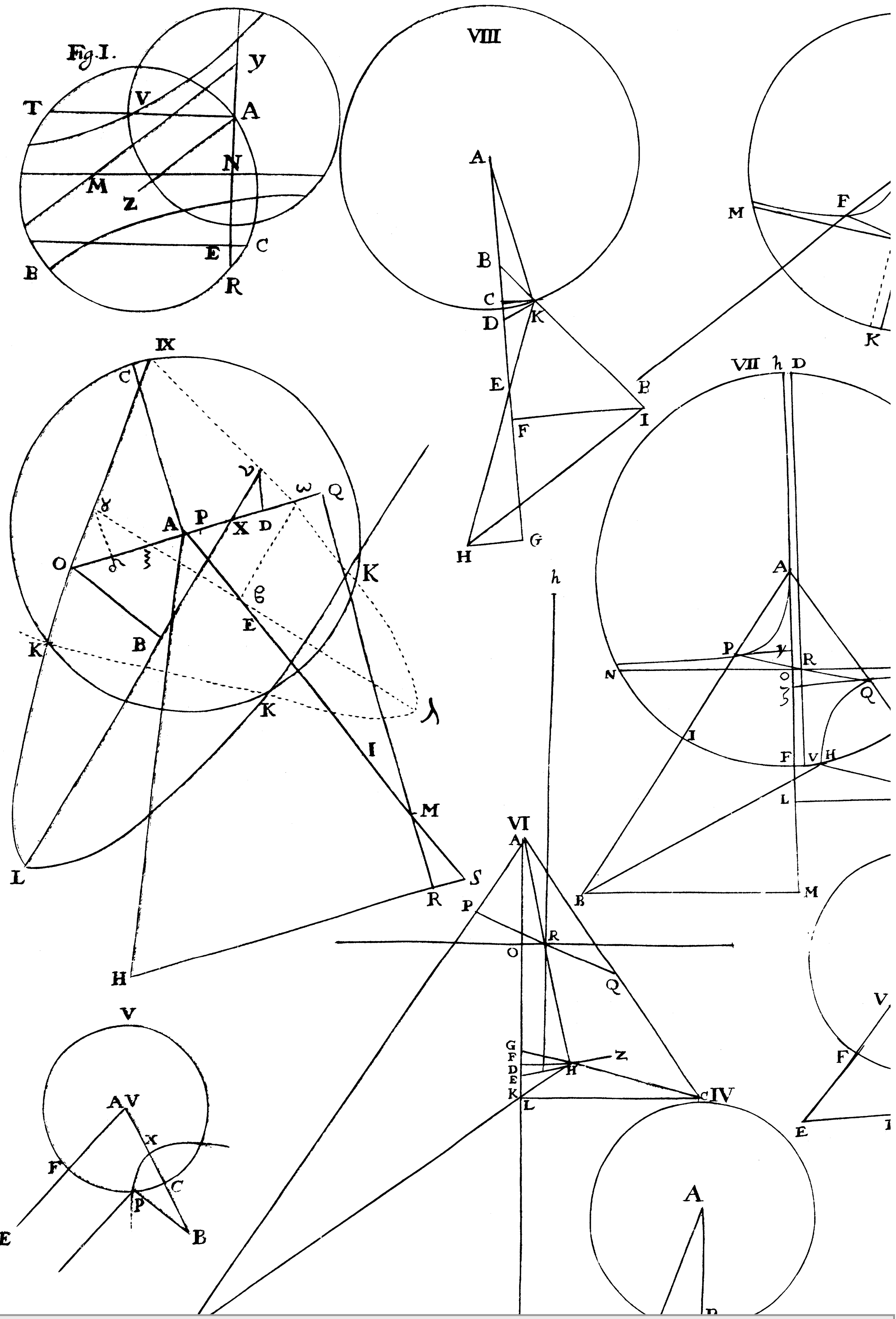
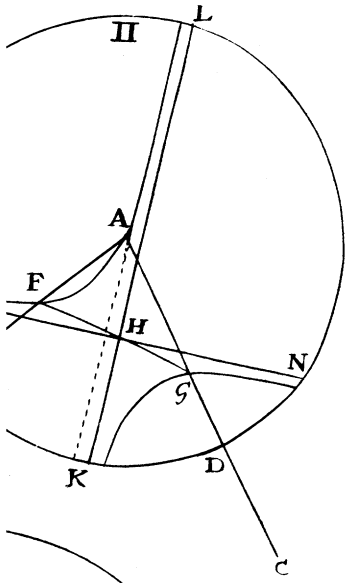
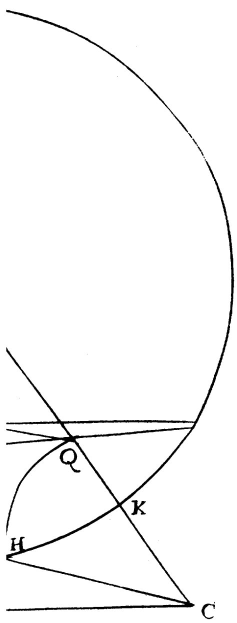


