大學用書

投影幾何

（畫法幾何）

葉慶桐譯

龍門聯合書局出版

大學用書

投影幾何

（畫法幾何）

DESCRIPTIVE GEOMETRY

By G. C. Anthony *and* G. F. Ashley

葉慶桐譯

龍門聯合書局出版

投影幾何

Anthony & Ashley 原著

葉 慶 桐 譯

龍門聯合書局出版
上海南京東路61號101室
中國圖書發行公司總經售

1949年8月初版 印數10,001-12,000册
1953年6月六版
新定價 ¥ 11,000

凡　例

一、本書譯名完全依照前教育部公佈之名詞.

一、本書敘述原則,說明步驟,往往不嫌辭費,用"諸"、"一"等字表示多少數. 代名詞之應用,若有引起誤會之可能,則寧重複陳說其所代表之名詞,而不求簡省. 雖然,行文仍力求通達易曉,勿使過分西化.

一、插圖註字,凡原文用字法(Lettering)者,本書均用倣宋體;庶幾符合我國製圖習慣,抑且美觀易讀.

一、原著文圖中,偶有小疵或印刷之錯誤,苟有發現,已予改正.

一、本書蒙范會國博士爲之校閱. 並承周夢麐先生詳校數次,改正錯誤甚多,特此誌謝.

一、譯者自維學識譾陋,掛一漏萬,在所難免;海內賢達,幸指正焉.

譯　者

一九五〇年七月十四日

原　　序

圖解文字之研究有三部門，應予以密切之配合． 三者爲：

第一　儀器之運用．

第二　此種文字之文法結構，是即投影幾何．

第三　以最直捷清晰之方法，利用圖解表示觀念之技術．

本書所討論者爲第二部門，其中一部分曾另册出版，行銷有年，應用頗廣，今則加以校訂． 本書出版，應用當可更廣，此蓋由於另增三章，兼顧高級及初級學生之需要故也．

所增之第一章爲緒論，其中包括投影幾何之一切原則，而其說法極爲簡單，俾適於初學及自修．

投影幾何最能發展想像力． 其於訓練虛構力(visualization)之功效，初不亞於立體幾何學，故爲澈底了解圖示學 (graphics)之基礎． 而圖示學之所研討者，舉世通用之惟一文字也．

本書不用"地平線"(ground line) 一辭，而用較合邏輯之水平及垂直坐標平面之交線，且以坐標平面之符號表之，故以 *HV* 代 *GL*．

所增之另一章乃從製圖員之觀點出發，將此科目作全新之探討：略去坐標平面之交線及地平線；不以跡表平面，而以平面上之任意二線表之． 作者應用此法數年，以代常法，教授學生數百，深覺其極適於學習較實用之知識者．

所增之第三章爲割錐線及其他曲線，可備參攷，且可敎授初級之學生.

作者恆先將原則作簡明之陳述，概括之分析，而後列舉所取步驟，於焉每題之本質得以了然.

習題之編製煞費苦心，務求其充分說明原則. 點、線、面間之關係，均經指定，以免學者自行假設，而致耗費光陰，且有不能顯著表示圖形之虞. 習題中有以圖形表示者，冀使學者製作便捷，敎師選題簡易耳. 每題大都有二組；若需更多之題目，可將例解顚倒作之.

量度單位可予變更，以適合任何大小之紙張，或作於敎室之黑板上. 若不予更動，則自可作於書中指定之地位內.

一九二六年五月

目　　錄

凡例　i

原序　iii

第一章　緒論

1. 圖解文字　1

2. 投影幾何　1

3. 投影　2

4. 正投影　3

5. 正投影之觀念定義及記法　4

6. 正投影之理論及定律　6

7. 定律　7

8. 定律之應用　8

9. 正投影法習題　9

10. 投影幾何之目的　9

11. 面之眞實表示　9

12. 第一法． 將一面投影於平行該面之輔平面上　13

13. 第二法． 作輔平面與該面疊合　13

14. 第三法． 迴轉該面使與一坐標平面平行　15

15. 物體與諸坐標平面之關係　18

16. 平面幾何及立體幾何之有用定理 20
17. 應用輔平面之習題 21

第二章 點線及面之表示及記法

18. 坐標平面及其表示 24
19. 點 24
20. 線 25
21. 平面 25
22. 點之投影 26
23. 線之投影 27
24. 平行一坐標平面之線 28
25. 垂直於一坐標平面之線 28
26. 在一坐標平面上之線 29
27. 一線平行於一坐標平面而傾斜於另一坐標平面 29
28. 二線在空間平行 29
29. 二線在空間相交 30
30. 一線交 *HV* 31
31. 一線諸跡 31
32. 象限 31
33. 平面之投影 32
34. 垂直跡及水平跡之交點 34

第三章 點線及面

35. 原則方法及作圖　35
36. 決定一線之三投影　35
37. 決定一線之跡　36
38. 款 2.　一線傾斜於 V 及 H，平行於 P　38
39. 求一線之眞實長度及其與 V 或 H 之夾角　38
40. 款 2.　線之眞實長度　40
41. 線迴轉後與跡之關係　40
42. 線在面內必需滿足之條件　41
43. 平行於一坐標平面之線　42
44. 過任何一線有無窮數平面　42
45. 決定相交或平行二直線所在平面之跡　43
46. 款 2.　方法　44
47. 款 3.　方法　44
48. 作一平面通過一線及一點　45
49. 作一平面通過不在一直線上之三點　45
50. 平面上一線之一投影已知，求他一投影.　46
51. 平面上一點之一投影已知，求他一投影.　47
52. 在一已知平面上定一點，其與二坐標平面之距離爲已知　47
53. 已知一點在一平面上，若將此平面以其一跡爲軸迴轉，
而與一坐標平面疊合，求該點現在之位置.　49
54. 求平面上一線迴轉後之位置　50
55. 決定二相交直線間之角　51
56. 求作一平面上任何多邊形之投影，其形狀大小及在該平

面上之位置均屬確定者. 51
57. 反轉 52
58. 作圖法 2 52
59. 作圖法 3 53
60. 半徑已知之一圓切於二已知直線,求圓之二投影. 54
61. 求作二平面交線之投影 57
62. 款 1 57
63. 款 2 58
64. 已知二平面有一對相同跡平行 59
65. 所有跡交於一點 60
66. 款 3 60
67. 一平面包含 HV 61
68. 一線穿過一平面,試定其穿過點. 61
69. 款 1 62
70. 款 2 62
71. 款 3 62
72. 款 4 63
73. 穿過平面之線之可見部分 63
74. 一直線垂直一平面,則該線諸投影垂直於平面諸跡. 64
75. 於一斜平面上作一點之投影 65
76. 於一斜平面上作一線之投影 65
77. 通過斜平面上一已知點,求作一垂線,其長度等於定長. 65
78. 求一點至一平面之最短距離 66

79. 陰及影　66
80. 求作一點在一已知面上之影　67
81. 求作一線在一已知面上之影　68
82. 一線在二面上之影　69
83. 求作一立體在一已知面上之影　69
84. 求作一線在單曲面上之影　73
85. 求作空間一點在球上或迴轉複曲面上之影　73
86. 作一平面通過一點或一線，且與已知之線或平面有某種固定關係．　73
87. 款 1. 作一平面通過一已知點，且平行於一已知平面．　75
88. 款 2. 作一平面通過一已知點，且垂直於一已知線．　75
89. 款 3. 作一平面通過一已知點，且平行於二已知線．　76
90. 款 4. 作一平面通過一已知線，且平行於另一已知線．　76
91. 款 5. 作一平面通過一已知線，且垂直於一已知平面．　77
92. 第 86 節之特例及方法　77
93. 款 2　78
94. 款 5　78
95. 求不在一平面上二直線間之最短距離，並求此最短距離線之投影．　79
96. 求一線及一平面間之角　79
97. 求一線及坐標平面間之角　81
98. 求作一定長線之投影，此線通過一已知點，且與坐標平面成已知角．　81

99. 求二平面間之角 82
100. 款1. 83
101. 款1之另一法 84
102. 款2 84
103. 求廡殿式屋頂上木材之長度及斜角 85
104. 已知一平面之一跡及此平面與一坐標平面間之角,求另一跡. 87
105. 款2 88
106. 已知一平面與二坐標平面所成之二角,求其二跡. 88
107. 求作已知形狀大小之一正稜柱之投影,其一底在一傾斜平面上之位置固定,已知此傾斜平面與二坐標平面間之角. 89

第四章 面之產生及分類

108. 面之產生法 91
109. 面之分類 91
110. 直紋面 92
111. 平面 92
112. 單曲面 92
113. 錐面 92
114. 柱面 93
115. 盤旋面 93
116. 翹曲面 94

117. 翹曲面之數型 94
118. 迴轉曲面 96
119. 複曲面 96

第五章 切面

120. 一平面切於一單曲面 99
121. 單曲面上一點之一投影已知，求作一切面切曲面於包含已知點之素線上. 99
122. 求作一平面切於一錐面，且通過曲面外一已知點. 101
123. 求作一平面切於一錐面，且平行於一已知線. 102
124. 求作一平面切於一柱面，且通過曲面外一已知點. 102
125. 求作一平面切於一柱面，且平行於一已知線. 102
126. 一平面切於複曲面 104
127. 迴轉複曲面上一點之一投影已知，欲求一平面過此點切於曲面. 105
128. 過空間一點作一平面，切迴轉複曲面於一已知緯圈. 107
129. 求作一面切球面於一已知點 107
130. 過一已知線求作切於一球面之諸平面 107

第六章 平面與曲面之相交及曲面之展開

131. 求作任何曲面與任何割面之交線 109
132. 平面與單曲面之相交曲線之切線 109
133. 截口之眞實大小 109

134．正截口 109
135．曲面之展開面 109
136．求一平面與一稜錐之交線 110
137．展開稜錐 110
138．求一平面與一錐面之相交曲線 112
139．求任何斜錐之展開面 113
140．求一平面及一柱面之相交曲線 114
141．展開柱面 116
142．柱軸平行於一坐標平面 117
143．求一平面及一稜柱面之相交曲線 117
144．展開稜柱 118
145．螺旋面 119
146．求作螺旋面之素線 120
147．展開螺旋面 121
148．求作一平面及一迴轉曲面之相交曲線 124

第七章 曲面之相交

149．曲面相交之一般原則 127
150．輔助切割面之特性 127
151．求錐面及柱面之相交曲線，兩者之軸傾斜於坐標平面． 128
152．切割平面之次序及選擇 130
153．決定相交曲線爲數是一是二 131
154．求曲線之可見部分 131

155. 求作二柱面之相交曲線，二者之軸傾斜於二坐標平面. 131
156. 求作二錐面之相交曲線，二者之軸傾斜於二坐標平面. 132
157. 求作一橢面及一斜柱面之相交曲線 132
158. 求作一環面及一柱面之相交曲線，二者之軸均垂直於水平坐標平面. 133
159. 求作一橢面及一拋物面之相交曲線，二者之軸相交，且平行於垂直坐標平面. 134

第八章　翹曲面

160. 翹曲面 136
161. 已知三曲準線及一點(在其中一曲準線上)，求作翹曲面上通過此點之素線之二投影. 136
162. 已知二曲準線及一準平面，求作翹曲面之一素線 137
163. 款 2. 139
164. 第 161 及 162 節中翹曲面之變相 141
165. 雙曲拋物面 141
166. 過一準線上一點，求作雙曲拋物面之一素線 143
167. 雙曲拋物面上一點之一投影已知，求他一投影，並作一素線過此點. 143
168. 翹曲螺旋面 144
169. 正螺旋面 146
170. 翹曲螺旋面較一般之型式 147
171. 一葉之迴轉雙曲面 147

172. 求作一素線過此曲面上任一點 148
173. 此面之動線可由三直準線管理之 148
174. 此動線可由二曲準線及一準錐面管理之 148
175. 過此曲面上任一點作其切面 149
176. 過一直線求作一平面切於任何迴轉複曲面 149

第九章 寫生式之投影——透視投影等角投影及斜投影

177. 透視投影或錐形投影 151
178. 平行線之透視投影 152
179. 應用對角線作透視 152
180. 作傾斜於畫面之物體之透視投影 153
181. 求作一紀念碑之透視投影;此碑之正投影已知. 154
182. 透視法中名詞之定義 156
183. 等角投影及斜投影 156
184. 不等角投影 156
185. 等角投影 157
186. 等角畫 158
187. 非等角線 158
188. 圓之等角畫 159
189. 兩等角投影 160
190. 斜投影 160

191. 半斜投影　162

第十章　不用地平線及平面跡之射影幾何

192. 引言　163
193. 建築物之屋頂　163
194. 空間一線及其斜度或傾斜度　163
195. 相交諸線　165
196. 平行線　165
197. 一線之眞實長度及傾斜度　166
198　求一線之眞實長度及下傾角　166
199. 款1之定律　166
200. 求一線之眞實長度及後傾角　166
201. 款2之定律　168
202. 平面　168
203. 在一平面內之諸線　170
204. 一平面之傾斜度或斜度　170
205. 求任意平面之下傾角　172
206. 求任意平面之後傾角　172
207. 一平面之稜視圖　172
208　垂直於一平面之一線　173
209. 求作垂直於一平面 *AB* 之線之投影　174
210. 求一線穿過一平面之點　175
211. 線穿過平面之可見部分　176

