後將要見到的例，可知算學家所說的微係數，並非新奇的事。人人都已於有意或無意中用過，每當他們論到速率或速度的時候。

§ 3. 微分(Differentials)

有時甚感便利，若以 dx 與 dt，更普遍些以 dx 與 dy，認爲是極小的量，而牠能決定我們研究中的某種變化的過程。這些極小的量稱爲微分或微量。有人稱微分爲近於沒有的極小的量。微分可以與普通的代數量同樣看待。在時間 dt 內所產生的轉化糖可用微分 dx 表示之。故此從(3)，設 $\frac{dx}{dt}=V$，我們即能以微分的形式寫成

$$dx = V \cdot dt$$

我想初學者對於微分的數量或許僅有模糊的觀念。牠好像存在，同時又好像不存在的。我再想給這個觀念以更清楚的定義。

§ 4. 數量的等級(Orders of Magnitude)

設以一個很小的數 n，分成一百萬等分，則每等分❶ $n\times10^{-6}$ 是如此的小，在一切實用的目的上與 n 比較時，很可略去的了。我們若能設定以 n 為第一級的數量，則 $n\times10^{-6}$ 可以作為第二級的數量。若以這每一等分更分成一百萬等分，於是每等分 $n\times10^{-12}$，與 n 比較時小之又小；故 $n\times10^{10-12}$ 為第三級的數量。我們得到一串數量依次屬於第一，第二，與更高的等級，如

$$n,\quad \frac{n}{1000000},\quad \frac{n}{1000000000000},\quad \cdots\cdots$$

其中任一數量與在其前面者比，小到可以略去，但與在其後面者比則又很大。

欲將複雜的算式化為易於處理的較簡形式時，這個觀念大有實用。較高級的數量常是捨棄，只要結果中的誤差很小，而不出於所用研究方法所特有的『觀察誤差』範圍之外。

先取一個小數量為單位，我們再決定牠的幾分之幾為第一級數量。於是第二級數量與第一級數量之比卽等於第一級數量與單位之比。例如在『月球的理論』中，我們知道以 $\frac{1}{12}$ 與 1 比較卽作為小的數量，

❶ 注意 10^4 = 在 1 之後跟着 4 個 0，卽 10,000。10^{-4} 是小數點後跟着三個 0 與一個 1，或 $10^{-4}=\frac{1}{10000}=.0001$。這種記法用得很普遍。

於是第二級數量爲$\left(\frac{1}{12}\right)^2$，第三級數量爲$\left(\frac{1}{12}\right)^3$ ……。計算中已經用到第六或第七級數量了。

爲免誤會，我得指明，算學中的大小，與物理上的熱冷一樣，純粹是相對的名詞。天文家計算星球間的距離只用百萬哩以上的數量，而幾千哩在他們並不注意的；但是物理家在量測光的波長時不敢略去一吋的萬分之一。

所以，一數的略去，並非因爲牠在絕對的意義上看着是很小，卻是因爲與很大的數比較起來是很小，並且這種很小的數就是確切計算出來，對於較大的數也無多大的影響。製成一升的草酸法液，須用 63 克的草酸，但稱衡時不必正確到十分之一克以上。但在許多分析化學的工作中，千分之一克也是基本重要的；若誤差到十分之一克則結果將拙劣之不堪了。

§ 5. 零與無限大 (Zero and Infinity)

在第二節中曾經用過『無限小』一語。當然，要想像一個無限小或無限大的數量是不可能的事，因爲若是能將這些數量暫時停留在腦中，那末我們很易想出比小者更小，比大者更大的數量來。在算學思想中『無限大』（記號爲 ∞）一字表示一種數量的性質，這種數量大於可以說得定的任何有限數量。例如圓的半徑取得愈大，則圓周愈與直線接近，等到半徑取得無限之大時，卽以圓周來代表直線，亦不致有何可以覺察的誤差。從無限大的定義可以推論到幾個高等算學上最重要的結果。總言之，無限大並非一個數量或數值；不過是一個簡語，表示無限增大的性質。如『$\tan 90^\circ=\infty$』其意卽是當一個角接近於 90° 時，其正切

無限的增大。『大』的對面是『小』,我們現在再來看『小』。

『零』這一字，在算學中有兩種意義。普通的意義卽是完全沒有數量,我們稱之爲**絕對零** (absolute zero)。當說到或想到的東西,完全取去時,則無物存留。若從四個單位中取去四個單位,則絕對沒有存留了。但是還有另一個意義,與上不同，並不根本消滅東西的存在，若有一很小的數,被除於十萬萬,我們可得一個數值很小的分數。若求此分數的十萬萬次方,則將更與絕對零接近。我們儘量繼續着這樣的運算,牠就連續接近於絕對零,但永不會實際達到。在這相對的意義上,零——**相對零**(relative zero)——可稱爲『一個無限小的數』,或『一個近於沒有的數』,或『一個小於任何可指定的分數的數』。例如,我們以一點作爲是一個無限小的圓或無限短的線。簡明些說,**絕對零的意義是東西與其一切性質統歸烏有;相對零的意義是無論東西小得如何,其無限變小的性質還是留存在腦中。**

例一　讀者在覆證下列結果後，就會知道算學推理中零與無限大所附着的特殊意義。n 代表任何有限數;『?』代表不定的數量,卽其數值是無從確定的。

$\infty+\infty=\infty$;　$\infty-\infty=?$;　$n\times 0=0$;　$0\times 0=0$;　$n\times\infty=\infty$;

$\frac{0}{0}=?$;　$\frac{n}{0}=\infty$;　$\frac{0}{n}=0$;　$\frac{\infty}{0}=\infty$;　$\frac{0}{\infty}=0$;　$\frac{n}{\infty}=0$;

$\frac{\infty}{n}=\infty$。

例二　令 $y=\frac{1}{1-x}$，取 $x=1$，則 $y=\infty$；若 $x<1$，則 y 爲

正數;若 $x>1$，則 y 爲負數。❶ 故當一個變量變成無限大時可以變換其符號。

讀者若能得到 Transactions of the Cambridge Philosophical Society(11, 145, 1871)其中 A. de Morgan 的『論無限大』一文是值得一讀的。

§ 6. 極限值(Limiting Values)

I. **無限項數之和可有一個有限值** 化 $\frac{1}{9}$ 爲小數，得

$$\frac{1}{9}=0.11111\cdots\cdots\text{直至無限},$$

即

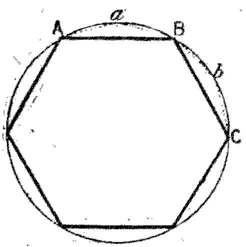
$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots\cdots\text{直至無限},$$

這是說無限項數之和等於 $\frac{1}{9}$，是一個有限數！我們若想實做這個加法，那末在項數還是有限的時候，終不會確實得到結果 $\frac{1}{9}$。我們雖能永遠向牠無限接近，但終之達不到牠。

若留第一項而略去其餘的項，結果比 $\frac{1}{9}$ 小去 $\frac{1}{90}$；若留最初三項而略去其餘的項則太小 $\frac{1}{9000}$；若留最初六項而略去其餘的項則結果比 $\frac{1}{9}$ 小 $\frac{1}{9000000}$；即是說這些項數的和連續接近於 $\frac{1}{9}$，但是若項數爲有限時永不會等於 $\frac{1}{9}$。於是 $\frac{1}{9}$ 稱爲這個級數之和的**極限值**。

---

❶ 不等的記號如下：$\neq$ 表示不等；$>$ 表示大於；$\ngtr$ 表示不大於；$<$ 表示小於；$\nless$ 表示不小於；$\equiv$ 表示恆等於；$\geqq$ 表示大於或等於；$\leqq$ 表示等於或小於。



圖一

再如，圓內切多邊形的周圍是小於圓周。圖一中設 a，b，……各點二等分 AaB，BbC……各弧，聯 Aa，aB，Bb……雖第二個多邊形的周圍大於第一個的，不過還比圓周爲小。用同樣的方法再二等分第二個多邊形各邊所對的弧，聯成第三個多邊形，則此多邊形的周圍更與圓周接近。故此圓周是當邊數無限增加時其內切多邊形周圍的極限值。

普遍的說，當一個變量 x 連續接近於一個定量 n，使 x 與 n 之差可小於任何指定的數，則 n 稱爲 x 的極限值。

從第二節，我們可稱 $\frac{dx}{dt}$ 是當 t 變成比任何有限小的數量更小時 $\frac{\delta x}{\delta t}$ 的極限值。簡單之，可寫爲

$$\frac{dx}{dt}=\underset{t=0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{\delta x}{\delta t};$$

讀爲『$\frac{dx}{dt}$ 等於 t 爲 0 時，$\frac{\delta x}{\delta t}$ 的極限值』，此中的 0 爲相對零，卽無限之小。這種記法是常用的。

與微係數有關係處，『=』這記號並不是『等於』，而是『可儘量接近於』。若必要時『=』值得換以其他記號，如『$\doteqdot$』。❶

II. **極限比的值隨兩個變數間的關係而定**　嚴格的說，$\frac{\delta x}{\delta t}$ 這個比

❶ 『$x\doteq 0$』這記號有時採用，讀爲『當 x 接近於 0 時』『$\lim\limits_{x=0}$』；『$\lim\limits_{x\doteq 0}$』；或『$\pounds$』有用來替代『$\underset{x=0}{\mathrm{Lt}}$』讀爲『當 x 接近於 0 時……的極限』。

的極限値是屬於$\frac{0}{0}$的形式，這是不定的，因$\frac{0}{0}$可有任何數值。這是容易知道的，如$\frac{0}{0}=0$ 因爲 $0\times0=0$；$\frac{0}{0}=1$，因爲 $0\times1=0$；$\frac{0}{0}=2$，因爲 $0\times2=0$；$\frac{0}{0}=15$，因爲 $0\times15=0$；$\frac{0}{0}=999999$，因爲 $0\times999999=0$，餘可類推。

例　一個耐人尋味的謎題：已知　$x=a$；　$\therefore$　$x^2=xa$；

$\therefore$　$x^2-a^2=xa-a^2$；　　　$\therefore$　$(x-a)(x+a)=a(x-a)$；

$\therefore$　$x+a=a$；　$2a=a$；　　$\therefore$　$2=1$。錯誤在那裏？

答案：　在 $(x-a)(x+a)=a(x-a)$ 這步中，是說 $(x+a)\times0=a\times0$，卽零乘$(x+a)$等於零乘 a，但不必$(x+a)$要等於 a 的。

在一切實用的目的上微係數$\frac{dx}{dt}$作爲一個分數或一個商。$\frac{dx}{dt}$可以稱爲『速度的量測器』，因爲牠能當一個數量發生極小的變化時決定另一數量的速度。$\frac{dx}{dt}$的實在比値隨 x 與 t 的關係而定。

細察下列三例：　設 P 點在圓周上向着一個定點 Q（圖二）而移動，y 弦減小時 x 弧也隨着減小。使 P 點充分接近於 Q，可使弧與弦都比任何已知直線爲短，卽弧與弦漸漸接近於相等。換言之，$\frac{\delta x}{\delta y}$之比的極限値爲 1。

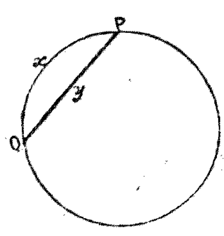


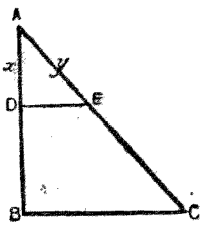
圖 二

$$\therefore\qquad \underset{y=0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{\delta x}{\delta y}=\frac{dx}{dy}=1。$$

這是易於用數值來證明的。我們從圓心角 60° 起，比較弧的長 dx 與其相當弦的長 dy。

圓心角	dx	dy	$\frac{dx}{dy}$
60°	1.0472	1.0000	1.0472
30°	0.5236	0.5176	1.0115
10°	0.1745	0.1743	1.0013
5°	0.0873	0.0842	1.0003
1°	0.0175	0.0175	1.0000

圓心角 1° 所對的弦與其相當弧在最初四位小數中是沒區別了，若角爲 1′ 則可有最初七位小數相符；若角爲 1″ 則可有最初十五位小數相符。弧與弦之比是接近於 1 的。



圖三

若 ABC（圖三）爲直角三角形，且 $AB=BC$，依照 Pythagoras 定理，得

$$AB : AC = x : y = 1 : \sqrt{2}。$$

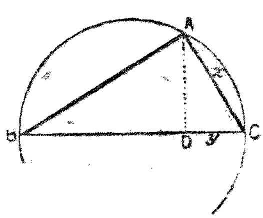
設直線 DE，平行於 BC 而向 A 移動，則 ADE 三角形的邊雖可小於任何指定的微小數量，但上式之比終是不變的。卽是

$$\mathrm{Lt}_{y=0}\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

設 ABC 直角三角形內切於圓（圖四）。引 AD 垂直於 BC。依照幾何學定理，得

$$BC : AC = AC : DC = x : y。$$

設 A 漸漸接近於 C，直至 AC 弦變成無



圖四

限之小，DC 亦將變成無限之小。上式的比例還是存在的。當 $BC:AC$ 變成無限之大時，AC 與 DC 的比也變成無限之大，即

$$\underset{y=0}{\mathrm{Lt}}\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{dx}{dy}=\infty。$$

所以從此可得的結論爲雖然兩個數量可爲無限之小，但牠們的極限比可有任何有限或無限的值。

例　指出下列推論中的錯誤:『若 AB(圖三)是垂直於 BC；又 C 是 BC 上任意一點，則 AC 大於 AB，無論 C 與 B 如何相近，所以當 C 與 B 相合時，其極限值亦是同樣眞確』。

提示：正當的說法應爲 AC 變成漸與 AB 相等，當 C 接近於 B 時；………

當兩個數量之差爲零，通常稱這兩個數量是相等。關於微分就未必如此。兩個無限小的數量之差雖爲零，但這兩者儘可不必相等。兩個無限小的數量只有當其比爲 1 時是相等的。

§ 7. 微係數的微係數 (The Differential Coefficient of a Different Coefficient)

普通，速度本身是在變化的。一塊石頭若向下落，在下降時，其速度漸漸增加的；若向上射出，在上升時，其速度漸漸減少。『速度的速度』這名詞不大好看，我們採用『加速度』(acceleration)一字代之。若速度以等速增加，則加速度 F，或稱速度的變化率，或稱運動的變化率，顯然爲

$$加速度=\frac{速度增加量}{時間}\;;\quad F=\frac{V_2-V_1}{t_2-t_1}=\frac{\delta V}{\delta t} \tag{1}$$

此中 V_1 與 V_2 各自表示觀察時間之始，t_1，與其末，t_2，時的速度；δV 表示在時間 δt 內速度的增加量。

使這觀念更爲確切，我們可看一個著名的實驗，即一塊石頭從垂直的高處落下。由靜止的位置出發，在第 1，2，3，4，5 秒鐘之末，其速度各爲每秒鐘，32，64，96，128，160 呎。換言之，這下降的石，速度刻刻在增加。上述的推理還是適用。設在無限短促的時間 dt 內所經的距離爲 ds。在任何時刻的下降速度，顯然爲

$$\frac{ds}{dt}=V \tag{2}$$

再看速度刻刻的變化率。這種變化顯然是當 δt 爲零時，比值 $\frac{\delta V}{\delta t}$ 的極限值。換言之

$$\frac{dV}{dt}=F \tag{3}$$

以(2)式代 V，則得第二個微係數

$$F=\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt},$$

更簡便些可寫爲

$$\frac{d^2s}{dt^2}=F\text{❶}。 \tag{4}$$

❶ 注意與 $\frac{ds^2}{dt^2}$ 不同。

此式代表任何時刻的速度增加率。在本例中，加速度是由於地心引力，此時常以 g 代 F。

比值$\frac{d^2x}{dt^2}$稱爲 x 關於 t 的二級微係數 (The Second Differential Coefficient)。x 關於 t 的一級微係數代表速度，**x 關於 t 的二級微係數代表加速度。**

化學反應的速度大多歷時愈久則愈減小。如蔗糖變成轉化糖的轉化速度，從開始後 0，30，60，90，130 分鐘時可各以數字❶ 15.4，13.7，12.4，11.4，9.7 表示之。

設一個物體的速度增加，則每秒鐘所加的速度稱爲加速度；若速度減少，則其加速度實爲減速度 (retardation)。算學上常加一負號於其前，以表明速度在減少。化學反應的速度的變化率，用上述記法，

$$F=-\frac{d^2x}{dt^2} \tag{5}$$

在這兩個例中，石頭的加速度爲每秒鐘 32 個單位(呎每秒)；化學反應的加速度爲每秒鐘 -0.00073 個單位或每分鐘 -0.044 個單位。請參閱 § 58.

同樣可以證明，三級微係數代表加速度刻刻的變化率；推廣之可得高次微係數$\frac{d^nx}{dt^n}$，但這是很少用於實用的問題。

§ 8. 記法 (Notation)

δ，Δ，d，d^2，……在這裏並非代表代數數量的，牠們不能離 x 與

❶ 乘以 10^3 後。

t 等而獨立的。這點不必提起亦許已能明瞭。這些記號不過使將 x 與 t 等取得充分的小，能適合於前述的定義。

有些算學家保留着以 δx, δt, Δx, Δt……代表很小的有限數量；dx, dt……本身則絕無意義。事實上，dx, dt……常是用以代替 δx, δt……或 Δx, Δt……。比式 $\frac{dx}{dt}$ 中，$\frac{d}{dt}$ 是對於 x 的運算記號。如同『$\div$』表示除法的運算一樣。這個運算記號的意義是當 δt 無限的漸漸變小時，求 $\frac{\delta x}{\delta t}$ 的極限值；但我們在想寫 $\frac{\delta x}{\delta t}$ 時，常是寫爲 $\frac{dx}{dt}$。故爲便利計，有時以 D 來代替 $\frac{d}{dx}$。現在我們所用的記法是起源於 Leibnitz;[1] 微積分的發明者 Newton 在因變數頂上加一點而表示一級微係數，加兩點而表示二級微係數，如 $\dot{x}$, $\ddot{x}$……

除 $\frac{dy}{dx}$, $\dot{y}$ 外，還可以 $\frac{d}{dx}(y)$, dy_x, x_y, x_1, x'…… 表示一級微係數；$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\ddot{y}$, $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y$, x_2 x'', …… 代表二級微係數；同樣可推之於高級微係數（亦有稱之爲高級導函數者）。

求出一個式子的微係數的值，此種運算稱爲微分法。微分學是算學的一個分枝專門研究此種運算的。

§ 9. 函數 (Function)

設氣體所受的壓力發生變化，則其體積的變化，與之成比例。這兩個數量，壓力 p 與體積 v，是互有連帶關係的。一個有任何變化，則別

[1] 這問題的歷史多少是悚人聽聞的。可參閱 Encyclopædia Britannica 中 Williamson 所作 Infinitesimal Calculus 一條。

個跟着就有相當的變化。在算學的語言上，這個觀念包括在『函數』一字之內；v 稱爲 p 的函數。這兩個互有關係的數量稱爲變數。任何數量在運算中不變者稱爲常數。

表示 Boyl 的完全氣體定律，我們可寫這觀念爲

$$\text{因變數} = f\ (\text{自變數})$$

或
$$v=f(p),$$

卽云『v 是 p 的函數』。何以要取 p 爲自變數，無特別理由可說。因爲變數的選擇只看實驗時的情形而定。這裏我們寫爲

$$p=f(v)$$

也與 $v=f(p)$ 一樣正確的。凡是含有時間的動作，習慣上，雖然並非根本重要的，終以時間爲自變數，因爲時間的變化常是等速的而且獨立的。時間是自然的自變數。

同樣，圓的面積是其半徑的函數，球的體積亦其半徑的函數；氣體的壓力是密度的函數；氣體的體積是溫度的函數；化學反應中物質產生的總量是時間的函數；爆炸浪的速度是介質密度的函數；液體的沸點是大氣壓力的函數，電線的電阻是其厚度的函數，鹽的可溶性是溫度的函數，等等。

寫成普遍的形式，常以 x 表示自變數，y 表示因變數。這些變數的關係可用各種不同的記號表示之。

$$y=f(x);\quad y=\phi(x);\quad y=F(x);\quad y=\psi(x);\quad y=f_1(x)\cdots\cdots$$

以上任何一式的意義，不過說『y 是 x 的某種函數』。若 x_1，y_1；x_2，y_2；x_3，y_3 爲 x，y 的相當值，我們可有

$$y=f(x);\quad y_1=f(x_1);\quad y_2=f(x_2);\ \cdots\cdots$$

『令 $y=f(x)$』意思是說『取一方程式,可於 x 的值爲已知時能計算得 y 的值者』。

『函數』一字,在算學的語言中,含有『從 x 的每一個值可以決定 y 的相當值』的意義。設 p_0 與 v_0 爲已知情形中氣體的壓力與體積的相當值,v 與 t 爲其他情形中的相當值,Boyle 的定律說 $pv=p_0v_0$ 所以

$$p=\frac{p_0v_0}{v};\ \text{或}\ v=\frac{p_0v_0}{p}。$$

故此指定了 v 的值卽能決定 p 的值;指定了 p 的值卽能決定 v 的值。

同一的規則可以用之於一切物理變化,只要這變化中有兩個數量依照一定的定律而同時變化。函數 $f(x)$ 所代表的式子是否知道,在我們目前的觀點上,是沒有關係的。例如,雖是一個含有水與蒸汽的容器內,水氣的壓力爲溫度的函數,而表示這關係的函數的實際形式並不知道,然氣體體積與其溫度或其壓力的關係是已知的函數—— Boyle 定律與 Charles 定律。這個觀念是存在的,雖不能指定什麼規則去計算函數的值。這些情形中,每個變數的相當值只能從實際的觀察與量測而決定之。換言之,$f(x)$ 是一個簡便的記號表示含有 x 的算式。

從第二節與第七節,因爲

$$y=f(x),$$

微係數$\dfrac{dy}{dx}$是 x 的另一函數,我們可說是 $f'(x)$,

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \qquad \text{或} \qquad \frac{df(x)}{dx}=f'(x)。$$

同樣二級微係數，$\frac{d^2y}{dx^2}$，又是 x 的另一函數，可記爲 $f''(x)$，

$$\frac{df'(x)}{dx}=f''(x); \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x); \qquad \frac{d^2f(x)}{dx^2}=f''(x);$$

同樣可以推廣於高級微係數，

以上的討論可推廣而用之於三個或三個以上變數的函數。如氣體的體積是壓力與温度的函數，溶液吸光的量是溶液厚度與濃度的函數；樹木的成長要賴泥土，雨水，陽光等的養料。在上文所舉的例中，我們默認温度未變化。若壓力與温度同時變化，則當寫爲

$$v=f(p, T)。$$

下列二節中所討論的，讀者必須得一淸晰的觀念，然後可以論到『微積分』的本身。

§ 10. 比例性與比例常數 (Proportionality and the Variation Constant)

兩個數量的關係：若一個的值有什麼變化（增加或減少）時，別個的值也隨着發生比例的變化（增加或減少），我們稱一個數量與別個數量成正比例，亦稱一個隨別個而正變。例如，氣體的壓力與其密度成正比例；化學反應的速度與其有作用的物質之總量成正比例；圓的面積與其半徑的平方成正比例。

反之，設兩個數量的關係：當一個的值有所增加時，別個的隨着發生比例的減少，我們稱一個數量與別個數成反比例，或一個隨別個而反

變。如氣體的壓力與其體積成反比例，或體積與壓力成反比例；音弦每秒鐘所發的振動數與弦之長成反比例。

『$\propto$』這記號表示『變』。『$x\propto y$』，讀作『x 隨 y 而正變』；『$x\propto y^{-1}$』，讀作『x 隨 y 而反變』。『$\propto$』不過是比例的簡寫。設 x_1，y_1；x_2，y_2；……為 x，y 的相當值。若 x 隨 y 而正變則

$$x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_3 : y_3 = \cdots\cdots;$$

同樣可以寫作，

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=\cdots\cdots。\tag{1}$$

因為 x 與其相當的 y 的任何❶比值，恆是相同的，即得 $\frac{x}{y}$ 為常數；設 x 隨 y 而反變如 Boyle 定律中的 p 與 v 那樣，則 xy 為常數。用記號寫出，即為

$$\text{若 } x\propto y,\ \text{則 } x=ky;\ \text{若 } x\propto\frac{1}{y},\ \text{則 } x=\frac{k}{y}。\tag{2}$$

這個結果是極為重要的，幾乎用之於物理變化的每一公式。k 稱為比例常數。

普通我們總能給與比例常數以特定的意義。例如，我們知道物質的質量 m 與其體積 v 成正比例，

$$\therefore\quad m=kv。$$

若取單位體積，$v=1$ 則 $k=m$ 於是 k 代表密度，即每單位體積的質量，通常以 ρ 為記號。又如，欲使質量 m 的物質，升至溫度 $\theta°$，所

❶ 亦許不必提了，凡是任何值都正確的東西，其一切值亦必正確。在一桶中，若任何蘋果是壞的，當然一切蘋果都是壞的。

須的熱量 Q 是與 $m\times\theta$ 成正比例。故

$$Q=km\theta。$$

我們若取 $m=1$，$\theta^{\circ}=1$，k 所代表的卽爲使單位質量的物質升高溫度 1° 時所須的熱量。這常數不過是此物質的比熱罷了，普通以 C 表之，本書中則以 σ 爲記號。最後，如傳導過一塊金屬版的熱量 Q 是與版的兩側溫度之差 θ，又與其面積 S，又與時間 t 成正比例；Q 又與版的厚度 n 成反比例。結果，

$$Q=k\frac{s\theta t}{n}。$$

若取單位面積與單位厚度的版，使其兩側溫度之差爲 1°，在單位時間內所傳導的熱量，$Q=k$；所以 k 卽爲在單位時間內，單位面積，單位厚度，兩側溫度差 1° 時的金屬版所傳的熱量。卽是說 k 爲熱的傳導係數。

故此比例常數是某種特定的數，其值普通要按照物質的性質與舉行實驗時情形而定。著名的常數，如比重，電阻，地心引力常數，π 與氣體常數 R 都是比例常數。

設在一種情形 p_1，ρ_1，T_1 中的氣體，轉變入另一種情形 p_2，ρ_2，T_2。假定這變化，分作兩步發生：——

第一，設壓力由 p_1 變爲 p_2 而溫度保持 T_1 不變，ρ_1 結果作爲變化爲 x。依 Boyle 定律，則

$$\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{p_2}{x};\quad \therefore\quad x=\frac{p_2\rho_1}{p_1} \qquad (5)$$

第二，設壓力保持 p_2 不變，而溫度由 T_1 變爲 T_2，x 結果作爲變化爲 ρ_2，依 Charles 定律，則

$$\rho_2 T_2 = x T_1 \tag{4}$$

以 x 的值代入此方程式，即得

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} = \text{常數 (設爲 } R\text{)}, \quad \therefore \frac{p}{\rho} = RT。$$

所以我們可以推論，設 x，y，z 是變的數量，牠們的變化是當 z 爲常數，$x \propto y$；當 y 爲常數，$x \propto z$，於是當 y 與 z 同時變化時，$x \propto yz$；反之亦能證明，設當 z 爲常數，$x \propto y$；當 y 爲常數，$x \propto \frac{1}{z}$，則當 y 與 z 同時變化時，$x \propto \frac{y}{z}$。

例一 設氣體的體積隨壓力而反變，隨溫度而正變，證明

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2}; \text{ 與 } pv = RT。 \tag{5}$$

例二 使物質的溫度升高時所加的熱量 Q，隨物質的質量 m 與加高的溫度數 θ 而正變，求證 $Q = \sigma m \theta$。

例三 設化學反應的速度 V 與時間 t 的各個作用物質的量成正比例，試證

$$V = k\, C_1\, C_2\, C_3 \cdots\cdots C_n$$

此中 C_1，C_2，C_3，$\cdots\cdots C_n$ 各爲時間 t 的 n 個作用物質的量，k 爲常數。

§ 11. 指數定律與對數 (The Laws of Indices and Logarithms)

我們已知,

$$4\times4=16 \text{ 是 } 4 \text{ 的二次方,寫爲 } 4^2;$$

$$4\times4\times4=64 \text{ 是 } 4 \text{ 的三次方,寫爲 } 4^3;$$

$$4\times4\times4\times4=256 \text{ 是 } 4 \text{ 的四次方,寫爲 } 4^4;$$

普遍言之,任何數 a 的 n 次方是連乘積

$$a\times a\times a\times\cdots\cdots(\text{共 } n \text{ 個 } a)=a^n, \tag{1}$$

此中 n 稱爲 a 的指數(exponent 或 index)。

從實際的乘法,可得

$$10^2\times10^3=10\times10\times10\times10\times10=10^{2+3}=10^5=100,000;$$

用普遍的記號,

$$a^m\times a^n=a^{m+n}; \quad \text{或} \quad a^x\times a^y\times a^z\times\cdots\cdots=a^{x+y+z+\cdots\cdots} \tag{2}$$

這結果稱爲指數定律。

所有的數都可用一個基本的數的各種乘方來代表,如 $1=10^0$, $2=10^{\cdot301}$; $3=10^{\cdot477}$; $4=10^{\cdot602}$; $5=10^{\cdot699}$;……

這些式子中的指數稱爲對數,其基本的數稱爲這種對數的底數。故此,設

$$a^n=b,$$

n 是以 a 爲底數時 b 的對數,可以寫爲

$$n=\log_a b。$$

爲便於數值的計算,以 10 的各種乘方來表示所有的數的表,是普遍採用的。如

$$10^3=1000; \text{ 與 } 10^{1\cdot0413927}=11;$$

則 $3=\log_{10}1000$；與 $1.0413927=\log_{10}11$。

不必一定用 10。對數可取任何數爲底數。我們若不用 10 而用另一數 2.71828，通常以 e 代之，則

$$1=e^0;\quad 2=e^{0.693};\quad 3=e^{1.099};\quad 4=e^{1.386};\quad 5=e^{1.609};\cdots\cdots$$

以 $e=2.71828$ 爲底數的對數稱爲**自然對數**，亦稱**雙曲線對數**，亦稱**奈氏對數**(Napierian Logarithm)。以 10 爲底數的對數稱爲**常用對數**亦稱**白氏對數**(Briggsian Logarithm)。

又如

$$3\times5=(10^{0.4771})\times(10^{0.6990})=10^{1.1761}=15。$$

因爲從對數表知道，

$$\log_{10}3=0.4771;\ \log_{10}5=0.6990;\ \log_{10}15=1.1761。$$

故此我們用兩個對數的簡單加法，演算算術中的乘法。推廣之，兩個或兩個以上的數相乘，只須以這些數的對數相加，則對數相當於此和的數，卽爲所求的結果。

例 求 4×80 的值。

$$\log_{10}4=0.6021$$

$$\log_{10}80=\underline{1.9031}$$

$$和=2.5052=\log_{10}320$$

這種算法，可應用於任何二數的相乘，與以上所見之 3×5，4×80 一樣的便利。故對數之效用，在於使數值計算簡捷。不久我們可以見到除法，乘方法，開方法也能像乘法一樣利用對數，簡易計算。

從實際的除法

$$\frac{10^3}{10^2}=10^{3-2}=10^1=10;\quad \text{普遍的寫法爲}\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \tag{3}$$

故規則爲：兩數相除，可從被除數的對數減去除數的對數而得差，對數相當於此差的數，卽爲所求的商。

例一 求 $60\div3$ 的值。

$$\log_{10}60=1.7782$$
$$\log_{10}3=\underline{0.4771}$$
$$\text{差}=1.3011=\log_{10}20。$$

例二 證 $2^{-2}=\frac{1}{4}$；$10^{-2}=\frac{1}{100}$；$3^3\times3^{-3}=1$。

例三 證 $a^x\times a^{1-x}=a$；$p\div p^{\frac{1}{x}}=p^{1-\frac{1}{x}}$；$a^x\div a=a^{-(1-x)}$

任何普遍式子中的普遍記號，如 a，b，……m，n，……x，y 可以比之於銀行支票上的空格，必須將日期，支款數目，支款人姓名詳細填寫，方能發生效力而供特定目的之用。故此普遍方程式中的記號如 a，b，……等必須代入特殊數值方能應用於特定的運用。教本上的普遍記號若不完全用數值的例來試驗，『指數的性質』每易誤解。大部份的讀者必須經過很多的練習，方得知道普遍式子全部的效用。這裏與其他地方一樣，讀者非但以『知道原理』爲足夠，必須親自實演例題。『在學習中我從例題所得益，遠過於法則』，在現在與在牛頓時代，一樣的眞實。例如，在演算下列的例題以前，有多少人能明白算學家爲何寫 $a^0=1$?

$$2^2\times2^0=2^{2+0}=2^2\quad 4=2^2\times1。$$

所以，無論 2^2 被乘於 2^0 或被乘於 1，結果所得相同，即

$$2^2\times2^0=2^2\times1=2^2=4。$$

從此，我們推論，

$$2^0=1$$

普遍的說

$$a^0=1 \tag{4}$$

例　從附錄二第十八表證明

$$\log_e3=1.0986;\quad \log_e2=0.6932;\quad \log_e1=0。 \tag{5}$$

又因

$e\times e\times e\times\cdots\cdots\cdots$(共 n 個 e)$=e^n$;$\cdots\cdots\cdots e\times e\times e=e^3$;　$e\times e=e^2$;
$e=e^1$;

$$\therefore\quad \log_e e^n=n;\ \cdots\cdots\cdots\log_e e^3=3;\quad \log_e e^2=2;$$

$$\log_e e^1=1=\log_e e。 \tag{6}$$

我是有意用最最簡單的例，較爲複雜者留與讀者自己練習。並不想作嚴正的證明。我們假定若於一者爲確則於别者亦確。只有從此逐一收集事實，然後我們才能建立起一個普遍的觀念來。初學者對於應用任何抽象的原理或普遍的公式，若能應用特殊的簡單的例證其正確，也就夠了。

一數的兩個不同底數的對數，求其關係　設 n 爲一數，且 $\alpha^a=n$；或 $a=\log_\alpha n$；又 $\beta^b=n$，或 $b=\log_\beta n$。故 $\alpha^a=\beta^b$。求以 α 爲底數的對數，得

$$a=b\ \log_\alpha\beta,$$

因　　$\log_a a=1$。以 a，b 代入，則得

$$\log_\beta n=\log_\beta n\cdot\log_a\beta。\tag{7}$$

以言語表之，一數以 β 為底數的對數等於此數以 α 為底數的對數乘以$\frac{1}{\log_a\beta}$。例如，設 $\alpha=10$，與 $\beta=e$，

$$\log\ n=\frac{\log_{10}n}{\log_{10}e}\tag{8}$$

此中 $\log\ n$ 即為 $\log_e n$ 的簡寫，這是普通的習慣若無含糊的危險，『$\log_e$』上的 e 常是省去。因為 $\log_{10}2.71828=0.4343$；$\log_e 10=2.3026$，$2.71828=e$：—

從自然對數化為常用對數

$$\left.\begin{aligned}\text{常用對數}&=\text{自然對數}\times0.4343\\ \log_{10}\ a&=(\log_e\ a)\times0.4343\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

從常用對數化為自然對數

$$\left.\begin{aligned}\text{自然對數}&=\text{常用對數}\times2.3026\\ \log_e\ a&=(\log_{10}\ a)\times2.3026\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

0.4343 稱為常用對數的換算率，有時以 M 或 μ 代之。更須記牢自然對數為常用對數的 2.3026 倍。

從實際的乘法，可證

$$(100)^3=(10^2)^3=10^{2\times3}=10^6$$

故此欲求一數的任何次方，可用其指數乘此數的對數，而求其積，對數相當於此積的數，即為所求者。

$$(a^m)^n=a^{mn}\tag{11}$$

例　求 5^2 的值

$$5^2=(5)^2=(10^{0.6990})^2=25,$$

因從對數表可知，

$$\log_{10}5=0.6990;\quad \log_{10}25=1.3980。$$

從指數定律，

$$10^{\frac{1}{2}}\times10^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=10^1=10$$

即 $10^{\frac{1}{2}}$ 的自乘得 10。但這是 10 的平方根的意義。

$$\therefore(\sqrt{10})^2=\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}\times10^{\frac{1}{2}}=10。$$

所以指數若爲分數時即表一個數的某次方，其次數隨指數而定。例如

$$\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}},\quad \because\quad \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}\times8^{\frac{1}{3}}\times8^{\frac{1}{3}}=8。$$

普遍的說，任何數 a 的 n 次根爲

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}} \tag{12}$$

以一數開方，可將此數的對數被除於根指數，而求其商，對數相當於此商的數，即爲所求者。

例一　求 $\sqrt[3]{8}$ 與 $\sqrt[7]{93}$ 的值。

從對數表知

$\log_{10}2=0.3010$; $\log_{10}8=0.9031$; $\log_{10}1.91=0.2812$; $\log_{10}93=1.9685$，故可求得

$$\sqrt[3]{8}=(8)^{\frac{1}{3}}=(10^{0.9031})^{\frac{1}{3}}=10^{0.3010}=2;$$

$$\sqrt[7]{93}=(93)^{\frac{1}{7}}=(10^{1.9685})^{\frac{1}{7}}=10^{0.2812}=1.91。$$

例二　本題或可作爲讀者消遣之用。已知明顯的事實 $\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{2}$，與 $3>2$；聯合此二式得 $3\log\frac{1}{2}>2\log\frac{1}{2}$；即 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^3>\log\left(\frac{1}{2}\right)^2$；$\therefore\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^2$；$\therefore\frac{1}{8}>\frac{1}{4}$，$\therefore 1>2$。錯誤在那裏？

因爲我們求某數的對數時，僅取其近似值，故用對數計算所得的結果，很少能得到絕對正確的。我們若不覺笨滯。儘可不用四位對數，而用六十四位的對數。但關於這點的討論預備留到後面去講。讀者關於對數，如若再有什麼困難，可取 F. G. Taylor 著 An Introduction to the Practical Use of Logarithms, London, 1901 一讀。

§ 12. 微分法及其用途(Differentian and its Uses)

微分學並不直接論述數量間關係的本身，而是研究現象片刻間的情狀，這片刻間的情狀以微係數爲記號，如此給與腦筋以一個清晰確定的觀念而與任何數值的或實際的應用，完全無關。我想總述微分學的用途，最適當的地方應在本書之末，只有在那裏讀者會以事實所證的必然性代去自己的信仰。但是在這裏，我還想舉三個例來說明，牠們都得微分學的幫助而解決的。

欲敍述任何現象的整個歷史，必須求得能敍述參與變化的各因子的關係的定律，如同能敍述現象的片刻情狀的定律一樣。兩者之間就有密切的聯係。一者是以另一者爲條件。從完全的定律出發，可以計算出片刻的情狀，反之亦然。

I.　從完全的定律計算片刻的情狀

在求得剎那間的變化率，$\frac{dy}{dx}$，以前，必須知道定律，或結合一個變量與別個變量的函數的形式。例如 Galileo 用實際的量測求到一塊垂直下落的石頭，從靜止的地位出發 t 秒鐘後經過距離 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 呎。不久卽能見到，若求此式的微係數，可得任何時刻的速度爲 $V=gt$。同樣，Newton 的平方反比定律是從 Kepler 的第三律得出；Ampère 的定律是觀察了一部份對於別部份電流的作用而得出。

II. 從片刻的情狀計算完全的定律

有時就用實測的方法，可以得到某現象中幾種作用的力的關係的概念，但一個較爲間接的途徑更是常用。研究者關於在他指揮下的現象的片刻情狀，可作最可取的猜度，然後加上算學記號的衣服。此後的進程，純粹是根據於微分學而作算學計算上的事務了。成功的猜度出之於研究者的聰明。這種方式的進攻，最後從實驗所得的材料與穿着算學記號衣服的假設的比較而得證其無訛的，故此

黃金的猜度呀，

是照耀在眞理周匝的晨星。

Fresnel 的雙重折光定律，Wilhelmy 的質量作用定律，Newton 的熱的幅射定律也許是這樣建立成功的。在積分法未經研究之前，微分學的精巧與美麗很難發現的。

III. 從特殊的情形引出普遍的結論

從觀察與量測所直接求出的自然定律只能應用於特殊的情形，因其必受附着於量測時所用條件的偶然情形的影響。求微係數時可消滅

這些偶然情形而使某種現象內各份子所公有的重要情形單獨存在。我們取最最簡單的例來說明，有一火車以每小時三十哩的定速度駛行。故得 $V=30$。依照我們以前說過的，可以明白在任何時刻這速度的變化率爲零。或可寫爲 $\frac{dV}{dt}=0$。前一方程式 $V=30$ 只在運用的一種特殊情形爲正確，而 $\frac{dV}{dt}=0$ 則對於凡以定速度運用的物體都是正確。在這意義中一個可靠的觀察可以發生一個普遍的定律。

在任何式子中求一個變數關於另一個變數的微係數，其機械的運算並不難於代數的步驟。在敍述求微係數的實用方法以前，以一個幾何的例來說明這種手續是很有實惠的。

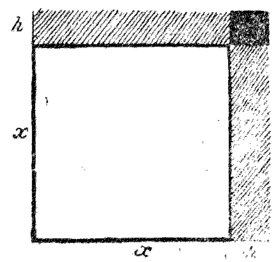


圖　五

設 x（圖五）爲一個正方形的邊，設因變數 x 有了一個增加量❶ h 而使正方形面積也發生一個增加量。

此正方形原有的面積 $=x^2$

其新面積 $=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$

面積的增加量 $=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2$ (3)

h 無論取何值，這方程式總是正確。增加量 h 變得愈小，則 h^2 的值也愈小。若此增加量最後變得無限之小，則 h^2 是更小等級的數量，故可略去。例如，當 $x=1$，

❶ 當一個數量增加時，所加的數量稱爲『增加量』，縮寫爲 "incr."；減少量即爲負的增加量。

設 $h=1$，則面積的增加量$=2+1$；

$h=\frac{1}{10}$，則面積的增加量$=0.2+\frac{1}{100}$；

$h=\frac{1}{1000}$，則面積的增加量$=0.002+\frac{1}{1,000,000}$；

餘可類推。

所以，當正方形一邊 x 有一個無限小的增加量 dx 時，其面積 y 的相當的無限小的增加量若以 dy 表之，則用微分的語言，可將

增加量 $y=2xh$，改寫爲 $dy=2x\cdot dx$ (4)

用極限比的方法也能求得同樣的結果。例如觀察正方形面積 y 的增加量與其一邊 x 的增加量之比。

$$\frac{\text{增加量 } y}{h}=\frac{\text{Incr. } y}{\text{Incr. } x}=\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h,$$

當 h 的值漸近於零時，

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Lt}_{h=0}\frac{\delta y}{\delta x}=2x \tag{5}$$

在量測兩個變數的增加率時，我們常定一個變數爲論述的標準。若以 x 爲 y 的變化率中論述的標準，我們稱$\frac{dy}{dx}$爲 y 關於 x 的變化率。在實用問題中，時間 t 的變化率爲最普通的論述的標準。於必要時，我們可將(4)與(5)作爲

$$\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$$

解釋。用語言表之，卽 y 的變化率 $2x$ 倍於 x 的變化率。

例一　用上述的同樣的理由，證明，若一個立方體的相隣三邊 x

各有一個增加量 h，則 $Lt_{h=0}\dfrac{\delta y}{\delta x}=3x^2$。

例二 證明，若圓的半徑 r 有一個增加量 h，則其面積的增加量為 $(2rh+h^2)\pi$。再證本題的極限比 $\dfrac{dy}{dx}$ 為 $2\pi r$。已知，圓的面積 $=\pi r^2$。

前一種求微係數的方法稱為 Leibnitz 的微分的方法；後一種稱為 Newton 的極限的方法。這是不可肯認的事實：Newton 的方法是嚴密，確切，適合，而 Leibnitz 的方法就有下列的問題：

§ 13. 微係數的求法是否僅是一種近似的方法？

(Is Differentiation a Method of Approximation Only?)

求微係數的方法，初看起來，好像可以認為一種近似的方法，因為那些小的數量，似乎只為捨棄後可以不生覺得到的差誤而捨棄了。因此，在最初的時候，微積學受到許多站於玄學立場的反對。Berkeley ❶ 稱這些極限比為『已死的數量的鬼』。但是，稍加考察，卽知欲使計算中不犯差誤，這些小的數量是必須捨棄的。消去的方法在這種運算中是根本重要的。

近來對於微積學的基礎，也様別門算學一樣做了好些修補的工作，但是我們所能達到的程度不能更深於下述的：假定所研究的數量是連續的；注意於微分愈小，則與絕對正確愈接近；當微分小到出於我們感覺之外時，我們就有理由捨棄牠。發生這串思想的心理過程可引導到一個無可避免的結論，就是用這種形式來表示這過程是正確的。若是還有什麼辯論的餘地，所得的結果便會證明這種推理是對的。

❶ G. Berkeley, Collected Works, Oxford. 3, 44, 1901.

下面論述本題的話是從 Carnot 的 Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal [1] 隨便翻譯出來的。『微分法的主要優點，或可說是崇高，在於這件事實；牠像簡單的近似法那樣的易於演算，且像通常計算的結果那樣正確。假使在整個過程中以求得更大的正確度爲藉口，而用一個較不便利與離自然界事實的可能途徑更遠的方法來代替 Leibnitz 的簡單方法，則極大的利益將會喪失，至少大大的降低。既然這個方法在其結果中是正確的，現在已無疑問；既然遇到困難問題時我們要求助於牠，要什麼複雜而不直接的方法再去補充牠呢？當牠能較其他方法更直接，更普遍，更容易證明時，我們爲什麼要用其他方法的結果來歸納來對照後才滿足呢？對於牠的反對，是根據於錯誤的設想，以於計算中由略去無限小的數量而產生的差誤，仍然會在計算的結果中發現，無論牠們是如何的小。現在並非這種情形。差誤是必然從結果中消去的。眞是奇怪的事，人人在最初不會理解無限小的數量的眞實性質，不會知道對於一切反對的總答覆即在這不可缺少的消去過程中』。

初學者所須注意者，不像代數學與算術，高等算學公認數量是能逐漸生長的。微分學便是研究這種數量的增加或減少的率，可從三種方式來觀察這種生長：

I. **Leibnitz 的『微分法』** 按照這個方法，假定若以無限小的部份，即所謂『微分』連續加上，則數量可從一個等級達到別一個等級。微分可有一個數量的不同等級。於是，積 $dx \cdot dy$ 是屬第二級的無限小的

[1] Paris, 215, 1813.

量,與積 $y\cdot dx$, 或 xdy 相比時就無限之小了。

在上節中證明當正方形的兩邊都有一個微小增加量 h 時,其面積的相當增加量爲 $2xh+h^2$. 使 h 爲無限之小時,等於 dx, 則 $(dx)^2$ 與 xdx 相比較,幾乎小至沒有。故

$$dy=2x\cdot dx$$

在計算中,若含有最後使其極限爲零的數量,則此無限小的數量的較高等級於計算過程的任何階段,都能捨棄。一般的說,只有無限小的數量的最低級是保留着的。

II. **Newton 的『流動率法』** 這裏所應用是產生數量的速度。這速度的量數稱爲『流動』。流動數的寫法爲 $\dot{x}$, $\dot{y}$,……等於我們的 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,………。

這兩個方法實是一個概念的變形。 問題只在於記號與定義而已。Leibnitz 講述一個因變數 y 關於一個自變數 x 的變化率,而 Newton 注目於每個變數與『不變而流動』的時間的關係。 Leibnitz 認爲當 x 有一個增加量 dx 時, y 即有一個增加量 dy。 Newton 設想這些變化都是佔有時間 dt, 故 y 取速度 $\dot{y}$ 而增加,當 x 取速度 $\dot{x}$ 而增加的時度。這個關係用記號寫出,即爲

$$dx=\dot{x}dt,\quad dy=\dot{y}dt;\qquad \therefore \frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}。$$

流動法不能普遍適用,也許因爲牠的較爲抽象的性質。在力學中偶而用

之。

III. **Newton 的『極限法』** 這個方法在第二節內已經開始講過。最後的極限比可以看作是一個固定的數量，兩個變數的比可使與此固定數量任意無限接近。Carnot 說『欲定極限比的定義不會比定無限小的數量的定義難了多少。……用極限的方法進行必須定極限比的定義。但這是無限小的數量的定義，也應該是無限小的數量的定義』。『微分方法與極限方法的差別，只是後者常將應該消滅的高級小數量留在計算之末，才略去牠們。前者則於開始，相信這種數量不致影響於結果，因爲在求極限時必然消失，故很早就略去牠們』（大英百科全書）。所以，求數量的極限比的心理過程等於捨棄含有高級微分的各項。這些運算，兩相對照着列在上節之末。

極限方法與微分方法，在本書中，同時採用不加辨別，只看何者較有實益較爲便利。大概，用微分法時，以算學表示。一個變化較爲容易。極限比的決定法，常比 Leibnitz 的方法，包含更複雜的運算。

§ 14. 求代數函數的微係數 (The Differentiation of Algebraic Functions)

我們現在依據常規的辦法求微係數。各種不同的函數——代數的，對數的，指數的，三角的——以分别研究爲便利。x 的代數函數是一個算式，其中只含加，減，乘，除，乘方，開方等運算。例如，$x^2y+\sqrt[3]{x}+y^{\frac{1}{2}}-ax=1$ 是一個代數函數。凡不能以代數函數表示的函數稱曰**超越函數** (Transcendental Function)。

故，$\sin x=y$； $\log x=y$； $e^x=y$ 是超越函數。

在第十二節中敍述過 $y=x^2$ 的微係數的求法，從下列一串運算而得：——(1)在原函數中給 x 以一個任意增加量 h；(2)從(1)中所求得的 $(x+h)^2$ 的新值減去原函數 x^2；(3)以 x 的增加量 h 除(2)的結果；(4)求這個比在 $h=0$ 時的極限值。

這個手續必須特別注意；牠是求微係數的基本方法，從此可以證明，

設 $y=x^2$, $\frac{dy}{dx}=2x$；設 $y=x^3$, $\frac{dy}{dx}=3x^2$；設 $y=x^4$, $\frac{dy}{dx}=4x^3$，餘類推。

用實際的乘法，我們可得

$$(x+h)^2=(x+h)(x+h)=x^2+2hx+h^2;$$

$$(x+h)^3=(x+h)^2(x+h)=x^3+3hx^2+3h^2x+h^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

這樣我們任意繼續求下去，可得

$$(x+h)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}h^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{n}{1}xh^{n-1}+h^n。\qquad(1)$$

這結果稱爲二項式定理，可使我們不必累次的用乘法而能求得二項式 $x+h$ 的任何次方(例如 n 次方，此中 n 爲正整數)。關於 $(x-h)^n$ 可用同樣的規則。若確是如此，我們可令 $n=1, 2, 3, 4, 5$ 逐一代入(1)中試驗其結果是否與實際乘法所得相符。

便於注意的，幾組二項式係數是服從下表所示，其中 n 各等於 0,

1，2，3，……

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=1 \quad 1$$

$$(a+b)^2=1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a+b)^3=1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$(a+b)^4=1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$(a+b)^5=1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$(a+b)^6=1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

I. 一個變數任何次方的微係數

我們欲求

$$y=x^n$$

的微係數。在此式兩邊各加一個小的增加量，即當 x 變爲 $x+h$ 時 y 變爲 $y+h'$；

$$\therefore \quad (y+h')-y=\text{Incr. } y=(x+h)^n-x^n。$$

從二項式定理，

$$\text{Incr. } y=nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots\cdots$$

以 h 除兩邊得

$$\frac{\text{Incr. } y}{h}=\frac{\text{Incr. } y}{\text{Incr. } x}=nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots\cdots$$

使 h 爲零時得極限比

$$\text{Lt}_{h=0}\frac{\text{Incr. } y}{\text{Incr. } x}=\text{Lt}_{h=0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

卽得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\,(x^n)}{dx}=nx^{n-1} \tag{2}$$

故此得規則:——x 的任何次方的微係數等於以原指數乘係數,且指數減一。

例一　若 $y=x^6$, 證 $\frac{dy}{dx}=6x^5$。意思是 y 變化比 x 快 $6x^5$ 倍。設 $x=1$ 則 y 的增加比 x 快 6 倍;設 $x=-2$,則 y 的減少比 x 快 $-6\times32=-192$ 倍。

例二　設 $y=x^{20}$; 證 $\frac{dy}{dx}=20x^{19}$。

例三　設 $y=x^5$; 證 $\frac{dy}{dx}=5x^4$。

例四　設 $y=x^3$; 證 $\frac{dy}{dx}$, 當 $x=10$ 時,其値爲 300。

以後我們還要用微分法求二項式定理。讀者或許以爲我們弄的是玄虛的循環。其實不然。x^n 的微係數可以不必假借二項式定理而求得。例如,設

$$y=x^n$$

假使 x 變爲 $x_1=x+h$ 時, y 變爲 y_1; 則

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x_1{}^n-x^n}{x_1-x}=x_1{}^{n-1}+xx_1{}^{n-2}+\cdots\cdots+x^{n-1}。$$

但 $\mathrm{Lt}_{h=0}\ x_1=x$;

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots\cdots\ 一共\ n\ 項=nx^{n-1}。$$

II. **任何幾個函數的和或差的微係數** 設 u, v, w……為 x 的函數; y 爲牠們的和。設 u_1, v_1, w_1……y_1 各爲當 x 變爲 $x+h$ 時這些函數的值,則

$$y=u+v+w+\cdots\cdots;\quad y_1=u_1+v_1+w_1+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad y_1-y=(u_1-u)+(v_1-v)+(w_1-w)+\cdots\cdots,$$

除以 h, 得

$$\frac{\text{Incr. }y}{h}=\frac{\text{Incr. }u}{h}+\frac{\text{Incr. }v}{h}+\frac{\text{Incr. }w}{h}+\cdots\cdots$$

或
$$\text{Lt}_{h=0}\frac{\text{Incr. }y}{\text{Incr. }x}=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\cdots\cdots \tag{3}$$

若其中有幾項是負號,則結果中相當的項亦爲負號。例如,設

$$y=u-v-w-\cdots\cdots$$

則
$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}-\cdots\cdots \tag{4}$$

故得規則:——任何幾個函數之和或差的微係數等於這些函數的微係數的和或差。

III. **一個變數與一個常數之積的微係數** 設

$$y=ax^n$$

$$\text{Incr. }y=a(x+h)^n-ax^n=anx^{n-1}h+\frac{an(n-1)}{21}x^{n-2}h^2+\cdots\cdots$$

所以

$$\text{Lt}_{h=0}\frac{\text{Incr. }y}{h}=\frac{dy}{dx}=anx^{n-1} \tag{5}$$

故得規則：—— 一個變數與一個常數之積的微係數等於此常數乘以此變數的微係數。

IV. **常數項的微係數爲零**　因爲常數項根本是不變的量，若 y 爲常數，設等於 a；則$\frac{da}{dx}$等於絕對零。 設

$$y=(x^n+a);$$

則照舊的方法，

$$\text{Incr. } y=(x+h)^n+a-(x^n+a);$$

$$\therefore\quad \text{Incr. } y=\frac{n}{1}x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \mathrm{Lt}_{h=0}\frac{\text{Incr. } y}{\text{Incr. } x}=\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}, \tag{6}$$

此中常數項是不見了。

爲簡單計，我們寫❶ $1!=1$；$2!=1\times2$；$3!=1\times2\times3$； $n!=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$。嚴格的說，$0!$ 是沒有意義；但算學家以爲使 $0!=1$ 較爲便利，這種是 Kramp 的記法。$n!$ 讀作『n 的階乘』。

V. **一個多項式❷ 的任何次方的微係數**　設

$$y=(ax+x^2)^n$$

我們若以括號的式子作爲一個變數，y 即爲此變數的 n 次方，可得

$$dy=n(ax+x^2)^{n-1}d(ax+x^2)。$$

❶ 一個多項式是含有二項或二項以上而聯以加號或減號的代數式。如 $a+bx$；$ax+by=z$ 等。含有二項者稱爲二項式。

❷ $1!$ $2!$ …… $n!$ 亦有寫作 $\underline{|1}$，$\underline{|2}$，……$\underline{|n}$ 者。——譯者註

所求的微係數即爲

$$\frac{dy}{dx}=n(ax+x^2)^{n-1}(a+2x)。\tag{7}$$

故得規則:—— 一個多項式任何次方的微係數等於原式的指數減1;再乘以原式的微係數

例一 設 $y=x-2x^2$, 證$\frac{dy}{dx}=1-4x$。

例二 設 $y=(1-x^2)^3$, 證 $\frac{dy}{dx}=-6x(1-x^2)^2$。 意思是 x 變化一單位時, y 的變化率爲 $-6x(1-x^2)^2$; 換言之, y 的變化比 x 快 $-6x(1-x^2)^2$ 倍。

例三 設一個落體在時間 t 內所經的距離 s, 則可寫成下式, $s=\frac{1}{2}gt^2$, 證此落體在時間 t 的速度爲 $\frac{ds}{dt}=gt$。

例四 體積一定時,異戊烷 isopentane)的溫度 θ 與水汽壓力 p 的關係的 Young 氏公式爲 $p=b\theta-a$, 此中 a 與 b 爲經驗常數 (empirical constant)。從此證明壓力關於溫度的變比率是常數且等於 b。

例五 任何溫度 θ 時, 完全液體 (perfect liquid) 的表面張力 s 的 Mendeléeff 氏公式爲 $s=a-b\theta$。從此證 s 關於 θ 的變化率爲常數。

答: $-b$。

例六 Callendar 氏一個公式關於白金絲的電阻隨溫度 θ 的變化爲 $R=R_0(1+\alpha\theta+\beta\theta^2)$,此中 α, β, R_0 爲常數。試求當溫度小

有增加時此絲的電阻的增加量。

答：　$dR=R_0(\alpha+2\beta\theta)d\theta$。

例七　一克的水的體積幾乎是 $1+\alpha(\theta-4)^2$ 立方厘米，此中 θ 為溫度，α 為常數約等於 $8\cdot38\times10^{-6}$。證明在任何溫度 θ 時，水的立體膨脹係數為 $2\alpha(\theta-4)$。從此證明，0° 與 10° 的水，其立體膨脹係數各為 -67.04×10^{-6} 與 $+100\cdot56\times10^{-6}$。

例八　一個活塞在直徑 6 吋的圓筒中自由滑動。若每秒鐘放入 11 立方呎的蒸汽則活塞的運動的速度若何？已知，圓筒體積＝ πr^2h。

示意：　$v=\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2x$；　$\therefore$　$dv=\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2dx$。但我們須求 $\frac{dx}{dt}$。

則以 dt 除此式的兩邊，且取 $\pi=\frac{22}{7}$，

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dt}\times16\times\frac{7}{22}=56 \text{ 呎，每秒。}$$

例九　欲使某個固體的溫度從 0° 升至 θ° 所需的熱量 Q，為 $Q=a\theta+b\theta^2+c\theta^3$（此中 a，b，c 為常數），求此物質的比熱。

示意：　以 $\frac{dQ}{d\theta}$ 與比熱的定義相比較。

答：　$a+2b\theta+3c\theta^2$

例十　肥皂泡球的直徑若以每秒 0.1 厘米相等的增加，當直徑變為 2 厘米時其容量的增加率為每秒 0.2π 厘米。已知球的體積 $v=\frac{1}{6}\pi D^3$，

$$\therefore\quad dv=\frac{1}{2}\pi D^2dD,\qquad \therefore\ \frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}\times\pi\times2^2\times0.1=0.2\pi。$$

例十一 某城的蓄水池爲圓錐台的倒形，側邊傾斜 $45°$，小底半徑 100 呎。當水深 20 呎時，水的深度的減少率是每天 5 呎，試證此城每天有 $72,000\pi$ 立方呎的水供給。已知圓錐台的體積 $y=\frac{1}{3}\pi\times$ 高 $\times(a^2+ab+b^2)$，此中爲上下底的半徑。

示意： 設 a 爲小底的半徑，x 爲水的深度（圖六）。先證此池水面

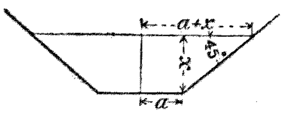


圖 六

的半徑爲 $a+x$。於是，$y=\frac{1}{3}\pi\{(a+x)^2+a(a+x)+a^2\}x$； $\therefore\ dy=\pi(a^2+2ax+x^2)dx$，……

例十二 設 a，b，c 爲常數，$y=a+bx+cx^2$，證 $x=0$ 時，$\frac{dy}{dx}=b$。

示意： 得求微係數後，以 $x=0$ 代入。

例十三 圓形金屬片的面積受熱而膨脹。當半徑變至 2 厘米時其增加率爲每秒 0.01。求面積的增加率。

答： 0.04π 平方厘米，每秒。

示意： 設半徑 $=x$ 厘米；面積 $=y$ 平方厘米； $\therefore$ 圓面積 $=y=\pi x^2$。於是，$\frac{dy}{dt}=2\pi x\ \frac{dx}{dt}$；當 $x=2$ 時，$\frac{dx}{dt}=0.01$ 則 ····

VI. **幾個函數之積的微係數** 設

$$y=uv$$

此中 u 與 v 爲 x 的函數。x 變爲 $x+h$ 時設 u, v, y 變爲 u_1, v_1, y_1, 則 $y_1=u_1v_1$; $y_1-y=u_1v_1-uv$, 於此式右邊同時加減 uv_1, 可得

$$y_1-y=u(v_1-v)+v_1(u_1-u)。$$

用微分的語言,這關係可寫爲,

$$dy=d(uv)=udv+vdu。\qquad (8)$$

或兩邊除以 δx, 求 $\delta x=0$ 時的極限值,得

$$\mathrm{Lt}_{\delta x=0}\frac{\delta y}{\delta x}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx},$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \qquad (9)$$

若爲三個函數之積,如

$$y=uvw$$

可令 $vw=z$; 則 $y=uz$。從(8)得

$$dy=z\,du+u\,dz=vw\,du+u\,d(vw);$$

$$\therefore\quad dy=vw\,du+u(w\,dv+v\,dw);$$

$$\therefore\quad dy=vw\,du+uw\,dv+uv\,dw。\qquad (10)$$

這是微分的記法。若欲變爲微係數,只須兩邊除以 dx。這種方法可推廣到許多函數之積。

故得規則:—— 幾個函數之積的微係數等於每個函數的微係數乘以其餘的函數,而總加之。

例一 容器內的氣體在壓力 p 時其體積爲 v, 若壓縮或膨脹時絕熱的損失, 我們知道壓力與積的關係爲 $pv^\gamma=$ 常數; 此中 γ 爲常數。

試壓力小有變化時$\dfrac{dv}{dp}=-\dfrac{v}{\gamma p}$。

例二　設 $y=(x-1)(x-2)(x-3)$，則 $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-12x+11$。

例三　設 $y=x^2(1+ax^2)(1-ax^2)$，則 $\dfrac{dy}{dx}=2x-6a^2x^5$。

例四　從幾何圖形上證明，三個相隣的邊各爲 x_1,y_1,z 的長方體，其容量的小增加量可以 $xydz+yzdx+zxdy$ 表示之。從此證明三邊各爲 4，5，10 單位的金塊，若其直線向度以每秒 0.001 單位膨脹時，其體積 v 的增加率 $\dfrac{dv}{dt}=0.110$ 單位，每秒。

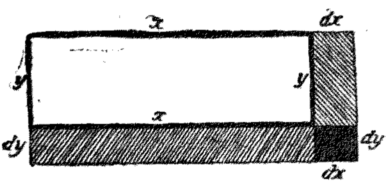


圖　七

這方法可用與第十二節末相類的圖說明之。在長方形（圖七）中設相隣的邊各爲 x 與 y。若 x 與 y 各增加其微分 dx 與 dy。則其面積的增加量爲圖中陰影部份，即 $xdy+ydx+dxdy$，但 $dx\cdot dy$ 的極限值爲零，前已證過。

VII.　**一個分數式（或兩個函數的商）的微係數**　設

$$y=\frac{u}{v},$$

此中 u,v 爲 x 的函數。從 $u=vy$，用公式(9)，

$$du=vdy+ydv;\quad \therefore\quad du=vd\left(\frac{u}{v}\right)+\frac{u}{v}dv。$$

解之求 $d\left(\dfrac{u}{v}\right)$，則

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{du-\frac{u}{v}dv}{v};$$

$$\therefore\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}。\tag{11}$$

此爲微分的寫法;若欲寫作微係數,可兩邊除以 dx,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}。\tag{12}$$

故一個分數式的微係數等於分母乘分子的微係數與分子乘分母的微係數之差,除以分母的平方。

當分數式$\frac{a}{x}$的分子 a 爲常數時,則爲特例,

$$y=\frac{a}{x};\ dy=\frac{xda-adx}{x^2}=\frac{-adx}{x^2};\quad\therefore\quad\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{x^2}。\tag{13}$$

故分子爲常數的分數式$\frac{a}{x}$,其微係數等於常數除以分母的平方,前加負號。

例一　設 $y=\frac{x}{1-x}$; 證$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-x)^2}$。

例二　在時間 t, 若一個物質 A 與另一物質 B 發生作用後轉變的總量爲 x 個克分子量,實驗所得的關係爲$\frac{x}{(a-x)}=akt$, 此中 k 爲常數;作用開始時,所有 A 的克分子量,與 B 的克分子量都是 a 個。試證此作用的速度,在時間 t, 是比例於其時 A 的總量與 B 的總量。

示意： 可證得作用速度爲 $k(a-x)^2$，而解釋之。

例三 設 $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$，證 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$。

例四 設 $y=\dfrac{a}{x^m}$，證 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{na}{x^{n+1}}$。

例五 波長 λ 的光線的折射率 μ，依照 Christoffel 氏分散的公式爲

$$\mu=\frac{\mu_0\sqrt{2}}{\sqrt{1+\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}+\sqrt{1-\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}},$$

此中 μ_0 與 λ_0 爲常數。當光的波長小有變化時，求折射率的相當變化。

答： $$\frac{d\mu}{d\lambda}=\frac{-\mu^3\lambda_0^{\ 2}}{2\lambda^3\mu_0^{\ 2}\sqrt{1-\dfrac{\lambda_0^{\ 2}}{\lambda^2}}}。$$

在實用中這樣困難的求微係數法並不常見。最麻煩的部份就在化簡

$$\frac{d\mu}{d\lambda}=-\frac{\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}\,\mu_0\lambda_0}{\lambda^2}\left\{\sqrt{1+\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}-\sqrt{1-\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}\right\}}{\sqrt{1-\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}\left\{\sqrt{1+\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}+\sqrt{1-\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}\right\}^2},$$

而爲答中所示。

示意： 以 $4\mu_0^{\ 2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}+\sqrt{1-\dfrac{\lambda_0}{\lambda}}\right)$ 以右邊的分子與分母，括出等於題中原式的 μ，可得 μ^3。

VIII.　**有分數指數或負數指數的函數的微係數**　因二項式定理無論指數爲正爲負爲分數爲整數都是正確的，公式(2)可以作爲十分普遍的。下列關於分數指數與負數指數的證法不過一種練習而已。設

$$y=x^n。$$

第一　當 n 爲正分數時。令 $n=\frac{p}{q}$，其中 p，與 q 爲任何整數，則

$$y=x^{\frac{p}{q}} \tag{14}$$

求兩邊的 n 次方得

$$y^q=x^p$$

求微分得

$$qy^{q-1}dy=px^{p-1}dx。$$

再求(14)兩邊的$(q-1)$次方，得

$$y^{q-1}=x^{\frac{pq-q}{q}}。$$

以 y^{q-1} 代入上式的結果，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}\,x^{\frac{p}{q}}}{x^p};$$

或
$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}, \tag{15}$$

這與 n 設爲正整數時所得恰是一樣。

第二　當 n 爲負整數或負分數時。設

$$y=x^{-n};$$

則

$$y=\frac{1}{x^n}。$$

以此式作分數式而微係數(13)卽得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}},$$

化簡之,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^{-n})}{dx}=-nx^{-n-1}$$

從此可知(2)中，所用的求微係數法是十分普遍的。

當 $y=\sqrt{x}$ 時是一個特例,此時 $y=x^{\frac{1}{2}}$;

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \tag{16}$$

故,一個變數的平方根的微係數等於此變數的平方根的倒數之半。

例一　白金絲的電阻 R 隨溫度 θ (在 $0°$ 與 $100°$ 間) 而變化時, Matthiessen 的公式爲 $R=R_0(1-a\theta+b\theta^2)^{-1}$ 求溫度小有變化時,電阻的增加量。

答: $\dfrac{dR}{d\theta}=\dfrac{R^2(a-2b\theta)}{R_0}$。

注意 a 與 b 爲常數; $dR=-R_0(1-a\theta+b\theta^2)^{-2}\ d(1-a\theta+b\theta^2)$; 以 R_0 同時乘除之; 以原方程式中 R 之值代入;………

例二　金屬線的電阻與溫度的關係，按 Siemen 氏公式爲 $R=$

$R_0(1+a\theta+b\sqrt{\theta})$。試求電阻關於溫度的變化率。

答: $R_0\left(a+\frac{1}{2}b\theta^{-\frac{1}{2}}\right)$。

例三 Batschinski(Bull. Soc. Imp. Nat. Moscow, 1902)求得在溫度 θ 時,許多粘滯性 η 的液體,其 $\eta(\theta+273)^3$ 為常數。設此常數為 A,證 $\frac{d\eta}{d\theta}=-\frac{3\eta}{\theta+273}$。

例四 Batschinski(同上書中)表示一種液體的粘滯參數(viscosity parameter)與臨界溫度 θ 的關係,用下式, $M^{\frac{1}{2}}\theta^{\frac{7}{2}}\eta m^{\frac{2}{3}}=B$, 此中 B, M, m 為常數, 試證 $\frac{d\eta}{d\theta}=-\frac{\frac{7}{2}\eta}{\theta}$。

IX. **一個函數的函數的微係數** 設

$$u=\phi(y);\quad y=f(x)。$$

今欲求 u 關於 x 的微係數。設 u 與 y 各有一個小增加量, 使 u 變為 u_1, y 變為 y_1, x 變為 x_1。則

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\frac{u_1-u}{y_1-y}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x},$$

在增加量無論如何小時, 終能成立。當增加量為無限小時, 到極限為

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}。\tag{17}$$

這裏附加聲明的, 上式的左邊並由於右邊內 dy 約去而求得。其運算應為

$$\frac{d}{dx}(u)=\frac{d}{dy}(u)\cdot\frac{d}{dx}(y)$$

公式(17)以言語表之：一個函數關於一個指定的變數的微係數等於這函數關於第二個函數的微係數乘以第二個函數關於指定的變數的微係數。以 x 表時間，可得此公式的物理意義。那時的情形是含有一個變數的函數的變化率等於這函數關於這變數的變化率乘以這變數的變化率。

顯然可以推廣到三個或三個以上的變數的情形。設 $v=\phi(w)$，$w=\psi(y)$，$y=f(x)$，則

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}。\tag{18}$$

用上述的記法，顯然一切有限的增加量，都可使

$$\frac{x_1-x}{y_1-y}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}=1,$$

成立的，假定於增加量爲無限小時亦能成立，則到極限爲

$$\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=1;\quad 或\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}。\tag{19}$$

我們已經見到若 y 爲 x 的函數，則 x 爲 y 的函數；但，後者常稱爲前者的反函數；前者亦可稱爲後者的反函數。可用記號表之如下：若 $y=f(x)$，則 $x=f^{-1}(y)$，或，若 $x=f(y)$ 則 $y=f^{-1}(x)$。

例一 設 $y=\frac{x^n}{(1+x)^n}$，證 $\frac{dy}{dx}=\frac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$。

例二 設 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，證 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$。

例三 利用公式 (17) 常使微係數的實際求法化簡不少；例如求

$u=\sqrt{a^2-x^2}$ 的微係數。我們可假定 $y=a^2-x^2$。於是 $u=\sqrt{y}$，$y=a^2-x^2$；$\frac{dy}{dx}=-2x$；$\frac{du}{dy}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$，於是從 (17)，$\frac{du}{dx}=-x(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$。這是一個容易的例，原來可以一望而知，用在這裏不過說明方法而已。

有了這些公式，讀者於物理科學中所遇見的任何代數函數❶都可求得其微係數。在進而論述超越函數，如含有三角函數，對數函數以其他非代數函數的函數以前，我們可應用已有的知識於有名的 Boyle 與 Van der Waals 方程式。

§ 15. Boyle 與 Van der Waals 氣體方程式

若溫度不變，在 Van der Waals 的方程式

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=\text{常數} \tag{1}$$

中，b 為常數，隨分子的體積而定，a 為常數，隨分子間的引力而定。求關於 p 與 v 的微分，如公式 (8)，得

$$(v-b)d\left(p+\frac{a}{v^2}\right)+\left(p+\frac{a}{v^2}\right)d(v-b)=0,$$

所以

$$\frac{dv}{dp}=-\frac{v-b}{p-\frac{a}{v^2}+\frac{2ab}{v^3}} \tag{2}$$

---

❶ K. Weierstrass 曾經證明，有幾個連續函數的無法求其微係數，但是牠們於物理無甚應用除了在高速度而小振幅的振動中，參閱 J. Harkness 與 F. Morley's Theory of Functions, London, 65, 1893.