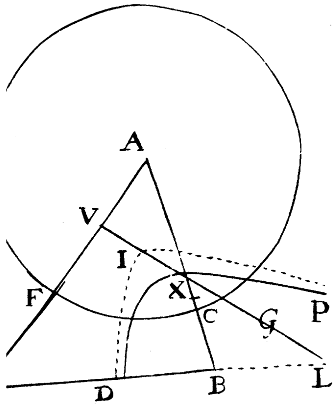
Fig. I.
VIII
IX
VII
VI
V
IV

II





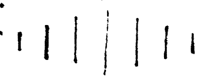
III




B
M
E
P
R
O
B

Transact. N° 98

Whilst the Sea runneth from West to East in Flowing, through this *Westra-Frith*, there are no greater Surges, than in any other place of the Sea; and in a calm day, it is as smooth as any Lake, though there is constantly a great current, in the flux and reflux of the Sea. Yet at the South-East end of the forementioned little Island, the Sea no sooner begins to run westward in Ebbing, but there beginneth a surge to appear, which continually increaseth, until the Ebb be half spent, and afterwards it decreaseth, until it be low water; at which time there appeareth no such thing. East and west from this great Surge, there are some few lesser surges seen, which are gradually less, towards the east and west, after this manner



I having occasion to pass that way, in a little boat, when we had passed over the Eastmost surges, and were beginning to ascend the biggest, upon the tenth of *April*, at one of the clock in the afternoon, the surge before us was so high, that it intercepted the sight of the Sun, and some deg. of the firmament above it. This surge is about a quarter of a mile in length. When there is any wind, which occasioneth the breaking of the tops of the Surges, there is no passing that way. The current of the Tyde is so strong there, that there is no need of Sails or of Oares, save only to direct the boat, as doth the helm.

Continuatio Excerptorum ex Epistolis Slusianis & Hugenianis, *super* Alhazeni *Problemate Optico, in Actis Philosophicis proximè pragressis commemorato.*

DN. *Hugenius* ad novissimam Dn. *Slusii*, p. 6123. & seqq. Num. 97. editam, rescripsit Editori, *Lutetiâ Parisiorum* Apr. 9. 1672. in hanc sententiam;

Est quod Tibi gratias agam, quòd non fuisti gravatus Dn. Slusii *super problemate* Alhaziano *analysin mihi transmittere. Est illa doctissima & Authore suo dignissima; fuitque in causa, dum eam hisce diebus examinarem, ut novis circa problema illud meditationibus me traderem, eò spectantibus, ut constructionem quàm possem compendiosissimam maximeque genuinam obtinerem; quam tandem me consecutum esse reor. Eam hic adscribam, postquam Tibi compendium illud tradidero, quod eodem tempore inveni circa* primam, *ab initio tibi communicatam. Id autem tale est*: Ductâ lineâ AT, parallelâ CB, eaque bisectâ in V, punctum hoc est illud, per quod transire debet una hyperbolarum oppositarum, quarum asymptoti inventæ fuerint YM, MN.*

* V. Fig I.

Sed en Tibi bonam illam constructionem, quæ in omnibus casibus obtinet†. Sit Circulus datus ED, cujus centrum est A; puncta data, B & C.

† V. Fig II.