212. 求一物體之影 176
213. 平面之迴轉 177
214. 求作平面多邊形之眞實大小及形狀 178
215. 求相交二線間夾角之眞實大小 178
216. 求任何三角形之眞實大小 178
217. 在已知平面上已知位置作一多邊形之投影，多邊形之形狀及大小爲已知. 179
218. 求二平面之交線 180
219. 過一點或線作一平面，與一已知線或平面有固定之關係. 182
220. 款1. 求作一平面經過一已知點，平行於一已知平面. 182
221. 款2. 求作一平面經過一已知點，垂直於一已知線. 182
222. 款3. 求作一平面經過一已知點，平行於二已知線. 182
223. 款4. 求作一平面經過一已知線，平行於另一已知線. 182
224. 款5. 求作一平面經過一已知線，垂直於一已知平面. 182
225. 求一線與一平面間之角 182
226. 不在一平面內之二直線間有一最短距離線，求此線之投影及眞實長度. 183
227. 求二已知平面間夾角之眞實大小 185

第十一章 割錐線螺線及螺旋線

228. 曲線 187
229. 割錐線 187
230. 橢圓 188

231．求作橢圓　188
232．用梁規作橢圓　189
233．用平行四邊形法作橢圓　189
234．拋物線　190
235．求作拋物線　190
236．用平行四邊形法作拋物線　191
237．雙曲線　191
238．求作雙曲線　191
239．用平行四邊形求雙曲線　192
240．螺線　192
241．阿基米德螺線　192
242．等角螺線或對數螺線　193
243．漸伸線　194
244．螺旋線　195
245．錐形螺旋線　196

第十二章　習題

246．解題須知　197
247．習題　197
中英名詞對照表　1

投影幾何

(畫法幾何)

第一章　緒　論

1. **圖解文字**(Graphic Language). 吾人表達思想,除語言文字外,唯一方法卽爲圖示,通常稱爲圖畫. 取某物之圖可利用攝影機或徒手作草圖(freehand sketch);惟若欲求其精確與完全,勢非利用某種幾何定律不可,此種定律乃圖示學(science of graphic expression)之基石,卽本書所討論者.

藉圖示學而得之圖有透視投影、等角投影及正投影(perspective, isometric and orthographic projections),應用於建築畫及工程畫.

2. **投影幾何**(Descriptive Geometry). 此乃圖解文字之科學,爲幾何學之一分科,是卽射影幾何(geometry of projection),其所討論者爲圖解法之原則定律及方法. 工程建築人員藉此種知識,始能以圖解表達其工作.

凡設計住宅,建造橋樑,計劃任何工程,不論大小,均需投影幾何之智識. 李翁拿多・達文奇(Leonardo da Vinci, 1452-1519)深感欲使繪畫逼眞,必制定透視畫法之若干公式而加以運用;由是

其作品獲得一種深邃眞實之效果，爲文藝復興前所罕有．惟直至上世紀，葛司伯・蒙奇(Gaspard Monge, 1746-1818)所已闡明並名爲投影幾何之理論，其對圖解文字充分發展之重要性始告發現．稱之爲圖解文字之文法，實無不當．

3．**投影** (Projection or Projection Geometry)．此乃圖解文字之科學所基之幾何方法．用放映機作比，最易了解．此機用分散之光線，將一圖或物體之點、線、面投射於幕上，遂得放大之像．光線名爲投射線(projector)．幕卽名爲畫面(picture plane)或投影面(plane of projection)．由投射線彼此間及其與投影面之關係決定該投影之爲透視、等角或正投影．

圖1係透視投影法之一例，示由透明之幕或平面所見之物體．

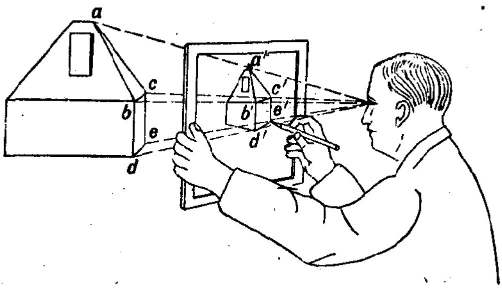


圖1.

僅需將鉛筆依透明幕（或投影面）上顯現之線拘繪，如此得到之投影或圖(drawing)卽該物體之點線對於平面之投影．物體任何點（如屋脊一端 a）之投影，卽爲由該點至人目所畫光線（或投射線）與畫面之相交處（如 a'）．若一羣光線(或投射線)包含某線（如 de）一切點，並通過人目，則將該線投影於幕(或畫面)上成 $d'e'$ 線．

如此投影方法，名爲透視法，可應用於繪畫，因其未盡完善，故

不適於一般技術工作. 蓋透視投影畫不易用簡單方法量度;物體內部無從表示,而外部亦祇能畫出可見之一部份;若作數個視圖(view),又不能適用同一之比例尺度也.

4. **正投影.** 為免除透視投影之缺點,及適合建築畫,工程畫之嚴格要求,圖解法必須具有完美準確之性質,俾於按圖製造時,能有數學般之準確. 欲符合此種條件,須能直接從圖上量得一切尺寸. 圖2表示符此目的之一種投影法. 此法與透視法相異處在於投射線之應用不同——投射線垂直畫面,而非收斂於一點. 依此法,不問物體、平面及人目三者間之相對距離如何,投影或物體之視圖(view)均與原物之尺寸相同.

此法中假定將物體置於透明平面 GLR 之後,GLK 之下而觀之. 平面 V 為垂直,H 為水平. 且自物體各點至人

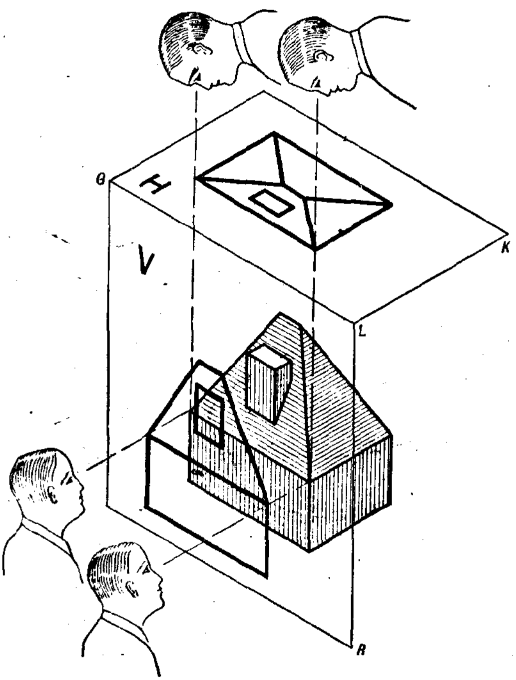


圖 2.

目之投射線，不能如圖 1 中透視投影之收斂於一點；而應設想人目與物體每點正對，如圖 2 所示．此法名為正投影，因投影面與投射線垂直之故．

5．**正投影之觀念、定義及記法**．投影面位於垂直、水平或任何最便於作圖之角度均可．惟表示一物體，至少需二投影圖，始能完善；故通常用二互成直角之平面，一垂直，一水平，如圖 3 所標之 V 及 H．該圖並示作有該物側視圖(side view)之第三平面．該平面垂直於垂直面及水平面，稱為側面 (profile plane)，以 P 表之．三平面各稱為垂直坐標面、水平坐標面及側坐標面(vertical, horizontal, and profile coordinate planes)．

因實際製圖均於一平面（如紙張）上為之，故須假定將各投影面迴轉入於同一平面内．如圖 4 所示，將投影面 V 或 H，以 GL 為軸迴轉之，使與未曾迴轉之平面相合；再將第三平面 P 迴轉，以與 V 及 H 之公共平面合．

水平投影面與垂直投影面之交線 GL，今後將以 HV 表之；水平面與側面之交線 LK，將以 HP 表之．

代表一點或線之字母，其右上角標有小寫字母者，此小寫字母表示該點或線投影所在之平面；譬如 b^v 乃表示點 b 在平面 V 上之投影．

圖 4 表示各視圖間之關係，諸平面之交線以 HV，VP 及 HP 表之，字母暗示諸平面．

直線 HV 為最通用之參攷線，各書大都名之為地平線(ground

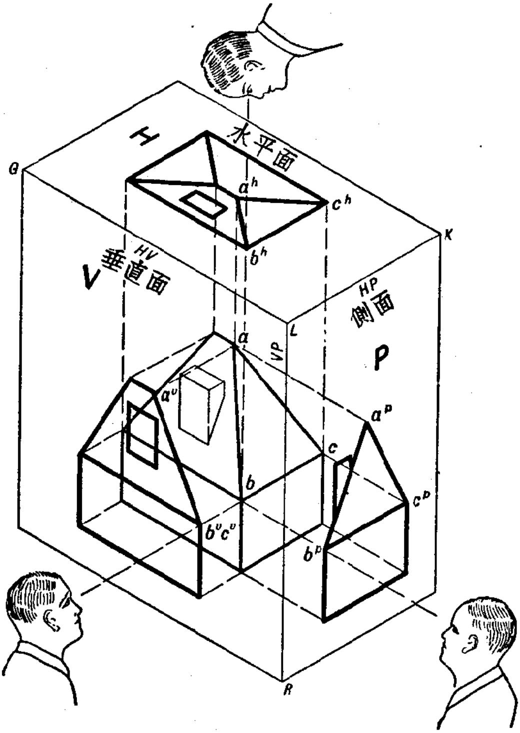


圖 3. 寫生畫.

line), 透視畫中畫面與地面 (ground) 之交線亦以此名之. 見第 156 頁, 第 182 節.

諸平面上之投影圖, 定義如下:

平面 H 上之投影圖稱爲水平投影 (horizontal projection), 上視圖 (top view) 或平面圖 (plan).

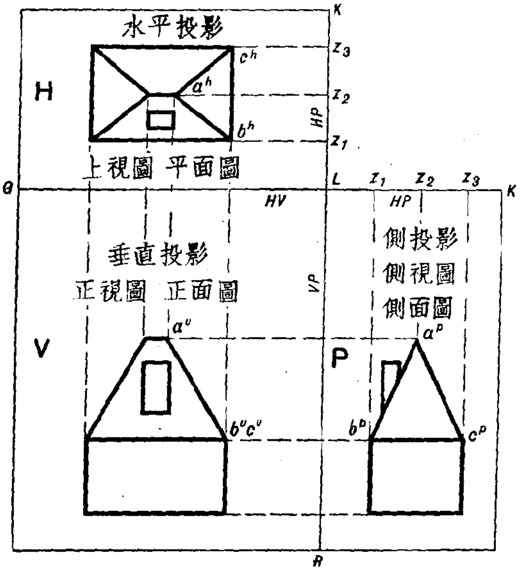


圖 4.　正投影圖.

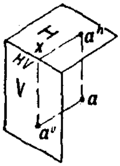
平面 V 上之投影圖稱爲垂直投影 (vertical projection), 正視圖 (front view) 或正面圖 (front elevation).

平面 P 上之投影圖稱爲側投影 (profile projection) 或側視圖 (side view) 或側面圖 (side elevation).

側面以 VP 爲軸迴轉, 故平面 H 及 P 之公共稜 HP 在水平投影與側投影中均有之. 對於此線所作之一切投影, 在此線之兩視圖中相同 (All projections to this line will be identical in the two views of this line), 如 z_1, z_2, z_3.

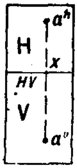
6. 正投影之理論及定律. 圖 5 以寫生表示二正交平面; H 及

V，及空間中之一點 a（吾人可設想該點卽前述屋頂上之點 a）。藉二垂直線 aa^h 及 aa^v，該點卽投影於平面 H 及 V 上。a^h 爲空間中點 a 之水平投影，a^v 爲垂直投影。正交線 aa^h 及 aa^v 投影於 V 及 H，成 a^vx 及 a^hx，交 HV 於 x。若平面 H 及 V 以交線 HV 爲軸迴轉入於一公共平面（圖 6），則 a^h 及 a^v 均在線 HV 之一公垂線上，因 a^hx 及 a^vx 均於公共點 x 與 HV 垂直也。



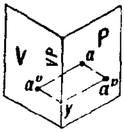
寫生畫

圖 5.



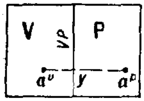
正投影法

圖 6.



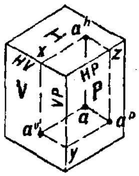
寫生畫

圖 7.



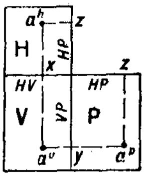
正投影法

圖 8.



寫生畫

圖 9.



正投影法

圖 10.

若用二垂直投影面 V 及 P，情形亦復相仿（如圖 7 所示）。點 a 在 V 及 P 上之投影爲 a^v 及 a^p。圖 8 所示者爲正投影法，其中 VP 爲二投影面之交線，二投影線（projecting line）均垂直於 VP。

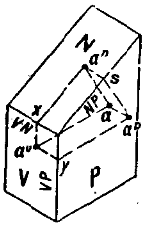
亦可合併圖 6、圖 8 中之三投影面 H、V 及 P，如圖 9、圖 10 所示。圖 9 用寫生畫法，圖 10 用正投影法。

7. 定律. 從上述幾何關係，導出一切點之正投影之基本定

律如下:

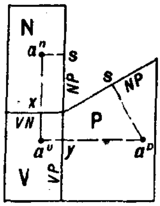
凡一點任何二正投影之聯結線必垂直於投影所在二平面之交線。

此定律適用於任何角度之投影面，如圖 11、12、13 所示. 圖 11 中，平面 N 傾斜於 V，垂直於 P；點 a 在此數平面上之投影為 a^n, a^v 及 a^p. 圖 12 為正投影，其中平面 P 繞 VP 迴轉；圖 13 中，P 繞 NP 迴轉.