微係數$\frac{dv}{dp}$可以量度氣體的壓縮性。若氣體嚴格服從 Boyle 定律，$a=b=0$，我們應得，

$$\frac{dv}{dp}=-\frac{v}{p} \tag{3}$$

這些方程式中，負號表示壓力增加時氣體的體積反而減少。任何氣體壓力變化後所生體積的變化與 Boyle 定律所示有些出入，出入的多少要看(2)中微係數與(3)中微係數出入的多少，卽看

$$\frac{v-b}{p-\frac{a}{v^2}+\frac{2ab}{v^3}}\gtrless\frac{v}{p};\quad\therefore\quad pv-pb\gtrless pv-\frac{a}{v}+\frac{2ab}{v^2};$$

$$\therefore\quad pb\gtrless\frac{a}{v}-\frac{2ab}{v^2};$$

卽
$$\therefore\quad pv\gtrless\frac{a}{b}-\frac{2a}{v}。\tag{4}$$

若嚴格遵守 Boyle 定律，則

$$pv=常數, \tag{5}$$

但是若氣體於壓力的覺感較 Boyle 定律所示者爲遲鈍，如使體積縮小時必須比 Boyle 定律所示壓力要稍多加一些，則 pv 將隨壓力的增加而增加，反之若於壓力的覺感較 Boyle 定律所示者爲敏銳，則 pv 將隨壓力的增加而減小。

賴藉相似於(4)與(5)的方程式，比較受壓氣體的性質已經求得分子間相互作用的有價值的結論。但也並不完全如此。從(5)設 $c=$常數，$v=\frac{c}{p}$，求微係數得

$$\frac{dv}{dp}=-\frac{c}{p^2},$$

卽體積減少與壓力增加之比，隨壓力的平方而反變。上式中以 $p=2$，3，4，……代入，得

$$-\frac{dv}{dp}=\frac{1}{4};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{16};\ \cdots\cdots$$

此中 $c=1$。換言之，氣體受壓力愈大，則由於以後加上之壓力而減少的體積愈小。負號表示體積隨壓力之增加而減少。

§ 16. 三角函數的微係數 (The Differentiation of Trigonometrical Functions)

任何式子包含三角比，如正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割者稱爲三角函數。三角法的要義在附錄中加以討論，讀者最好閱讀一過。我們這裏直接採用那些結果，原理上無甚新的發展。

I. **$\sin x$ 的微係數是 $\cos x$**　設 x 變爲 $x+h$ 時，y 變爲 y_1，

$y=\sin x$；$y_1=\sin(x+h)$；　$\therefore\ y_1-y=\sin(x+h)-\sin x$。

照附錄一第 192 節公式(39)，

$$y_1-y=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)。$$

兩邊除以 h 得

$$\frac{y_1-y}{h}=\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)。$$

但當 x 接近於零時 $\frac{\sin x}{x}$ 接近於 1（第 192 節公式 14），故

$$\mathrm{Lt}_{h=0}\frac{y_1-y}{h}=\cos\ x;\quad\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin\ x)}{dx}=\cos\ x。\tag{1}$$

一個角的正弦關於此角的變化率等於此角的餘弦。當 x 從 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$ 時 $\sin\ x$ 的增加率爲正,因 $\cos\ x$ 爲正,如第 192 節所示;同樣因爲 $\cos\ x$,當 x 從 $\frac{\pi}{2}$ 增加至 π 時爲負,故 $\sin\ x$ 的値爲負,即 $\sin\ x$ 的增加率爲負。

若 x 表爲度數,則必寫爲

$$\frac{d(\sin\ x^0)}{dx}=\frac{d\left(\sin\frac{\pi}{180}x^0\right)}{dx}=\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi x^0}{180}=\frac{\pi}{180}\cos\ x^0,$$

因一個角的『弧度數』$=$ 其『度數』$\times\frac{1}{180}\pi$,此中 $\pi=3.1416$。

數値的說明——取 h 爲很小的有限數,可與 (1) 式事實很接近。故設 $x=42°6'$; $h=1'$; $x+h=42°7'$;

$$\therefore\quad\frac{\text{Incr. }y}{\text{Incr. }x}=\frac{\sin(x+h)-\sin\ x}{h\ (\text{弧度數})}=\frac{0.0002158}{0.0002909}=0.74183。$$

但 $\cos\ x=0.74198$; $\cos(x+h)=0.74178$,故 $h=\frac{1}{60}°$ 時 $\frac{dy}{dx}$ 在 $\cos x$ 與 $\cos(x+h)$ 之間。h 的値愈取愈小,則 $\frac{dy}{dx}$ 與 $\cos\ x$ 愈趨愈近。

II. $\cos x$ 的微係數等於 $-\sin x$ 設 $y=\cos x$; $y_1=\cos(x+h)$; $y_1-y=\cos(x+h)-\cos\ x$。從第 192 節公式(41)可得

$$y_1-y=-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right);\text{或}\ \frac{y_1-y}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right);$$

當 $h=0$ 時的極限爲

$$\mathrm{Lt}_{h=0}\frac{y_1-y}{h}=-\sin x;\quad \therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x \tag{2}$$

從微係數的定義很易知道 (2) 式中負號的意義。$\cos x$ 關於 x 的微係數代表在 x 有小小增加時 $\cos x$ 的增加率。負號即表示這增加率爲負的，換言之當 x 從 0 增至$\frac{1}{2}\pi$ 時 $\cos x$ 減少。當 x 從$\frac{1}{2}\pi$ 增至 π 時，微係數爲正値，即 $\cos x$ 此時隨 x 而增加。

III. **$\tan x$ 的微係數爲 $\sec^2 x$** 照 $\tan x$ 的定義知等於$\frac{\sin x}{\cos x}$，利用上二節已得的結果，設 $y=\tan x$，則

$$\frac{d(\tan x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx}=\frac{\cos x\frac{d(\sin x)}{dx}-\sin x\frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

但由第 192 節公式(19)，知分子爲 1。 故

$$\frac{d(\tan x)}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x。\tag{3}$$

同樣可證

$$\frac{d(\cot x)}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x \tag{4}$$

其餘的三角函數,留給讀者自己去求其微係數。結果見於第 70 節表中。

例一 設 $y=\cos^n x$, 證 $\dfrac{dy}{dx}=-n\cos^{n-1}x\sin x$。

例二 設 $y=\sin^n x$, 證 $\dfrac{dy}{dx}=n\sin^{n-1}x\cos x$。

例三 設有一個質點依方程式 $y=a\sin(qt-\epsilon)$ 而振動,在任何時刻的速度是什麼?此中 a, q, ϵ 爲常數。

答: $aq\cos(qt-\epsilon)$。

例四 設 $y=\sin^2(nx-a)$; $\dfrac{dy}{dx}=2n\sin(nx-a)\cos(nx-a)$。

例五 求 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$的微分。

答: $d\theta=(xdy-ydx)\div(x^2+y^2)$。

示意 $\sec^2\theta d\theta=(1+\tan^2\theta)d\theta$; $\therefore\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2}d\theta=\dfrac{xdy-ydx}{x^2}$........

例六 設有一點 P 在 O 爲圓心, 18 厘米爲半徑的圓周上運用, AB 爲直徑, MP 爲 AB 的垂線,證明當 $\angle BOP=\alpha=30°$ 時 M 在 AB 上的速度爲每秒 226 厘米; P 每秒環繞圓周四次爲已知。 作一圖。此中 $OM=y=r\cos\alpha=18\cos\alpha$; $\therefore\ \dfrac{dy}{dt}=-(18\sin\alpha)\dfrac{d\alpha}{dt}$。

但$\dfrac{d\alpha}{dt}=4\times2\pi$; $\sin 30°=\dfrac{1}{2}$;

$\therefore\ \dfrac{dy}{dt}=-18\times\dfrac{1}{2}\times8\pi=-9\times8\times3.1416=-226$ 厘米,每

秒(約數)。

§ 17. **反三角函數的微係數。　角的微係數**(The Differentiation of Inverse Trigonometrical Functions; The Differentiation of Angles.)

方程式 $\sin y=x$ 的意義爲 y 是一個角其正弦爲 x。有時另用一種寫法較爲便利，

$$\sin^{-1}x=y,$$

其意義卽爲 $\sin^{-1}x$ 是一個角其正弦爲 x。故 $\sin 30°=\frac{1}{2}$ 我們可說 $30°$ 或 $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 是一個角其正弦爲 $\frac{1}{2}$。三角函數這樣反寫過來稱爲反三角函數。記號『$^{-1}$』,加在三角函數上,除表示反函數外沒有其他意義。注意，$\tan 45°=1$ 則 $\tan^{-1}1=45°$; $\therefore\ \tan(\tan^{-1}1)=\tan 45°$。有些作者用 $\text{arc}\sin x$; $\text{arc}\tan x$,……代替 $\sin^{-1}x$; $\tan^{-1}x$;……。

反三角函數的求微係數法,可從證明 $\sin^{-1}x$ 的微係數爲 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,而說明之。設 $y=\sin^{-1}x$，則 $\sin y=x$,

$$\frac{dx}{dy}=\cos y;\quad 或\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y},$$

但從第 192 節公式(19)知道,

$$\cos^2y+\sin^2y=1;或\ \cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2y}=\pm\sqrt{1-x^2},\ 因\sin y=x。$$

所以

$$\frac{d(\sin^{-1}x)}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}。$$

若開方根的正負不決定，第1節中所舉的錯誤，無意中就會闖入。在 $\sin\ y=x$ 中，x 的值只能在±1之間而 y 可有任何數值，因 $\sin\ y=\sin\{n\pi+(-1)^n y\}$，此中 n 爲正整數；但我們規定 y 只取其適合 $\sin\ y=x$ 而絕對值最小者，則 y 必在 $\frac{\pi}{2}$ 與 $-\frac{\pi}{2}$ 之間，此時 $\cos\ y$ 必爲正，故 $\frac{1}{\cos\ y}$ 亦爲正，於是

$$\frac{d(\sin^{-1} x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1}$$

同樣

$$\frac{d(\cos^{-1}\ x)}{dx}=-\frac{1}{\sin\ y}=-\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2}$$

我們規定 y 取適合於 $y=\cos^{-1}\ x$ 而絕對值最小者，即 0 與 π 之間的值，此時 $\sin\ y$ 爲正。

設 $y=\tan^{-1}\ x$，則 $x=\tan\ y$，$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos^2\ y}$。但 $\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2\ y}=\frac{1}{1+x^2}$

故

$$\frac{d(\tan^{-1} x)}{dx}=\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}。 \tag{3}$$

$\tan^{-1}\ x$ 的微係數是一個重要的函數，在實用的公式中常常遇到。

同樣

$$\frac{d(\cot^{-1} x)}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}。 \tag{4}$$

其餘的反三角函數的微係數,讀者可自行求之作爲練習,結果見第 70 節表中。

例一 求 $y=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。

$\sin y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,故 $\cos y\,dy=\dfrac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$。但 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$ $=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}$, 以此代入上式, 化簡之, 得 $\dfrac{dy}{dx}=(1+x^2)^{-1}$, 卽爲所求之微係數。注意下列的計算。

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx-x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+x^2-x^2)dx;$$

又 $\cos y\times(1+x^2)^{\frac{3}{2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}=1+x^2$。

例二 設 $y=\sin^{-1}x^2$ 證 $\dfrac{dy}{dx}=2x(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$。

例三 設 $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。參閱第 192 節公式(22)

§ 18. 對數的微係數(The Differentiation of Logarithms)

一個含有對數項的式子稱爲對數函數。如 $y=\log x+x^3$。求 $\log x$ 的微係數。 設

$$y=\log x;\quad y_1=\log(x+h)。$$

此中 y_1 爲 x 變至 $x+h$ 時 y 的值。 於是

$$\frac{y_1-y}{h}=\frac{\log(x+h)-\log x}{h};$$

但從第 11 節知 $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$,故

$$\frac{\text{Incr. }y}{\text{Incr. }x}=\frac{1}{h}\log\left(\frac{x+h}{x}\right)=\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right),$$

$$\frac{dy}{dx}=\text{Lt}_{h=0}\ \frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) \tag{1}$$

由於$\frac{1}{h}$與$\frac{h}{x}$的性質,這個式子的極限值,若照現在的形式,就無法決定。故此必取間接的方法來計算。我們令

$$\frac{h}{x}=\frac{1}{u};\quad \therefore\ \frac{1}{h}=\frac{u}{x}。$$

$$\therefore\quad \frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}u\ \log\ \left(1+\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}。$$

h 減少時 u 卽增加,故當 h 變爲很小,近於零時,u 的極限值爲無限大。現在的問題是當 u 爲無限大時,求 $\log(1+u^{-1})^{u}$ 的極限值。換言之卽求上式當 u 無增加時的極限值。

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\text{Lt}_{u=\infty}\ \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} \tag{2}$$

照二項式定理,

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=1+\frac{u}{1}\cdot\frac{1}{u}+\frac{u(u-1)}{2!}\cdot\frac{1}{u^{2}}+\cdots\cdots;$$

化簡之得

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=2+\frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)\left(1-\frac{2}{u}\right)}{3!}+\cdots\cdots$$

當 u 爲無限大時,此式的極限值顯然等於下列無限級數的和,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots\text{至無限項,} \tag{3}$$

此無限級數的和，設以 e 代表之。項數儘量多取，我們卽能求得與無限接近的近似值。若我們計算此級數最初七項的和，則得 2.71826。

$$\begin{aligned}
&1+1 &&=2.00000\\
&\frac{1}{2!} &&=0.50000\\
&\frac{1}{3!}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2!} &&=0.16667\\
&\frac{1}{4!}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3!} &&=0.04167\\
&\frac{1}{5!}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4!} &&=0.00833\\
&\frac{1}{6!}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5!} &&=0.00139\\
&\frac{1}{7!}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6!} &&=0.00020\\
\hline
&\text{最初七項之和} &&=2.71826
\end{aligned}$$

的值若取九位小數，應爲

$$e=2.718281828\cdots\cdots$$

這個數，像 $\pi=3.14159265\cdots\cdots$ 一樣，在算學中是一個重要的角色。這兩數量都是不可公約量，只能求其近似值。

現在回到 (2)，此式顯然爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{x}\log e \tag{4}$$

對數取任何底數時，此公式終能成立的。設以 10 爲底數，則 $\log_{10}e$ $=0.43429\cdots\cdots=M$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\log_{10} x)}{dx}=\frac{M}{x} \tag{5}$$

因 $\log_a a=1$〔第 11 節(6)〕，若我們卽取 e 爲對數的底數，則(4)式變爲很簡單的形式，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\log_e x)}{dx}=\frac{1}{x}。 \tag{6}$$

大陸上的作家所用記號甚不一致，有用 L, l, ln, lg 代替『log』與『log nep』者；有用『nat log』或『hyp log』代替『$\log_e$』者。『nep』是拉丁文 Neperian 的簡寫；Neperian 一字從人名 Napier 來的。—— J. Napier 是對數計算的發明者。『hyp log』的來源到後文便知。

例一　設 $y=\log ax^4$，　證 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{x}$。

例二　設 $y=x^n\log x$，　證 $\dfrac{dy}{dx}=x^{n-1}(1+n\log x)$

例三　$2.71828^{n\times 2.3026}=10^n$，這等於有何意義?

答：若 n 爲常用對數則 $n\times 2.3026$ 是自然對數。注意 $e=2.71828$

例四　A. Dupre (1869) 以下列方程式表示一個物質的水汽壓力 p 與絕對溫度 T 的關係，

$$\log p=\frac{a}{T}+b\log T+c。\quad \therefore \frac{d(\log p)}{dT}=\frac{A+BT}{T^2};$$

結果與有名的 Van't Hoff 氏方程式很相像。設 a, b, c, A, B 都是常數,試證 $\dfrac{dp}{dT}=p(A+BT)/T^2$。

一個複雜的函數中間含有多項式的乘積與乘方者,求其微係數時,若先求兩邊的對數,往往可節省許多麻煩。這種聯合的方法稱爲**對數求微係數法** (logarithmic differentiation)。

例一 求 $y=\dfrac{x^n}{(1+x)^n}$ 的微係數。

本例中 $\log y=n\log x-n\log(1+x)$; 或 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{ndx}{x(1+x)}$。

故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{yn}{x(x+1)}=\dfrac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$。

例二 求 $\dfrac{x^4(1+x)^n}{x^3-1}$ 的微係數。

答: $\{(n+1)x^4+x^3-(n+4)x-4\}x^3(1+x)^{n-1}(x^3-1)^{-2}$。

例三 用對數求微係數法,求第 14 節公式 (10)。同樣證明 $d(xyz)=yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$。

例四 設 $y=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$; 證

$$\frac{dy}{dx}=(a^4+a^2x^2-4x^4)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

例五 設 $y=\log\sin x$, 證 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d(\sin x)}{\sin x\,dx}=\cot x$。

例六 x 這數增加時比其對數快多少? 這裏 $\dfrac{d(\log x)}{dx}=\dfrac{1}{x}$。所

以此數增加時比其對數爲快或慢，要看 $x>$ 或 <1 而定。設 $x=1$，則與其增加率相同。若採用常用對數時，則須以 M 代 1($M=0.43429$)。

即 $\frac{d(\log_{10}x)}{dx}=\frac{M}{x}$。

例七　設物質 A 與 B 在化學反應中分子轉變的個數，其關係爲 $A+B=C+D$，且在時間 t，可以方程式表爲

$$\log\frac{b(a-x)}{a(b-x)}=(a-b)kt,$$

此中 k 爲常數，a 與 b 各爲當 $t=0$ 時 A 與 B 分子的個數；試證，時間 t 的反應的速度，比例於其時實有的 A 與 B 的分子個數。

示意：證反應的速度比例於$(a-x)(b-x)$並加解釋。

§19. 求指數函數的微係數 (The Differentiation of Exponential Functions)

一個函數中有以變數爲指數者稱爲指數函數　故 a^x，e^x，$(a+x)^x$ 都是指數函數。對數函數怎樣化爲指數函數的方法，很有說明幾句的必要。設欲化 $\log y=ax$ 爲指數函數。我們記得以 a 爲底數，$\log a$ 爲 1，故此若 $\log_a a$；$\log_{10}10$；$\log_e e$ 去乘任何數量，是不生影響的。故由 $\log_e(e^{ax})=ax\log_e e$；若 $\log_e y=ax$，則可寫爲

$$\log_e y=ax\log_e e=\log_e e^{ax};\quad\therefore\quad y=e^{ax}。$$

以後『log』普遍的代表『$\log_e$』。『e^x』有時寫爲『Exp x』；『e^{-x}』有時寫爲『Exp$(-x)$』

例一　設　$y=e^{\log x}$；證 $y=x$。

例二　設 $\log I=-an$; 則 $I=e^{-an}$

例三　設 $\theta=be^{-at}$; 則 $\log b-\log\theta=at$。

例四　設 $\log_e z=a\theta$; 則 $\log_{10} z=0.4343a\theta$。

例五　設 $\log y_0-\log y=k\ ct$; 則 $y=ye^{-kct}$。

指數函數的微係數的求法，可分三節研究之。

I.　設

$$y=e^x。$$

先求對數，再求微係數，得

$$\log y=x\log e;\quad \frac{dy}{y}=dx,\quad 或\ \frac{dy}{dx}=e^x;$$

換言之，e^x 的微係數就是 e^x 自己，即

$$\frac{d(e^x)}{dx}=e^x。\tag{1}$$

這方程式與上節中方程式 (6) 的面目簡淨就可以知道高等算學中幾乎完全採用自然對數的理由。

II.　設

$$y=a^x$$

同上，先求對數再求微係數，可得

$$\log y=x\log a;\quad \frac{dy}{dx}=y\log a;\quad \therefore\ \frac{d(a^x)}{dx}=a^x\log a。\tag{2}$$

以言語表之，一個常數的指數為變數，其微係數等原式乘以此常數的對數。

III. 設

$$y=x^z。$$

此中 x 與 z 都是變數。先求對數，再求微分。

$$\log y=z\log x;\quad \frac{dy}{y}=\log x\, dz+\frac{zdx}{x};$$

$$\therefore\quad dy=x^z\log x\, dz+zx^{z-1}\, dx \tag{3}$$

若 x 與 z 為 t 的函數，可得

$$\frac{d(x^z)}{dt}=\frac{dy}{dt}=x^z\log x\frac{dz}{dt}+zx^{z-1}\frac{dx}{dt}。 \tag{4}$$

例一　在時間 t，一種物質在化學反應中轉變的總量 x，已知為 $x=ae^{-kt}$，此中 a 代表反應開始時物質的總量，試證反應的速度比例於物質轉變時所有的總量。

示意：　證 $\frac{dx}{dt}=-kx$，再加解釋。

例二　設　$y=(a^x+x)^2$，則 $\frac{dy}{dx}=2(a^x+x)(a^x\log a+1)$。

例三　設 $y=a^{nx}$，則 $\frac{dy}{dx}=na^{nx}\log a$。

例四　水汽壓力與溫度的關係，按照 Magnus 的經驗公式為

$$p=ab^{\frac{\theta}{\gamma+\theta}};\quad \therefore\quad \frac{dp}{d\theta}=\frac{a\gamma\log b}{(\gamma+\theta)^2}\cdot b^{\frac{\theta}{\gamma+\theta}},$$

此中 a，b，γ 為常數。此徵係數代表相當於溫度小有增加〔略如從 θ° 至 $(\theta+1)^\circ$〕時壓力的增加量。

例五　水汽壓力 p 與温度 θ 的關係，按照 Biot 的經驗公式爲

$$\log p = a + b\alpha^{\theta} - c\beta^{\theta};$$

試證　$$\frac{dp}{d\theta} = pb\ \alpha^{\theta}\log\alpha - pc\ \beta^{\theta}\log\beta。$$

例六　一點依照方程式 $y = ae^{-\lambda t}\cos 2\pi(qt+\epsilon)$ 而運用，求其速度。因速度即 $\frac{dy}{dt}$，故答 $-ae^{-\lambda t}\{\lambda\cos 2\pi(qt+\epsilon) + 2\pi q\sin 2\pi(qt+\epsilon)\}$。

例七　連續兩個單分子反應 (unimolecular reaction) 所生成的物質總量 x 與時間 t 的關係，或云在時間 t，鐳射氣或釷射氣 (radium emanation or thorium emanation) 的被激放射性 (excited radioactivity) 的強度，可用下表之，

$$x = 1 + \frac{k_2}{k_1-k_2}e^{-k_1 t} - \frac{k_1}{k_1-k_2}e^{-k_2 t},$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt} = \frac{k_1 k_2}{k_1-k_2}\left(e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t}\right),$$

此中 k_1 與 k_2 爲常數。說明後式表示變化的速度。

例八　粘滯係數各爲 A, B, C,……… 的物質的濃度各爲 x, y, z,……… 混合成非電解液 (nonelectrolyte) 其粘滯性爲 η，則 $\eta = A^x B^y C^z$………證明若 x, y, z………有小的變化時 $d\eta$ 變爲 $\eta(a\,dx + b\,dy + c\,dz)$，此中 $\log A = a$, $\log B = b$, $\log C = c$。

示意：　先求對數，再求微分。

§ 20. 自然界的『複利律』(The "Compound Interest Law" in Nature)

講到函數 e^x，我們不能不提出牠在物理變化中的重要性。從上節的方程式，可得

$$\text{設}\quad y=Ce^{ax};\qquad \text{則}\ \frac{dy}{dx}=be^{ax}. \tag{1}$$

此中 a，b，C 爲常數，$b=aC\log e$。C 爲 $x=0$ 時 y 的值，何故？在後文將要證明某種情形之下，這運算可以逆做過去，即

$$\text{設}\quad \frac{dy}{dx}=be^{ax},\qquad \text{則}\ y=Ce^{ax}, \tag{2}$$

此中 a，b，C 仍爲常數。所有這些結果表示函數 e^x 的增加率就是 e^x 自己。所以，在任何物理的研究中，我們若發見一個函數，如 y，其變化率比例於自己（或有常數項或無均可）我們立能猜到所研究者爲指數函數。故此，

$$\text{若}\quad \frac{dy}{dx}=\pm\ ay;\ \text{我們可寫爲}\ y=Ce^{ax}\ \text{或}\ Ce^{-ax}, \tag{2a}$$

若函數的數量是增加的則爲正，是減少的則爲負。

借出的款項，按複利生息，就是這種情形；此性質 Lord Kelvin 很得意的稱爲『複利律』(大英百科全書，"Elasticity" 條，1877)。許多許多自然現象有此性質。下列者是值得一讀的。

說明一 複利。設借出 £100，年利率 5%，在第一年末則有本利和 £105。若以此爲第二年的本金，此時非但 £100 生息即是加上去的 £5 也有利息。寫成普遍形式，令 £p_0 爲本金，年利 r%，在

第一年末，利息爲 $\frac{r}{100}p_0$，本利和爲 $p_0+\frac{r}{100}p_0$，設以此爲第二年本金稱之爲 p_1 則

$$p_1=p_0\left(1+\frac{r}{100}\right);$$

在第二年末，

$$p_2=p_1\left(1+\frac{r}{100}\right)=p_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2。$$

這樣年復一年的繼續下去，本金逐年增加，其利息亦年年加大，直到 t 年之末，

$$p=p_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \tag{3}$$

例　本金 £ 500 年利複利 5%，10 年後的本利和有多少？利息每年末加入本金。從 (3) $\log p=\log 500+10\log 1.05$；　$\therefore\ p=$ £ 814，8s.。

我們不必每十二個月以利息加入本金一次，我們亦可每月，每星期，每日，每小時……以利息加入本金一次。若自然界是銀行家，他就不以利息加入本金每年一次，而是刻刻繼續不斷的在那裏加入。自然是連續不斷的。我們可以想像，爲要與自然現象比較，這種手續已經着手做了，我們在儘量求與自然界所實際發生者無限接近的近似值。第一步的接近爲以利息每個月加入本金一次。這可用同上的方法證明在十二個之末，本金應爲

$$p=p_0\left(1+\frac{r}{12\times100}\right)^{12}。\tag{4}$$

進一步若我們假定在整個一年中，利息每剎那（算牠每年有 n 剎那）在加入本金，則 (4) 式中的 12 必須易以 n，

$$p=p_0\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{n}\tag{5}$$

為便於計算，我們令

$$\frac{r}{100\,n}=\frac{1}{u},\quad \therefore\quad n=\frac{u\,r}{100}。$$

從(5)與第 11 節(11)

$$p=p_0\left\{\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\}^{\frac{r}{100}}。$$

但已在第 18 節(3)證明 $\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}$ 當 u 為無限大時其極限為 e；故寫 $\frac{r}{100}=a$ 則

$$p=p_0e^{a}\;；$$

這是代表當利息刻刻加入本金時，一年末所實得的本利和。從 (3)，則 t 年末的本利和，應為

$$p=p_0\,e^{at};\quad 或\quad p=p_0\,e^{\frac{r}{100}t}\tag{6}$$

例　本金 £ 500，年利率 5%，10 年後的本利和若干；(1) 每年計算複利一次，(2) 刻刻在計算複利；比較兩者的結果。第一種情形

用公式 (3)； 第二種用公式 (6)。 前者得 $p=£\ 814$, 8s.； 後者得 $p=£\ 824$, 7s.。

說明二　牛頓的冷卻定律。設一個物體有均勻的溫度 θ_1，高出其周圍的溫度，欲求此物體冷卻的速率。設 θ_0 爲此物體周圍媒介物的溫度。熱的交換使此物體的溫度漸由 θ_1 降至 θ_0。 設 t 爲此物體從溫度 θ_1 降至 θ 所須的時間。此時物體的溫度高出其周圍 $\theta-\theta_0$。我們現在最可能的猜度卽爲物體失熱的速度$(-dQ)$。比例於其與周圍溫度之差。故

$$-\frac{dQ}{dt}=k\ (\theta-\theta_0),$$

此中 k 爲常數隨物體的性質而定。

從比熱的定義，設 s 表單位質量的物質的比熱。

$$Q=s(\theta-\theta_0),\quad \text{或}\quad dQ=sd\theta。$$

代入上式。因 $\frac{k}{s}$ = 常數 = 設爲 a，　又　$\theta_0=0^0$ C.，可得。

$$-\frac{d\theta}{dt}=a\theta, \tag{7}$$

以言語表之，一個物體冷卻的速度比例於其與周圍溫度之差。這是牛頓冷卻定律大概的形式，但這還不能十分表示牛頓的意思 (Phil. Tras. 22; 827; 1701)。

因 θ 的減少率比例於 θ 自己，我們立刻想到這是合於複利律，我們以 (1) 與 (2a) 作一比較，卽得

$$\theta=be^{-at}, \tag{8}$$

或 $$\log b-\log\theta=at,\tag{9}$$

設 θ_1 與 θ_2 各爲時間 t_1 與 t_2 的溫度，可得

$$\log b-\log \theta_1=at_1 \text{ 與 } \log b-\log \theta_2=at_2。$$

兩式相減，可求得常數 a 爲

$$a=\frac{1}{t_1-t_2}\log\frac{\theta_2}{\theta_1}\tag{10}$$

試驗本節爲求簡單化而立的假定：『物體失熱的速度 $(-dQ)$ 比例於其與周圍溫度之差』，是否可用，必須以 (10) 所表之結果與實驗的結果相比較。若從假定而推得的邏輯的結果與事實相符合，則有充分的理由可以作爲所用的假設是正確的。欲作比較，我們可以採用 A. Winkelmann 在雜誌 Wied. Ann. 44; 177; 429; 1891 所發表的材料：從溫度 19.9° C. 至 0° C. 物體的冷卻速度。

設物體經過時間 t_1-t_2 後其溫度爲 θ，又 $\theta_2=19.9°$，$\theta_1=0$，記着在實用問題中是採用常用對數的，從(10)可得

$$\frac{1}{t_1-t_2}\log_{10}\frac{\theta_2}{\theta}=\text{常數，設爲 } k。$$

Winkelmann 的材料：θ 與 t_1-t_2 列成下表：

θ	t_1-t_2	k（計算而得）
18.9	3.45	0.006490
16.9	10.85	0.006540
14.9	19.30	0.006511
12.9	28.80	0.006537
10.9	40.10	0.006519
8.9	53.75	0.006502
6.9	70.95	0.006483

故在實驗差誤所允許的小小不規則變動之範圍以內，k 是常數。故在 Winkelmann 量測方法上偶有的差誤的範圍之內，我們的假定是正確的。

以上是一個標準的例說明怎樣去試驗從假設而依據邏輯所得結論的正確與否。還有其他方法。例如 Dulong 與 Petit (Ann. Chim. Phys., [2], 7; 222; 337; 1817) 曾經做過一組確切的量測工作，如下表第一第二行所示：

θ 物體高出其媒介物的溫度	V 冷却速度 $=\dfrac{d\theta}{dt}$			
	觀測的值	從公式計算的值		
		Newton	Dulong 與 Petit	Stefan
220°	8.81	6.82	8.97	8.95
200°	7.40	6.20	7.41	7.44
180°	6.10	5.58	6.06	6.11
160°	4.89	4.96	4.91	4.95
140°	3.88	4.34	3.92	3.94
120°	3.02	3.72	3.08	3.05
100°	2.30	3.10	2.35	2.30

我們若能知道公式 (7) 中常數 a 的數值，則可由這公式計算，θ 爲任何已知值時 $\dfrac{d\theta}{dt}$ 的值。求 a 的值，可將 V 與 θ 的觀測值逐一代入公式(7)，然後取所得各結果的平均數。這樣得 $a=0.031$. 第三行的數字是假定 Newton 的定律爲正確而計算得的冷卻速度。實驗與理論很難相符。故此必須對眞實的定律，求進一步的接近。Dulong

與 Petit 根據這個目的提出

$$V=b(C^{\theta}-1), \tag{11}$$

是進一步的接近。此式中 $b=2.037$; $c=1.0077$。第四行卽從 Dulong 與 Petit 定律計算所得的冷卻速度。理論與事實現在很是接近。可惜這公式是沒有理論的基礎。不過是猜度的結果。Stefan 又提出

$$V=a\{(273+\theta)^4-(273)^4\}, \tag{12}$$

此中 $a=10^{-11}\times16\cdot72$。計算結果列在第五行,達到 Dulong 與 Petit 相同的圓滿程度。Galitzine 已經指出 Stefan 的公式可根據理論而建立的。

這是常有的事,幾個不同的公式,在我們可以試驗的範圍以內,都與事實同樣的相符。所以讀者必須注意對於這批評標準的迷信,不要因觀測與計算結果之符合,就着起實驗不誤之謎來。

Lord Kelvin 有次認爲在電池中元素的化學作用,其熱能全部轉變爲電能。Joul 與他自己量測 Daniell 電池的結果,是與理論相符合。這種符合後來證明是虛妄的。事實能解釋得成功並不能證明假設的可用,正如 Leibnitz 說的,『錯誤的前提也有推得正確的結論的可能』。

稍加思索卽能知道,從實驗本身而求出上項常數的數值來,才是十分合法的。例如我們可從上文 Winkelmann 的表求 k 的平均數,然後比較 t_2-t_1 或 θ 的計算値與觀測値而作爲試驗。

例一 再摘錄 Winkelmann 的論文,設周圍媒介物的溫度爲 $99.74°$ 時,物體如下冷卻:

$\theta=119.97°,\ 117.97°,\ 115.97°,\ 113.97°,\ 111.97°,\ 109.97°;$

$t=\ 0\ ,\ 12.6\ ,\ 26.7\ ,\ 42.9\ ,\ 61.2\ ,\ 83.1$ 。

你以爲 Newton 的定律可從這些量測的結果而證果麽?

示意: 本例中 θ_0 必須保留不必令 $\theta_0=0$。這樣，然後證其結果必須用公式

$$\frac{1}{t_2-t_1}\log_{10}\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1-\theta_0}=\text{常數}$$

而試驗之。

例二 設一杯咖啡在 10 分鐘前最出室內溫度 80°，而現在高出室內溫度 70°，一點鐘後這杯咖啡的溫度怎樣?假定採取 Newton 冷卻定律。

答: 高出室內溫度 31.2°。

示意: 從公式 (8) $70=80\,e^{-10a}$; $\therefore\ a=0.0134$; 又得 $x=80\,e.^{-0.0134\times 70}$。在我們尚未學到一些較深的方法之前(參閱第 120 節14，15 題)不能採用 Dulong 與 Petit，或 Stefan 所修正的定律。

說明三 大氣壓力隨着超出海平面的高度而變化，也可證其是合於複利律的。設海平面上壓力的水銀柱 p_0 厘米，超出海平面 h 處壓力爲 p。又設空氣在海平面的密度爲 ρ_0; (Hg=1)。則海平面的壓力由積於其上的空氣重量而生，卽密度爲 ρ_0，高爲 h 的空氣柱的重量。這重量等於 $h\rho_0$。假使空氣向下壓力是不變的，則離海平面每升高一厘米，氣壓計上的壓力將減少 ρ_0 厘米。但根據 Boyle 定律空氣密度減少比例於壓力，設 ρ 代表超出海平面 dh 處的密度，壓力 dp 如

下式所示，

$$dp = -\rho \ dh。$$

若我們以空氣作爲由極薄的層，堆積而成的，則在每層中可以認爲空氣的密度是一定的。從 Boyle 定律

$$\rho \ p_0 = \rho_0 \ p; \quad 或 \ \rho = \frac{\rho_0 \ p}{p_0}。$$

以 ρ 代入前式得

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\rho_0 p}{p_0}。 \tag{13}$$

負號的意義，表示垂直而上時壓力降低。這個方程式不過是複利律着上另一件外套。壓力的變化，在我們高昇或低落時，是比例於壓力自己。因 $\frac{\rho_0}{p_0}$ 只是一個常數，故寫(13)爲複利律的公式的形式卽爲

$$p = 常數 \times e^{-\frac{\rho_0}{p_0}h}。$$

我們只須注意，在海平面 $h=0$; $e^0=1$; $p=常數\times e^0=p_0$。卽易求得式中的常數。代入上方程式。得

$$p = p_0 \ e^{-\frac{\rho_0}{p_0}h}。 \tag{14}$$

這公式稱爲 Halley 定律。續閱第 89 節例題 (2)。

說明四　吸收介質當光線經過時吸收光能的作用。經過一層厚爲 dl 的吸收介質光線,的強度 I 改變的量爲 dI，可用下式表之，

$$dI = -a \ Idl,$$

此中 α 是常數,隨吸收介質的性質與光的波長而定。所以光的強度的變化率比例於光的強度自己,換言之,又是複利律的再見。故

$$\frac{dI}{dl}=-\alpha I;\quad \text{或}\quad I=\text{常數}\times e^{-\alpha l}$$

設 I_0 為入射光的強度,則當

$$l=0,\ I=I_0=\text{常數}$$

故經過厚為 l 的介質光的強度為

$$I=I_0\ e^{-\alpha l}\tag{15}$$

例一 一層 1.006 厘米厚的氯化銅溶液(每竔含氯化銅 2.113 克分子量)在光譜的 $\lambda=551$ 到 554 處吸收光 18.13%。經過一層 7.64 厘米厚的相同溶液時將吸收多少 %?

答: 78.13%。

示意: 從第一組觀測結果 $I_0=100$, $I=81.87$,求(15) 中的 α;可得 $\alpha=0.1989$。參閱 T. Ewan 氏論文:幾種銅鹽水溶液的吸收光譜(Phil. Mag. [5], 33; 317; 1892)。用附錄二,第 IV 表。

例二 一個玻璃盤吸收入射光的 2%。經過一打同樣玻璃的盤還有多少光射出?

答: 78.66%

示意: $I_0=100$; $I=98$; $\alpha=0.02$。用附錄二第 IV 表。

說明五 化學反應的速度的 Wilhelmy 定律。Wilhelmy 在 1850 年發表質量作用定律,其形式又是無往而不在的複利律的另一個例。『在已知時間内,化學變化的量正比例於參與變化的物質的量』。

設 x 爲在變化中的物質的量， dx 爲時間 dt 內物質變去的量，則此定律的外貌爲

$$\frac{dx}{dt}=-kx$$

此中 k 爲常數，隨發生作用的物質的性質而定。k 稱爲反應速度的係數。其意義，用第 10 節的方法很易求得。此方程式恐爲本節所見各方程式中之最簡單者。因 x 的增加率比例於 x，故

$$x=be^{-kt},$$

此中 b 是常數；其數值，只要我們能知 $t=0$ 時 x 的值，卽能決定。負號是表示歷時愈久，作用的速度愈減。

例一 設體積 v 的水銀，加熱至溫度 θ，相當於溫度的增加量 $d\theta$，體積的變化 dv 發見是比例於 v 的，故 $dv=avd\theta$。證明 Bosscha 公式，$v=e^{a\theta}$，所表示任何溫度 θ 時水銀的體積。

答： $v=be^{a\theta}$，此中 a，b 爲常數。若在溫度 $0°$ 時水銀爲單位體積則 $b=1$；卽得所求之結果。

例二 依照 Nordenskjöld 的可溶性定律：不在過飽和狀態，當溫度有小變化 $d\theta$ 時，鹽的可溶性的變化，ds，比例於溫度 θ 時溶液中含有鹽 s 的總量，或可寫爲 $ds=as\,d\theta$，此中 a 爲常數。證明表示鹽在溶液中溶解量與溫度的關係，爲方程式 $s=s_0\,e^{a\theta}$，此中 s_0 爲鹽在溫度 $0°$ 時的可溶性。

例三 若容電器中的介質受到電位之差，則電荷的密度 ρ 作一定的減少，依照方程式 $\rho=be^{-at}$，此中 b 是經驗常數；a 是常數等

於介質導電係數 c 的 4π 倍，乘以時間 t，再除以介質常數 μ；卽 $a=\dfrac{4\pi ct}{\mu}$。證明容電器的逐漸放電是合於複利律的。

答：可證 $\dfrac{d\rho}{dt}=-a\rho$。

例四　表示飽和水汽的壓力，p，與溫度的某種極限 θ; Dalton 經驗定律的一種形式爲 $p=ae^{\theta}$。證明這是複利律的一個例。

例五　某種化學反應的速度 V 與溫度 θ° 的關係爲 $\log V=a+b\theta$。此中 a，b 爲常數。證明我們所述者爲複利律。若反應（如氫與氧）在溫度（如 500°）時發生，總之不是平常的溫度，這個定律將有何種結論？

例六　放射性的元素的變化率爲 $\dfrac{dN}{dt}=-rN$ 此中 N 爲在時間 t 時所有的原子數，r 爲常數。證明放射性變化的定律是合於複利律的。

§ 21. 求高級微係數法 (Successive Differentiation)

含有一個變數的函數，其微係數或爲此變數的另一函數或爲常數。欲得二級微係數可將此新函數再求微係數。同樣的方法，可得三級或高級的微係數。故設 $y=x^3$，

$$一級微係數爲 \frac{dy}{dx}=3x^2;$$

$$二級微係數爲 \frac{d^2y}{dx^2}=6x;$$

$$三級微係數爲 \frac{d^3y}{dx^3}=6\ ;$$

四級微係數爲 $\frac{d^4y}{dx^4}=0$ 。

我們見到每次求微係數時，將指數減少 1，若指數 n 爲正整數，微係數的個數是有限的。

在記號 $\frac{d^2}{dx^2}(y)$；$\frac{d^3}{dx^3}(y)$；………中，2，3，………不過指明重複求微係數的次數。若用微分記法，可寫成

$$d^2y=6x\cdot dx^2;\quad d^3y=6dx^3;\ \cdots\cdots$$

記號 dx^2，dx^3………意思是 $dx\cdot dx$；$dx\cdot dx\cdot dx$，………；與 dx^2，dx^3………的另一意義須分別清楚，如 $dx^2=d(x^2)=2xdx$；$dx^3=d(x^3)=3x^2dx$………。高級微係數有時會循環起來；例如，求

$$y=\sin x$$

的微係數，累次求之，得

$$\frac{dy}{dx}=\cos x;\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x;\ \frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x;\ \frac{d^4y}{dx^4}=\sin x;\cdots\cdots$$

四級微係數即爲原來函數的再現，求微係數的手續這樣繼續下去是沒有盡頭的，每隔四級作一循環。這種重複循環，最簡的例爲

$$y=e^x,$$

此時

$$\frac{dy}{dx}=e^x;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^x;\quad \frac{d^3y}{dx^3}=e^x;\ \cdots\cdots$$

所有各級的微係數都等於原來的函數，因此各自相等。

例一　設 $y=\log x$；　證 $\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{6}{x^4}$。

例二　設 $y=x^n$；　證 $\frac{d^4y}{dx^4}=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$。

例三　設 $y=x^{-2}$；　證 $\frac{d^3y}{dx^3}=-24x^{-5}$。

例四　設 $y=\log(x+1)$；證 $\frac{d^2y}{dx^2}=-(x+1)^{-2}$。

例五　證明在 $y=\cos x$ 的各級微係數中每隔四級，作一循環。

如 x 關於 t 的一級微係數可以作爲速度的量數；x 關於 t 的二級微係數可以作爲加速度的量數（見第 7 節）。例如，若一個質點❶ P，在直線 AB（圖八）上運動，牠與定點 0 的距離爲方程式 $s=a \sin t$，此中 a 代表 OA 或 OB 的距離，證明由作用於此質點上的力而生的加速度比例於其與定點的距離。速度 V 顯然爲

圖　八

$$V=\frac{ds}{dt}=a \cos t; \tag{1}$$

加速度 F 爲

$$F=\frac{dV}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=-a \sin t=-s, \tag{2}$$

負號表示這是一種吸引的力欲使動點與 O 的距離縮短。用附錄一第 XIV 表與上之(1)(2)兩式可求出一組 F, s, V 的相當值，從此對於

❶ 質點是一種假設，爲便於計算，在實用算學上用得很多，正像化學中的原子。但一個原子可以含有無限個的質點。

這個運動可以得到些概念。計算的結果如下表。

設 $t=$	O	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$V=$	a	o	$-a$	o	$a\cdots\cdots$
$s=$	o	a	o	a	o$\cdots\cdots$
$F=$	o	$-a$	o	$-a$	o$\cdots\cdots$
P 點在	O	B	O	A	$O\cdots\cdots$

細察這些事實可知這點 p 在直線上 O 之左右往復運動。這樣說來，方程式$\frac{d^2s}{dt^2}=-s$ 敍述這點的運動狀態。故稱爲**運動方程式**(Equation of Motion)。一個方程式如$\frac{ds}{dt}=a\cos t$ 或 $\frac{d^2s}{dt^2}=-s$，其中含有微分或微係數者稱爲**微分方程式** (Differential Equation)。

例一　設有物體按照定律 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 而垂直落下，式中 g 表示由於地心引力的加速度，證 g 爲 s 關於 t 的二次微係數。

例二　時間 t 內一個動點所經的距離以方程式 $s=at^2+bt+c$ 表之，其中 a, b, c, 爲任意常數，證明其加速度是常數。

例三　實驗中證明一個物體從 s 高處下落可得到的速度 V 如下式： $V^2=2g\,(s^{-1}-s_0{}^{-1})\,r^2$，其中 g 地心引力的加速度，r 爲地球半徑。證明物體的加速度反比例於與地心距離的平方(Newton 定律)。

示意： 求方程式兩邊的微分，再各除以 dt，簡單之，得$\frac{ds}{dt}$，於是 $\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{gr^2}{s^2}$。再證若一個物體從無限高處自由落下，到達地面時

所得最大速度，略去空氣阻力不算，不出每秒七哩。在原方程式中 s_0 爲 ∞，$s=r=3,962$ 哩；$g=32\frac{1}{6}$呎 $=0.00609$。

答：6.95 哩。

例四 證明距某定點 $s=a\cos qt$ 處，一點的運動可用方程式 $\frac{d^2s}{dt^2}=-q^2s$ 表之。

例五 De la Roche 的水汽壓力公式爲 $p=ab^{\frac{\theta}{m+n\theta}}$，此 a，b，m，n 爲常數，證其一級與二級微係數各爲 $\frac{dp}{d\theta}=\frac{m\log b}{(m+n\theta)^2}ab^{\frac{\theta}{m+n\theta}}$；

$$\frac{d^2p}{d\theta^2}=\frac{m\log b\{m\log b-2n(m+n\theta)\}}{(m+n\theta)^4}ab^{\frac{\theta}{m+n\theta}}$$

幸而，微積學在實用問題上，只有一級與二級微係數是常常用到的，三級四級用得很少。計算高級微係數可說是一個費事的方法。Leibnitz 定理可以使我們在運算上簡便些。並且給我們一個函數的任何級（或謂 n 級）微係數，在研究微分學的理論時極有用處。這裏作爲一個各級微係數求法的練習看待。Leibnitz 定理的直接目標在於求兩個 x 的函數之積的 n 級微係數，以各函數的微係數表之。

在第 14 節中，知道兩個變數之積的微係數爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx},$$

此中 u, v 爲 x 的函數。求各級微係數且與二項式定理相對比，可證

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n}=v\frac{d^nu}{dx^n}+n\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+u\frac{d^nv}{dx^n} \tag{1}$$

讀者須自行證明此公式，作爲練習，可以按次求 $\frac{d^2(uv)}{dx^2}$; $\frac{d^3(uv)}{dx^3}$; ……與 $(x+h)^2$; $(x+h)^3$……比較之。

例一　設 $y=x^4e^{ax}$，求 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 的值。

以 x^4，與 e^{ax} 各代入公式(1)的 v 與 u 中。即

$$v=x^4;\quad\therefore\quad\frac{dv}{dx}=4x^3;\quad\frac{d^2v}{dx^2}=12x^2;\quad\frac{d^3v}{dx^3}=24x;$$

$$u=e^{ax};\quad\therefore\quad\frac{du}{dx}=ae^{ax};\quad\frac{d^2u}{dx^2}=a^2e^{ax};\quad\frac{d^3u}{dx^3}=a^3e^{ax}.$$

從(1)得

$$\frac{d^3y}{dx^3}=v\frac{d^3u}{dx^3}+n\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}\cdot$$

$$\frac{du}{dx}+u\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{d^3v}{dx^3};$$

$$=e^{ax}\left(a^3v+3a^2\frac{dv}{dx}+3a\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^3v}{dx^3}\right); \tag{2}$$

$$=e^{ax}(a^3x^4+12a^2x^3+36ax^2+24x).$$

例二　設 $y=\log x$，證 $\frac{d^6y}{dx^6}=-\frac{5!}{x^6}$。

我們假使暫時以(2)中$\frac{d}{dx}$;$\left(\frac{d}{dx}\right)^2$; $\left(\frac{d}{dx}\right)^3$, 等運算記號作爲是運算的數量,有代數學上的意義,則可寫爲

$$\frac{d^3(e^{ax}v)}{dx^3}=e^{ax}\left(a+\frac{d}{dx}\right)^3v=e^{ax}(a+D)^3v, \tag{3}$$

式中以 D 代 $\frac{d}{dx}$。$(a+D)^3$ 假使用二項式定理展開; 然後以 $\frac{dv}{dx}$; $\frac{d^2v}{dx^2}$; $\frac{d^3v}{dx^3}$;……… 代 Dv; D^2v; D^3v;………。方程式(3)仍能成立, 若以任何整數 n 代替 3。這結果稱爲 Leibnitz 定理的記號形式。

§ 22. 偏微係數的求法 (Partial Differentiation)

直到現在爲止, 我們所研究者主要的只是一個自變數 x 的函數, 如

$$u=f(x);$$

但函數有時可含有兩個或兩個以上的變數, 如

$$u=f(x, y, z\cdots\cdots),$$

其中 x, y, z, ………等互相獨立。這種函數是很普通。例如三角形的面積隨其底與高而定; 長方體的體積隨其長,闊,高而定; 氣體的體積隨其溫度與壓力而定。

I. 偏微分

求兩個自變數的函數的微分。最好用下列方法求之,一面是圖解; 一面是解析。在圖九中,長方形 $ABCD$ 的兩邊各爲 x, y, 其面積 u 爲函數

$$u=xy。$$

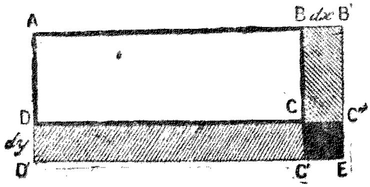


圖 九

因 x 與 y 互相獨立，可以假定一個變化時，另一個留着不變。故函數會有兩個微係數，一由 x 的變化而得，一由 y 的變化而得。

第一，設 x 邊變化而 y 不變。則面積僅爲 x 的函數。此時 y 爲常數。

$$\therefore \quad (du)_y = y\ dx \tag{1}$$

此中 $(du)_y$ 代表長方形 $BB'C''C$ 的面積。在下角所註的 y 表示此時 y 爲常數。

第二，同樣的方法，假定 y 邊變化而 x 不變，則

$$(du)_x = x\ dy, \tag{2}$$

此中 $(du)_x$ 代表長方形 $DD'C'C$ 的面積。不用這些變數的微分形式，我們亦可寫爲微係數

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_y = y; \quad 與\left(\frac{du}{dy}\right)_x = x; \quad 或\frac{\partial u}{\partial x} = y; \quad 與\frac{\partial u}{\partial y} = x。$$

後者是 C. G. J. Jacobi 的記法，其中$\left[\!\left[\frac{\partial}{\partial x}\right]\!\right]$這記號表示除 x 外其餘變數都作爲常數而求微係數。這裏 x，與 y 的值代入 (1) 與(2)，得

$$(du)_y = \frac{\partial u}{\partial x}dx; \quad (du)_x = \frac{\partial u}{\partial y}dy。$$

最後，若許 x 與 y 同時變化，長方形面積的總增加量顯然可用圖中 $D'EB'BCD$ 代表之。

$$\text{Incr. } u = BB'CC'' + DD'CC' + CC'C''E$$

$$=y\ dx\ +x\ dy+dx\ dy。$$

略去第二級的無限小數量，則得

$$du=y\ dx+x\ dy; \tag{3}$$

或

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{4}$$

也可寫爲

$$du=\left(\frac{du}{dx}\right)_y dx+\left(\frac{du}{dy}\right)_x dy。 \tag{5}$$

方程式 (3) 與 (4) 中，du 稱爲函數的**全微分** (Total Differential)；$\frac{\partial u}{\partial x}dx$ 稱爲當 y 爲常數時 u 關於 x 的偏微分；$\frac{\partial u}{\partial y}dy$ 稱爲當 x 爲常數時 u 關於 y 的偏微分。故得規則：含有兩個（或兩個以上）變數的函數的全微分等於牠們的偏微分之和。

這規則在物理上的意義是在任何時刻作用於一個物體上的合力等於各分力之和。當幾個力作用於一個質點時，每個產生出自己的運動與其餘的各不相關；這個質點的實在速度稱爲合速度，各個力所產生的作用稱爲分速度。這裏含有一個重要的原理——**各種不同的作用互相獨立的原理或各種不同的作用共同存在的原理**——這是物理的與化學的動力學的基礎。這原理可以說明之如下：

在任何系統中，當許多變化同時發生時，每個變化的進行似與其他無關；總變化等於各個獨立變化之和。換言之，全微分等於代表各個變化的偏微分之和。故此算學的方法與物理的變化很相應。

取一簡單的例，一人每小時能游泳二哩；河流的速度爲每小時一哩。若此人順流而游則河流每小時可以帶他一哩同時他自己又能游前

二哩。故此人實際的進程爲每小時三哩。若此人逆流而游，則其實際速度等於他游泳速度與河流速度之差，即他每小時只能游前一哩了。

這是說當 x 與 y 都在變化時 u 的總變化可以分作兩部份：(1)若 x 單獨變化時 u 所發生的變化；(2)若 y 單獨變化時 u 所發生的變化。

總變化＝因 x 單獨變化而發生的變化＋因 y 單獨變化而發生的變化。

若能注意於

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

的各項的意義，卽知此方程式實爲微分的記法，而不是微係數的記法。偏微係數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示：y 爲常數，當 x 增加 ∂x 時 u 的變化率；同樣 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 表示：x 爲常數，當 y 增加 ∂y 時 u 的變化率。變化率 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 乘以 dx 卽得 y 爲常數，當 x 增加 dx 時 u 的增加量；同樣，$\frac{\partial u}{\partial y}dy$ 爲 x 爲常數當 y 增加 dy 時 u 的增加量。

例一　設 $u=x^3+x^2y+y^3$，

則 $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+2xy$； $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+3y^2$； $\therefore\ du=(3x^2+2xy)dx+(x^2+3y^2)dy$。

例二　設 $u=x\log y$；則 $du=\log y\,dx+\frac{x}{y}dy$。

例三　設 $u=\cos x\sin y+\sin x\cos y$；

則 $du=(dx+dy)(\cos x\cos y-\sin x\sin y)=(dx+dy)\{\cos(x+y)\}$。

例四 設 $u=x^y$；則 $du=yx^{y-1}\ dx+x^y\log\ x\ dy$。

例五 求含有三個自變數的函數的微係數，留給讀者作爲練習。三個向度各爲變數 x，y，z 的平行六面體，其體積 $u=xyz$；略去高次無限小量，則得，

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{6}$$

卽是此立體的體積的無限小增加量等於每個變數獨立變化時所產生的無限小增加量之和。證明

$$du=yz\ dx+xz\ dy+xy\ dz \tag{7}$$

例六 若氣體的壓力 p，體積 v，溫度 θ 間的關係已知爲氣體定律 $pv=RT$，證明若體積與溫度同時變化，則壓力的總變化爲

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta=-\frac{RT}{v_2}=-\frac{p}{v};\ \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\frac{R}{v}=\frac{p}{T};\quad\therefore\ dp=-\frac{p}{v}dv$$

$+\frac{p}{T}dT$。此式只有在 dT 與 dv 爲無限小的變化時，方才正確。dp 的觀測值與計算值列於下表（錄自 J. Perry's The Steam Engine, London, 564, 1904)，證明卽在 dv 與 dT 相當的大時觀測值與計算值還可相符，不過 dv 與 dT 的值愈小，則差誤亦愈小。

T	dT (T 的差)	v	dv (v 的差)	p (觀測值)	dp 計算值	dp 觀測值
500	——	14.4	——	2000	——	——
501	1.0	14.5	0.1	1990.2	−9.8	−9.9
500.1	0.1	14.41	0.01	1999.2	−1.0	−0.90
500.01	0.01	14.40	0.001	1999.9	−0.1	−0.10

例七 在地球面上各緯度 L 與超出平均（每平面各高度 H 處，地心引力 g 按 Clairant 公式，

$$g=980.6056-2.5028\cos 2L-0.000003\,H$$ 達因。

討論當地點變換時，地心引力的變化與物質重量的變化。注意『重量』不過是地心引力的量數而已。

II. 偏微係數

求含有兩個變數的函數的微係數。設變數 x 與 y 都是 t 的函數我們可以兩邊除以 t 直接從微分而求微係數，如

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt},$$

也可以寫爲

$$\frac{du}{dt}=\left(\frac{du}{dx}\right)_y\frac{dx}{dt}+\left(\frac{du}{dy}\right)_x\frac{dy}{dt}。\tag{8}$$

以言語表之，則爲含有變數 x 與 y 的函數的總變化率等於『y 爲常數時此函數的偏微係數乘以 x 的變化率』與『x 爲常數時此函數的偏微係數乘以 y 的變化率』之和。當變數變化時此函數爲常數則其總變化率爲 0，卽

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0。\tag{9}$$

這種的例不久卽能見到。

以那些變數作爲常數若會發生疑義時，可將這些常數註在括弧的右下角，只有在不生疑義時可以省去。例如$\frac{\partial C_v}{\partial T}$可有下列三種意義。

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial T}\right)_v;\ \left(\frac{\partial C_v}{\partial T}\right)_p;\ \left(\frac{\partial C_v}{\partial T}\right)_\phi。$$

Perry 提議可用下列幾種寫法，

$$\frac{\partial C_v}{\partial_v T}\ ;\quad \frac{\partial C_v}{\partial_p T}\ ;\quad \frac{\partial C_v}{\partial_\phi T}。$$

u 關於 x，y 的偏微係數的意思上面已經解釋過了。這裏再得鄭重分別清楚偏微係數$\frac{\partial u}{\partial x}$與微係數$\frac{du}{dx}$。在 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 中，y 作爲常數看待，而在 $\frac{du}{dx}$中 y 作爲 x 的函數看待。偏微係數表示當別的變數不變而 x 的值每單位變化時 u 的變化率；$\frac{du}{dx}$表示所有的變數同時變化時 u 的總變化率。

例　設 y 與 u 是 x 的函數

$$y=\sin x;\quad u=x \sin x, \tag{10}$$

則後式可有幾種寫法。u 關於 x（y 爲常數）與 y（x 爲常數）的變化率要看 y 與 x 如何結合。但 u 關於 x 的總變化率則各種情形相同。例如從方程式（10）我們可得，

$u=xy$;　$\therefore$　$du=y\ dx+x\ dy$;　$u=x \sin x$;　$\therefore$　$du=(x \cos x+\sin x)dx$;　$u=\sin^{-1}y \sin x$;　$du=\sin^{-1}y \cos x\ dx+\sin x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}dy$。

偏微係數雖然各不相同，但$\frac{du}{dx}$都可化爲 $\sin x+x \cos x$。

讀者可以遇到許多的例，其中函數的性質與必使適合於方程式(8)

的條件者很相似。下列者卽是代表：——當加熱於斜方體的結晶體時，在不同的方向可有不同的膨脹係數。這些結晶體在某一溫度時成立方者，在另一溫度時未必還是立方。若從這樣的結晶體中截出一塊成長方體使其面各平行於三個膨脹的軸。這塊的體積爲

$$v=xyz,$$

此中 x, y, z 爲三邊的長。故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy。$$

代入 (6)，且兩邊除以 $d\theta$，此時 $d\theta$ 代表溫度的稍稍上昇，則

$$\frac{dv}{d\theta}=yz\frac{dx}{d\theta}+xz\frac{dy}{d\theta}+xy\frac{dz}{d\theta};$$

或
$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{d\theta}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{d\theta}+\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{d\theta}+\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{d\theta},$$

式中右邊三項各表，沿着 x, y, z 三個方向，物質的直線膨脹係數 λ。左邊一項表示立方膨脹係數 α。在各向同性的物體中，$\alpha=3\lambda$，因

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{d\theta}。$$

例一 氣體在絕對溫度 $T°$ 的擴散係數，假定 k_0 與 T_0 爲常數，按 Loschmidt 與 Obermeyer 的公式爲

$$k=k_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^n\frac{p}{760},$$

此中 k_0 爲溫度 $0°$ 時擴散係數，p 爲氣體壓力。當溫度與壓力有小變化時，求擴散係數的變化。令 $a=\frac{k_0}{760T_0^n}$；

$$\frac{\partial k}{\partial T}dT=apnT^{n-1}dT;\quad \frac{\partial k}{\partial p}dp=aT^n dp。$$

$$\therefore\quad dk=\frac{\partial k}{\partial T}dT+\frac{\partial k}{\partial p}dp。\qquad \therefore\quad dk=\frac{(np\ \ dT+T\ \ dp)k_0T^{n-1}}{760T_0^n}$$

例二　氣體或水氣在溫度 $\theta°$ 壓力 p 時其折光率 μ，按 Biot 與 Amago 公式爲

$$\mu-1=\frac{\mu_0-1}{1+\alpha\theta}\cdot\frac{p}{760},$$

此中 μ_0 爲溫度 0° 時的折光率，α 爲因溫度而發生的膨脹係數，當溫度與壓力有小變化時，折光率受什麼影響?