Ductis lineis AB, AC, fiant proportionales BA (radius circuli) & FA: Eodem modo CA, (radius circuli) & GA. Tum jungatur FG, eaque bisecetur in H; & per hoc punctum ducantur lineæ LHK, MHN, se invicem intersecantes ad angulos rectos, quarumque LHK sit parallela ei, quæ bisecat angulum BAC. Hæ sunt duæ Asymptoti Hyperbolarum describendarum per puncta F & G, & quarum una transibit etiam per centrum A, quarum intersectiones cum

circuli

circuli peripheria notabunt puncta Reflexionis quæsita. Hucusque Dn. Hugenius,

Quæ Dn. *Slusius* ad hæc reposuit trinis epistolis, sic se habent;

1. *Quæ ad* Alhazeni *problema meditatus fui hactenus, rudia licèt & impolita, tui juris sunt* *. *De iis igitur dispone prout lubet. Simplicissima est & maximè ingeniosa Nobilissimi* Hugenii *constructio. Vidit quippe Vir acutissimus, quâ ratione ad omnes casus extendi posset* Hyperbola *æqualium laterum, quam in casu anguli recti sese statim offerre præcedentibus meis insinuaveram. Posset quoque ex infinitis* Ellipsibus, *quæ adhiberi possunt, una seligi non difficilis constructionis: sed piget tamdiu in eodem Problemate hærere. Superest tamen aliquid, quod contemplationem habet non injucundam; nim. cùm sectiones, quæ cum circulo dato ad Problematis solutionem adhibentur, illum in quatuor punctis secent, quorum duo tantùm reflexioni serviunt, quæri posset, quodnam Problema solvant duo reliqua, & quânam verborum formâ concipienda sit Propositio, ut quatuor illos casus complectatur. Deinde, annon etiam iidem quatuor casus occurrant cum puncta data æqualiter distant à centro? Vale. Dabam* Leodii *VIII* Junii CIↃIↃCLXXII.

* *Petierat sc. facultatem Editor, hæc in publicum emittendi.*

2. *Clar.* Hugenius *non aliâ utitur analysi quam meâ, quæ Parabolam uno tantùm casu admittit. Quod ut evidentiùs tibi constet, æquationem quam construxit hîc adscribam. Repete memoriâ, si placet, quæ secundis curis ad te scripsi, & invenies, me duas æquationes, problemati per Hyperbolam circa asymptotos solvendo idoneas, assignasse, has nimirum;*

$$2zbaa - 2znae - qqba + qqne = bzqq - zqqe,$$

Et $$bzqq - 2znae - qqba + qqne = 2zbee - zqqe;$$

ac subjecisse, levi mutatione (substituendo, ex. gr. pro qq, *ejus valorem* aa + ee) *inveniri posse infinitas Hyperbolas & Ellipses, quæ cum circulo dato Problema solverent. Nunc in priore ex his æquationibus pro* bzqq *ponatur ejus valor, fiet*

$$zbaa - 2znae - qqba + qqne = bzee - zqqe,$$

Sive $$aa - \frac{qqa}{z} = ee - \frac{qqe}{b} + \frac{2nae}{b} - \frac{qqne}{zb}.$$

Atque hæc est æquatio, quam magno ingenii acumine, ac pari facilitate construxit vir doctissimus. Quod ut tibi pluribus probem, opus non est, quando labore non multo rem ad calculos revocando id agnoscere poteris. Vale. Dab. Leodii *X* Junii CIↃIↃCLXXII.

3. *Problematis* Alhazeniani *memoriam dudum objeceram, Vir Cl; sed literis tuis admonitus temperare mihi non potui, quin faciliorem ejusdem constructionem quærerem. Incidi autem nuper in sequentem, quâ breviorem cùm dari posse vix credam, committere nolui, quin eam judicio ac censuræ tuæ submitterem. Sint igitur puncta data E B**, *circulus cujus centrum A; junctis EA, BA, secantibus circulum in F & C; fiant tres proportionales EA, FA, VA, & tres iterum BA, CA, XA: tum junctâ VX, ac productâ utcunque, (vertice X, latere transverso VX, ac recto ipsi æquali,) describatur Hyperbola XP, cujus applicatæ ad diametrum VXG, parallelæ sint rectæ AB: illa enim satisfacit proposito in casu speculi convexi, ut ejus opposita in casu concavi. Si asymptotos desideres, facilè reperiri possunt,*

*V. Fig. III.

productâ VX, donec cum EB, pariter productâ, concurrat in L; deinde bisectâ VX in I, ac sumtâ LD aequali LI; juncta enim DI erit asymptotωn una, in quam alia normaliter incidit ad punctum I.