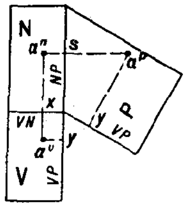
寫生畫

圖 11.



正投影法

圖 12.



正投影法

圖 13.

圖 14 及 15 中，三平面彼此均不成 90°，所示者為該定律一種極廣泛之應用.

8. **定律之應用.** 若已知一點在任何兩平面上之投影，該點在第三平面上之投影可以下法求得之:

設圖 10 中，a^v 及 a^p 為點 a 在二平面 V 及 P 上之投影，故兩點均在 VP 之一公垂線上. 今有第三平面 H，其與 V 之交線為 HV. 自 a^v 作 HV 之垂直線，得點 x. 自 a^p 作垂線至迴轉後之 HP，得點 z. 將 z 移至另一 HP 上，作垂線至 a^vx 之延長線. 二線相交

於 a^h，即爲所求之投影.

今設諸平面彼此均不正交，如圖 14 及 15 所示者.（圖 14 爲寫生畫，圖 15 爲正投影法）. 設已知點 a 在 V 及 M 上之投影爲 a^v 及 a'''. 自 a''' 作 $a'''s$ 垂直於 MN；自 a^v 作 $a^v x$ 垂直於 VN，並引伸之；於平面 N 上自 s 作 MN 之垂線. 兩線交於 a^n，即所求之投影.

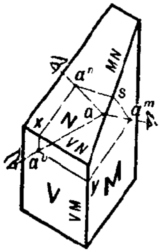


圖 14.

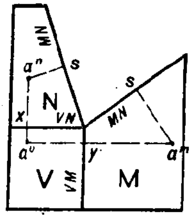


圖 15.

9. **正投影法習題.** 在作進一步討論之前，學者試畫出下列各種簡單物體在三坐標平面上之投影，俾能純熟.

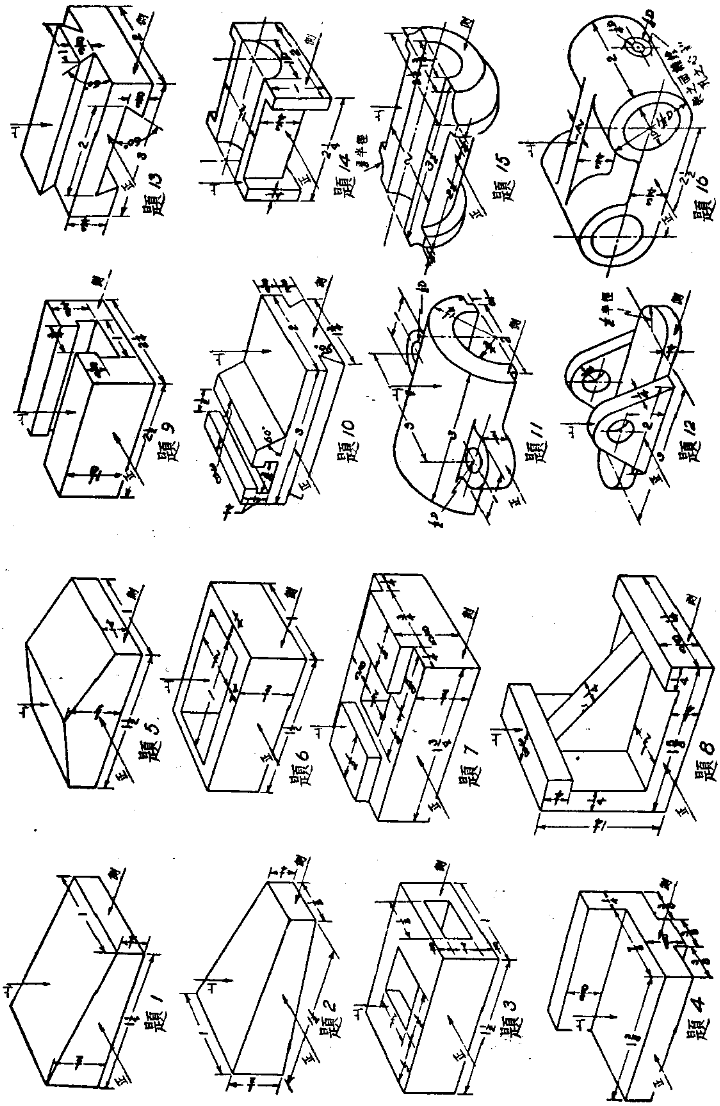
作圖時應注意使三視圖內均有物體之任一線條. 諸坐標平面之交線 HV、HP 及 VP 可用作參考線，如圖 16 所示.

每題用5″×7″之地位已足.

10. **投影幾何之目的.** 投影幾何之目的如下：研討原則，制成定律，而後能用比例尺畫任何位置之任何物體；繪製物體各面之精確輪廓，初不問面之平曲；解答幾何中求線面所夾角諸問題；決定物體各點、各線、各面間之距離；勾劃物體內部之細目；於是使讀者獲得一切知識，以充分了解一物，無論此物爲機械，屋架，教堂，汽輪，或山脈. 此外，透視畫法又可應用於藝術及插圖方面.

11. **面之眞實表示** (True Representation of Surfaces). 省去第 6 頁圖 4 之投影面邊線，保留其交線 HV，VP 及 HP，得圖 16.

因須同時參考物體之各面，故將下圖詳密註以字母. 凡正投


題 1
題 2
題 3
題 4
題 5
題 6
題 7
題 8
題 9
題 10
題 11
題 12
題 13
題 14
題 15
題 16

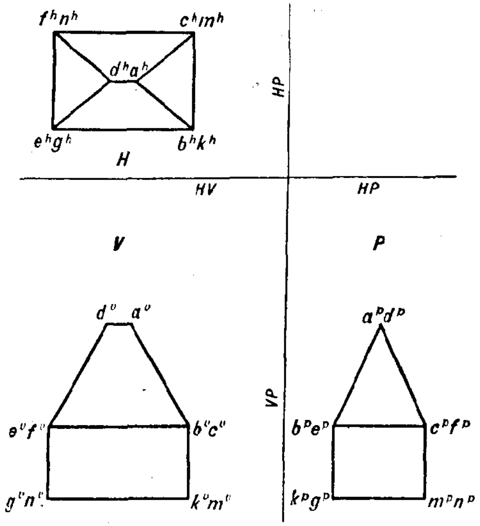


圖 16.

影圖上一點標兩字母者，表示該點乃由一線之兩端投射而成，從知該線必垂直於投影面．　二字母之居首者代表該線較近坐標平面之一端．

參看圖 16 或第 5、6 頁上圖 3 及圖 4，可見正面 (front surface) *ebkg* 平行於 *V*，故 *V* 上之投影，其形狀大小與實物一致．同理，右側 (right hand end) *bcmk* 平行於 *P*，故 *P* 上之投影，其形狀大小亦與實物一致．然屋頂上諸面，一經投影於各坐標平面上，均見縮短，不復如上述者之完全一致．

今有一基本原則如下：一線或面之眞實表示必須作於與該線或面平行或疊合之平面上．茲制定符此原則之法三則，以求縮短

面之眞實形狀及大小．　一二兩法，實係相同．

第一法：作一平面平行於題中之線或面，在其上作該線或面之投影，再迴轉此輔平面（auxiliary plane）與一坐標平面叠合，卽得其眞實之長度或面積．

第二法：用一與該線或面叠合之平面，迴轉之，使叠合於一坐標平面，卽得線或面之眞相．

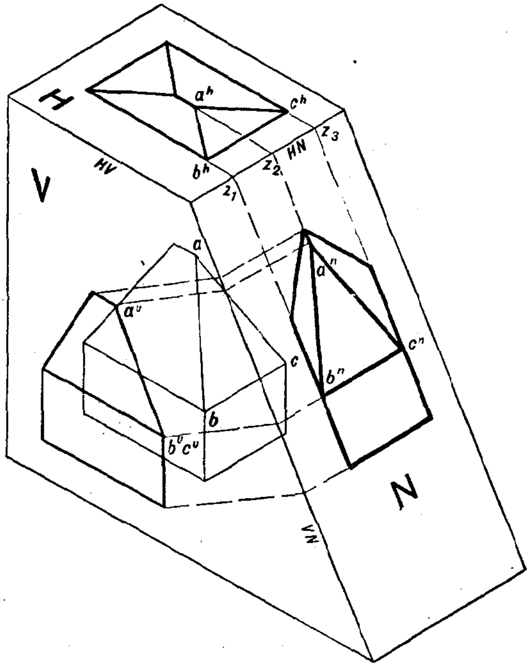


圖 17.

第三法：將該物體迴轉達一位置，使題中之線或面平行於一投影坐標面．

12．第一法．　將一面投影於平行該面之輔平面上　圖 17 爲寫生畫，圖 18 爲正投影圖．其中平面 N 平行於建築物頂之右側，abc；VN 平行於 a^vb^v；而用第 8 節之原則求得之投影 $a^nb^nc^n$；卽爲面 abc 之眞相．

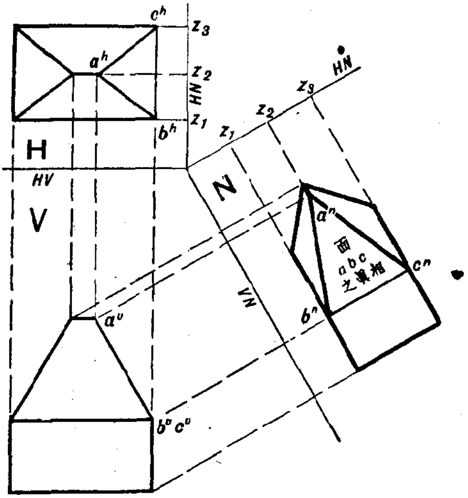


圖 18.

13．第二法．　作輔平面與該面疊合．圖 19 及 20 中應用一輔平面 N，與屋頂側面 abc 疊合．引伸輔平面，與平面 V 交於 VN 線，與平面 H 交於 HN 線．二線稱爲平面 N 之垂直跡及水平跡 (vertical and horizontal traces of the plane N).

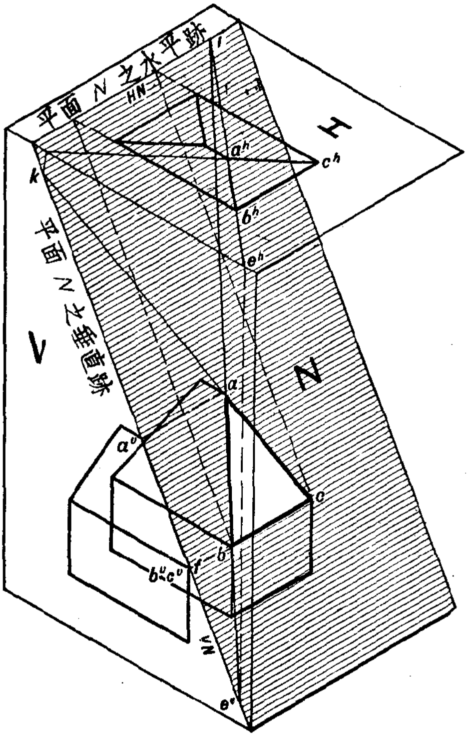


圖 19.

試一察諸圖，若將屋頂諸線 ab，ac 及 bc 引伸至坐標平面 V，則因三線均在平面 N 上，故與 V 之交點必在跡 VN 上．三交點（point of intersection）e、k 及 f 稱為線 ab、ac 及 bc 之跡（traces of the lines ab, ac, and bc）.

從以上之討論，得一解題之極端重要原則如下.

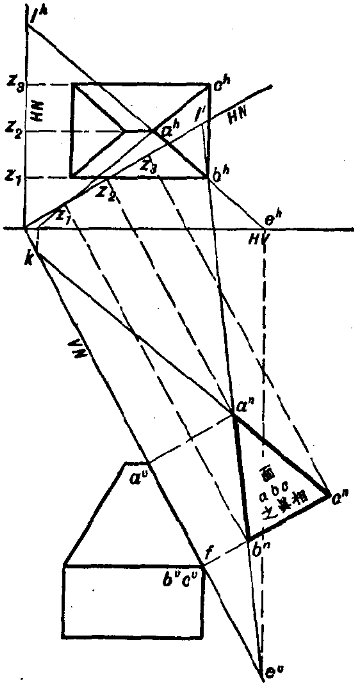


圖 20.