答可使折光率有變化量 $d\mu=\dfrac{\mu_0-1}{760}\left(\dfrac{dp}{1+\alpha\theta}-\dfrac{p\alpha d\theta}{(1+\alpha\theta)^2}\right)$。

例三　設 $y=f(x+at)$，證 $\dfrac{dx}{dt}=a$。

示意：　求 $\dfrac{\partial y}{\partial x}$；$\dfrac{\partial y}{\partial t}$；相除。

例四　設 $u=xy$，此中 x，y 的 t 的函數，證公式 (8) 化爲第 14 節公式(9)

$$\frac{du}{dt}=x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt},\tag{11}$$

例五　設 x 爲 t 的函數,其形式爲 $x=t$，求 $u=xy$ 關於 t 的微係數則爲

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\tag{12}$$

因 $\dfrac{dt}{dt}=1$。

例六 設 x, y 爲 t 的函數，求 $u=xy$ 關於 t 的微係數則爲

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt};\quad \frac{du}{dy}=\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dy}。\tag{13}$$

在第 14 節中已用別的方法求得此結果。

§ 23. 關於齊函數❶的尤氏定理(Euler's Theorem on Homogeneous Functions)

尤氏定理的目的之一，爲從變數的已知關係中消去任意條件；建立一種新的關係使不受任意函數的拘索。關於這點我們以後再說。在某種計算中 Euler 定理可助我們縮短工夫。依照 Euler 定理：在任何齊函數中，每個變數與原函數關於此變數的偏微係數的積之總和等於原函數與其次數之積。換言之，設 u 爲 n 次的齊函數，尤氏定理說：若❷

$$u=\Sigma\ a\ x^{\alpha}\ y^{\beta}\tag{1}$$

其中 $\alpha+\beta=n$，則

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=nu。\tag{2}$$

這定理的證法是有所啓發的。求下列齊函數的微係數，

$$u=ax^{\alpha}y^{\beta}+bx^{\alpha_1}y^{\beta_1}+\cdots\cdots=\Sigma ax^{\alpha}y^{\beta},$$

其中 $\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1=\cdots\cdots=n$，可得

---

❶ 一個函數各項的次數相同者稱爲齊函數。例如 $x^2+bxy+z^2$；$x^4+xyz^2+x^3y+x^2z^2$ 各爲二次與四次齊函數。

❷ "Σ" 表示『同形式各項之和』，本式中卽爲『含有 x, y, 與常數的各項之和』。"Π" 表示『同形式各項之積』有亦用得到。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\Sigma a\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}\,;\;\frac{\partial u}{\partial y}=\Sigma a\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}。$$

故以 x 乘前式，y 乘後式，相加可得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\Sigma a(\alpha+\beta)x^{\alpha}y^{\beta}=n\Sigma ax^{\alpha}y^{\beta}=nu。$$

這定理可以推廣至任何幾個變數，如

$$u=\Sigma x^{n}f\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x},\cdots\cdots\right) \tag{3}$$

我們卽能寫爲

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\cdots\cdots=nu, \tag{4}$$

現在我們已經從任意函數 $f(\cdots\cdots)$ 所受於 u 的條件中解放出來了。因爲不論 u 是代表什麼形式函數的函數，其 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\cdots\cdots$ 必等於 nu。

例一　設 $u=x^2y+xy^2+3xyz$，則 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3u$。用實際求微係數法證明之。若依尤氏定理顯然直接可以得到此結果，因爲原方程式是齊函數且爲三次。

例二　設 $u=\frac{x^3+x^2y+y^3}{x^2+xy+y^2}$；則 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$　因此方程式爲一次齊函數。

例三　設 $u=f\left(\frac{x}{y}\right)$，證 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$。因此時 $n=0$。並用實際求微係數法證明之。

§ 24. 求高級偏微係數法 (Successive Partial Differentiation)

聯合採用求高級微係數法及求偏微係數法的運算，可求高級偏微係數。如

$$u=x^2+y^2+x^2y^3,$$

y 爲常數時 u 關於 x 的一級微係數；與 x 爲常數時 u 關於 y 的一級微係數各爲

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y^3x;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+3x^2y^2; \tag{1}$$

再求微係數，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2(1+y^3);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2(1+3x^2y)。 \tag{2}$$

我們若求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 關於 y 的微係數，與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 關於 x 的微係數可得下列兩個相同的結果：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=6y^2x;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6y^2x。 \tag{3}$$

高級偏微係數與求微係數的次序是沒有關係的。以 x 爲常數，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 關於 y 的微係數，即爲 $\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}$，我們寫爲 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$；反之，以 y 爲常數，求 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 關於 x 的微係數，即爲 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}。 \tag{4}$$

在 (3) 中不過證明這公式的特例。讀者對於求微係數的概念已經熟悉後，普遍證法無疑是可以自己求得的，雖然普通的教本都載有這普遍的證法。(4)中的結果是極爲重要的。

例 設 $y=e^{\alpha x+\beta t+\gamma}$ 能適合方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+B\frac{\partial y}{\partial t},$$

證明 $\alpha^2=A\beta^2+B\beta$，此中 α，β，γ 爲常數。

示意： 先求三個微係數，然後代入第二方程式；化簡之。

§ 25. 完整微分(Complete or Exact Differentials)

求於方程式

$$du=M\ dx+N\ dy \tag{5}$$

中，u 爲 x，y 的函數之條件，式中 M，N 都是 x，y 的函數。我們剛才看過，若 u 爲 x，y 的函數

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{6}$$

比較(5)(6)兩式，卽得所求的條件爲

$$M=\frac{\partial u}{\partial x};\quad N=\frac{\partial u}{\partial y}。$$

先求前式關於 y 的微係數，再求後式關於 x 的微係數，從公式(4)得

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{7}$$

在微分方程式的教本中，證明欲使某種方程式可解，或稱可求積分這條件是充分而必要的條件。方程式 (7) 稱爲尤氏可積準則 (Euler's criterion of integrability)。可以適合此條件的方程式稱爲**完整微分**(complete or exact differential)。

例 證 $y\,dx-x\,dy=0$ 不是完整的，而 $y\,dx+x\,dy=0$ 爲完整的微分。

示意： 在第一種情形中 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial y}$；而 $\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{\partial x}{\partial x}$，故這方程式不是完整的微分；……

§ 26. 積分因數(Integrating Factors)

方程式

$$M\,dx+N\,dy=0 \tag{8}$$

恆能使之完整，只須各項乘以 x, y 的某種函數，此函數稱爲**積分因數**；此中 M, N 假定爲 x, y 的函數，

因 M, N 爲 x, y 的函數，(8)式可寫成

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}, \tag{9}$$

卽 y 關於 x 的變化，等於 $-M$ 比 N；卽是說 x 爲 y 的某種函數，

$$f(x, y)=a,$$

於是從第 22 節(5)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dy+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy=0。 \tag{10}$$

轉變(10)的形式與(9)相比較；得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}}=-\frac{M}{N} \tag{11}$$

故

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}=\mu\ M;\ \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=\mu\ N, \tag{12}$$

此中或爲 x, y 的函數或爲常數。在原方程式上乘以積分因數 μ，再以 $\mu\ M$ 與 $\mu\ N$ 的值代入(12)，卽得

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}dy=0,$$

這是合於完整的條件的。在任何特殊的例中，函數 $f(x,\ y)$ 可從 x, y 的已知關係中求出。

例　證明，若以積分因數 $\frac{1}{y^2}$ 乘方程式 $y\ dx-x\ dy=0$，可使其完整。

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2};\ \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}。$$

故 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，卽 (7) 中所需的條件。同樣證明 $\frac{1}{xy}$ 與 $\frac{1}{x^2}$ 亦爲此方程式的積分因數。

積分因數在解某種微分方程式（如我們所見者）中與熱力學上某種重要方程式中都極有用。

§ 27. 熱力學上的說明 (Illustrations from Thermodynamics)

初步近似的方法，我們可以假定每種均勻的液體或氣體的物態的變化，完全由結合壓力 p，體積 v，溫度 T 的定律而決定的。這定律稱為特性方程式或物態方程式，其形式為

$$f(p,\ v,\ T)=0 \tag{1}$$

當三個變數中任知其二時，則任何變化可以完全決定。故此我們可有

$$p=f_1(v,\ T);\quad v=f_2(p,\ T);\quad T=f_3(p,\ v)。 \tag{2}$$

我們單獨注意於第一個方程式，求其微分，得

$$dp=\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T dv+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dT。 \tag{3}$$

此式右邊的第一個偏微係數表示氣體的彈性係數；第二個不過表示體積不變時壓力隨溫度而增加的係數。若壓力不變則 $dp=0$，(3) 式卽能寫為

$$\left(\frac{dv}{dT}\right)_p=-\frac{\left(\frac{dp}{dT}\right)_v}{\left(\frac{dp}{dv}\right)_T};\quad 或\left(\frac{dp}{dT}\right)_v=-\frac{\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p}{\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_T}。 \tag{4}$$

括號在下角所註的字母表示在求微分時何者作為常數。注意壓力不變時$\frac{\partial v}{\partial T}$變為$\frac{dv}{dT}$。(4) 中第一方程式所說為加熱於氣體時其體積的變化等於『體積不變時壓力隨溫度的增加』與『氣體彈性的變化』之比；第二方程式是說：熱脹係數與壓縮係數之比等於體積不變時溫度每昇一單位，氣體壓力所生之變化。

例一 證明欲使單位體積的水銀增高 1° C. 而體積不變，須加 60

個大氣壓力。水銀的膨脹係數 $=0.00018=\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p$；又其壓縮係數 $=0.000003=-\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_T$，見 M. Planck 氏 Vorlesungen über Thermodynamik, Leipzig, 8, 1897。

例二 當一個分子的硫酸，H_2SO_4，與 n 個分子的水，H_2O，混合時放出的熱量 Q，按 J. Thomsen 的公式爲，$Q=\frac{17860\ n}{1.798+n}$ 卡 (calorie)。爲便利計，令 $a=17860$，$b=1.798$。設有 x 個的 H_2SO_4 與 y 個的 H_2O 混合，則放出的熱量，要比一個分子的 H_2SO_4 與 $\frac{y}{x}$ 個分子的 H_2O 混合時大 x 倍。因在 Thomsen 公式中 $\frac{y}{x}=n$，故 $Q=x\times\frac{ay}{bx+y}$ 卡。若以 dx 的 H_2SO_4 加入『x 個的 H_2SO_4 與 y 個的 H_2O 之混合物』中，則放出的熱量爲

$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx=\frac{ay^2}{(bx+y)^2}dx\text{；或}\quad\frac{an^2}{(b+n)^2}dx\text{ 卡。}$$

同理可證當 dy 的水加入同一的混合物中，則放出熱量爲

$$\frac{\partial Q}{\partial y}dy=\frac{ab}{(b+n)^2}dy\text{ 卡。}$$

設 Q, T, p, v 爲四個變數，任取二個爲自變數，求微分，可得

$$dQ=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v dT+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T dv=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p dT+\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_T dp$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v dp+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_p dv. \tag{5}$$

以上式中第二節與第四節列成等式，並以(3)中 dp 的值代入。得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v dT+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T dv=\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dT+\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$$

$$dv+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_p dv。\tag{6}$$

假定 v 爲常數，則 $dv=0$，兩邊除以 dT，

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_v=\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v。\tag{7}$$

再求 T 的微分，

$$dT=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp+\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv\ 。\tag{8}$$

以 dT 的值代入(5)式中最後二節，得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp+\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv+\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_T dp=\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v$$

$$dp+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_p dv。\tag{9}$$

假定 p 爲常數，則 $dp=0$，可寫爲

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p=\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_p\tag{10}$$

如此進行下去，讀者可以求得許多許多 Q，T，p，v 間的關係，而絕未用到字母所代表的物理意義。設 Q 爲物態小有變化時加於物質上的熱量，p，v，T 各爲此物質的壓力，體積與絕對溫度，則上列的公式與熱力學上相當的公式一致。

可是這裏的所求得的關係，絕未用到熱學原理。設爲熱學上的情境則$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v dT$ 代表當體積不變時溫度稍稍上昇所需的熱量；$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v$ 不過是當體積不變時此物質的比熱，通常寫爲 C_v；同樣$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p$ 是壓力不變時此物質的比熱，通常寫爲 C_p；$\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T$與$\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_T$是指兩種潛熱。

這些結果可以用之於任何物質之能合於 $pv=RT$ 的關係者。此時

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\frac{R}{v}, \;\cdots\cdots; \qquad \therefore \quad v\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v=R\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v;\cdots\cdots$$

這從(7)可以知道的。

例一　稍運心智，讀者卽能求出所謂 Reech 定理：

$$\gamma=\frac{C_p}{C_v}=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}, \tag{11}$$

這是 Clément 與 Desormes 用以計算 γ 之值的。欲知實驗的詳情可參閱物理學教本。

示意：求關於 v 與 Q 的 dp；與關於 v 與 T 的 dp 如 (3)；用(7)與(10)。

例二　依照絕對彈性與等溫彈性的定義（參閱第 41 節），各爲

$$E_\phi=-v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\phi; \qquad E_T=-v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T。$$

上式中右下角所註 ϕ 與 T 的意義，ϕ 表示在 $\frac{\partial p}{\partial v}$ 的變化中熱量無所損益即 Q 爲常數，T 表示此時溫度爲常數。從 (5) 式的第一第四兩節證明當 Q 爲常數時，

$$v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\phi=-\frac{v\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_p}{\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v}。$$

從(7),(10),(4)可得重要結果，

$$\frac{E_\phi}{E_T}=\frac{-\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_p}{\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T},\quad=\frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}=\frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v}$$

$$=\frac{C_p}{C_v}=\gamma。\tag{12}$$

依據熱力學的第二定律,在可逆變化中,『$\frac{dQ}{T}$這式子是完整的微分』。通常寫爲 $d\phi$，此中 ϕ 稱爲物質的熵(entropy)。從(5)式的前二節，可得

$$\frac{dQ}{T}=d\phi=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v dT+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T dv,\tag{13}$$

此式應爲完整的微分 從第 25 節(7),故得

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v=\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T;$$

或

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T=\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_v-\frac{L}{T},\tag{14}$$

此中 C_v 爲$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v$， L 爲 $\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T$。

依據熱力學第一定律，當熱量 dQ 加於物質上時，一部份熱能 dU 消耗於作出此物質分子間內部的功，一部份消耗於抵抗大氣壓力而膨脹的力學上的功，$p\ dv$。用記號寫出來，得

$$dQ=dU+pdv; \quad 或 \quad dU=dQ-pdv \tag{15}$$

此時 dU 應爲完整微分。這是說明此物質雖吸收無論多少的能 U，但當其回復原態時，會得全部交出。換言之，U 是物態的函數（參閱第 124 節）。當三個變數 p，v，T 中任知其二時，從上 (2) 式可以決定其態。

從(5)式的前二節與上方程式(15)，得

$$dU=C_v\ dT+L\ dv-p\ dv=C_v\cdot dT+(L-p)dv \tag{16}$$

此式應爲完整的微分。結果，如前一樣，可求得

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T=\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_v-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \tag{17}$$

從(14)，(17)，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T \tag{18}$$

這裏的定律已經建立起理論化學上好些精美結論的出發點了。

例一　求出 Mayer 氏關於完全氣體的公式，

$$C_p-C_v=R, \tag{19}$$

示意：(i)因 $pv=RT$，$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\frac{R}{v}$，　$\therefore\ \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T=\frac{RT}{v}=p$，

(公式 18)。(ii)求 dv 加 (3),代入(5)式的第二第三節。(iii) 令 dp 等於零。用(18)從氣體方程式求 $\frac{\partial v}{\partial T}$……故得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p;\ \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T\cdot\frac{R}{p}$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p;$$ 等等。

例二　四個變數 p, v, T, ϕ, 任取二個爲自變數,求出所謂『熱力學上的四個關係式』:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_\phi=-\left(\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_v;\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)_T=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v;\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\phi=\left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)_p;$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_v。$$

很可能的,在本書將來再版時,下章中大部份的材料會得删去,因爲『圖解與其性質』已見於大多學校的課程之中。但是現在,爲便於參考起見,決定仍是保存着。

第二章　解析幾何學

『秩序與規律，以一幅圖畫寓之於目，比較取任何其他姿態印入腦筋時，更易明白的認識。』❶—— Dr. Whewell.

§ 28. 笛氏坐標 (Cartesian Coordinates)

普遍的說，物質的物理性質可以用幾何圖形明白表示。這種圖形爲研究某種自然變化的一種優美方法，因爲可使變化的全部歷史活躍於心目之前。同時，一串列在表中的數字間的數值關係可以表演爲一幅圖畫的形式，牠們的眞實意義使人一望而知。

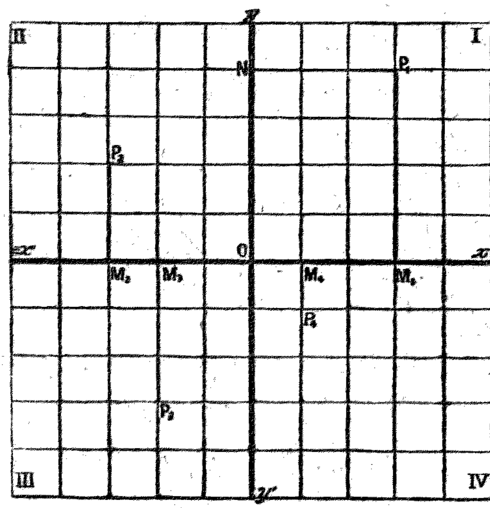


圖　十

設 xOx' 與 yOy' (圖十) 爲互相垂直的兩個直線，相交於 O，這樣，分這紙的平面爲四個象限 I，II，III，IV，設 P_1 在第一象限 yOx

❶ "Order and regularity are more readily and clearly recognised when exhibited to the eye in a picture than they are when presented to the mind in any other manner." —Dr. Whewell.

中；引 P_1M_1 平行於 Oy，P_1N 平行於 Ox。若知 OM_1 與 P_1M_1 的長則 P_1 點關於這二直線的位置可以從長方形 NP_1M_1O 的性質直接決定(Euclid, i, 34)。例如，設 OM_1 代表三單位，P_1M_1 代表四單位，P_1 的位置的求法可沿 Ox 向右截取三單位，沿 Oy 向上截取四單位；再引 NP_1 平行於 Ox，P_1M_1 平行於 Oy，兩直線的交點卽爲 P_1 的位置，因

$$P_1M_1=ON=4 \text{ 單位}; \quad NP_1=OM_1=3 \text{ 單位。}$$

xOx'；yOy' **稱爲坐標軸** (coordinate axes)，Love 氏又稱此爲**參考坐標** (frames of reference)。若 yOx 角爲直角，則稱爲**垂直坐標軸** (rectangular axes)。有時採取 yOx 角爲斜角者反較便利，此時則爲**斜坐標軸** (oblique axes) xOx' 稱爲**橫坐標** (abscissa) 軸亦稱 X 軸；yOy' 稱爲**縱坐標**(ordinate)軸亦稱 Y 軸。O 點稱爲**原點** (origin)；OM_1 稱爲 P_1 點的橫坐標，P_1M_1 稱爲 P_1 點的縱坐軸。參照一對坐標軸而敍述一點的位置時，橫坐標總是在前，如 P_1 的坐標爲 3 與 4；寫成記號則爲 $P_1(3,4)$。爲紀念其發明人，René Descartes，這個系統的記法有時呼爲**笛氏坐標系統**。

三角法上關於任一象限中一點的正負的慣例這裏一樣採用。任何橫坐標從原點向右量爲正，向左量爲負；縱坐標向上量爲正，向下量爲負。例如，一個已知點的橫坐標與縱坐標所包含單位數各爲 a，與 b，用笛氏坐標則 P_1 爲 $P_1(a, b)$；P_2 爲 $P_2(-a, b)$；P_3 爲 $P_3(-a,-b)$；P_4 爲 $P_4(a,-b)$。在實際問題上在第一象限以外的點，較少遇到。

故平面上的任何一點表示兩個事件：(1)沿着某個參考標準線——X軸的水平距離，(2)沿着另一參考標準線——Y軸的垂直距離。

當一點的位置可用兩個變數（坐標）來決定時，這點稱爲二個向度的點。

我們常是粗糙的利用過解析幾何學。如圖書館內的書籍可從書架與號數而尋得其位置；地圖上的城市可用經度緯度來決定。參閱 H. S. H. Shaw 氏所著 "Report on the Development of Graphic Methods in Mechanical Science," B. A. Reports, 373, 1892, 可得許多的例。

§ 29. 圖形表示法 (Graphical Representation)

參閱一對垂直坐標軸，考察任一直線或曲線，❶ 如 OP 的位置（圖十一）。任取橫坐標 OM_1，OM_2，OM_3 ……OM 經過 M_1，M_2，M_3，……M 作縱坐標 M_1P_1，M_2P_2，M_3P_3……MP 平行於 y 軸。縱坐標都一定的值，隨此線的斜度與橫坐標的值而定。設 x 爲橫坐標，y 爲縱坐標，則 x 與 y 依照某種已知的定律而結合，此種定律即稱爲**曲線方程式**(the equation of the curve)。

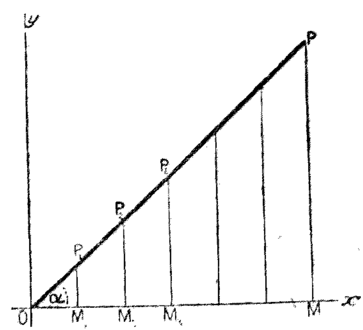


圖 十 一

今欲求曲線 OP 的方程式。在三角形 OPM 中

$$MP = OM \tan \angle MOP,$$

❶ 以坐標軸爲參考標準線時，任何直線與曲線，總稱之爲『曲線』。

或
$$x=x\ \tan\ \alpha \tag{1}$$
此中 α 表示正角 MOP。但設 $OM=MP$,
$$\tan\angle MOP=\frac{MP}{OM}=1=\tan\ 45^\circ。$$
故這曲線 OP 的方程式爲
$$y=x \tag{2}$$
此曲線對 x 軸有 45° 的傾斜。

直接可以推論到原點的一點，橫坐標縱坐標都等於零。x 軸上的一點其縱坐標爲零；y 軸上的一點其橫坐標爲零。平行 x 軸的任何直線其方程式爲
$$y=b; \tag{3}$$
平行於 y 軸的任何直線其方程式爲
$$x=a, \tag{4}$$
此中 a 與 b 各表坐標軸與各直線的距離。

這裏必須提醒讀者不要染上一種壞的習慣，去寫一線 OM 時隨便寫爲『OM』或『MO』不加分別，否則到後去將要學不到什麼的。直線總是從左向右或從下向上量的，若是負的則方向相反；量角時，以鐘面對着讀者則反鐘針方向爲正；鐘針方向爲負。讀者如能注意及此，許多困難，例如光學問題上的，都可免除。在圖中 MOP 角爲正，POM 角爲負。MP 線爲正，PM 線爲負。故
$$\tan\ \angle MOP=\frac{MP}{OM}=\frac{+}{+}=+;\ \tan\ \angle POM=\frac{PM}{OM}=\frac{-}{+}=-。$$

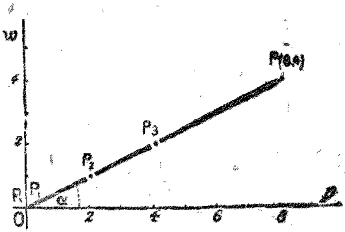
§ 30. 圖形表示法的實用說明

設氣體溶解於單位體積的溶液時研究其壓力 p 與重量 w 的關係，觀測得下列各對的數值：

$$p=\frac{1}{4},\ 2,\ 4,\ 8\cdots\cdots=x。$$

$$w=\frac{1}{8},\ 1,\ 2,\ 4\cdots\cdots=y。$$

畫 $P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$, $P_2(2,\ 1)$,……各點於坐標紙上（圖十二），引通過各點的線，我們稱爲『描繪曲線』（plot the curve)。圖十二卽爲描繪的結果。圖十一與本圖的分別，只是 OP 線對兩軸的斜度不同。



圖十二

從方程式(1)可得

$$w=p\ \tan\ \alpha,\quad 或\quad \tan\ \alpha=\frac{1}{2},$$

卽是說 α 爲正切等於 $\frac{1}{2}$ 的角。此角可查三角函數表而求得之，約爲 $26°\ 33'$。令 $\tan\ \alpha=m$，可寫爲

$$w=mp, \tag{5}$$

此中 m 爲常數，隨實驗中所用氣體與液體的性質而定。方程式是合於 Henry 定律的氣體的可溶性，以算式表示之。此定律：『溫度不變時，溶於單位體積的液體中的氣體重量比例於其壓力』。曲線 OP 卽爲 Henry 定律的圖形表示。

再取一個說明。溫度 θ 在 $0°$ 與 $100°$ 之間，於 100 份水中氯化鉀的可溶性，λ，約如下列：

$\theta=0°,\quad 20°,\quad 40°,\quad 60°,\quad 80°,\ 100°=x,$

$\lambda=28.5,\ 39.7,\ 49.8,\ 59.2,\ 69.5,\ 79.5=y$。

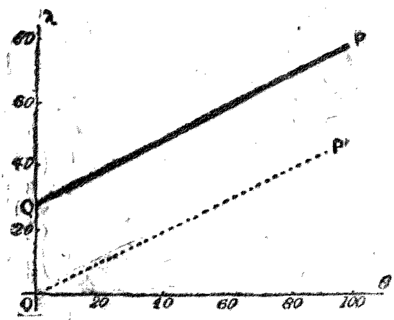


圖 十 三

如前例，描繪之得曲線 QP（圖十三）；此線不通過原點 O，而割 y 軸於 Q 點，使

$$OQ=28.5\text{ 單位}=(\text{設爲})b。$$

若從 O 點作 OP' 引 QP 的平行線，則其方程顯然可從(5)得

$$\lambda=m\theta;$$

但因我們所論的線割 y 軸於 Q，故

$$\lambda=m\theta+b, \tag{6}$$

此中 $b=OQ$。在這些方程式中，b，λ 與 θ 爲已知，故 m 的值很易從(6)求得，

$$m=\frac{\lambda-b}{\theta}=\tan\ 27°43'=0.5254。$$

以 m 與 $b(=28.5)$❶ 的數值代入(6)，可得

$$\lambda=0.5128\theta+28.5;$$

從此關係我們可求 $0°$ 與 $100°$ 間任何溫度 θ 時氯化鉀的可溶性的近似值。

---

❶ 決定此值方法見於後文。

圖十三中 QP 曲線是以圖形表示 KCl 溶於水中的可溶性，在各溫度的變化。

知道曲線的方程式，或僅知曲線的形式，未經觀測到的溫度時的 KCl 的可溶性，我們可以求其大概；因爲我們若不像本例每隔 20° 決定其可溶性一次，而每隔 10° 舉行一次，所得的結果還是可用不斷的線連結之。溫度間隔無論取得如何之短，同樣的關係還是存在的。從這觀點，可溶性曲線可以看作一點依照某種固定的定律運動時所經的路。這種定律卽以曲線方程式爲其定義，因曲線上每點的坐標適合於此方程式的。這種點所刻劃出來的路稱爲方程式的圖或軌跡 (locus)。

例一　讀者試在方格紙上描繪：

$$y=\frac{1}{2}x-2;\qquad 2y+3x=12。$$

例二　下列是實驗的結果：

當　$x=0$,　　1,　　10,　　20,　　30……

　　$y=-3$, -1.56, 11.40, 25.80, 40.20……

(a)描繪此曲線。(b) 證明此曲線對於 x 軸的斜度約爲 $1.44=\tan\alpha=\tan 55^\circ$；又證明此曲線的方程式爲 $y=1.44\,x-3$。(c) 沿 x 軸上量取 5 單位與 15 單位，證明從這兩點至曲線的垂直距離代表兩個相當的縱坐標。(d) 以 $x=5$；$x=15$ 代 (b) 中所得的方程式，求 y 的值，與(c)中的兩個垂直距離比較之。注意(c)中須作垂直距離而量測之，其手續之費事與周折，非(d)中的方法可比。圖解的方法稱爲圖形補插法(詳後文)，在有結合兩個變數的方程式可用時，很少用之。

例三 從任何化學教本中，採取決定可溶性的記錄，以溶液的成分 (C) 爲縱坐標，溫度 (θ) 爲橫坐標描繪曲線，例如硫酸鈉的溶液，Loewel 氏的決定如下：

$C =$ 5.0, 19.4, 55.0, 46.7, 44.4, 43.1, 42.2;

$\theta^\circ =$ 0°, 20°, 34°, 50°, 70°, 90°, 103.5°。

在 34° 時的特別彎曲是何意義？

在這類情形中，有一個問題必需決定的：以什麼方法表示溶液的成分爲最好？可用者有幾種。正當的選擇隨着研究者的判斷，或者可說是策略，而定。大多的化學家（如上述的 Loewel）跟蹤 Gay Lussac 表示溶液的成分是以『100 份溶媒中所溶物質的份數』。Etard 發覺以『100 份飽和溶液中所含物質的份數』來表示較爲便利。現在看來，好像要以結果表示爲分子的比例，更爲正當。這是根據可溶性常數易與其他物理常數相比較。這樣，Gay Lussac 的方法應爲『所溶物質的分子數與溶媒的分子數，如 100，之比』；Etard 的方法，應爲『所溶物質的分子數與飽和溶液的分子數，如 100，之比』。

例四 描繪 $\log_e x = y$，證負數不能求對數的。

示意： 令 $x = 0$, e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, ∞ 等而求 y 的相當值。

關於『圖解代數學』很好的小册子，最近出版得很不少，這裏似乎不必在這方面再作更長的敍述了。

§ 31. 直線的性質 (Properties of Straight Lines)

設方程式(1)與(6)表成普遍的形式，以 x 與 y 爲變數，m 與 b 爲常數，我們可以求得用一對垂直線坐標軸時，直線的性質如下：

I. 一個直線,若通過一對垂直坐標軸的原點,則其方程式爲

$$y=mx, \tag{7}$$

此中 $m=\tan\alpha=\frac{y}{x}$, 是一個常數代表此曲線的斜度。此方程式從以上(5)得出。

II. 一個直線若割 y 軸於離原點爲 b 處,則其方程式爲

$$y=mx+b。\tag{8}$$

此中 m 與 b 爲任何常數。m 的每一個值,即有相當的角 α 而 $\tan\alpha=m$。所以直線的位置由於一點與一個方向決定之。方程式(8)直接從方程式(6)得出。

III. 一個直線總能以一個一次方程式,

$$Ax+By+C=0 \tag{9}$$

代表之;逆之,一個含有兩個變數的一次方程式代表一個直線。

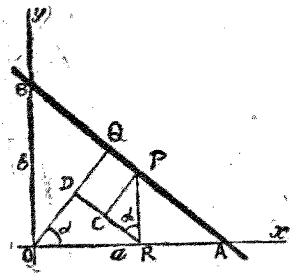
這個結論根據於一件事實即任何含有 x 與 y 一次方的方程式代表一個直線。以 $m=-\frac{A}{B}$; $b=\frac{C}{B}$ 代入(8)化簡之即得含有兩個變數的一次普遍方程式:$Ax+By+C=0$。這是代表一個直線,對於 x 軸正向的傾斜角的正切爲 $-\frac{A}{B}$, 在 y 軸上割於原點下 $-\frac{C}{B}$ 點。

IV. 一個直線若各割兩軸於離原點 a 與 b 處則其方程式爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1。\tag{10}$$

---

(1) 在第 11 節已經見到一𠆢『普遍方程式』是何意義。只須給與 A, B, C 以適當的值,我們即能化此『普遍方程式』爲任何含有兩個變數的一次方程式。



圖十四

考察圖十四中的直線 AB，各割 x 軸與 y 軸於 A 與 B。設 $OA=a$，$OB=b$。從方程式(9)，

若 $y=0$，則 $x=a$；$Aa+C=0$，

$a=-\frac{C}{A}$。

同樣情形，若 $x=0$，則 $y=b$；$Bb+C=0$，$b=-\frac{C}{B}$以 a 與 b 的值代入(9)，卽得

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1;$$

故
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\text{。}$$

這個有用的方程式可有幾種證法。公式 (10) 稱爲直線方程式的**截段形式**(intercept form)；方程式(8)稱爲**正切形式**(tangent form)。

V. 所謂直線方程式的**法線形式**或**垂線形式**（normal form or perpendicular form）爲

$$p=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \tag{11}$$

此中 p 爲直線 AB 與原點 O 的垂直距離；α 爲此垂線與 x 軸的夾角(見圖 14)。

引 OQ 垂直於 AB。在直線 AB 取任何一點 $P(x, y)$，作 PR 垂直於 x 軸，引 RD 平行於 AB 割 OQ 於 D。PC 垂直於 RD，則 $\angle PRC=\alpha=\angle QOA$。則 $OQ=OD+PC$，$OD=x\cos\alpha$；$PC=y\sin\alpha$。故得方程式(11)。

許多方程式都易化爲截段形式，其幾何的意義可以一望而知。例如，

方程式 $x+y=2$，可化爲 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$，

此方程式所代表的直線，與兩軸相割處離原點爲等距。

Charles 定律的一種說法爲『壓力不變時，已知質量的氣體的體積隨温度而正變』。在這些情形下，若温度昇高 $\theta°$，則體積增加原温度時的 $\frac{1}{273}\theta$ 倍❶。在 $O°$C. 時，設原有體積 v_0 爲 1，則在 $\theta°$ 時的最後體積 v，

$$v=1+\frac{1}{273}\theta。$$

這方程式與直線方程式的截段形式(1)相像，其中 $a=-273$；$b=1$。截段 a 與 b，可以由令 x 與 y（或 θ 與 v）各等於零而求得。
設 $\theta=0$，則 $v=1$；設 $v=0$ 則 $\theta=-273$ 這是有名的絕對零度（圖十五）。

❶ 許多讀者，甚至有些教本，好像對於這個問題的觀念有些含糊。依照 "Gay Lussac 定律" 在任何溫度時的氣體因溫度昇高 1° 而增加的體積，是溫度 0° C. 時原體積的一個定分數；"J. Dalton 定律"(Manchester Memoirs, 5; 595; 1802)則不然，假定在任何溫度時的氣體因溫度昇高 1° 而增加的體積是其時體積的一個定分數（事實上即複利律）。前者似比後者較接近於眞實（閱 285 頁）。J. L. Gay Lussac(Annales de Chimie, 43; 137; 1802) 說十五年之前 Charles 注意到這同一的性質，故此這定律有時稱爲 Charles 定律，或 Charles 與 Gay Lussac 定律。Gay Lussac 在考察 Charles 所用的儀器之後以爲這儀器的敏銳不足以建立本問題中的定律。但那時 J. Prietley 在他的 Experiments and Observations on Different Kinds of Air (2; 448; 1790)中說『從我早日所做的很粗的實驗，得到的結論爲一定的普通的空氣是隨熱度而膨脹的』。Priestley 定律這名稱可以解決一個定律而有 Dalton, Gay Lussac, Charles 等命名的混亂了。

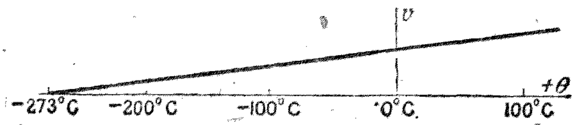


圖 十 五

一個物質而不佔有空間，這是很難想像的。但是這種悖理的話，是當溫度 $\theta=-273°$ 時從 Charles 定律所推得的論理的結果。錯誤在什麼地方呢？答案是 Charles 定律內含有一個『簡化的假定』。氣體所佔的總體積實際包括兩部份：(1)物質分子實在佔有的體積(2)分子在其中運動的空間。普通我們雖以 v 代表總體積，而實際上只指分子在其中運動的空間而說，在這種情形下當 $\theta=-273°$ 時 $v=0$ 的結論並不悖理。

溫度近於 $-273°$ 的四度之內的氣體還未經研究過。無論補插法的結果是怎樣的可靠，我們想把外插法 (extrapolation) 用之於量測所及的範圍以外，多少終是冒險的事。外插法只能在最後量測之點的鄰近方始可靠。用外插法，想求太陽的大概的溫度，結果出入很大，Vicaire 的是 1,398° 而 Waterston 的是 9,000,000°！在觀察所及的範圍之外，我們不能說定是否有什麼新的力在那裏作用着。在 Charles 定律的情形中，我們卻知道，在低溫度，氣體要改變其物理的狀態；在這新環境中這定律是不能應用的。

VI. 已知兩個曲線的方程式，求其交角。設所知的方程式爲

$$y=mx+b;\quad y'=mx'+b'$$

設 ϕ 爲所求的角(參閱圖十六)，$m=\tan\alpha$; $m'=\tan\alpha'$。 從幾何學

定理知 $\alpha'-\alpha=\phi$，　$\therefore$　$\tan(\alpha'-\alpha)=\tan\ \phi$。從三角公式，

$$\tan\ \phi=\frac{\tan\ \alpha'-\tan\ \alpha}{1+\ \tan\ \alpha'\ \tan\ \alpha}=\frac{m'-m}{1+m'm}。\tag{12}$$

例一　求 $x+y=1$ 與 $y=x+2$ 兩個直線的交角。

此中 $m=1$; $m'=-1$; $\tan\ \phi=-\infty$　$\therefore$　$\phi=-90°$。

例二　求 $3y-x=0$ 與 $2x+y=1$ 的交角。

答：　$\tan(81°52')=7$。

VII.　以兩點的坐標，表示其距離。圖十七，設 $P\ (x_1,\ y_1)$ 與 $Q\ (x_2,\ y_2)$ 爲已知點。引 QM' 平行於 NM。$OM=x_1$，$MP=y_1$；$ON=x_2$，$NQ=y_2$；

$$M'P=MP-MM'=MP-NQ=y_1-y_2;$$

$$QM'=NM=OM-ON=x_1-x_2。$$

因 $QM'P$ 爲直角三角形

$$(QP)^2=(QM')^2+(PM')^2。$$

$$\therefore\qquad QP=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ 。\tag{13}$$

例一　證明$(-2,\ 1)$與$(-6,\ -2)$兩點間的距離爲 5 單位。

例二　證明$(10,-18)$這點至$(3,\ 6)$的距離與至$(-5,\ 2)$的相等。

答：　各爲 25 單位。

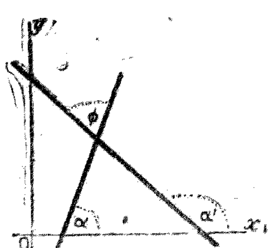


圖　十　六

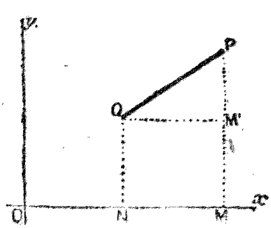


圖　十　七

§ 32. 適合於條件的曲線 (Curves Satisfying Conditions)

讀者須做完以下的例題，可使於解析幾何學的觀念很爲熟悉。這裏所發展出來的關於直線的許多性質很容易推廣到曲線上去。

I. 一個曲線可通過一個已知點的條件。這顯然是必須此點的坐標適合於此線的方程式。設此方程式爲正切形式，

$$y = mx + b。$$

若此線通過一點 $P\ (x_1,\ y_1)$ 則

$$y_1 = mx_1 + b。$$

相減得

$$(y - y_1) = m(x - x_1)。 \tag{14}$$

這是適合於要求條件的方程式。

例一 通過一點(5，3)的直線方程式爲 $y - mx = 3 - 5m$。

例二 一個直線通過一點(4，－4)且斜度爲 2，求其方程式。

答： $y - 2x + 12 = 0$。

II. 一個曲線可通過兩個已知點的條件。繼續上項的討論，設此線又通過一點$(x_2,\ y_2)$，以 x_2 與 y_2 代入(14)得

$$(y_2 - y_1) = m(x_2 - x_1); \quad \therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}。$$

以 m 的值代入(14)得方程式

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{15}$$

這是通過兩個已知點(x_1, y_1)與(x_2, y_2)的直線方程式。

例一　證明通過 $P_1(2, 3)$ 與 $P_2(4, 5)$ 兩點的直線方程式，爲 $x-y+1=0$。

示意：以 $x_1=2$，$y_1=3$；$x_2=4$，$y=5$ 代入(15)。

例二　求通過 $P_1(4, -2)$；$P_2(0, -7)$兩點的直線方程式。

答：$5x-4y=28$。

III.　兩個已知直線的交點的坐標。設已知的方程式爲

$$y=mx+b;\quad 與\quad y=m'x+b'。$$

每個方程式可有無限對 x 與 y 的值適合之。這些對的值普通是各個方程式不同的，但有一對而只有一對 x 與 y 的值可以同時適合於此兩個方程式，此卽交點的坐標。交點的坐標必須適合於兩個方程式，而無別點可以如此。依簡單的代數運算而求得的此兩個方程式的根卽爲這所求點的坐標。適合此兩個方程式的根

$$x=\frac{b'-b}{m-m'};\quad y=\frac{b'm-bm'}{m-m'}, \tag{16}$$

卽交點的坐標。

例一　求兩個直線 $x+y=1$，$y=x+2$ 的交點的坐標

答：$x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{3}{2}$。

示意：$m=-1$，$m'=1$，$b=1$，$b'=2$，……

例二　兩個曲線 $3y-x=1$，$2x+y=3$ 的交點的坐標爲 $x=\frac{8}{7}$，$y=\frac{5}{7}$。

例三 證明兩個曲線 $y^2=4x$, 與 $x^2=4y$ 相交於一點 $x=4$, $y=4$。

IV. 三個已知直線可以交於一點的條件。三個直線中二者的方程式的根是其交點的坐標,欲使此點亦在第三直線上,則此二個方程式的根必須適合於第三方程式。

例一 設三個直線的方程式爲 $5x+3y=7$; $3x-4y=10$; $x+2y=0$, 證明牠們是交於一點, 其坐標爲 $x=2$, $y=-1$。解最後兩個方程式,得 $x=2$, $y=-1$,但這是適合第一方程式的,故三個直線交於一點$(2, -1)$。

例二 證明直線 $3x+5y+7=0$; $x+2y+2=0$; $4x-3y-10=0$ 是不交於一點的。

示意: 從第一第二方程式得 $y=1$, $x=-4$。但這對 x, y 的值不適合於最後方程式的。

V. 兩個直線互相平行的條件。因爲平行的直線必須與x軸成相等的交角,即 $\alpha'=\alpha$ 或 $\tan\alpha'=\tan\alpha$,

$$\therefore \quad m=m' \tag{17}$$

即兩個方程式若都是正切形式,其 x 項的係數必須相等。

例一 證明直線 $y=3x+9$; $2y=6x+7$ 是互相平行的。

示意: 第二方程式兩邊除以 2, 則兩個方程式中 x 的係數是相等的。

例二 求通過一點$(2, -1)$且平行於 $3x+y=2$ 的直線方程式。

答: $y+3x=5$。

示意：　用(17)與(14)　得 $y+1=-3(x-2)$。

VI.　兩個直線互相垂直的條件。參閱 (12)，設兩個直線的交角 $\phi=90°$，

$$\alpha'-\alpha=90°,$$

$$\therefore\quad \tan\alpha'=\tan(90°+\alpha)=-\cot\alpha=-\frac{1}{\tan\alpha},$$

$$\therefore\quad m'=-\frac{1}{m}, \tag{18}$$

即一個直線對於 x 軸的斜度必須等於另一直線的斜度之倒數而符號相反。

例一　一個直線通過一點 (3，2) 且垂直於直線 $y=2x+5$，試求其方程式。

答：　$x+2y=7$。

示意：　用(18)與(14)。

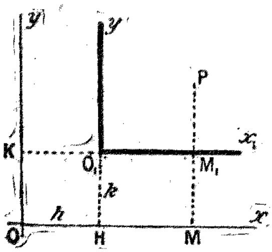
例二　一個直線通過一點(2，−4)且垂直於直線 $3y+2x-1=0$，求其方程式。

答：　$2y-3x+14=0$。

§ 33．變換坐標軸(Changing the Coordinate Axes)

在描繪任何函數的圖時，參照的坐標軸應該選取得使結果的曲線在最最便利的位置。在許多問題中須要從一組坐標軸換成另一組坐標軸。若做這樣的工作，已知曲線參照新坐標的方程式必要從參照舊坐標的相當方程式求得之。

I.　從一組坐標軸換成另一組坐標軸與前者平行，但有不同的原點。



圖十八

設 Ox，Oy 爲原坐標軸(圖十八)，KO_1x_1，HO_1y_1 爲平行於 Ox，Oy 的新坐標軸。設 MM_1P 爲 P 點的縱坐標平行於 Oy 與 O_1y_1。設 h,k 爲新原點 O_1 參照舊軸時的坐標。設(x, y)爲 P 參照舊軸 Ox，Oy 時的坐標；(x_1, y_1)爲其參照新軸時的坐標。則

$OH=h$，$HO_1=k$，

$$x=OM=OH+HM=OH+O_1M_1=h+x_1;$$

$$y=MP=MM_1+M_1P=HO_1+M_1P=k+y_1。$$

卽說我們欲以一個曲線參照新坐標軸，必須取

$$x=h+x_1; \quad y=k+y_1。\tag{19}$$

P 點的新坐標爲

$$x_1=x-h; \quad y_1=y-k \tag{20}$$

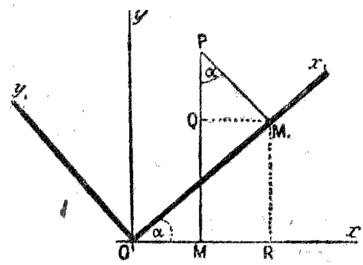
例　已知一點$(2, 3)$與方程式 $2x+3y=6$，於參照新軸時，此點的坐標與此方程式的形式若何？新軸各平行於舊軸，新原點的坐標爲$(3, 2)$。

答：$x_1=x-3=2-3=-1$；　$y_1=y-2=1$。P 點的新坐標爲$(-1, 1)$；

此方程式的新形式爲 $2(3+x_1)+3(3+y_1)=0$；$\therefore\ 2x_1+3y_1+12=0$。

II.　從一組坐標軸換成另一組坐標軸共有原點而方向不同。

設在圖十九中，以通過 O 點的兩個直線 x_1O，y_1O 爲一組新坐標軸。設 $P(x, y)$ 參照新軸時的坐標爲 x_1，y_1。引 MP 垂直於舊的 x 軸，M_1P 垂直於新的 x_1 軸，於是 $\angle MPM_1 = ROM_1 = \alpha$，



圖十九

$$OM = x,\ OM_1 = x_1,\ MP = y,\ M_1P = y_1。$$

引 RM_1 垂直於 x 軸，QM_1 平行於 x 軸。則

$$x = OM = OR - MR = OR - QM_1,$$

$$\therefore\ x = OM_1 \cos\alpha - M_1P \sin\alpha;$$

$$\therefore\ x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha。\tag{21}$$

同理 $$y = MP = MQ + QP = RM_1 + QP;$$

$$\therefore\ y = OM_1 \sin\alpha + M_1P \cos\alpha,$$

$$\therefore\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha。\tag{22}$$

方程式(21)與(22)，可使我們將 P 點的坐標從一組坐標軸換入另一組坐標軸。聯立解方程式(21)與(22)得

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha;\quad y_1 = y\cos\alpha - x\sin\alpha。\tag{23}$$

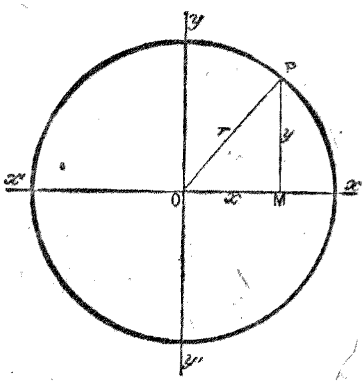
例　當原點不動而坐標軸轉過 $-45°$ 時，則方程式 $x_1^2 - y_1^2 = a^2$，應變爲什麼形式？　此時 $\sin(-45°) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$；$\cos(-45°) = \sqrt{\frac{1}{2}}$。從 (23) 知 $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}x - \sqrt{\frac{1}{2}}y$；$y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}x + \sqrt{\frac{1}{2}}y$。故 $x_1 - y_1 = -\sqrt{2}x$；$x_1 + y_1 = \sqrt{2}x$；

$\therefore\quad x_1^2-y_1^2=-2xy;\quad \therefore\quad 2xy=-a^2;$　或 $xy=$常數。

欲從一組坐標軸換入另一組坐標軸其原點與方向都不相同者，可連續採用以上兩種方法。

§ 34. 圓及其方程式 (Circle and its Equation)

有一組重要的曲線，其形式可以從圓錐上以各種不同的角度割出。故稱圓錐曲線 (conic sections)。這一組中包括拋物線，雙曲線，橢圓。圓是橢圓的一種特例。我們簡要的敍述牠們的主要性質。



圖二十

圓是一個曲線其上各點與一個定點等距。這點稱爲圓心；圓心與曲線的距離稱半徑。設 r 爲以原點爲圓心的圓的半徑 (圖二十)，xOx' 與 yOy' 爲垂直坐標軸。在圓上取一點 P (x,y)。設 PM 爲 P 點的縱坐標。根據定義 OP 是常數等於 r。則從幾何學定理，知

$$(OM)^2+(MP)^2=(OP)^2,\quad \text{或}\quad x^2+y^2=r^2。\tag{1}$$

這方程式稱爲圓的方程式。

關於這方程式，必會想到有些點的縱坐標與橫坐標可有負數的值，但因負數的平方恆爲正，故此這規則是成立的。所以方程式 (1) 表示一件幾何上的事實即圓周上的各點與圓心是等距離。

例一　一點依照方程式 $y=a\cos t,\ x=a\sin t$ 而運動，式中 t 爲時間，求此點的軌跡。

求各方程式的平方而相加之，得

$$y^2+x^2=a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)。$$

從三角公式知括號內等於 1，故此不問 t 之值若何，恆有

$$y^2+x^2=a^2,$$

即此點在半徑爲 a 的圓周上運動。

例二　一圓的圓心的坐標爲(h, k)求此圓的方程式。從上節(19)得

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{2}$$

此 $P(x, y)$ 爲圓周上的任何點。注意(2)式中 xy 項是沒有的，且 x^2 與 y^2 的係數完全相同。這些條件是圓的方程式所具有的。如

$$3x^2+3y^2+7x-12=0。$$

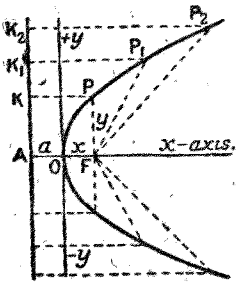
例三　圓的普遍公式爲

$$x^2+y^2+ax+by+c=0。 \tag{3}$$

於方格紙上描繪(3)。試觀察分別略去 ax 與 by 的結果，同時略去則如何？這是欲瞭解普遍方程式的意義的確當辦法。

例四　一點在 $x^2+y^2=25$ 這圓上運動。比較當 $x=3$ 時，x 與 y 的變化率。設 $x=3$，顯然 $y=\pm4$。用微係數得 $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{y}=\pm\frac{3}{4}$。當 x 與 y 同號時函數減少，即在第一第三象限時的情形；但在第二第四象限時函數的值增加；故 y 的減少與增加依其所在的象限而定，惟其率則爲 x 的四分之三。

§ 35. 拋物線及其方程式(The Parabola and its Equation)



圖二十一

拋物線是一個曲線，其上任何點與一已知點及與一已知直線等距。此已知點稱爲**焦點**(focus)，此已知直線稱爲**準線**(directrix)，曲線上一點與焦點的距離稱爲**焦點半徑**(focal radius)。O 稱爲拋物線的頂(圖二十一)。AK 爲準線；OF，FP，FP_1 ……爲焦點半徑；$OF=AO$；$FP=KP$；$FP_1=K_1P_1$……。今能證明拋物線的方程式爲

$$y^2=4ax, \tag{1}$$

其中 a 爲常數等於圖中的 OA。以言語表示之，卽此方程式說明拋物線的橫坐標比例於其縱坐標的平方。

例一 用轉移坐標法，證方程式(1)所代表的拋物線，可寫成下列形式

$$x=a+by+cy^2, \tag{2}$$

此中 a，b，c 爲常數。令 $x=x+h$，$y=y+k$；$a=j$ 此中 h，k，j 爲常數。以 x，y 的新值代入(1)；展開。集合各常數，使各等於 a，b，c。

例二 研究拋物線的形狀。解拋物線的方程式，可得

$$y=\pm 2\sqrt{ax}。$$

第一 每個 x 的正值可得兩個 y 的值，數值相等，符號相反，卽

是說相當於原點右方 x 軸上每一點，有兩點與 x 軸的垂直距離相等。曲線在 x 軸一邊的部份恰爲其在另一邊的鏡影。這種情形我們稱 x 軸爲拋物線的對稱軸。故 x 軸的垂線必交曲線於離 x 軸等距處。

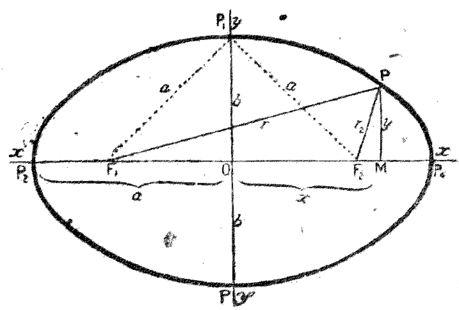
第二　當 $x=0$，則 y 軸切❶於曲線。

第三　因 x 爲負時 a 爲正，故 y 無實數值；蓋沒有一個實數的平方爲負數者。結果，拋物線全部在 y 軸的右邊。

第四　當 x 無限增加時，y 接近無限大，即拋物線從 x 軸向兩邊無限離開。

§ 36. 橢圓及其方程式

橢圓是一個曲線其上任何點至兩個定點的距離之和一定。設 P 點在曲線 P_1P_2 上運動而與兩定點 F_1，F_2 的距離之和恆爲 $2a$。（見圖二十二）。F_1，F_2 稱爲橢圓的焦點。P 與每個焦點的距離稱爲焦點半徑亦稱動徑(radius vector)。O 稱爲橢圓的心。橢圓的方程式，



圖二十二

❶ 有些算學家稱切線爲交曲線於兩個重合點的直線。參閱 The School World, 6: 323, 1904。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

卽能從上述的各種性質而證得之。P_2 P_4 稱爲**長軸** (major axis), P_1 P_3 稱爲**短軸**(minor axis),其長各爲 $2a$ 與 $2b$; a 與 b 稱爲**半軸** (semi-axis); P_1, P_2, P_3, P_4 各點爲**頂**(vertex)。

例一　設 $P(x, y)$ 點在曲線上運動,任何時刻的位置,可用方程式 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 決定之。求此動點所經的路線。兩式平方而相加;因 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, 得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。故此點在橢圓上運動。

例二　研究橢圓的形狀。解橢圓的方程式,得

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};\quad x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}。\tag{2}$$

第一　因 y^2 必須爲正,故 $\frac{x^2}{a^2}\not>1$, 卽 x 的絕對值不能大於 a。同樣 y 的絕對值不能大於 b。

第二　從每個 x 的正值可得 y 的兩個值,符號相反而絕對值相等,卽相當於 x 軸上每一點,在 x 軸上方與下方,有兩點至 x 軸的垂直距離相等。故橢圓關於 x 軸爲對稱。同樣可證橢圓關於 y 軸也是對稱。

第三　x 的值從零增加其絕對值直至 $x=\pm a$ 而止,此時 $y=0$, 卽得 x 軸上的兩點。若再增加使 $x>a$, 則 y 無實數值。故橢圓範圍在兩個極限之間卽 $x=\pm a$; 同樣可證橢圓亦範圍在兩個極限 $y=\pm b$

之間。

顯然若 $a=b$，則橢圓的方程式變爲圓的方程式。故圓爲橢圓的特例。

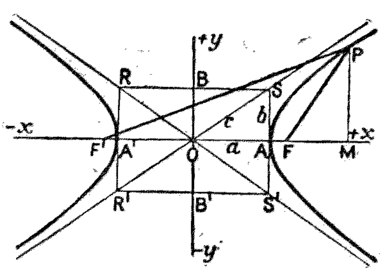
在橢圓的方程式中沒有 x 與 y 的一次項，表示原點是橢圓的心。若有 xy 一項則表示主軸（長軸與短軸的總稱）不是 x 軸是 y 軸。

§. 37 雙曲線及其方程式 (The Hyperbola and its Equation)

雙曲線是一個曲線，其上任何點至兩個定點的距離之差一定。設 P 點運動時與兩個定點 F, F' 的距離之差爲常數 $2a$（見圖二十三）。F, F' 稱爲焦點。O 稱爲雙曲線的心。$OM=x$; $MP=y$; $OA=a$; $OB=b$。從這些定義可以證明雙曲線的方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

x 軸稱爲雙曲線的**橫割軸** (transverse axis) 或稱**實軸** (real axis;)；y 軸稱爲雙曲線的**共軛軸** (conjugate axis) 或稱**虛軸** (imaginary axis)；A, A' 爲雙曲線的頂；a **爲實半軸**，b **爲虛半軸**。



圖二十三

例一　一個雙曲線以原點爲頂 A，則其方程式爲 $a^2y^2=2ab^2x+b^2x^2$。以 $x+a$ 代原方程式(1)中的 x，即得。注意 y 無變化。

例二　研究雙曲線的形狀。解方程式(1)，

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,;\quad x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}\,。\tag{2}$$

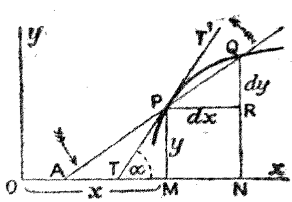
第一 因 y^2 必須爲正，故 $x^2 \nless a^2$，或 x 的絕對值不能小於 a。從方程式(2)，y 的值可知沒有限制。

第二 每個 x 的正值，可有 y 的兩個值，符號相反而絕對值相等。這樣的兩個在 x 軸的上方與下方，與 x 軸等距離處，即雙曲線關於 x 軸爲對稱。每個 y 的個可有 x 的兩個值，符號相反而絕對值相等，故雙曲線關於 y 軸爲對稱。

第三 設 x 的值從零變化至 $\pm a$ 爲止，則 $y=0$；x 的這兩個值得 x 軸上的兩點。設 $x>a$ 則有 y 的兩個值符號相反而絕對值相同。y 的每值個即有 x 的兩個值符號相反而絕對值相同。故雙曲線關於兩個坐標軸爲對稱且在 $x=\pm a$ 之外。

在我們敍述這組有趣的曲線的性質之前，先得普遍的討論曲線的的幾個基本性質。

§. 38 曲線的切線 (The Tangent to a Curve)



圖二十四

我們有時稱切線爲交曲線於兩個重合點的直線。設在圖二十四，P 與 Q 爲曲線上兩點，$MP=NR=y$；$RQ=dy$；$OM=x$；$MN=PR=dx$；直線 $PQ=ds$。其餘詳見圖上。設直線 APQ 繞 P 點而旋轉。我已在第二圖見到，當 Q 接近於 P 時，弦 PQ 漸與弧 PQ 接近；當 Q 與 P 相合時，$\angle MTP=\angle RPQ=\alpha$；$dx$，$dy$，$ds$ 爲無限

小的三角形的三個邊，其 $\angle P=\alpha$，結果

$$\frac{dy}{dx}=\tan\ \alpha。\tag{1}$$

這是一個極爲重要的結果。微係數表曲線的斜度（曲線上每點的斜度即其每點切線的斜度）。換言之，即曲線上任何點的切線與 x 軸交角的正切等於此曲線的縱坐標關於其橫坐標的一次微係數。

我們很易見到在無限小的三角形中

$$dx=ds\ \cos\ \alpha;\quad dy=ds\ \sin\ \alpha;\tag{2}$$

因 R 爲直角，故

$$(ds)^2=(dy)^2+(dx)^2\tag{3}$$

我們若以時間 t 爲橫坐標描繪一個質點所經歷的距離 x，或以時間 t 爲橫坐標描繪一個物質在化學反應中所生之量 x，可得一個曲線，其上每點的斜度表示其時的變化速度。這曲線稱爲**速度曲線**（velocity curve）。若曲線自左至右向下傾斜則 $\frac{dx}{dt}$ 爲負，其變化速度漸減；若曲線自左至右向上傾斜，則 $\frac{dx}{dt}$ 爲正，變化速度則漸增。

我們若以時間 t 爲橫坐標描繪變化速度 V，可得一個曲線其上每點的斜度表示其時的速度的變化率，即加速度。這曲線稱爲**加速度曲線**（acceleration curve）。加速度曲線與橫坐標軸間所包圍的面積代表這個時間內質點所經歷的距離，或物質在化學反應所生之量。

例一　曲線 $y_1{}^2=4x_1$ 上，那一點的切線可與 x 軸成 $60°$ 的角？

由 $\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{2}{y_1}=\tan\ 60°=\sqrt{3}$。答這點是 $y_1=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$，$x_1=\frac{1}{3}$。

例二 求拋物線上一點 $P(x, y)$ 的斜度。卽求切拋物線於 $P(x, y)$ 的直線的斜度。

因 $y^2=4ax$; $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}=\tan\alpha$。若斜度有特殊值時卽可以此值代式中的 $\frac{dy}{dx}$。例如 $P(x, y)$ 點的切線與 x 軸成 $45°$ 的角時，則因 $\tan 45°=1$，故 $\frac{2a}{y}=\tan\alpha=1$，　$\therefore$　$y=2a$，代入原方程式 $y^2=4ax$，得 $x=a$。卽此切線通過曲線上 $x=a$，$y=2a$ 這點。設切線與 x 軸平行，由 $\tan 0=0$，　$\therefore$ $\frac{dy}{dx}=0$；設切線與 x 軸垂直，由 $\tan 90°=\infty$，　$\therefore \frac{dy}{dx}=\infty$。

例三 一點依方程式 $y=a\cos 2\pi(x+\epsilon)$ 而運動，求任何時刻的運動方向。切線在任何時刻的斜度爲 $-2\pi a\sin 2\pi(x+\epsilon)$。

例四 E. Mallard 與 H. le Chatelier 表示二氧化碳分子比熱 s 與溫度 θ 的關係爲 $s=6.3+0.00564\theta-0.00000108\theta^2$。描繪 $\left(\theta, \frac{ds}{d\theta}\right)$ 曲線，以 θ 爲橫坐標從 $\theta=0$ 至 $\theta=2000°$。欲得最滿意的圖，或許要試驗幾次方能決定坐標軸上的單位如何採取可使圖形相稱。讀者必須自己習練這方面的工作。這個曲線與 (s, θ) 曲線在意義上有何不同？

例五 證明一個角的正切若爲 $\frac{dy}{dx}$ 則其餘切爲 $\frac{dx}{dy}$。

設 TP（圖二十五）爲曲線上 $P(x_1, y_1)$ 點的切線。$OM=x_1$，

$MP=y_1$。設切線 TPT' 的方程式為 $y=mx+b$，曲線 ROP 的方程式為 $y_1=f(x_1)$，從第 32 節公式 (14)，知道只有當

$$y-y_1=m(x-x_1) \tag{4}$$

時一個直線能夠通過 $P\ (x_1,\ y_1)$，式中 m 即為直線 $y=mx$ 的斜度；x，y 為切線任意一點的坐標。但是我們剛才見到這斜度即為曲線的縱坐標關於橫坐標的一次微係數，故代入後得

$$y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1) \tag{5}$$

此式稱為曲線上$(x_1,\ y_1)$點的**切線方程式** (equation of tangent)。

例一 求曲線 $y_1^2=4x_1$ 上，(4，2) 點的切線方程式。此中 $\dfrac{dy_1}{dx_1}=1$；$x_1=4$，$y_1=2$。故從(4)得所求的方程式為 $y=x-2$。

例二 求拋物線的切線方程式。因 $y_1^2=4\ ax_1$，$\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{2a}{y_1}$。代入(5)而化簡之，得 $(y-y_1)y_1=y\ y_1-y_1^2=2a(x-x_1)$。以 $y_1^2=4ax_1$ 代入，

$$y\ y_1=2a(x+x_1) \tag{6}$$

即為拋物線的切線方程式。若 $x=0$ 則 $\tan\alpha=\infty$，此切線垂直於 x 軸，與 y 軸合一。欲求切線與 x 軸的交點，可令 $y=0$ 則 $x=-x_1$。故拋物線的頂離切線上 x 軸交點與離切點縱坐標在 x 軸上的交點為等距。

例三 求橢圓的切線方程式。因橢圓的方程式為

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1。\quad \therefore \frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{b^2\ x_1}{a^2\ y_1};$$

代入 (5)，化簡之，結果得

$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}=1, \tag{7}$$

卽爲橢圓的切線方程式，其中 x_1 與 y_1 爲切點的坐標，x 與 y 爲切線上任何點的坐標。

例四　求雙曲線上一點 $P\ (x_1,\ y_1)$ 的切線方程式。雙曲線的方程式爲

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1。\quad \therefore \frac{dy_1}{dx_1}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1};\quad \therefore\ y-y_1=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)。$$

化簡之，結果爲

$$\frac{x\,x_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1。 \tag{8}$$

此切線與 x 軸的交點 $y=0$，其 x 的值爲

$$xx_1=a^2 \quad 卽 \quad x=\frac{a^2}{x_1} \tag{9}$$

若曲線爲橢圓則情形相同。

在(9)中若 x_1 爲無限大則 $x=0$，故切線通過原點。雙曲線上無限遠點的切線的極限位置很有趣味。這種切線稱爲漸近線 (asymptote) 求漸近線與 x 軸所成的角，必須決定當 x_1 爲無限大時

$$\frac{y_1{}^2}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}-1$$

的極限值。兩邊乘以 $\frac{b^2}{x_1{}^2}$ 得

$$\frac{y_1{}^2}{x_1{}^2}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{x_1{}^2}。$$

若 x_1 爲無限大，則所求之比爲

$$\mathrm{Lt}_{x_1=\infty}\frac{{y_1}^2}{{x_1}^2}=\frac{b^2}{a^2}\quad\therefore\quad \mathrm{Lt}_{x_1=\infty}\frac{y_1}{x_1}=\frac{b}{a}。$$

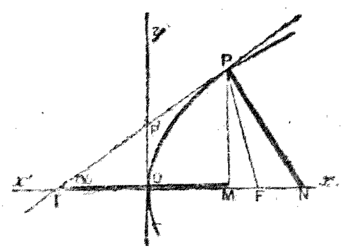
求雙曲線方程式的微係數，代入 $\frac{x_1}{y_1}$ 的値，得

$$\frac{dy}{dx}=\tan\,\alpha=\frac{a}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}=\frac{b}{a}。\tag{10}$$

我們若作長方形 $RSS'R'$（見圖二十三），使各平行於軸，且割 $OA=OA'=a$，$OB=OB'=b$，第一象限中的對角線與漸近線是合一的。因關於 x 軸與 y 軸爲對稱的，故在每一象限都是如此。故 $R'OS$ 與 ROS' 爲雙曲線的漸近線。

§ 39. 曲線的研究 (A Study of Curves)

通過切點，垂直於切線引至 x 軸爲止的直線稱爲法線(normal line)。圖二十五中 NP 爲曲線上 P $(x_1,\ y_1)$ 點的法線。設 $y=mx+b$ 爲此法線的方程式；$y_1=f(x_1)$ 爲曲線的方程式。任何直線須垂直於切線 TP 的條件爲 $m'=\frac{1}{m}$。從(5)得



圖二十五

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1),$$

故法線方程式爲

$$y-y_1=-\frac{dx_1}{dy_1}(x-x_1);$$

或
$$-\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}。\tag{1}$$

例一　求曲線 $x_1^2y_1^3=a$ 上，(4, 3) 點的法線方程式。這裏 $\frac{dx_1}{dy_1}$ $=-\frac{3x_1}{2y_1}$。

故代入(1)得 $y=2x-5$。

例二　證明 $y=2(x-6)$ 爲曲線 $4y_1+x_1^2=0$ 上，(4, −4)點的法線方程式。

例三　橢圓的切線割 x 軸於 $y=0$ 的一點；從第 38 節(7)得

$$\therefore\quad xx_1=a^2;\quad 或\quad x=\frac{a^2}{x_1}\tag{2}$$

在圖二十六中 PT 爲橢圓的切線，NP 爲法線，從(2)

$$F_1T=x+c=\frac{a^2}{x_1}+c;\quad FT=x-c=\frac{a^2}{x_1}-c,$$

因 $F_1O=OF=c$, $OT=x$; $OM=x_1$,

$$\therefore\quad \frac{F_1T}{FT}=\frac{a^2+cx_1}{a^2-cx_1}。\tag{3}$$

又因 $FP=r$, $F_1P=r_1$; $OF=F_1O=c$; $OM=x_1$; $MP=y_1$,

$$r^2=y_1^2+(c-x_1)^2;\quad r_1^2=y_1^2+(c+x_1)^2。$$

$$\therefore\quad r^2-r_1^2=(r+r_1)(r-r_1)=-4cx_1;$$

但從橢圓的定義，知

$$r+r_1=2a;\quad \therefore\quad r-r_1=-\frac{2cx_1}{a};\ \therefore r=a-\frac{cx_1}{a};\ r_1=a+\frac{cx_1}{a}。$$

$$\frac{F_1P}{FP}=\frac{r_1}{r}=\frac{a^2+cx_1}{a^2-cx_1}。\tag{4}$$

從(3)與(4),故

$$F_1T:FT=F_1P:FP。$$

幾何學上有條定理說:『任何三角形的底邊依其餘兩邊而外分,則頂點與外分點的聯線二等分其頂角的外角』。故三角形 FPF_1 中切線二等分外角 FPR, 法線二等分內角 FPF_1。

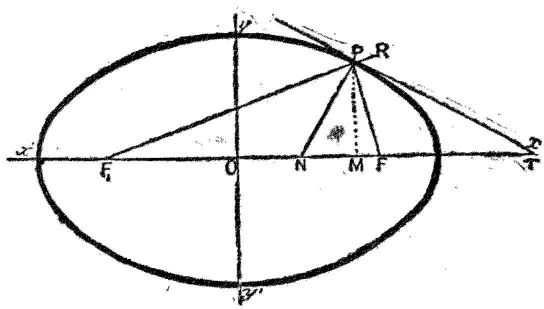


圖 二 十 六

上述的例說明橢圓上任何點的法線二等分焦點半徑的夾角;橢圓上任何點的切線二等分焦點半徑夾角的外角。這性質可以引論一件事實,即假使 F_1P 為從光源 F_1 所發的光線,切線代表 P 點的反射面,法線即垂直於此面。從有名的光學定律,『入射角與反射角相等』;這裏 $\angle F_1PN=\angle NPF$, PF 為反射光線,故所有從橢圓的一個焦點所發出的光反射後集中在另一焦點。光,熱,音,電磁的波都有這個現象。

求切線與法線的長。切線的長很易求得,只須從 MP 與 TM 的值而求直角三角形 TPM 的斜邊;同樣法線的長可從 MN 與 PM 已經求得的值求之。

法線的長在 x 軸上的正射影❶稱為此曲線的**次法線**(subnormal)。圖二十五中 MN 即為曲線上 $P(x_1, y_1)$ 點的正射影，

$$MN=x-x_1,$$

從(1)當法線從 $P(x_1, y_1)$ 點引出時，其次法線的長為

$$x-x_1=y_1\frac{dy_1}{dx_1};\ 或\ \frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x-x_1}{y_1} \tag{5}$$

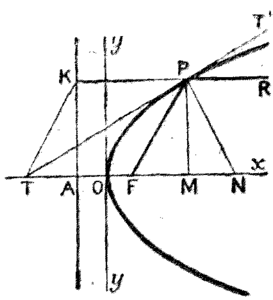
切線的長在 x 軸上的正射影稱為此曲線的**次切線**(subtangent)。圖二十五中 TM 為次切線，

$$TM=x_1-x。$$

令方程式(1)中 $y=0$，則次切線的長 TM 為

$$x_1-x=y_1\frac{dx_1}{dy_1};\ 或\ \frac{dx_1}{dy_1}=\frac{x_1-x}{y_1}。 \tag{6}$$

例一　求拋物線 $y_1^2=4ax_1$ 的次切線與次法線的長。因 $y_1\frac{dy_1}{dx_1}=2a$，故次切線為 $2x_1$；而次法線為 $2a$。故拋物線的頂二等分次法線。



圖二十七

例二　證明曲線，$pv=$ 常數，的次切線為 $-v$。

例三　圖二十七中 $P(x, y)$ 為拋物線上一點；PT 為 P 點的切線，KA 為準線；設拋物線 $y^2=4ax$ 的焦點為 F。聯 PF。引 KP 平行於 Ox。聯 KT。則

❶ 從一段直線的兩段向 x 軸上作垂線，垂足的距離稱為此段直線在 x 軸上的正射影。

$KPFT$ 應爲菱形，因拋物線的頂 O 二等分次切線，$TO=OM$，依定義 $AO=OF$；

$$\therefore \quad TA=FM; \quad 又 \quad KP=TF;$$

結果 KT 平行於 PF，從拋物線的定義，$KP=PF$，$\therefore \triangle KPT$ 與 $\triangle PTF$ 合同，而 $\angle KPT=\angle TPF$；卽拋物線上任何點的切線二等分此點至準線的垂線與焦點半徑的夾角。

圖中 $\angle TPF=\angle TPK=\angle RPT'$。但 $\angle TPN$ 與 $\angle NPT'$ 爲直角，減去等角 $\angle TPF$ 與 $\angle RPT'$，則 $\angle FPN$ 等於 $\angle NPR$。

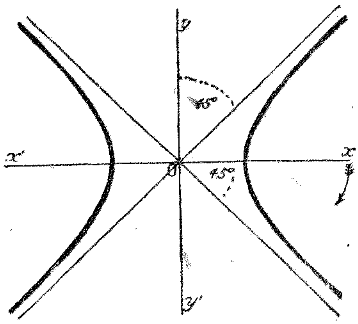
拋物線上任何點的法線二等分此點所作 x 軸的平行線與焦點半徑的夾角。這個性質在物理學上極爲重要。所有平行於 x 軸的光線至拋物線鏡而反射必通過焦點 F，反之，所有從焦點發出的光線反射後平行於 x 軸。故此往往採用拋物線鏡來反射燈光與其他用途。在Marconi的有些無線電報的實驗中也用拋物線的反射器來作電的傳播。Hertz在研究光波與電磁波的相同性時採用極大的拋物線鏡，其焦點處設置電振動的散放器或收受器。參閱 D. E. Jones 所譯 H. Hertz 著 Electric Waves, London, 172; 1893。

§ **40. 等邊雙曲線** (The Equilateral Hyperbola)

在雙曲線的標準方程式中，令 $a=b$，結果卽得雙曲線

$$x^2-y^2=a^2, \tag{1}$$

如圖二十八；因 $\tan\alpha=1=\tan 45°$，每個漸近線與 x 軸，y 軸各成 $45°$ 的角。換言之，漸近線二等分坐標軸的夾角。雙曲線的這種特殊形式稱爲等邊雙曲線。由於漸近線的互成直角，故可取爲垂直坐標



圖二十八

軸。這是等邊雙曲線的一個有價值的性質。

以漸近線爲坐標軸，等邊雙曲線的方程式可從第 33 節 II. 的方法而轉移之，此時 a 爲 $45°$。這樣所得結果得等邊雙曲線的方程式爲

$$xy=a, \tag{2}$$

此中 a 爲常數。

很易看到，當 y 漸漸變小時，x 漸漸增大。當 $y=0$ 時 $x=\infty$，x 軸與此雙曲線切於無限遠處。關於 y 軸亦有同樣的情形。

§ 41. 雙曲線的說明 (Illustrations of Hyperbolic Curves)

I. 氣體方程式 $pv=R\theta$ 的圖形表示是等邊雙曲線，若 θ 爲常數時。上方程式所包含的定律表示氣體的體積 v 隨其壓力 p 而反變。隨其溫度 θ 而正變。θ 取定值時，我們可得一組 p 與 v 的值。爲簡明計，令常數 $R=1$，則

$$\theta=1\text{時}\begin{cases} p= & 0.1, & 0.5, & 1.0, & 5.0, & 10.0,\cdots\cdots \\ v= & 10.1, & 2.0, & 1.0, & 0.2, & 0.1,\cdots\cdots \end{cases}$$

$$\theta=.5\text{時}\begin{cases} p= & 0.1, & 0.5, & 1.0, & 5.0, & 10.1\ \cdots\cdots \\ v= & 5.0, & 1.0, & 0.5, & 0.1, & 0.05\ \cdots\cdots \end{cases}$$