Sed fortasse ingratum tibi non erit intelligere, quâ viâ ad hanc constructionem pervenerim. Scias itaque, me ex priori mea Analysi deduxisse hoc modo. * *Datis iisdem quae priùs, cadat in EB normalis AO, sitque punctum quaesitum P, ex quo in AO cadat normalis PR. Si AO sit* b, *EO*, z, *OB*, d, *AP*, q, *PR*, e, *AR*, a; *facile colligitur haec aequatio*

* V. *Fig.* IV.

$$\frac{2zdae + 2bbae - 2bqqe}{zb - bd} + ee = aa - \frac{2qqa}{b},$$ *quae mutari potest in has*;

$$\frac{zdae + bbae - bqqe}{zb - bd} = aa - \tfrac{1}{2}qq - \frac{\tfrac{1}{2}qqa}{b}. \quad Et \quad \frac{zdae + bbae - bqqe}{zb - bd} + ee = \tfrac{1}{2}qq - \frac{\tfrac{1}{2}qqa}{b}.$$

Hujus ultimae constructionem olim ad te misi; alterius verò, Cl. Hugenius. *Primam autem, licèt se statim in conspectum dedisset; fermè neglexeram, quòd difficilioris constructionis esse praesumerem. Sed me vano timore delusum agnovi, cúm in hanc, quam ad te mitto, constructionem desinere nuper sum expertus. Sit enim, brevioris calculi causâ,* $z - d = K$, $zd + bb = bm$; *fiet.*

$$ee - \frac{2qqe + 2mae}{k} = aa - \frac{qqa}{b}.$$

Et additis utrinq; $\frac{q^4 + mmaa - 2qqma}{kk}$, *erit*

$$ee - \frac{2qqe + mae}{k} + \frac{q^4 + mmaa - 2qqma}{kk},$$ *hoc est, quadratum ex* $e - \frac{qq + ma}{k}$, *aequale* $aa - \frac{qqa}{b} + \frac{q^4 + mmaa - 2qqma}{kk}$. *Fiet igitur* ἀναλογισμὸς $kk \mid kk + mm \mid aa - \frac{kkqqa}{bkk + bmm} - \frac{2qqma + q^4}{kk + mm} \mid$ *& quadratum* $e - \frac{qq + ma}{k}$: *qui ad aequationem faciliorem reduci potest, si, posito* $kk + mm = pp$, *fiat* $\frac{ky}{p} = a$; *fit enim tandem, quadratum ex* $e - \frac{qq}{k} + \frac{my}{p} = yy - \frac{qqky}{bp} - \frac{2qqmy}{kp} + \frac{q^4}{kk}$; *quam aequationem superiori constructioni respondere animadvertes, si calculos applicueris; ac simul observabis, ad quamcunque linearum EA, AB, BE, referatur Analyseos summa, easdem semper haberi posse sectiones, quamvis longiore circuitu & aequationibus valdè diversis.*

Ex hac constructione, καὶ ἀναλογίαν *deducere licet alterius Problematis effectionem, cùm scil. quaeritur punctum, à quo radius reflexus parallelus sit cuilibet lineae datae; ut, si dato puncto luminoso* * *B, circulo ex centro A, quaereretur radius reflexus parallelus rectae*

* Vid. *Fig.* V.

recta AE. Idem enim est, ac si, in alio Problemate, distantia punctorum A & E supponeretur infinita; quo casu tertia proportionalis ipsarum EA, FA, abiret in nihilum, & puncta A & V coinciderent: Itaque VX esset æqualis AX, & AE parallela PE. Applica igitur superiorem constructionem, & Problema absolves. Descriptâ scil (vertice X, latere transverso VX, vel AX, & recto ipsi æquali,) Hyperbolâ XP, cujus applicatæ ad diametrum AX, parallelæ sint rectæ AE. Ἀλλὰ τέτων ἅλις. *Vereor enim, ne ut olim silentium meum, ita nunc* φλυαρίαν *ac scribendi intemperiem incuses. Vale itaque, meq; tui observantissimum amare perge. Dab.* Leodii *XXII* Junii CIↃIↃCLXXII.