一平面上所有直線之跡均在該平面之跡（卽此平面與一坐標平面之交線）上。

求面 *abc* 之眞實尺寸與形狀，尚留最後一步，卽將與此面疊合之平面 *N* 迴轉入於一坐標平面． 圖 20 中，平面 *N* 以垂直跡 *VN* 爲軸迴轉，與平面 *V* 疊合． $a^n b^n c^n$ 卽屋頂側面之眞實大小也．

14. **第三法．迴轉該面使與一坐標平面平行．**已知某物體(面線亦然)之三視圖，則不論將此物置於若何地位，均可圖示之卽使此物依一軸或數軸之與 HV、VP 或 HP 平行者迴轉卽可．

圖 21 示矩形稜錐之三視圖，試將此稜錐先後依 HV、VP 或 HP 三線之平行線迴轉之．

將稜錐自圖 21 之地位，依垂直於 H 之軸(當亦平行於 VP)迴轉，其投影示於圖 22．如此一轉，上視圖並無更改，祇需依所轉之角度，照圖 21 之上視圖摹下．又因其垂直諸度(vertical dimensions)(卽與軸 VP 平行之諸度)均未改變，故彼等之高度與圖 21 中同．高度既定，再將上視圖上各點投影至平面 V 及 P，卽得正視圖與側視圖．

將稜錐自圖 21 之地位，依垂直於 V 之軸(故平行於軸 HP)迴轉，其投影示於圖 23．如此則 V 投影圖僅位置因迴轉而有變更，他無所異，照圖 21 之 V 投影摹下可矣．深度(卽平行於 HP 之諸度)亦與圖 21 相同．故將圖 21 之正視圖依所轉角度摹下後，H 投影圖及 P 投影圖均可求得．

將稜錐自圖 21 之地位，依垂直於 P 之軸(故平行於軸 HV)迴轉，其投影示於圖 24．如此，側視圖(卽 P 投影圖)與圖 21 無甚變更，平行於 HV 之諸度亦與圖 21 相同．

物體在不同地位之圖示法，由是得一重要定律：

垂直於迴轉軸之投影面，其上之視圖不變；平行於迴轉軸之諸度不變．

吾人可應用此原則以決定任何面之真實尺寸與形狀，如圖 23

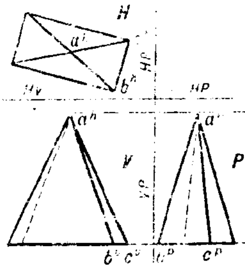


圖 22.

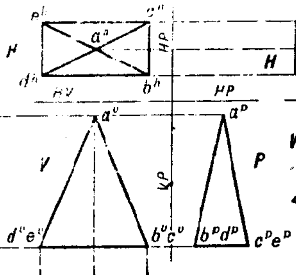


圖 21.

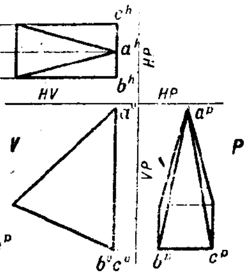


圖 23.

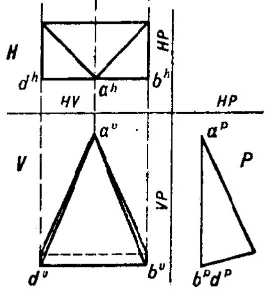
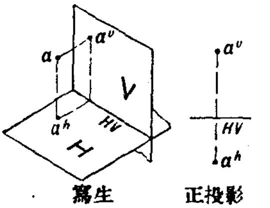


圖 24.

及 24 所示者. 圖 23 中,物體依平行於 HP 之軸迴轉達一位置,使面 abc 平行於 P, 因而在其側投影中可顯眞實之形狀, 如 $a^pb^pc^p$ 圖 24 中, 物體依平行於 HV 之軸迴轉達一位置, 使面 abd 平行於 V,因而在其垂直投影中可顯眞實之形狀,如 $a^vb^vd^v$.



寫生 正投影

圖 25. 第一象限

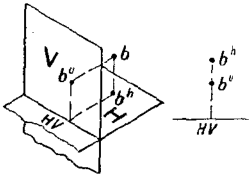


圖 26. 第二象限

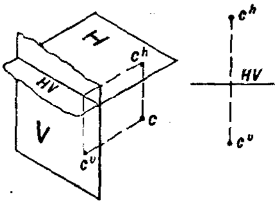


圖 27. 第三象限

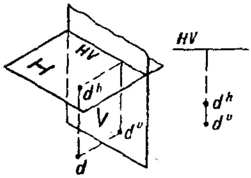


圖 28. 第四象限

15. **物體與諸坐標平面之關係.** 在以前一切插圖內，假定物體置於 V 之後，H 之下，而透過坐標平面方可察見. 然因此二平面之範圍並不確定，故亦可設想物體在此相交二平面所成任一象限內.

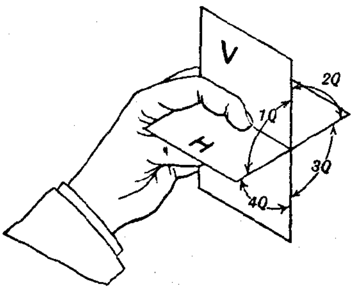


圖 29.

從圖 25 至 28，兼用寫生法及正投影法輪流表示一點在四象限內之投影. 圖 25 中該點在第一象限，圖 27 中該點在第三象限，兩圖中 V 投影及 H 投影

就 HV 易位． 圖 26 中，點在第二象限；圖 28 中，點在第四象限，兩投影俱在 HV 一側．

圖 29 爲一寫生畫，表示二厚紙片相交而成諸象限間之關係，足爲解題時構思之一助．

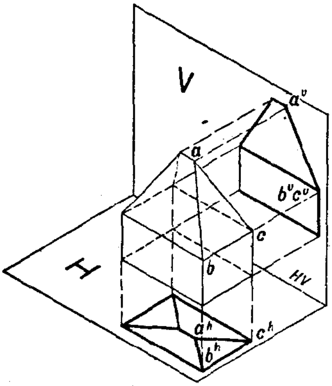


圖 30.

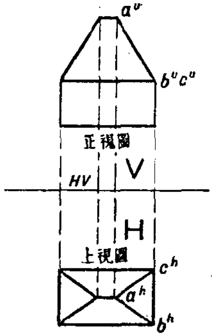


圖 31.

以前插圖所示之物，均在第三象限，是乃工程方面之通例．惟在圖 30 及 31 內，物體畫於第一象限內． 上視圖(或水平投影)遂在垂直投影之下．

實際製圖時並不畫入坐標平面之交線，而代之以中心線(center line)． 圖 32 所示卽爲以前討論之房屋，爲通用之畫法．今參考平面(reference plane)（卽垂直坐標平面）直接通過物體；諸平面與物體之關係示於圖 33 及 34． 各視圖間關係並不變更． 一物位於兩個象限，卽製圖者恐亦無此概念耳．

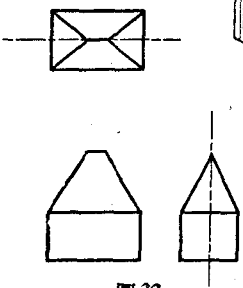


圖 32.

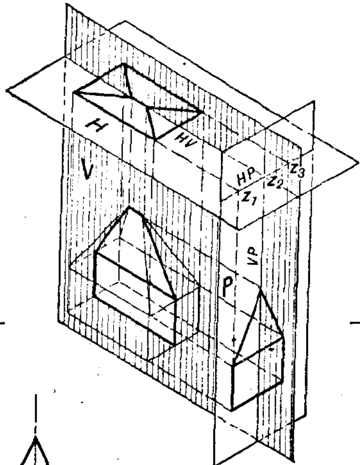


圖 33.

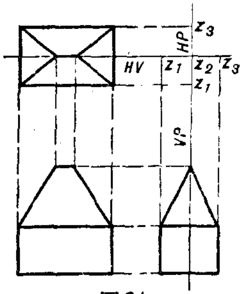


圖 34.

研習投影幾何，於應用何一象限，並不注意．惟爲符合習慣起見，著者專用第三象限．有時寫生插圖，用第一象限較爲清楚，則爲例外．

16．平面幾何及立體幾何之有用定理．

1．(1)不在一直線上之三點決定一平面．

(2) 一直線及線外一點決定一平面．

(3) 平行或相交之二直線決定一平面．

2．一直線垂直於一平面，必垂直於面上與該線相交之一切直線．

3．一直線垂直於一平面，則任何包含此線之面垂直於該面．

4. 一直線平行於相交之二平面，必平行於此二面之交線.

5. 一直線垂直於二平行平面之一，必垂直於另一平面.

6. 不在一平面之二線祇有一公垂線.

7. 一平面截二平行平面，則所成之二交線平行.

8. 相交之二直線均平行於一平面，則此二線所成之平面亦平行於該面.

9. 相交之二平面均垂直於第三平面，則其交線亦垂直於第三面.

10. 一線與一平面之夾角爲此線與其在平面上投影之夾角.

11. 二面角 (diedral angle) 爲二平面之發散量 (amount of divergence). 二平面稱爲此二面角之面 (face). 二平面之交線稱爲其稜 (edge). 此角由二線之夾角量度之，二線各在一平面上，交稜於一點，且垂直於稜. 若有垂直於稜之第三平面，則其與二面所成交線之夾角，亦可用以量度二面角.

12. 作一切線切柱底於柱側面素線 (element) 之端 (extremity)，則過此切線及素線之平面必切於柱

13. 作一切線切錐底於錐側面素線之端，則過此切線及素線之平面必切於錐.

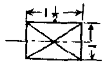
17. 應用輔平面之習題. 下列習題，爲進一步研討之入門. 學者試解答其一部分，當更能了解 11-14 節所述者.

每題需5″×7″之地位.

關於迴轉之習題 (15 頁，14 節). 將下列各物體，依圖 1，2，3，4 所指示之每一位置，各作三視圖. 四圖需紙至少 9×9.

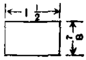
作下題諸物體之三視圖，其上視圖示於各題右側. 圖 1.	將圖 1 之物體依垂直於V之軸向左迴轉30°，作三視圖. 圖 2.
將圖 3 之物體依垂直於H之軸順時針轉30°，作三視圖. 圖 4.	將圖 2 之物體依垂直於P之軸向前迴轉15°，作三視圖. 圖 3.

題 1. 高為 $1\frac{7}{8}''$ 之矩形錐.



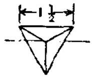
題一之上視圖

題 2. 高為 $1\frac{3}{4}''$ 之矩形柱.



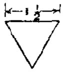
題二之上視圖

題 3. 高為 $1\frac{7}{8}''$ 之正三角錐. 其底為一等邊三角形.



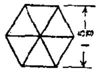
題三之上視圖

題 4. 高為 $1\frac{3}{4}''$ 之正三角柱. 其底為一等邊三角形.



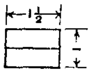
題四之上視圖

題 5. 高為 $1\frac{7}{8}''$ 之六角錐.



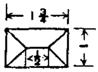
題五之上視圖

題 6. 高為 $1\frac{7}{8}''$ 之三角柱.



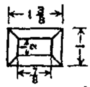
題六之上視圖

題 7. 高為 $1\frac{1}{2}''$ 之矩形楔.

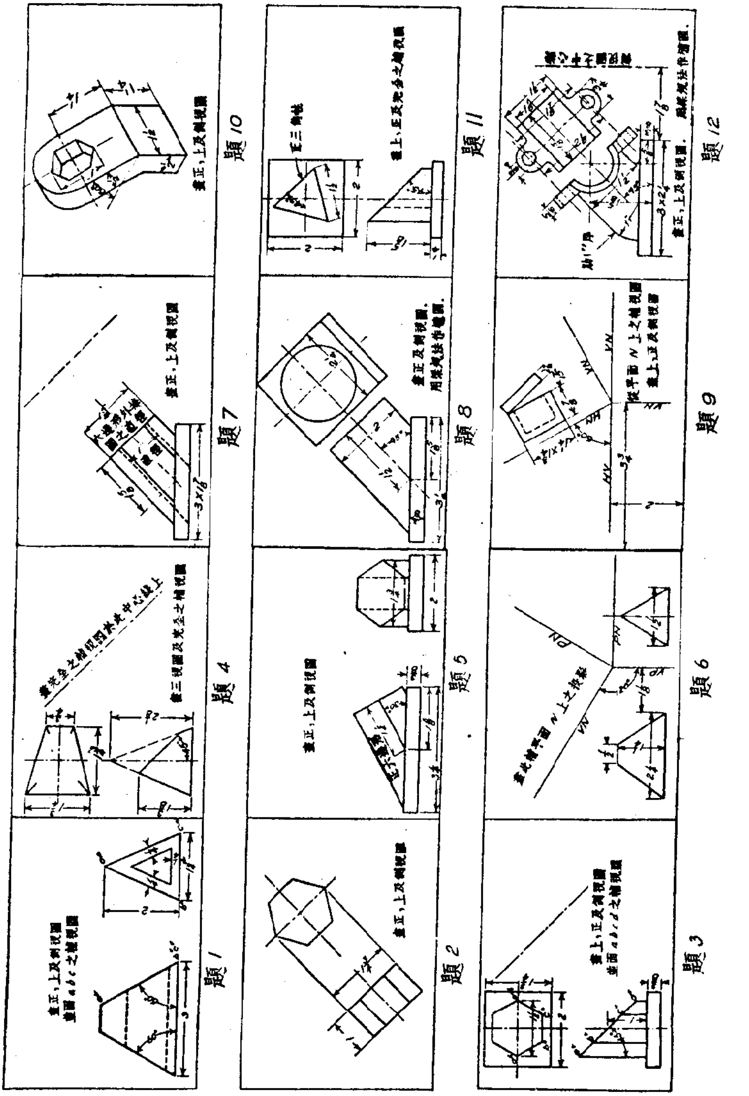


題七之上視圖

題 8. 高為 $1\frac{1}{2}''$ 之矩形錐臺.