描繪這些數值所得的定溫度的曲線稱爲等溫線 (isothermal)。每

個等溫線（即定溫度的曲線）是等邊雙曲線，從方程式 $pv=R\theta$ 得出的，與上述的(2)相似。

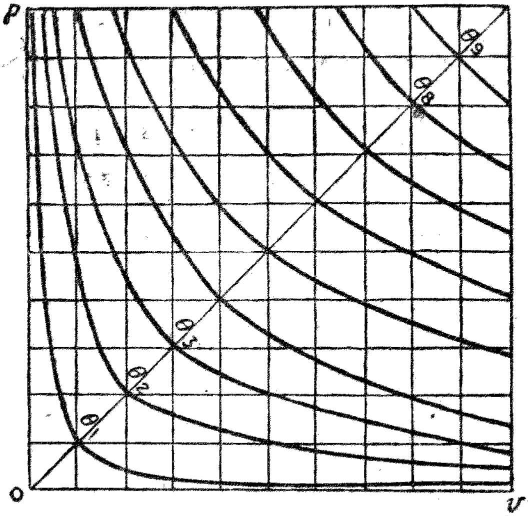


圖 二 十 九

令 θ 逐一的等於 θ_1，θ_2，θ_3，………，描繪 p 與 v 的相當值，得到一組等溫線，如圖二十九所示。

我們也可假定 v 爲常數而以 p 與 θ 爲變數，或假 p 爲常數而以 v 與 θ 爲變數求得一組曲線。若以 v 爲常數所得的一組曲線稱爲**等容線**（isochores）；若以 p 爲常數所得的一組曲線稱爲**等壓線**(isobars)。

II.　溫度計幹的暴露公式。當溫度計的幹所接觸的溫度與其泡所接觸的溫度若不同時，則幹內水銀受冷而略收縮，故必加小小的校正。設幹所接觸的溫度，與計上所示溫度之差爲 x，溫度計與較冷空氣接觸

的部分共 y 度，則校正之數可從溫度計的暴露公式

$$\theta=0.00016\ xy$$

而求得之，此式與第 40 節公式 (2) 的形式相同。假定 θ 取一組適當的值(如 0.1,……)而描繪 x 與 y 結果可得一組曲線，供給實驗室內之用。從這些曲線可以一望而知必要的校正之數。

III. 分解曲線。氣體分子在某種情形下分解為相似的部份。如過氧化氮可分解為簡單的分子，

$$N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$$

同樣碘在高溫度時，則從 I_2 變為 $2I$。在溶液中亦有同樣的情形發生，如 KCl 變為 K+Cl 等等。設以 x 代表一種酸或鹽的分子數，牠們在溶液中分解成兩部份取所謂離子(ion)；$(1-x)$ 代表拒絕離子化(ionization)的酸或鹽的分子數；c 代表每單位體積所含物質的量，卽溶液的濃度。Nernst 證明，溫度不變時，

$$K=\frac{cx^2}{1-x},$$

此中 K 稱為分解常數。其意義可從令 $x=0.5$ 而知之，此時 $K=\frac{1}{2}c$，卽當酸或鹽分解了一半時，K 等於溶液中酸或鹽的量之半。

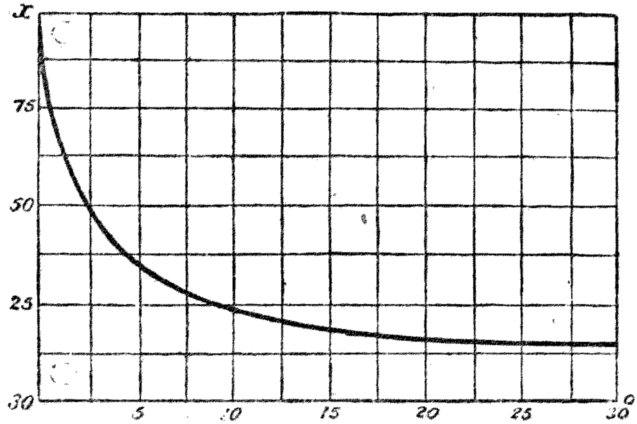
令 $K=1$，我們可得一組 c 與 x 的相當值。例如，設

$$x=.16,\quad 0.25,\quad 0.5,\quad 0.75,\quad 0.94,\cdots\cdots;$$

則 $$c=.32,\quad 12,\quad 2,\quad 0.44,\quad 0.07,\cdots\cdots。$$

故可見到，若濃度極大時，分解之量極小；反之亦確，當濃度極小時則分解之量極大。完全分解恐是永難得到。圖三十中的曲線，Nernst

稱爲等溫分解曲線(dissociation isothem)是以兩坐標軸爲漸近線的，但在這小型的圖上，曲線好像同縱軸接觸了。



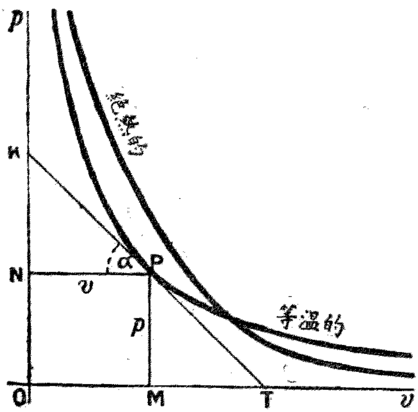
圖三十

IV. 一個物質的體積彈性其定義是壓力的微小增加量與每單位體積所減少的體積之比。若溫度不變，得等溫彈性(isothermal elasticity)，若體積與壓力變化時熱量並無得失則稱爲絕熱彈性(adiabatic elasticity)。設單位體積的氣體 v，因壓力增加 dp 而發生變化 dv 則彈性 E 爲

$$E=-\frac{dp}{\frac{dv}{v}}=-v\ \frac{dp}{dv}。\tag{1}$$

作爲等溫變化而求 Boyle 定律 $pv=$ 常數，的微係數，亦可得相似的方程式

$$p=-v\frac{dp}{dv}。\tag{2}$$



圖三十一

此方程式與作體積彈性定義的方程式相同的。方程式 $pv=$ 常數，是以漸近線爲坐標軸的等邊雙曲線。

圖三十一中設 $P(p, v)$ 爲曲線 $pv=$ 常數，上一點；$\triangle KNP$，$\triangle PMT$ 爲所作的相似三角形。從第 39 節例題二，並注意 KN 爲縱軸上的次切線，等於 $-p$。

$$KN=-NP\tan\alpha=-v\tan\angle KPN=-v\frac{dp}{dv},$$

即氣體在任何確定的情形下，其等溫彈性的絕對值是等於此物質在已知情形中相當曲線在縱軸上的次切線。

但在等邊雙曲線，$KN=PM$，氣體的等溫彈性等於壓力 (2)。氣體的絕熱彈性可用同樣的方法從方程式 (1) 求得之。若氣體爲絕熱變化，壓力與體積的關係爲

$$pv^{\gamma}=\text{常數}=c。\qquad (3)$$

求對數，(3)式卽爲 $\log p+\gamma\log v=\log c$。求微係數而化簡之，得

$$E_Q=-v\frac{dp}{dv}=\gamma p,\qquad (4)$$

換言之，氣體的絕熱彈性❶ 是壓力的 γ 倍。同樣作絕熱曲線可得

❶ 從別方面觀察，E_Q 常寫作 E_ϕ。

$$KN : PM = KP : PT = \gamma : 1,$$

即絕熱曲線上的切線被切點分於 $\gamma : 1$。

例一 依 Newton-Laplace 公式，壓縮波（如音波）在氣體中傳播的速度 V 的平方，隨氣體的絕熱彈性而正變，隨密度 ρ 而反變，即 $V^2 \propto \frac{E_\phi}{\rho}$; 證明 $V^2 \propto \gamma RT$。

示意： 因爲壓縮波是進行得如此的快，我們可以假定壓力與體積的變化不致有熱的得失。所以我們捨 Boyle 定律，$pv=$ 常數，而不用，必用 $pv^\gamma=$ 常數。從此求得 $\gamma p = v\frac{dp}{dv} = E_\phi$。注意體積隨氣體的密度而反變的。故

$$V^2 \propto \frac{E_\phi}{\rho} \propto E_\phi v \propto \gamma pv \propto \gamma \; RT。 \tag{5}$$

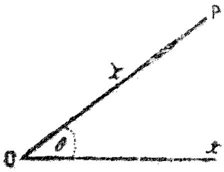
例二 R. Mayer 方程式（第 27 節例一）與本節 (5) 可用以決定任何氣體的兩種比熱，若已知此氣體內音的速度。設 a 爲常數而可從 R, T, V^2 的已知值求得者，

$$\therefore \quad C_v = \frac{R}{1-a}, \quad C_p = aC_v。 \tag{6}$$

Boynton 曾用 Van der Waals 方程式代 Boyle 的方程式。讀者亦能自己如此演算。略去高級的小數量，可使手續簡單（參閱 W. P. Boynton, Physical Review, 12; 353; 1901)。

§ 42. 極坐標 (Polar Coordinates)

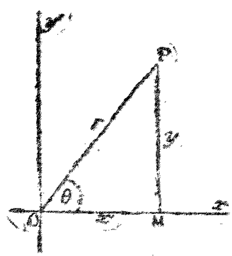
平面上一點的位置不用與坐標軸的距離代表之而用一個長度與一個方向來代表，有時較爲便利。例如圖三十二中 O 爲定點，Ox 爲通過



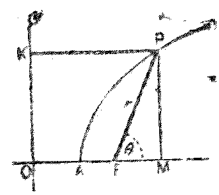
圖三十二

的直線。則任何點 P 的位置，在已知下列二者時即能完全決定：(1) OP 的長度，(2) OP 與 Ox 的夾角。這些稱爲 P 的極坐標，OP 稱爲動徑（radius vector）$\angle POx$ 稱爲變角（vectorial angle）。前者常以 r 表之，後者常以 θ 表之，P 點稱爲 $P(r, \theta)$ 點；O 稱爲極（pole），Ox 稱爲始線（initial line）。如三角法一樣，變角 θ 作爲是一個直線，從 Ox，繞 O 旋轉至 OP 而成，反鐘針方向爲正。

以極坐標變爲垂直坐標；以垂直坐標變爲極坐標的方法。在圖三十三中，設 (r, θ) 爲 $P(x, y)$ 點的極坐標，設 $\angle x'OP=\theta$。



圖三十三



圖三十四

I.　以垂直坐標變爲極坐標。

$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{y}{r};\ \cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{x}{r};$$

$$\therefore\quad y=r\sin\theta;\quad x=r\cos\theta \tag{1}$$

這是以 r 與 θ 表示 x 與 y。

例一　以方程式 $x^2-y^2=3$，從垂直坐標變爲極坐標，原點爲極。

答：　$r^2\cos 2\theta=3$。

示意：　$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$。

例二　證明 $x^2+y^2=9$ 與 $r=3$ 表示同一曲線。

示意：　$r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=9$ 而 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

例三　一個動點 P，其與定點 F 及定直線 OK（圖三十四）距離之比爲常數 e。求 P 點的軌跡。

示意：　$FP=eKP$。設 $KP=OM=x$，$MP=y$。令 $OF=a$，則此軌跡的方程式爲，$(FP)^2=(MP)^2+(FM)^2=y^2+(x-a)^2$。設 $e=1$，則此曲線爲拋物線。設 $e<1$，則此曲線爲橢圓；設 $e>1$，則此曲線爲雙曲線。e 稱爲此曲線的離心率（ eccentricity ）。若用極坐標，$KP=OF+FM=a+r\cos\theta$，

$$\therefore\quad e=\frac{r}{a+r\cos\theta};\ \text{或}\ r=\frac{ae}{1-e\cos\theta},\tag{2}$$

無論曲線爲拋物線，橢圓，雙曲線，上式都能適用。

II.　以極坐標變爲垂直坐標。在圖三十三中。

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{y}{x};$$

$$r^2=(OP)^2=(OM)^2+(MP)^2=x^2+y^2;$$

$$\therefore\quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x},\quad r=\pm\sqrt{x^2+y^2}\tag{3}$$

這是以 x，與 y 表 r 與 θ 的式子。r 從 O 沿 θ 角的終邊(terminal side)如 OP，同向截取爲正，反向截取爲負；故(3)式中 r 的正負，須在 θ 取定何值後方能決定。

如在垂直坐標中一樣，極坐標方程式的圖，也須先定 θ 的值（如 0°, 30°, 45°, 60°, 90°……）而從方程式計算得 r 的相當值，然後描繪之。

例一 $(2, 60^\circ)$；$(2, 45^\circ)$ 兩點的垂直坐標爲何？

答 $(1, \sqrt{3})$；$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$。

例二 用垂直坐標表示方程式 $r = m \cos\theta$。

答 $x^2+y^2=mx$。

示意 $\cos\theta=\frac{x}{r}$； $\therefore r^2=mx$……

極坐標在天文學與測地學的研究上特別有用。在氣象圖上，風向與氣壓或溫度的關係常用極坐標描繪。研究的問題中含有空間的方向，位移，速度，加速度，動量，旋轉，電流者以用向量（vector）爲便利。可參閱 O. Henrici 與 G. C. Turner 合著的 Vectors and Rotors, London, 1903，可得本題的要義。

§ 43. 螺旋曲線 (Spiral Curves)

螺旋曲線的方程式採用極坐標表示之，很是簡單。例如對數螺旋曲線（logarithmic spiral）在垂直坐標中雖是複雜，但用極坐標則其方程式不過是

$$r=a^{\theta} \tag{1}$$

此中 a 爲常數。從此可得

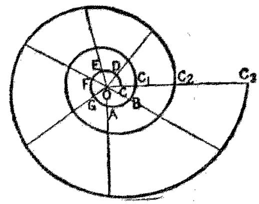
$$\log r=\theta\log a。$$

圖三十五中設 c, c_1, c_2, c_3……爲曲線上相當於 θ, θ_1, θ_2, θ_3,……

的點,其動徑各爲 r, r_1, r_2, r_3……於是

$$\log r_1=\theta_1 \log a;$$

$$\log r_2=\theta_2 \log a, \cdots\cdots$$



圖三十五

因 $\log a$ 爲常數,設爲 k,

$$\log\frac{r_1}{r_2}=(\theta_1-\theta_2)k,$$

卽曲線上任何兩點與極的距離之比，與其動徑間所夾之角成比例。設 r_1, r_2 在一直線上，則

$$\theta_1-\theta_2=2\pi=360°; \quad \log\frac{r_1}{r_2}=2k\pi,$$

π 代表 180° 如三角法所示。

同樣可證若 r_3, r_4……合在一直線上，r_1 與 r_3, r_4 ……的比的對數爲 $4k\pi$, $6k\pi$ …… 通過 O 的無論那條直線都有這個情形,故螺旋曲線可有向內向外無限圈數。

設以動徑 OC, OD, OE……OC_1, OD_1……代表發音體在已知時間內的振動數，角 COD, DOE,…… 代表由這振動所生的音 (tone) 之音階 (interval) 的對數。一點沿此曲線而前進卽表示音之連續增高其音調 (pitch); 曲線逐次經過同一直線卽表示音經過逐次的八音度 (octave)。此曲線的幾何週期性是當音連續增高其音調時，耳所能聞的週期性的圖形表示。

這個圖也可說明 Newlands-Mendeléeff 的八音度定律只須將元素依照其原子量排列在曲線之上。E. Loew (Zeit. phys. Chem. 23; 1897)以原子量 W 爲動徑 r 與變角 θ 的函數: $W=f(r, \theta)$ 且

$r=\theta=\sqrt{W}$。於是得到 $W=r\theta$。這個曲線是有名的 Archimedes 螺旋曲線。設 r 爲任何動徑，即 P_1，P_2，P_3……與 O 的距離，

$$r_2=r+\pi;\quad r_4=r+3\pi;\quad r_6=r+5\pi;\ \cdots\cdots$$

$$r_3=r+2\pi;\quad r_5=r+4\pi;\quad r_7=r+6\pi;\ \cdots\cdots$$

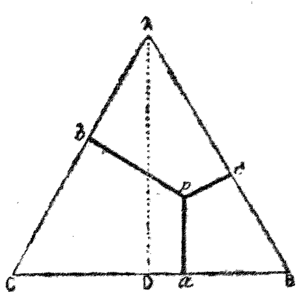
例一　描繪 Archimedes 螺旋曲線 $r=a\theta$；證明螺旋的兩個旋轉間相距 $2a\pi$。

例二　描繪雙曲螺旋曲線，$r\theta=a$；證明其上任意兩點與極的距離反比例於其動徑的夾角。

§44. 三線坐標與三角圖(Trilinear Coordinates and Triangular Diagrams)

在平面上的一點，其位置的另一表示方法，可用牠與正三角形三邊的垂直距離，此三角形稱爲參考三角形。此點與三邊的距離稱爲三線坐標。圖三十六中，正三角形頂點 A 與 BC 的距離代表 100 單位；p 爲三角形内任意一點，其三線坐標爲 pa，pb，pc 則

$$pa+pb+pc=100。$$

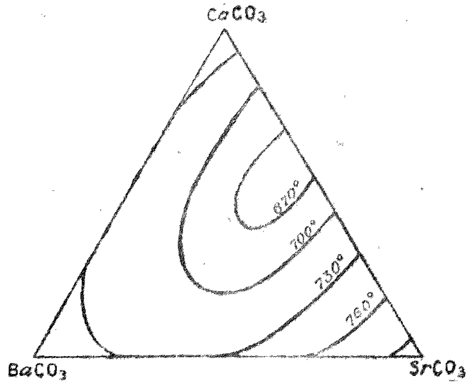


圖三十六

這性質❶在三元合金的成份與鹽的混合物成份之圖形表示時用得很廣。每個角頂代表混合物中物質的一種。三角形内任何點

❶ 這是不難見到的。過 p 引 pG 平行於 AC 交 AB 於 G；過 G 引 GK 平行於 BC 交 AD 於 F，交 AC 於 K；延長 ap 交 GK 於 E；引 GH 垂直於 AC。即能證明 $AF=HG=pb$；$pE=pc$；$DF=pc+pa$；即 $DA=pa+pb+pc$。

相當於成份爲此點三線坐標所代表的混合物。三角形邊上的一點代表二元混合物。如圖三十七表示鋇，鍶，鈣的同形碳酸鹽的三元混合物的熔點（melting point)。這樣的圖有時稱爲熔度面(surface of fusibility)。於 670° 熔解的混合物可有註明 670° 於等溫曲線任一點代表的成份，餘可類推。



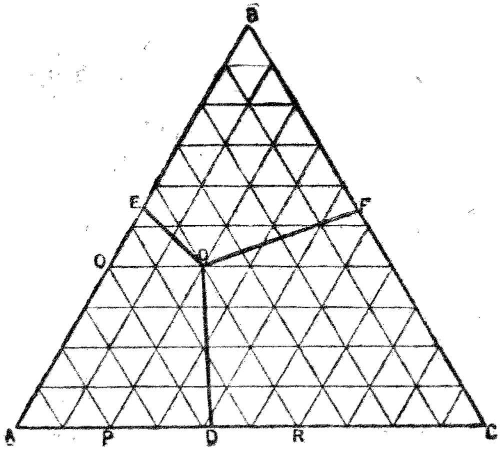
圖三十七

同理四元混合物的成份亦可用正方形內一點至各邊的距離表示之。

Roozeboom, Bancroft 與其他的人曾經用劃有平行線的三角圖如圖三十八。我們設含有三種鹽 A, B, C 的混合物，三角形 ABC 的三個頂可以代表這種鹽爲 100% 時的相[1] (phase)。任何二元混合物的成份可以用此三角形邊上一點代表之；任何三元混合物的成份可以用此三角形內一點代表之。

三角形內任何點的位置可以直接從平行於各邊的坐標決定之；例如欲知 O 點所代表的混合物的成份，我們可以從 O 引 OP、OR, OQ, 平行於各邊；再以一個角頂爲原點沿兩邊量取，AP 決定 C 的 %；

[1] 相是濃度均勻的質量。一組中所有相的個數即是可有各種濃度的質量的個數。例如在熔冰的溫度，在 H_2O 這一組中可有三個相即固體的冰，液體的水，氣體的水汽。設鹽溶於水則有一個溶液的相與一個蒸汽的相；設分出固體的鹽，則這組內又多了一個相。



圖三十八

AQ 決定 B 的 %；於是減剩下來已知 CR 可以決定 A 的 %。圖中所取的一點即爲 $A=40$，$B=40$，$C=20$。

(i)假設物質 A 的熔點爲 320°；B 爲 300°；C 爲 305°；D 點代表一種 A 與 C 的易熔合金❶ (eutectic alloy) 的熔點 215°；E 代表 A 與 B 的易熔合金的熔點 207°；F 代表 B 與 C 的易熔合金的熔點 268°。

(ii)沿 DO 則 A 與 C 的一組爲固體的相；沿 EO 則 A 與 B 的一組爲固體的相；沿 FO 則 B 與 C 的一組爲固體的相，

(iii) 在三相點 (triple point) O 處，A，B，C 的一組同時有三個相（固體，溶液，蒸汽）存在，譬如說溫度爲 186° 時。

(iv)在 $ADOE$ 面積內任何點代表着包含 A 的固體，溶液，蒸汽

❶ 易熔合金是兩種物質的混合物，其比例爲了使此合金熔於最低溫度；同樣兩種物質若依其他比例配合則熔點都比這高。

的一組——在溶液中 B 與 C 溶解於 A 中。在 $CDOF$ 面積內任何點代表着包含 C 的固體,溶液,蒸汽的一組——在溶液中,A 與 B 溶解於 C 中。在 $BEOF$ 面積內的任何點代表着包含 B 的固體,溶液,蒸汽的一組——在溶液中;A 與 C 溶解於 B 中。

每個角頂非但代表物質的 100%,並且代表物質 A, B, C 各自的熔解溫度;D, E, F 也代表易熔合金各自的溫度。故可說 D 點的溫度低於 A 或 C。同樣 E 點的低於 A 或 B;F 點的低於 B 或 C。所以從 D, E, F 各向角頂近去則熔點提高。

詳細的情形可參考 W. D. Baucroft 著 The Phase Rule, Ithaca, 1897。

§ 45. 曲線的等級(Orders of Curves)

一個曲線的級數相當於其方程式的次數。任何項的次數卽是其中所含變數上的指數之和;方程式的次數卽是其中最高次項的次數。例如,方程式 $xy+x+b^3y=0$,若 b 爲常數則此方程式爲二次;$x^3+xy=0$ 爲三次方程式;$x^2yz^3+ax=0$ 爲六次方程式,餘可類推。**第一級曲線**(a line of the first order)以一次普遍方程式

$$ax+by+c=0 \tag{1}$$

代表之。此方程式只是代表直線。**第二級的曲線**(a line of the second order)以兩個變數的二次普遍方程式

$$ax^2+bxy+cy^2+fx+gy+h=0 \tag{2}$$

代表之。凡含有最高不出 x 與 y 二次的項的方程式,其各種可能的形式,都爲方程式(2)的特例包括在此方程式內。轉動軸的方向可以消

去 bxy 這項;移動原點的位置可以消去 fx 與 gy 兩項。故此每個二次方程式可以假定其不出下列二種形式,

$$ax^2+cy^2=h, \quad \text{或} \quad y^2=fx。\tag{3}$$

第一個可代表圓,❶ 橢圓,或雙曲線;第二個可代表拋物線。故此每個二元二次方程式,不外乎代表四種曲線——圓,橢圓,雙曲線。

這裏必須指出者,設有兩個一次方程式,所有各項都移在一邊,然後相乘,可得一個二次方程式,凡適合兩個中任一原方程式的值必能適合此方程式。故此一個二次方程式除代表上述四種曲線外也可代表兩個直線。

二次普遍方程式可代表兩個直線的條件是

$$(bg-2cf)^2=(b^2-4ac)(g^2-4ch)。\tag{4}$$

二次普遍方程式所代表者爲拋物線,橢圓,或雙曲線,須看 b^2-4ac 爲零,負,或正。

例一　證明方程式

$$2x^2-10xy+12y^2+5x-16y-3=0$$

的圖爲兩個直線。

示意: $a=2$; $b=-10$; $c=12$; $f=5$; $g=-16$; $h=-3$; $(bg-2cf)^2=1600$; $(b^2-4ac)(g^2-4ch)=1600$。

例二　證明方程式 $x^2-2xy+y^2-8x+16=0$ 的圖是拋物線。

示意: 從 (2) $b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times1=0$。

例三　證明方程式 $x^2-6xy+y^2+2x+2y+2=0$ 的圖是雙曲線。

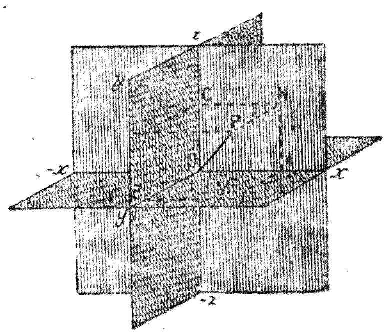
❶ 圓亦可以作爲長短軸相等的橢圓。

示意　這裏 $b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times1=32$。

§ 46. 立體幾何(Geometry in Space)

一組內含有兩個變數的變化情形，可依曲線方程式所決定的定律而以一個動點在平面上的軌跡表之，我們已經看見過了．例如第 41 節所繪的 pv 的圖。這裏所繪的是當 θ 爲常數，依有名的方程式 $pv=R\theta$ 所決定的一組 p 與 v 的變化，所得軌跡稱爲等溫曲線。

當任何三個數量 x，y，z 同時變化，我們可以任意決定兩個的値而求第三個的相當値，然後再以所得結果參照於三個一定的互相垂直平面；這些平面稱爲**坐標平面** (coordinate planes)，將整個空間分爲八個部份，稱爲八個象限。圖三十九中我們可以見到其中四個，只有第一個在**算學物理** (mathematical physics) 上用得最廣。這種形式的圖形表示稱爲空間幾何圖形，亦稱**三向度幾何** (geometry in three dimensions)。坐標平面的交線稱爲坐標軸。讀者在演算物理問題必須對於線與面的有些性質，具有清晰的觀念。



圖三十九

我們若從方程式，

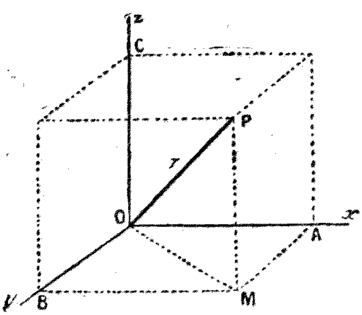
$$x+y=z$$

得有幾組 x，y，z 的相當値，參照三向度的坐標軸而描繪之，如下文所敍述，即得一個平面，或稱爲一個面。若其中一個不變，則所得圖形

爲線。所以，一個面可以作爲一個線在空間運動所得的軌跡看待。

I. 求一點，已知其坐標 OA, OB, OC。P 點參照於三個坐標平面 xOy, xOz, yOz 時的位置是從此點至三個坐標平面的垂線 PL, PM, PN 而決定的。完成一個長方體如圖三十九所示。設 OP 爲對角線。則 $LP=OA$, $PN=OB$, $MP=OC$。通過 A, B, C 作平面各平行於坐標平面；所作三個平面的交點，P 卽爲所求之點。

設 P 點平行於 Ox, Oy, Oz 的三個坐標各爲 x, y, z，則 P 點稱(x, y, z)點。正負號的規則與平面解析幾何中所用相同。決定凡直線自下向上量取爲正，自上向下量取爲負；自左向右爲正，自右向左爲負；自後向前爲正，自前向後爲負。



圖四十

若置錶於 xy 平面之上，錶面向 $+z$，則其針所走的方向爲負；若置錶於 xz 平面之上，錶面向 $+y$，則其針所走的方向亦爲負。

II. 求以一點的坐標表示此點與原點的距離。

設 Ox, Oy, Oz 爲三個垂直坐標軸，$P(x, y, z)$ 爲已知點。圖中 $MP=z$, $AM=y$, $OA=x$。求 O 與 P 的距離 r。

$$OP^2=OM^2+MP^2; \quad 或 \quad r^2=OM^2+z^2$$

但 $$OM^2=AM^2+OA^2=x^2+y^2。$$

$$\therefore \quad r^2=x^2+y^2+z^2。 \tag{1}$$

以言語表之，卽一點的三個坐標的平方之和，等於此點與原點的距離之

平方。

例 求$(2a, -3a, 6a)$這點與原點的距離。

示意： $r=\sqrt{4a^2+9a^2+36a^2}=7a$。

設 $\angle AOP=\alpha$； $\angle BOP=\beta$； $\angle POC=\gamma$，則

$$x=r\cos\alpha;\quad y=r\cos\beta;\quad z=r\cos\gamma。\tag{2}$$

無論 P 點的位置如何，這些公式終是成立的，故 x，y，z 的正負各與 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 的相同。以這些值代入(1) 再兩邊除以 r^2，我們卽得任何直線與三個坐標軸的夾角間的關係如下，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{3}$$

已知直線與 x，y，z 的夾角 α，β，γ 的餘弦稱爲方向餘弦(direction cosines) 常以 l，m，n 代之。故 (3) 可寫爲

$$l^2+m^2+n^2=1。$$

我們若知 r，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，卽能決定一點的位置。若知 a，b，c 與某直線的方向餘弦成比例，則此方向餘弦立刻可以求得。因爲，若

$$l:a=m:b=n:c;\quad \therefore\quad l=ra,\ m=rb,\ n=rc。$$

故得

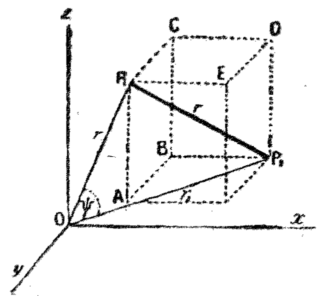
$$l=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\quad m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\quad n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}。$$

例 一個直線的方向餘弦比例於 3，-4，2。求其值。

答： $3\sqrt{\frac{1}{29}}$，$-4\sqrt{\frac{1}{29}}$，$2\sqrt{\frac{1}{29}}$。

示意： $a=3$，$b=-4$，$c=2$。

III. 求以兩點的垂直坐標表示其距離。設 $P_1(x_1, y_1, z_1)$; $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 爲兩個已知點，求 P_1, P_2 的距離。通過 P_1 與 P_2 作平面各平行於坐標平面使成長方體 $ABCDE$。聯 P_2E。依照作法(圖四十一)，$\angle P_1EP_2$ 爲直角。故



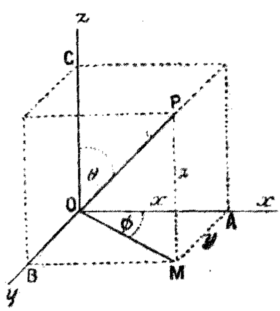
圖四十一

$(P_1P_2)^2=(P_1E)^2+(P_2E)^2=(P_1E)^2+(ED)^2+(P_2D)^2$。但顯然 P_1E 是 P_1 與 P_2 的 x 坐標之差，卽 $P_1E=x_2-x_1$，同樣 $ED=y_2-y_1$，$P_2D=z_2-z_1$。故得

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2. \tag{4}$$

例 求 $(3,4,-2)$ 與 $(4,-3,1)$ 兩點間的距離。這裏 $x_1=4$; $y_1=-3$; $z_1=1$; $x_2=3$; $y_2=4$; $z_2=-2$。

答： $r=\sqrt{59}$。



圖四十二

IV. 極坐標。表示空間的一點若不用垂直坐標，亦可用極坐標。圖四十二中，P 爲已知點，其垂直坐標爲 x, y, z; 其極坐標爲 r, θ, ϕ 如圖中所示，

(i) 從垂直坐標化爲極坐標。

(參閱第 42 節)

$$\left.\begin{aligned} x&=OA=OM\cos\phi=r\sin\theta\cos\phi\\ y&=AM=OM\sin\phi=r\sin\theta\sin\phi\\ z&=MP=r\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(ii)　從極坐標化爲垂直坐標。

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\text{；}\ \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\text{；}\ \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x}\text{。}\qquad(6)$$

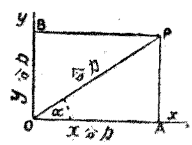
例一　求(3，60°，30°)點的垂直坐標。

答：$\left(\frac{9}{4},\ \frac{3\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{2}\right)$。

例二　求(3，12，4)點的極坐標。

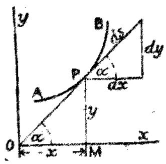
答：$\left(13,\ \tan^{-1}\frac{\sqrt{153}}{4},\ \tan^{-1}4\right)$。

按**速度平行四邊形** (parallelogram of velocities)『若以平行四邊形的 OA，OB 兩邊代表兩個分速度的方向與數量，則其合速度的方向與數量可用對角線 OP 代表之』。(圖四十三)。**速度平行六面體**(parallelopiped of velocities) 是用上述的結果推廣到三向度空間。『若以平行六面體的三個鄰邊 OA，OB，OC (圖四十二)代表三個分速度的方向與數量，則其合速度的方向與數量可用對角線 OP 代表之』。反之，若一個運動體系的速度其方向與數量可用平行六面體的對角線 OP 代表者可以分解成三個分力以通過 O 點的三個鄰邊代表其方向與數量。



圖四十三

我們採取這樣的假定卽若眞的有何矛盾的事實存在應該早已發覺。大陸方面，有本教科書上關於這重要的合力原理共載四十五種理論的證法。但我們寧可遲緩的守着 John Stuart Mill 的教訓，『任何自然定律的唯一眞實的證法……是經驗』。日常以新的規則與經驗作比



圖四十四

較，在各種不同的條件下試驗其結果，經過相當長的時期，這是最爲滿意的證法，非含糊的前提中所推出的蠢笨結論可比。❶

設 P 點沿着 APB 而進行（圖四十四）經過 s 單位長的路徑，設 $x=OM$，$y=MP$；dx，dy，ds 爲微分，且

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha;\qquad \frac{dy}{ds}=\sin\alpha;$$

或
$$\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\alpha;\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{ds}{dt}\sin\alpha。\tag{7}$$

又
$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2;\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2。\tag{8}$$

在三向度中的相當公式很易想見。

例一　一個彗星在拋物線軌道 $y^2=4ax$ 上運行，若太陽位於焦點，試求此彗星趨向太陽的速度。設 r 爲焦點至拋物線上任何點 $P(x, y)$ 的距離。依拋物線的定義 $r=x+a$；$\therefore \dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dx}{dt}$。即其向太陽的速度等於其水平速。設 s 爲軌道的長，則運動的速度 $V=\dfrac{ds}{dt}$。但若求原方程式的微係數，得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2a}{y}\cdot\frac{dx}{dt};\qquad \therefore V^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{yV}{\sqrt{y^2+4a^2}}。$$

❶ E. Mach 之言。當然我們所研究者只是一個速度。分解一個速度爲三個分速度是算學上的虛擬，爲着幫助推理而設。這也不必一定須用『向量解析』，雖然在許多物理問題的算學處理上，牠卽已取『解析幾何學』而代之。

卽彗星趨向太陽的速度爲其運動速度的 $y(y^2+4a^2)^{-\frac{1}{2}}$ 倍。在拋物線頂點，$y=0$，$\frac{dx}{dt}=0$，卽彗星無趨向太陽的速度。

例二　試證拋物線 $y^2=4x$ 上一個動點的縱坐標，變化時較其橫坐標快$\frac{2}{y}$倍；　設在 $x=4$ 的一點，橫坐標的變率爲每秒 20 呎，則縱坐標的變化率爲何？

示意：　設 $x=4$，$y=\pm 4$；　故 $\frac{dy}{dt}=\frac{2}{y}\cdot\frac{dx}{dt}$；　$\therefore$ $\frac{dy}{dt}=\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}$。卽 $\frac{dy}{dt}=\pm 2\times 20=\pm 10$。卽縱坐標以每秒 10 呎的速度增加或減少。

例三　設一個質點以速度 V 在空間運動。從速度的平行六面體，V 可以分解爲三個分速度 V_1，V_2，V_3 各沿 x，y，z 軸。從此證明，

$$\frac{dx}{dt}=V_1;\quad \frac{dy}{dt}=V_2;\quad \frac{dz}{dt}=V_3, \tag{9}$$

亦可寫爲

$$dx=d(V_1t+x_0);\quad dy=d(V_2t+y_0);\quad dz=d(V_3t+z), \tag{10}$$

此中 x_0，y_0，z_0 爲常數。故此我們可以沿着各向度寫出時間與質點所經距離的關係爲

$$x=V_1t+x_0;\quad y=V_2t+y_0;\quad z=V_3t+z_0。 \tag{11}$$

顯然 x_0，y_0，z_0 爲 $t=0$ 時質點起始位置的坐標。故 x_0，y_0，z_0 作爲常數。

讀者若不能瞭解從(9)至(11)的步驟，可取 Lagrange 對於算學

教本讀者的忠告 "Allez en avant et la foi vous viendra", 卽『向前進行，但須向後退回以增強你的能力。你要有進有退的工作着』。

在觀測之始，卽 $t=0$ 時，質點的位置是用 x_0，y_0，z_0 代表的。在時間 t，質點經過的路 s 而至(x, y, z)點。從圖四十一，

$$s=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2};\quad \text{或}\quad s=\sqrt{V_1^2+V_2^2+V_3^2}\ t,$$

從 (11)。故 s 可以由質點的起始與終末的位置而決定。

§ 47. 空間的線 (Lines in Three Dimension)

I. 已知兩直線的方向餘弦，求其夾角。圖四十一中，聯 OP_1 與 OP_2。令 ψ 爲兩直線的夾角。在 $\triangle P_2OP_1$ 中設 $OP_1=r_1$，$OP_2=r_2$，$P_1P_2=r$，從三角形的性質（見附錄一第 191 節）知

$$r^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\psi。$$

從(1)得

$$r_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2;\quad r_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$

代入上式而整理之卽得

$$\cos\psi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_1r_2}$$

若以

$$x_1=r_1\cos\alpha_1;\quad x_2=r_2\cos\alpha_2;\quad y_1=r_1\cos\beta_1;$$

$$y_2=r_2\cos\beta_2;\cdots\cdots$$

代入卽得另一種形式

$$\cos\psi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \tag{12}$$

或

$$\cos\psi=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2. \tag{13}$$

此中 ψ 為兩直線的夾角,其方向餘弦為已知的。

(i)　**當直線互相垂直時**, $\psi=90°$, $\therefore \cos\psi=\cos 90°=0$, 所以

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0 \tag{14}$$

或

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

(ii)　**當直線互相平行時,**

$$\alpha_1=\alpha_2;\quad \beta_1=\beta_2;\quad \gamma_1=\gamma_2。 \tag{15}$$

例一　兩個直線的方向餘弦各為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 與 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求其所夾的銳角。

示意: $l_1=l_2=\frac{\sqrt{3}}{4}$; $m_1=m_2=\frac{1}{4}$; $n_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $n_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,用 (13)得 $\cos\psi=-\frac{1}{2}$; $\therefore\ \psi=60°$。

例二　一個質點以速度 V 運動,設其分速度為 V_1, V_2, V_3; 所經過的路與三個軸的夾角各為 α, β, γ, 試證

$$ds\cos\alpha=dx;\quad \therefore \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{1}{V}\cdot\frac{dx}{dt}=\cos\alpha。 \tag{16}$$

故得

$$V_1=\frac{dx}{dt}=V\cos\alpha;\ V_2=\frac{dy}{dt}=V\cos\beta;\ V_3=\frac{dz}{dt}=V\cos\gamma; \tag{17}$$

結果,從(3),

$$V=\frac{ds}{dt}=\sqrt{V_1^2+V_2^2+V_3^2}。 \tag{18}$$

若有已知直線與三個軸的夾角各爲 α_1，β_1，γ_1，則 V 沿此直線的分速度應爲

$$V\cos\psi=V_1\cos\alpha_1+V_2\cos\beta_1+V_3\cos\gamma_1, \tag{19}$$

此 ψ 爲質點所經過的路與已知直線的夾角。

示意：(12)乘以 V,……

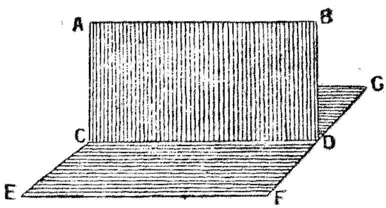
例三　在 s 直線上運動的一個質點，欲求其運動的方向。設 α，β，γ 各爲 s 的方向與 x，y，z 軸的夾角。於是

$$\cos\alpha=\frac{x-x_0}{s};\quad \cos\beta=\frac{y-y_0}{s};\quad \cos\gamma=\frac{z-z_0}{s}。 \tag{20}$$

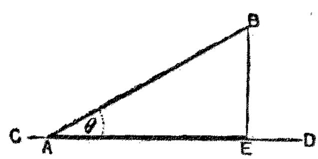
從此而證明

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=V_1:V_2:V_3。 \tag{21}$$

II. 射影 (projection)。設從已知點 P 向已知平面引垂線，則其垂足卽爲 P 點在此平面上的射影。例如圖三十九中，P 點在平面 xOy 上的射影爲 M，在平面 xOz 上的射影爲 N，在平面 yOz 上的射影爲 L。同理，P 點在直線 Ox，Oy，Oz 上的射影各爲 A,B,C。



圖四十五



圖四十六

一個曲線在已知平面上的射影卽此曲線上每點在平面上射影的軌跡。含有從已知曲線上各點作出的垂線之平面稱爲射影平面。圖四十

五中 CD 爲 AB 在平面 EFG 上的射影；$ABCD$ 爲射影平面。

例一　一段已知直線在其相交直線上的射影等於其長度乘以夾角的餘弦。在圖四十六中 AB 在 CD 上的射影爲 AE，但 $AE=AB\cos\theta$。

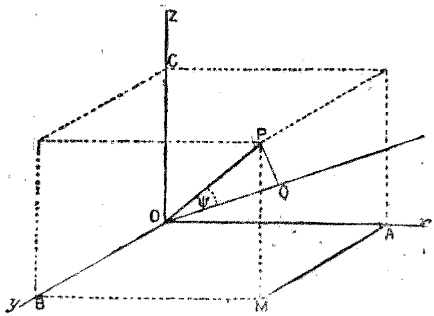
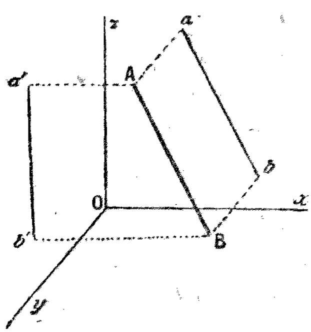


圖　四　十　七

例二　圖四十七中，證明 OP 在 OQ 上的射影等於 OA，AM，MP 按次在 OQ 上的射影的代數和。於是，設 $OA=x$，$OB=AM=y$，$OC=PM=z$，$OP=r$，於是

$$r\cos\psi=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma \tag{22}$$



圖四十八

III．垂直坐標中的直線方程式。假定空間的直線是由兩射影平面相交而成。在交線上的任何點的坐標可以適合此兩個平面方程式。圖四十八中設 ab，$a'b'$ 爲已知直線 AB 各在平面 xOz（此時 $y=0$）與平面 yOz 上的射影，則

$$x=mz+c;\quad y=m'z+c'。\tag{23}$$

這四個獨立的常數中 m 代表已知直線在平面 xOz 的射影與 x 軸夾角的正切；m' 代表已知直線在 yOz 上的射影與 y 軸夾角的正切；c 代表射影在 x 軸上的截段；c' 代表射影在 y 軸上的截段。我們可

知兩個一次聯立方程式可以代表一個直線。

例 一個直線在坐標平面 xz 與 zy 上的射影各爲 $x=2z+3$ 與 $y=3z-5$。證明其在坐標平面 xy 上的射影爲 $2y=3x-19$。此中 $c'=-5$；$c=3$；$m=2$；$m'=3$，消去 z，……

答：$2y-3x+19=0$

兩個方程式(23)的任何一個中任一變數若給以特定的值，我們即此兩個方程式而計算其餘兩個變數的值，這樣得到的一組數值所代表的點必爲(23)中兩個平面的公共點，故此這兩個方程式可以代表一個空間的直線。

我們若能以上文中所述的簡單二向度曲線的關係記憶在心，則三向度幾何中的困難可以大大的減少。例如，從第 32 節 I. 則顯然一個直線若通過已知點 (x_1, y_1, z_1)，此已知點的坐標必適合其方程式。故從(23)，必可得

$$x_1=mz_1+c;\quad y_1=m'z_1+c', \tag{24}$$

從(23)減(24)則得

$$x-x_1=m(z-z_1);\quad y-y_1=m'(z-z_1) \tag{25}$$

即爲通過(x_1, y_1, z_1)點的直線方程式。

若直線通過(x_1, y_1, z_1)與(x_2, y_2, z_2)兩點，從第 32 節的方法可求得

$$\frac{x-x_1}{z-z_1}=\frac{x_2-x_1}{z_2-z_1};\quad \frac{y-y_1}{z-z_1}=\frac{y_2-y_1}{z_2-z_1}, \tag{26}$$

即爲通過兩個已知點的直線方程式。

例　證明直線 $x+8z=19$; $y=10z-24$ 通過 $(3,-4,2)$ 與 $(-5,6,3)$ 兩點。

設 x, y, z 表示已知直線上任何點 A 的坐標; x_1, y_1, z_1 爲其上一個已知點 P 的坐標, A 與 P 的距離爲 r, 則可證明此直線的方程式爲對稱的形式,

$$r=\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \tag{27}$$

此中 l, m, n 爲此直線的方向餘弦。這是以直線的方向餘弦與其上任一已知點表示此直線方程式。(27) 稱爲**直線的對稱方程式** (the symmetrical equation of a straight line)。

例　設有直線與 x, y, z 軸的夾角各爲 $60°$, $45°$, $60°$, 且通過 $(1,-3,2)$ 點, 證明此直線的方程式爲 $x-1=\sqrt{\frac{1}{2}}(y+3)=z-2$。

示意:　$\cos 60°=\frac{1}{2}$; $\cos 45°=\sqrt{2}$。

若兩個直線

$$x=m_1z+c_1;\quad y=m_1'z+c_1'; \tag{28}$$

$$x=m_2z+c_2;\quad y=m_2'z+c_2'。 \tag{29}$$

相交, 必有一點公共, 此點的坐標必能適合此兩個方程式。換言之,兩個方程式中的 x, y, z 必須相同——即第一方程式中的 x 等於第二方程式中的 x,……

$$\therefore\quad (m_1-m_2)z+c_1-c_2=0, \tag{30}$$

$$(m_1'-m_2')z+c_1'-c_2'=0。 \tag{31}$$

但第一方程式中的 z 亦等於第二方程式中的 z，故此，若

$$(c_1'-c_2')(m_1-m_2)=(c_1-c_2)(m_1'-m_2') \tag{32}$$

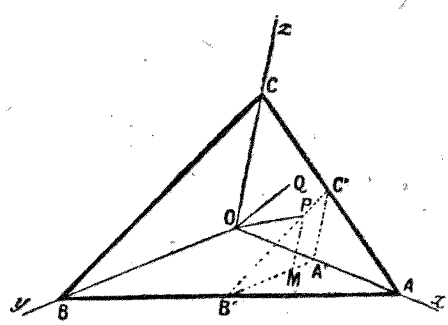
可以成立，則兩個直線相交。

例　證明兩個直線 $x=3z+7$，$y=5z+8$；與 $x=2z+3$，$y=4z+4$ 是相交的。

示意：　$(8-4)(3-2)=(7-3)(4-3)$。

交點的坐標可從(30)代入(28)或(31)代入(29)而求得。注意若 $m_1=m_1'$ 或 $m_2=m_2'$ 則 x，y，z 的值爲無限大，兩個直線各在平行平面之內；若 $m_1=m_1'$ 且 $m_2=m_2'$ 則兩個直線平行。

§ 48. 面與平面 (Surfaces and Planes)



圖四十九

I.　在垂直坐標中求一個平面的方程式。圖四十九中設 ABC 爲已知平面，欲決定其方程式。設此平面各割軸於 A，B，C 點，且 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$。從任何點 $P(x, y, z)$ 引直線 PM 垂直於 yOx 平面。則 $OA'=x$，$MA'=y$，$MP=z$。所求的方程式，欲使其結合坐標 x，y，z 與截段 a，b，c。從相似三角形 AOB，$AA'B'$。$OA:BO=A'A:B'A'$；或 $a:b=a-x:B'A'$，$\therefore$ $B'A'=b-\dfrac{bx}{a}$；$B'M=B'A'-MA'=b-y-\dfrac{bx}{a}$。又從相似三角形 COB，$C'A'B'$，PMB'，

$$OC : BO = MP : B'M'$$

或
$$c : b = z : b - y - \frac{bx}{a};$$

$$\therefore \quad bz = bc - cy - \frac{bcx}{a}。$$

兩邊除以 bc，並整理之，可得平面的截段方程式(the intercept equation of the plane)，即以三軸的截段所表示的平面方程式：

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{33}$$

與這相類的方程式，我們第 31 節(10)已經見過。換言之，方程式(33)代表通過$(a, 0, 0)$，$(0, b, 0)$，$(0, 0, c)$三點的平面。

設以 ABC(圖四十九)代表結晶體的面，則在 x，y，z 軸上的各截段 a，b，c 稱爲此面的半晶軸。在結晶學中半晶軸常以一組軸的長度作爲單位而表示之。設 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，另一個面，在 x，y，z 軸上的截段若各爲 p，q，r，則可表示爲

$$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} : \frac{c}{r}。$$

這些分數式稱爲這新面的半晶軸。半晶軸的倒數稱爲結晶面的指數。有幾組結晶學上記號，用以決定結晶體的各面關於結晶體的各軸的位置者，都以半晶軸與結晶面指數爲根據。

方程式(33)可以寫爲下列形式，

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{34}$$

這是三個變數的普遍一次方程式，方程式(33)爲平面的普遍方程式。但若以

$$Aa+D=0,\ \ Bb+D=0,\ \ Cc+D=0,$$

代入(33)很易化得(34)。

例一　求通過$(3,2,4)$，$(0,4,1)$，$(-2,1,0)$三點的平面方程式。

答：　$11x-3y-13z+25=0$。

示意：　從(33)

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=1;\quad \frac{4}{b}+\frac{1}{c}=1;\quad -\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1;\quad \therefore\ a=-\frac{25}{11};$$

$$b=\frac{25}{3};\quad c=\frac{25}{13}。$$

例二　求通過$(1,0,0)$，$(0,2,0)$，$(0,0,3)$三點的平面方程式。

答：　$x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1$。

示意：　用(33)或(34)。

設 $OQ=r$（圖四十九）爲法線，卽平面 ABC 的垂線，OP 在 OQ 上的射影等於 OA'，PM，MA'，在 OQ 上射影的和。故原點與此平面的距離爲，

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=r。\tag{35}$$

此爲平面的法線方程式(the normal equation of the plane)卽以過原點的法線的長度與方向餘弦所表示的平面方程式，從(34)得

$$\cos^2\alpha:\cos^2\beta:\cos^2\gamma=A^2:B^2:C^2;$$

用比例的合理(componendo)❶

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma):\cos^2\alpha=A^2+B^2+C^2:A^2$$

從(3)此式括號內各項之和爲 1，結果此法線的方向餘弦爲

$$\cos\ \alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ ;$$

$$\cos\ \beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ ;$$

$$\cos\ \gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ 。$$

欲免除平方根號前正負號取決的問題，我們可以(34)與(35)中兩個常數項相比較。若以$+\sqrt{A^2+B^2+C^2}$除(34)我們卽得

$$r=-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{36}$$

例　求原點與平面 $2x-4y+z=0$ 的距離。

答：$8\sqrt{\frac{1}{12}}$。

示意：$A=2$，$B=-4$，$C=1$，$D=8$。用(36)。

II.　旋轉面。正像有時爲便利計假定線是由於一點運動而產生的一樣，面可以作爲一個直線或曲線，依據一個曲線方程式所代表的定律，運動而成。運動着的線稱爲母線 (generator)。由直線因運動而成的面稱爲法面 (ruled surface)；此直線上一點的軌跡若爲空間曲線則

❶ 設 a，b，c，d 成比例，在代數學上，我們可知 $a:b=c:d$，從反理(invertendo)，$b:a=d:c$；從更理 (alternando)$a:c=b:d$；從合理 (componendo)，$a+b:b=c+d:d$；從分理 (dividendo)，$a-b:b=c-d:d$；從遞理 (convertendo)，$a:a-b=c:c-d$；從合分理 (componendo et dividendo) $a\pm b:a\mp b=c\pm d:c\mp d$。

所成之面曰捩面（skew surface）；若爲平面曲線則所成之面曰展面(developable surface)；前者如螺旋梯面，後者如錐面。一個曲線若繞一個定軸而旋轉，則所成的面曰旋轉面。球可用圓繞其直徑旋轉而成；圓柱可用長方形繞其一邊旋轉而成；圓錐可用直角三角形繞其直角邊旋轉而成；以橢圓的長軸或短軸爲軸而旋轉之則得橢圓面(ellipsoid)；拋物線繞其軸而旋轉之則得拋物面（paraboloid)。若雙曲線繞着其橫軸，則由雙曲線的兩個分枝而得兩個雙曲面（hyperboloid）。若雙曲線繞其共軛軸而旋轉，則只得一個雙曲面。前者稱爲雙葉雙曲面(the hyperboloid of two sheets)；後者稱爲單葉雙曲面（the hyperboloid of one sheet)。

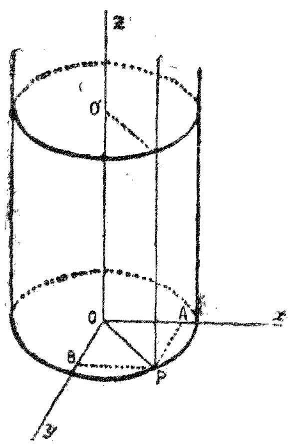


圖 五 十

III. 求一個正圓柱的面的方程式。設長方形的一邊繞 Oz 軸而旋轉。此邊上任何點的軌跡卽爲一個圓。圖五十中設 $P(x, y, z)$ 爲面上的任何點，r 爲圓柱的半徑。則所求的方程式爲

$$r^2=x^2+y^2。\qquad (37)$$

故正圓柱的方程式不隨 z 而變的。卽是 z 可以取任何的值。

例一　證明正圓錐的方程式爲 $x^2+y^2-z^2\tan^2\phi=0$，此中 ϕ 代表圓錐頂角之半。

示意：以原點爲正圓錐的頂；設 z 軸與正圓錐的軸合一。求圓錐底上的 $O'P'A'$ 如圖五十的 OPA。於是證明 $O'P'=z\tan\phi$。但

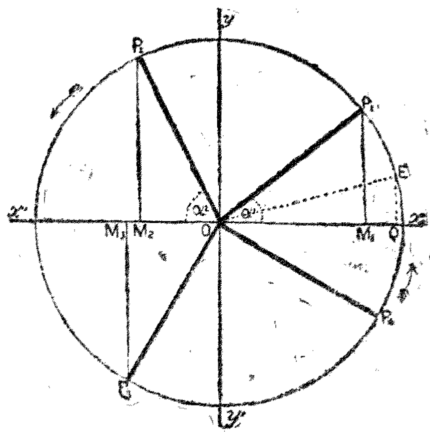
$O'P'=\sqrt{x^2+y^2}$。

例二　球的方程式爲 $x^2+y^2+z^2=r^2$。證之。以原點爲球心。取平行於 xOy 坐標面的截口。求 $O'P'A'$; $OP'=r$; $(OP')^2=(OO')^2+(O'P)^2$, $(O'P')^2=x^2+y^2$; $(OO')^2=z^2$; 等等。

這些問題在本書以後各部還須論及。

§ 49. 週期運動 (Periodic or Harmonic Motion)

圖五十一中設 P 點在一個圓周上從靜止的位置出發以等速度運動。xOx', yOy' 爲通過圓心 O 的兩個坐標軸。P_1, P_2,……爲經過時間 t_1, t_2……後, P 點的位置。從 P_1 作 M_1P_1 垂直於 x 軸。注意若 M_1P_1, M_2P_2……的方向爲正, 則 M_3P_3, M_4P_4 爲負, OP 的運動當 P 繞圓心 O 以反鐘針方向旋轉時爲正, 於是



圖五十一

$$\sin\ \alpha_1=\frac{+M_1P_1}{+OP_1};\ \sin\ \alpha_2=\frac{+M_2P_2}{+OP_2};\ \sin\ \alpha_3=\frac{-M_3P_3}{+OP_3};$$

$$\sin\ \alpha_4=\frac{-M_4P_4}{+OP_4}。$$

即若圓爲單位圓, $r=1$, 則

$\sin\ \alpha_1=+M_1P_1$; $\sin\ \alpha_2=+M_2P_2$; $\sin\ \alpha_3=-M_3P_3$; $\sin\ \alpha_4$

$= -M_4P_4$。

若此點在運動一周後繼續進行，則這串變化一再複演。在第一周中，設 $\pi=180°$，又 θ_1，θ_2……爲各象限的角，

$\theta_1=\alpha_1$；　$\theta=\pi-\alpha_2$；　$\theta_3=\pi+\alpha_3$；　$\theta_4=2\pi-\alpha_4$。

在第二周中，

$\theta_1=2\pi+\alpha_1$；　$\theta_2=2\pi+(\pi-\alpha_2)$；　$\theta_3=2\pi+(\pi+\alpha_3)$；

$\theta_4=2\pi+(2\pi-\alpha_4)$。我們可描繪曲線

$$y=\sin\alpha \tag{1}$$

只須 α 等於 $0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$；……而求得 y 的相當值。

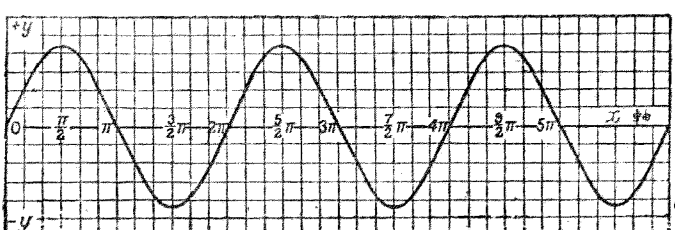
於是當 $x=\alpha=0$；$\frac{\pi}{2}$；π；$\frac{3\pi}{2}$；2π；$\frac{5\pi}{2}$；……

則　$y=\sin 0$；$\sin\frac{\pi}{2}$；$\sin\pi$；$\sin\frac{3\pi}{2}$；$\sin 2\pi$；$\sin\frac{5\pi}{2}$；……

$y=\sin 0°$；$\sin 90°$；$\sin 180°$；$\sin 270°$；$\sin 360°$；$\sin 90°$；……

$y=$　0；　1；　0；　-1；　0；　1；……

中間尚有 $\sin\frac{\pi}{4}=\sin 45°=.707$，$\sin\frac{3\pi}{4}=.707$；……



圖五十二

這樣描出的曲線作波狀形如圖五十二所示，稱爲**正弦曲線**(curve of sines)或稱**和諧曲線**(harmonic curve)。

一個函數當變數的值均勻增加時，其值若隔一定間距而重現者稱爲週期函數。牠的算式寫爲

$$f(t)=f(t+qt) \tag{2}$$

此中 q 爲正或負的整數。在本例中 $q=2\pi$。P 點的運動稱爲**簡諧運動**(simple harmonic motion)。方程式(1)即代表一種簡諧運動。

設一個週期函數 $f(t)$ 等於某個特別值，我們可以求得無限不同的 t 的值都能適合於原函數。如 $2t$，$3t$，$4t$……都能適合方程式(2)。

例一　證明 $y=\cos\ \alpha$ 的圖，其形式與正弦曲線一樣，若以正弦曲線的 y 軸向右移過 $\frac{\pi}{2}$ 的距離則與此曲線重合。(證：$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\ x$，等)此曲線的物理意義即一點依照方程式 $y=\cos\ \alpha$ 而在圓周上運動則在依照 $y=\sin\ \alpha$ 運動的一點之先 $\frac{\pi}{2}$ 或 $90°$。

例二　用圖解釋函數 $y=\tan\ \alpha$ 的週期性(注意經過 $\pm\infty$ 時的過程)。保存所作的圖待後參考之用。

設圓的半徑不是 1，而是 r，則

$$y=r\ \sin\ \alpha。 \tag{3}$$

因 $\sin\ \alpha$ 不會超出極限 ± 1 的，故 y 的最大值與最小值須爲 $+r$ 與 $-r$；r 稱爲此曲線的**幅**(amplitude)。P 點的速度可以決定 OP 所產生的角 α 的速度即所謂**角速度**(angular velocity)。設 t 表時間，q 表角速度，

$$\frac{da}{dt}=q;\quad \text{或}\ a=qt \tag{4}$$

完全一周所須的時間為

$$t=\frac{2\pi}{q}, \tag{5}$$

稱為振動週期(period of oscillation)或週期值(periodic value)或週期時間(periodic time); 2π 為波長(wave length)。圖五十一設 E 為任意的定點，設週期時間從 P 點經過 E 的時刻算起，$\angle xOE=\epsilon$ 稱為初相(epoch)，在時間 t 內，OP 所轉過的角為 $qt+\epsilon=a$，或

$$y=r\ \sin(qt+\epsilon)。 \tag{6}$$

電氣工程家稱 ϵ 為電流的『超前』(lead)；又若為負時，則稱為電流的『落後』(lag)。

例一　描繪方程式 (6)，注意此中的角是以弧度為單位，一弧度等於 $57.3°$。今令 $r=10$, $\epsilon=30°=0.52$ 弧度，又設 q 為 $0.5°$ 即 $\frac{1}{114.6}$ 弧度。

$$\therefore\quad y=10\sin(0.0087t+0.52)。$$

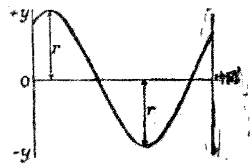
若 $t=10$, $y=10\ \sin\ 0.61=10\ \sin\ 35°=10\times0.576=5.76$。如以度為單位，求算時可以直捷些，此時

$$y=10\sin\left(\frac{1}{2}t°+30°\right)。$$

若 $t=10$, $y=10\ \sin\ 35°$，結果與前相同。所以 $r=10$, $\epsilon=30°=0.52$ 時，若　　$t=0,\quad 120,\quad 300,\quad 480,\quad 720;$

則　　　　$y=5,\quad 10,\quad 0,\ -10,\ -5$。

中間的數值可用同樣方法求之。所得曲線如圖五十三所示。試更改 ϵ 的值，觀其對於 y 的值的影響，例如令 $\epsilon=0$, $45°$, $60°$, $90°$，而注意 Oy 的變動（圖五十二）。



圖五十三

例二　這是很易證明的，函數

$$a\ \sin(qt+\epsilon)+b\ \cos(qt+\epsilon) \tag{7}$$

等於 $A\ \sin(qt+\epsilon_1)$；只須用三角公式展開(7)而得

$$\sin\ qt(a\ \cos\ \epsilon-b\ \sin\ \epsilon)+\cos\ qt\ (b\ \cos\ \epsilon+a\ \sin\ \epsilon),$$

若令

$$A\ \cos\ \epsilon_1=a\ \cos\ \epsilon-b\ \sin\ \epsilon;\ A\ \sin\ \epsilon_1=b\ \cos\ \epsilon+a\ \sin\ \epsilon \tag{8}$$

則得 $(\sin\ qt)A\ \cos\ \epsilon_1+(\cos\ qt)A\ \sin\ \epsilon_1=A\ \sin\ (qt+\epsilon_1)$。

(8)兩邊平方而相加可得

$$A^2=a^2+b^2。\tag{9}$$

(8)相除得

$$\tan\ \epsilon_1=\frac{b\ \cos\ \epsilon+a\ \sin\ \epsilon}{a\ \cos\ \epsilon-b\ \sin\ \epsilon} \tag{10}$$

故欲寫 $a\ \sin(qt+\epsilon)+b\ \cos(qt+\epsilon)$ 為 $A\ \sin(qt+\epsilon_1)$ 的形式，可從(9)(10)決定 A 與 ϵ_1 的值。

試從(8)求證

$$\frac{\sin(\epsilon-\epsilon_1)}{\cos(\epsilon-\epsilon_1)}=\tan\ (\epsilon-\epsilon_1)=-\frac{b}{a}。$$

例三　作下列二式的圖，

$$y=a\sin(qt+\epsilon);\quad y_1=a_1\sin(qt+\epsilon_1)。$$

與下式之圖相比較，

$$y_2=a\sin(qt+\epsilon)+a_1\sin(qt+\epsilon_1)。$$

例四　作下列各式的圖：

$$y_1=\sin x;\quad y_2=\frac{1}{3}\sin 3x;\quad y_3=\frac{1}{5}\sin 5x;$$

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x。$$

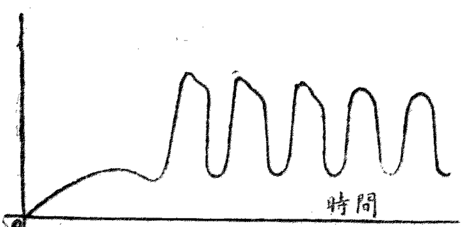
例五　$\sin x$ 與 e^x 的關係很有趣味。

試證　$y=a\sin qt+b\sin qt;\quad \dfrac{d^2y}{dt^2}=-q^2y;\quad \dfrac{d^4y}{dt^2}=q^4y;$ ……………

$y=e^{qt};\quad \dfrac{d^2y}{dt}=q^2y;\quad \dfrac{d^4y}{dt^4}=q^4y;$ ……………

圖五十一中，M 的運動，卽動點 P 在直徑 xOx' 上射影的運動是第 21 節所說週期運動很好的例。鐘擺，電流計的針，音叉等的振動；水波，交流電流，聲，光，電磁波等都是週期運動。化學元素的許多性質也是其原子量的週期函數(Newland-Mendeléeff 定律)。

好些有趣的現象最近才發見並且顯示化學作用也可有用週期性質。當鹽酸作用於一種同質異相的鉻時，所發出氫氣最近已爲 W. Ostwald (Zeit. Phys. Chem., 35; 33; 204; 1900) 所研究。他發見若以時間爲橫坐標，所發出氫氣的速度爲縱



圖五十四

坐標而描繪之得到一個很規則的週期曲線。這波紋的特殊形式隨實驗時的情境而不同。Ostwald 的曲線之一如圖五十四所示。(見 J. W. Mellor's Chemical Statics and Dynamics, London, 348, 1904)。

§ 50. 廣義的力與廣義的坐標 (Generalized Forces and Coordinates)

當一種物質受到物理的變化時，某些性質，如質量，化學成份可固定不變，而其他性質如溫度，壓力，體積則在變化。若能知道這些變數，在物質所處的已知情境中，所取的值，我們可說對於這體系的情狀已有完全的知識。這些變數不必互相獨立。例如我們曾經見過的，決定完全氣體的情狀的三個變數中若知其二，則第三個變數可從方程式

$$pv=RT$$

而決定，其中 R 爲常數。在這種情形，此第三變數稱爲因變數，其他二個則爲自變數。當任何物質體系的情狀能用 n 個自變數來決定，則此體系稱爲有『**n 次的自由**』(n degrees of freedom)，這 n 個自變數稱爲廣義坐標(generalized coordinates)。方才所看的一個體系，$n=2$，故這體系有『二次的自由』。

又如我們知某些體系，如過氮酸氣，非但氣體方程式

$$\phi(p,\ v,\ T)=0$$

中的變數必須知道，就是所有 N_2O_4 與 NO_2 的質量也須知道。設其質量各爲 m_1 與 m_2，則共有五個變數要考察，即

$$\phi_1(p,\ v,\ T,\ m_1,\ m_2)=0,$$

不過這些並非完全獨立。例如壓力可以由指定 v, T, m_1 m_2 的

值而決定；p 故爲自變數 v，T，m_1，m_2 的因變數。故

$$p=f(v,\ T,\ m_1,\ m_2)。$$

我們知道 N_2O_4 的分解爲 $2NO_2$ 視體積，溫度，與所有的 NO_2 之量而定。在普通的溫度

$$m_1=f_1(v,\ T,\ m_2),$$

於是自變數只有三個了。這種情形，這個體系稱爲有『三次的自由』。當溫度在 $135°-138°$ 以上時，這個體系中只有 NO_2 存在，其性質與有『二次的自由』的完全氣體一樣。

普遍的說，設一個體系中而含有 m 個因變數與 n 個自變數，如

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots x_{m+n}$$

此體系的情狀可由 $m+n$ 個方程式決定之。如代數中求聯立方程式的解一樣，必須 n 個獨立方程式，方能求得 n 個未知數的值。但此體系的情狀是由 m 個因變數決定的；其餘 n 個自變數可從 n 個獨立方程而決定之。

設一個含有『n 次自由』的已知體系，受到外力

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\cdots\cdots X_n,$$

除了熱或功的形式外，不使這體系有能的得失，且 n 個自變數可用

$$dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\cdots\cdots dx_n$$

代之。因爲一個體系所作或所受的功可用力與位移之積量之，這些外力 X_1，X_2，$\cdots\cdots$所作的功 dW 視轉變的性質而定。故

$$dW=X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots\cdots+X_ndx_n,$$

此中 X_1，X_2，$X_3\cdots\cdots$等係數稱爲作用於此體系的廣義的力 (generalized forces)。P. Duhem 在他的著作，Traité Élémentaire de Mécanique Chimique fondée sur la Thermodynamique, Paris, 1897－99 中採用廣義的力與廣義的坐標。

第三章　有奇異性的函數

『雖然物理定律不容有完全的突變，但與突變所可有的接近，並無限制。』❶——W. Stanley Jevons.

§ 51. 連續函數與不連續函數(Continuous and Discontinuous Functions)

連續性的定律肯定的說沒有一種變化可以突然發生的。這裏所含的觀念從本書第2節中讀者諒已熟悉。在那裏說明已知時間內化學反應中物質轉化的量 x，當觀測的時間漸漸縮短時，則亦漸漸減小，直到最後當時間縮至爲零，則物質轉化的量也接近於零。這種情形，x 非但是 t 的函數，並且是 t 的連續函數。這種反應的經過可用一點沿曲線

$$x=f(t)$$

的運動代表之。若一個物質受了兩種不同的溫度的影響而有兩種情狀則須於平面上鄰近的兩點代表之，連續性的原理說在任何居間的溫度時物質的情狀須以這兩點間的一點代表之；動點欲從曲線上一點 a 至其上另一點 b，必須逐一取 a, b 之間的值而決不會越出這曲線。這

❶ "Although a physical law may never admit of a perfectly abrupt change, there is no limit to the approach which it may make to abruptness." —W. Stanley Jevons.