Sic se habent epistolæ *Slusianæ*, quibus subjicienda nunc, quæ eas proximé secuta est, *Hugenii*, data 1. *Julii*, 1672. *Parisiis*, in hunc sensum;

Volupe mihi erat cognoscere, quæ mihi nuper ex literis Dn. Slusii *communicare voluisti, ipsius nempe Approbationem, nec non doctissimas notas de Problematis* Alhaziani *constructione. Ecce tibi calculum meum ultimum, à calculo insignis illius Geometræ differentem, quique nativâ indole ducit ad Constructionem illam bonam, quam ante hac ad te misi. Verum est, quin imò mirandum, eam quoque inveniri per calculum quem ipse de ea instituit † post mutationem* qq *in* aa + ee; *at hoc videtur fieri casu, nec ibi apparet Constructionis simplicitas nisi postquam eam peragere satégimus.*

† *V. supra epist.* Slusii *dat.* Jun. 10.

Problema Alhazeni.

Dato Circulo, cujus centrum A, radius AD, & punctis duobus B, C; invenire punctum H in circumferentia circuli dati, unde ductæ HB, HC, faciant ad circumferentiam angulos æquales †.

† V. *Fig.* VI.

Ponatur inventum, ductàque AM recta, quæ bifariam secet angulum BAC, ducatur ei perpendicularis HF, itemque BM, CL. Jungatur porrò AH, cui perpend. sit HE, rectisque BH, HC, occurrat AM in punctis K, G.

Sit jam $AM = a$
$MB = b$
$AL = c$
$LC = n$
Radius $AD = d$
$AF = x$
$FH = y$

Quia ergo æquales anguli KHE & CHZ, sive EHG; estque EHA angulus rectus, erit ut KE ad EG, ita KA ad AG. Quia verò BM ad MD, ut HF ad FK, erit,

ut BM + HF ad HF, ita MF ad FK

$b + y$ —— y —— $a - x$ | $\frac{ay - xy}{b + y}$ *add FA* x

fit KA $\frac{ay + bx}{b + y}$

Rursùs, quia CL ad LG, ut HF ad FG, erit permutando & dividendo CL − HF ad HF, ut LF ad FG,

$n - y$ —— y —— $c - x$ —— $cy - xy$, *quâ ablatâ ab* $AF = x$.

fit $GA = \frac{nx - cy}{n - y}$. *Est autem* $EA = \frac{dd}{x}$, *quia proportionales FA, AH;*

AH, AE. *Ergo EA–GA, hoc est, EG,* $= \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y}$. *Et KA–EA, hoc est, KE* $= \frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x}$.

Sed diximus, quòd KE ad EG, ut KA ad AG

$$\textit{Ergo}\ \frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x} \Big| \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y} \Big| \frac{ay+bx}{b+y} \Big| \frac{nx-cy}{n-y}.$$

Unde invenitur $\begin{matrix} 2anxxy + 2bnx^3 - ddbnx - ddnxy \\ -2acxyy - 2bcxxy + ddbcy + ddcyy \end{matrix} = \begin{matrix} naddy + nbddx \\ -addyy - bddxy. \end{matrix}$

Et quia $n = \frac{bc}{a}$, *fit* $\frac{2bbc}{a}x^3 - \frac{bbddcx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, *quia* $xx = dd - yy$

Est autem $\frac{2bbc}{a}x^3 = \frac{2bbcddx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, *quia* $xx = dd - yy$

Ergo $\frac{-2bbcxyy}{a} - \frac{ddbcxy}{a} - 2acxyy + ddcyy = -addyy - bddxy$.

Et divisis omnibus per y *& ductis in* a,

$$-2bbcxy - ddbcx - 2aacxy + ddcay = -aaddy - bddax$$
$$abddx - cbddx + acddy + aaddy = 2aacxy + 2bbcxy$$
$$\frac{abddx - cbddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy,$$ *quæ æquatio est (ad hyperbolam.*

Vel quia $bc = na$, $\frac{abdd - anddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy$.

Sit $\frac{add}{aa+bb} = p$; *Ergo* $\frac{pbx - pnx + pcy + pay}{2c} = xy$.