題八之上視圖


題 1
畫正,上及側視圖
求面abc之補視圖
題 2
畫正,上及側視圖
題 3
畫上,正及側視圖
求面abcd之補視圖
題 4
畫三視圖及完全之補視圖
題 5
畫正,上及側視圖
題 6
題 7
畫正,上及側視圖
題 8
畫正及側視圖.
題 9
畫上,正及側視圖
題 10
畫正,上及側視圖
題 11
畫上,正及完全之補視圖
題 12
畫正,上及側視圖.

第二章　點線及面之表示及記法

18. **坐標平面及其表示.** 如第4節所述，通常應用之三投影平面互相垂直，名爲水平面、垂直面及側面. 三坐標平面以字母 H、V 及 P 表之；平面之交線以相交平面之字母表之，如 HV 爲 H 及 V 之交線，VP 爲 V 及 P 之交線，HP 爲 H 及 P 之交線等是也.

三平面上之投影須畫於一平面上，故勢必設想三坐標平面以交線爲軸迴轉入於同一平面. 因 H 及 V 二平面相交成四象限，故迴轉時二象限張開，二象限閉合. 習慣上係將第一第三象限張開，第二第四象限閉合. 圖35以寫生表示各點之投影，圖36以正投影表示平面迴轉後各點投影間之關係. 圖36中，點 b 在第三象限(3Q)內(卽在 V 之後 H 之下)，故其水平投影在 HV 上方，垂直投影在 HV 下方. 點 a 在4Q內(卽在 V 之前 H 之下)，故其二投影均在 HV 下方. 今點 c 之二投影均在 HV 上方，故知該點在2Q內. 點 d 在1Q內，故其垂直投影在 HV 上方，水平投影在 HV 下方.

通常將側面依 VP（側面與垂直面之交線）迴轉，其實亦可將側面與水平面疊合. 兩種方向之迴轉皆可，惟以與其他投影最少混淆爲原則.

19. **點.** 空間之點以小寫字母表之，如 a,b,c 等，點之垂直投影，水平投影及側投影亦以同樣字母表之，惟於右上角標以 v，h，

或p，以示投影所在之平面，如 a^v，a^h，a^p. 若將各點迴轉入於坐標平面之一，則以 a'，b'，或 a''，b'' 等表之.

20. **線.** 空間一線以線上二點表之，如 ab；或以一大寫字母表之，通常取英文之首數字母，如 A. 線之投影標以 a^hb^h，a^vb^v，a^pb^p，或 A^h，A^v，A^p 均可. 若將各線迴轉入於坐標平面之一，則以 $a'b'$，$a''b''$，或 A'，A'' 等表之.

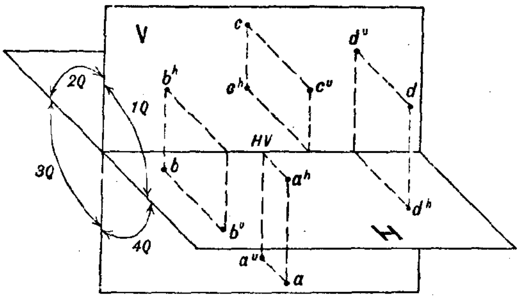


圖 35. 寫生畫

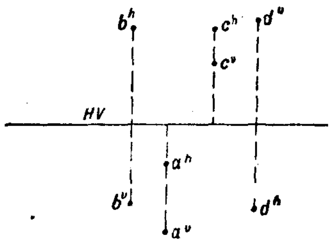


圖 36. 正投影

諸線之性質

結構線(construction line)
已知線(given line)
求得線(required line)
投影線(projection line)
物體之隱線(invisible line of an object)
中心線及輔線(center and auxiliary lines)

21. **平面.** 空間一面由不在一直線上三點所決定，或由一點及一線決定，或由平行或相交二直線決定. （第 20 頁，第 16 節第

1段). 一平面之投影普通以其跡(即此平面與諸坐標平面之交線)表之;(見第13節). 平面通常以M以下之英文字母表示. 平面M之垂直、水平或側跡標以VM, HM或PM.

任何二平面(非坐標平面),如N及S,之交線以此二平面之字母表之,如NS,然亦可用任何大寫字母.

諸坐標平面之記號如下:

V,垂直坐標平面.

H,水平坐標平面.

P,側坐標平面.

HV,爲H及V之交線.(見第4頁,第5節).

VP,爲V及P之交線.

HP,爲H及P之交線.

1Q,2Q,3Q,4Q爲第一象限,第二象限等.

22. **點之投影.** 欲定一點在V及H間之位置,需二投影. 參照圖37,38,並依據正投影定律(第7頁,第7節),可見若迴轉平面使彼此叠合,此點之二投影永遠在HV之一垂直線上. 自該點本身至H之距離等於其垂直投影至HV之距離. 自該點本身至V之距離等於其水平投影至HV之距離. 若某點恰在一坐標平面上,則此點在該面上之投影即其本身;而其另一投影在HV上. 見圖37及38內點c,d及e.

茲將圖37及38內諸點詮釋如下:

點a,於3Q內,在V後5單位距離,H下8單位距離處.

點b,於2Q內,在V後4單位距離,H上7單位距離處.

點 f，於 4Q 內，在 V 前 2 單位距離，H 下 6 單位距離處。

點 c，於 H 內，1Q 及 4Q 之間，在 V 前 4 單位處。

點 d，於 V 內，1Q 及 2Q 之間，在 H 上 8 單位處。

點 e，於 HV 上。

點 k，於 1Q 內，在 V 前 6 單位，H 上 9 單位處。

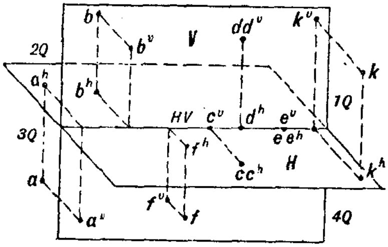


圖 37.

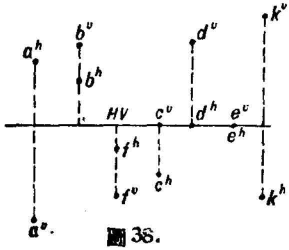
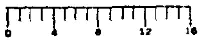


圖 38.

比例尺



23. **線之投影**. 空間一線由線上任意二點所決定，故此二點之投影決定線之投影，見圖 39 及 40. 線之投影亦可以下法求之：作數平面通過該線垂直於諸坐標平面，則此種平面與 V、H 及 P 之交線卽爲該線之垂直、水平及側投影. 此等輔平面名爲線之投射面 (plane projcetor or projecting plane of

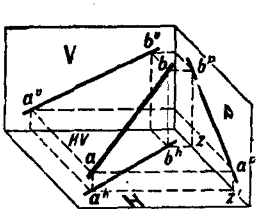


圖 39.

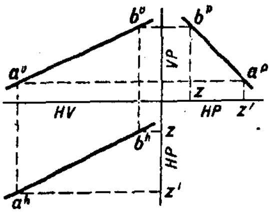


圖 40.

the line). 圖 39 中，平面 abb^va^v 爲線 ab 之垂直投射面 (vertical projecting plane); 平面 abb^ha^h 爲其水平投射面(horizontal projecting plane); 平面 abb^pa^p 爲其側投射面 (profile projecting plane).

24. **平行一坐標平面之線.** 在此平面上之投影平行於該線本身，其另一投影平行於 HV. 圖 41 及 42 內線 A 平行於 V. A^v 平行於 A 本身，A^h 平行於 HV. 線 B 平行於 H，線 C 平行於 V 及 H，線 D 平行於 P.

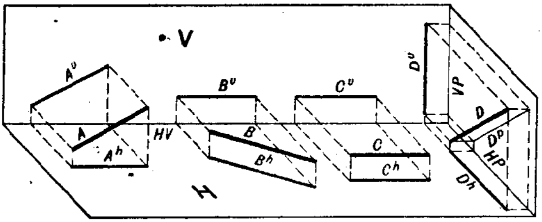


圖 41.

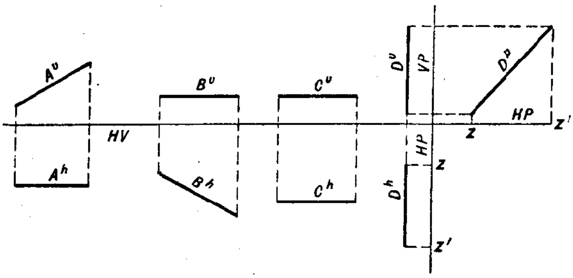


圖 42.

25. **垂直於一坐標平面之線.** 在此平面上之投影爲一點，其另一投影垂直於 HV. 圖 43 及 44 內線 E 垂直於 V. E^v 爲一點，

E^h 垂直於 HV. 線 F 垂直於 H,故 F^v 垂直於 HV,F^h 為一點. 線 K 垂直於 P,故 K^v 及 K^h 平行於 HV,K^p 為一點.

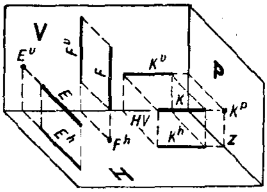


圖 43.

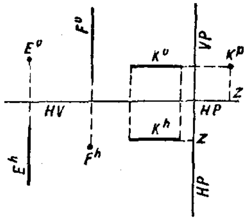


圖 44.

26. **在一坐標平面上之線.**　在此平面上之投影即為該線本身,其另一投影在 HV 上. 圖 45 及 46 內,線 A 在 H 上,線 B 在 V 上.

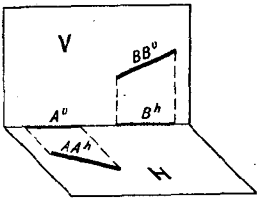


圖 45.

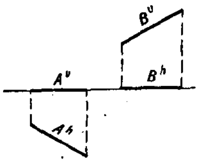


圖 46.

27. **一線平行於一坐標平面而傾斜於另一坐標平面.**　此線在前者上之投影等於其本身之長;而投影與 HV 之夾角等於此線與其所傾平面間之角. 圖 41 及 42 內,線 A 與其垂直投影等長,線 A 與 H 成 $30°$ 角.

28. **二線在空間平行,此二線之投影亦平行.** 圖 47 及 48 內,線 C 及 D 彼此平行;故 C^v 平行於 D^v,C^h 平行於 D^h.

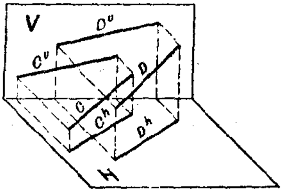


圖 47.

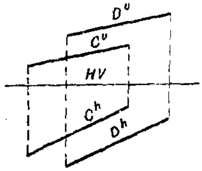


圖 48.

29. **二線在空間相交，此時一點公有；**是故該公有點之投影即爲二線投影之交點，如圖 49 及 50 中之 a^v 及 a^h. 若二線垂直投影之交點與水平投影之交點，不在 HV 之一公垂線上；則二線本身

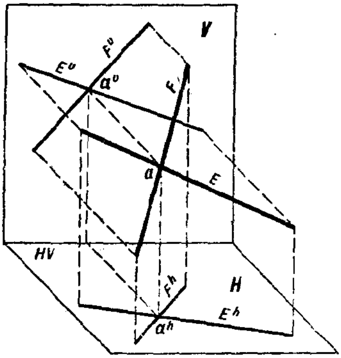


圖 49.

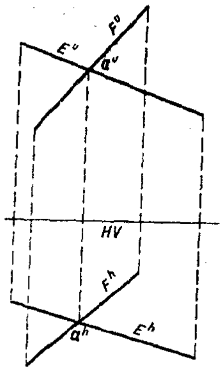


圖 50.

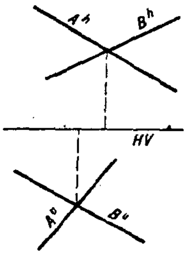


圖 51.

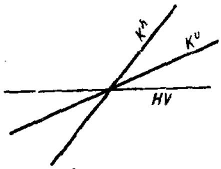


圖 52.

不相交，如圖 51 之線 A 及 B.

30. **一線交 HV.** 此線諸投影交 HV 於一點，如圖 52 所示.

31. **一線諸跡.** 此諸跡爲該線穿過諸坐標平面之諸點. 圖 53 及 54 內，a 爲線 C 之水平跡，b 爲其垂直跡. 水平跡之垂直投影在 HV 上，垂直跡之水平投影亦同. 見第 13 頁第 13 節.

32. **象限.** 爲便利起見，表示一線在坐標平面間之地位，恆註明此線所在之象限及其對各平面如何傾側. 圖 53 及 54 內，線 C 在第一象限內；若由 a 向 b 而觀，則 C 向上，向後，向右而傾. 垂直投影示其向上；水平投影示其同時向後；兩者又皆示其向右. 至

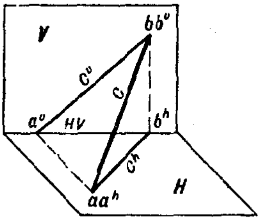


圖 53.