是連續函數的特性。上文中已經見到好幾個例。大部的，或許可以說是全部的，自然變化可用連續函數來代表。所以老的經驗之談說：自然是繼續不斷的。連續性的定律，雖至今我們還是默認，但看起來好像未必恆是正確。卽在有些最簡單的現象中，例外似能發生。普遍的說，不連續函數可以分作兩類：第一種是函數的圖還得突然中止而在平面上的其他部再見，換言之卽發生一種折裂 (break)；第二種是函數的圖突然變換方向而不生折裂，❶此時卽有轉向點 (turing point) 或稱迴折點(point of inflexion)發生。

別種不連續性亦許還能發生，但在物理的問題普通不會遇到。例如當 x 取某些特別值時 $y=f(x)$ 的值變爲無限大，此函數稱爲不連續。這種不連續性當 $x=0$ 在 $y=\frac{1}{x}$ 這式中卽能見到。此式的微係數

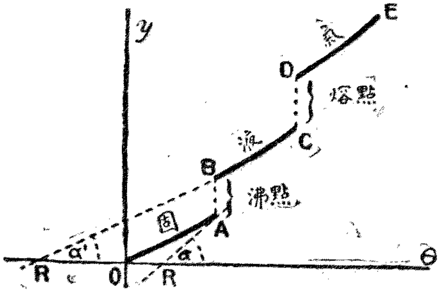
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

當 $x=0$ 時亦爲不連續的。其他的例如 $x=0$ 時的 $\log x$，與 $x=\frac{\pi}{2}$，……時的 $\tan x$ 等讀者可自行覆驗之。Boyle 方程式，$pv=$ 常數，的圖當沿兩軸至無限遠處亦稱爲不連續。

§ 52. 附有折裂的不連續性 (Discontinuity Accompanied by Breaks)

若以一種冷的固體放在發熱之處，則熱被吸收，固體的溫度 θ 是

❶ 有時『折裂』二字用於兩種不連續性，不加分別。自然現象是否眞的『折裂』存在，實是疑問。我想我們應稱轉向點爲『奇異性』而不是『不連續性』。(見 S. Jevon's Principle of Science, London, 1877。)



圖五十五

被吸收的熱量 Q 的函數。到了固體開始熔解之時則吸熱更多（熔解潛熱）而溫度不增。當此物質成爲液體集團狀態，則溫度爲液體所吸熱量的函數，直至沸點，相似現象又要發生。熱被吸收但溫度並不增加（蒸發潛熱）的現象繼續至液體完全汽化後而止。這些現象在圖五十五中以曲線 $OABCDE$ 代表之。若以熱量 Q 作爲溫度 θ 的函數，則曲線 $OABCDE$ 的方程式爲

$$Q=f(\theta)。$$

這函數在 A, B 兩點間，在 C, D 兩點間稱爲不連續。在這些點處折裂可以見到。$f(\theta)$ 當然是一個不連續函數，因爲物質的狀態是用一點代之，若小量的熱加於其上，在 A, B 兩點間或 C, D 兩點間，溫度所受的影響是不能覺察得出。這現象的幾何意義如下：在相當的同一橫坐標的 A 點與 B 點處此曲線的切線，普通有不同的兩條，其斜度各爲 $\tan\,\alpha$ 與 $\tan\,\alpha'$。換言之，從第 38 節卽有

$$\frac{dQ}{d\theta}=f'(\theta)=\tan\,\alpha=\tan\angle\theta RA;$$

$$\frac{dQ}{d\theta}=f'(\theta)=\tan\,\alpha'=\tan\,\angle\theta R'A,$$

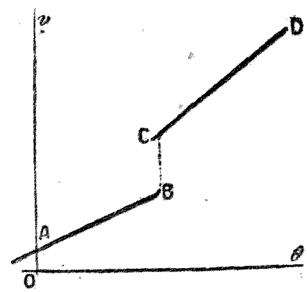
卽說，函數 $f'(\theta)$ 是不連續的，因爲微係數有兩個不同的數值，而這些

數值是用不連續性發現處兩段曲線上每點所作的切線的斜度決定的。

這例中不連續性的物理意義是：在熔點，物質的比熱（一克的固體，欲使其溫度昇高一度時所需的熱量稱爲比熱）可有兩個數值，一個相當於固體狀態的；一個相當於液體集團狀態的。在沸點亦有與此相仿的一組變化。

這裏必須指明者曲線 $OABC$ 上的業經證實的不連續性亦許只是表面如此。其折角亦許可以使之圓滑。若說此曲線在 A，B 實爲連續，但是溫度因加熱而生的變化爲不連續，或許較爲正確。

又如圖五十六顯示的是溫度在熔點鄰近時描繪磷的體積變化的結果。AB 代表固體膨脹曲線，CD 代表液體膨脹曲線，在 B，C 之間有一個折裂。磷在其熔點故可有兩種不同的膨脹係數，一個相當於固體狀態，一個相當於液體集團狀態。當一個體系從一種狀態過入另一種狀態時，相似的變化會得發生，如硫從斜方晶系變成單斜晶系；鎂與硫酸鈉的混合物變成硫酸曹達苦土(astracanite)等。這種變化發生時的溫度稱爲臨界點(transition point)。



圖五十六

§ 53. 溶液中含水物的存在(The Existence of Hydrates in Solution)

另一個例。設 p 爲酒精在水溶液中成分的百分數；s 爲 15° 時此溶液在真空中的比重（H_2O 在 15° 的比重爲 9991.6）可得，下表

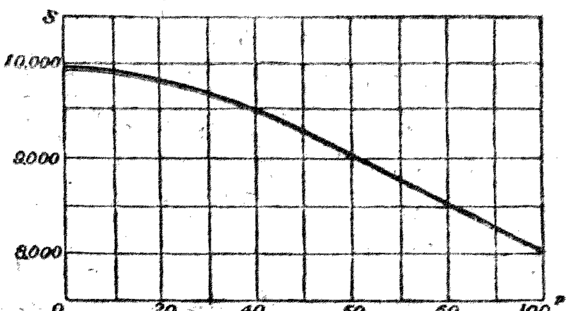
是 Mendeléeff 所供給的:——

p	s	p	s	p	s
5	9904.1	30	9067.4	80	8479.8
10	9831.2	35	8953.8	85	8354.8
15	9768.4	40	8838.6	90	8225.0
20	9707.9	45	8714.5	95	8086.9
25	9644.3	50	8601.4	100	7936.6

根據經驗知道實驗的結果很可用方程式

$$s=a+bp+cp^2 \tag{1}$$

代表之,這是抛物線的普遍方程式,其中 a, b, c 爲常數〔見第 35 節(2)〕或者此方程式亦可代表兩個直線(見第 45 節)。描繪上表的材料得圖五十七所示之曲線。



圖五十七

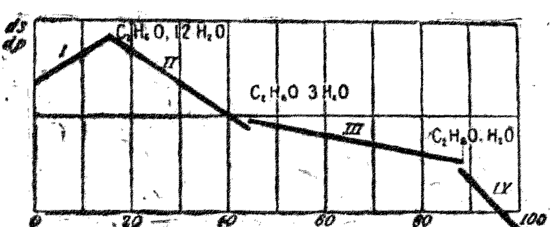
正因我們希望在溫度高出分離開始之初時，化合物既可生成亦可分解,且在任何已知溫度時,原有化合物與分離所成物的量之間有一定的關係存在，故亦希望在高出分離溫度時溶液中可有一定而不穩固的含水物存在。若已經分離的物質果眞能與溶劑結合，依照溶液的性質

而成各種化合物，則許多溶液的物理性質如密度，導熱性等，自然要隨這些化合物的量與性質而定，因為化學的結合常與體積，密度，熱或其他有聯帶變化的。

假定這種一定的化合物的量是與溶液濃度成比例，則隨濃度 p 的變化而生的密度 s 的變化率為 p 的直線函數，換言之，$\frac{ds}{dp}$ 須以直線方程式代表之。求(1)的微係數，得

$$\frac{ds}{dp}=b+2cp, \tag{2}$$

此中 dp 為兩種溶液成份百分數之差，ds 為其相當的密度之差。(2)的右邊相當於直線方程式(見第 31 節)。用這方法而整理實驗所得的材料，Mendeléeff 求得 $\frac{ds}{dp}$ 是不連續的。以 $\frac{ds}{dp}$ 為縱坐標，濃度 p 為橫坐標而描繪時，在酒精為百分之 17.56；46.00；與 88.46 三處，見有三個折裂。這些濃度相當於化合物之有 $C_2H_5OH\cdot12H_2O$，$C_2H_5OH\cdot3H_2O$ 與 $3C_2H_5OH\cdot H_2O$ 成份者，如圖五十八所示。折裂間的曲線作為代表在溶液中存有相當含水物的地帶。



圖五十八

算學上的討論是：一個連續曲線的微係數成為一個直線或另一曲

線；而實為不連續的曲線或由許多不同的曲線所合成者則其微係數變成一串直線。每段直線所代表者是題中特殊物理性質，關於溶液中在那濃度時所有假設的不穩固化合物的量的變化率。曲線方向的一個突變，使這曲線的一次微係數折裂為兩個不相銜接的曲線。這種討論，Pichering 在決定溶液的物理性質的一串精到而辛苦的研究中已經採用得很多。Crompton 求出若一種溶液的導電性作為其成份百分數的函數如

$$K=a+bp+cp^2+fp^3, \tag{3}$$

則一次微係數為拋物線如上(1)的形式，二次微係數不為 p 的連續函數如

$$\frac{d^2K}{dp^2}=A+Bp, \tag{4}$$

而知其含有一串直線，折裂的位置與從一次微係數 $\frac{ds}{dt}$ 所得者恰相同。若 c，p 為已知，則常數 A，B 的值很易求得。設 (p, s) 曲線的斜度有突變，$\frac{ds}{dp}$ 是不連續；設 $\left(\frac{ds}{dp}, p\right)$ 曲線的斜度有突變，則 $\frac{d^2s}{dp^2}$ 是不連續。

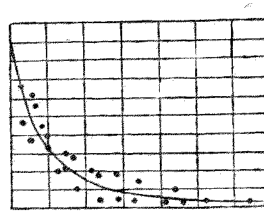
不過我們的工作畢竟只是利用經驗公式，而『用着微弱的經驗式的魔術與向着玄妙的初等算學的乞訴，都不足以合法的使實驗結果的不連續性更真實些，只有正當的描繪出來時，牠們所取的形式才是真相』。❶

❶ O. J. Lodge, Nature, 40; 273; 1889; S. U. Pichering, ib., 40; 343; 1889.

這裏必須指明，實驗結果的微係數常常與實驗差誤爲同級的數量。❸ 這是很嚴重的阻礙。Pichering 已經試過，欲多少消去些實驗差誤，而使描繪實驗結果所得的曲線變爲光滑，再求此結果的微係數。顯然，使實驗結果變爲光滑的方法卽在最有經驗的人之手也是一種危險的運算。眞的大家認爲實驗王子 Regnault 就在應用這方法於飽和蒸汽的水氣壓力的觀察時，忽視了一個重要的現象。Regnault 以爲圖六十四中曲線 OPQ 上無奇異點 P，當水在 $0°$ 從液體狀態變爲固體狀態時。讓給 J. Thomson 來證明『冰與蒸汽的曲線』,與『水與蒸汽的曲線』有着不同的斜度。

§ 54. 使曲線光滑法(The Smoothing of Curves)

觀測兩個變數的一串相當變化的結果可在一張方格紙上描繪成許多點。圖五十九中的點，表示各溫度正在分離的碳酸鈣的氣壓力。引一個曲線使儘量與所有各點接近。結果所得的曲線作爲結合此二個變數的普遍公式(已知或未知)的圖形表示。各點與曲線的差異認爲是受了觀測差誤的影響。普通總是選取曲率最小的曲線使通過或接近最大多數的點，且曲線的兩邊須有相同點數。這種曲線稱爲**光滑過的曲線**(smoothed curve)參閱第 106 節。



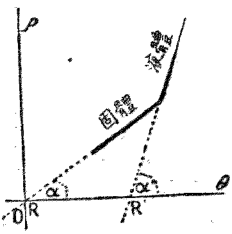
圖五十九

使曲線光滑的最普通的方法之一是用曲線板放在預備描繪的位置而用筆沿板繪之。在實際工作中知道相似的曲線板不能用之於所有的

❸ 讀過第五章第 106 節後，對本段文字更能懂得透徹。讀者到了那時可以回來一讀。

曲線。曲率最大的板用處最少。曲線板的選取與運用是有賴於趣味與主意的事。應用『法國曲線器』(French curves)時更可隨意些。Pichering 採用彎曲的鋼條持其兩端。這種曲線板在靜力學上證明可引一個等曲率的線。此線稱爲『彈性曲線』(elastic curve)。參閱 G. M. Minchin 所著 A Treatise on Statics, Oxford, 2; 204; 1886。

§ 55. 方向突變的不連續性 (Discontinuity accompanied by a Sudden Change of Direction)



圖六十

固體的氣壓力隨温度而繼續增加，直到熔點則氣壓力突然較前增加得更快。圖六十即其圖形表示。物質的熔解即在固體曲線與液體曲線之交點。氣壓力本身是不連續的。在熔點則固體與液體的集團狀態的氣壓力，數值相同。但很淸楚在這臨界點兩個曲線的切線斜度是不同的，因爲

$$\tan\ \alpha=f(\theta)=\frac{dp}{d\theta}$$

比較

$$\tan\ \alpha'=f(\theta)=\frac{dp}{d\theta}$$

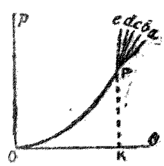
爲小。在臨界點，(p,θ) 曲線有兩個切線。例如固體的苯 (benzen) 的 $\frac{dp}{d\theta}$ 之值大於其液體的。數值各爲 2.48 與 1.98。

設此兩個曲線的方程式各爲 $ax+by=1$；$bx+ay=1$，則其根爲

$$x=\frac{1}{a+b};\quad y=\frac{1}{a+b},$$

代表交點的坐標。欲說明這種不連續性，我們考察下列各現象：——

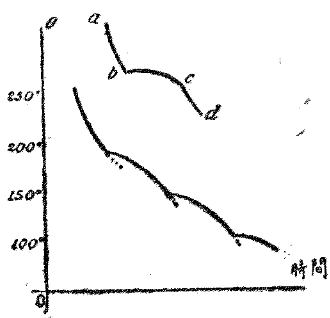
I.　臨界溫度。Cailletet 與 Collardeau 有個不必知道液體而可求物質的臨界溫度的妙法。❶ 以溫度爲橫坐標描繪同一物質的各種重量受熱後在定體積所生的氣壓力，所得的一組曲線，當物質有部份尙爲液體時，是互相重合的，因『飽和蒸氣所作用的壓力，只視溫度而定，但與蒸氣接觸的液體的量無關』。高於臨界溫度，在同體積中，各種質量的物質



圖六十一

即生不同的壓力。從這點以上，壓力與溫度的曲線不再重合。於是得到一組曲線共有一點如圖六十一中之 P，其橫坐標 OK 即代表臨界溫度。如前所述在 P 點曲線 Pa, Pb,……等的切線是與 OP 的不同。

II.　冷卻曲線　若鉍的純液的冷卻溫度與時間相對而描繪，結果



圖六十二

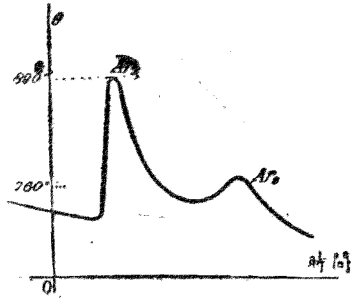
所得曲線稱爲冷卻曲線（即圖六十二中的 ab）是連續的，但在一部份變爲固體時，此曲線即取另一方向 bc，繼續下去直到全部變爲固體時，此曲線的方向又生變化，然後繼續沿 cd 進展很有規則。以鉍爲例則 b 點是 268°。

若同樣描繪鉍，鉛，錫的合金(Bi, 21 Pb, 5.5; Sn, 75.5)的冷卻曲線，方向的第一個變化在 175°，此時固體的鉍沉澱而出；在 125° 方向又變，此時固體的鉍與錫同時沉澱；

❶ L. P. Cailletet 與 E. Collardeau, Ann. Chim. Phys., [6], 25; 522; 1891。注意臨界溫度即爲一種溫度，高於此者將使物質除氣體狀態外不能存在。

最後在 95° 又有一個變化，此時三種金屬凝固成易熔合金。

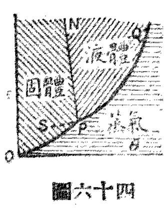
這些冷卻曲線在研究金屬與合金的成份上十分重要。鐵從白熱而冷卻的曲線特別有趣，已經發生許多考究。曲線顯示方向的變化約在1130°；850°（稱 Ar_3 爲臨界點），770°（稱 Ar_2 爲臨界點），500°（稱 Ar_1 爲臨界點）；450°－500°；400°。這些變化的數量



圖六十三

視鐵的純雜而異。有些就是最純的鐵也甚顯著。這種在冷卻曲線上各點突然的放熱（又稱復輝）使得許多人相信在這些溫度的鄰近鐵有同質異相的狀態存在。❶圖六十三顯示鐵的冷卻曲線，這部份是最有趣的區域，卽 Ar_3 與 Ar_2 等臨界點。

§ 56. 三相點 (The Triple Point)



圖六十四

另一個例，也是說明用圖解法代表自然變化，有其美麗而明白的性質的很好的例，可以在此述之。

(a)當水爲一部份液體一部份蒸氣封閉於器內，壓力與溫度的關係可用曲線 PQ（見圖六十四）代表之；當液體與蒸氣接觸而平衡時相當於任何已知溫度的壓力可以從此知之。這曲線稱爲**蒸汽線** (steam line)。

(b)同樣，若封閉器內裝着固體的冰與液體的水，則此混合物的壓

❶ W. C. Roberts-Austen 論文載 Proc. Soc. Mechanical Engineers, 543; 1891; 102; 1893; 238; 1895; 31; 1897; 35; 1899; 從這些論文中可知其詳。

力完全由溫度而決定。壓力與溫度的關係可用曲線 PN 代表之，此曲線稱為**冰線**(ice line)。

(c)冰可與其蒸氣成穩定的平衡，我們可以描繪冰的氣壓力關於其溫度的變化。曲線 OP 即代表冰的氣壓力隨溫度的變化。這曲線稱為**白霜線**(hoar frost line)。

一個平面於是被三個曲線 OP, PN, PQ 分為三部份。設一點在這三者之一中即代表水的一種特殊集團狀態，或為冰或為液體或為水汽。❶設一點在界線之上即相當於兩種集團狀態的同時存在。最後，在 P 點，只有在這一點，三個集團狀態，冰，水，水汽同時存在。這點稱為**三相點**(triple point)。水的三相點的坐標為

$$p=4.58 \text{ mm.}, \quad T=0.0076° \text{ C.}$$

I.　壓力對於一個固體的熔點的影響。在第 27 節中已經討論過兩個方程式：$dQ=T\,d\phi$；$\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$。以 dv 除前式，而代入後式，則得

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)_T=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v, \tag{1}$$

即說溫度不變(絕對溫度 $T°$)，體積 v 每變化一單位時熵 ϕ 的變化等於以體積不變，溫度每變一單位時壓力的變化。設有物質一部份為一種狀態『1』，一部份為另一種狀態『2』，於其上加以小量的熱 dQ，一個與成比例的質量 dm 即變化其狀態如

---

❶ 在固體區域中可以發見液體，此時稱為介穩狀態(metastable state)是某種不穩定的情形。例如過冷的液體可沿曲線 QP 而繼續至 S。而不轉變方向沿 PM。

$$dQ = L_{12} dm,$$

此中 L_{12} 是常數代表從狀態『1』至狀態『2』潛熱的變化。從熵 ϕ 的定義，

$$dQ = T\ d\phi;\quad 故\quad d\phi = \frac{L_{12}}{T} dm。 \tag{2}$$

設 v_1 與 v_2 爲物質各第一與第二狀態時的容度（specific volume），

$$dv = v_2 dm - v_1 dm = (v_2 - v_1) dm。$$

由(2)與(1)

$$\therefore\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)_T = \frac{L_{12}}{T(v_2 - v_1)};\ \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{L_{12}}{T(v_2 - v_1)}。 \tag{3}$$

最後一個方程式可以告訴我們物質的兩種狀態同時存在壓力的變化會怎樣使溫度變化，若 v_1，v_2，T，L_{12} 爲已知。

例一 設冰的容度爲 1.087 而水的爲 1，當壓力增加一個大氣壓力時（冰的潛熱爲 80 卡）求水的凝固點所下降之數。此中 $v_2 - v_1 = 0.087$，$T = 273$，$dp = 76$ 厘米（水銀柱）。水銀比重爲 13.5；橫截面爲一個平方厘米的水銀柱的重量爲 $76 \times 13.5 = 1033$ 克。故 $dp = 1033$ 克，$L_{12} = 80$ 卡 $= 80 \times 47,600$ C. G. S. 的動力單位。從（3），$dT = 0.0064°$ C. 每個大氣壓力。

例二 就萘（naphthalene）而言：$T = 352.2$；$v_2 - v_1 = 0.146$；$L_{12} = 35.46$ 卡，求壓力每增加一個大氣壓力時熔點的變化。

II. 在三相點，pT 曲線的斜度。設一個物質從狀態 1 至 2；2 至 3；3 至 1 的轉變中其潛熱各爲 L_{12}；L_{23}；L_{31}；在狀態 1，2，3

中的體積各爲 v_1，v_2，v_3；又 T 爲三相點的溫度。則 $\frac{dp}{dT}$ 爲這些曲線上三相點的切線的斜度，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{12}=\frac{L_{12}}{T(v_2-v_1)};\ \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{23}=\frac{L_{23}}{T(v_3-v_2)};$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{31}=\frac{L_{31}}{T(v_1-v_3)}。\tag{4}$$

容度與潛熱在狀態的三種變化中普通是不同的，故在三相點，三個曲線的切線斜度是不同的。水的白霜線與水汽線的切線的斜度之差爲

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{13}-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{23}=\frac{1}{T}\left(\frac{L_{13}}{v_3-v_1}-\frac{L_{23}}{v_3-v_2}\right)。\tag{5}$$

在三相點

$$L_{13}=L_{12}+L_{23};\quad (v_3-v_1)=(v_2-v_1)+(v_3-v_2)\tag{6}$$

例　普通，體積在熔解中的變化 (v_2-v_1) 比在蒸發中的變化 (v_3-v_2) 或昇華中的變化 (v_3-v_1) 要小得很多；故此當與其他體積的變相比時 v_2-v_1 可以略去不計。從(5)與(6)，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{13}-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{23}=\frac{L_{12}}{T(v_3-v_2)}。\tag{7}$$

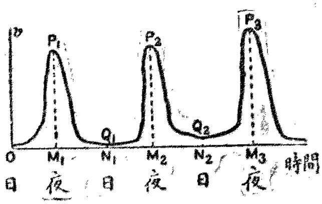
從此計算在三相點，水的白霜線與水汽線的切線斜度之差。水的潛熱 $=80$；$L_{12}=80\times 42700$；$T=273$，$v_3-v_2=209,400$ 立方厘米。以這些值代入上方程式的右邊。

答：　0.059。

上述的推論已經就水，硫，磷用實驗作過試驗；結果與理論很是符

合。

§ 57. 函數的極大值與極小值 (Maximum and Minimum Values of a Function)



圖六十五

設以某建築物內氣量計上所表示通過點燈用的煤氣的速度 V 為縱坐標，以時間 t 為橫坐標可得一個曲線時圖六十五所示。可以見到在白晝不很消費煤氣，而夜晚則大大的需要。當 t 從一個值變到另一個值，V 則有時增加有時減少。結果，此函數必有某一個值，V 在此以前是增加，一到那裏開始減少，卽當 t 取這特殊值時 V 大於其所鄰近的值；在這種情形，V 稱為**極大值**。反之，$f(t)$ 也必有這樣的值，在此以前 V 是減少的，到此則開始增加。當 t 取某些特殊值時而 V 小於其鄰近所有的值，V 卽稱為**極小值**。

設想此曲線的一個變動的縱坐標，垂直於 Ot 而沿 Ot 移動，漸漸增大，直到 M_1P_1 的位置，然後再漸漸減小。此縱坐標在 M_1P_1 處時稱為有極大值。這個漸漸減小的縱坐標，繼續運動，直到 N_1Q_1 的位置為止此後卽漸漸增大。這種情形，此縱坐標在 N_1Q_1 時稱為有極小值。

『極大值』與『極小值』不必是函數的全部值中的最大者與最小者，因為同一函數可有幾個極大值與極小值，其中特殊的一個可以大於也可以小於其餘的。徒步而行山路時每一山頂卽可代表一個極大值，每一深谷卽可代表一個極小值。

上圖中的曲線是代表實測所得兩個變數的相當值的近似圖形，至於這函數的算學形式無從知道。

例　描繪方程式 $y=\sin x$ 所代表的曲線。令 x 取 $\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π……等值。證明

當 $x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{2}$，$\frac{9\pi}{2}$……時，y 有極大值；

當 $x=-\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$，$\frac{7\pi}{2}$……時，y 有極小值。

結果所得的曲線爲諧和曲線或稱正弦曲線，見圖五十二。

微分法的最重要應用之一卽決定一個函數的極大值與極小值。下見諸例中，許多可用代數或幾何的特別方法解之。但是微分法所提供的方法可以很確切很容易而解決這些問題。

§ 58. 一個函數的極大值與極小值的求法 (How to find Maximum and Minimum Values of a Function)

一個棒球若向空中上擲，其速度 $\frac{ds}{dt}$ 漸近減少直至其最高點爲止。此時速度爲零。以後速度則漸增加直到接在手中爲止。換言之，$\frac{ds}{dt}$ 最初爲正，然後爲零，然後爲負。意思卽說球與地面的距離 s，當速度 $\frac{ds}{dt}$ 最小時，其值最大；$\frac{ds}{dt}$ 爲零時 s 有極大值。

普通，我們以向上的距離爲正，向下的爲負。推廣到速度則向上的速度爲正，向下者爲負。一個落石的速度是負的，雖然其絕對值常在加大(代數上卽將稱此速度爲減小)。這個習慣的規定也得推廣到加速度；

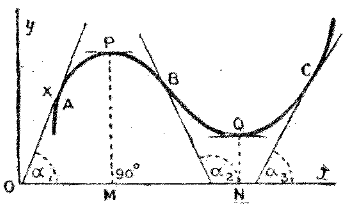
不過速度漸增時我們常稱爲正，漸減時爲負，如第7節所示。

數值的例　一個物體在 t 時與地面的距離 s 如下式

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t\ ,$$

此中 v_0 爲出發時的速度；g 爲常數，向上時爲 -32，向下時爲 $+32$。今以棒球從手中上擲給以每秒 64 呎的速度，當 $\frac{ds}{dt}=0$ 時球至最高點，但

$$\frac{ds}{dt}=-32t+v_0;\quad \therefore\quad t=\frac{v_0}{32}=\frac{64}{32}=2,\ \text{其時}\frac{ds}{dt}=0。$$



圖六十六

圖六十六中曲線上 X 點的切線與 x 軸的夾角爲 α，設 X 點在曲線上移動由 A 至 P，由 P 至 B，由 B 至 Q，由 Q 至 C，試觀其斜度的變化。注意 $\tan 0°=0$；$\tan 90°=\infty$；α 小於 $90°$ 則 $\tan\alpha$ 爲正；α 大於 $90°$ 而小於 $180°$ 則 $\tan\alpha$ 爲負。

最初當 X 點從 A 至 P 則 x 增加，y 亦增加。切線與 x 軸成銳角 α_1，此時 $\tan\alpha$ 爲正，卽

$$\frac{dy}{dx}=+。\tag{1}$$

在 P，切線平行於 x 軸，y 是極大値，$\tan\alpha$ 爲零，卽

$$\frac{dy}{dx}=0;\tag{2}$$

次之，一過 P 點，切線與 x 軸成鈍角，$\tan\alpha$ 爲負，卽

$$\frac{dy}{dx}=-。\tag{3}$$

在 Q，切線又與 x 軸平行，y 爲極小值，$\tan\alpha$ 又等於零，即

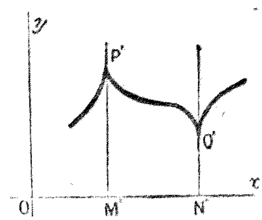
$$\frac{dy}{dx}=0。\tag{4}$$

過了 Q，切線與 x 軸又成銳角，α_3，故

$$\frac{dy}{dx}=+。\tag{5}$$

從此我們見到每當$\dfrac{dy}{dx}$爲零時，y 即**爲極大值或極小值**。故得規則：當一次微係數從正至負而變號時，函數即有一個極大值；當一次微係數從負至正而變號時，函數即有一個極小值。

有些曲線的極大值與極小值很像圖六十七中的 P' 與 Q'。這些曲線在 P' 與 Q' 稱**爲有逆點**(cusp)。



圖六十七

在圖六十七中可見 x 增加，y 接近於極大值，而切線 $M'P'$ 與 x 軸成銳角。即$\dfrac{dy}{dx}$爲正。在 P' 切線與 x 軸垂直，結果$\dfrac{dy}{dx}$爲無限大。P' 點稱爲會切點。經過 P' 後$\dfrac{dy}{dx}$爲負，同樣切線接近於 $N'Q'$ 時$\dfrac{dy}{dx}$爲負；在 Q'，$\dfrac{dy}{dx}$爲無限大，經過 Q' 後，$\dfrac{dy}{dx}$爲正。描繪 $y=x^{\frac{2}{3}}$可得其會切點在 O。

一個函數變爲零或無限大時可以變號，故欲使其有極大值或極小

值時必須此函數的一次微係數爲零與無限大。結果欲求一切能使 y 有極大值與極小值的 x 之值；必使一次微係數等於零或無限大，然後求能適合這些條件的 x 之值。

例一　考察方程式 $y=x^2-8x$，　$\therefore \frac{dy}{dx}=2x-8$。令一次微係數等於零，即得 $2x-8=0$；或 $x=4$。加 ±1 於此值，且代入原方程式，

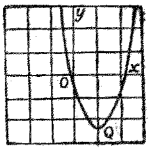
$$\text{當 } x=3 \text{ 時 } y=9-24=-15;$$
$$x=4 \text{ 時 } y=16-32=-16;$$
$$x=5 \text{ 時 } y=25-40=-15。$$

故 $x=4$ 時 y 爲極小值，因 x 的值稍取大些或小些則使 y 的值變大。加 ±1 不過是第一步的近似罷了。函數的極小值亦許在 3 與 4 間或 4 與 5 間還有存在。若所取的值漸漸變小，則近似的方法可以儘量逼近。我們假使不用 ±1，而用很小的數 $\pm h$，則當

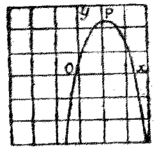
$$x=4-h \text{ 時，} y=h^2-16;$$
$$x=4 \quad\quad \text{ 時，} y=\quad -16;$$
$$x=4+h \text{ 時，} y=h^2-16。$$

所以 h 無論取得如何之小，y 的相當值總之大於 -16。即說 $x=4$ 使此函數有極小值 Q（見圖六十八）。描繪原方程式即可見到如圖六十八。

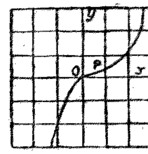
例二　證明 $y=1+8x-2x^2$，當 $x=2$ 時有一個極大值 P（圖六十九）。



圖六十八



圖六十九



圖七十

例三　證明 $y=2+(x-1)^3$ 既無極大值又無極小值。這裏 $\frac{dy}{dx}=3(x-1)^2=0$, $\therefore\ x=1$。但 $x=1$ 並不使 y 有極大值與極小值。設 $x=1$, 則 $y=2$; $x=0$ 則 $y=1$; $x=2$ 則 $y=3$, 如圖七十。臨界點爲 P。

§ 59. 迴折點(Turning Points or Points of Inflexion)

我們繼續上節所論的問題。

$$\frac{dy}{dx}=0, \qquad \text{或} \qquad \frac{dy}{dx}=\infty$$

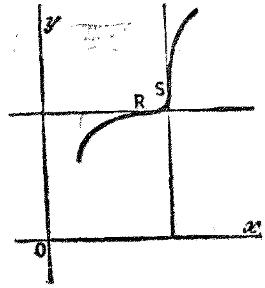
的事實，並非是一個函數有極大值或極小值存在的充分條件，雖然實用上可作粗率的試驗。有些這樣求得的值未必可使函數有極大值或極小值，因爲一個變數可以爲零或無限大而並不變號。看了圖七十一就可了然，此中

$$\text{在 } R,\ \frac{dy}{dx}=0; \quad \text{在 } S,\ \frac{dy}{dx}=\infty。$$

但函數既無極大值亦無極小值存在。所以欲決定是否各個 x 的值相當於函數的極大值與極小值，進一步的試驗是必要的。在實用問題中所

從事者爲函數，而非曲線，這點更關重要。

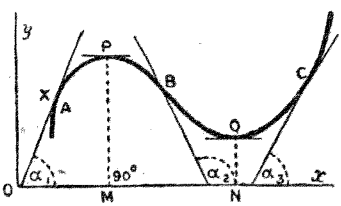
參閱圖七十一，可見在 R 與 S，切線與曲線相交。這種點稱爲迴折點。描繪 $y=x^3$，可得一個迴折點。迴折點是曲線從凸而凹，從凹而凸的分界點，這裏的凹凸當然就一個坐標軸而言，而且是普通所謂凹凸的意義。



圖七十一

§ 60. 曲線凹凸的求法 (How to Find whether a Curve is Concave or Convex)

參閱圖七十二，沿凸的部份從 A 至 P，$\tan\alpha$ 的絕對值常常減小而至於零。在曲線的最高點 P，$\tan\alpha=0$；從此至 B，$\tan\alpha$ 又繼續減小。若取定數值則看得更爲清楚。設 $\alpha_1=45°$，$\alpha_2=135°$，$\therefore\ \tan\alpha_1=+1$；$\tan\alpha_2=-1$。故此沿着曲線從 A 而 P 而 B，$\tan\alpha$ 則從 $+1$ 而 0 而 -1。故在凹的部份 APB，$\tan\alpha$ 關於 x 的微係數，卽 $\tan\alpha$ 的變化率是連續減小的。故 $\frac{d(\tan\alpha)}{dx}$ 爲負，



圖七十二

卽

$$\frac{d(\tan\alpha)}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\text{負數}<0。\tag{1}$$

設函數 $y=f(x)$ 隨 x 的値增加而增加，$\frac{dy}{dx}$ 爲正；設函數 $y=f(x)$ 隨

x 的值增加而減小，$\dfrac{dy}{dx}$爲負。

沿凸的部份 BQC，$\tan\alpha$ 的值常常增加。取數值，設 $\alpha_2=135°$，$\alpha_3=45°$，則 $\tan\alpha_2=-1$；$\tan\alpha_3=+1$。故沿曲線從 B 至 Q，$\tan\alpha$ 從 -1 增加至 0。在 Q，$\tan\alpha=0$；從 Q 至 C，$\tan\alpha$ 繼續增加從 0 至 $+1$。在凸的部份 BQC，$\tan\alpha$ 的微係數爲正，即

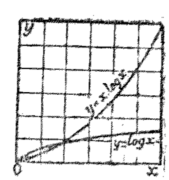
$$\frac{d(\tan\alpha)}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\text{正數}>0。\tag{2}$$

故一個曲線的凹與凸，視二次微係數的爲負或爲正而定。

我們這裏假定曲線在 x 軸的正的一邊；當曲線在 x 軸負的一邊時，我們可假定沿 x 軸而平行移動使至上述地位。更普遍的規則，可以免去這種限制，在通常的教本中都有證明。這個證法對於我們的目的不關重要。這規則說：『一個曲線的凹或凸，視其縱坐標與二次微係數，即 $y\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的爲正或爲負而定。』

例一 證明曲線 $y=\log x$ 與 $y=x\log x$ 是各向 x 軸凹與凸的。

示意：前者的 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-x^{-2}$；後者的 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=+x^{-1}$。故前者是凹的而後者是凸的如圖七十三所示。



圖七十三

注意：若曲線 $y=\log x$ 放大，可以見到相當於每個 x 的正值，y 有一個而只有一個值；y 的正負視 x 的大於與小於 1 而定。$x=1$ 時 $y=0$；$x=0$ 時 $y=-\infty$；$x=+\infty$ 時 $y=+\infty$。故此無 x 爲

負值的對數函數。

例二 證明抛物線 $y^2=4ax$，在 x 軸以下的部份是向上凹的（此時 y 爲負），在 x 軸以上的部份是向上凸的。

§ 61. 迴折點的求法(How to Find Turning Points or Points of Inflexion)

從上述的原理可知欲求迴折點的位置，必求使 $\tan\alpha$ 爲極大值或極小值的 x 的值。但

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx};\quad\therefore\quad\frac{d(\tan\alpha)}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=0。\tag{3}$$

故得規則：欲求迴折點，我們必使函數的二次微係數等於零；求適合這些條件的 x 的值；並且試驗當以比此 x 稍大一些與稍小一些的值代入二次微係數時，二次微係數是否變號。若不變號，則研究者不是迴折點。

例一 證明曲線 $y=a+(x-b)^3$ 有一個迴折點在 $y=a$，$x=b$ 處。求二次微係數得 $\frac{d^2y}{dx^2}=6(x-b)$。使等於零得 $x=b$；代入原方程式得 $y=a$。當 $x=b-1$ 時二次微係數爲負；$x=b+1$ 時二次微係數爲正。故 $(b,\ a)$ 爲迴折點。見圖七十。

例二 和諧曲線的特例（見圖五十二） $y=\sin x$；$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x=-y$，即在迴折點，縱坐標 y 變號。這是發生於曲線經過 x 軸時的；共有無限個迴折點，其時 $y=0$。

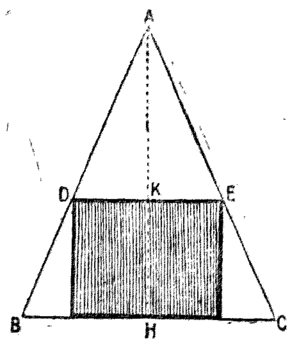
例三 證明機率曲線 $y=ke^{-h^2x^2}$ 有一個迴折點當 $x=\pm\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{h}$（見

第 158 節圖一百六十八)。

例四　證明 Roche 的蒸氣壓力曲線 $p=ab^{\frac{\theta}{m+n\theta}}$ 有一個迴折點當 $\theta=\frac{m(\log b-2n)}{2n^2}$；與 $p=ab^{\frac{\log b-2n}{n\log b}}$。見第 21 節例六，及圖八十八。

§ 62. 六個極大極小的問題(Six Problems in Maxima and Minima)

解決極大極小的問題，第一要求得表示兩個變數間的關係的代數方程式，然後照第 58 節的方法進行。在實用上大部份的情形只須對於問題稍有常識，就可決定一個 x 的特殊值是否相當於極大值或極小值。即是這問題的性質，普通可以告訴我們所研究者是否極大值或極小值，常是不必化許多工夫去考察二次微係數。



圖七十四

I.　分一線爲兩部份使其所包矩形有最大的面積。設 a 爲此直線的長，x 爲其一部份的長，$a-x$ 即爲其另一部份的長；結果這矩形的面積爲

$$y=(a-x)x$$

求其微係數，得

$$\frac{dy}{dx}=a-2x。$$

使等於零，卽得 $x=\frac{1}{2}a$；卽說直線 a 必須分爲相等的兩部份，有最大面積的矩形是正方形。

II. 求已知三角形的內接最大矩形。圖七十四中，設 b 爲三角形的底，h 爲其高，x 爲內接矩形的高。第一我們必須求得此矩形與三角形面積的關係。從相似三角形，

$$AH : AK = BC : DE; \quad h : h-x = b : DE,$$

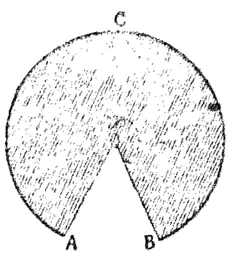
但矩形的面積顯然是 $y=DE\times KH$，且

$$DE=\frac{b}{h}(h-x), \quad KH=x; \quad \therefore \quad y=\frac{b}{h}(hx-x^2)。$$

這是一個規則：當求極大值與極小值，爲使手續簡單起見，常將常數因數略去，因爲凡能使 $(hx-x^2)$ 爲極大值者亦能使 $\frac{b}{h}(hx-x^2)$ 爲極大值。❶ 令求 $(hx-x^2)$ 的微係數，使結果等於零，卽得

$$\frac{dy}{dx}=h-2x=0; \text{ 或 } x=\frac{1}{2}h。$$

卽說矩形的高須等於三角形的高之半。



圖七十五

III. 在金屬圓片上割去一個扇形使餘下的部份摺成一個圓錐形的斗時有極大的容量。設圖七十五中的圓片半徑爲 r，中心爲 O，AOB 爲割去之扇形，而 ACB 可以摺成一個圓錐其容量爲極大。令 x 表示餘下部份的中心

❶ 這是很易證明的，如 $y=cf(x)$，此中 c 爲任何常數。而 $\frac{dy}{dx}=cf'(x)=0$ 時有極大值或極小值，故只有當 $f'(x)=0$ 的時候。

角。我們須先求 x 與錐形體積 v 的關係。❶

弧 ACB 的長為 $\frac{1}{180}x\pi r$（參閱第 191 節 3），即為圓錐形底的周圍。設 R 為底的半徑，則圓錐底的周圍為 $2\pi R$。故

$$2\pi R=\frac{x}{\pi}\pi r;\quad \text{或}\quad R=\frac{xr}{2\pi}。\tag{1}$$

設圓錐形的高為 h，

$$r^2=R^2+h^2;\quad \text{或}\quad h=\sqrt{r^2-R^2}。\tag{2}$$

圓錐的體積故為

$$v=\frac{\pi}{3}R^2h=\frac{\pi}{3}\left(\frac{xr}{2\pi}\right)^2\sqrt{r^2-\left(\frac{xr^2}{2\pi}\right)^2}。\tag{3}$$

捨去常數因數，當 $x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$ 或 $x^4(4\pi^2-x^2)$ 是極大時，則 v 為極大。即當

$$\frac{d}{dx}\{x^4(4\pi^2-x^2)\}=(16\pi^2-6x^2)x^3=0。$$

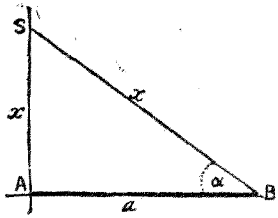
設 $x=0$，即得一個垂直線相當於容量極小的圓錐。若 x 不等於 0，必須

$$16\pi^2-6x^2=0,\quad \text{或}\quad x=2\sqrt{\frac{2}{3}}\times 180^\circ=294^\circ。$$

故割去的扇形其角約為 $360^\circ-294^\circ=66^\circ$。本題在漏斗製造上頗有應用。化學漏斗之所以採其他特別的斜度者由於別的原因。

IV.　一個燈應該放在離寫字檯多少高度時方可使檯上離其垂線之足的已知距離處有最大的光亮？圖七十六中設 S 為光源與檯面的

❶本題須應用第 191 節量法公式(1)，(3)，(4)，(27)與第 192 節(1)。



圖七十六

距離爲 x，今欲使 B 處得到最大的光亮。設 $AB=a$，檯面與入射線 $SB=r$ 的夾角爲 α。

我們知道照度 y (intensity of illumination) 與距離，SB 的平方成反比例與入射角的正弦成正比例。從 Pythagoras 定理 $r^2=a^2+x^2$; $\sin\alpha=\dfrac{x}{r}$; 欲使光亮最，則必

$$y=\frac{\sin\alpha}{r^2}=\frac{x}{r^3}=\frac{x}{r^2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

爲極大。求其微係數，令等於 0，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2-2x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}=0;\quad \therefore\quad x=a\sqrt{\frac{1}{2}}\text{。}$$

意義很爲明顯。燈的高度必須 0.707 倍於 B 與垂足 A 的距離。負根與虛根在本題中是沒有意義的。

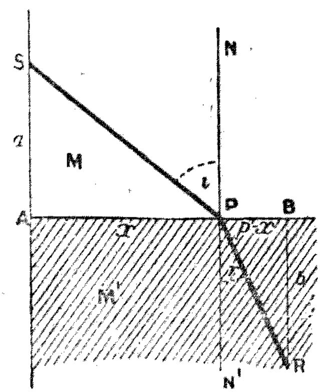
V. 幾個伏打電池如何安排可使有極大的電流抵抗已知的外電阻。設每個電池的電動勢爲 E，其內電阻爲 r。又設 R 爲外電阻，n 爲電池的個數。假定 x 個電池爲串聯而 $\dfrac{n}{x}$ 個爲並聯。這電池組的電動勢爲 xE。其內電阻爲 $\dfrac{x^2r}{n}$。依照電學上的公式，電流 C 與各項的關係

$$C=\frac{xE}{R+\dfrac{r}{n}x^2};\quad \therefore\quad \frac{dC}{dx}=\frac{\left(R-\dfrac{r}{n}x^2\right)E}{\left(R+\dfrac{r}{n}x^2\right)^2}\text{。}$$

分等於零，化簡之得 $R=\frac{r_2^2}{n}$。即電池組必須安排得使內電阻與外電阻儘量的近於相等。

極大值與極小值的理論切勿盲目的應用於物理問題。普通須要考察到其他事件。一種安排能適合於一組條件者未必適合於另一組。例如，電池依照上述的安排雖有極大的電流，但並非最最經濟。

VI. 欲使光從一種介質 (medium) 的一點以最短時間行至另一種介質中的一點，須有什麼條件？圖七十七中，設 SP 爲一個光線入射於兩種介質，M 與 M' 交界面上一點 P；設 PR 爲與入射線同一平面內曲折後的光線。若 PN 爲入射面的法線(垂線)則 $\angle NPS=i$ 爲入射角；$\angle N'PR=r$ 爲折射角。各從 S 與 R 向 AB 作垂線，設 $SA=a$，$RB=b$。依照 Fermat 原則，光卽在最短時間從 S 至 R，於兩種不同的介質 M，與 M' 中取兩種不同的等速度。光線在 P 點經過交界面，設 $AP=x$，$BP=p-x$。設光線在兩種介質中的傳播速度每秒各爲 V_1 與 V_2 單位。故光線從 S 至 P 須 $\frac{PS}{V_1}$ 秒，從 P 至 R 須 $\frac{RP}{V_2}$ 秒，自 S 至 R 共須時間 t，則



圖七十七

$$t=\frac{PS}{V_1}+\frac{RP}{V_2}\text{。}\tag{1}$$

從三角形 SAP 與 PBR,知 $PS=\sqrt{a^2+x^2}$; 與 $RP=\sqrt{b^2+(p-x)^2}$。代入(1),求其微係數,令等於零,得

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{V_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{p-x}{V_2\sqrt{b^2+(p-x)^2}}=0。\tag{2}$$

以 PS, RP, AP, BP 等代入,從方程式 (2) 求 $\frac{V_1}{V_2}$,可得

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\frac{AP}{PS}}{\frac{BP}{RP}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\frac{p-x}{\sqrt{b^2+(p-x)^2}}}=\frac{V_1}{V_2}\ 。$$

這個結果,有時稱為 Snell 的折射定律,證明欲使光從一點至別一點走最短的時間,必須入射角與折射角的正弦與光在兩種介質內的速度成比例。實驗證實 Fermat 的猜度是對的。兩種介質不變則兩角正弦之比是常數。這常數常以記號 μ 表示之稱為折射率 (index of refraction)。

例一　波長為 λ 的浪在深水中的運動速度 $V=\sqrt{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}}$, 此中 a 為常數。求速度極小時的波長。

答: $\lambda=a$。

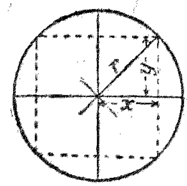
例二　兩種金屬的接觸位差 E 為溫度 θ 的函數, $E=a+b\theta+c\theta^2$。欲使此位差為極大或極小,須昇高兩種金屬之一的溫度多少?

答: $\theta=-\frac{b}{2c}$。

例三　證明圓 $x^2+y^2=r^2$ 的內接矩形,最大者為正方形。

示意: 如圖七十八, 作半徑為 r 之圓。設內接矩形的兩邊各為.

$2x$ 與 $2y$；　∴ 面積 $A=4xy$；從 $x^2+y^2=r^2$ 求 y；代入前方程式，求微係數，等等即能證明 x 與 y 均等於 $r\sqrt{\frac{1}{2}}$。

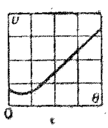


圖七十八

例四　溫度 $0°$ C. 時水的體積為 v_0，溫度 $\theta°$ C. 時其體積為 v，依照 Hällstrom 公式，溫度在 $0°$ 與 $30°$ 間

$$v=v_0(1-0.000057577\theta+0.0000075601\theta^2-0.00000003509\theta^3)$$

證明 $\theta=3.92$。時體積最小而密度最大。



圖七十九

示意：　其圖如圖七十九。在演本例時以 a，b，c ……代替數值係數是最簡單，求微係數等手續以後再用數值代 a，b，c……而化簡之。讀者亦許會自動想到這點的。

例五　以後是用得到的，我們要證明當 $n^2=q^2-2f^2$ 時 $\sqrt{(q^2-n^2)^2+4f^2n^2}$ 有極小值。

例六　電流通過半徑為 r 的線圈作用於小磁石上的力為 F，這磁石的軸位於通過線圈中心而垂直於其平面的直線的某點上。若 x 為磁石與線圈平面的距離 $F=\dfrac{x}{(r^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$，證明當 $x=\dfrac{1}{2}r$ 時，這力為極大。

例七　作一個橢圓使有已知周圍而面積為極大。

示意：　雖然一個橢圓的周圍只能用無限級數來表示得完全正確，但為一切實用的目的，周圍可以作為等於 $\pi(x+y)$，此中 x 與 y 各為半長軸與半短軸。橢圓的面積 $z=\pi\ xy$。因本例中周圍為常數 a，故

$\pi(x+y)=a$，或 $y=\frac{a}{\pi}-x$。代入時 $z=ax-\pi x^2$。求微係數而使等於零，可得 $x=\frac{a}{2\pi}$ 時 z 爲極大，以 x 的值代入 $y=\frac{a}{\pi}-x$ 得 $y=\frac{a}{2\pi}$ 即 $x=y=\frac{a}{2\pi}$，故已知周圍的一切橢圓中以圓的面積爲極大。Boys 的鉛水管設計得在結冰的溫度時亦不爆烈即根據這個原理。管的橫截面是橢圓形。當其中的水結冰而膨脹時則使管的截面有變爲圓的傾向。這樣增加的容量，可使冰有更多的地位而管壁不致受到應變(strain)。

例八　設 A 與 B 爲兩個熱源，在 AB 直線（長度爲 a）上求一點受熱得最少。假定熱射線的強度與熱源的距離的平方成比例。設 $AO=x$，則 $BO=a-x$。這些熱源在一個單位距離處各爲 α 與 β。則 O 點的熱的總強度爲 $I=\alpha x^{-2}+\beta(a-x)^{-2}$。求 $\frac{dI}{dx}$。當 $x=\frac{\sqrt[3]{\alpha}\quad a}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}$ 時，I 爲極小值。

例九　在溫度 T，煙氣通過煙囪的重量每秒 W 磅，$W=A(T-T_0)(1+\alpha T)^{-2}$，此中 A 爲常數，T° C. 爲外面空氣的溫度，$\alpha=\frac{1}{273}$ 爲氣體的膨脹係數。從此證明當煙氣的溫度約爲 333°C. 外面空氣溫度爲 15°C. 時，通過煙囪的煙氣的量爲最大，即此時最最通風。

例十　設 VC 表示恆直流電機的『輸入』(input of a continuous current dynamo)；σ 爲由於鐵，摩擦，激發等而生的固定損失；τC^2 爲變動損失：C 爲電流，則效率 $E=1-\frac{\sigma-\tau C^2}{VC}$。證明當

$\sigma=\tau C^2$ 時效率爲極小。

示意： 求 $\dfrac{dE}{dC}$，……

例十一　證明當 $x=e$ 時，$x^{\frac{1}{x}}$有極大值。

示意： $\dfrac{dy}{dx}=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\log x}{x^2}$；　∴　$\log x=1$；……

例十二　海底電纜中有圓形的心，外圍附有同心的包衣。信號通過的速度隨 $1:x^2\log x^{-1}$ 而正變，此中 x 爲心的半徑與包衣的半徑之比。證明當這比爲 0.606 ……時，可有最快的信號。

示意： $1:\sqrt{e}=0.606$。

例十三　在第一級的化學反應中，正常的過程受了自動催化作用 (autocatalysis)，其反應的速度方程式爲 $\dfrac{dx}{dt}=kx(a-x)$ 或 $\dfrac{dx}{dt}=k(b+x)(a-x)$。證明當 $x=\dfrac{a}{2}$時前者的反應速度最大，當 $x=\dfrac{1}{2}(a-b)$時後者爲最大。

例十四　一個捕敵的巡船必須於兩個對岬上燈光 A 與 B 之間通過。已知每個燈光的強度亦知兩燈間的距離。在兩燈聯線上何點經過，可使所受照度爲最小？已知光的強度等於其照光本領 (illuminating power)被除於與光源距離的平方。設每個光源的照光本領各爲 p_1 與 p_2。設 A 與 B 的距離爲 a。設 x 爲 AB 上照度最小處與 A 的距離，於巡船所受的照度爲$\dfrac{p_1}{x^2}+\dfrac{p_2}{(a-x)^2}$。此函數當$\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{x}{a-x}$ 時爲

極小，故 $x=ap_1^{\frac{1}{3}}(p_1^{\frac{1}{3}}+p_2^{\frac{1}{3}})^{-1}$ 。

例十五 假定汽船在水中行駛時，煤的消費隨其速度的立方而正變，證明若對着每小時 V 哩的河流而行駛，以速度每小時 $\frac{3}{2}V$ 哩時爲最經濟。設 x 爲船在靜水中的速度，$x-V$ 則爲逆流而行的速度。但所行的距離等速度與時間的積。故行 s 哩的時間爲 $\frac{s}{x-V}$。每小時煤的消費爲 ax^3；其中 a 爲常數。故總消費爲 $\frac{asx^3}{x-V}$。須求 $\frac{x^3}{x-V}$ 的極小值。求微係數，使等於零，得 $x=\frac{3}{2}V$。內河汽輪的船主無意中必應用這個事實。

例十六 任何已知材料的長方體樑，其彄強性(stiffness)與其厚的立方及其闊成正比例，試從直徑 12 哩的樹木求割出一個最最堅強的長方體樑。設 x 爲其闊，y 爲其厚；則 $12^2=x^2+y^2$。故此樑的厚爲 $\sqrt{12^2-x^2}$；故其彄強性比例於 $x(12^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$。當 $x=6$ 時，此式有極大值。故所求的厚爲 $6\sqrt{3}$。

例十七 一個電阻爲每哩 R 歐姆，電流爲 C 安培的導電體，由於發熱，跌價等等的總耗費 y 設爲 $C^2R+\frac{(17)^2}{R}$，若使耗費得最小，試求 C 與 R 的關係。

答： $CR=17$，這是 Lord Kelvin 的規則。

示意： 假定 C 爲常數求 $\frac{dy}{dR}$。已知截面爲 a 的導電體的電阻爲

$R=\dfrac{0.04}{a}$;　$\therefore C=425a$ 卽導電體的截面每平方吋的電流必須 425 安培，耗費方爲最小。

§ 63. 奇異點 (Singular Points)

下表中所列者是我們所已經求得的關於曲線 $y=f(x)$ 的形狀與其最初四次的微係數的關係。有些關係比前章中更進一步。表中‥的記號表示這項微係數的值於結果不生影響。

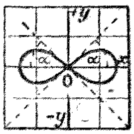
表一　函數的奇異值

曲　線　的　性　質	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{d^2y}{dt^2}$	$\frac{d^3y}{dt^3}$	$\frac{d^4y}{dt^4}$
切線平行於 x 軸	0	‥	‥	‥
切線平行於 y 軸	∞	‥	‥	‥
極大值	0	−	‥	‥
	0	0	0	−
極小值	0	+	‥	‥
	0	0	0	+
迴折點	‥	0	非 0	‥
向下凸	非 0	+	‥	‥
向下凹	非 0	−	‥	‥

在將要離這個題目之前，或有提示讀者之必要。P. Frost 著 An Elementary Treatise on Curve Tracing, London, 1872, 是討論這個題目的教本。在你開始實際描繪之前，注意找求對稱軸；極大與極小的縱坐標；迴折點；漸近線。曲線割坐標軸於那一點麼？除了迴折點，極大，極小之外或許尙有奇異點。同一曲線的兩個分枝可以互相交的，如圖八十的 O, 當一次微係數有兩個或更多的不等實數值而 y 至少有兩個等值的時候。相交分枝的個數等於一次微係數的實根的個數。

這交點稱爲**多重點**(multiple point)。若一個曲線的兩分枝相交，交點稱爲**節點**(node)；Cayley 稱此爲**交節**(crunode)。

例一 研究結晶學的讀者終該熟悉在**雙紐線**(lemniscate)中，$y^2=a^2x^2-x^4$； $y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$。x 的值在 $\pm a$ 之間，每個值可有

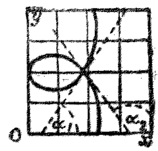


圖八十

y 的兩個相當值，符號相反而絕對相同；故曲線關於 x 軸爲對稱。當 $x=\pm a$，y 的兩個值變爲零；但這並非多重點因爲曲線並不伸張到這些極限以外去，故不能適合於多重點的條件。當 $x=0$，y 的兩個值變爲零，因爲 y 可有兩個各在 $x=0$，$y=0$ 的一邊，故這是多重點。因當 $x=0$ 時 $\frac{dy}{dx}=\pm(a^2-2x^2)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 變爲 $\pm a$，故在這點有兩個切線切於曲線，而 $\tan\alpha=\pm a$。欲描繪此曲線，可令 a 爲一個數值，設如 5，所作之圖見圖八十。節在 0 點。注意，若 x 的值大於 a 則將有負數的平方根。這是無法求的，因爲我們從不知有這樣的數，自乘後能得負數者。算學家已公認，稱負數的平方根爲**虛數**(imaginary number)與**實數**(real number)相對照。

例二 曲線 $y=b\pm(x-a)\sqrt{x}$ 在 $P(a, b$ 有一個節點每個 x 的值可使 y 有兩個不同的值，但 $x=0$ 時，y 的兩個值都爲 b，又 $x=a$ 時 y 亦爲 b。在 $P(a, b)$ 點兩邊可各有一個 y 的實數值，這是可用 $a+h$，與 $a-h$ 代入 x 而決定之。$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{2}(3x-a)x^{-\frac{1}{2}}$。$x=a$ 時 $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{a}$。故在節點上，曲線的切線斜度爲 $\pm\sqrt{a}$。$x=0$，

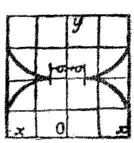
$y=b$ 這點並非多重點，因當 x 爲負數時，y 是虛數。這是說曲線決不會到 y 軸的左邊的。奇異點如圖八十一所示。



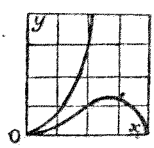
圖八十一

曲線的兩分枝止於一點而於此點有一個公共切線則此點稱爲**逆點** (cusp)； Cayley 稱此爲**回節** (spinode) 如圖八十二，八十三所示。兩分枝以切點爲終點，不再伸張出去。故 y 的值在此點的一邊爲實數，另一邊爲虛數。

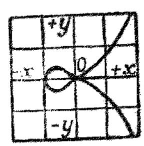
例一　在**剪狀曲線**(cissoid curve)中，$y=b\pm\sqrt{(x^2-a^2)^3}$；設所有 x 的值在 $\pm a$ 之間則 y 爲虛數。$x=\pm a$，y 只有一個值，$x=+a$ 以右，或 $x=-a$ 以左任何點，y 都有兩個值；$\dfrac{dy}{dx}=\pm 3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$ 爲零當 $x=a$ 時。故曲線的兩分枝公有一個切線平行於 x 軸，即有一



圖八十二



圖八十三



圖八十四

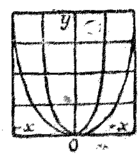
個逆點。此種逆點稱爲**第一類逆點** (the cusp of the first species)。我們求得二次微係數 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\pm 3\,(2x^2-a^2)\,(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ 有兩個不等的實數值。上枝是向 x 軸凸的，下枝是向 x 軸凹的，見圖八十二。

例二　曲線 $(y-x^2)^2=x^5$ 的二次微係數有同號的不同值；這種逆點稱爲**第二類逆點** (the cusp of the second species)。曲線的下枝，

當 $x=\frac{16}{25}$ 時，還有一個極大值。此曲線的普遍形式如圖八十三所示。

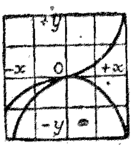
以上所述的逆點稱爲**單逆點**(single cusp)；**雙逆點**(double cusps)者亦稱**密切點**(points of osculation)曲線是向切線的兩邊伸張的。Cayley 稱此爲**切節**(tacnode)。此時微係數有兩個或更多的等根，y 至少有兩個相等的值。曲線的各分枝公有一個切線。欲分別單逆點與密切點，可用這點的縱坐標與曲線此點前後兩點的縱標相比較。若爲單逆點，y 與其微係數只有一個實數值。

例一　曲線 $y^2=x^4(x+5)$，或 $y=\pm x^2\sqrt{x+5}$ 在原點有一個逆點，如圖八十四所示。$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{5}{2}x(x+4)(x+5)^{-\frac{1}{2}}$，當 $x=0$，此式變爲 0；而 $y=0$。即曲線的兩分枝互相切於原點。當 $x=-5$ 則 $\frac{dy}{dx}=\infty$；而 $y=0$；故切線垂直的交軸於 $x=-5$ 這點。當 $x<-5$ 則 y 爲虛數。



圖八十五

圖八十二中各個逆點屬於第一類的，但有時有屬於第二類的逆點如圖八十五所示。



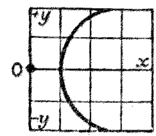
圖八十六

例二　曲線 $y^2-6xy=x^5$ 有另一種逆點如圖八十六所示。這個逆點一邊是屬於第一類而另一邊則屬於第二類。

讀者在研究第五章後即能證明，當 $u=0$；$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y=0$；與 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x=0$，於是

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_x-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=\begin{cases}-\text{，為「節」；}\\ 0\text{，為「逆點」；}\\ +\text{，為「共軛點」。}\end{cases}$$

共軛點(a conjugate point)**亦稱對節** (acnode) 卽此點的坐標能適合曲線方程式而其本身並不在曲線上。在一個共軛點的每邊，一個坐標的實數值可有別一坐標的一雙虛數值。例如描繪曲線 $y^2=x^2(x-2)$ 的圖可以見到在原點的一點，其坐標能適合曲線的方程式，但曲線本身並不通過原點如圖八十七所示。當 x 小於 2 時（除當 $x=0$ 則 $y=0$ 外）y 無實數值。所以曲線不會到 $x=2$ 的左邊來。



圖八十七

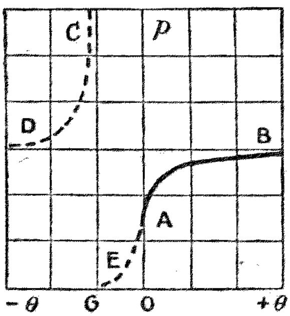
曲線 $y=x\log x$ 的一分枝在原點突然停止(圖七十三)。這稱爲**止點**(a terminal point)。當 $x=0$ 則 $y=0$；當 x 爲負，y 無實數值，因負數無對數的。欲證當 $x=0$ 則 $y=0$，不必多費時間的。有種困難以後容易駕馭的。

De la Roche 曾經發表一個證法，在任何溫度 θ，蒸氣壓力 p 可以表爲下式

$$p=ab^{-\frac{\theta}{m+n\theta}}\text{。}$$

此中 a，b，m，n 爲常數。August，Regnault，與 Magnus 發見此式很好表示他們實驗的結果。但 Regnault (Ann. Chim. Phys.,[3], 11; 273, 1844) 已經指出 Roche 的公式只能作爲單純而簡易經驗補插公式。這方程式的性質不與實在現象相符合。見第 61 節 (4)。當

$\theta=\frac{1}{2}m(\log\ b-2n)n^{-2}$時曲線有一個迴折點 E，見圖八十八。此曲線有兩分枝 GAB 與 DC。只有 AB 這部份可以應用 p 與 θ 間的觀測所得的關係。若 b 大於 1，當 $\theta=-\frac{m}{n}$ 此分枝有一個止點。此曲線又漸近於 θ 軸的平行線 $p=ab^{\frac{1}{n}}$。我可順便說到，此曲線別一分枝漸近於此同一直線且也漸近於 p 軸的平行線 $\theta=-\frac{m}{n}$。我曾叫一班學生描繪過上列方程式而他們全體忘記把 E 處的迴折點繪出。事實上必須應用前述的原理儘量求出可能的知識，然後方能着手描繪。現在總能知道，你若已知曲線的公式，微分法能給你求出所有一切臨界點，而不必遇到描繪上的困難。



圖八十八

§ 64. pv 曲線 (pv-Curves)

關於表示氣體的壓力 p，體積 v，絕對溫度 T° 間的關係，我們已經講起過 Van der Waal 方程式

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT。\qquad(1)$$

今欲描繪此方程式，其中 a，b，R 取定曾經發表過的數值，如氣體為乙烯 (ethylene) $a=0.00786$，$b=0.0024$，$R=0.0037$。氣體為二氧化碳(carbon dioxide) 則 Van der Waal 的方程式為

$$\left(p+\frac{0.00874}{v^2}\right)(v-0.0023)=0.00369(273+\theta)\qquad(2)$$

光給 θ 以定值，然後計算一組 p 與 v 的相當值，如 0°C.，

當 $v=0.1$，0.05，0.025，0.01，0.0075，0.005，0.004，0.003，………；

則 $p=9.4$，19.7，30.3，43.3，37.9，23.2，45.8，466.8，………。

在奇異點的鄰近可逐漸使 v 的增加量小些。在方格紙上描繪這些數值；注意迴折點。再取 $\theta=32$°C.，$\theta=91$°C. 等以同樣方法描繪之。圖八十九中的一組曲線就是這樣畫出來的。用這樣的圖可使我們對於 Van der Waal 方程式的內容更有深入的認識，非幾

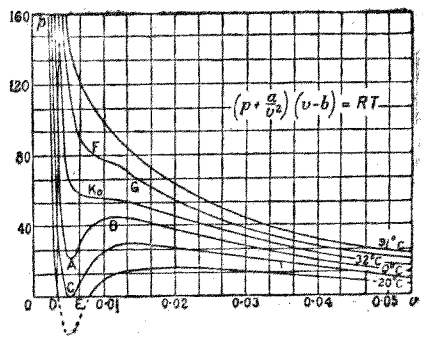


圖　八　十　九

頁文字的敘述可比。當 v 變為很大時 $\frac{a}{v^2}$ 這項對於 p 的值無甚影響；v 與 $v-b$ 小得可以略去。這是表示什麼？當氣體變為稀疎時，則服從 Boyle 定律 $pv=$ 常數。當 $v=0.0023$，氣體將為如何狀態。

為方便計，解(1)求 p，而視 RT 如一個常數，

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}；\text{或 } p=\frac{1}{v-b}\left(RT-\frac{a(v-b)}{v^2}\right)。\qquad (3)$$

這使我們見到若 $\frac{a(v-b)}{v^2}$ 等於 RT 則 p 為零。當 v 為 $2b$ 則此分數有極大值 $\frac{a}{2^2b}$；當 $v=b$，此分數為零。故當 RT 等於 $\frac{a}{2^2b}$，$v=2b$

時 p 爲零。當 RT 小於 $\frac{a}{2^2b}$，則 $\theta=-2$[illegible]°C.，的曲線割 v 軸於兩個實點 D 與 E。若 $RT=\frac{a}{2^2b}$，則 Ov 切此曲線於 c。

今求(3)關於 v 的微係數，

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}\text{；或}$$

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{1}{(v-b)^2}\left(RT-\frac{2a(v-b)^2}{v^3}\right)\text{。}\tag{4}$$

設 T 很大，則 $\frac{dp}{dv}$ 將恆爲負，卽曲線，或其切線，將從左而右向下傾斜，如 91°C. 時的雙曲線（見圖八十九）。若 v 爲很小，$(v-b)^2$ 亦爲很小，曲線保持其負的斜度因 $\frac{dp}{dv}$ 爲負；當 $v=0$ 時 $\frac{(v-b)^2}{v^3}=0$。當 $\frac{dp}{dv}$ 爲零則此曲線的切線平行於橫軸。卽說，我們可有 p 的極大值與極小值。設 T 很小，$\frac{dp}{dv}$ 在 v 取某些值時，可以爲正。此曲線則從左而右向上傾斜，如在 AB（圖八十九）。

現在你能證明當 $v=3b$ 則 $\frac{2a(v-b)^2}{v^3}$ 有極大值 $\frac{2^3a}{3^3b}$；當 v 變爲很大時，則此分數接近於零。故若 RT 大於 $\frac{2a(v-b)^2}{v^3}$ 的極大值 $\frac{2^3a}{3^3b}$ 則 v 隨 p 的減小而增加。當 RT 小於 $\frac{2^3a}{3^3b}$ 時，v 取很小值或很大值，p 將減小，但在 $v=3b$ 的鄰近則增加。結果凡 v 取可使 $\frac{2a(v-b)^2}{v^3}=RT$ 的任何值，p 有一個極大值或極小值。此曲線很像 0°C. 時 RT

取$\frac{a}{2^2b}$與$\frac{2^3a}{3^3b}$間一切值的曲線；當 $RT=\frac{2^3a}{3^3b}$，卽得迴折點 K_0（見圖八十九）。

我們再看，從二次微係，可以知道些什麼；

$$\frac{d^2p}{dv^2}=\frac{2RT}{(v-b)^3}-\frac{6a}{v^4}；\text{或}$$

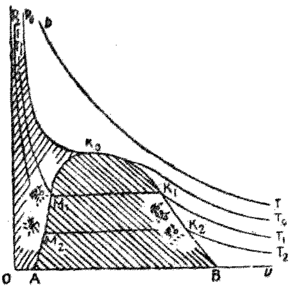
$$\frac{d^2p}{dv^2}=\frac{2}{(v-b)^3}\left(RT-\frac{3a(v-b)^3}{v^4}\right)。\tag{5}$$