* V. *Fig.* 7. *Unde porrò non difficulter invenitur sequens Constructio* *: *Jungantur BA, AC, & applicato seorsim ad utramque quadrato radii AD, fiant inde AP, AQ; & juncta PQ, dividatur ipsa bifariam in R, & per punctum R ducantur RD, RN, sese ad rectos angulos secantes, quorumque RD sit parallela AD, quæ dividit bifariam angulum BAC. Erunt jam RD, RN asymptoti oppositarum Hyperbolarum, quarum altera per centrum A transire debet, quæque secabunt Circumferentiam in punctis H quæsitis. Transibunt autem Hyperbolæ per puncta P, G.*

Ratio Constructionis apparet, ductis Pγ & Qζ perpendicularibus in AM: Fit enim $A\gamma = \frac{add}{aa+bb}$ *sive P; &* $A\zeta = \frac{ap}{c}$. *Item* $P\gamma = \frac{pn}{c}$ *&* $Q\zeta = \frac{pb}{c}$. *Quare* $AO = \frac{pc+pa}{2c}$, *&* $OR = \frac{pb-pn}{}$ *Unde cætera facilia.*

Hactenus Dn. *Hugenius.* Quibus Dn. *Slusius* hæc rescripsit.

*Mirari desine, Vir Clarissime, eandem in Albazeniano Problemate Constructionem ex diversis Æquationibus deduci, quandoquidem illæ omnes, quibus hactenus usi sumus, in una eademque generali Analysi continentur. Quod ut ostendam, datus sit circulus *, cujus centrum A, puncta H & I; sitque punctum quæsitum K, ad quod ex punctis I & H ducantur rectæ HK, IK, & Tangens KD. Tum ex A ducatur quælibet AG, occurrens HK in E, IK in B, Tangenti KD in D (iis nim. productis, quas produci est opus.) His positis evidens est, ob angulos EKD, DKB, æquales, & angulum AKD rectum, tres AE, BE, DE fore semper harmonicè proportionales. Itaque ductis ad AE normalibus KC, IF, HG, ac denominatis partibus,*

* V. Fig. VIII.

AK. q	*habebitur, methodo, quam in secunda hujus Problematis analysi olim adhibui, hæc generalis Æquatio,*
AC. a	
CK. e	$ndaa - bzaa - nqqa + bqqa = ndee - zbee + 2bnaee + 2zdae - dqqez - zqqe$
HG. b	
AG. d	*Finge nunc, AG esse perpendicularem ad HI, nihil varietatis erit in æquatione, nisi quod AF & AG, hoc est, d & z, erunt æquales.*
FA. z	
FI. n	*Posito itaque* d *pro* z, *fiet*

$$ndaa - bdaa - nqqa + bqqa = ndee - dbee + 2bnae + 2ddae - 2dqqe.$$

Sive applicatis omnibus ad nd − db

$$aa - \frac{qqa}{d} = ee \frac{+2bnae + 2ddae - 2dqqe}{nd - bd};$$

Eadem nempe, quam ex prima mea Analysi, licèt alià vià, deduxeram, & quam nuper, modo facili constructam, ad te misi.

Pone deinde, AG coincidere cum AH; abibit igitur HG sive b *in nihilum. Expunctis itaque ab æquatione partibus, in quibus* b *reperitur, remanebit,* $ndaa - nqqa = ndee + 2zdae - dqqe - qqze.$ *Hanc autem, si meministi, curis secundis inveni, & aliam huic similem in casu quo recta AG transire intelligitur per I.*

Supponamus demum, rectam AG secare bifariam angulum HAI; erit ob similitudinem triangulorum HAG, IAF, ut HG ad GA, ita IF ad FA, sive ut b *ad* d, *ita* n *ad* z, & nd = bq. *Ablatis igitur æqualibus, fit,* $bqqa - nqqa = 2bnae + 2zdae - dqqe - qqze$: *Illa ipsa, quam, ut ex literis tuis nuper intellexi, Cl.* Hugenius *construxit.*

Intelligatur tandem eadem recta HG secare bifariam rectam HI; erunt igitur æquales HG, IG, hoc est, b = n; *fietque, ablatis æqualibus,* $bdaa - bzaa = bdee - bzee + 2bbae + 2zdae - dqqe - qqze$; *quam, licet non admodùm difficilem, nemo nostrûm hactenus construxit. Hæ autem, ut & ipsa Generalis æquatio, in duas alias dividi possunt, posito, ut nosti, pro* aa *vel* ee, *ejus valore* qq − ee *vel* qq − aa.