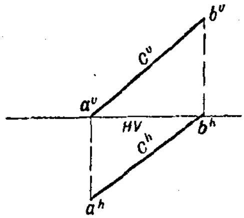


圖 54.

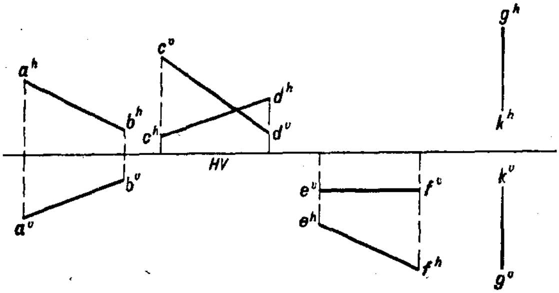


圖 55.

於斜角若干，留待後論．若由 b 向 a 而觀，則 C 向下，向前，向左而傾．兩種看法，皆無錯誤．茲詮釋圖 55 所示之四線如下：

線 ab，在 3Q 內，向上方，前方，右方傾側．

線 cd，在 2Q 內，向下方，後方，右方傾側．

線 ef，在 4Q 內，平行 H，向前方及右方傾側．

線 gk，在 3Q 內，平行 P，向上方及前方傾側．

33．**平面之投影．** 平面之投影可藉下列各法得之：

1．作相交或平行之二線之投影．

2．作一線及一點之投影．

3．作不在一直線上三點之投影．

4．作該面與坐標平面之諸交線(卽諸跡)．

平面之範圍無限，必與諸坐標平面相交．此種交線名爲平面跡．圖 56 示平面 N 交於 V 及 H，其垂直跡標以 VN，水平跡標以 HN．正投影圖示於圖 57，惟習慣上不常將二跡晝過 HV，而如圖 73 之水平跡與垂直跡各在一側．

一平面之垂直跡爲 V 上之一線，故註字時可當作一線之垂直投影．圖 56 及 57 內，VN 可標作 A^v；依據第 29 頁，第 26 節，A^h

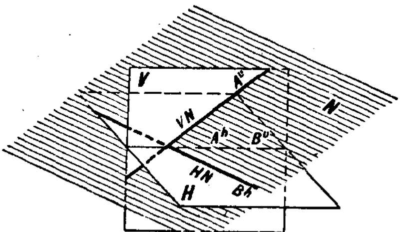


圖 56.

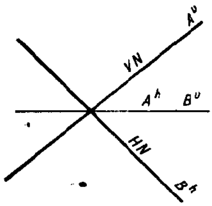


圖 57.

必與 HV 疊合. 同理, 因 HN 爲 H 上一線, 可標作 B^h, 而 B^v 必在 HV 上.

圖 58 至 73 示下列各平面之位置:

垂直於 H 平行於 V, 見圖 58 及 59.

垂直於 V 平行於 H, 見圖 60 及 61.

傾斜於 V 及 H, 平行於 HV, 見圖 62 及 63.

傾斜於 H, 垂直於 V, 見圖 64 及 65.

傾斜於 V, 垂直於 H, 見圖 66 及 67.

垂直於 V 及 H, 見圖 68 及 69.

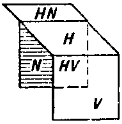


圖 58.

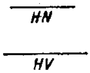


圖 59.

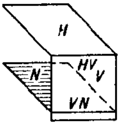


圖 60.

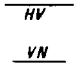


圖 61.

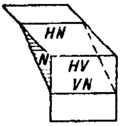


圖 62.

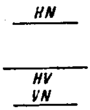


圖 63.

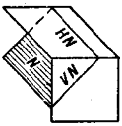


圖 64.

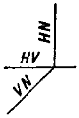


圖 65.

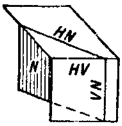


圖 66.

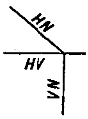


圖 67

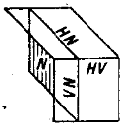


圖 68.

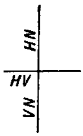


圖 69.

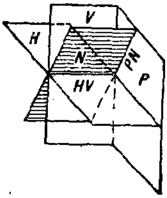


圖 70.

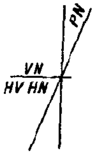


圖 71.

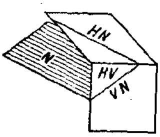


圖 72.

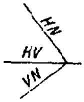


圖 73.

傾斜於 *V* 及 *H*，包含 *HV*，見圖 70 及 71.

傾斜於 *V*，*H*，及 *HV*，見圖 72 及 73.

諸平行平面之跡平行.

34. **垂直跡及水平跡之交點.** 從以上插圖可見任何平面之垂直跡及水平跡交 *HV* 於同一點.

第三章　點線及面

35. **原則方法及作圖.** 習投影幾何，於解題時，有明顯之三程序.

一，述所用之原則.

二，列舉必需步驟，由是得方法之梗概.

三，作圖.

首二程序純屬構思，最後始將第二程序中勾劃之步驟作圖.

36. **決定一線之三投影.**

〔原則〕 線上二點之投影決定此線之投影.

〔方法〕 1. 決定線上二點之垂直、水平及側投影. 2. 聯接二點之垂直投影，得此線之垂直投影；聯接二點之水平投影，得此線之水平投影；聯接二點之側投影，得此線之側投影.

〔作圖〕 圖 74 及 75. 今欲求通過點 a 及 b 一線之投影. 點 a 在 1 Q 內，離 V 6 單位距離，離 H 16 單位；點 b 在 4 Q 內，離 V 16 單位，離 H 8 單位；a 在 b 左 12 單位. 茲於 HV 之任何垂線上，作 b^v 於 HV 下 8 單位處，作 b^h 於 HV 下 16 單位處（第 26 頁，第 22 節）. 在 b^v 及 b^h 左 12 單位之另一垂線上，作 a^v 於 HV 上 16 單位處，作 a^h 於 HV 下 6 單位處. 聯接 a^v 及 b^v，得此線之垂直投影；聯接 a^h 及 b^h，得此線之水平投影.

茲假定側面 P 交 V 於 VP，交 H 於 HP，如圖 75 所示，於是

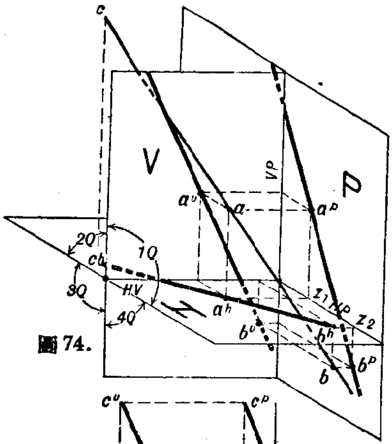


圖 74.

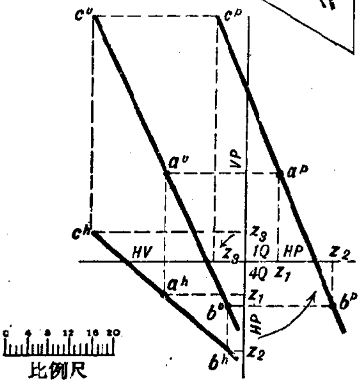


圖 75.

可求 a,b 之側投影．以 VP 爲軸，迴轉 P，使疊合於 V．由第 7 頁，第 7 節，知 a^p 在 VP 之垂線上，其與 VP 之距離等於 a^h 與 HV 之距離．故將 a^h 投影於 HP，得 z_1，迴轉之，使至於 HP 之另一地位；作 z_1a^p 垂直於 HP，與通過 a^v 之水平投影線相交，得 a^p．同理得 b^p，聯二側投影 a^p 及 b^p，卽得此線之側投影．

設已知二點中其一爲 2 Q 中之點 c，而投影 c^h 及 c^v 亦已決定；側投影可如上法求之，惟迴轉側平面時，須注意其方面，務與求其他點所轉方向相同，如圖 75 中 z_3 附近之箭頭所示者．

37．決定一線之跡．

〔原則〕　一線諸跡爲此線穿過各坐標平面之點．故每跡之各投影在此線之各相當投影上，其中有一投影在 HV 上(指垂直及水平跡而言)．(第 31 節及第 13 節)．

〔方法〕　1．求線之垂直跡：　延長此線之水平投影，與 HV

交，交點即垂直跡之水平投影．過此作 HV 之垂線，與該線之垂直投影相交處，即為垂直跡之垂直投影．2．求線之水平跡：延長此線之垂直投影，與 HV 交，交點即水平跡之垂直投影．過此再作 HV 之垂線，與該線之水平投影相交處，即為水平跡之水平投影．

款 1．一線傾斜於 V，H 及 P．

〔作圖〕　圖 76 及 77．求線 A 之垂直跡．延長 A^h，交 HV 於 e^h，即得垂直跡之水平投影．繼之，將 e^h 投影於 A^v 上得 e^v，即為垂直跡之垂直投影．

同法可求水平跡：延長 A^v，交 HV 於 d^v，即得水平跡之垂直投影．繼之，將 d^v 投影於 A^h 上得 d^h，即為水平跡之水平投影．

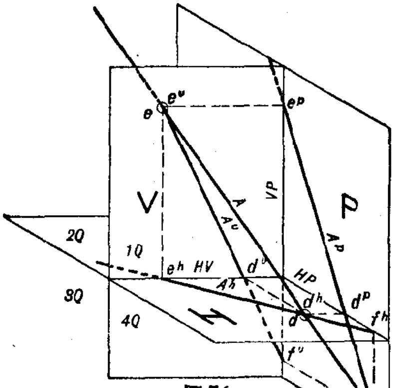


圖 76.

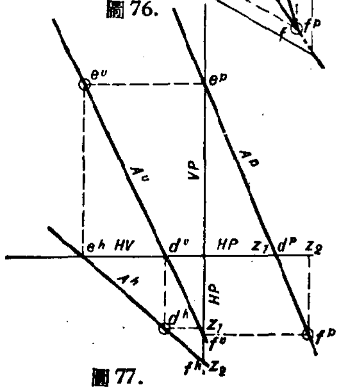


圖 77.

茲再求側跡 (profile trace)．圖 77 中，VP 及 HP 為 P 與 V，H 之交線，今假定 P 以 VP 為軸迴轉以與 V 疊合．延長 A^v 與 VP 交於 f^v，即為側跡之垂直投影．延長 A^h 與 HP 交於 f^h，即為側跡之水平投影．自 f^v 作

VP 之垂線，則點 f 之側投影必在其上．將 f^h（卽 z_2）迴轉至另一 HP 上，得 z_2，自之作 HP 之垂線，則點 f 之側投影亦在其上．兩垂線交於 f^p，卽得線 A 之側跡．圖 77 中，線之諸跡，均在點外圍以小圓，作爲記號．

此處討論之線 A 與圖 74 及 75 中者相同，均向下向右；經 e 而由 2Q 進入 1Q，再經 d 而入 4Q．

38．款 2．一線傾斜於 V 及 H，平行於 P．

〔作圖〕 圖 78 中，設 ab 爲已知線，其投影爲 $a^v b^v$ 及 $a^h b^h$．以 HP 及 VP 表 P 之跡．求得 ab 之側投影爲 $a^p b^p$（第 35 頁，第 36 節）．延長 $a^p b^p$，與 HP 交於 d^p，是爲水平跡之側投影，d^h 爲此跡之水平投影．

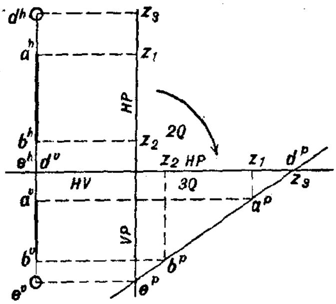


圖 78.

倣此，垂直跡之側投影爲 e^p，垂直投影爲 e^v．

該線平行於 P；故無側跡．

〔註〕 一線垂直跡之垂直投影常稱爲此線之垂直跡，因跡與其投影叠合．同理，水平跡之水平投影稱爲此線之水平跡．

於敍述此線所經象限之時，務須注意側面爲順時針迴轉者；換言之，P 在 V 後之一部分經迴轉後，將在 VP 之右，故 a 及 b 之位置在 3Q 內．若延長此線，則在水平跡 d 處進入 2Q，在垂直跡 e 處進入 4Q．

39．求一線之眞實長度及其與 V 或 H 之夾角．

〔原則〕一線若平行於一坐標面或在一坐標面內，則此線在此面上投影之長爲其眞長．（第 15 頁，第 14 節）．

〔方法〕若此線並不平行任何坐標平面，則迴轉之，使其與二坐標平面之一平行，或逕合於一坐標平面上．此時該線之一投影平行於 HV，或逕疊合於 HV 上；而另一投影之長度等於空間原線之長．

款 1．迴轉此線使平行於一坐標平面．

〔作圖〕圖 79 及 80．前圖表一普通 $30°\times60°$ 三角板，其面垂直於 H，長股 ac 平行於 V，短股 cb 平行於 H，斜邊 ab 則既不平行於 V 亦不平行於 H．

因 ac 平行於 V，a^vc^v 爲其眞長度（見原則），因短股 cb 平行於 H，c^hb^h 爲其眞長；而斜邊 ab 既不平行於 V 亦不平行於 H，故兩者上之投影均非眞長．

若以三角板之長股 ac 爲軸迴轉之，使三角板平行於 V（圖 80），則 c^hb^h 平行於 HV，而不變其長度（第 15 頁，第 14 節）．此時斜邊 ab 平行於 V，故其於 V 上之投影 a^vb^v 爲眞長．此線之 $60°$ 下傾角 (downward inclination)，卽其與 H 之夾角，亦得以眞實之大小顯示．

斜邊上任意點 d 在兩圖中 a^vb^v 上之相對地位並無所異，惟圖 80 中之 a^vd^v 爲 ad 之眞實長度．

單將斜邊 ab 取出，如圖 81 所示；迴轉之，使平行於 V 如前，由是得眞長 $a^vb_1^v$，及其與 H 之夾角 $a^vb_1^vb^v$．

將 ab 由圖 79 或 81 之地位迴轉，使平行於 H．其迴轉軸平行

於 HP，或垂直於 V．（第 15 頁，第 14 節）．a^vb^v 既已迴轉至 $a^vb_1^v$ 而平行於 HV，故線 ab 平行於 H；ab 之水平投影爲 $a^hb_1^h$，因 ab 依

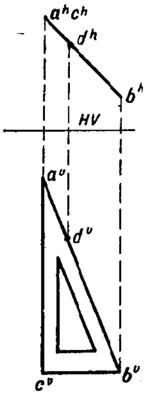


圖 79.