當$\frac{3a(v-b)^3}{v^4}=RT$時曲線有一個迴折點。用上面已經敍過的方法，可證當 $v=b$ 時$\frac{3a(v-b)^3}{v^4}$爲零；當 $x=4b$ 時此式爲極大值$\frac{3^4a}{4^4a}$。可使(5)爲零的 v 的每個值卽有一個相當的迴折點。RT 可等於，大於或小於$\frac{3^4a}{4^4b}$。RT 在$\frac{2^3a}{3^3b}$與$\frac{3^4a}{4^4b}$之間，有兩個迴折點在 F 與 G，如圖八十九。當 RT 超過$\frac{3^4a}{4^4b}$時，卽得等邊雙曲線的一分枝，卽圖中 91° 的曲線。

表示在各種溫度 T_1 T_0，T_1，T_2，…… 二氧化碳的壓力 p 與體積 v 的關係，Andrews 求得的實驗曲線像圖九十所示的一組。在高於臨界溫度的溫度 T，p 與 v 的關係以曲線 pT 表示之。此時氣體不會液化。低於臨界溫度，設如 T_1，壓力增加則體積減少，如曲線 T_1 K_1 所示；在 K_1，氣體開始液化而壓力停留不變，雖然這體系的體積從 K_1 減至 M_1。在 M_1，全部氣體已經液化，曲線 M_1 p_1 代表壓力與液體體積的關係。同理曲線 $T_2K_2M_2P_2$，$T_3K_3M_3P_3$，…… 是從低

臨界溫度 T_0 的各種溫度求得的。

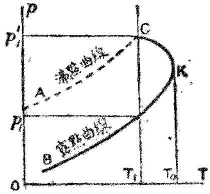
曲線 K_0A，K_0p_0，K_0B 分此平面爲三個區域。在 AK_0p_0 以左，每點代表一種均匀的液體；BK_0p_0 以右，每點代表一種均匀的氣體的相；在 AK_0B 區域內的每點代表一種均匀的液體氣體相。



圖九十

漸漸增加壓力，在 T_0 下任何指定的溫度，則使氣體在 BK_0 上某點開始液化；這曲線 BK_0 稱爲露曲線 (dew curve)。一種可用 OAK_0p 區域內一點代表其狀態的液體，漸漸減少其上所受的壓力，則在 K_0A 上某點，可開始變爲氣體；這曲線 K_0A 稱爲沸曲線 (boiling curve)。在 K_0 有第一第二類混合的雙逆點。

當兩種氣體的混合物用同樣方法處理之，即有異常的現象產生。若一體積的空氣與九體積的二氧化碳的混合氣體，在溫度約 2°C. 時漸漸加以壓力，氣體在 72 個大氣壓力時開始液化；溫度仍保持不變，而使壓力增加；到了 149 個大氣壓力時液體又開始變爲氣體；壓力無論如何增加，再不會有液體發生。以溫度爲橫坐標，描繪液體開始出沒時的壓力即得露曲線 BKC 如圖九十一所示。同一橫坐標 T_1，有兩個縱坐標 p_1 與 p'_1，在此之間混合物即以非均匀的狀態存在。溫度高於 T_0 時即不會凝結；低於 T_1 時只會有正常的凝結，

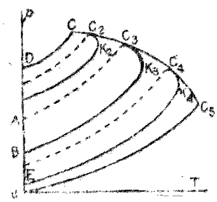


圖九十一

在 T_1 與 T_0 之間時，正常的與後退的 (retrograde) 凝結都能發生。

虛線 AC 代表沸曲線；AC 以上，此體系以液體狀態存在。K 相當於此混合物的臨界溫度。C 稱爲褶點(plait-point)。

這種現象只會在些種成份的混合物發生。在這些極限的上下，露曲線卽十分正常。這是圖九十二中以曲線 DC 與 OC_5 表之。C 爲褶點；聯結由各種不同的混合物而得的褶點 C_2，C_3，C_4，……的曲線稱褶點曲線(plait-points curve)。圖中虛線代表沸曲線。注意愈近兩端則露曲線與沸曲線間距離愈狹，到了極端卽變成通常的蒸氣壓力曲線 DC 與 DC_5。我們所從事者實爲三向度的工作；變數爲 p，v，T。



圖九十二

褶點曲線在每個褶點有一個第二類的雙逆點。如 AC_3K_3B，是否眞的連續曲線而 CC_5 得與相切於 C_3，還是兩個分開的曲線各與 CC_5 在 C_3 成一個單逆點。這可有些討論的。但關於這些曲線的性質我們所敍述者已夠讀者在算學的這分支中的應用，如閱讀，J. D. Van der Waals' Binäre Gemische, Leipzig, 1900。現卽止於此。

例　證明 Van der Waal 方程式中，pv 之積，當

$$v=\frac{ab}{a-RbT}-\sqrt{\left(\frac{ab}{a-RbT}\right)^2-\frac{ab^2}{a-RbT}}$$

有極小値。

示意：(3)的第一方程式乘以 v；求微係數，使 $\frac{d(pv)}{dv}=0$，……結論與 M. Amagat (Ann. Chim. Phys. [5] 22; 353, 1881)就二氧化碳，乙烯，氮，甲烷等的實驗相符合。若爲氫，(3) 中的 a 小得可略

去，從此證明 pv 之積無極小值。

§65. 虛數 (Imaginary Quantities)

我們前已見過，沒有一個已知的數，自乘而會得到一個負數的。故負數的平方根決不會是一個實數。雖然如此，但在算學的研究中常能遇到負數的平方根。再如負數的對數，大於 1 的反正弦函數……也不能爲實數。我們的工作中，有時也會收穫到這些東西，我們必須知道怎樣去對付牠們。

設 $\sqrt{-a^2}$ 是這樣的一個數。若 $-a^2$ 爲 a^2 與 -1 之積，則 $\pm\sqrt{-a^2}$ 可以作爲含有兩部份，即 $\pm a$ 與 $\sqrt{-1}$。算學家都同意稱 a 爲 $\sqrt{-a^2}$ 的實數部份而 $\sqrt{-1}$ 爲其虛數部份。依 Gauss 的寫法，$\sqrt{-1}$ 寫成 i。$\sqrt{-1}$ 或 i 假定是服從一切代數學上的規則的。[1] 故 $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$； $\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}$； $\sqrt{-a}\times\sqrt{b}=\sqrt{-ab}$； $i^4=1$。

『(x, y)點』這句話我們是知其意義的。設 x 與 y 二者之一爲虛數，或二者同爲虛數，此點稱爲虛點。一個虛數既無幾何意義又無物理意義的。若一個 x, y 的方程式其中有一個或幾個係數爲虛數則此方程式的不能存在的圖稱爲虛曲線；若方程式含有 x, y, z 三個變數亦有同樣情形者稱爲虛面。

---

[1] 所謂代數的基本定律者爲：(1)組合律：諸數相加或相乘，將其各項或諸因數任意組合，則其和或積不變；(2)交換律：諸數相加或相乘，其次序雖任意交換之，則其和或積不變；(3)配分律：諸數之和與某數之乘積，等於以此某數乘其各數所得諸積之和；(4)指數定律 a) 乘法：$a^m a^n=a^{m+n}$； b)除法：$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$。

例一　證 $i^{4n}=1$; $i^{4n+1}=i$; $i^{4n+2}=-1$; $i^{4n+3}=-i$。

例二　證 $a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$,

例三　二次方程式 $x^2+bx+c=0$ 只有當 b^2-4c 小於零時，才有虛根。設 α, β 爲此方程式的兩個根，證 $\alpha=\frac{-b}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{b^2-4c}$; $\beta=-\frac{b}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{b^2-4c}$ 適合此方程式。

例四　證 $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)i$。

例五　分子分母同時乘以 $c+id$ 證 $\frac{a+ib}{c-ib}=\frac{ac-bd}{c^2+d^2}+\frac{bc+ad}{c^2+d^2}i$。

說明記號 i 的週期性質，可假定 i 是一種運算的記號，當重複兩次時牠使運算之物變號；當重複四次時牠使運算之物回復原狀。例如 i 在 x 上運算兩次，可得 $-x$，或

$$(\sqrt{-1})^2x=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times x=-x$$

i 在 x 上運算四次，可得 x，或

$$(\sqrt{-1})^4x=x;$$

每四次成一循環，餘可類推。設以 y 軸爲虛數軸在其上描繪 ix 與 $-ix$；以 x 軸爲實數軸在其上描繪 x 與 $-x$，則 i 在 x 上的運算使 x 轉過 $90°$，運算兩次使 x 轉過 $180°$，運算三次使 x 轉過 $270°$，運算四次使 x 回復原位。

我們以後第 97 節將要見過 $2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$；故若 $x=\pi$，則，可得

$$e^{i\pi}-e^{-i\pi}=0; \quad 或 \quad e^{i\pi}=e^{-i\pi},$$

卽說，函數 e^{ix} 無論 $x=\pi$ 或 $x=-\pi$ 其值相同。從此方程式，可得兩個重大的不可通約數 π 與 e 間驚奇的關係，卽

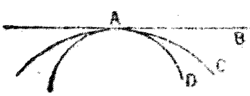
$$e^{2\pi i}=1,$$

例 證 $x=x\times 1=x\times e^{2i\pi}=e^{\log x+2i\pi}$。這是說在任何數的對數上加 $2i\pi$，其作用等於乘以 1，於其值毫無影響。故每個實數有一個實對數；有無限個虛對數各個相差 $2in\pi$，其中 n 爲整數。

切勿以虛數與無理數分辨不清。數，如 $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$……等不能以整數或有限分數表示者稱爲**無理數**（irrational number）。但 $\sqrt{4}$，$\sqrt[3]{27}$……等卻爲有理數。一個無理數，雖然不求其絕對正確的值，但可儘量求其最最接近的值；而虛數則完全不同，連近似值都無從求起。

§ 66. 曲率 (Curvature)

平面曲線上任何點的曲率卽曲線在此點彎曲的率。兩個曲線 AC，AD，其中曲率大者離開其切線 AB 較快（圖九十三）。圖九十四中從一點 P 沿其平面曲線上 δs 弧至其鄰點 P_1，則 P 的切線轉過角 $\delta\alpha$，此中 α 爲 P 點的切線與 x 軸的交角。曲線在 P 點的**曲率**，其定義爲當 P 與 P_1 重合時 $\dfrac{\delta\alpha}{\delta s}$ 的極限值。當 P 與 P_1 不無限接近時，此比值稱爲曲線在 A，B 間的平均曲率，我們可以說

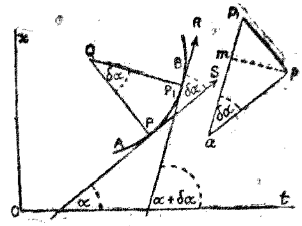


圖九十三

$$R=\frac{d\alpha}{ds}=\text{曲線彎曲的率}$$

I. 等圓圓周的曲率是各點相同的，且隨其半徑而反變。

此性質可從下法求得之：圖九十四中設 AB 爲圓周的一部份；Q



圖九十四

為中心；$QP=QP_1=$ 半徑 $=R$。註有 $\delta\alpha$ 的兩個角顯是相等的。角 PQP_1 以弧度法量之卽弧 PP_1 與半徑之比，$\angle PQP_1=\frac{\text{弧 } PP_1}{R}$；或 $\frac{\delta\alpha}{\delta s}=\frac{1}{R}$。故圓的曲率是半徑的倒數，卽

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{R}\text{。}\tag{2}$$

例： 一個力學上的問題。設一個質點在曲線 AB（圖九十四）上以變速度運動，當時間為 t 此質點在 P，則依 Newton 運動第一定律，此質點若無 Q 點的向心力強制其沿曲線 PP_1B 而動，必取切線 PS 的方向繼續前進。設在短時間 dt 的末，此質點的位置為 P_1。質點在 P_1 的運動方向同樣可以切線 P_1R 表之，設直線 ap 與 ap_1 的長度與方向各表此質點在 P 與 P_1 的數值與方向。聯 pp_1。$\angle pap_1$ 顯然等於 $\delta\alpha$ 角。因 ap 代表質點在 P 的速度，ap_1 代表在 P_1 的速度，pp_1 代表質點從 P 至 P_1 時速度的增加量；從速度平行四邊形卽知 ap_1 為 ap 與 pp_1 兩個分速度的合速度。故質點從 P 至 P_1 的總加速度為

$$\frac{\text{速度的增加量}}{\text{所佔的時間}}=\frac{pp_1}{dt}\text{。}$$

今從 P 作直線垂直 ap_1 垂足為 m。速度的無限小的變化 pp_1 可以作為兩個變化 pm 與 p_1m 的合變化卽加速度 $\frac{pp_1}{dt}$ 為兩個加速度 $\frac{pm}{dt}$ 與 $\frac{p_1m}{dt}$ 的合加速度；此兩個加速的方向與數值可各以直線 mp 與

p_1m 代表之。$\frac{pm}{dt}$ 稱爲法線加速度(normal accelération)。$\frac{p_1m}{dt}$ 稱爲切線加速度(tangential acceleration)。若 dt 爲很小，則 mp 的方向重合於曲線上 P 點的法線 QP 的方向；正像若 $\delta\alpha$ 爲很小時 RP_1 最後重合於 SP。但 $mp=ap\cdot\sin\delta\alpha$。若 $\delta\alpha$ 爲很小，可寫 $\sin\delta\alpha=\delta\alpha$（參閱第 189 節公式 11)。設 V 爲質點在 P 時的速度，則 $mp=V\,d\alpha$。從 (2)，$\delta\alpha=\frac{\delta s}{R}$；$\frac{\delta s}{\delta t}=V$，故

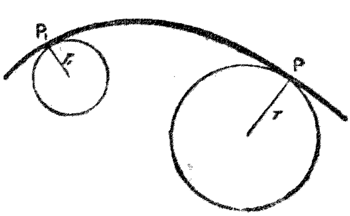
$$\text{法線加速度}=\frac{mp}{dt}=\frac{V}{R}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{V^2}{R}\text{。}$$

卽當質點沿曲線運動時，在法線的方向中的加速度與速度的平方成正比例而與曲率半徑成反比例。同理

$$\text{切線加速度}=\frac{dV}{dt}\text{。}$$

若質點在一個直線上運動，則 $R=\infty$；法線加速度爲零，

恰像一個直線切於曲線可以作爲一個直線通過曲線上無限接近的兩點那樣，將一個圓切於曲線作爲一個圓通過曲線上連續三點而此三點是無限接近的。這樣的圓稱爲曲率圓。在切點曲率圓與曲線本身有同樣的曲率。一個曲線上各點的曲率可於各點作曲率圓而比較之。圖九十五中設 P 點的曲率圓的半徑爲 r；P_1 的曲率圓的半徑爲 r_1，則



圖九十五

$$P\text{點的曲率}：P_1\text{點的曲率}=\frac{1}{r}:\frac{1}{r_1}。\tag{3}$$

換言之，曲線上任何兩點的曲率與其曲率圓的半徑成反比例。各點上曲率圓的半徑稱爲各點的曲率半徑。曲率圓的中心稱爲曲率中心。

II. 求一個曲線的曲率半徑。設曲率圓的中心的坐標爲 a 與 b，半徑爲 R，則圓的方程式爲

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2。\tag{4}$$

求此方程式的微係數二次，且除以 2，可得

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0;\quad\text{與}\quad 1+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0。\tag{5}$$

爲便於處理計，令 $u=\frac{dy}{dx}$，$v=\frac{d^2y}{dx^2}$，則從(5)可求得

$$y-b=-\frac{1+u^2}{v};\quad\text{與}\quad x-a=\frac{1+u^2}{v}u。\tag{6}$$

曲線上任何點的 u，v，x，y 與此點曲率圓的完全相同，　；a，b，❶與 R 可從 x，y，u，v 決定之。以方程式 (6) 代入 (4)，得

$$\frac{1}{R}=\frac{v}{\sqrt{(1+u^2)^3}}\tag{7}$$

在(x, y)點，曲線的曲率半徑的標準公式爲

$$\frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};\quad\text{或}\quad R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}。\tag{8}$$

---

❶ 決定 a 與 b 在實用上無甚用處。牠們可以幫助求出此曲線的縮線 (evolute) 方程式；卽曲線上各點的曲率圓中心的聯結曲線，相對的該曲線本身爲伸線(involute)。例如：曲率圓爲 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$。a，b 可從方程式 (4)(7)(8)決定之。拋物線 $y^2=mx$ 的縮線卽爲 $27my^2=8(2x-m)^3$。

當曲線不過稍微傾斜於 x 軸，$\frac{dy}{dx}$ 在實用上可作爲 0，則曲線半徑可寫爲

$$R=\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ , \tag{9}$$

這個結果，在含有毛細作用，表面張力，透鏡等物理計算中，常用之。

III. 曲率的方向在第 60 節中已經討論過了。在那裏我們知道曲線在$(x,\ y)$點的向上凹或凸須視$\frac{d^2y}{dx^2}$的大於或小於零而定。

例一 橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其上一點$(x,\ y)$，求在此點的曲率半徑。若在$(a,\ 0)$點則曲率半徑爲何？

示意：
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y};\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{y+\frac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{a^2b^2}{a^2y^3}$$

$$=-\frac{b^4}{a^2y^3}\ ;$$

$$R=-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}\ 。$$

在$(a,\ 0)$點則 $x=a$，$y=0$，故 $R=\frac{b^2}{a}$ 。

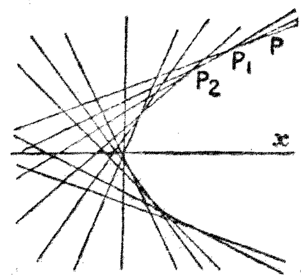
例二 試證曲線 $xy=a$ 上$(x,\ y)$點的曲率半徑爲 $\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2a}$。

§ 67. 包絡線 (Envelopes)

方程式

$$y=\frac{m}{a}+ax\ ,$$

代表一個直線，在 y 軸上的截段爲 $\frac{m}{a}$，與 x 軸夾角爲 $\tan^{-1} a$。若 a 漸漸增加，此方程式代表一組直線，牠們是如此接近，其增加量，可以當作在一個連續曲線上的。a 稱爲此系（family）的參數（parameter），此系各個份子，可從 a 取各值而定之。設方程式



圖九十六

$$y_1=\frac{m}{a}+ax\ ;\tag{1}$$

$$y_2=\frac{m}{a+\delta a}+(a+\delta a)x\ ;\tag{2}$$

$$y_3=\frac{m}{a+2\delta a}+(a+2\delta a)x。\tag{3}$$

爲此系中依次的三個份子。普通同系中的兩個曲線會有交點。設 P 爲曲線(1)與(2)的交點，P_1 爲曲線(2)與(3)的交點，因 P 與 P_1 都在曲線 (2) 上，故 PP_1 爲一個曲線軌跡的一部份，其弧 PP_1 與曲線 (2) 相等部份重合。事實上，曲線 PP_1P_2 一與原方程式所代表的全系的曲線相切。這樣的曲線稱爲此系的**包絡線**。

欲求此包絡線的方程式先移原方程式的各項於一邊

$$y-\frac{m}{a}-ax=0\tag{4}$$

求關於參數的微係數，得：

$$\frac{m\,da}{a^2}-x\ da=0;\quad \frac{m}{a^2}-x=0。\tag{5}$$

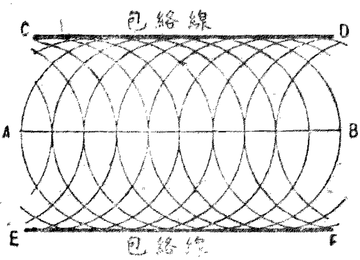
從(4)與(5)消去 a，得

$$y-\sqrt{m\cdot x}-x\sqrt{\frac{m}{x}}=0,\quad 或\quad y-2\sqrt{m\cdot x}=0$$

$$\therefore\quad y^2=4mx\ 。$$

例一　求下列圓系的包絡線，

$$(x-a)^2+y^2=r^2\ 。$$



圖九十七

此中 a 爲參數。求關於 a 的微係數，使等於 0，可得 $x-a=0$；然後消去 a，得 $y=\pm r$ 卽爲所求的包絡線。此包絡線 $y=\pm r$ 代表兩個直線平行於 x 軸，AB；且與其距離各爲 $+r$ 與 $-r$。見圖九十七。

例二　曲線系

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1\ ,$$

此中 α，β 爲參數且 $\alpha\beta=4m^2$，試證其包絡線爲雙曲線 $xy=m^2$。

示意：求原方程式關於 α 的微係數與關於 β 的微係數各得 $\frac{x\ d\alpha}{\alpha^2}+\frac{y\ d\beta}{\beta^2}=0$ 與 $\beta\ d\alpha+\alpha\ d\beta=0$。消去 $d\alpha$，$d\beta$。故得 $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{1}{2}$；

$\therefore\quad \alpha=2x,\ \beta=2y$。代入 $\alpha\beta=4m^2$;………

設已知一個光線的體系射入反光曲面上，反射光線的包絡線稱反射的焦散線 (caustic)。

第四章　積分法 (The Integral Calculus)

『算學可以說是計數的經濟學。全部算學上沒有一個問題不能直接用計數來解決。但用近代算學的工具，許多計數的運算可於幾分鐘內完成者，若無算學須耗畢生的工夫。』——E. Mach.❶

§ 68. 積分法的目的 (The Purpose of Integration)

在第一章所講到的各種方法是求以極限比來表示任何均勻而連續的變化在片刻間的變化率，即所謂兩個變數間的微係數。我們必須正確的知道變數間的基本關係，然後可以得到變化在任何片刻的量的概念。若這關係或定律表示為算學方程式時微分法可助我們決定連續的物理變化在任何時刻的性質。這些方法前已敘述過了。

另一問題，在研究者甚至遇見得更多。已知任何自然變化在片刻間的性質而欲求『此變數間的基本關係是什麼?』『什麼定律支配着這物理變化的整個過程?』

為欲思想有些憑依，讓我們來研究一個例題。蔗糖 $C_{12}H_{22}O_{11}$ 加以稀酸而轉化成轉化糖 $C_6H_{12}O_6$ 是依照下式的：

---

❶ "Mathematics may be defined as the economy of counting. There is no problem in the whole of mathematics which cannot be solved by directs counting. But with the present implements of mathematics many operations of counting can be performed in a few minutes, which, without mathematics, would take a lifetime."—E. Mach.

$$C_{12}H_{22}O_{11}+H_2O=2C_6H_{12}O_6\ 。$$

設 x 爲在時間 t 內所生轉化糖的量；若此溶液原含一個克分子量的蔗糖，則此時溶液所剩的蔗糖爲 $1-x$。在時間 dt 內所生的轉化糖的量爲 dx。從質量作用定律，『在任何時刻的化學反應的速度比例於溶液中實存蔗糖的量。』即

$$\frac{dx}{dt}=k(1-x) \tag{1}$$

此中 k 爲比例常數，見第 10 節。k 的意義可令 $x=0$ 而求得之。此時 $\frac{dx}{dt}=k$ 或 k 爲單位質量的蔗糖的轉化率，即

$$V=\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

此中 V 爲反應速度。這個關係的嚴格的正確，只有當我們將時間取得無限短促而使速度無變動的餘閑的時候。但在任何有限的時間內，速度實在不是常數，因爲蔗糖繼續受稀酸的作用，而其量在連續減少。爲簡單計，設 $k=\frac{1}{10}$，且假定此作用是取一串連續的步驟而發生，故 dx 與 dt 爲有限值，設如 δx 與 δt。則

$$V=\frac{\text{蔗糖轉化的量}}{\text{所佔時間}}=\frac{\delta x}{\delta t}\ 。 \tag{3}$$

設 δt 爲一秒鐘。設在每秒鐘內，蔗糖現存量的 $\frac{1}{10}$ 以每秒初相同的等速度轉化爲轉化糖。在第一秒鐘初，反應剛剛開始，其速度爲每秒 0.100 克轉化糖。保持着這種速度直到第二秒鐘初，速度突然變慢，因此時溶液中所存的蔗糖只有 0.900 克。

在第二秒鐘內所產生的轉化糖爲 0.900 克的 $\frac{1}{10}$ 了。即在第二秒鐘內產生 0.090 克的轉化糖。

在第三秒鐘初，速度再忽然變慢，這種情形每秒鐘重覆一次，設共爲五秒鐘。

設 δx_1，δx_2，……爲溶液中每秒鐘 δt 所生的轉化糖的量。爲簡單計，假定一克的蔗糖可以產生一克的轉化糖。

在第一秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_1=0.100$

在第二秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_2=0.090$

在第三秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_3=0.081$

在第四秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_4=0.073$

在第五秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_5=0.066$

總量　0.410

即是說若化學反應進行時各秒鐘的速度與每秒鐘初的速度相等，則五秒鐘內所生的轉化糖爲 0.410 克。但事實上所生的轉化糖只有 0.3935 克。

但 0.410 克顯然是太大因爲事實上的減速度是均勻的，而不是跳躍的變化。我們曾經分這變化爲五個步驟，每個中假定轉化糖的生成是等速的，而我們忽略這減速度是刻刻發生。現在我們若將每個步驟的時間縮短，而去決定每半秒鐘內轉化糖的生成量，則原爲五個步驟今有十個了；總加這些結果如下表：

在第一半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_1=0.0500$

在第二半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_2=0.0475$

在第三半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_3=0.0451$

在第四半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_4=0.0429$

在第五半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_5=0.0407$

在第六半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_6=0.0387$

在第七半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_7=0.0367$

在第八半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_8=0.0349$

在第九半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_9=0.0332$

在第十半秒鐘內所生的轉化糖 $\delta x_{10}=0.0315$

總量 0.4012

假定每半秒鐘減速一次而不是每秒鐘減速一次，則計算所得轉化糖的生成量與實際的情形接近得多。每個步驟的時間愈取得小則結果愈近正確。最後，若取 δt 爲無限小，雖然我們將有無限個方程式總加起來，但總加的結果卻是完全正確的。總加無限個的方程式，當然在算術上是不可能的事，但是在積分法中實在可以有這運算。

設 x 爲 $t=0$ 與 $t=5$ 間 $V\,dt$ 各項之和；

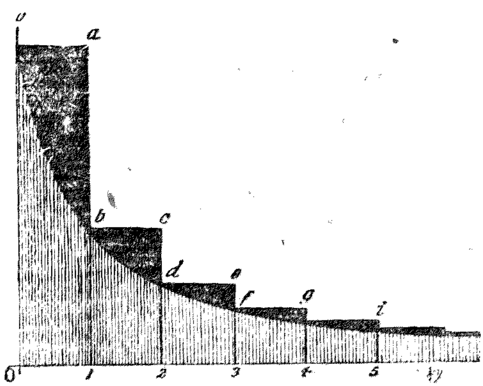
$x=V\,dt+V\,dt+V\,dt+V\,dt+\cdots\cdots$共有無限項。

有一個更簡便的寫法，爲

$x=\Sigma_0^5(V\,dt)$； 或更好一些，寫爲 $x=\int_0^5 V\,dt$。

記號 Σ 與 $\int$ 不過『所含……各項的和』一語的簡號；右面上下角

所註的字表示所取時間的兩個極限。最後一個方程式的右邊,依 Bernoulli 的提議,稱爲**積分** (integral)。$\int f(x)dx$ 稱爲 $f(x)dx$ 的積分。當積分法(顯然卽爲加法的別名)進行的極限若指定時此積分卽稱爲**定積分**(definite integral);若不指定極限時則稱爲**不定積分**(indefinite integral)。$\int$ 右上角所註的字稱爲**上限**(upper limit);右下角所註的字稱爲**下限** (lower limit)。例如 $\int_{v_1}^{v_2} p\, dv$ 代表 $p\, dv$ 無限個項的和,而 v 以 v_2 與 v_1 爲極限。欲使積分的極限與函數的極限值分辨清楚,有些作者稱前者爲『**積分的尾値**』(end-value of the integral)。



圖九十八

欲免種種誤會,今以圖形表示上述變化。取 Ot 與 Ov 爲坐標軸(圖九十八圖九十九)。沿橫軸量取 1, 2, 3…… 相當於時間 δt。設以縱坐標表示這些時間內反應的速度。若轉化糖生成的速度是均勻而連續的減速變化則其實在速度可以曲線 $vbdfh$……代表之。這是變化的眞相。但我們假定在短促而有限的時間,設如 $\delta t=1$ 秒,內速度是等的。故第一秒鐘內轉化糖的生成量可以 $va10$ 的面積代表之(圖九十八);在第二秒鐘內,可以 $bc21$ 的面積代表之,餘類推。

第一秒末，速度假定從 a 突減少爲 b；而實際上，這個減速度應以曲線 vb 逐一的斜度代表之。

爲使問題簡單而採用的假定含着不正確的性質，使結果上的差誤卽爲圖中黑色面積 vab 所代表的；同樣以後各時間的差誤各爲 bcd，def，……所代表。在圖九十九中每個步驟的時間縮小一半，則使差誤的量大大減少。這從圖中黑色面積的減少而見到的。時間取得愈短則差誤愈小，到了極限數當時取得無限小時，結果卽絕對正確。於是最初五秒鐘內所生的轉化糖的量可以 $vbdf$ ……50 的面積代表之。

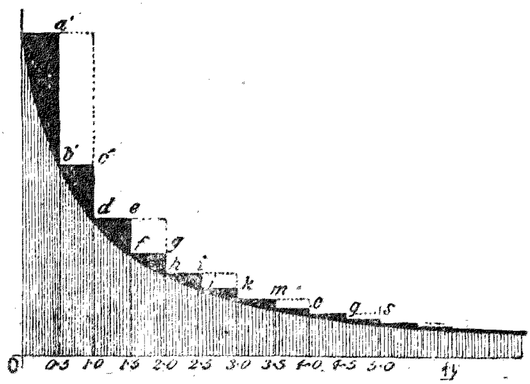


圖 九 十 九

上述的推理值得仔細研究的；一能融會貫通，則積分法，普通不過是例行公事而已。

用記號❶ $\int$ 所表示的運算稱爲積分法，當這記號寫在一個微分函數，如 dx，的前面，意思卽爲求此函數關於 dx 的積分。積分法根本只是求無限個無限小數量之和的方法。但這個意思，並非像有些作家所說

❶ 記號 $\int$ 是英文『和』(Sum)字第一字母的變形。Omn 這記號曾經一度用以代替 $\int$，這是從 Omnia 一字來的，有『一切』的意思。

微分的記號 d 是英文『差』(difference) 的第一字母。

『若沒有什麽積得夠多的時候，其和會等於一些什麽』。積分本身並不恰恰等於我們通常所稱的『和』之一字，而是『當項數爲無限大時，和的極限。』

不但化學反應在任何時間內所生成物質的量可以這樣表示，凡是一切變量都可用同樣的運算。一輛火車以已知速度行駛，其所經的距離可用定積分來表示。一個已知質量 m 的物質，使其從 $\theta_1°$ 昇至 $\theta_2°$ 時須的熱量，可用積分 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} m\sigma \ d\theta$ 表示之，此中 σ 爲此物質的比熱。當物體的位從 s_0 變至 s_1 時，一個變動的力 F 所作的功爲 $\int_{s_0}^{s_1} F ds$。這個稱爲**空間積分**（a space integral）。一個變動的力 F，在時間 t_2-t_1 內作用時所生的衝量（impulse）可以積分 $\int_{t_1}^{t_2} F\ dt$ 表之；這個稱爲**時間積分**(a time impulse)。按 Newton 第二定律，『任何質量 m 的動量(momentum)的變化等於其所受的衝量』。動量者卽質量與速度的積。若 $t=t_1$ 時 $v=v_1$；$t=t_2$ 時 $v=v_2$，則 Newton 這定律可寫爲

$$\int_{v_1}^{v_2} m\ dv = \int_{t_1}^{t_2} F\ dt \ 。$$

短時間 dt 內，強度爲 C 的電流通過導體時所生的熱量爲 $k\ C\ dt$ (Joule 定律)，此中 k 爲常數，視電流性質而定。若在任何很短的時間內電流不變則在時間 t_2-t_1 內所生熱的總量爲積分 $\int_{t_1}^{t_2} k' C\ dt$。一個建築在時間 t_2-t_1 內所耗費的煤氣的量 q，可以寫爲定積分

$$q=\int_{t_1}^{t_2} v\ dt\ ,$$

此中 v 表示煤氣從燈中射流的速度，q 的值可隨時從煤氣計上看出。煤氣計即在那裏自動的求積分。自行車上的測程計 (cyclometer) 可用以求積分

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v\ dt\ .$$

微分法與積分法是互爲逆運算，與乘法爲除法之逆，加法爲減法之逆，同一意義。故如

$$a\times b\div b=a;\quad a+b-b=a;\quad \sqrt{a^2}=a;$$

$$d\left(\int a\ dx\right)=a\ dx;\ \int dx=x\ 。$$

$3x^2dx$ 是 x^3 的微分，故 x^3 是 $3x^2dx$ 的積分。求一個積分的微分，或求一個微分的積分，結果恆是原來的函數。微分的記號與積分的記號可以互相銷去。積分 $\int f'(x)dx$ 有時稱爲逆微分 (anti-differential)。積分法逆轉微分法的運算，使微分函數回復原有的值，但有某種限制，以後可以見到。

雖然大部份的算學函數可以求得微分而無特殊困難，但其逆運算，求積分法並不常是容易，有些情形簡直無法可求。不過，若知微分所由來的函數，則積分總是可求的。若知 $d(\log x)=x^{-1}dx$，立即可得 $\int x^{-1}dx=\log x$。x^n 的微分爲 nx^{n-1}，故 $\int nx^{n-1}dx=x^n$。欲使 x^n 的微分取 x^{-1} 的形式，必使 $n-1=-1$，或 $n=0$。此時 x^n 將爲 $x^0=1$。這是沒有微分的。故代數函數 x^n 不能求得微分爲 $x^{-1}dx$ 的形式者。

除了 $\log x$ 以外也無別的函數其微分爲 $x^{-1}dx$。若對數尚未發明，則 $\int x^{-1}dx$ 將無法求積分了。代數函數的積分也可以爲其他的超越函數。如 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$ 的積分爲 $\sin^{-1}x$; $(1+x^2)^{-1}dx$ 的積分爲 $\tan^{-1}x$。還有，許多函數的積分只有牠們相當的新函數發明方能求其積分。例如 $\int e^{x^2}dx$ 與 $\int(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}dx$，直到現在還無法求其積，因爲就我們所知道，沒有一個函數的微分是 $e^{x^2}dx$ 或 $(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}dx$。

算學推理的性質現在可以比第1節中講得更精確些。在那裏，着重於求出所觀察的事實間的一定關係。不過，科學上曾經得到最好結果的是用所謂『實用的假設』來預測自然界。研究者最初努力想以思想表演成微分方程式的形式，以代表現象的片刻時的狀態。故 Wilhelmy 定律(1850)沒有別的，不過用算學家的方法敍述老的而以前未經覆證的 Berthollet 的猜想 (1779)；而 Guldberg 與 Waage 的定律 (1864—69)更是同一事實的另一種表示。

欲試驗 Berthollet 的假設，顯然必須求出在實驗所可以量測的時間內化學作用所產生的總量。從 Wilhelmy 方程式本來的形式當然是沒有辦法的，用積分法就很易證明，

$$\text{若}\ \frac{dx}{dt}=k(1-x),\quad \text{則}\ k=\frac{1}{t}\log\frac{1}{1-x},$$

此中 x 代表在時間 t 內所產生的物質的總量。x 是可量的；t 也是可量的。現在我們以基本的假定與事實相比較。若 Berthollet 的猜想是可取的，則上述的 k 必須是一個定值。不過這是實驗室的工作，而非研究所能了事的，在第 20 節關於 Newton 的冷卻定律已經講到。

所以，積分法銜接理論與事實間的距離使假設演成一種形適於實驗的覆證；並且同時答覆本章開端所提出的兩個問題。這個意思在作者所著 Chemical Statics and Dynamics(1904)曾經表示如下：

假設⟶微分方程式⟶求積分⟶觀察。

在我們回到上述的物理變化之前，必須經過各種方法上的訓練，這些方法幫助我們求得許多算式的積分，其中變數的關係可使所有 x 與 dx 的各項移在方程式的一邊而 y 與 dy 的項在另一邊者。以後幾章中還要研究那些方程式的積分求法，可以代表較為複雜的自然變化者。

若以算學表示我們的思想而所得的方程式為不能求得積分者，則此時實用的假設不是用別的方法❶來修正，定須束置高閣。

§ 69. 標準積分表(Table of Standard Integrals)

在微分法中微分的每個求法，卽在積分法中有一個相當的積分的求法。各組相當的函數稱曰積分表。列之如下，其中所載都是較重要者；便於參考，若能記憶更好。

❶ 如換成另一個『為使問題簡單而採用的假使』。Clairaut 以其對於月球運動的思想表示成一組複雜的微分方程式，但讓他們留在不完全的階段，而寫曰『請在牠們中擇其可求積分者求之』。

表二 標準積分

函數	微分法	積分法	
$u=x^n$	$\frac{du}{dx}=nx^{n-1}$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$。	(1)
$u=a^x$	$\frac{du}{dx}=a^x \log_e a$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}$。	(2)
$u=e^x$	$\frac{du}{dx}=e^x$	$\int e^x dx=e^x$。	(3)
$u=\log_e x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x}=\log_e x$。	(4)
$u=\sin x$	$\frac{du}{dx}=\cos x$	$\int \cos ax\, dx=\frac{\sin ax}{a}$。	(5)
$u=\cos x$	$\frac{du}{dx}=-\sin x$	$\int \sin ax\, dx=-\frac{\cos ax}{a}$。	(6)
$u=\tan x$	$\frac{du}{dx}=\sec^2 x$	$\int \sec^2 ax\, dx=\frac{\tan ax}{a}$。	(7)
$u=\cot x$	$\frac{du}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 ax\, dx=-\frac{\cot ax}{a}$。	(8)
$u=\sec x$	$\frac{du}{dx}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\sec x$。	(9)
$u=\operatorname{cosec} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{cosec} x$。	(10)
$u=\sin^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}$。	(11)
$u=\cos^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$=-\cos^{-1}\frac{x}{a}$	(12)
$u=\tan^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$。	(13)
$u=\cot^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$	$=-\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$。	(14)
$u=\sec^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$。	(15)
$u=\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$=-\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}$。	(16)
$u=\operatorname{vers}^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\operatorname{vers}^{-1} x$。	(17)
$u=\operatorname{covers}^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$	$=-\operatorname{covers}^{-1} x$。	(18)

§ 70. 較簡積分的求法 (The Simpler Methods of Integration)

I. 求常數與微分之積的積分。在第 14 節 III 中已經見過『一個變數與一個常數之積的微分等於常數與此變數的微分之積』。直接可以知道一個常數與一個微分之積的積分，等於常數與此微分的積分之積。設 a 爲常數，

$$\int a\ dx = a\int dx = ax;\quad \int \log\ a\ dx = \log\ a\int dx = x\ \log\ a,$$

但若積分記號 $\int$ 外乘以一個變數則積分之值與此變數乘在積分記號以內不同。讀者不久卽能見到，例如

$$x\int x\ dx = \frac{1}{2}x^3;\quad 而\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3。$$

II. 每個積分必須加上一項常數。前已見過，每個算式中的常數項，在求微分時總是銷去，如

$$d(x+C) = dx。$$

這等於說無限個式子，若所差只有常數項不同，求其微分時則得同樣的微分。所以在求得積分的結果後必須加上一個未定的任意常數，稱爲積分常數(constant of integration)通常用 C 代表之。故

$$\int du = u + C。$$

若已知

$$dy = dx,$$

則

$$\int dy + C_1 = \int dx + C_2\ ;$$

$$y+C_1=x+C_2;\qquad y=x+C_2-C_1$$

令 $C_2-C_1=C$，即

$$y=x+C。$$

此常數的幾何意義，類似於第 31 節中公式 (8) 直線方程式 $y=mx+b$ 中的 b。$y=mx+b$ 代表無限個直線，其與 x 軸的斜度為 m，在 y 軸上的截段為 b。b 可有無限個數值。同樣在 $\int \cdots\cdots dx+C$ 中，C 可取無限個數值。

例　一個曲線，其上任何點 (x, y) 的斜度為 $2x$，求其方程式。

因 (x, y) 點上此曲線的斜度為 $\frac{dy}{dx}$，故 $\frac{dy}{dx}=2x$；$\therefore y=x^2+C$。若 $C=0$，即得曲線 $y=x^2$；若 $C=1$，即得另一曲線 $y=x^2+1$；若 $C=3$，即得 $y=x^2+3$……這些曲線都是適合題中的條件。若無其他條件加上，我們不能決定 C 應取那一個特殊值。

積分表中 (11)(12)(13)(14) 等公式是根據於第 17 節 (1)(2)(3)(4) 等公式，我們見到

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x=-\cos^{-1}x;\qquad \int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x=-\cot^{-1}x。$$

這是說 $\sin^{-1}x$，與 $\cos^{-1}x$；或 $\tan^{-1}x$ 與 $\cot^{-1}x$ 等只差一個常數項。這與第 16 節所述這些函數的性質相符。下列的話是值得考慮一過的。『傅氏 (Fourier) 的定理是科學上一個最有價值的工具，無論在實用上或理論上說，但必須具有正確材料使適應於某個特殊情形，即用一定的數字，這些是算學家幽默的稱之為常數者，因為牠們隨各種境遇的變遷而不同的。一個簡單的公式 $n+n=2n$；又如 $n\times n=n^2$。具體的說即

大家知道的『二與二等於四』。故抽象的說 $40+40=80$，但具體些，兩架 40 呎的梯子，並不相當於一架 80 呎的梯子。此外必須一些別的東西去銜接牠們的頭而加強牠們的力。這一些東西相當於公式中的常數。就算這樣，除非還有些東西能支撐着連接的梯子，我們還不能向空中登高 80 呎。除非地面已經穿有洞在，我們也不能入地 80 呎；欲橫過 80 呎的缺口也是一樣。在每種用途中我們必須一些別的東西，這就是特殊情形中的一個常數。故此所有算學的證法與結論必須加以考察。就爲牠們的十分的肯定與外貌的確切往往引人入於歧途。……』——J. T. Sprague。

III. 一個和與差的積分。因爲

$$d(x+y+z+\cdots\cdots)=dx+dy+dz+\cdots\cdots$$

即得

$$\int(dx+dy+dz+\cdots\cdots)=\int dx+\int dy+\int dz+\cdots\cdots$$
$$=x+y+z+\cdots\cdots$$

此外加上一個任意常數。普通習慣積分常數常是加在最後的結果而不加於積分的中間各步驟中。同理

$$\int(dx-dy-dz-\cdots\cdots)=\int dx-\int dy-\int dz-\cdots\cdots$$
$$=x-y-z-\cdots\cdots+C。$$

以言語表之，任何幾個微分的和或差的積分等於其各積分的和或差。

例一 已知 $\log xy=\log x+\log y$，試證

$$\int[\log(a+bx)(1+2x)]dx=\int\log(a+bx)dx+\int\log(1+2x)dx+C。$$

例二　證 $\int \log \frac{a+bx}{1+2x} dx = \int \log(a+bx)dx - \int \log(1+2x)dx + C$。

IV．求 $x^n dx$ 的積分。在微分法(第 14 節)中我們知道

$$d(x^{n+1}) = (n+1)x^n dx;\quad x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right);$$

故能推想到

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C。\tag{1}$$

故求 $ax^n dx$ 形式的積分，變數的指數須增加 1，乘以常數的因數，除以新的指數。當 $n=-1$ 時顯然是一個例外，因

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty。$$

但若能記起

$$d(\log\ x) = \frac{dx}{x} = x^{-1}dx;$$

卽能求得 $x^{-1}dx$ 的積分爲

$$\int \frac{dx}{x} = \log\ x + C。\tag{2}$$

故若一個分數的分子卽爲其分母的微分，此分數的積分卽爲分母的自然對數。

初學者必須注意，不寫爲 $\log\ x + C$，我們可以寫爲 $\log\ x + \log\ a$ 故得 $\log\ ax$，因 $\log\ a$ 爲一個任意常數與 C 無異。如 $\log\ a = C$。

例一　理論化學中一個最普通的問題卽爲 $dx = k(a-x)dt$。整理各項而求積分可得

$$k\int dt = \int \frac{dx}{a-x};\quad \therefore\ kt = -\int \frac{d(a-x)}{a-x};$$

故 $kt=-\log(a-x)$；但 $\log 1=0$，$\therefore kt=\log 1-\log(a-x)$；即

$$k=\frac{1}{t}\log\frac{1}{a-x}+C。$$

例二 Wilhelmy 方程式，$\frac{dy}{dt}=-dy$ 已在第 20 節複利律中講起過了，可以寫爲

$$\frac{dy}{y}=-a\ dt,\quad \therefore \int\frac{dy}{y}=-a\ t。$$

記得 $\log e=1$； 則 $\log y=\log b-at\log e=\log e^{-at}+\log b$，此中 $\log b$ 爲積分常數。結果得 $\log y=\log be^{-at}$；即 $y=be^{-at}$。常數的意義在下節中將會見到。

例三 證 $\int 4x^{-5}dx=4\int x^{-5}dx=-x^{-5}+C$。用公式(1)，此時 $n=-5$，$n+1=-5+1=-4$。

例四 證 $\int ax^3dx=\frac{1}{4}ax^4+C$。

例五 證 $\int 4ax^{\frac{-1}{5}}dx=5ax^{\frac{4}{5}}+C$。

例六 證 $\int 2bx\frac{dx}{a-bx^2}=-\log(a-bx^2)+C$。

例七 用求 $\int x^n dx$；$\int x^{-1}dx$ 時同樣的方法，證

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}+C;\quad \int e^x dx=e^x+C;\quad \int e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}+C。\tag{3}$$

例八 證：$-\int\frac{dx}{x^n}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+C$； (4)

可先求右邊的微分。記着此結果，以後很有用處。

例九　求$\int \sin^4 x \cos x\, dx$。注意 $\cos x\, dx = d(\sin x)$ 而 $\sin^4 x$ 即$(\sin x)^4$的另一種寫法。❶

答　$\frac{1}{5}\sin^5 x + C$。

示意：$\int \sin^4 x \cos x\, dx = \int \sin^4 x\, d(\sin x) = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$。

例十　『求$\int x^2$ 積分的值』，此問題的錯差何在？

示意：『$\int$』這記號離開了其連帶的記號『dx』是沒有意義的。爲簡便起見我雖稱$\int$爲積分的記法，但積分必須寫爲$\int \cdots\cdots dx$。

例十一　設 $y = a + bt + ct^2$；證$\int y\, dt = at + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{3}ct^3 + C$。
(Heilborn, Zeit. Phys. Chem., 7, 367, 1891.)

V. 求一個多項式與其微分之積的積分。從第 14 節

$$d(ax^m + b)^n = n(ax^m + b)^{n-1}\, am\, x^{m-1}\, dx,$$

此中 $am\, x^{m-1}\, dx$ 是求括號內的微分而得；

$$\therefore \quad n\int (ax^m + b)^{n-1} am x^{m-1} dx = (ax^m + b)^n + C。 \tag{5}$$

以語言表之，一個多項式與其微分之積的積分等於多項式的指數增加 1；除以新得的指數。

例一　證$\int (3ax^3 + 1)^2\, 9ax^2 dx = \frac{1}{3}(3ax^3 + 1)^3 + C$。

---

❶ 但 $\sin^{-1} x$ 決不可以寫爲$(\sin x)^{-1}$；反$(\sin x)^{-1}$亦不可以寫爲 $\sin^{-1} x$。$\sin^{-1}$，$\cos^{-1}$，$\tan^{-1}$……等有特殊的意義，在第 17 節中已經說過。

例二 證$\int(x+1)^{-\frac{2}{3}}dx=3(x+1)^{\frac{1}{3}}+C$。

VI. 求下列形式的積分，

$$(a+bx+cx^2+\cdots\cdots)^m x\ dx, \tag{6}$$

此中 m 爲正整數。可展開而逐項求其積分。

例一 $\int(1+x)^2x^3dx=\int(x^3+2x^4+x^5)dx=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}x+\frac{1}{6}x^2\right)x^4+C$。

例二 證$\int(a+x^{\frac{1}{2}})^2\times^{\frac{1}{2}}dx=\left(\frac{2}{3}a^2+ax^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}x\right)x^{\frac{3}{2}}+C$。

這裏有很少幾個小關節雖則簡單但很有用是值得特別注意的：

(i)任何常數項或數字可以加在一個分數的分子之上，若其前置有微分記號。這樣的目的在使分子爲分母的微分。若能成功積分即化爲分母的對數。例如

$$2\int\frac{x\ dx}{1-x^2}=-\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}=-\log(1-x^2)=\log\frac{1}{1-x^2}+C。$$

H. Danneel (Zeit. Phys. Chem., 35, 415, 1900) 曾用這樣的一個積分來研究『化學反應的自由能(free energy)』。

(ii)加上 $\log 1$ 對於原式不生影響因爲 $\log 1=0$；乘上 $\log_e e$ 對於原式不生影響因爲 $\log_e e=1$。

(iii)$\int\sin nx\,dx$ 可以藉已知積分$\int\sin nx\ d(nx)$而求得，只須同時以 n 乘除之。例如

$$\int\cos nx\ dx=\frac{1}{n}\int\cos nx\ d(nx)=\frac{1}{n}\sin nx+C。$$

(iv)同時加減一個相等的數或同時乘除一個相等的數對於原式是

不生影響的。例如

$$\int\frac{x\ dx}{1+2x}=\int\frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)-\frac{1}{2}}{1+2x}dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2x}\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$

$$\int\frac{d(1+2x)}{1+2x}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\log(1+2x)+C_{\circ}$$

例一　證明 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2\log x-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{d(\log\ x)}{(\log x-1)^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{d(\log\ x-1)}{(\log\ x-1)^{\frac{1}{2}}}$

$$-2(\log\ x-1)^{\frac{1}{2}}+C_{\circ}$$

例二　下列方程式在原子論中可以遇見（Encyc. Brit., 26, 61, 1902）：$\frac{dx}{dt}=\frac{ua}{D}\sin\ pt$；從此證明 $x=-\frac{ua}{pD}\cos\ pt+C$ 此中 u, a, p, D 爲常數。

示意：　用(iv)。

例三　證明 $\displaystyle\int x(1+2x)^{-1}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\log(1+2x)+C_{\circ}$

示意：　用(iv)與(i)。

積分法中最可取的方法，按次來說，是『新變數的代入法』，『分部積分法』，『分解爲部份分數』。對於這些運算讀者要特別注意。敍述這些方法之前，我們先要回到積分常數。

§ 71. 如何求積分常數的值 (How to find a Value for the Constant of Integration

這亦許不必向讀者提示了，積分常數切勿與原方程式中所含的常數相混。例如在落體下降的定律中

$$\frac{dV}{dt}=g;\quad \int dV=g\int dt;\quad 或\ V=gt+C。\tag{1}$$

此中 g 爲常數代表由於地心引力的加速度，而 C 爲積分常數。求積分常數的值普通有兩種方法。

第一種方法：仍以落體爲例，其運動方程式爲

$$V=gt+C。$$

欲用此方程式於實在的實驗，我們必先求得，在開始計算速度的時刻，此物體的運動是正在向上還是向下，還是從靜止的位置出發。所有這些可能的情形都包括在積分常數 C 中。設 V_0 爲此物體的初速度。我們的計算從 $t=0$ 起，則

$$V_0=g\times 0+C;\qquad 或\ C=V_0。$$

若此物體是從靜止的位置開始下落，則 $V_0=C=0$，而得

$$\int dV=gt;\qquad 或\ V=gt。$$

這裏所提示的方法卽無論何時只要問題的性質可使我們從變數的特殊值而求得函數的相當值，積分常數的值就能決定。所以，要是可能，卽將變數的特殊值代入含有積分常數的方程式，而解之求 C。

例一　求下方程式中 C 的值，

$$t=\frac{1}{k}\log\frac{1}{a-x}+C\tag{2}$$

這是理論化學上一個標準『速度方程式』的積分；t 代表生成物質總量 x 所需的時間。當反應開始的時候，$x=0$，$t=0$。以這些值代入(2)。

$$\frac{1}{k}\log\frac{1}{a}+C=0;\quad 或\ C=-\frac{1}{k}\log\frac{1}{a}。$$

代入原方程式可得

$$t=\frac{1}{k}\left(\log\frac{1}{a-x}-\log\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{k}\log\frac{a}{a-x}。$$

例二 若 $\frac{d(\log K)}{dT}=-\frac{10232-0.1685T-0.00101T^2}{2T^2}$，在 $T=3100$ 時 $K=6.25$，試證其積分常數爲 -2.0603。

示意： $\log K=\frac{5116}{T}+0.08425\log T+0.000505\,T+C$。以 k 與 T 之值代入，用自然對數求之。得 $1.8326=1.65+0.6774+1.5655+C$；然後繼續求之。

例三 設一個物質的溫度昇 dT（絕對溫度）普通稱此物質得到熵 $d\phi=\frac{dT}{T}$。若在 0°C. 時熵爲零，試證在 $T°$ 時一克的水，其熵爲 $\log T-\log 273$。

示意： 當 $\phi=0$，$T=0$，……

例四 Soret 關於臭氧(ozone)密度的實驗中(Ann. Chim. Phys. [4], 7, 113, 1866; 13, 257, 1868)，一個裝有臭氧與氧的混合物的容器 A 使與只裝氧而不裝臭氧的容器 B 相聯通。在已知時間 dt 內臭氧從 A 向 B 擴散的體積 dv 比例於兩器現存臭氣的量之差，亦比例於時間 dt 的久暫。在時間 t 若有體積 v 的臭氧由 A 至 B 則此時臭氧的體積在 A 器內爲 v_0-v，在 B 器內爲 v。故兩器間所存臭氣的量之差爲 v_0-2v。依 Graham 定律，臭氧從 A 擴散至 B 的速率與其密度 ρ 的平方根成反比例。故照變數法的規則(第 10 節)，

$$dv=\frac{a}{\sqrt{\rho}}(v_0-2v)dt;\quad 或\quad \frac{dv}{dt}=\frac{a}{\sqrt{\rho}}(v_0-2v),$$

此中 a 爲常數，其值視實驗中所用容器的性質等而定。今 v_0 爲常數，

$$\int\frac{dv}{v_0-2v}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2v)}{v_0-2v}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(v_0-2v)}{v_0-2v}=-\frac{\log(v_0-2v)}{2}+C。$$

但 $t=0$ 時，$v=0$，　$\therefore C=\frac{1}{2}\log v_0$。結果

$$\log\frac{v_0}{v_0-2v}=\frac{2a}{\sqrt{\rho}}t;\quad 或\quad \frac{v}{v_0}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{2at}{\sqrt{\rho}}}\right)。$$

用同樣的氣體，同樣的儀器，同樣的時間，ρ，t，a 都是常數，故

$$\frac{v_n}{v_0}=常數。$$

用不同的氣體，在同樣的境遇中 $\frac{v_n}{v_0}$ 的值若有差異必是因爲氣體的密度不同。用氯（密度爲 35.5），二氧化碳（密度爲 22）臭氧（密度爲 x）各做一個實驗，取 $\frac{v_n}{v_0}$ 的平均值如下：

$$CO_2;\quad 0.29;\quad O_3,\ 0.271;\quad Cl_2,\ 0.227。$$

比較氯與臭氧。設 x 爲臭氧的密度。則從 Graham 定律，

$$\frac{v_n'}{v_0}(O_3):\frac{v_n}{v_0}(Cl_2)=\sqrt{35.5}:\sqrt{x};\quad \therefore (0.271)^2:(0.227)^2$$

$=35.5:x$;　$\therefore x=24.9$，這與三個原子的分子式 O_3 很相符的。

第二種方法：　另一種方法是求 t 有兩個不同的值時 x 的相當值。相減後常數即能減去。這方法的結果是消去常數而不是求常數的值。

例一　在上方程式 (2) 中，假定 $t=t_1$ 時 $x=x_1$；$t=t_2$ 時 $x=x_2$；

此中 x_1，x_2，t_1，t_2 爲量得的數值。以之代入方程式(2)，得

$$t_1=\frac{1}{k}\log\frac{1}{a-x_1}+C;\quad t_2=\frac{1}{k}\log\frac{1}{a-x_2}+C。$$

相減而整理之，得

$$k=\frac{1}{t_2-t_1}\log\frac{a-x_1}{a-x_2}。$$

例二　設一個物質在 θ^0 時比熱，σ，可用下式表之，

$$\sigma=a+b\theta,$$

而使單位質量的物質昇高溫度時所需的熱量爲 $dQ=\sigma\ d\theta$，試證欲使物質溫度從 $\theta_1°$ 昇至 $\theta_2°$ 所需的熱的總量爲

$$Q=\int_{\theta_1}^{\theta_2}(a+b\theta)d\theta=a(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}b(\theta_2^2-\theta_1^2)。$$

兩種方法的數值的例在本書中隨時會得遇到。有幾個已在討論『自然界的複利律』時曾經見到(第 20 節)。

§ 72. 代入新變數而求積分法 (Integration by the Substitution of a New Variable)

當一個函數既不能直接參照積分表又不能應用第 70 節中各種方法而求積分時，給變數以適當的改換或能使這函數變成易於駕御的形式。新變數當然是原來變數的已知函數。這種積分的方法最好還是取幾個標準的例題說明之。

I.　求$\int(a+x)^n dx$。令 $a+x=y$，則 $dx=dy$。以 y 與 dy 代原式的 $a+x$ 與 dx。則得新變數 y 的積分，如$\int(a+x)^n dx=\int y^n\ dy$。從第 70 節(1)$\int y^n\ dy=\frac{y^{n+1}}{n+1}+C$。代回 y 與 dy 的原值，得

$$\int (a+x)^n dx = \frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} + C。\tag{1}$$

在讀者對於積分法已經熟悉後，可以用心算來做這類題目而無困難。

例一　求$\int (a-bx)^n dx$

答：$-\dfrac{(a-b)^{n+1}}{b(n+1)}+C$。

例二　求$\int (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}x\ dx$

答：$\sqrt{a^2+x^2}+C$。

例三　證，

$$\int \frac{dx}{(a+x)^n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(a+x)^{n-1}}+C;$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(a-x)^{n-1}}+C。$$

例四　證$\int \dfrac{dx}{x\log x} = \dfrac{d(\log x)}{\log x} = \log(\log x)+C$。

II.　求 $(1-ax)^m x^n\ dx$ 的積分，此 m 與 n 爲正整數，括號內是 x 的一次式。令 $y=1-ax$，則 $x=\dfrac{1-y}{a}$；又 $dx=-\dfrac{dy}{a}$。代入原式得

$$\int (1-ax)^m x^n\ dx = \frac{1}{a^{n+1}}\int (1-y)^n(-y^m)dy,$$

這與第 70 節(6)的形式相同。此後的工作只須用二項定理展開$(1-y)^n$；乘上 $-y^m dy$；照第 70 節 III 的方法求其積分。最後以 $y=1-ax$ 代回，得 x 的函數。

例　證$\int x(a+x)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{28}(4x-3a)(a+x)^{\frac{4}{3}}+C$。

示意：　令 $a+x=y$,……

III.　三角函數常能用這類方法求積分。例如欲求$\int \tan x\ dx$ 的值。

$$\int \tan x\ dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx。\tag{2}$$

令 $\cos x=u$，$-\sin x\ dx=du$。因 $-\int\frac{du}{u}=-\log u$，而 $\log 1=0$ 故

$$\int \tan x\ dx=\log\frac{1}{\cos x}=\log \sec x+C。$$

若能記起 $-d(\cos x)=\sin x\ dx$，則可不必用代入之法而直接求之。

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\log \cos x,$$ 以下求法同上。

例一　證$\int \sin x \cos x\ dx=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$。

示意：　可令 $\sin x=u$。

例二　證$\int \cot x\ dx=\log \sin x+C$。

例三　證$\int \frac{\sin x\ dx}{\cos^2 x}=\sec x+C$。

示意：　或令 $\cos x=u$；或直接如(2)的求法。

例四　證$\int\frac{\cos x\ dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec} x+C$。

例五　證 $\int e^{-x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,2x\,dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)$,

$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$。

有些式子需要一些奇想的。這種技巧上的能力只有從實習可以得到。看一看第 192 節 11 中所收集的三角公式，常能得到些門徑。我們知道 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$。故

$$\int\frac{dx}{\sin x}\ \text{即}\ \int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\ \text{即}\ \int\frac{\sec\frac{x}{2}\,dx}{2\sin\frac{x}{2}}。$$

分子分母同時除以 $\cos\frac{x}{2}$，則因 $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\sec^2\frac{x}{2}$；$d(\tan x)=\sec^2 x\,dx$，

$$\therefore\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\frac{2}{x}\right)=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\log\ \tan\frac{x}{2}+C。$$

這樣的代入法對於三角法生疏的人亦許感到困難。

例一　我們知道 $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$，證

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\log\ \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C。$$

示意：　如上述的方法演算之。

例二　求 $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$。

示意：　$\cos x\,dx=d(\sin x)$；　$\cos^2 x+\sin^2 x=1$,

$$\therefore \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x \cos x} dx=\int \frac{\cos x}{\sin x} dx+\int \frac{\sin x}{\cos x} dx=\log \tan x+C。$$

例三　求$\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$。

示意：令 $y=\frac{x}{a}$；　$\therefore x=ay$；　$\therefore dx=a\ dy$；　$\therefore \sqrt{a^2-x^2}$ $=a\sqrt{1-y}$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\sin^{-1} y=\sin^{-1} \frac{x}{a}+C。$$

例四　證$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C。$

示意：令 $x=\frac{1}{y}$。

IV.　含有二次二項式的平方根的式子幸得借助於三角函數的代入，常常易於解決。反三角函數的形式（見積分表）若選擇適宜是這方面的嚮導。設二項有下列形式者：

$\sqrt{x^2+1}$　或$\sqrt{x^2+a^2}$；可令 $x=\tan \theta$；或 $a \tan \theta$；或 $\cot \theta$ 試之。 (3)

$\sqrt{1-x^2}$　或$\sqrt{a^2-x^2}$；可令 $x=\sin \theta$；或 $a \sin \theta$；或 $\cos \theta$ 試之。 (4)

$\sqrt{x^2-1}$　或$\sqrt{x^2-a^2}$；可令 $x=\sec \theta$；或 $a \sec \theta$；或 $\operatorname{cosec} \theta$ 試之。 (5)

$\sqrt{a^2-(x+b)^2}$；可令 $x+b=a \sin \theta$ 試之。 (6)

例一　求$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$的值。按照上述規則(4)，令$x=a\sin\theta$，$\therefore\ dx=a\cos\theta\,d\theta$。代入後，結果得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$；此中曾用三角公式 $2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$。但 $x=a\sin\theta$，則 $\theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$，

$$\therefore\frac{1}{2}\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{x}{a^2},$$

$$\therefore\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C。$$

例二　求積分$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$，在研究分子動力學時遇到的(Helmholtz's Vorlesungen über theoretische Physik, 2, 176, 1902)照規則(4)，令 $x=a\sin\theta$；$\therefore\ x^2=a^2\sin^2\theta$；$dx=a\cos\theta\,d\theta$；$\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2\theta}$。注意 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$；$\sin 2x=2\sin x\cos x$，即可化原式

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{a^4}{8}\int\sin^2 2\theta\,d(2\theta)；$$

這是很易求積分的。

例三　證$\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$。

從規則(4)。令 $x=\cos\theta$，則 $dx=-\sin\theta\,d\theta$。

$$\therefore\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{(1-\cos\theta)\sqrt{1-\cos^2\theta}}=-\int\frac{d\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=-\int\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}d\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cot\frac{\theta}{2}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C。$$

讀者如於三角公式不甚熟悉，最好溫理一下，本題利用三角公式所行的代入法，是很聰明的；讀者自己重演一次恐不容易。

例四 證 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$。從規(3)，令 $x=\tan\theta$，則 $dx=\sec^2\theta\ d\theta$。這是易於證明的，$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\tan\theta+\sec\theta$。以 $x=\tan\theta$ 代入本題用前條例一的結果，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\sec^2\theta\ d\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\int\frac{\sec^2\theta\ d\theta}{\sec\theta}=\int\sec\theta\ d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$=\log\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)=\log(\tan\theta+\sec\theta)$$

$$=\log(x+\sqrt{x^2+1}+C。$$

例五 證明 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log(x+\sqrt{x^2-1}+C$。

示意： 令 $x=\sec\theta$，從規則(5)。

這裏可注意的凡一個函數而含有二次式的平方根如$\sqrt{x^2+px+q}$者,若以

$$z=x+\sqrt{x^2+px+q} \tag{7}$$

代入,常使積分爲可求。爲便利計卽以上述例四的積分解釋之。顯然,參考(7)則得 $p=0$, $q=1$。故令 $z=x+\sqrt{x^2+1}$;

$$\therefore \quad z^2-2zx+x^2=x^2+1; \quad x=\frac{1}{2}(z^2-1)z^{-1};$$

$$\sqrt{x^2+1}=z-x=\frac{1}{2}(z^2+1)z^{-1}; \quad dx=\frac{1}{2}(z^2+1)z^{-2}dz;$$

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dz}{z}=\log\ z=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C。$$

V. 求形式爲 $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ 的積分,其中 m, n 與 p 可爲分數。此時欲化原式爲有理式,須以 $x=z^r$, 或 $a+bx=z^r$ 代入,r 爲幾個分母的最小公倍數(L. C. M.)。

例一 求$\int x^5(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ 的值。此中分母的 L. C. M. 爲 2。令 $1+x^2=z^2$; 則 $x^2=z^2-1$; $\therefore z=\sqrt{1+x^2}$; $x\ dx=z\ dz$。原式中需要之處用這些值代入,得

$$\int x^5(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\int(z^2-1)^2z^2dz=\int(z^6-2z^4+z^2)dz$$

$$=\frac{1}{7}z^7-\frac{2}{5}z^5+\frac{1}{3}z^3;$$

$$\therefore \quad \int x^5(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{105}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\{15(1+x^2)^2-42(1+x^2)+35\}+C。$$

例二 求$\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$ 的值。此中 $r=2$, 令 $1+x^2=z^2x^2$;

$\therefore x^{-2}=z^2-1$；$\therefore x^{-4}=(z^2-1)^2$；$\therefore x=(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}$；$dx=-(z^2-1)^{-\frac{3}{2}}z\ dz$；

$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{zx}=\frac{\sqrt{z^2-1}}{z}$。結果，$\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=-\int(z^2-1)dz$

$=-\frac{1}{3}z^3+z$；故得

$$\int\frac{dx}{x^4(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3}+C。$$

例三　求$\int(1+x^{\frac{1}{3}})^{-1}x^{\frac{1}{2}}dx$的值。此中 L. C. M. 爲 6。故令 $x=z^6$。

其最後結果爲$\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{6}{3}x^{\frac{3}{6}}-\frac{6}{1}x^{\frac{1}{6}}+6\tan^{-1}x^{\frac{1}{6}}+C$。

示意：　求出$(1+z^2)^{-1}z^8dz$ 的積分，須先以 $1+z^2$ 除 z^8 求商。

例四　證$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}dx=\frac{12}{15}x^{\frac{15}{12}}-\frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}}+C$。

示意：　L. C. M. 爲 12。令 $x=z^{12}$，……

無疑的，讀者現在可以知道微分法何以一定要在積分法之前學習。A. de Morgan 說『普通的積分法不過是微分法的記憶罷了，各種求積分時所用的技巧不是從已知的變換出未知的來，而是從記憶中所無的形變換爲記憶中所有的形式』。(Trans. Cambridge Phil. Soc., 8, 188, 1844.) 用新變數代入的目的不過以已知的積分轉換成另一個積分，其中形式恰合於某個已知函數的微分。所以求任何函數的積分，最後只是將自身化爲幾種形式，直接的或間接的與表中所列幾個已知函數求微分的結果相比較。手頭備有一份已知積分的表，讀者可以覺得十分便利的。一份標準形式的積分本書已經列在表二中，但此表範圍

讀者須自己擴充之：B. O. Pierce 的 A Short Table of Integrals, Boston, 1898，可以購備一册。

用前述的各種方法原式無法化爲有理式或轉換爲已知積分時，我們須用『簡化法』(methods of reduction)，以後幾章專門討論之。前面的例題亦有可以採取下法者，卽爲另一種解法。

§ 73. 分部積分法 (Integration by Parts)

求 uv 之積的微分，知爲

$$d(u\ v)=v\ du+u\ dv.$$

求此式兩邊的積分，得

$$u\ v=\int v\ du+\int u\ dv.$$

於是移項，得

$$\int u\ dv=u\ v-\int v\ du+C. \tag{A}$$

卽說，如能求 $v\ du$ 的積，則可求 $u\ dv$ 的積分。這方法稱爲分部積分法。從圖七，我們很易明白(A)的幾何上的說明。因方程式(A)化原有積分爲較簡形式，故稱爲『簡化公式』(reduction formulae)。更有繁複的簡化公式，到後文再講。

例一 求$\int x\log x\,dx$ 的值。

令 $u=\log x,$ $dv=x\cdot dx;$

$du=\dfrac{dx}{x},$ $v=\dfrac{1}{2}x^2.$

代入(A)可得

$$\int u\ dv=\int x\ \log\ x\ dx=u\ \ v-\int v\ du,$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ \log\ x-\int\frac{1}{2}x\ dx=\frac{1}{2}x^2\ \log\ x-\frac{1}{4}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\left(\log\ x-\frac{1}{2}\right)+C_{\circ}$$

例二 證明$\int x\ \cos\ x\ dx=x\ \sin\ x+\cos\ x+C$。

令

$u=x,$	$dv=\cos\ x\ dx;$
$du=dx,$	$v=\sin\ x$。

從方程式 (A), $\int x\ \cos\ x\ dx=x\ \sin x-\int\sin\ x\ dx;$ ……

例三 求$\sqrt{a^2-x^2}\,dx$,須用分部積分法。

令

$u=\sqrt{a^2-x^2},$	$dv=dx;$
$du=\dfrac{-x\ dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$	$v=x$。

$$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ =x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2\ dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{\{a^2-(a^2-x^2)\}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

移項, $$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\ \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\ \sin^{-1}\ \frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C_{\circ}$$