Vides igitur, quicquid hactenus præstitum est, in eandem Analysin resolvi; quæ & infinitas alias Constructiones per Circulum datum & Hyperbolam complectatur. Sed eas investigare non est tanti, cùm in hoc Problemate, ut olim fortassis inopià, sic nunc copià laboremus. Addam tamen unam Constructionem per Parabolam, *idque via duplici; quæ licèt aliis per* Hyperbolam *operosior videatur, lineæ tamen simplicitate, qua Parabola inter reliquas sectiones commendatur, operam compensat.*

Iisdem

Iisdem igitur datis, jungatur * *AI, & producatur in S, donec AS fiat æqualis AH, junctáque HS, & bisecta IS in M, ducatur per M recta RMQ normalis ad HS, in quam cadat ex A normalis AQ, & cui parallelus ducatur radius AC. Tum factis tribus proportionalibus IA, AQ, AE, fiat ut SA ad AE, ita MQ ad AD, & RS ad AP (in recta AQ versus Q;) & in eadem ab alia parte sumatur DO æqualis DC. Demum, bisectâ PD in X, inclinetur per X, angulo semi-recto ad AX, recta VXL, occurrens normali in D erectæ in puncto V, & in quam ex O cadat normalis OB Ajo, si fiat ut VX ad XB, ita XB ad BL, punctum L esse verticem, LV axem, XV latus rectum Parabolæ, quæ Problemati satisfacit omni casu; secans nimirum Circulum datum in punctis K, quorum supremum & infimum ad Problema* Alhazenianum *pertinent, reliqua ad aliud, de quo nuper ad te scripsi.*

* V. Fig. IX.

Datur, ut supra indicavi, alia quoque Parabola, quæ cum hac paria facit, & cujus descriptio ex hac adeò facilè deducitur, ut novâ non sit opus. Sumatur enim Aδ, in directum DA, & ipsi æqualis, & in directum OA, ipsi quoque æqualis, Aω. Tum bisectâ Pδ in ξ, ducatur per ξ recta κξβ, normalis ad XB, concurrens cum δκ, normali ad OA, in κ, & in quam cadat normalis ωβ; ac fiat ut κξ ad ξβ, ita hæc ad βλ: Erit λ vertex, λξ axis, κξ latus rectum Parabolæ, quæ in iisdem cum priore punctis Circulum datum secabit. Sed de Problemate Alhazeni *jam plus quàm satis. Vale, &, quo soles affectu, tui semper observantissimum porrò prosequi perge. Dab.* Leodii *prid. Kal.* Septemb. CIↃIↃCLXXII.