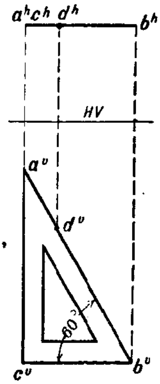


圖 80.

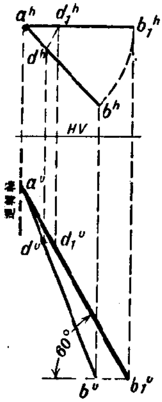


圖 81.

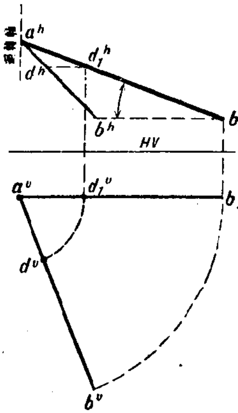


圖 82.

垂直於 V 之軸迴轉，點 b 與 V 之距離不變．$a^hb_1^h$ 爲該線之眞長，$a^hb_1^hb^h$ 爲其與 V 之眞實角(卽後傾角，backward inclination)．

40．**款 2．線之眞實長度．** 迴轉此線，入於一坐標平面．

〔作圖〕 圖 83 及 84 示一線 ab 以其水平投影 a^hb^h 爲軸迴轉入於 H．點 a 在垂直於 a^hb^h 之平面內迴轉，故其迴轉後之地位 a' 在垂直於 a^hb^h 之一線內，與 a^h 之距離爲 aa^h（卽 a^v 至 HV 之距離），見圖 84．做此得 b' 之位置．

41．**線迴轉後與跡之關係．** 圖 84 爲圖 83 之寫生畫，其中 ab 迴轉後之地位爲 $a'b'$，延長之，過一點 d，卽 ab 之延長線與其水平投影相交處．因 d 在軸上，故迴轉時並不移動．從知凡將一線迴

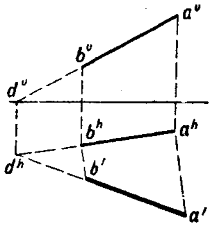


圖 83.

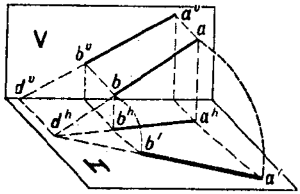


圖 84.

轉，入於一坐標平面，則迴轉後之線必過其跡.

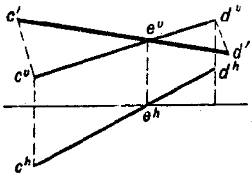


圖 85.

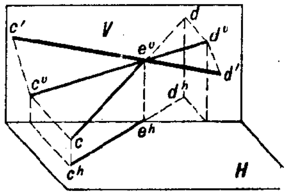


圖 86.

圖 85 及 86 示一線 cd 於點 e 穿過 V. 今將其依 c^vd^v 軸迴轉入 V，以求其眞實長度. 點 e 在軸上，點 c 及 d 各在 e 之一邊，同向而轉；故迴轉後 c' 及 d' 各在 $c^ve^vd^v$ 之一側，是迴轉後之線 $c'd'$ 必過原線之垂直跡.

下列事實，饒有興趣，請注意之：迴轉一線入一坐標平面不僅得其眞實長度，且可求得原線與此面間之眞實夾角，因此角等於迴轉後之線與軸間之角. 故於圖 85 及 86 內，角 $c'e^vc^v$ 爲線 cd 與 V 間夾角之眞實大小.

42. **線在面內必需滿足之條件.** 一平面之諸跡卽爲平面上

之線，故必與平面上其他一切之線相交；反之，平面上所有線之跡必在此平面諸跡上． 參閱第 13 頁，第 13 節． 圖 87 及 88 中，相交二線 A 及 B 之水平跡 c 及 d 在平面 T 之水平跡內，A 及 B 之垂直跡 e 及 f 在 T 之垂直跡內；故二線在平面 T 內． 同理，若欲在此平面上作其他任何直線，亦祇需將線之跡作於面之跡內便可．

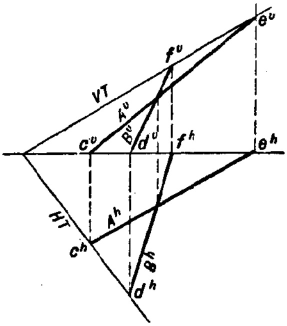


圖 87.

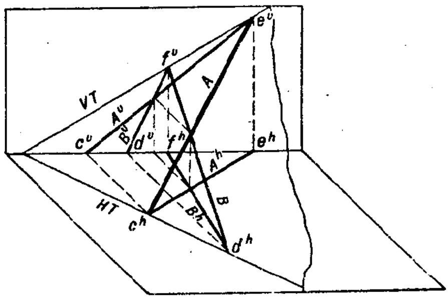


圖 88.

43．平行於一坐標平面之線． 若一平面上一線平行於 H，則此線交 H 於無窮遠． 其水平跡在無窮遠處，故其水平投影平行於此線所在平面之水平跡；而其垂直投影平行於 HV． 見圖 89 線 C． 同此，若平面上一線平行於 V，其垂直投影平行於此平面之垂直跡，其水平投影平行於 HV． 見圖 90 線 D．

44．過任何一線有無窮數平面． 過任何線之二跡可作無窮數平面之垂直跡及水平跡，而此種平面必包含該線． 圖 91 內，平面 N，R，及 T 均包含線 E．

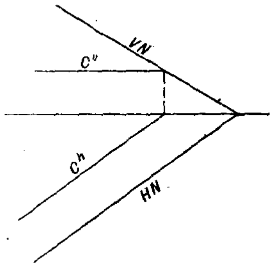


圖 89.

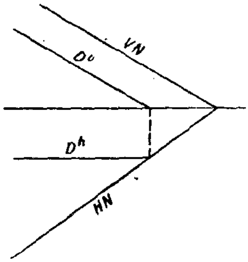


圖 90.

45. 決定相交或平行二直線所在平面之跡.

〔原則〕 平面諸跡必包含各線諸跡(第 41 頁,第 42 節).

款 1. 〔方法〕 1. 決定已知二線諸跡. 2. 聯接二線之二水平跡,以得平面之水平跡;再聯二線之二垂直跡,以得平面之垂直跡.

〔作圖〕 圖 92 中,A 及 B 爲已知二相交線. 決定其水平跡

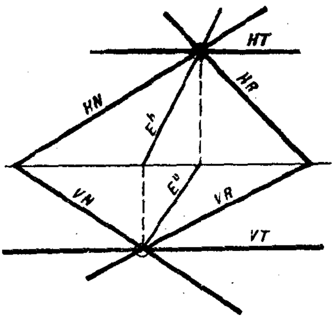


圖 91.

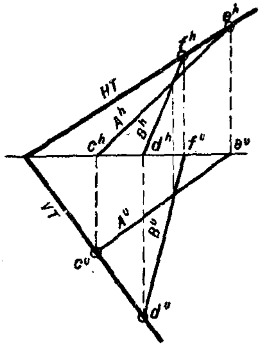


圖 92.

e^h 及 f^h，與其垂直跡 c^v 及 d^v（第36頁，第37節）．聯接水平跡，以定 HT；聯接垂直跡，定 VT．因平面二跡必交於 HV，故祇需綫之三跡．

〔核對〕平面二跡必交於 HV 同一點．

〔註〕一平面諸跡之垂直投影及水平投影逕名爲此平面之垂直跡及水平跡．惟須注意：一平面之垂直跡爲垂直面上之一線，其水平投影在 HV 內；一平面之水平跡爲水平面上之一線，其垂直投影在 HV 內．

46．**款 2．**〔方法〕若已知二線之諸跡未能逕行求出，則可假定其他諸新線與已知二線相交，新線之跡在所求平面之跡內．

〔作圖〕圖 93．已知二直線 A 及 B，其跡在本圖範圍內未能求得．設一線 C，連結線 A 上點 e 及線 B 上點 f；線 C 之跡 g 及 k 極易確定．D 爲相似之一線．聯接線 C 及 D 之水平跡，得 HT，即爲所求平面之水平跡．同此，聯接 C 及 D 之垂直跡，得 VT，即爲所求平面之垂直跡．

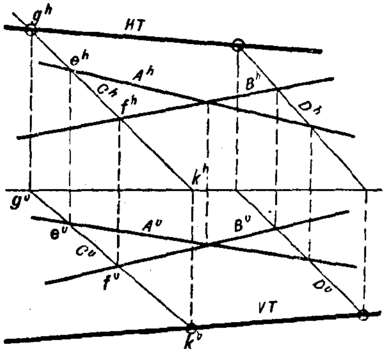


圖 93.

47．**款 3．**〔方法〕若已知線中其一或二者平行於 HV，則所求之平面平行於 HV，故此平面之二跡平行於 HV（第33頁，圖62及63）．此題可用款2之法解之，或用下法亦可：先求已知二線之側跡，得所求平面之側跡．

再求水平跡及垂直跡.

〔作圖〕 圖 94. A 及 B 爲平行於 HV 之已知二線. 假定一側面 P,以 HP 及 VP 表之. 線 A 側跡之水平投影及垂直投影爲

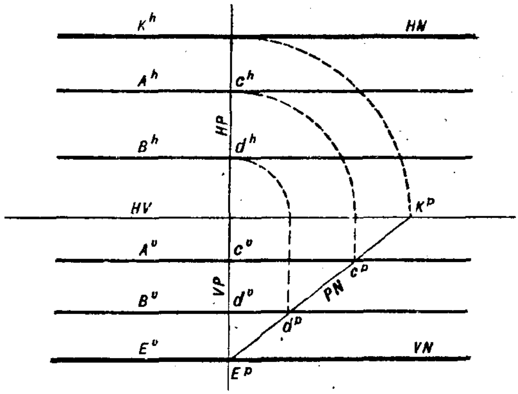


圖 94.

c^h 及 c^v,故得側跡爲 c^p. 同此,得線 B 之側跡 d^p. 過 c^p 及 d^p 作所求平面之側跡 PN. E^p 爲該平面垂直跡之側投影,K^p 爲水平跡之側投影,轉回之,得 E^v 及 K^h,卽所求平面 N 之垂直跡及水平跡 VN 及 HN.

48. 作一平面通過一線及一點.

〔方法〕 聯結此點及線上任意一點,然後依第 43 頁,第 45 節進行之.

49. 作一平面通過不在一直線上之三點.

〔方法〕 以輔線聯接三點,然後依第 43 頁,第 45 節進行.圖 95 內,a,b,c 爲已知三點,S 爲所求平面.

50. 平面上一線之一投影已知;求其他一投影.

〔原則〕 平面上線之諸跡必在此面諸跡內(第41頁,第42節).

〔方法〕 先求線之諸跡,再求此線之未知投影.

〔作圖〕 圖 96. 設 HN 及 VN 爲已知面之跡;A^h 爲平面 N 內線 A 之一投影. 延長 A^h,交 HN 於 a^h,是爲 A 之水平跡. 水平跡之垂直投影 a^v 在 HV 內. 延長 A^h,交 HV 於 b^h,是爲垂直跡之水平投影. 垂直跡 b^v 在 VN 內. 聯接 a^v 及 b^v,得所求之 A^v,卽爲線 A 之垂直投影.

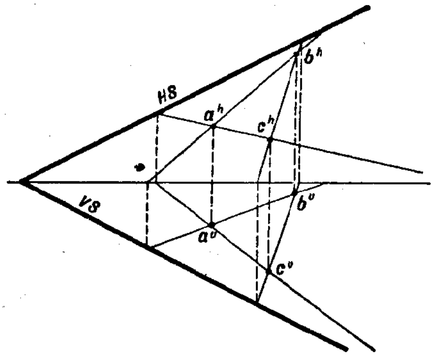


圖 95.

圖 97 表示一重要之特殊情形: 線 B 之垂直投影平行於 HV,故 B 平行於 H;以其平行於 H,故 B 之水平投影平行於 HS(卽 B 所在平面之水平跡). 故得:在傾斜平面內之一線若有一投影平行於 HV,則他一投影必平行於該傾斜平面在他一坐標平面上之跡. 其逆:若傾斜平面上一線有一投影平行於該平面之一跡,則他投影必平行於 HV.