例四　證$\int x\ e^x\ dx=(x-1)e^x+C$。

示意：　可令 $u=x$; $dv=e^x\ dx$。

例五　證$\int x^2\ e^x\ dx=(x^2-2x+2)e^x+C$。

示意：　令 $dv=e^x\ dx$; 用上例的結果爲 $v\ du$。

例六　用分部積分法證$\int \log\ x\ dx=x(\log\ x-1)+C$。

例七　證明用分部積分法，求$\int x^{-1}\ dx$，卽得$\int x^{-1}\ dx$ 本身。

選擇 u 與 v 的適當的值是從試驗決定的　稍加練習我們卽會本能的作正當的選擇。規則是要求$\int v\ du$ 要比原式易於求積分些。如例四我們假使取 $u=e^x$, $du=x\ dx$ 則 $\int v\ du$ 將爲 $\frac{1}{2}\int x^2\ e^x\ dx$，反比原式更爲複雜了。

§ **74**. **累次分部積分法** (Successive Integration by Parts)

一個繁複的積分往往能用分部積分法而化成一個標準形式。重複用此方法，最複雜的式子常是可以積分；卽使有時不能積分，則此不能積分的部份也已化到最簡形式。這個手續有時稱爲『**累次簡化積分法**』(integration by successive reduction)。參閱上例五。

例一　求$\int x^2\cos\ nx\ dx$。

令
$$u=x^2,\qquad dv=\frac{\cos\ nx\ d(nx)}{n};$$
$$du=2x\ dx。\qquad v=\frac{\sin\ nx}{n}。$$

於是分部積分，得

$$\int x^2 \cos nx\, dx = \frac{x^2 \sin nx}{n} - \frac{2}{n}\int x \sin nx\, dx。 \tag{1}$$

再令

$$u = x, \qquad dv = \sin nx\, dx;$$
$$du = dx, \qquad v = \frac{-\cos nx}{n}。$$

於是
$$\int x \sin nx\, dx = -\frac{x \cos nx}{n} - \int \frac{-\cos nx\, dx}{n}$$
$$= -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}, \tag{2}$$

(2)代入(1)得

$$\int x^2 \cos nx\, dx = \frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \sin nx}{n^3} + C。$$

例二　在上例中$\int x^2 \cos nx\, dx$ 賴藉於 $x \sin nx\, dx$ 的積分，而 $x \sin nx\, dx$ 的積分又賴藉於 $-\cos nx\, d(nx)$的積分，此即爲標準形式。求$\int x^4 \cos x\, dx$ 將更要繁複些。令

$$u = x^4, \qquad dv = \cos x\, dx;$$
$$du = 4x^3\, dx, \qquad v = \sin x。$$

$$\therefore \quad \int x^4 \cos x\, dx = x^4 \sin x - 4\int x^3 \sin x\, dx。$$

同様方法，

$$4\int x^3 \sin x\, dx = 4x^3 \cos x - 3\cdot 4\int x^2 \cos x\, dx。$$

同様方法，

$$3\cdot4\int x^2\ \cos\ x\ dx=3\cdot4\ x^2\ \sin\ x+2\cdot3\cdot4\int x\ \sin\ x\ dx,$$

最後，

$$2\cdot3\cdot4\int x\ \sin\ x\ dx=2\cdot3\cdot4\ x\ \cos\ x+1\cdot2\cdot3\cdot4\ \sin\ x。$$

所有這些結果逐一代入如上例卽所求的積分。這裏可以見到題中的積分逐步化爲一個較簡的形式。使$\int x^4\cos x\,dx$按次賴藉於$x^3\sin x\,dx$；$x^2\ \cos\ x\ dx$；$\cos\ x\ dx$ 等的積分，最後$\int\cos\ x\ dx$ 是大家知道的標準形式。

例三 演算這類題目以用兩張紙寫爲便，其一詳細演算如上列兩個例題，其二但寫結果如本題。證

$$\int x^3\ e^x\ dx=x^3\ e^x-3\int x^2\ e^x\ dx;$$

$$=x^3\ e^x-3(x^2\ e^x-2\int x\ e^x\ dx);$$

$$=x^3\ e^x-3x^2\,e^x+2\cdot3\,(x\ e^x-\int e^x\ dx);$$

$$=(x^3-3x^2+6x-6)\,e^x+C。$$

很可注意的，我們有時用不同的代入法可以求得不同的結果。例如，下列兩種結果，我們都能得到，

$$\int x^{-\frac{1}{2}}e^x\ dx=\frac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{(2x)^2}+\frac{3\cdot5}{(2x)^3}+\cdots\cdots\right\}+C_1;\quad(3)$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}e^x\ dx=\frac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}}\left\{2x-\frac{(2x)^2}{3}+\frac{(2x)^3}{3\cdot5}-\cdots\cdots\right\}+C_2。\quad(4)$$

若令 $u=x^{-\frac{1}{2}}$ 則得 (3)；令 $u=e^z$ 則得 (4)。(4)中的級數形式與最初求得不同，各項的分子分母都已用 $x^{\frac{1}{2}}$ 約過。這樣的不同情形可追溯到兩種原因，不是變數有不同的排列，就是積分常數有不同的數值。求 $(1-x)^{-2}dx$ 的積分亦會遇到這種情形。一方面，

$$\int(1-x)^{-2}dx=-\int(1-x)^{-2}d(1-x)=(1-x)^{-1}+C_1; \qquad (5)$$

但若於求積分之前，以 $x=z^{-1}$ 代入，則

$$\int(1-x)^{-2}dx=-\int(z-1)^{-2}dz=(z-1)^{-1}=x(1-x)^{-1}+C_2。 \qquad (6)$$

兩個之差只是一個常數『-1』。加 -1 於(5)卽可得(6)。所以 C_1 並不等於 C_2，而是 $C_1=C_2-1$。

§ 75. 簡化公式(參考用)(Reduction Formulae—for Reference)

我們在第 73 節之初，覺得某些積分若參照標準公式 (A) 很是便利；到了第 74 節又見重覆應用這公式可使繁複的積分化為已知的積分。這樣的公式稱爲簡化公式。下面是幾個標準的簡化公式，便於求形式爲

$$\int x^m(a+bx^n)^p\ dx \qquad (1)$$

的積分之用。屬於這種形式者只要 $\frac{m+1}{n}$ 爲正整數總可求得積分。視 m 或 p 爲正或爲負，分爲四種情形。

I. m 爲正時，簡化公式爲

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)}-\frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx \tag{B}$$

用此公式可使 $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ 賴藉 $\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$ 而求得積分。此公式可以累次應用，使積分式中獨項因數 x 的指數 m，逐次減低 n，直到最簡便的時候，就可採用第 72 節 V 的方法解決之。若 $\frac{m+n-1}{n}$ 爲正整數則(B)總能求得積分；參閱下例七。

II. m 爲負時，則簡化公式應爲

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)}-\frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx。 \tag{C}$$

若 m 爲負而仍用公式(B)，則累次應用時，非但能使積分式中獨項因數 x 的指數減少其絕對值，反要使之增加了，故必須用(C)。公式(C)可使 m 的絕對值，逐次減低 n。若遇 $np+m+n+1=0$，則最後含有積分式的一項銷去，於是積分的工作完畢。若 $\frac{m+n+1}{n}$ 爲正整數則(C)總能求得積分；參閱下例七，

III. p 爲正時，另有一個簡化公式，可使積分式中二項因數 $(a+bx^n)$ 的指數減低，此式爲

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1}+\frac{anp}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx。 \tag{D}$$

累次應用這公式可使$(a+bx^n)$的指數的絕對值小於 1。

IV. p 爲負時，簡化公式應爲

$$\int x^m(a+bx^n)^p\ dx=-\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)}+\frac{np+m+n+1}{an(p+1)}$$

$$\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\ dx。\qquad\text{(E)}$$

公式(B)(C)(D)(E) 是用分部積分法從 (1) 求得的。讀者或能自己證之。❶ 讀者可以注意積分式中獨項因數 x 的指數在公式(B)從 m 變爲 $m-n+1$；在公式(C)從 m 變爲 $m+1$； 又積分式中二項因數 $(a+bx^n)$ 的指數，在公式(D)從 p 變爲 $p-1$；在公式(E)從 p 變爲 $p+1$。當 $np+m+1=0$ 時，公式 (B) 與 (D) 爲無用； 當$m+n=0$ 時，公式(C)爲無用；當 $p+1=0$ 時，公式(E)爲無用。在公式 (B)，(C)，(D)爲無用時，可用第 72 節 V 的方法；在公式(E)爲無用時亦可利用前法。

例一 求$\int\sqrt{a+x^2}\,dx$。

示意： 用公式 (D)。取 $m=0$, $b=1$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$。

答： $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a+x^2}+a\ \log[x+\sqrt{a+x^2}\,]\right]+C$。

例二 求$\int\frac{x^4\ dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$。

---

❶ 讀者若不易自己證明可參閱 Woods and Bailey 原著，易俊元譯：高等混合算學下册 147 頁（商務印書館出版）——譯者註。

示意： 取 $m=4$，$b=-1$，$n=2$，$p=-\frac{1}{2}$。用公式(B)兩次。

答： $\frac{1}{8}\left\{3a^4 \sin^{-1}\frac{x}{a}-x(2x^2+3a^2)\sqrt{a^2-x^2}\right\}+C$。

例三 求$\int\sqrt{1-x^2}\,x^3\,dx$。

示意： 用公式(B)。

答： $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C$。

例四 求$\int\sqrt{(a+b\,x^2)^{-3}}dx$。

示意： 用公式(E)。

答： $\frac{x}{a}(a+b\,x^2)^{-\frac{1}{2}}+C$。

例五 求$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}$，即$\int x^{-3}(-a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$。

示意： 用公式 (C)。取 $m=-3$，$b=1$，$n=2$，$p=-\frac{1}{2}$。

答： $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^2}\sec^{-1}\frac{x}{a}+C$。

例六 Renyard(Ann. Chim. Phys.,[4], 19, 272, 1870)，完成他電動力學的理論時，須求積分$\int(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$。若公式(E)。此中 $m=0$，$n=2$，$b=1$，$a=a^2$，$p=-\frac{3}{2}$。

答： $\frac{x}{a^2}(a^2+x^2)+C$。

例七 證明當 $n=\cdots\cdots\frac{3}{5},\ \frac{1}{3},\ -1,\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{3},\cdots\cdots$ 與 $n=\cdots\cdots\cdots$ $\frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2}\cdots\cdots$ 時，下式可以求得積分，

$$\int(a^{n-1}-x^{n-1})^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}(n-1)}dx。\tag{2}$$

以 $z=a+bx^n$ 代入(1)可得

$$n^{-1}b^{-\frac{m+1}{n}}\int(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}z^p\ dz。\tag{3}$$

若 $\frac{m+1}{n}$ 爲正整數，括號內的二項式可用二項定理展開，然後用通常的方法求積分。比較(2)與(1)卽易知道，當

$$\frac{m+1}{n}=\frac{\frac{1}{2}(n-1)+1}{n-1}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\tag{4}$$

爲正整數時，(2)可求得積分。從(B)與(C)，知積分(2)賴藉於積分

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\ dx\ 或\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\ dx。\tag{5}$$

在 $\frac{m+1}{n}$ 中各以 $m-n$ 與 $m+n$ 代 m，再與(2)比較，卽知當

$$\frac{m-n+1}{n}=\frac{\frac{1}{2}(n-1)-(n-1)+1}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2},\tag{6}$$

或

$$\frac{m+n+1}{n}=\frac{\frac{1}{2}(n-1)+(n-1)+1}{n-1}=\frac{1}{n-1}+\frac{3}{2},\tag{7}$$

爲正整數時，可求得(2)的積分。但(7)減去 1 可化爲(4)；(6)加上 1 可化爲(4)；因爲分部積分法可以進行任何有限次數，我們故得欲使(2)可積分的條件爲

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2} \tag{8}$$

須正負整數或零；換言之，須

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2}=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \cdots\cdots\ 或\ -1,\ -2,\ -3,\cdots\cdots \tag{9}$$

同理以 $x=z^{-1}$ 代入(1)可得 $\int -z^{-np-m-2}(az^n+b)^p\,dz$。如 (3) 與 (4) 我們同樣可知當

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-np-m-2+1}{n}=-\frac{m+1}{n}-p \tag{10}$$

為正整數時，則此積分為可求。從(D)與(E)，用求得(8)的方法於此處，得可求積分的條件為

$$-\frac{m+1}{n}-(p\pm 1)=-\frac{\frac{1}{2}(n-1)+1}{n+1}-\left(-\frac{1}{2}\pm 1\right)。 \tag{11}$$

或 $-(n-1)^{-1}$ 為正負整數。卽

$$-\frac{1}{n-1}=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\ 或\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots。$$

注意我們這裏並未證明只有這些 n 的值能使(2)可積分。

本節以後的部份可以暫時略去，到了需要時再讀。若 n 為正整數，則求$\int \sin^n x\,dx$ 時，可令

$$\begin{array}{r|l} u=\sin^{n-1} x & v=-\cos x \\ du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx & dv=\sin x\,dx \end{array}$$

$$\therefore \int \sin^n x\,dx=-\sin^{n-1} x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx;$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx;$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\sin^n x\,dx。$$

移項而整理之。結果爲

$$\int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx。\qquad(12)$$

用分部積分法求$\int\cos^n x\,dx$，令 $u=\cos^{n-1}x$；$dv=\cos x\,dx$,結果爲

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx。\qquad(13)$$

注意 $\cos\frac{\pi}{2}=\cos 90°=0$; $\sin 0°=0$，我們更可如下繼續進行，從

(12)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx。$$

同樣，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx=\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-4}x\,dx。$$

聯合上二式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-4}x\,dx。$$

繼續進行，當 n 爲偶數時

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots4\cdot2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}; \qquad \text{(F)}$$

當 n 爲奇數時

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots5\cdot3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots5\cdot3}。 \qquad \text{(G)}$$

從(13)同理可得當 n 爲偶數時

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}; \qquad \text{(H)}$$

當 n 爲奇數時

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots5\cdot3}。 \qquad \text{(I)}$$

這些公式，可用 $n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$代入，實行求其積分而試驗之。注意(H)與(F)又(I)與(G)的相像之處。這四個公式在物理的工作更見重要。牠們可使$\int \cos^n x\, dx$或$\int \sin^n x\, dx$中 x 的指數逐漸化低，最後爲 0 或 1。

若 n 大於 1，我們可以證明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{n-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx; \quad \text{(J)}$$

證法可令 $u=\sin^{m-1} x$, $dv=\cos^n x\, d(\cos x)$而用分部積分法。若 m 大於 1，亦可證

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{m-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx。 \quad \text{(K)}$$

例一 證$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx=\frac{1}{2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx=\frac{1}{3}$。

例二 證$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx=\frac{5}{32}\pi$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \, d\theta=\frac{2}{3}$。

例三 證$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx=\frac{1}{3}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x \, dx=\frac{\pi}{16}$。

§ 76. 分解爲部份分數而求積分 (Integration by Resolution into Partial Fractions)

凡分數式之分子的次數高於分母的次數者，都可用除法化之爲一個整數式與一個分數式。故

$$\int \frac{x^5 \, dx}{x^2+1} = \int\left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}\right)dx。$$

其整數部份可用通常的方法求得積分，但其分數部份在求積分之前，往往必須分解爲幾個分母較簡的分數之和。

我們知道$\frac{4}{9}$可用其他兩個分數之和表之，卽$\frac{4}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$。這和中的每一分數稱爲部份分數。若分子爲一個多項式而分母爲獨項，則部

份分數可以立刻化出，只須以分母除分子的各項。例如

$$\frac{x^2+x+1}{x^3}=\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}。$$

當分母爲多項式，如 x^2-x 時，則從分數的加法顯知此分母爲各部份分數的分母之倍數，且除去各部份分數的分母外，沒有別的因數。故此我們可預定各部份分數的分母爲此分母的因數。當然，這已知分數，很可以由各部份分數相加，再經簡約而得，但在實際上我們演算時不必注意這點的。

欲分解一個分數爲部份分數，其分母必先分解因數，如 x^2-x 的兩個因數爲 x 與 $x-1$。於是以每個因數作爲部份分數的分母，再取某個不定數量爲分子。這些不定數量可爲 x 的函數亦可爲常數，須視各分母的情形而定。看過下列的例卽能明瞭部份分數的求法。共有四種情形，須觀察的。

第一種情形　分母可以分解爲不同的實因數者，如

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}。\tag{1}$$

分解爲部份分數，(1)卽變爲

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}=\frac{A(b-x)+B(a-x)}{(a-x)(b-x)},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{Ab+Ba-Ax-Bx}{(a-x)(b-x)}。$$

於是左右兩邊的分子必須爲恆等，卽

$$1\equiv Ab+Ba-Ax-Bx。$$

爲恆等式❶ (an ideatical equation)。

比較兩邊 x 的同次項的係數，成立一組以 A，B 爲未知數的聯立方程式，從此可以決定 A 與 B。例如

$$Ab+Ba=1;\quad A+B=0,\ \text{卽}\ A=-B;$$

得解之

$$A=\frac{1}{b-a};\qquad B=-\frac{1}{b-a}。$$

以 A 與 B 之值代入(1)，得

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{b-x}。$$

又有一法，可以決定，A，B 的值而較前者爲迅速，如下例所示，如欲求下面例三所含的分數式的部份分數，可假定

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)(c-x)}\equiv\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}+\frac{C}{c-x}$$

於是

$$(b-x)(c-x)A+(a-x)(c-x)B+(a-x)(b-x)C=1。$$

❶ 恆等式是等式的一種，其兩邊是完全相同或是化爲最簡後完全相同。例如 $ax^2+bx+c=ax^2+bx+c$；$\frac{a-x}{(a-x)^2}=\frac{1}{a-x}$。普遍的說，爲

$$a+bx+cx^2+\cdots\cdots=a'+b'x+c'x^2+\cdots\cdots$$

恆等式中的變數取任何數值都能適合。兩邊 x 的同次項的係數是相等的。如 $x=0$ 則 $a=a'$。故 a，a' 可以約去，兩邊除以 x，再令 $x=0$ 則 $b=b'$；同理 $c=c'$ 餘類推。欲知恆等式的詳情可參閱代數學教本。爲鄭重表示所研究者爲恆等式而非方程式，記號『$\equiv$』常用以代替記號『$=$』。恆等式是任何值都適合的；方程式只有幾個特殊的值方能適合。只要記清這個分別，記號都用『$=$』亦無問題。『$\equiv$』可以讀爲『當變數爲任何值時，恆等於……』；而記號『$=$』須讀爲『當變數取某些特殊值時，等於……』。

此恆等式中 x 爲任何值時都能成立，故下列的情形當能成立：

$$x=a\ 時，(b-a)(c-a)A=1;\quad \therefore\ A=\frac{1}{(b-a)(c-a)};$$

$$x=b\ 時，(c-b)(a-b)B=1;\quad \therefore\ B=\frac{1}{(c-b)(a-b)};$$

$$x=c\ 時，(a-c)(b-c)C=1;\quad \therefore\ C=\frac{1}{(a-c)(b-c)}。$$

例一 在研究雙分子反應(bimolecular reaction)時，可以遇見下列的積分，

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\int\frac{dx}{(b-a)(a-x)}-\int\frac{dx}{(b-a)(b-x)}$$

$$=\frac{1}{b-a}\log\frac{b-x}{a-x}+C。$$

例二 J. J. Thomson 關於倫琴射線 (Rötgen ray) 產生游子(ion)速度的公式爲 $\frac{dx}{dt}=q-ax^2$。注意 $a-x^2=(\sqrt{a}-x)(\sqrt{a}+x)$；證明，我們若爲簡便起見，令 $\frac{q}{a}=b^2$，則

$$2b=\frac{1}{t}\log\frac{b+x}{b-x}+C。$$

例三 求 $\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)(c-x)}$ 之值。注意其結果以備後用。

例四 證 $\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\log\frac{a+bx}{a-bx}+C$。

例五 設溴酸與氫溴酸間反應速度，以方程式 $\frac{dx}{dt}=k(na+x)(a-x)$，證 $k=\frac{1}{(n+1)at}\log\frac{na+x}{a-x}+C$。

例六 若$\dfrac{dx}{dt}=k(a+x)\ (na-x)$；證 $k=\dfrac{2.3026}{(n+1)at}\log_{10}\dfrac{a+x}{na-x}$。

例七 S. Arrhenius 在研究乙酸乙酯(Ethyl acetate)的水解作用時應用積分$\displaystyle\int\frac{1+mx-nx^2}{(a-x)(b-x)}dx$；即$\displaystyle\int[-n+\frac{1+nab+\{m-n(a+b)\}x}{(a-x)(b-x)}]dx$。令 $p=1+n\ ab$；$q=m-n(a+b)$代入，然後用部份分數法，證明

$$\int\frac{p+qx}{(a-x)(b-x)}dx=\frac{p+aq}{a-b}\log(a-x)-\frac{p+bq}{a-b}\log(b-x)+C。$$

例八 如$\displaystyle\int\frac{dx}{x(a-x)}=\frac{1}{a}\log\frac{x}{a-x}+C$ 的形式的積分，在化學動力學——自動催化作用中是極普通的。

例九 H. Daneel (Zeit. Phys. Chem., 33, 415, 1900)用過積分式，如

$$kt=\int\frac{x\ dx}{a^2-x^2};\quad \therefore\ \frac{1}{2}\log\frac{a^2-x_1{}^2}{a^2-x_2{}^2}=k(t_2-t_1)$$

其中 $t=t_1$ 時 $x=x_1$；$t=t_2$ 時 $x=x_2$。

例十 R. B. Warder 關於氯醋酸 (chloroacetic acid) 與乙醇間反應速度的方程式爲

$$\frac{dy}{dt}=ak\{1-(1+b)y\}\{1-(1-b)y\}。$$

$$\therefore\ \log\frac{1-(1-b)y}{1-(1+b)y}=2abkt。$$

第二種情形 分母可以分解爲實因數，其中有幾個是相同的。如

$$\frac{1}{(a-x)^2(b-x)}。$$

上法不能用於這個情形，因若令

$$\frac{1}{(a-x)^2(b-x)}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{a-x}+\frac{C}{b-x}=\frac{A+B}{a-x}+\frac{C}{b-x},$$

$A+B$ 只能作一個常數看待。如前比較 x 的同次項的係數，可得三個獨立的方程式而其中只含兩個未知數。所以用這方法 A，B，C 的値是不能決定的。欲制服這個困難，我們假定

$$\frac{1}{(a-x)^2(b-x)}=\frac{A}{(a-x)^2}+\frac{B}{a-x}+\frac{C}{b-x}。$$

通分而如前求之，最後結果可得爲

$$A=\frac{1}{b-a};\quad B=-\frac{1}{b-a};\quad C=-\frac{1}{(b-a)^2}。$$

例一　H. Goldschmidt 表示鹽酸與乙醇間化學反應的速度用方程式 $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)^2$。從此

$$k\int dt=\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)^2}=\frac{1}{(a-b)^2}$$

$$\left\{\int\frac{(a-b)dx}{(b-x)^2}-\int\frac{dx}{b-x}+\int\frac{dx}{a-x}\right\}。$$

求此積分。欲決定積分常數 C，可令 $t=0$ 時 $x=0$ 代入。最後結果爲

$$kt(a-b)^2=\frac{(a-b)x}{b(b-x)}+\log\frac{a(b-x)}{b(a-x)}。$$

例二　證 $\int\frac{dx}{x^2(a+bx)}=\frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{a}-\frac{1}{ax}+C$。

例三　證 $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{1}{4}\log\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+C$。此式曾被 W. Meyerhofer (Zeit. Phys. Chem., 2, 585, 1888)

例四　證 $\int\frac{x\,dx}{(a-x)(b-x)^2}=\frac{1}{b(a-b)^2}\left\{a\log\frac{a(b-x)}{b(a-x)}+\frac{x(a-b)}{(b-x)}\right\},$

x 的值從 $x=0$ 至 $x=0$。(H. Kühl, Zeit. Phys. Chem., 44, 385, 1903)

例五 P. Henry (Zeit. Phys. Chem., 10, 96, 1892) 在研究自動催化作用時，曾用

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(\sqrt{4K(a-x)+K^2}-K)。$$

令 $4K(a-x)+K^2=z^2$，求積分； $\therefore\ a-x=\frac{(z^2-K^2)}{4K}$； $dx=-\frac{z\,dz}{2K}$。

$$\therefore \frac{z\ dz}{(z-K)(z^2-K^2)}=-\frac{k\,dt}{2};\quad \therefore\ \frac{1}{4K}\log\frac{z-K}{z+K}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-K}$$

$$=-\frac{kt}{2}+C。$$

今令 $P=\sqrt{4K(a-x)+K^2}$； $Q=\sqrt{4Ka+K^2}$，證明若 $t=0$ 時 $x=0$ 則

$$\frac{1}{t}\left\{\frac{Q-P}{(P-K)(Q-K)}+\frac{1}{2K}\log\frac{(P+K)(Q-K)}{(P-K)(Q+K)}\right\}=k。$$

更複雜的例可參閱 T. S. Price, Journ. Chem. Soc., 79, 314, 1901。

例六 J. W. Walker 與 W. Judson 關於氫溴酸與溴酸間的化學反應速度，以下列方程式表示之，

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)^4。\quad \therefore\ 3k=\frac{1}{t}\left\{\frac{1}{(a-x)^3}-\frac{1}{a^3}\right\}。$$

讀者或已知道能自己求其解答的微分而證明其所求的積分是否正確。若能求得原式則結果為正確的。

第三種情形 分母能分解為不等的虛因數者。如

$$\frac{1}{(a^2+x^2)(b+x)}。$$

因爲虛根恆是成對發生的（見第 113 節），每對虛根之積是屬於 x^2+a^2 的形式。我們並不假定每個虛因數於一個部份分數，而假定每對虛因數於一個部份分數，屬於

$$\frac{Ax+B}{a^2+x^2}$$

的形式。

故我們須寫爲

$$\frac{1}{(a^2+x^2)(b+x)}=\frac{Ax+B}{a^2+x^2}+\frac{C}{b+x}。$$

今得積分表中(13)的形式，可記憶之。

例一　$\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}=\int\left(\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx$。此中 $A=\frac{1}{2}$; $B=-\frac{1}{2}$; $C=\frac{1}{2}$; $D=0$。

答：$\frac{1}{4}\log(x^2+1)(x-1)^{-2}-\frac{1}{2}(x-1)^{-1}+C$。

例二　證 $\int\frac{dx}{1-x^4}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}+C$。

例三　H. Daneel (Zeit. Phys. Chem., 33, 415, 1900)於研究『化學反應的自由能』時用與此相似的式子，

$$\frac{x^2dx}{a^4-x^2}=k\ dt。$$

就一個實驗的結果而言，其中 $t=t_1$ 時 $x=x_1$；$t=t_2$ 時 $x=x_2$，則得

$$2k\,(t_2-t_1)=\frac{1}{a}\left(\tan^{-1}\frac{x_2}{a}-\tan^{-1}\frac{x_1}{a}\right)+\frac{1}{2a}\log\frac{(x_2-a)(x_1+a)}{(x_2+a)(x_1-a)}。$$

例四　在研究球腦態的固體 (spheroidal solid) 的溶解速度時，必須求 $\int\frac{dx}{(a-bx)^{\frac{2}{3}}(c-x)}$ 的值。令 $a-bx=z^3$；$a-bc=n^3$；　$\therefore\ x=\frac{a-z^3}{b}$；$dx=-\frac{3z^2dz}{b}$。以這些結果代入原式，而求部份分數得

$$3\int\frac{dz}{n^3-z^3}=3\int\frac{dz}{(n-z)(n^2+nz+z^2)}=\frac{1}{n^2}\int\frac{dz}{n-z}+\frac{1}{n^2}\int\frac{(z+2n)dz}{n^2+nz+z^2};$$

至此我們暫時離開本文，看下列積分，這是對我們極有幫助的。顯然，

$$\int\frac{(y+2b)}{a+by+y^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2y+b}{a+by+y^2}+\frac{3b}{a+by+y^2}\right)dy。$$

右邊第一項的分子是分母的微係數故其積分爲 $\frac{1}{2}\log(a+by+y^2)$；在第二項的分母上同時加減 $\frac{1}{4}b^2$ 即可化一個易求積分的形式，如

$$\int\frac{dy}{a+by+y^2}=\int\frac{dy}{\left(a-\frac{1}{4}b\right)+\left(y+\frac{1}{2}b\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4a-b^2}}\tan^{-1}\frac{2y+b}{\sqrt{4a-b^2}}。$$

回到本文，即知

$$3\int\frac{dz}{n^3-z^3}=\frac{1}{n^2}\left(\log\frac{\sqrt{n^2+nz+z^2}}{n-z}\right)+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2z+n}{\sqrt{3}\,n}+C。$$

然後再原取的值 $z=(a-bx)^{\frac{1}{3}}$；$n=(a-bc)^{\frac{1}{3}}$ 代回，即可得所求的積分。

本書用以作說明的許多例題，太部份是分母已經分解爲因數，不使讀者起首即在這方面分心。讀者若自覺對於分解因數的能力薄弱，可

費幾小時用 W. T. Knight 所著關於分解因數的小册子 Algebraic Factors, London, 1888，加以練習卽能奏效。

第四種情形　分母可以分解爲虛因數而其中有幾個是相等者。如

$$\frac{1}{(a^2+x^2)^2(b+x)}。$$

合用上述的結果，

$$\frac{1}{(a^2+x^2)^2(b+x)}=\frac{Ax+B}{(a^2+x^2)^2}+\frac{Cx+D}{a^2+x^2}+\frac{E}{b+x}。$$

通分而比較 x 的同次項的係數，恰好可以得到足夠的方程式來決定 A, B, C, D, E 的值。分別來求這些部份分數的積分通常總到第 75 節中所舉的簡化公式。

例　證 $\int\frac{(x^3+x+1)dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{xdx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$，並求其值。

示意：　求積分時，對於右邊第二項用得到第 75 節(E)。

答：　$\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\frac{x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$。

總而言之，一個微分的分母若能分解爲因數，則此微分可用上述方法之一，求其積分。本章的其餘部份將專述積分法在實用的例題。許多幾何上的應用也要講到，因爲附帶的圖形於構成運算在腦筋上的印象，極有功用。

§ 77. 化學反應的速度 (The Velocity of Chemical Reaction)

化學反應所須的時間視下列諸端而定：如作用物質的性質與濃度，所含的雜質，溫度，以及其餘別的。在有些反應中這幾種因子都可支配

到使反應速度的量測與理論的結果相符合。但是許多化學反應至今還是頑抗着無法編成等級。例如氫碘酸與溴酸；氫與氧；碳與氧間的作用；又磷的氧化作用。這些反應的機構，由於催化作用與其他副作用糾擾，無從弄得清楚。要想明白這些反應體系內的實況尚有待擴大的研究。

化學反應，依照假定其參預反應的分子數而分爲單分子反應，雙分子反應，三分子反應，四分子反應等，這些反應又按次稱第一級反應，第二級反應，第三級反應，第四級反應等。

I. 第一級反應　作用開始 $t=0$ 時參預反應的分子，其濃度設爲 a。經一個時間 t，濃度即爲 $a-x$，此中 x 表示在此時間內物質所轉變的總量。設在時間 dt 內所成物質的量爲 dx。任何時刻的反應速度比例於反應物質的濃度——Wilhelmy 定律，故得

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x);\quad \text{或}\ k=\frac{1}{t}\log\frac{a}{a-x}; \tag{1}$$

或同樣可寫爲，$x=a(1-e^{-kt})$，此中 k 爲常數，視反應系的性質而定。反應之依據此方程式而進行者稱爲第一級反應。

II. 第二級反應　設 a 與 b 爲兩種不同物質的濃度，在這樣的反應體系之內如醋酸之作用於酒精，或溴之作用於丁烯二酸則依照質量作用定律，任何時刻的反應速度比例於兩個反應物質的濃度之積。因爲若有一克分子的醋酸轉變去了即有同量的酒精也要失去。當此體系中含有 $a-x$ 克分子的醋酸時必含 $b-x$ 克分子的酒精。故

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x);\quad \therefore\ k=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{a-b}\log\frac{(a-x)b}{(b-x)a}。 \tag{2}$$

反應之依照此方程式而進行者稱爲第二級反應。若兩個反應分子是相同的，則 $a=b$。從(2)卽得 $\log 1\times\frac{1}{0}=0\times\infty$。這種不定形式的分數須在後文討論之。不過從開端出發求

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)^2$$

的積分，可得

$$k=\frac{1}{t}\cdot\frac{x}{a(a-x)}。\tag{3}$$

在蔗糖的水解作用中，

$$C_{12}H_{22}O_{11}+H_2O=2C_6H_{12}O_6,$$

設 a 爲蔗糖的量，b 爲作用開始時水的量。反應速度可用方程式(3)表之，此時 x 代表實在轉變掉的蔗糖的量。設蔗糖溶在過多的水內，水的濃度 b 在整個變化中實用上可作爲常數，因 b 比 x 大得很多，x 的值有小變化時對於 b 的值無甚可以覺察得到的影響；故 $b-x$ 可以作爲常數。$\therefore k'=k(b-x)$ 此中 k' 與 k 爲常數。故方程式(1)可以代表這種反應的過程。Wilhelmy 量測這反應速度的結果證明上述的假定與實相很是接近。在很多的水中，蔗糖的水解作用故可稱爲第一級反應，雖然實在是雙分子反應。

例　用第 20 節說明二的方法，從下列 x，與 t 的值而求之，

$$t=\quad 15,\quad 30,\quad 45,\quad 60,\quad 75,\cdots\cdots$$

$$x=0.046,\ 0.088,\ 0.130,\ 0.168,\ 0.206,\cdots\cdots$$

以這些值代入方程式(1)：證明 k 爲常數。經過適當的變換，使此式適

合於常用對數之用。令 $a=1$。

III. **第三級反應** 在這個情形中三個分子參預反應的。設 a, b, c 爲反應開始時每種反應分子的濃度，則

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)(c-x)。\qquad (4)$$

求此式的積分，令 $t=0$ 時 $x=0$ 代而求積分常數 C。最後的結果爲

$$k=\frac{\log\left\{\left(\frac{a}{a-x}\right)^{b-c}\left(\frac{b}{b-x}\right)^{c-a}\left(\frac{c}{c-x}\right)^{a-b}\right\}}{t(a-b)(b-c)(c-a)}, \qquad (5)$$

此中 a, b, c 各不相等。設令方程式中 $a=b=c$，而求積分，結果得

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)^3;\quad k=\frac{1}{2t}\left\{\frac{1}{(a-x)^2}-\frac{1}{a^2}\right\}$$

$$=\frac{x(2a-x)}{2ta^2(a-x)^2}。\qquad (6)$$

重行排列 (6) 中各項，可得

$$x=a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a^2kt+1}}\right) \qquad (7)$$

我們可以見過只有時間爲無限大，卽 $t=\infty$ 時，此反應方能完畢，卽 $x=a$。若 $c=b$ 而 a 不等於 b，

$$k=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(a-b)^2}\left\{\frac{(a-b)x}{b(b-x)}+\log\frac{a(b-x)}{b(a-x)}\right\}。\qquad (8)$$

屬於第三級反應者有氰酸的聚合 (polymerization)；用氯化錫使三價鐵還原；二氧化硫的氧化；苯甲醛 (benzaldehyde) 在氫氧化鈉上的作用。詳細情形可參考 J. W. Mellor 著 Chemical Statics and Dynamics。

IV. 第四級反應 這些反應比較少見。氫溴酸與溴酸間的反應在某些情形之下是屬於第四級的。又如鉻酸與磷酸間的反應；溴在苯上的作用；氯酸鉀的分解都屬於第四級反應。一種 n 分子的反應亦稱第 n 級反應，其普遍方程式爲

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)^n;\quad k=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-x)^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}}\right\}。\qquad (9)$$

其間積分的求法見第 70 節 IV. 例三例四。注意當 $x=0$ 時 $t=0$，即能求得積分常數的值。於是可得

$$\frac{1}{(n-1)(a-x)^{n-1}}=kt+C;\quad C=+\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}。$$

V. 求化學反應的等級 設 C_1，C_2 各爲某時間 t_1，t_2 之末溶液中反應物質的濃度。從 (9) 設 $t=t_1$ 時 $C=C_1$，從此可求得

$$-\frac{dC}{dt}=kC^n;\quad \therefore\ \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{C_2^{n-1}}-\frac{1}{C_1^{n-1}}\right\}=k(t_2-t_1),\qquad (10)$$

此中 n 爲參預反應的分子數。欲求 n 的值。從(10)

$$-\int_{C_1}^{C_2}\frac{dC}{C^n}=kt;\quad \text{或}\quad n=1+\frac{\log t_1-\log t_2}{\log C_1-\log C_2}。\qquad (11)$$

爲何有負號呢？答覆是(10)代表反應產物的生成率；(11)代表原有物質的消失率。$C=a-x$；$\therefore\ dC=-dx$。

數值的說明。W. Judson 與 J. W. Walker(Journ. Chem. Soc. **73**, 410, 1898)發見濃度爲 77 的溴酸與氫溴酸的混合物，分解時須 15 分鐘；而濃度爲 51.33 的相同混合物之溶液，轉變時須 30 分鐘。以這些數值代入(11)，

$$n=1+\frac{\log\ 3.333}{\log\ 1.5}=3.97。$$

最近的整數爲 4 卽爲反應的等級。這裏須用到自然對數表見附錄二表十八。

在兩種濃度 C_1 與 C_2 的溶液中一個物質轉變其相等部份 m 所須的時間可從曲線的圖形補插法求得之，這些曲線的橫坐標各爲 t_1 與 t_2；縱坐標各爲 C_1 與 C_2。

求反應等級的另一簡便公式爲

$$n=\frac{\log\frac{dC_1}{dt}-\log\frac{dC_2}{dt}}{\log\ C_1-\log\ C_2}。\qquad (12)$$

讀者或能自己求得此公式。

這裏所述的速度方程式的算學處理並無什麼困難，雖然在支配實驗室的結果時還要稍稍練習。下面所選的說明，若反應不受糾擾的影響，都用在實際工作中見到。

例一　M. Bodenstein (Zeit. Phys. Chem., **29**, 315, 1899)表示硫化氫從其元素的生成率，用方程式

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)^{\frac{1}{2}}$$

求此式的積分，令 $b-x=z^2$，　$\therefore\ dx=-2zdz$，故

$$\int\frac{dz}{z^2+A^2}=-\frac{kt}{2}；\quad 或\ \frac{2}{A}\tan^{-1}\frac{z}{A}+C=-kt$$

此中 $A^2=a-b$。積分方法可參閱積分表(13)。這裏假定 $a>b$；若 $a<b$ 則積分法爲第 76 節第一種情形。我們可得相似的式子表示柱形

固體金屬在酸中的溶解率。注意 $t=0$ 時 $x=0$ 可求 C 的值。

例二　L. T. Reicher (Zeit. Phys. Chem. **16**, 203, 1895) 研究溴對於丁烯二酸的作用，發見 $t=0$ 時溶液中含有 8.8 的丁烯二酸，$t=95$ 則含 7.87；於是用水冲淡此酸的濃度，然後發見 $t=0$ 時濃度爲 3.88，又 $t=132$ 時濃度爲 3.51。這裏 $\frac{dC_1}{dt}=\frac{8.88-7.87}{95}=0.0106$；$\frac{dC_2}{dt}=0.00227$；$C_1=(8.88+7.87)\times\frac{1}{2}=8.375$；$C_2=3.7$，代入上列(12)得 $n=1.87$。故這反應爲第二級。

例三　沒有糾擾的旁作用存在，試列下述反應的速度方程式 (A. A. Noyes 與 G. J. Cottle, Zeit. Phys. Chem., **27**, 578, 1898)。

$$2CH_3\cdot CO_2Ag+H\cdot CO_2Na=CH_3\cdot COOH+CH_3CO_2Na+CO_2+2Ag。$$

假定銀，鈉，氫的鹽類在溶液中完全分解，游子間的反應根本是：

$$2Ag^++H\cdot COO^-=2Ag+CO_2+H^+,$$

故反應是第三級的。用下列資料覆證之。當蟻酸鈉 $a=0.050$，醋酸銀 $b=0.100$；又

$$t=\quad 2,\quad 4,\quad 7,\quad 11,\quad 17,\cdots\cdots$$

$$(b-x)\times10^3=81.03,\ 71.80,\ 63.95,\ 59.20,\ 56.25,\cdots\cdots$$

證明設爲第二級反應則 k 的變化在 1.88 至 2.67 之間；設爲第三級反應，k 的變化在 31.2 與 28.0 之間。

例四　以 acetochloranilide 轉化爲 *p*-chloracetanilide 的反應中 J. J. Blanksma (Rec. Trav. Pays-Bas., **21**, 366, 1902; **22**, 290, 1903) 所得記錄，

$t=\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 6,\quad 8,\cdots\cdots$

$a-x=49.3,\ 35.6,\ 25.75,\ 18.5,\ 13.8,\ 7.3,\ 4.8,\cdots\cdots$

證明這是第一級反應。

例五 一個均勻的球形固體受到溶劑的作用而一層一層的溶解。欲求其溶解速度。設實驗開始 $t=0$ 時球的半徑爲 r_0; 在時間 t, 半徑爲 r; 設 ϕ 爲此固體一個克分子量的體積; 設在時間 t 內此球溶解去 x 克分子量。此球的溶解速度顯然比例於其表面 s 與其時溶液中所存酸的量 $a-x$。但球的體積爲$\frac{4}{3}\pi r^3$;在時間 t 所溶去的 x 克分子量的體積爲

$$\phi x=\frac{4\pi}{3}(r_0^3-r^3);\quad \therefore\ r=\left(r_0^3-\frac{3\phi x}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}},$$

在時間 t 球的表面 s 爲 $4\pi r^2$,

$$\therefore\quad s=4\pi\left(r_0^3-\frac{3\phi x}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}。\quad \therefore\ \frac{dx}{dt}=ks(a-x);$$

$$或\quad \frac{dx}{dt}=4\pi k\left(r_0^3-\frac{3\phi x}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}(a-x),$$

此式與第 76 節第三種情形例四相仿。

例六 L. T. Reicher (Liebig's Ann., **228**, 257, 1885; **232**, 103, 1886) 量測氫氧化鈉使乙酸乙酯的水解作用, 發見

$t=\quad 0,\quad 393,\quad 669,\quad 1110,\quad 1265,\cdots\cdots$單位;

$a-x=0.5638,\ 0.4866,\ 0.4467,\ 0.4113,\ 0.3879,\cdots\cdots$

$b-x=0.3114,\ 0.2342,\ 0.1943,\ 0.1589,\ 0.1354,\cdots\cdots$

應用這些結果於本節方程式(2)證 k 近似於一個常數, 結果此反應爲

第二級的。

例七 乙酸乙酯在加酸的水中水解即生成酒精與醋酸。假使 a 克分子的醋酸加入水中，實驗開始時用 b 克分子的乙酸乙酯，證明從 Wilhelmy 定律可得

$$\frac{dx}{dt}=k_1(a+x)(b-x); \quad 或 \quad \frac{1}{t}\log_{10}\frac{b(a+x)}{a(b-x)}=常數;$$

外加的假定是反應速度比例於此體系中所存醋酸的量。若 a 克分子的其他酸類用作催化劑，則

$$\frac{dx}{dt}=(k_2a+k_1x)(b-x); \quad 或 \quad \frac{1}{t}\log_{10}\left(\frac{b}{b-x}\cdot\frac{k_2a+k_1x}{k_2a}\right)=常數。$$

參閱 W. Ostwald, Journ. Prakt. Chem., [2], **28**, 449, 1883, 可得實驗數字。

示意： 有 a 的催化酸類存在，則由此而生的反應速度爲 $k_2a(b-x)$ 但 x 的醋酸也經產生，故由此而生的催化作用爲 $k_1x(b-x)$。現在可用第 22 節所述的『不同反應互相獨立』的原理。

例八 有一個時候以爲磷化氫受熱而分解是照方程式： $4PH_3=P_4+6H_2$； 現在相信這個反應更爲簡單，即 $PH_3=P+3H$；最後 P_4 與 H_2 分子的生成對於分解的速度無可覺的影響。證明從上兩種假設所得的方程式各如下：

$$\frac{dx}{dt}=k(1-x)^4; \qquad \therefore \quad k=\frac{1}{t}\left\{\frac{1}{(1-x)^3}-1\right\};$$

與 $$\frac{dx}{dt}=k'(1-x); \qquad \therefore \quad k'=\frac{1}{t}\log\frac{1}{1-x}。$$

換言之，若反應爲第四級則 k 爲常數，反應爲第二級則 k' 爲常數。使這些方程式變爲適合於實驗的覆證，設每單位體積的 PH_3 爲 a 克分子量。設在時間 t 內，a 的一部份 x 分解完成。故剩有 $(1-x)a$ 的磷化氫與 $\frac{3}{2}ax$ 的氫。因氣體壓力比例於其密度，設 PH_3 的原有壓力爲 p_0；氫與磷化氫的混合物的壓力爲 p_1，則

$$\frac{p_1}{p_0}=\frac{(1-x)a+\frac{3}{2}xa}{a}=1+\frac{1}{2}x;\quad x=\frac{2p_1}{p_0}-2;$$

$$(1-x)a=\frac{1}{a}\left(3-\frac{2p_1}{p_0}\right);$$

又 $$k=\frac{1}{t}\left\{\left(\frac{p_0}{3p_0-2p_1}\right)^3-1\right\};\quad k'=\frac{1}{t}\log\frac{p_0}{3p_0-2p_1},$$

此中常數不必與前相同。D. M. Kooij (Zeit. Phys. Chem., **12**, 155, 1892) 曾發表下列資料：

$$t=\quad 0,\quad 4,\quad 14,\quad 24,\quad 46.3,\cdots\cdots$$

$$p=758.01,\ 769.34,\ 795.57,\ 819.16,\ 865.22,\cdots\cdots$$

從此證明 k' 適合於所求條件，而 k 不適合。所以磷化氫的分解是可稱爲第一級反應。當然這並非眞的證明一個反應是單分子的。這不過證明此反應的速度比例於此氣體的壓力；兩者是很不同的事。參閱 J. W. Mellor 著 Chemical Statics and Dynamics。

在實驗室的實驗工作中，研究者的進行是取『嘗試改錯法』(Method of trial and failure)，希望在許多錯誤的猜度中，最後能撞到通過的路。在算學工作中亦然如是，沒有王者之路。我們的進行是靠着本能而

非靠着規則。例如這裏我們就有過兩種猜度。第一種看起來很有可能，但在嘗試時很正確的證明其錯誤。第二種，好像很少可能的猜度，卻被證明即爲我們所求者。Galileo 在他著名的自由落體下降定律的構成時，起初試驗下降速度 V 是否爲所經距離 s 的函數。他發見這個假定與事實不合。於是他再試驗 V 是否爲下降時間 t 的函數，最後成立現今人所共知的定律 $V=gt$。Kepler 也說關於行星軌道的形式他曾有過十九種猜想，此後一種一種的放棄了，最後得到橢圓軌道是適合於所求的條件。

§ 78. 化學平衡——不全反應或可逆反應 (Chemical Equilibria—Incomplete or Reversible Reactions)

無論硝酸鈉與氯化鉀，或氯化鈉與硝酸鉀只須成份相等溫度不變，混合於水溶液中，經過相當時期每種溶液都是含有四種鹽類分配比例相同。設 m 與 n 爲正整數，則

$$(m+n)\mathrm{NaNO_3}+(m+n)\,\mathrm{KCl}$$
$$=m\mathrm{NaCl}+m\mathrm{KNO_3}+n\mathrm{NaNO_3}+n\mathrm{KCl};$$
$$(m+n)\mathrm{NaCl}+(m+n)\mathrm{KNO_3}$$
$$=m\mathrm{NaCl}+m\mathrm{KNO_3}+n\mathrm{NaNO_3}+n\mathrm{KCl}。$$

寫得更簡明些，

$$\mathrm{NaCl}+\mathrm{KNO_3}\rightleftharpoons\mathrm{NaNO_3}+\mathrm{KCl}。$$

此現象的解釋是認爲反應的產物在反應進行的同時互相作用而重新生成原有的反應物質。即是兩個獨立而相反的變化在同一反應體系中同時發生。當此兩個相反的反應的速度完全相稱時，此體系即現平

衡的停止狀態。這是不同的作用同存原理的另一解釋。質量作用定律的特例論述這些不全反應或可逆反應者是 Guldberg 與 Waage 定律。我們考察含有兩個反應物質 A_1 與 A_2 的體系如

$$A_1 \rightleftharpoons A_2$$

設 a_1 與 a_2 各爲 A_1 與 A_2 的濃度。設 A_1 的 x 在時間 t 內轉變完成，於是從質量作用定律，從 A_1 至 A_2 的轉變率爲

$$\frac{\partial x}{\partial t}=k_1(a_1-x)。$$

次之，設 A_2 的 x' 在時間 t 內轉變完成，則從 A_2 至 A_1 的轉變率爲

$$\frac{\partial x'}{\partial t}=k_2(a_2-x')。$$

但 A_1 之轉變爲 A_2 者有 x_1，A_2 之轉變爲 A_1 者有 x'，欲得平衡必須 $x=-x'$ 卽 $dx=-dx'$；

$$\therefore \quad \frac{\partial x}{\partial t}=-k_2(a_2+x)。$$

顯然，總速度等於此兩個部份速度之和，

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=k_1(a_1-x)-k_2(a_2+x)。 \tag{1}$$

通常寫 $K=\frac{k_1}{k_2}$。當這體系到了停止狀態，$\frac{dx}{dt}=0$。Ostwald 稱『平衡是一種不隨時間而變的狀態』。❶ 結果

$$K=\frac{(a_2+x)}{(a_1-x)}, \tag{2}$$

❶ "Equilibrium is a state which is not dependent upon time."—Ostwald.

此中 x 由化學分析而決定之，a_1 爲實驗開始時所用物質的量，$t=0$ 時，a_2 爲零。這樣可決定 K。現在可用分解部份分數的方法而求(1)的積分，再在下列的例而進行之。

例一　在水溶液中 γ 氧酪酸 (γ-oxybutyric acid) 轉化爲 γ 酪內酯 (γ-butyrolactone)，而 γ 酪內酯亦轉化爲 γ 氧酪酸，依照下列方程式，

$$CH_2OH \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot COOH \rightleftharpoons \underbrace{CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CO}_{O} + H_2O$$

用上述的記法，證明此內酯的生成速度爲 $\frac{dx}{dt}=k_1(a_1-x)-k_2(a_2+x)$，又 $K=\frac{k_1}{k_2}=\frac{a_2+x}{a_1-x}$。今用分解部份分數法求第一方程式的積分。從 $t=0$ 時 $x=0$ 而求積分常數之值，證

$$\frac{1}{t}\log\frac{Ka_1-a_2}{(Ka_1-a_2)-(1+K)x}=\text{常數} \tag{3}$$

P. Henry (Zeit. Phys. Chem., **10**, 116, 1892) 用 $a_1=18.23$, $a_2=0$ 從事實驗，分析結果知 $\frac{dx}{dt}=0$ 時 $x=13.28$; $a_1-x=4.95$; $a_2+x=13.28$; $K=2.68$。以這些值代入(3)化簡之，覆證其當下列各對實驗值代入時是否等於常數，

$t=$　21,　50,　65,　80,　160,……;

$x=2.39$, 4.98, 6.07, 7.14, 10.28,……。

例二　較上述第一級反應更爲複雜的例，卽如用醋酸使酒精化爲酯時的反應：

$$CH_3\cdot COOH + C_2H_5\cdot OH \rightleftharpoons CH_3\cdot COOC_2H_5 + H\cdot OH,$$

這是第二級反應。設 a_1, b_1 爲開始醋酸與酒精的濃度; a_2, b_2 爲乙酸乙酯與水的濃度。證 $\frac{dx}{dt}=k_1(a_1-x)(b_1-x)-k_2(a_2+x)(b_2+x)$。這裏與他處一樣，若採用克分子量如 $a_1=1$, $b_1=1$, $a_2=0$, $b_2=0$ 則計算工作化得很爲簡單。上方程式故可化爲

$$\frac{dx}{dt}=k_1(1-x)^2-k_2x^2。\tag{4}$$

爲簡單計，寫$\frac{k_1}{k_1-k_2}=m$，再令 α, β 爲方程式 $x^2-2mx+m=0$ 的根。證明(4)可以寫成

$$\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}=(k_1-k_2)dt。$$

求此積分。普通當 $t=0$ 時 $x=0$。因 $\alpha=m+\sqrt{m^2-m}$; $\beta=m-\sqrt{m^2-m}$,試證

$$\frac{1}{t}\log\frac{(m-\sqrt{m^2-m})(m+\sqrt{m^2-m}-x)}{(m+\sqrt{m^2-m})(m-\sqrt{m^2-m}-x)}$$
$$=2(k_1-k_2)\sqrt{m^2-m}。\tag{5}$$

K 可以如前例求之。因 $m=\frac{k_1}{k_1-k_2}$; $m=\frac{1}{1-\frac{k_2}{k_1}}$。M. Berthelot 與 L. Péan St. Gilles 的實驗證明上述的反應中 $\frac{k_1}{k_2}=4$; $m=\frac{4}{3}$; $\sqrt{m^2-m}=\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}(k_1-k_2)=0.00575$; 若用常用對數則 $\frac{4}{3}(k_1\times 0.4343-k_2)=0.0025$。$x$ 與 t 的相當值爲

$t=$　64,　103,　137,　167,……

$x=$　0.250,　0.345,　0.421,　0.474,……

常數＝　0.0023,　0.0022,　0.0020,　0.0021,……

從(5)覆證此末行的常數。t 取較小之值時，可以設想有副作用影響於正常的反應，因爲此常數與剛才所求得的規律性有些差異。

例三　設有一克分子的碘化氫裝在 v 升的容器內加熱，則依方程式 $2HI \rightleftharpoons H_2+I_2$ 而分解。從此證明，在平衡時

$$\frac{dx}{dt}=k_1\left(\frac{1-2x}{v}\right)^2-\left(k_2\frac{x}{v}\right)^2 \tag{6}$$

證明 $\frac{1-2x}{v}$ 爲未分解的碘化氫的濃度。令 $\frac{k_1}{k_2}=K$ 覆證下式

$$\int\frac{dx}{K(1-2x)^2-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{K}}\log\frac{\sqrt{K}(1-2x)+x}{\sqrt{K}(1-2x)-x}=\frac{k_2t}{v^2}。$$

因 $t=0$ 時 $x=0$, $C=0$。M. Bodenstein (Zeit. Phys. Chem., **13**, 56, 1894; **22**, 1, 1897)發在 440° 時 $K=0.02$, 故 $\sqrt{K}=0.141$; 若體積不變，

$$\frac{1}{t}\log\frac{1+5.1x}{1-9.1x}=\text{常數}。$$

從實驗中所求得的 x 與 t 的相當値爲 $t=15$ 時，$x=0.0378$，故此常數爲 0.0171; 又 $t=60$ 時，$x=0.0950$，故此常數爲 0.0173。……

例四　一個固體的『活動質量』(Active mass) 與其量無關。若 c 爲常數，證明在 $CaCO_3 \rightleftharpoons CaO+CO_2$ 中，$Kc=p$，此中 p 爲氣體的壓力。

例五　證明第一級的完全反應 $A_1=A_2$ 的速度方程式與同級的可逆反應 $A_1\rightleftharpoons A_2$ 的速度方程式取相同的普遍形式，若後者中物質的濃度不取原有質量的而取平衡時的。設在平衡時 x 的值爲 ξ，則 $\frac{dx}{dt}=k_1(a_1-x)-k_2x$，變成 $\frac{dx}{dt}=k_1(a-\xi)-k_2\xi$。$\frac{dx}{dt}=0$ 時，$k_2=\frac{k_1(a_1-\xi)}{\xi}$，以此值代入得

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{k_1a_1(\xi-x)}{\xi}；\text{或}\frac{dx}{dt}=k(\xi-x)\tag{7}$$

此中 a，k，k_1 的意義很顯明。

例六　證明無論以 A_1 或以 A_2 作實驗，k 是相同的。從 A_1 做起，上例已經證明 $k=\frac{k_1a_1}{\xi}$；若從 A_2 做起則在平衡時顯然有 $(a_1-\xi)$ 的 A_2 存在。從此證 $\frac{dx}{dt}=\frac{k_2a_1\{(a_1-\xi)-x\}}{a_1-\xi}$；$k_2\xi=k_1(a_1-\xi)$，如上例的辦法得 $\frac{k_2a_1}{a_1-\xi}=\frac{k_1a_1}{\xi}$。$\frac{dx}{dt}=\frac{k_1a_1(a_1-\xi-x)}{\xi}$。以 $t=0$，$t=t$，與 $x=x_0$，$x=x_1$ 爲兩限而求積分，再從(7)證

$$\frac{1}{t}\log\frac{\xi-x_1}{\xi-x_2}=\frac{1}{t}\log\frac{a_1-\xi-x}{a_1-\xi-x_2}=\frac{k_1a_1}{\xi}=k_1+k_2。\tag{8}$$

C. Tubandt 量測 l 薄荷酮轉化爲 d 薄荷酮的速度，與 d 薄荷酮轉化爲 l 薄荷酮的速度 (Dissertation, Halle, 1904)。在第一組實驗中 x 爲時間 t 所有 d 薄荷酮的量，在第二組實驗中 x 爲時間 t 所有 l 薄荷酮的量；ξ 爲此體系在平衡狀態時，即 t 爲無限大時 x 的值。第一，從 l 薄荷酮轉化爲 d 薄荷酮。

$t=0,\quad 15,\quad 30,\quad 45,\quad 60,\quad 75,\quad 90,\quad 105,\quad \infty;$

$x=0,\ 0.73,\ 1.31,\ 1.74,\ 2.06,\ 2.30,\ 2.48,\ 2.62\ ,\ 3.09$。

第二，從 d 薄荷酮轉化爲 l 薄荷酮。

$t=0,\quad 15,\quad 30,\quad 45,\quad 60,\quad 75,\quad 90,\quad 105,\quad \infty;$

$x=0,\ 0.45,\ 0.76,\ 1.03,\ 1.22,\ 1.37,\ 1.47,\ 1.56\ ,\ 1.84$。

證明速度常數 k 在兩組中幾乎相同，幾乎都等於 0.008。

§ 79. 部份沉澱 (Fractional Precipitation)

設於兩種鹽類 A 與 B 的混合溶液中加入第三種物質 C，其量若不足以使溶液中的 A 與 B 完全沉澱，則普通的情形有一種要比別一種多沉澱些。再以混合的沉澱物溶解，再部份的使鹽類沉澱，重複這種方法許多次我們可以將兩種物質分離得很好，不如此，幾無法可以分離牠們。

自從 Mosander 在 1839 年這樣分離釓土 (Gadolinite earth) 以後，這方法大受 W. Crookes (Chem. News, **54**, 131, 155, 1886) 於釔土及其他精細的工作所採用。近代分離鈈，鐳與其他稀奇金屬時很引起對於這方法的注意。反應的算學直接從質量作用定律來的。設加入的 C 僅夠 A 與 B 的部份沉澱，設溶液中原含有 A 鹽的量爲 a；B 鹽的量爲 b。設在某個時間 t 的末 A 與 B 所沉澱的量爲 x 與 y 則 $a-x$ 與 $b-y$ 將爲其時留存在溶液中 A 與 B 的量。故沉澱的速度爲

$$\frac{dx}{dt}=k_1(a-x)(c-z);\quad \frac{dy}{dt}=k_2(b-y)(c-z),$$

此中 $c-z$ 代表在時間 t 之末溶液中留存的 c 的量。

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}=k_1(a-x):k_2(b-y);$$

以 dt 乘之，亦可寫爲

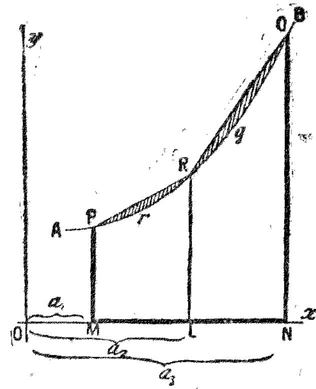
$$k_2\frac{dx}{a-x}=k_1\frac{dy}{b-y};\qquad \therefore\ k_2\int\frac{d(a-x)}{a-x}=k_1\int\frac{d(b-y)}{b-y}。$$

求積分，$k_2\log(a-x)=k_1\log(b-x)+\log C$，此中 $\log C$ 爲積分常數。欲求 C，須注意 $x=0$ 時 $y=0$，結果得 $\log a^{k_2}=\log Cb^{k_1}$；或 $C=\dfrac{a^{k_2}}{b^{k_1}}$。

$$\therefore\quad \frac{k_1}{k_2}=\frac{\log\dfrac{a}{a-x}}{\log\dfrac{b}{b-y}}\tag{1}$$

比值$\dfrac{a-x}{a}$可以量度當 A 鹽的 x 已經沉澱後，溶液中尚存 A 鹽的量。此比值愈小則 A 鹽沉澱得愈多。$\dfrac{b-y}{b}$ 的意與此相同不過就 B 鹽而說。k_2 超過 k_1 愈大，則 A 鹽積儲於沉澱中的趨向愈小；k_1 超過 k_2 愈大，則 A 鹽積儲於沉澱中的趨向愈大。設比值 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 幾近於 1，則部份沉澱的手續愈長，因 A 與 B 存在於沉澱中的量幾乎相同。到了極限的情形，當 $k_1=k_2$ 或 $\dfrac{k_1}{k_2}=1$，則 A 與 B 存在於沉澱中的量之比與存在於溶液中的量之比相同。在這種情形時礦土的複合性質不能用部份沉澱法察出。對於重量分析(Gravimetric analysis)的應用迄今尚未求得。

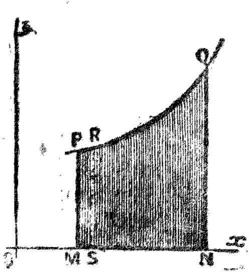
§ 80. 曲線下的面積；定積分的求值法 (Areas Enclosed by Curves; To Evaluate Definite Integrals.)