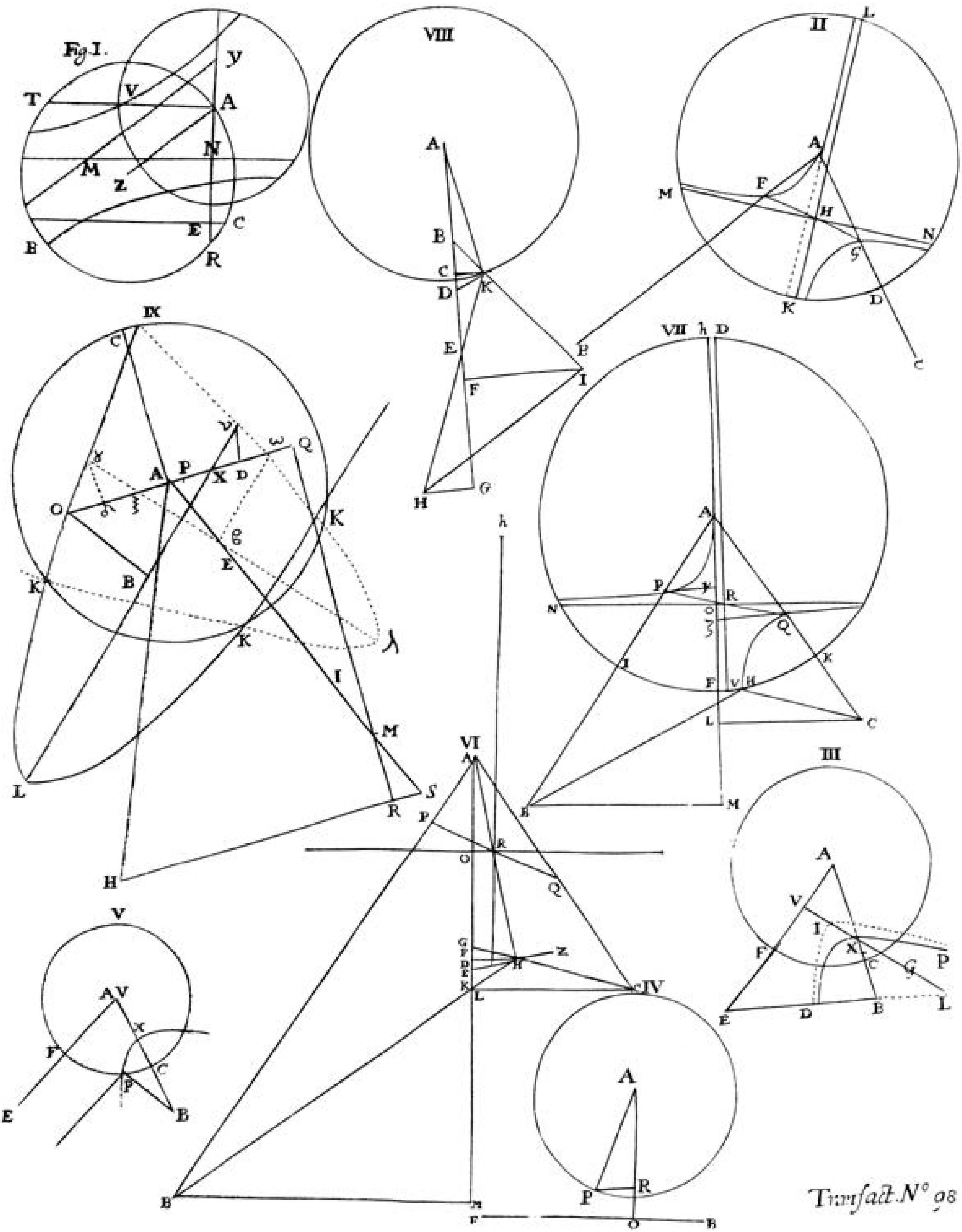
Epistola Doct. *Johannis Wallisii*, PRIMAM Inventionem & Demonstrationem Æqualitatis lineæ Curvæ *Paraboloïdis* cum Recta, anno 1657. factam, Dn. *Gulielmo Neile* p. m. asserens; proximeque Dn. *Christophoro Wren* Equiti, Inventionem lineæ Rectæ æqualis *Cycloidi* ejusque partibus, anno 1658.

Clarissimo Viro, *Henrico Oldenburg*; Johannes Wallis S. Octob. 4. 1673. Oxoniæ.

Clarissime Vir,

QUod ad *Rectificationem istius Curvæ spectat, quam ego* Paraboloidem Semi-cubicalem *appellare soleo; omnino errat Cl* Hugenius (pag. 71, 72, Horologii Oscillatorii) *cum ejus inventionem primam tribuit* Johanni Heuratio *Harlemensi, Anno* 1659. *Quippe certum est, eandem Biennio priùs invenisse & demonstrasse* Guilielmum Nelium *Anglum, Equitis* Pauli *filium: Et, post illum, id ipsum demonstrasse (ne plures nominem) Honoratissimum D. Vice-comitem* Brounckerum, *& Cl.* Wrennium, *Anglos; circiter menses Junii, Juliique, Anni* 1657. *atque rem jam tum apud nostros notissimam fuisse; utpote inter eos (Geometras aliosque,) qui* (Societatis Regiæ *appellationem nondum adepti, tum solebant in* Greshamensi *Collegio (post habitas ibidem prælectiones Mathematicas) statis diebus convenire, publicatam & cum plausu acceptam. Idque mihi literis suis,* Augusto *mense tum sequente, ad me* Oxonium *datis, indicavit Honoratissimus D. Vice-comes* Brounker;

suamque



Transact. N° 98