圖一百

設 AB (圖一百)爲任何曲線，其方程式爲已知者。今欲求以曲線；兩個縱坐標 PM, QN; 及 x 軸上一部份 MN，爲界的平面的面積。此面積可用近似法決定之；先假定 $PQMN$ 割成許多垂直於 x 軸的小條——稱爲面的原素(surface element)；——假定每條之頂的曲線爲直線而分別求各條的面積；總加形式爲梯形的各條的面積。設面 $PrqQNM$ 被直線 LR 割成兩條。聯 PR, RQ。作爲

面積 $PQMN$=面積 $PRLM$+面積 $RQNL$。但這樣計算而得的面積比所求的面積爲大。圖中陰影部分代表此差誤量。顯然，每條取得愈狹，則計算中的梯形的個數愈多而差誤亦愈小。我們若能求得無限條的面積而總加之，則差誤小得幾乎爲零。雖然這樣的方法的觀念，我們無法清楚的構成，但我們可以斷定這種運算才能使結果絕對的正確。第 68 節中關於這方面說得很夠。現在我們去知道怎樣能將無限個無限小的條子總加起來。



圖一百零一

欲在腦筋中有具體的印象，設我們求 $PQNM$ (圖一百一)。取任何

一個小條 $PRSM$; 令 $PM=y$, $RS=y+\delta y$; $OM=x$; 又 $OS=x+\delta x$。設 δA 爲此小條的面積。若 PR 爲直線而非曲線,則面積 δA 卽梯形 $PRSM$ 的面積爲(參閱第 191 節 11)

$$\delta A=\frac{1}{2}\,\delta x(PM+RS)=\delta x\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)。$$

δx 愈變愈小時,則比值 $\frac{\delta A}{\delta x}$ 接近於 y,到了極限卽等於 y;

$$\mathrm{Lt}_{x=0}\frac{\delta A}{\delta x}=\mathrm{Lt}_{x=0}\frac{\delta x\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)}{\delta x}=\mathrm{Lt}_{x=0}\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)=y=\frac{dA}{dx}$$

$$\therefore\quad dA=y\cdot dx。\qquad(1)$$

此公式卽表示無限狹的條子,如 PM 的面積。總面積 A 的求法卽須總加無限個從 MP 至 NQ 彼此相隣的無限狹的條子的面積。每條的面積顯然是長乘寬,卽 $y\times dx$。我們如欲更進一步,必須先知每條的長 y 與其對 O 的距離 x 間的關係。換言之,我們必先知道曲線 PQ 的方程式。例如,若曲線的兩端不定則此面積爲

$$A=\int y\cdot dx+C。\qquad(2)$$

若曲線兩端的橫坐標爲 a_2 與 a_3(圖一百),則此面積爲

$$A=\int_{a_2}^{a_3}y\cdot dx+C。\qquad(3)$$

方程式(2)爲不定積分,方程式(3)爲定積分。定積分的值由其上限與下限的值而決定之。在圖一百中,設 a_1, a_2, a_3 三個橫坐標,且 a_2 在 a_1 與 a_3 之間,則

$$A=\int_1^3 y\cdot dx+C=\int_{a_1}^{a_2}y\cdot dx+\int_{a_2}^{a_3}y\cdot dx+C。$$

已知其上下限時，積分的值可求之如下；以上限代入所求得的積分中的 x；同樣以下限代入；然後從前者減去後者即為所求的值。

使觀念更確定些，我們可看一特例。設 $y=2x$，欲求縱坐標 a 與 b 間曲線下的面積。從(3)

$$\int_a^b 2x\cdot dx=\Big|_a^b x^2+C; \tag{4}$$

此中『$\Big|$』表示的意義與 Sarraus 的置換記號 (symbol of substitution) 相彷。有時也用方括號表示之，如

$$\int_a^b 2x\cdot dx=\left[x^2+C\right]_a^b=(b^2+C)-(a^2+C)=(b^2-a^2)$$

求任何面的面積的方法，在通常的教本中稱為**求面的同積方**（The quadrature of surfaces），所以有這名詞是因為面常以平方量度之，如平方厘米，平方吋，或其他長度單位的平方。應用這些原理於特殊的例時讀者須自己作圖。設欲決定的面積以橢圓或雙曲線的一部份為界則先要描出此曲線，且留心注意此積分的上下限。

例一　求以一個橢圓為界的面積，中心在原點。這裏

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad 或\ y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}。$$

參考圖二十二。所有垂直於 x 軸的原素，從 O 至 P_4，其總和為下方程式所示，

$$A=\int_0^a y\cdot dx,$$

因為當曲線與 x 軸相交，$x=a$；與 y 軸相交，$x=0$。上方程式中的正號代表在 x 軸以上的縱坐標。故橢圓的面積

$$A=4\int_0^a y\cdot dx。$$

以 y 的值代入此中，我即得此無限條的總和

$$A=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx。$$

這可用分部積分法求之，得

$$A=4\frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\right]_0^a$$

$$A=4\frac{b}{a}\left[\left\{\frac{a}{2}\sqrt{a^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a}+C\right\}\right.$$

$$\left.-\left\{\frac{0}{2}\sqrt{a^2-0^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{0}{2}+C\right\}\right]$$

$$\therefore\quad A=4\frac{b}{a}\times\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1;$$

注意 $\sin 90^\circ=1$，$\sin^{-1}1=90^\circ$，而 $2\sin^{-1}1=180^\circ=\pi$。故橢圓面積爲 πab。設長軸與短軸相等，即 $a=b$，此橢圓即變爲圓而面積 πa^2。可以見到當求定積分時，積分常數總是這樣消去的。

例二 求以等邊雙曲線，$xy=a$ 或 $y=\dfrac{a}{x}$ 爲界而在 $x=x_1, x=x_2$ 兩限之間的面積。

$$A=\int_{x_1}^{x_2}y\cdot dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{a}{x}dx;$$

$$\therefore\quad A=a[\log x+C]_{x_1}^{x_2}=a\{(\log x_2+C)-(\log x_1+C)\}$$

$$=a\log\frac{x_2}{x_1}。$$

若 $x_1=1$，$x_2=x$，則 $A=a\log x$。這個簡單的關係可以見到何以有時

稱自然對數爲雙曲線對數的理由了。

例三 求以曲線 $y=\frac{12(x-1)}{x}$ 爲界而在 12 厘米與 3 厘米之間的面積。

答： 91.36 平方厘米。

示意： 此積分爲$12\int(x-1)x^{-1}dx$ 或 $12\Big[x-\log x\Big]_3^{12}=12(9-\log 4)$。以下可查自然對數表而演算之。

例四 證明對數曲線 $x=\log y$ 下的面積爲 $y-1$。

示意： $A=\int dy=y+C$。欲求 C 的值，注意 $x=0$ 時 $y=1$; $A=0$。故 $y=1$ 則 $A=0$; $y=2$, $A=1$;……

若用極坐標則面積的微分爲

$$dA=\frac{1}{2}r^2d\theta。\tag{5}$$

例 求雙曲螺旋線 0 與 $+r$ 間的面積，參閱第 43 節例二。$r\theta=a$; $d\theta=-\frac{a}{r^2}dr$，結果，

$$A=-\int_{+r}^{0}\frac{a}{2}\cdot dr=-\frac{1}{2}\Big[\frac{ar}{2}\Big]_r^0=\frac{ar}{4}。$$

此後，凡求兩限間的積分的各步驟中積分常數都略去不寫。在上面討論中惟下列規則更須重視的：積分常數在求積分的值時會得消去。缺去不定的積分常數卽爲定積分的標記。

§ 81. 積分的中值 (Mean Values of Integrals)

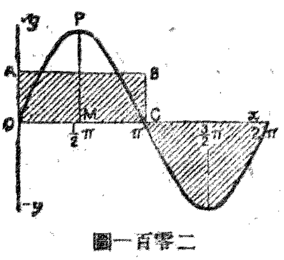
曲線

$$y=r\sin x$$

代表正弦曲線，在交流電中 y 爲其電動勢；r 爲電流極大值；x 爲時間 t 內角的位移，且 $x=\frac{2\pi t}{T}$，此中 T 爲線圈旋轉完全一周所須的秒數。在任何時刻，y 的值是比例於曲線的相當縱坐標。當 $x=90°$，$t=\frac{1}{4}T$，此線圈旋轉四分之一周，其縱坐標爲極大。當 $x=270°$，$t=\frac{3}{4}T$，此線圈旋轉四分之三周，其縱坐標爲極小。當 $x=0°$，$180°$，$360°$ 卽 $t=0, \frac{1}{2}T$，T 時曲線與 x 軸相交。從 $x=0$ 出發，旋轉半周後，平均電動勢等於曲線 OPC 所圍的面積（見圖一百二）當 $\frac{1}{2}T$ 時此曲線 x 軸相交，卽交 x 軸於 π 處。此面積 A_1 顯然是

$$A_1=\int_0^\pi r\sin x\,dx=-\Big[r\cos x\Big]_0^\pi=-r\cos\pi+r\cos 0=2r,$$

因 $\cos\pi=\cos 180°=-1$；$\cos 0°=1$。



圖一百零二

線圈的第二個半周中，正弦曲線所圍的面積 A_2 在 x 軸之下，其絕對值與第一半個相等。卽說在第二半周中平均電動勢絕對值等於第一半個，不過符號相反。這是很易見到。

$$A_2=\int_\pi^{2\pi} r\sin x\cdot dx=-\Big[r\cos x\Big]_\pi^{2\pi}=-r\cos 2\pi+r\cos\pi=-2r,$$

因 $\cos 360°=\cos 0°=1$。總面積 A，卽線圈完全一周中正弦曲線與

x 軸所圍的面積，是等於零，因

$$A=A_1+A_2=0。$$

正弦曲線與 x 軸所圍面積，在一個整的周期 2π 或幾個整的周期內，其值爲零。

設在 $b-a$ 間的 x，分爲 n 等分，每份爲 δx，$b-a=n\delta x$；今有函數，

$$y=f(x);$$

以 x 每個代入，$f(x)$的值可以 y_1，y_2，y_3，………y_n 表之，而

$$y_1=f(a);\ y_2=f(a+\delta x);\ y=f(a+2\delta x);\ \cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$y_n=f(b-\overline{n-1}\delta x)。$$

這 n 個 y 的值的算術中數(Arithmetical mean)照定義等於其和的 n 份之一。故由 $n\delta x=b-a$ 得

$$\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_n}{n}=\frac{(y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_n)\delta x}{b-a}。$$

設 x 取 b 與 a 間每個可能的值，則 n 將爲無限之大。故此這無限個無限小的量之和可用下列記號表之

$$\int_a^b f(x)dx,$$

如第 68 節所示。於是 $f(x)$在 b 與 a 間所有一切值的算術平均數爲

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a};\ 或\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx。$$

此稱爲 $f(x)$在 $b-a$ 範圍內的中值或平均值(Mean value 或 average value)。在幾何上，中值卽是以 $b-a$ 爲底的矩形的高，其面積等於曲

線 $y=f(x)$，b 與 a 處兩個縱坐標，x 軸所圍的面積。在圖一百二中，OA 是當 x 從 O 連續變化至 π，而取一切的值時，y 的中值，卽 $r\sin x$ 的中值。很易見到

$$\int_0^\pi r\sin x\cdot dx=\text{面積 } OPC=\text{面積 } \square OABC;$$

$$=OC\times OA=(b-a)\times OA,$$

此中 a 爲 O 點的橫坐標；b 爲 C 點的橫坐標。但 $b-a=\pi$，故

$$\text{縱坐標的中值}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi r\sin x\cdot dx=\frac{2r}{\pi}=0.6366r。$$

量測交流電在半個完全周期內卽電流取同一方向時的平均強度 y_1 的器具稱爲力測電流計（electrodynamometer）。故此計所量測者爲 $y_1=OA$（見圖一百二）$=\dfrac{2r}{\pi}=0.6366r$。但 $MP=r$ 代表電流極大值，因爲 $\sin x$ 當 $x=90°$ 時爲最大，卽 $\sin 90°=1$。於是，$y=r\sin 90°=r$。

$$\text{電流的極大值}=r;\quad \text{電流的平均值}=0.6366r。$$

還有別種中值在研究交流電時也極重要。此爲 $x=0$ 至 $x=\pi$ 的範圍內所有縱坐標的平方的中值的平方根。此數稱爲 $f(x)$ 的均方根值（root-mean-square value）。卽用上述的函數 $y=r\sin x$，則

$$y^2\text{ 的中值}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi r^2\sin^2 x\cdot dx=\frac{r^2}{2};$$

此可用分部積分法求得之。於是

$$y\text{ 的均方根值}=\sqrt{\frac{r^2}{2}}=0.7071r。$$

例一 在含有中値的計算中,必須注意切勿誤用自變數。如欲求一個質點從靜止地位,以等加速度下墜時的平均速度,速度爲每隔相等時間而量取者。物體從靜止下墜時, $V=gt$,

$$\frac{1}{t}\int_0^t Vdt=\frac{1}{t}\int_0^t gt\cdot dt=\frac{gt}{2}=\frac{V}{2},$$

卽關於時間的平均速度爲其最後速度之半。但另一方面,欲求此質點的平均速度,而速度爲每隔其所經的相等距離而量取者。必須注意公式爲 $V^2=2gs$,故

$$\frac{1}{s}\int_0^s Vds=\frac{\sqrt{2g}}{s}\int_0^s\sqrt{s}\cdot ds=\frac{2\sqrt{2gs}}{3}=\frac{2V}{3},$$

卽關於距離的平均速度爲其最後速度的三分之二。

例二 證明若一個質點以等加速度運動,則在相等的無限小時間內的速度的平均方根値爲 $\frac{1}{3}(V_0{}^2+V_0V_1+V_1{}^2)$,此中 V_0 與 V_1 各爲最初與最後的速度。

例三 單分子化學反應中在時間 t 內物質轉變的量 x 可以寫爲 $x=a(1-e^{-kt})$,此中爲反應開始時物質的量,k 爲常數。證明速度若就每隔相等的時間 t 而言則 $V=a\ ke^{-kt}$;若就物質轉變相等的量 x 而言則爲 $V=k(a-x)$。再證關於時間的平均速度,在 t_1-t_0 內爲

$$V_t=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}a\ ke^{-kt}\ dt=\frac{a(e^{-kt_1}-e^{-kt_0})}{t_1-t_0}=\frac{V_0-V_1}{\log\ V_0-\log\ V_1},$$

又關於物質轉變的量的平均速度,從 x_0 至 x_1 則爲

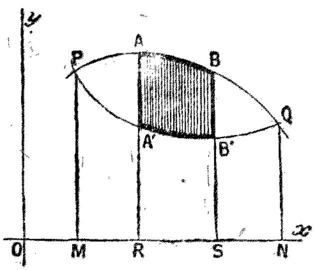
$$V_x=\frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1}k(a-x)dx=\frac{k(x_1-x_0)(2a-x_1-x_0)}{2(x_1-x_0)}=\frac{V_0+V_1}{2}.$$

若 $t_0=0$ 而 $t_1=\infty$，則平均速度 V_t 向零收斂。幾個有趣味的關係可以從這方程式推論而得。

與平均密度，質量中心，轉動慣性，平均壓力，壓力中心等連帶的問題都用上述原理研究之。

§ 82. 曲線所圍的面積，功的圖 (Areas Bounded by Curves. Work Diagrams)

I. 兩個不同曲線所圍的面積。設 $PABQ$ 與 $PA'B'Q$ 為兩個曲線，今欲求 $PABQB'A'$ 所圍的面積。設 $y_1=f_1(x)$ 為一個曲線的方程式；$y_2=f_2(x)$ 為另一個曲線的方程式。先求兩個曲線交點的橫坐標。再用第80節的方法分別求面積 $PABQMN$ 與面積 $PA'B'QMN$。設兩個曲線的交點 P 與 Q 的橫坐標 OM 與 ON 各以 a 與 b 表之。則所求的面積 A 為



圖一百零三

面積 $PABQB'A'=$ 面積 $PABQMN-$面積 $PA'B'QMN$

$$\therefore \quad A=\int_a^b y_1\cdot dx-\int_a^b y_2\cdot dx。\tag{1}$$

欲求一部份面積 $ABB'A'$，設 x_1 為 AR 的橫坐標，x_2 為 BS 的橫坐標，則

$$A=\int_{x_1}^{x_2} y_1\cdot dx-\int_{x_1}^{x_2} y_2\cdot dx=\int_{x_1}^{x_2}(y_1-y_2)dx。\tag{2}$$

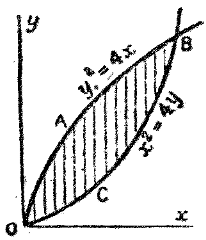
我們取兩個拋物線 $y^2=4x$；$x^2=4y$ 所圍的面積作為說明。此兩個曲線顯然是交於原點，與 $x=4$，$y=4$ 的點(見第 32 節 16)；設單位為

厘米。則結果

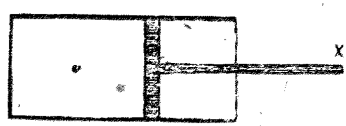
$$A=\int_0^4 \frac{x^2}{4}dx-\int_0^4 2\sqrt{x}\,dx=2\int_0^4\left(\frac{x^2}{8}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$=-5\frac{1}{3}\text{平方厘米。} \tag{3}$$

何以會得負號呢？描繪此圖，可以見到，我們先沿OCB（圖一百四）求積分然後減去沿 OAB 所求得的積分。而我們應該先沿 OAB 求，然後減去沿 OCB 所求得者。故在這方面須加注意。



圖一百零四



圖一百零五

設有一定體積的氣體裝在圓柱形的容器內，此器配有一個密切的活塞可以滑動（圖一百五）。設活塞與氣體接觸的面積爲 1。當小小壓力 X 加在活塞的外端時設氣體體積變化 dx 單位。於是依功 W 的定義，

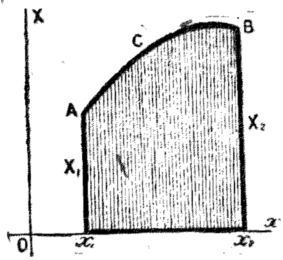
$$\text{功}=\text{力}\times\text{位移}; \quad \text{或} \quad dW=X\cdot dx。$$

若 p 爲氣體的壓力，v 爲其體積，我們可得

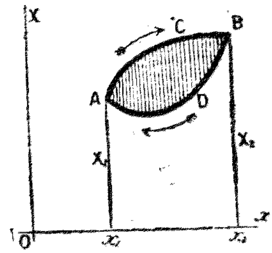
$$dW=p\cdot dv。$$

今設氣體從一種 $x=x_1$ 情形變爲另一種 $x=x_2$ 的情形。設其時氣體所受相當的壓力各爲 X_1 與 X_2。描繪 x 從 x_1 至 x_2 時 X 的值，得曲線 ACB，如圖一百六所示。圖中陰影部份代表在此變化中，作於

此體系上的功。



圖一百零六



圖一百零七

氣體若經過另一組 X 與 x 的值而回復原狀，則得曲線 ADB 如圖一百七所示。此系統所作的功可以面積 $ADBx_2x_1$ 代表之。我們若約定，凡作於此系統的功為正，此系統所作的功為負，則圖一百七中，

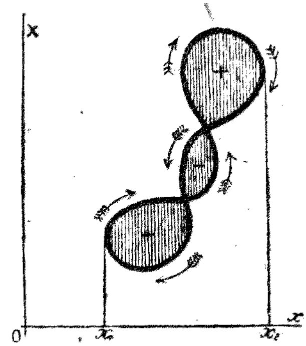
$$W_1-W_2=\text{面積 } ACBx_2x_1-\text{面積 } ADBx_2x_1$$

$$=\text{面積 } ACBD。$$

圖一百七的陰影部份代表上述變化的一個循環中，作於此系統上的功。一個物質從某種狀態出發經過一組變化最後仍然回復原狀，這一組變化稱為一個**循環** (cycle) 亦稱一個**循環變化** (cyclic process)。一個循環變化的圖形表示為一個封閉曲線。在任何循環變化中，作於此系統上的功等於此循環的面積。

當 x 增加時即作功於此系統上，當 x 減少時即此系統作功。所以若曲線是由一點以鐘針方面繞着面積 $ACBD$ 而描繪者則作於此系統上的功為正；若取相反方向則為負。至此我們可以明白圖一百四中負號的意義了。在圖一百四中若從原點出發取鐘針方向則所得者將為正號。

若曲線的圖成爲幾個環形如圖一百八所示，則功的總數等於取鐘針方向各環面積之和減去反鐘針方向各環面積之和。這種代表功的圖形是 Clapeyron 第一個採用。此種圖稱爲 Clapeyron 氏功的圖。



圖一百零八

在 Watt 的器示壓容圖 (indicator diagrams) 中，曲線所圍的面積，代表在向前動程中蒸汽作於活塞的功，比其回復動程中逐出蒸汽時活塞所作的功之超出數。故輸送於活塞的能的總數可能此曲線所圍的面積代表之。此面積可用下章第 110 節中所述幾種方法之一決定之。

II. 一個曲線兩分枝所包圍的面積不過是方程式 (1) 的簡單的應用。故介於曲線 $y^2=(x^2+6)^2$ 的兩分枝間與縱坐標 $x=1$, $x=2$ 之間的面積 A 爲

$$A=\pm\int_1^2(x^2+6)dx=\pm 8\frac{1}{3}\text{單位},$$

這是可用與前相同的方法求得的。

例　證介於拋物線 $y=x^2-5x+6$; x 軸; 縱坐標 $x=1$; $x=5$ 之間的面積爲 $5\frac{1}{3}$單位。

示意：　描繪此曲線，則最後結可後圖形觀察之。當然在兩限 $x=5$, $x=1$ 間求 $y\cdot dx$ 的積分，亦可得同樣的結果。

§ 83. 定積分及其性質 (Definite Integrals and their Properties)

定積分有幾個很有趣味的性質是值得注意的；可以作爲第 80 節中定積分求值法的補充。

I. 一個定積分是其上下限的函數。設 $f'(x)$ 爲 $f(x)$ 的一次微係數，

$$\int_a^b f'(x)dx=\Big[\ f(x)\ \Big]_a^b=f(b)-f(a)。$$

這是說定積分是其上下限的函數而非其積分變數的函數，如

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b f'(y)dy=\int_a^b f'(z)dz。\qquad (1)$$

換言之若函數的形式相同，在相同的上下限間求積分，即得相同的值。

例一　證$\int_b^a e^{-x}\cdot dx=\int_b^a e^{-z}\cdot dz=e^{-a}-e^{-b}$。

例二　證$\int_{-1}^3 x^2\cdot dx=\frac{1}{3}\{(3)^3-(-1)^3\}=9\frac{1}{3}$。

例三　證$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot dx=-[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0°\right)=1$。

例四　證$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot dx=\frac{\pi}{4}$； $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cdot dx=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$；

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\cdot dx=\frac{\pi}{2}。$$

示意：　求不定積分$\int\sin^2 x\cdot dx$ 可令 $u=\sin^2 x$， $dv=\sin x\cdot dx$ 而用分部積分法。

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

$$= -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx.$$

$$\therefore\quad \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(-\sin x\cos x + x) + C.$$

II. 定積分的上下限若對調則使積分的值變號。這是很明顯的，

$$\int_b^a f'(x)dx = f(a) - f(b) = -\int_a^b f'(x)dx, \tag{2}$$

或者說，積分的上下限對調時只使定積分的值變號。這是說若以變數從 b 變至 a 爲正，則從 a 變至 b 爲負。又可說以一個方向的運動爲正，則其相反方向的運動爲負。

III. 分解積分的上下限。設 m 爲 a, b 間的某值，卽從第 80 節可得

$$\int_b^a f'(x)dx = \int_m^a f'(x)dx + \int_b^m f'(x)dx$$

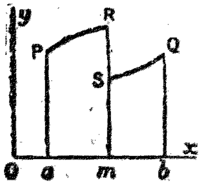
$$= f(a) - f(m) + f(m) - f(b). \tag{3}$$

或可寫爲

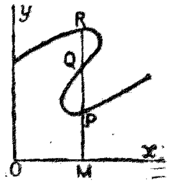
$$\int_b^a f'(x)dx = \int_b^m f'(x)dx - \int_a^m f'(x)dx$$

$$= f(m) - f(b) - f(m) + f(a). \tag{4}$$

以言語表示之卽爲任何已知範圍內的定積分等於此範圍內各部份的定積分之和。因此若 $f'(x)$ 在 $x=a$ 與 $x=b$ 之間爲有限的單值函數但於某點 m 不連續（圖一百九），我們求積分的值時可以分爲兩部舉行之，求 a, m 間的定積分與 m, b 間的定積分之和。



圖一百零九



圖一百十

當自變數取定一個實數或虛數值時，函數可以有兩個或兩個以上的值者稱爲多值函數 (Multi-valued function)。如對數函數；無理的代數函數；反三角函數等是。例如，$y=\tan^{-1}x$ 卽爲多值函數，因爲相當於同一個 x 的值可有許多縱坐標，各個間相差 π 的倍數。描繪而覆證之。顯然，若 $x=a$，$x=b$ 爲一個多值函數的積分上下限時，我們必須確定所得的縱坐標 $x=a$, $x=b$ 是屬於曲線 $y=f(x)$ 的同一分枝者。在圖一百十中設 $x=OM$，y 爲多值的，因同時可等於 MP, MQ, 或 MR。虛數值不會阻礙到普通的實數值的。當自變數取定一個數值（實數或虛數）時，單值函數只有一個值。例如有理的代數函數，指數函數，三角函數等都是單值函數。

IV. 設 $f'(x)dx$ 爲一個 x 的函數；$f'(a-x)dx$ 爲另一個 x 的函數，則

$$\int_0^a f'(x)dx=\int_0^a f'(a-x)dx。\tag{5}$$

因爲我們若令 $a-y=x$；　$\therefore dx=-dy$；若 $x=a$，則 $y=0$；同樣若 $x=0$，則 $y=a$。

$$\therefore \int_0^a f'(x)dx=-\int_a^0 f'(a-y)\,dy=\int_0^a f'(a-x)dx,$$

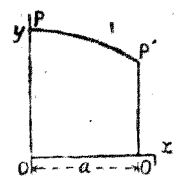
注意從(2)與(1)得到此結果；或者直接如下法亦可看出，

$$\int_0^a f'(x)dx = f(a) - f(0)。$$

$$\int_0^a f'(a-x)\,dx = -\int_0^a f'(a-x)d(a-x) = f(a) - f(0)。$$

$$\therefore\quad \int_0^a f'(x)dx = \int_0^a f'(a-x)dx。$$

此結果的意義，不過說 $OPP'O'$ 的面積(圖一百十一)可用兩種方法決定之，或者取 O 為原點而稱 OO' 為 x 軸的正方向；或者以原點移至 O'，與舊原點 O 相距 a，而稱 $O'O$ 為 x 軸的正方向。一個重要的應用如下：



圖一百十一

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx \qquad (6)$$

例一　覆證下列結果：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\ x\ dx = 1; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\ x\ dx = \frac{\pi}{4}。$$

例二　證 $\int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$。

例三　求 $\int_0^{\pi} \sin\ mx\ \sin\ nx\ dx$。用第 192 節(28)，即

$$2\sin\ mx\ \sin\ nx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x。$$

$$\therefore\quad \int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\, dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\, dx;$$

$$\therefore\quad \int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}。$$

所以若 m 與 n 爲整數,

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx = 0$$

注意 $\sin\pi=\sin 180^\circ=0$;又 $\sin 0^\circ=0$; 若 $m=n$, 證

$$\int_0^\pi \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos^2 nx)\, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}。$$

例四　證在上下限 π 與 0 間 $\cos mx \cos nx\, dx$ 的積分,當 m 與 n 爲整數時,其值爲零; 當 $m=n$ 時,其值爲 $\frac{\pi}{2}$。

示意: 用第 192 節(27), 即 $2\cos mx \cos nx = \cos(m-n)x + \cos(m+n)x$。

例五　求 $\int_0^\pi a \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ 的值。

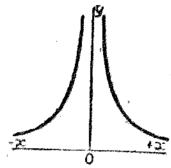
解　$2a\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}d\left(\sin\frac{x}{2}\right) = \left[\frac{2a}{2}\sin^2\frac{x}{2}\right]_0^\pi = a$。

例六　證 $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$; $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0$; $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0$。

示意: 用例三例四的結果。

例七　求積分$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{1}x^{-2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{+1}$，其答數是否為$-2$?

V.　在積分的上下限時，或在其間時函數可以變為無限大。我們以前都假定在上下限之間積分是連續的。我敢相信初學者對例七的問題必會答曰是。在上下限 1 與 -1 間，積分$\int x^{-2}dx$ 應該是以曲線 $y=x^{-2}$；x 軸；$x=1$，$x=-1$ 的兩個縱坐標為界的面積。描繪之，即可見到上述的答覆是謬誤的。曲線伸張而經過無限遠處，當 x 從 $+1$ 到 -1 的時候。（圖一百十二）所以當欲求積分的函數變為無限大時或在兩限之上或其間是不連續的，則積分法就不可靠。結果，為了要確定某些函數在已知上下限內是有限與連續或者牠們非連續的增加即連續的減少，或者是交互的增加與減少若干有限次，我們將這些函數來考察一過是必要的事。



圖一百十二

本題在 B. Riemann 與 H. Webber 所著 Die Partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, Braunschweig, 1900—1901，一書的最初幾章中討論之，讀者欲於這方面得有詳盡的知識必須參考此書。在這裏我只能給與少數幾個指示，以供處理這些積分之用。很易見到

$$\int_0^n e^{-x}\ dx=\left[-e^{-x}\right]_0^n=-\left[\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^0}\right]=1-\frac{1}{e^n},$$

若 n 變為無限大，此積分所趨向的積分為 1。故我們可說

$$\int_0^\infty e^{-x}\ dx=1。$$

當 x 取 a 與 b 間的一切值，除了在上限 $x=b$ 時，若此函數為連續的，則顯然的，h 無限減小時

$$\int_a^b f'(x)dx = \mathrm{Lt}_{h=0}\int_a^{b-h} f'(x)dx \tag{7}$$

h 當然是一個正數。同樣，x 取下限卽 $x=a$ 以外一切值時若 $f(x)$ 為連續的，則

$$\int_a^b f'(x)dx = \mathrm{Lt}_{h'=0}\int_{a+h'}^b f'(x)dx。 \tag{8}$$

例一　$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \mathrm{Lt}_{h=0}\int_0^{1-h}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \mathrm{Lt}_{h=0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-h}$$

$$= \mathrm{Lt}_{h=0}\{-2\sqrt{1-1+h}-(-2)\} = 2-2\sqrt{h}。$$

使 h 為無限小時，此積分趨向於極限 2。

$$\therefore\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2。$$

例二　證 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \mathrm{Lt}_{h=0}\int_h^1 \frac{dx}{x^2} = \mathrm{Lt}_{h=0}\left(\frac{1}{h}-1\right)$。

當 h 為無限小時，結果為無限大。此積分沒有一個確定的有限數值。

例三　證 $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Lt}_{h=0}\int_0^{a-h}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Lt}_{h=0}\sin^{-1}\left(1-\frac{h}{a}\right)$

當 h 為無限小時，此積分趨向於極限 $\sin^{-1}1$ 卽 $\dfrac{\pi}{2}$。

例四　證 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \mathrm{Lt}_{h=0}\int_h^1 \frac{dx}{x} = \log 1 - \log h = \log\frac{1}{h} = \infty$。

當函數 $f'(x)$ 在上下兩限之間變為無限大時，我們可寫為

$$\int_a^b f'(x)dx = \mathrm{Lt}_{h=0}\int_a^{m-h} f'(x)dx + \mathrm{Lt}_{h'=0}\int_{m+h'}^b f'(x)dx。 \tag{9}$$

(9)式中假定 $f'(x)$ 只有在一點是變爲無限大，若有 n 個不連續處，顯然我們可以同樣寫爲 n 個積分的和。

例一 $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\mathrm{Lt}_{h=0}\int_{h}^{1}\frac{dx}{x^2}+\mathrm{Lt}_{h'=0}\int_{-1}^{-h'}\frac{dx}{x^2},$$

$$=\mathrm{Lt}_{h=0}\left[-\frac{1}{x}\right]_h^1+\mathrm{Lt}_{h'=0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-h'}$$

$$=\mathrm{Lt}_{h=0}\left(1-\frac{1}{h}\right)+\mathrm{Lt}_{h'=0}\left(\frac{1}{h'}-1\right),$$

當 h 與 h' 爲無限小時，此積分的極限爲無限大。

例二 $$\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}=\mathrm{Lt}_{h=0}\int_{1+h}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}+\mathrm{Lt}_{h'=0}\int_{0}^{1-h'}\frac{dx}{(x-1)^2},$$

$$=\mathrm{Lt}_{h=0}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{1+h}^{2}+\mathrm{Lt}_{h'=0}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{0}^{1-h'}$$

$$=\mathrm{Lt}_{h=0}\left(\frac{1}{h}-1\right)+\mathrm{Lt}_{h'=0}\left(\frac{1}{h'}-1\right)。$$

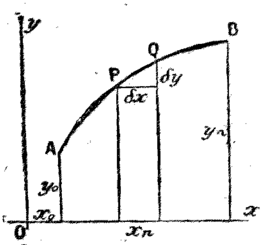
當 h 與 h' 爲無限小時，此積分的極限爲無限大。

例三 證 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{6}{2}$。

在這裏若能一讀 J. J. Hardy 著 Infinitesimals and Limits, Easton, 1900，的小册子，或尋常教本中所討論的極限則對於初學者極有好處。

§ 84. 求任何曲線的長(To Find the Length of any Curve)

已知曲線的方程式，求曲線 AB(圖一百十三)的長 l。這無異於當



圖一百十三

此曲線變直後求這直線的長，故此方法稱爲**曲線化直法**(rectification of curves)。設 A 的坐標爲 (x_0, y_0) 而 B 的爲 (x_n, y_n)。在此曲線上任取二點 P, Q。照圖中作圖。從幾何學定理若 P 與 Q 相當接近，我們幾乎可寫爲

$$(PQ)^2=(\delta x)^2+\delta y)^2;$$

或 $$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

這是到了一個極限當弦 PQ 等於弧 PQ 時(第 6 節 II)的情形。故從 x_1 至 x_2 互相銜接的許多小要素 dl 之和 l 爲

$$l=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx。\qquad (1)$$

欲應用此結果，只須求此曲線方程式的微係數而代入方程式(1)中的$\frac{dy}{dx}$，求此方程式中的定積分卽得曲線的一定部份的長。

若曲線方程式以極坐標表示者，dl 可用類似的方法求得爲

$$dl=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}。\qquad (2)$$

在實際工作中器械的曲線化直法是常用的，以一個輪沿着曲線推動然後看其轉過的多少。在迴轉測長計(opisometer)內，輪從停止時出發，沿着欲量的路線轉動，然後就圖的縮尺，將輪退回，直到停止於最初位置時而止。

例一　設曲線爲拋物線 $y^2=4ax$，　$\therefore y\ dy=2a\ dx$，

或　$(dx)^2=\dfrac{y^2(dx)^2}{4a^2}$；　$\therefore dl=\dfrac{dy}{2a}\sqrt{y^2+4a^2}$。求積分，如第 75

節例一，可得 $l=\frac{y}{4a}\sqrt{y^2+4a^2}+a\log\frac{y+\sqrt{y^2+4a^2}}{2a}+C$。令 $y=0$ 時 $l=0$。故求得 $C=0$。

例二 證明圓 $x^2+y^2=r^2$ 的周圍爲 $2\pi r$。

設 l 爲第一象限內的周圍，則因 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$。

$$\therefore\quad l=\int_0^r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^r\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx=r\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$=\left[r\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_0^r=\frac{\pi r}{2}。$$

$\therefore$ 圓周爲 $4\times\frac{\pi r}{2}=2\pi r$。

例三 求等角螺旋曲線的長，此曲線的方程式已知爲 $r=e^\theta$；或 $\theta=\frac{\log r}{\log e}$。

答： $l=\sqrt{2}\,r$。

示意： 求微分得 $d\theta=\frac{dr}{r}$， $\therefore dl=\sqrt{2}\,r$。 $\therefore\ l=\sqrt{2}\,r+C$。當 $r=0$ 時 $l=0$， $\therefore\ C=0$。

例四 Archimedes 螺旋曲線第一圈的長爲 3.3885 a。已知此曲線的方程式爲 $2\pi r=a\theta$。試覆證之。

示意： 先證從原點至 θ 的任何值，此曲線的長爲 $\frac{a}{4\pi}\{\theta\sqrt{1+\theta^2}+\log_e(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\}$。欲求第一圈即令 $\theta=2\pi=6.2832$；$\sqrt{1+\theta^2}=6.363$；$\theta+\sqrt{1+\theta^2}=12.6462$；$\log_e(\theta+\sqrt{1+\theta^2})=\log_e 12.6462$

$=2.5373$。

答：第一圈 $=a(3.1865+0.202)$。

例五 求下列比值，

$$u=\frac{l}{r}=\frac{\text{等邊雙曲線上從 } x=a \text{ 至 } x=x \text{ 的長}}{P(x,\ y)\text{點與原點的距離}}。$$

等邊雙曲線的方程式爲 $x^2-y^2=a^2$， $\therefore\ y=\sqrt{x^2-a^2}$； $\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$。又 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，但 $y^2=x^2-a^2$； $\therefore\ r=\sqrt{2x^2-a^2}$。

從(1)

$$l=\int_a^x\sqrt{\frac{2x^2-a^2}{x^2-a^2}}dx;\quad \therefore\ \frac{l}{r}=\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}。$$

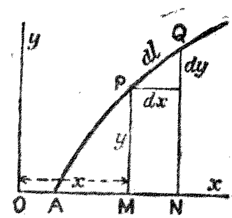
在我們研究雙曲線函數的時候，還要提到這裏的結；並且還要證明

$$e^u=\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a};\quad \left(e^u-\frac{x}{a}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-1;\quad \frac{2xe^u}{a}=e^{2u}+1;$$

$$\therefore\ \frac{x}{a}=\frac{e^u+e^{-u}}{2}。$$

讀者或者已經注意到化學家的原子，物理家的質點與分子，與算學家的微分很有些類似之處。當化學家想明瞭物質的各種轉化情形，他以物質分解爲很小的要素稱爲原子；這裏我們爲求曲線的形式而也分解之爲很小的要素。兩種方法都是暫時的而隨意的補助，爲要幫助我們的思想可以分部明瞭那些無法整個知道的東西。不過整個的觀念一經成立之後，這些構架就可放棄。

§ 85. 旋轉面的面積的求法 (To find the Area of a Surface of Revolution)



圖一百十四

旋轉面是以一個曲線環繞一個定軸旋轉而產生的面，此定軸稱爲旋轉軸。求旋轉面的面積有時稱爲曲面化平法 (complanation of surfaces)。設曲線 APQ（圖一百十四）繞定軸 Ox 而旋轉則產生旋轉面。若 dx 與 dy 所得充分的小，則可假定 $(PQ)^2$，卽 $(dl)^2$ 爲

$$(dl)^2=(dx)^2+(dy)^2, \tag{1}$$

讀者諒已知道圓柱體的側面積爲 $2\pi rh$，其 r 爲底的半徑，h 爲高。由於 dl 的旋轉而產生的圓柱面 ds，當 dl 變爲無限小時，則接近於極限，卽

$$ds=2\pi y dl。 \tag{2}$$

從(1)與(2)，得

$$ds=2\pi y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}。 \tag{3}$$

曲線上從 $x=x_1$ 一點至 $x=x_2$ 一點間一切的 dl 繞 x 軸而旋轉時所得旋轉面的面積 s 爲

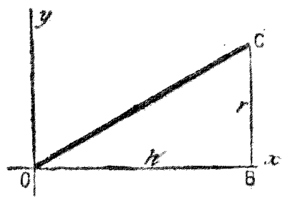
$$s=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx。 \tag{4}$$

例一 直角三角形繞其一個直角邊而旋轉，求其斜邊所生的旋轉面的面積。

示意： 圖一百十五中 OC 直線的方程式爲 $y=mx$;

$\therefore\ dy=m\,dx,\ ds=2\pi y\sqrt{1+m^2}\,dx,$

$$\therefore\quad s=\int 2\pi m\sqrt{1+m^2}\ x\ dx=\pi m x^2\sqrt{1+m^2}+C_{\circ}$$



圖一百十五

注意面積是從原點計起的，故 $x=0$ 時 $s=0$，$\therefore\ C=0$。若 $x=h=$ 圓錐的高 $=OB$；底半徑 $=r=BC$，則 $m=\dfrac{r}{h}$，$s=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ $=2\pi r\times$側高。此為大家知道的量法公式。

例二　證明由一個圓旋轉而成的面，其面積為 $4\pi r^2$。

示意：$x^2+y^2=r^2$；$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$；$y=\sqrt{r^2-x^2}$；

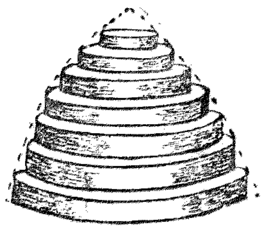
$$\therefore\quad 2\pi\int y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx=2\pi r\int dx_{\circ}$$

此旋轉面一半的積分上下限為 $x_2=r$，$x_1=0$。

§ 86. 旋轉體的體積的求法(To find the Volume of a Solid of Revolution)

這是求一個立方體使其體積等於已知的立體。故這方法稱為立體化為立方法 (cubature of solids)。微分的觀念可使我們得出一個方法用以求一個曲線繞軸旋轉而成的立體的體積。同時，我們可以對於積分法得到一個深入的見解。

我們可以設想此立體分解成許多平行平面，每個平面於是卽為一個小圓柱的部份。圖一百十六或可幫助我們構成這方法在腦筋中的圖



圖一百十六

象。顯然此立體的總體積等於這許多公有旋轉軸的圓柱之和。設一個圓柱的高爲 δx，其底半徑爲 y，則其底面積爲 πy^2；但底面積乘以高卽爲這個圓柱的 $\pi y^2\delta x$。每個圓柱的高愈小則由牠們所積成的側面愈近於一個連續的曲面。到了極限當 $\delta x=0$ 時，此立體的體積 v 爲

$$v=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\ dx \tag{1}$$

此中 x，y 爲產生立體的原有曲線的坐標；x_1 與 x_n 爲此曲線兩端的橫坐標；x 軸爲坐標軸。

極限法一樣可以用來代替微分法而求得此式，如前節的(4)。讀者可參閱別的教本。

例一　求前節例一中三角形斜邊所旋轉而成的圓錐的體積。

這裏 $y=mx$；$dv=\pi y^2dx=\pi m^2x^2dx$。　$\therefore\ v=\dfrac{1}{3}\pi m^2x^3+C$。若體積從圓錐的頂計起，$x=0$ 時 $v=0$，　$\therefore\ C=0$。設 $x=h$，$m=\dfrac{r}{h}$

則此圓錐體積$=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$。

例二　證明旋轉拋物線 $y^2=4ax$ 而成的體積爲 $\dfrac{1}{2}\pi y^2x$，此中 x 爲高，y 爲底的半徑。

例三　圓 $x^2+y^2=r^2$ 旋轉而成的球，試求其體積。答$\dfrac{4}{3}\pi r^3$。

示意: $v=\pi\int(r^2-x^2)dx$; 先求半個球,用上下限 $x_2=r$, $x_1=0$。

§ 87. 累次積分法;重積分(Successive Integration; Multiple Integrals)

正像有時必須用到二級,三級或高級係數,$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$……而且用了較爲便利,有時必須用累次積分法來微分法還原。假使需要化$\frac{d^2y}{dx^2}=2$ 爲原來的形式。我們得用兩次積分的方法。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2;\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=2;\quad 或\ d\left(\frac{dy}{dx}\right)=2dx;$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=2\int dx=2x+C_1。$$

$$\therefore\quad dy=(2x+C_1)dx;\quad 或\quad y=\int(2x+C_1)dx;$$

$$\therefore\quad y=x^2+C_1x+C_2。$$

欲表示$\frac{d^2y}{dx^2}$須求兩次積分,我們連用兩個積分記號。

$$y=\iint 2dx\ dx,\quad \therefore\ y=x^2+C_1x+C_2。$$

注意:有幾個積分記號,卽有幾個積分常數,如 C_1,C_2。

例一 求 $y=\iiint x^3\ dx\ dx\ dx$ 的值。

答: $y=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$。

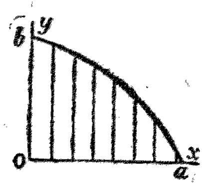
例二 求$\frac{d^2s}{dt^2}=g$ 的積分,此中 g 爲由於地心引力的常數,t 爲

間，s 爲落體所經的距離。

$$\therefore \quad s=\iint \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2;$$

欲求常數 C_1 與 C_2 的值，注意此落體從靜止出發 $s=0$，$t=0$，$C_1=0$，$C_2=0$。

求曲線 $y=f(x)$ 下的面積時我們先以此面積分成許多與 y 軸平行的狹條如圖一百十七，也可以分成許多平行於 x 軸的狹條如圖一百十八。在這兩種情形，無疑的，讀者已能自己求此面積。



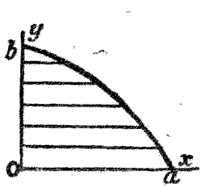
圖一百十七

$$A=\int_0^a y\ dx; \tag{1}$$

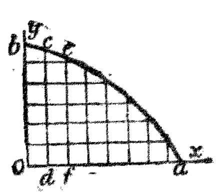
或

$$A=\int_0^b x\ dy。 \tag{2}$$

對於這個問題可有另一種看法。設想此面分成無限個無限小的矩形如圖一百十九所示。每個矩形的面積將爲 $dx\ dy$。狹條 $Obcd$ 的面積等於無限個這種矩形沿着這條從 O 至 b 所積成。此狹條的高爲 b，其闊爲常數 dx；結果，



圖一百十八



圖一百十九

$$Obcd\ \text{面積}=dx\int_0^b dy。$$

面 $ObaO$ 的總面積顯然是沿着 Oa 排列的這類相似的狹條無限個之和。第二狹條 $dcef$ 的高當視曲線 ba 的性質而定。設此曲線的方程式爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{3}$$

離 O 爲 x 的任何狹條的高，可解方程式(3)而求之。結果

$$y=\frac{b}{a}(a-x)。\tag{4}$$

O 與 a 間的任何狹條的面積，故爲

$$\text{任何狹條的面積}=dx\int_0^{\frac{b(a-x)}{a}}dy=dx\left[\int_0^{\frac{b(a-x)}{a}}dy\right]$$

$$=\frac{b}{a}(a-x)dx。\tag{5}$$

從此一切狹條面積之和，因每個狹條面積爲 $\frac{b}{a}(a-x)dx$，故爲

$$\text{一切狹條的總面積}=\int_0^a\frac{b}{a}(a-x)dx=\left[\frac{abx-\frac{1}{2}bx^2}{a}\right]_0^a$$

$$=\frac{a^2b}{a}-\frac{\frac{1}{2}a^2b}{a}=\frac{ab}{2}。\tag{6}$$

合(5)(6)於一式，即得

$$A=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b(a-x)}{a}}dy=\int_0^a\int_0^{\frac{b(a-x)}{a}}dx\ dy。\tag{7}$$

此式稱爲**雙重積分**(double integral)。此積分的意義是說我們若以面分成無限個小矩形——**面的要素**(surface elements)——而求其和，即得此面的面積。

欲求雙重積分的值,我們先關於一個變數求積分。然後再關於另一個積分求變數;誰先誰後沒有關係。我們若以 x 作爲常數而求關於 y 的積分,從 $y=O$ 至 $y=b$, 則得圖一百十九中 $Obcd$ 的面積;然後求關於 x 的積分,從 $x=0$ 至 $x=a$ 這樣即得許多狹條之和,即爲總面積 $ObaO$。若於那一個微分應取那一個上下限,發生疑問時,可照下列次序決定之:最右的微分取最右的積分記號,然後按次取之。如上述的例題採用雙重積分絕無特別利益,因爲(1)或(2)中的單獨的積分已很夠用。但在有些地方,只有雙重積分可以應用。應用積分於這些簡單的量法問題如上例實在有些不配,正像應用百噸重的蒸氣錘來擊開一個小小的硬果。不過我之所以如此做法,目的使讀者專心注意於此錘的機構。

例一 圖一百十九中曲線 ab 的方程式若爲(3),則此曲線與兩個坐標軸所包圍的面積可用下列各式表示之:

$$\frac{a}{b}\int_0^b (b-y)dy;\quad \frac{b}{a}\int_0^a (a-x)dx;$$

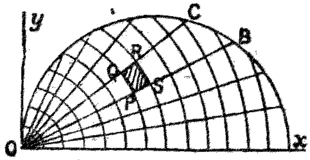
$$\int_0^a\int_0^{\frac{b(a-x)}{a}} dy\ dx;\quad \int_0^b\int_0^{\frac{a(b-y)}{b}} dx\ dy;$$

試證明之。

例二 證 $\int_2^3\int_2^5 x\ dx\ dy=\int_2^3 x\ dx\Big[y\Big]_2^5=3\int_2^3 x\ dx=3\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_2^3=7\frac{1}{2}$。

例三 證 $\int_0^a\int_0^b xy^2\ dx\ dy=\frac{a^2b^3}{6}$。

例四 證兩個拋物線 $3y^2=25x$; $5x^2=9y$ 所包圍的面積爲 5。



圖一百二十

在極坐標中曲線下的面積也可用相類的方法求之。每隔 $d\theta$ 引一個動徑可將面分成許多小片；再以原點為中心,每隔 dr 作圓弧,使每小片再分成許多小塊。考察任一小塊——面的要素——如 $PQRS$（圖一百二十）。設 $OQ=r$ 則 $QP=rd\theta$，又 $PS=dr$,故在極限時 $PQPS$ 的面積為 $PQ\times PS$，或

$$dA=r\ dr\ d\theta。\tag{8}$$

先積小塊而成 OBC 小片；再積小片而得總面積。

$$A=\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\ dr\ d\theta。\tag{9}$$

例　圓的方程式為 $r=2a\cos\theta$ 求其面積,此中 r 為圓的半徑。

解　$$A=\int_0^{2a\cos\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}\pi} r\ dr\ d\theta=\pi a^2。$$

我們也可以設想一個立體分成無限個小的長方體，各邊各平行於 x，y，z 軸。此小的長方體可稱體積的原素（volume elements）。每個原素的體積為 $dx\ dy\ dz$。此立體的總體積可用三重積分表示之，

$$v=\iiint dx\ dy\ dz。\tag{10}$$

沿着 x 軸的第一個積分可得無限之狹的條的長；沿着 y 軸的第二個積分可得無限之薄的片的面積；沿着 z 軸的第三個積分可得這些薄片的總體積,即是立體的體積。

同樣,四重或多重積分都可產生。不過這些是不大遇到的。重積分

很少用到三重以上。

例一　求下列三重積分的值：

$$\int_1^4\int_1^5\int_1^6 yz^2\ dx\ dy\ dz;\ \int_1^4\int_1^5\int_1^6 yz^2\ dy\ dz\ dx;$$

$$\int_1^4\int_1^5\int_1^6 yz^2\ dz\ dx\ dy。$$

答：　2580；1550；1470。

例二　證

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\ dy=\frac{b}{2}\int_0^a\left(\frac{x^2}{p}+\frac{b^2}{3q}\right)dx=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)。$$

例三　求 $8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dx\ dy\ dz$ 的值：

答：　$\frac{4\pi r^3}{3}$。

注意 $\sin\frac{\pi}{2}=1$。證明此積分代表球的體積，此球的方程式爲 $x^2+y^2+z^2=r^2$。

示意：　求『dy』這部份的積分最最麻煩，可令 $r^2-x^2=c$ 而用第72節 IV 例一的方法求之。結果 $\frac{1}{2}y\sqrt{r^2-x^2-y^2}+\frac{1}{2}(r^2-x^2)\cdot\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}$，求積分之值時上下限爲 $y=\sqrt{r^2-x^2}$，$y=0$。結果爲 $\frac{1}{4}(r^2-x^2)\pi$。其餘部份即很簡單。

§ 88. 氣體的等溫膨脹 (The Isothermal Expansion of Gases)

求一種氣體等溫膨脹所作的功，即求溫度不變，氣體體積發生變

化，膨脹或壓縮時所作的功。壓縮可以作爲負的膨脹。這裏是三種很有趣的應用。

I. 氣體受 Boyle 定律，$pv=$常數 C，所支配者。我們已經見到氣體抵抗外界壓力而膨脹時所作的功可用壓力與體積變化量之積表示之。在體積的小變化中所作的功爲

$$dW=pdv。\tag{1}$$

但從 Boyle 定律，

$$p=f(v)=\frac{c}{v}。\tag{2}$$

代入(1)可得 $dW=c\frac{dv}{v}$。若氣體從原有體積 v_1 膨脹至新體積 v_2，其所作之功爲

$$W=c\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v}=c\Big[\log v\Big]_{v_1}^{v_2}+C。\quad \therefore W=p_1v_1\log\frac{v_2}{v_1}。\tag{3}$$

從 (2)，$v_1=\frac{c}{p_1}$，$v_2=\frac{c}{p_2}$，故

$$W=p_1v_1\log\frac{p_1}{p_2}。\tag{4}$$

方程式(3)與(4)在氣體論；熱力學；溶液論中都是佔有最重要的地位的。c 的值等於氣體最初體積 v_1 與壓力 p_1 之積。故此我們亦可寫爲

$$W=2.3026\ p_1v_1\log_{10}\frac{v_1}{v_2}=2.3026\ p_1v_1\log_{10}\frac{p_1}{p_2}。$$

表示在壓縮空氣時所作之功。

例　在壓氣機內空氣引入時每方吋的壓力爲 14.7 磅，壓縮至每方吋 77 磅。每個動程引入體積 1.52 立方呎的空氣，每分鐘可有 133 個動程。求此等溫壓縮所作的功。

示意：　所作的功使 1.52 立方呎×133 卽 202.16 立方呎的空氣從每方吋壓力 14.7 磅壓縮至每方吋 77 磅；卽從每方吋 14.7×144＝2116.8 磅，壓縮至每方吋 77×144＝11088 磅。從 Boyle 定律 $p_1v_1=p_2v_2$；　∴ $v_2\times 77=1.47\times 202.16$ 卽 $v_2=38.598$。所以從上方程式得，功 $=2.3026\times 2116.8\times 202.16$ (log 202.16－log 38.598) ＝708757.28 尺磅，每分。因一個馬力 (horse power) 每分鐘可作 33000 呎磅的功，故等溫壓縮所作的功爲 21.48 馬力。

II.　氣體受 Van der Waals 定律，$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=$ 常數 c，所支配者。

作爲一個練習，可證

$$W=c\log\frac{v_2-b}{v_1-b}-a\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right);\tag{5}$$

氣體與液體成分的 Van der Waals 理論的發展中此方程式佔有顯著的地位。

例　已知 Van der Waals 式中 $a=0.00874$；$b=0.0023$；$c=0.00369$，求二升的二氧化碳等溫壓縮成一升時所作的功。

代入(5)，用負號表壓縮。

III.　在膨脹中氣體的分解。依據 Guldberg 與 Waage 定律，在下列反應中：

$$N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2,$$

在平衡時,若單位質量的 N_2O_4 有一部份 x 成爲 NO_2 而存在，卽有

$$K\frac{1-x}{v}=\frac{x}{v}\cdot\frac{x}{v},$$

其中 $\frac{1-x}{v}$ 代表未分解的過氧化氮的濃度。所以體積與分解程度的關係爲

$$Kv=\frac{x^2}{1-x}。\tag{6}$$

設 n 代表原有的分子數；則 $(1-x)n$ 卽爲未分解的分子數；$2xn$ 爲分解的分子數。設膨脹時 $pv=c$ 的關係不變，則壓力比例於實存的分子數，卽是說，若 p 爲未分解時的壓力，p' 爲氣體的實在壓力，

$$\frac{p}{p'}=\frac{n}{(1-x)n+2xn}=\frac{1}{1+x}。$$

故氣體的實在壓力爲 $p'=(1+x)p$；所作的功爲

$$dW=p'dv=(1+x)pdv=pdv+xpdv \tag{7}$$

從 Boyle 定律與(6)，我們可以見到

$$\therefore\quad p=\frac{c}{v}=\frac{cK(1-x)}{x^2}。$$

代入(7)。求(6)的微分，得

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2(1-x)x+x^2}{K(1-x)^2};\qquad \therefore\ dv=\frac{x((2-x)}{K(1-x)^2}\,dx。$$

代入(7)；化簡之，卽得

$$W=c\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v}+c\int_{x_1}^{x_2}\left(1+\frac{1}{1-x}\right)dx,$$

此中 x_1 與 x_2 爲相當於 v_1 與 v_2 的 x 的值。求積分，故得

$$W=c\left(\log\frac{v_2}{v_1}+x_2-x_1-\log\frac{1-x_2}{1-x_1}\right)。\tag{8}$$

這可直接從 (6) 得到的，$v_1=\dfrac{x_1^2}{K(1-x_1)}$；$v_2=\dfrac{x_2^2}{K(1-x_2)}$。

代入(8)，得膨脹時所作的功爲

$$W=c\left\{x_2-x_1-2\log\frac{x_1(1-x_2)}{x_2(1-x_1)}\right\}。\tag{9}$$

例一　求氣體氨甲酸銨(ammonium carbamate)分解時，

$$NH_2COONH_4\rightleftharpoons 2NH_3+CO_2,$$

等溫膨脹所作的功。

例二　在計算碘化氫分解 $2HI\rightleftharpoons H_2+I_2$ 時等溫膨脹所作的功，碘化氫的分解與否有無分別？

例三　力 F 隨距離的平方而反變，質量爲 m 的質點向此力的中心運動。當此質點從一處 r_2 運動至另一處 r_1 時，試求此力所作的功。功＝力×位移。

$$\therefore\quad W=\int_{r_1}^{r_2}F\,dr=\int_{r_1}^{r_2}\frac{m}{r^2}\,dr=m\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)。$$

若 r_1 爲無限大時 $W=\dfrac{m}{r_2}$。故設物體向引力中心運動，功卽爲力所作；設物體離引力中心向外運動，功卽爲抗力而作。

例四　設氣體兩個分子間的引力 F 隨其距離 r 的四次方而反變，證明當氣體膨脹入眞空時抵抗分子引力而作的功比例於氣體最初與最後壓力之差。卽 $W=A(p_1-p_2)$ 其 A 爲比例常數。從假設，$F=\dfrac{a}{r^4}$；

與 $dW=Fdr$，此中 a 爲另一比例常數。故

$$W=\int_{r_1}^{r_2} F\,dr=a\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^4}。$$

但 r 爲直線上的距離，故氣體體積隨 r^3 而變，故 $v=br^3$ 此中 b 又是一個比例常數。

$$\therefore\quad W=\frac{a}{3}\left(\frac{1}{r_1{}^3}-\frac{1}{r_2{}^3}\right);\quad \therefore\ W=\frac{ab}{3}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)。$$

但從 Boyle 定律，$pv=$常數,c。故若 $A=\dfrac{ab}{3c}=$常數，則

$$W=A(p_1-p_2)。$$

例五. 當氣體膨脹入於眞空時若抵抗分子引力而作的功爲

$$W=\int_{v_1}^{v_2}\frac{a}{v^2}\,dv=a\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right),$$

此中 a 爲常數；v_1，v_2 表示氣體最初與最後的體積，證明『氣體的任何兩個分子，互相的引力隨其距離的四次方而反變』。$\dfrac{a}{v^2}$的意義可從 Van der Waal 方程式知之。

§ 89. 氣體的絕熱膨脹(The Adiabatic Expansion of Gases)

當氣體在體積變化——膨脹或壓縮——時若其所含之熱不使得失，則溫度通常須發生變化。膨脹的功的量亦有改變。我們先求氣體體積變化而熱無得失時 p 與 v 的關係。若溫度不能一定，則 Boyle 的關係很不清楚了。

I. 氣體體積絕熱變化時，其壓力與體積的關係。第 27 節方程式

(5),我們得到

$$dQ=\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_p dv+\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v dp。\tag{1}$$

從第 14 節(17)上式化改寫爲

$$dQ=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\ \frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv+\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\ \frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp。\tag{2}$$

但$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p$ 爲壓力不變而溫度小有變化物質所得的熱量；此卽壓力不變時的比熱,通常寫作 C_p。同樣$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v$ 爲體積不變時的比熱，通常寫爲 C_v。結果

$$dQ=C_p\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv+C_v\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp。\tag{3}$$

此方程式說明當某量的熱加之於物質上時,一部份用於增高溫度,其時體積變而壓力不變;另一部份用於增高溫度,其時壓力變而體積不變。

因理想的氣體所受 Boyle 定律 $pv=RT$ 所支配，故

$$\frac{v}{R}=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v; \quad \frac{p}{R}=\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p。$$

代入(3)得

$$dQ=C_p\frac{p}{R}dv+C_v\frac{v}{R}dp;$$

若以 $\theta=\frac{pv}{R}$ 除兩邊，則

$$\frac{dQ}{\theta}=C_p\frac{dv}{v}+C_v\frac{dp}{p},\tag{4}$$

按定義,絕熱的變化不使體系內的熱有所得失,故 $dQ=0$; 若再注意兩

個比熱之比$\frac{C_p}{C_v}$是常數，通常寫作 γ；

$$\therefore\quad \frac{C_p}{C_v}\cdot\frac{dv}{v}+\frac{dp}{p}=0\quad 或\ \gamma\int\frac{dv}{v}+\int\frac{dp}{p}=常數。$$

卽得 $\gamma\log v+\log p=$常數；　或 $\log v^\gamma+\log p=$常數；

$\therefore\quad \log(pv^\gamma)=$常數。

$$\therefore\qquad pv^\gamma=C。\tag{5}$$

這是一個最重要的關係，稱爲 Poisson 方程式。

前式中求積分處我們若各以 p_1，p_2 與 v_1，v_2 爲上下限，卽可消去常數而得(5)的另一種形式，爲

$$\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^\gamma。\tag{6}$$

(5)(6)告訴我們氣體的絕熱壓力隨其體積的 γ 次方而反變。以 $v_1=\frac{T_1R}{p_1}$；　$v_2=\frac{T_2R}{p_2}$代入(6)，結果爲

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{T_1}{T_2}\right)^\gamma=\frac{p_2}{p_1};\quad 或\ \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\gamma=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\gamma;$$

$$卽\quad \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\gamma=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\gamma-1}。\tag{7}$$

在絕熱的情形下，氣體體積與溫度的關係爲

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1}\tag{8}$$

此方程式表示在絕熱變化中氣體的絕對溫度隨其體積的$(\gamma-1)$次方而反變。這是一條有名的熱力學定律。

再者，因「重量隨體積而正變的」，若 w_1 爲 v 體積的氣體在壓力

p_1 時的重量，w_2 爲同體積在壓力 p_2 時的重量，從(6)我們可以立即知道

$$\frac{w_2}{w_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}。 \tag{9}$$

II. 在絕熱情形下，氣體被壓縮時所作的功。從方程式（5），$p=\frac{c}{v^\gamma}$；且我們知道當 v 體積的氣體從 v_1 壓縮至 v_2 時所作的功爲

$$W=-\int_{v_1}^{v_2} p\ dv=-\int_{v_1}^{v_2} c\frac{dv}{v^\gamma}=-c\left[\frac{v^{-(\gamma-1)}}{-(\gamma-1)}\right]_{v_1}^{v_2},$$

$$\therefore\quad W=\frac{c}{\gamma-1}\left(\frac{1}{v_2^{\gamma-1}}-\frac{1}{v_1^{\gamma-1}}\right)。 \tag{10}$$

從（5），$c=p_1v_1^\gamma=p_2v_2^\gamma$。故這個關係可用另一種形式表示之，即

$$\frac{c}{\gamma-1}\left(\frac{1}{v_2^{\gamma-1}}-\frac{1}{v_1^{\gamma-1}}\right)=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_1v_1^\gamma}{v_2^{\gamma-1}}-\frac{p_1v_1^\gamma}{v_1^{\gamma-1}}\right)=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_2v_2^\gamma}{v_2^{\gamma-1}}-\frac{p_1v_1^\gamma}{v_1^{\gamma-1}}\right)$$

$$\therefore\quad W=\frac{1}{\gamma-1}(p_2v_2-p_1v_1)。 \tag{11}$$

若氣體絕熱膨脹從壓力 p_1 至壓力 p_2，可從(5)(11)得

$$W=\frac{1}{\gamma-1}\left(p_1^{1-\frac{1}{\gamma}}-p_2^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)c^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$=\frac{1}{\gamma-1}\left(p_1^{1-\frac{1}{\gamma}}-p_2^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)p_1^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{12}$$

這裏假定我們從事者爲單位體積，$v_1=1$，故 $p_1=c$。

若 $p_1v_1=RT_1$；$p_2v_2=RT_2$ 爲 $T_1°$，$T_2°$時的等溫方程式，我們可寫(11)式爲

$$W=\frac{R}{\gamma-1}(T_2-T_1), \tag{13}$$

以言語述之卽爲一個質量的氣體絕熱壓縮從溫度 $T_1°$ 變至 $T_2°$ 時所作的功與其最初的壓力與體積無關。換言之,一個理想的氣體沿着絕熱曲線從一個等温線至另一個等温線（圖二十九）所作的功是常數與其走經的路無關。

例一　兩升氣體絕熱壓縮至一升。所作的功爲何？已知 $\gamma=1.4$; 大氣壓力 $p=1.03$ 仟克每方厘米。

答: 16.48 仟克米。

示意:　$v_2=\frac{1}{2}v_1$; 從 (6) $p_2=p_1 2^{\gamma}$; $v_1=2000$ 厘米。從常用對數表, $\log 2^{\gamma}=\log 2^{1.4}=0.30103\times1.4=0.4214$; 或 $2^{1.4}=2.64$。從 (11) $W=\frac{v_2p_1 2^{1.4}-v_1p_1}{\gamma-1}=\frac{v_1p_1(\frac{1}{2}\times2^{1.4}-1)}{1.4-1}=\frac{1.03\times2000}{0.4}(1.32-1)$, 等等。

例二　繼續第 20 節說明三。我們曾經採用 Boyle 定律 $\rho_2p_1=\rho_1p_2$ 此式只有在等温的情形中成立。欲得更準確的結果可用上列方程式(5), 氣體爲定質量 m 時, $m=\rho v$, 從此證明在絕熱情形中,

$$\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma};\quad \therefore\ p_2^{\,1-\frac{1}{\gamma}}=p_1^{\,-1\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}ch} \tag{14}$$

這是對於在高出海平面 h 處大氣壓力 p_2 時 Halley 定律的更準確的形式。海平面上的大氣壓力爲 p_1。

例三　從例二進一步證明每昇高一個單位高度時溫度 T 的減少率,爲常數。換言之卽證明與解釋,

$$T_0-T=\frac{1}{R}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma}h。 \tag{15}$$

例四 在 0°C. 的一升氣體絕熱膨脹至二升。求其所降下的温度已知 $\gamma=1.4$。

答: 約爲 66°C.

示意: $v_1=2v_2$; 從(8), $T_2\times 2^{0.4}=273$; $2^{0.4}=1.32$, $\therefore T_2=207°$ 故絕對温度降低 $273-207=66°C$。

例五 繼續第 15 第 64 節的研究,假設氣體服從 Van der Waal 定律:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT, \tag{16}$$

此中 R, a, b 爲已知常數。熱力學的第一定律可寫爲

$$dQ=C_v dT+\left(p+\frac{a}{v^2}\right)dv, \tag{17}$$

此中體積不變時的比熱已作爲常數。欲求壓力不變時的比熱 C_p 的值。展開(16)。求此結果的微分。略去 $2ab\dfrac{dv}{v^3}$ 這一項因爲這項的數量是相對的很小(第 4 節)。解之求 dv。全式乘以 $p+\dfrac{a}{v^2}$。因 $\dfrac{a}{v^2}$ 是很小,可證 $\dfrac{p+\dfrac{a}{v^2}}{p-\dfrac{a}{v^2}}$ 是近於 $1+\dfrac{2a}{pv^2}$。以最後的結果代入(17),

$$dQ=\left\{C_v+R\left(1+\frac{2a}{pv^2}\right)\right\}dT-\left(1+\frac{2a}{pv^2}\right)(v-b)dp。$$

依假設 C_v 爲常數,

$$\therefore\quad \frac{C_p}{C_v}=1+\frac{R}{C_v}\left(1+\frac{2a}{pv^2}\right)。\tag{18}$$

就理想氣體言，$a=0$，從此可得 Mayer 方程式(第 27 節)。Boynton 的論文(第 42 節)中，可見下表：

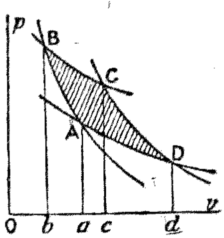
	空　　氣	氫	二氧化碳
a	0.002812	0.0000895	0.00874
$\frac{R}{C_v}$	0.4	0.4	0.2857
γ 計算值(18)	1.40225	1.40007	1.2907
γ 觀測值	1.403	1.4017	1.2911

例六　證明在絕熱情形中 Van der Waals 方程式爲

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)^\gamma=RT,\tag{19}$$

又絕熱膨脹的功爲

$$W=R(T_1-T_2)\left\{\frac{1}{\gamma-1}-a\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)\right\}。\tag{20}$$



圖一百二十一

例七　計算下列過程中所作的功。一個氣體從 A 點(圖一百二十一)所代表的狀態出發絕熱壓縮沿着 AB 的路而至 B 的狀態。然後等溫膨脹沿 BC 的路而至 C。再絕熱膨脹沿 CD 至 D；再等溫壓縮沿 DA 而回復到原有狀態。這裏全部所作的功顯然可以

$$-AabB+BCcb-CDdc-DdaA$$

表示之。假定 AB 的方程式爲 $pv^\gamma=c_1$；BC 的爲 $pv=c_2$；CD 的爲

$pv^\gamma=c_3$; DA 的爲 $pv=c_4$。可照這兩節中所述而求各個步驟的功的值。從此證此氣體所作的外功 W 爲

$$W=\frac{c_2-c_4}{\gamma-1}\log\frac{c_3}{c_1}。$$

例八　比較第 88 節 I 的例題中等溫的功與絕熱的功。取空氣的 $\gamma=1.408$。

示意：　從(6) $14.7\times 206.16^{1.408}=77\times v_2^{1.408}$; $\therefore\ v_2=62.36$ 立方呎；又從(10)，$(62.36\times 11088-202.16\times 2116.8)\dfrac{1}{0.408}=645.871$ 呎磅，每分 $=19.75$ 馬力。所求之比爲 $1:0.91$。

例九　若一個氣體絕熱流動從一處壓力爲 p_1 至另一處壓力爲 p_2，膨脹所作的功轉成氣體的動能。設 V 爲此流的速度。氣體所得的動能等於所作的功。但依定義，動能爲 $\frac{1}{2}mV^2$，此中 m 爲運動物質的質量；我們知道，質量 = 重量 $\div g$，故若 w_1 表示每秒鐘氣體從壓力 p_1 流至壓力 p_2 的重量，則

$$\frac{mV^2}{2}=\frac{w_1V^2}{2g}=W;\quad \therefore\quad V=\sqrt{\frac{2g}{w_1}W}。$$

設 a 爲此氣流的橫截面積，則 $w_1=aVw_2$，此中 w_2 爲壓力 p_2 時單位體積的氣體的重量。設 $\dfrac{p_2}{p_1}=q$。從 (9)，$w_2=w_1q^{\frac{1}{\gamma}}$。故氣體的重量爲

$$w_1=aVw_2=a\sqrt{\frac{2gw_2^2}{w_1(\gamma-1)}\left(p_1^{1-\frac{1}{\gamma}}-p_2^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)p_1^{\frac{1}{\gamma}}}。$$

$$=a\sqrt{\frac{2gw_1}{\gamma-1}\cdot\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2 p_1^{\frac{1}{\gamma}} p_1^{1-\frac{1}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]}$$

$$=a\sqrt{\frac{2gw_1}{\gamma-1}\,q^{\frac{2}{\gamma}}p_1\left(1-q^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)}$$

$$=a\sqrt{w_1}\sqrt{\frac{2gp_1}{\gamma-1}\left(q^{\frac{2}{\gamma}}-q^{1+\frac{1}{\gamma}}\right)}$$

$$\therefore\quad \sqrt{w_1}=a\sqrt{\frac{2gp_1}{\gamma-1}\left(q^{\frac{2}{\gamma}}-q^{1+\frac{1}{\gamma}}\right)}。$$

求$\frac{dw_1}{dq}$令等於零,可知當

$$q=\left[\frac{1}{2}\left(\gamma+1\right)\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}},$$

時, w_1 之值極大。若爲乾的蒸汽, $\gamma=1.13$,故

$$\log_e q=\frac{\gamma}{1-\gamma}\log_e\frac{\gamma+1}{2}=-8.7\ \log_e 1.065=1.762;$$

$$\therefore\quad q=0.58;\quad 或\ p_2=0.58\ p_1。$$

卽當外界的壓力稍大於供給的壓力之半時, 氣流最大。這個結論 Navier 的實驗曾證實過。

§90. 溫度在化學變化與物理變化上的影響(The Influence of Temperature on Chemical and Physical Changes)

在第 27 節(18)中我們用簡單的算學推理,求得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v, \tag{1}$$

這公式的物理意義爲定溫度時每單位的體積變化傳與任何物質的熱量

變化等於定體積時每單位溫度變化所生的壓力變化與絕對溫度之積。

假使一個體系 A 的 $1-x$ 克與另一個體系 B 的 x 克相平衡。設 v 爲總體積，T 爲兩個體系的溫度。方程式(1)中 $\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T$ 表示定溫度 T 時當體系 A 的很大體積增加一個單位，所吸收的熱減去膨脹中所作的功。假使在這體積變化中，體系 B 生成的量爲 $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_T$，則若 q 爲當單位量從第一體系轉入第二體系時所吸收的熱，在這轉變中吸收的熱量爲 $q\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_T$。$q$ 實爲反應的分子熱。

在這體積變化中所作的功爲 pdv；但 dv 爲 1，故膨脹的外功爲 p。在這些情形下，從(1)

$$q\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_T=\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T-p=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v-p=\frac{T\partial p-p\partial T}{\partial T}, \qquad (2)$$

今以積分因數 T^2 乘除之，

$$\therefore \quad q\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_T=T^2\left(\frac{\partial\left(\frac{p}{T}\right)}{\partial T}\right)_v \qquad (3)$$

若體系 A 的 n_1 個分子；體系 B 的 n_2 個分子參與反應，我們不能寫 $pv=RT$，而須寫

$$pv=RT\{n_1(1-x)+n_2x\}; \quad \text{或} \quad \frac{p}{T}=\frac{R\{n_1+(n_2-n_1)x\}}{v}。$$

這理由是應該弄清楚的。關於 $\frac{p}{T}$ 與 x 求微分而除以 ∂T，得

$$\left(\frac{\partial\left(\frac{p}{T}\right)}{\partial T}\right)_v=\frac{R}{v}(n_2-n_1)\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)。$$

以此結果代入(3)得

$$q\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_T=\frac{T^2R}{v}(n_2-n_1)\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_v。\qquad (4)$$

依照 Guldberg 與 Waag 關於質量定律的陳述，當一個體系的 n_1 個分子與另一體系的 n_2 個分子發生反應，則

$$\left(\frac{x}{v}\right)^{n_2}=K\left(\frac{1-x}{v}\right)^{n_1}。$$

求對數，

$$\log K+(n_2-n_1)\log v=n_2\log x-n_1\log(1-x)。$$

上式求定溫度時關於 v 的微分，與定體積時關於 T 的微分，各得

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_T=\frac{n_2-n_1}{v\left(\frac{n_2}{x}+\frac{n_1}{1-x}\right)};\quad \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_v=\frac{\frac{\partial\log K}{\partial T}}{\frac{n_2}{x}+\frac{n_1}{1-x}}。$$

以此代入(4)而化簡之，得

$$\frac{\partial\log K}{\partial T}=\frac{q}{RT^2}。\qquad (5)$$

這個基本關係是用反應的分子熱來表示定體積的平衡常數 K 關於溫度 T 的變化。

方程式(5)是 Van't Hoff 第一個求到的，引起理論化學上幾個最重要的結果。因 R 與 T 爲正數，K 與 q 必須永爲同號。從此可以直接推得 Van't Hoff 遷移平衡(mobile equilibrium)的原理：反應若爲收熱的則前進時溫度增高；反應若爲放熱的則後退時溫度增高；反應若既不收熱又不放熱則平衡狀態停留不動而溫度增高。

隨所考察的體系的特殊性質之不同，q 可各代表昇華熱；蒸發熱，溶解熱，分解熱，當『濃度』K 的意義稍加改變時亦可代表狹義化學反應的熱量數值。若 K 在溫度 T_1 與 T_2 時爲 K_1 與 K_2，求(5)的積分，得

$$\log\frac{K_2}{K_1}=\frac{q}{2}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)。\tag{6}$$

用這方程式所計算而得的各種分子變化的熱量數值，與實驗結果很相符合。例如：

熱的種類	q（單位爲卡）	
	計算值	觀測值
水的蒸發	10100	10296
安息酸溶解於水	6700	6500
NH_4SH 的昇華	21550	21640
$BaCl_2+2H_2O$ 的結合	3815	3830
NO_2 的分解	12900	12500
$AgCl$ 的沈澱	15992	15850

充分的變換分類，可以表明方程式(5)(6)所表出的關係，其性質是如何深遠。

數值的例　計算隨溫度變化而可溶性變化時氯化汞的溶解熱。設 c_1，c_2 爲絕對溫度 T_1，T_2 時的可溶性，

$T_1=273°+10°$ 時，$c_1=6.57$；　$T_2=273°+50°$ 時，$c_2=11.84$。

因爲定溫度時一種鹽類在已知溶劑內的可溶性爲常數，我們可取 c 代替平衡常數 K。從(6)，

$$\log\frac{c_2}{c_1}=\frac{q}{2}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right); \quad \therefore \ \log\frac{11.84}{6.57}=\frac{q}{2}\left(\frac{1}{283}-\frac{1}{323}\right)。$$

$$\therefore \quad q=\log 1.8\times 45705.5=2700\ (\text{約數});$$

$$q(\text{觀測値})=3000\ (\text{約數})。$$

計算可用附錄 II 中的自然對數表。

Le Chatelier 曾推廣 Van't Hoff 的定律,而述重要的普遍結論爲:『平衡因數從外界受到任何變化時體系內即生相反的變化』。這稱爲 Le Chatelier 定理,使化學家可以預見壓力或其他作用對於物理平衡與化學平衡所生的影響。