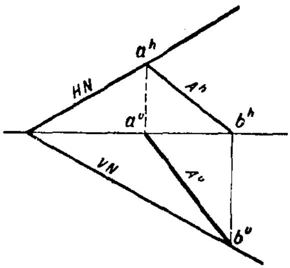


圖 96.

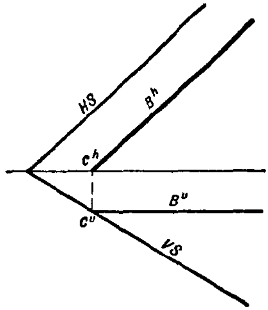


圖 97

51．平面上一點之一投影已知，求他一投影．

〔原則〕 凡通過此點並在同平面上之任意線，其投影上必有此點之未知投影．

〔方法〕 1．通過該點之已知投影，作上述線之投影． 2．决定該線之另一投影（第 46 頁，第 50 節）． 3．此點之未知投影即在該另一投影上．

〔作圖〕 圖 98．設 a^h 爲平面 N 上一點 a 之已知投影．今假定平面 N 上有一線通過點 a，作其水平投影 B^h 過 a^h． 求 B^v（第 46 頁，第 50 節）． 過 a^h 作 HV 之垂線，則其與 B^v 之交點卽爲 a^v．

通常解題用平行於 H 或 V 之輔線；如圖 99 所示． 點 a 之一投影已知，其另一投影以輔線 D 或 C 求之．

52．在一已知平面上定一點，其與二坐標平面之距離爲已知．

〔原則〕 設在已知平面上有相交二直線：一線平行於 V，與 V 之距離等於未知點與 V 之距離；他線平行於 H，與 H 之距離等於未知點與 H 之距離． 則該點必在二線交點上．

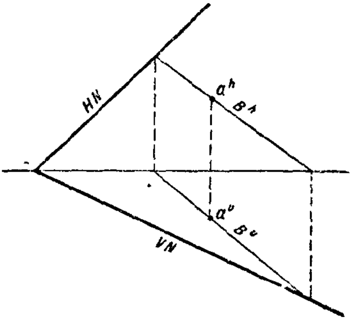


圖 98.

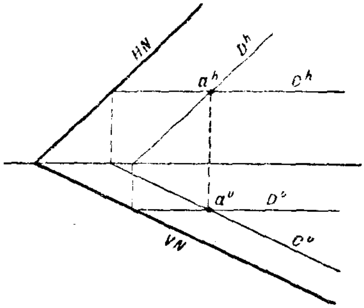


圖 99.

〔方法〕 1. 在平面上作一線平行於一坐標平面，其間距離等於未知點與該坐標平面之距離. 2. 在線上定一點，與他一坐標平面之距離等於另一已知距離.

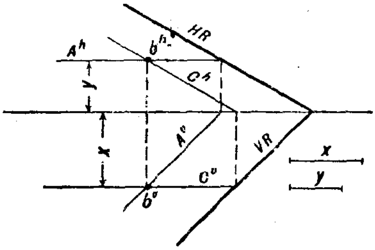


圖 100.

〔作圖〕 圖 100. 今欲在平面 R 上求一點 b，與 H 之距離爲 x，與 V 之距離爲 y. 設在 R 內有一線 A 平行於 V，與 V 之距離爲 y. 作 A^h 平行於 HV，與 HV 之距離爲 y；A^v 平行於 VR (第 46 頁，第 50 節). 在 A^v 上與 HV 相距 x 處作 b^v；投影於 A^h 得 b^h. 或在平面 R 上作線 C 平行於 H，與 H 之距離爲 x，亦可依同法求得點 b.

若該已知平面平行於 HV，則祇知該點與一坐標平面之距離已足. 解法如下：1. 在已知面上作任意線傾斜於 V 及 H. 2. 若所求點與 V 之距離爲已知，則在傾斜線上離 V 已知距離處作該

點之水平投影，而後投影於傾斜線之垂直投影上，得該點之另一投影. 若已知該點與 H 之距離，亦可依同法進行.

53. **已知一點在一平面上，若將此平面以其一跡為軸迴轉，而與一坐標平面疊合，求該點現在之位置.**

〔原則〕 該點之迴轉軸為平面之一跡，此跡所在之坐標平面即與迴轉後之平面疊合者. 將該點迴轉，軌跡為一圓弧；圓心在軸內，圓弧所在之平面垂直於軸. 該弧與坐標平面之交點即為所求之位置.

〔方法〕 1. 於軸所在之坐標平面上，作一線垂直於軸，並通過該點之投影. 2. 在此垂線上作一點，其與軸之距離等於下述直角三角形之斜邊：此直角三角形之一股等於該點投影(在軸之坐標平面上者)至軸之距離，另一股等於該點他一投影至 HV 之距離.

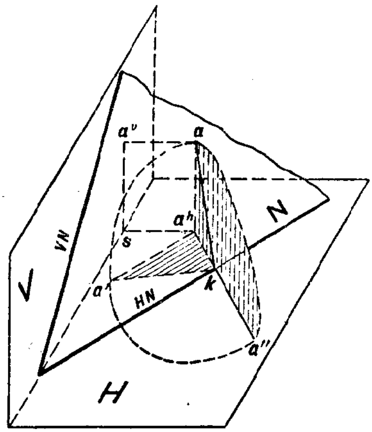


圖 101.

〔作圖〕 圖 101 為一寫生. 平面 N 上有一點 a；其在 V 上之投影為 a^v，在 H 上者為 a^h. 若平面 N 以 HN 為軸迴轉入 H，點 a 將在一垂直於 HN 之平面內移動，而止於垂直於 HN 之線 a^hka'' 上. 惟欲知其究在 a^hka'' 上何處，則必先求點 a 離 HN 之真實距離 ak. 在直角三角形 aa^hk 中，斜邊為 ak，一股 a^hk 為斜

邊之水平投影，他股 aa^h（即 a^vs）爲 a 至 H 之距離．從 k 量斜邊之長至 a''，即得原點迴轉後之位置．

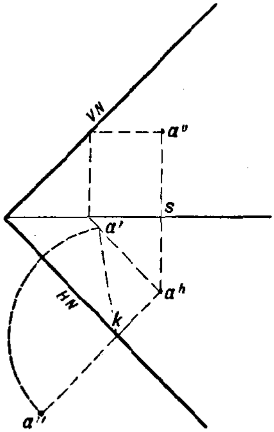


圖 102.

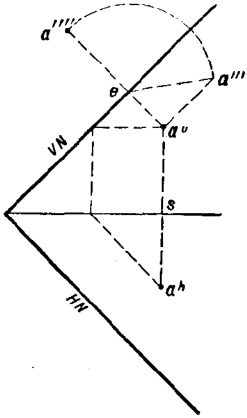


圖 103.

圖 102 爲正投影，示作三角形之便利方法，以求斜邊 ak 之眞實長度．

若以 VN 爲軸迴轉該點使入於 V，如圖 103 所示者，則該點之新位置 a'''' 在垂直於 VN 之線 a^vea'''' 上．直角三角形 ea^va''' 中，一股 a^va''' 等於 a^hs．從 e 量斜邊 ea''' 之長至 a''''．

54．**求平面上一線迴轉後之位置．** 此時可先求線上二點迴轉後之位置．若此線平行於平面作軸之一跡，則其迴轉後之位置亦平行於此跡．

若某線有一跡在軸內，則迴轉時此跡不動；故祇需決定另一點迴轉後之位置．

圖 104 示平面 R 上之二線 C 及 D 以 VR 爲軸迴轉入 V. 點 a 迴轉後之位置在 a'，過此作線平行於 VR，得 C'（因線 C 平行於 VR）. e^v 爲線 D 之垂直跡，過 e^v 及 a' 作 D'.

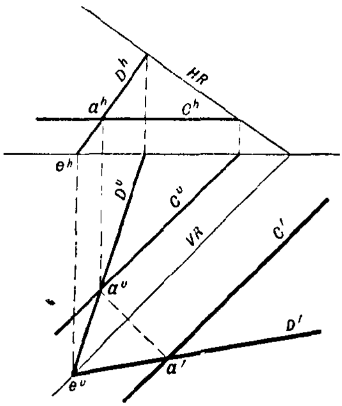


圖 104.

55. 決定二相交直線間之角.

〔原則〕 將二線所在之平面迴轉，以與一坐標平面叠合，即可量得該角.

〔方法〕 1. 作一平面通過二相交直線，並決定此平面之二跡（第 45 節）. 2. 將此面以一跡爲軸迴轉，以與一坐標平面叠合（第 53 節）. 決定平面上一線迴轉後之位置，僅需先定線上一點迴轉後之位置；現兩線相交，自以先定其公共點即交點（二線夾角之頂點）爲宜； 3. 二線廻轉後所夾之角即爲所求之角.

〔作圖〕 圖 104 內，設 C 及 D 爲已知二線，將其迴轉入 V，以第 54 節之法求得其新位置爲 C' 及 D'. 所求之角即線 C' 及 D' 間之角.

56. 求作一平面上任何多邊形之投影，其形狀、大小、及在該平面上之位置均屬確定者.

〔原則〕 將該平面以其一跡爲軸迴轉，以與一坐標平面叠合，由是可定多邊形之眞實形狀、大小、及其在平面上之位置.

〔方法〕 1. 將已知平面，以一跡爲軸，轉入一坐標平面. 2. 依多邊形之眞實形狀、大小、及在平面上之正確位置，作其迴轉後之圖形. 3. 將此作有多邊形之平面轉囘 (counter-revolve) 原位置，於是得多邊形之二投影.

〔作圖〕 圖 105. 今欲求傾斜平面 N 上正五邊形之投影. 此多邊形中心離 H 之遠爲 x，離 V 爲 y，一邊平行於 V. 每邊長度爲 z.

先定中心之二投影於 o^v 及 o^h (第 47 頁，第 52 節). 將平面 N 以一跡爲軸迴轉，以與一坐標平面疊合 (此題中以 VN 爲軸，使 N 疊合於 V)，得中心迴轉後之地位 o' (第 49 頁，第 53 節). 以 o' 爲中心，依眞實形狀及大小，作一五邊形，一邊平行於 VN，每邊之長爲 z. 轉囘此平面，照下列任何方法，作五邊形之二投影.

57. 反轉(Counter-revolution). 其法不一，茲述其三如下.

作圖法 1. 圖 105 中，通過 o'，作任意線 L'，交 VN 於 n^v；聯接 n^v 及 o^v，得 L^v. 通過任意頂點，如 d'，作 K' 平行於 L'，交 VN 於 m^v；從 m^v 作 K^v 平行於 L^v. 從 d' 作投影線垂直於 VN，交 K^v 於 d^v：即爲五邊形一頂點之垂直投影. 同此，通過其他頂點，作平行於 L 之線，求得其他頂點之垂直投影.

58. 作圖法 2. 圖 106. 五邊形迴轉後之圖形照第 56 節之法求得. 從任一頂點，如 c'，作一線通過 o'，延長之，交迴轉軸 VN 於 m^v. 轉囘後，m^vo' 之垂直投影爲 m^vo^v. 從 c' 作 VN 之垂線，與 m^vo^v 之交點，即爲 c^v. 引長 $c'b'$，交 VN 於 s^v；作 s^vc^v，即爲 s^vc' 轉囘後之位置. 從 b' 作 VN 之垂線，與 s^vc^v 相交處，即爲頂點 b^v. 同樣可求 e^v，d^v，及 a^v. 五邊形之水平投影用第 46 頁，第 50

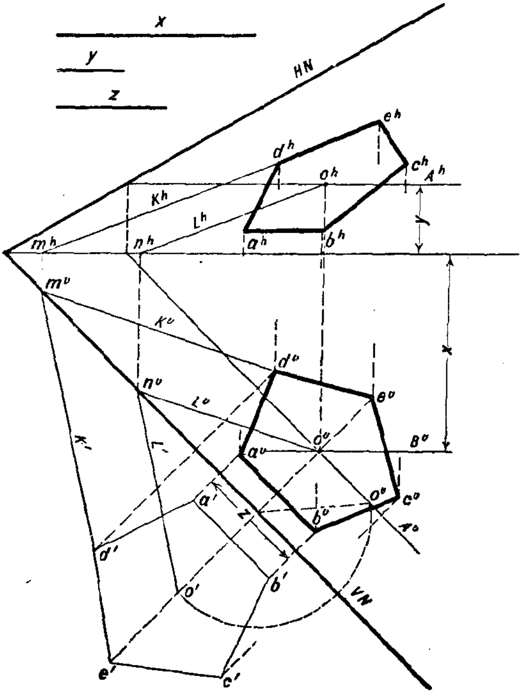


圖 105.

節之法求得。

59. **作圖法 3.** 圖 107. 五邊形迴轉後之圖形照第 56 節之法求得。同時將水平跡 HN 亦以 VN 爲軸迴轉之，其迴轉後之位置爲 HN'.（HN' 之作法係先假定 HN 上有一點 g，而後照第 49 頁，第 53 節進行者）。HN' 及 VN 間之角眞實表示平面 N 二跡間角度；HN' 及 VN 間之面積眞實表示平面 N 此一部分之大小。

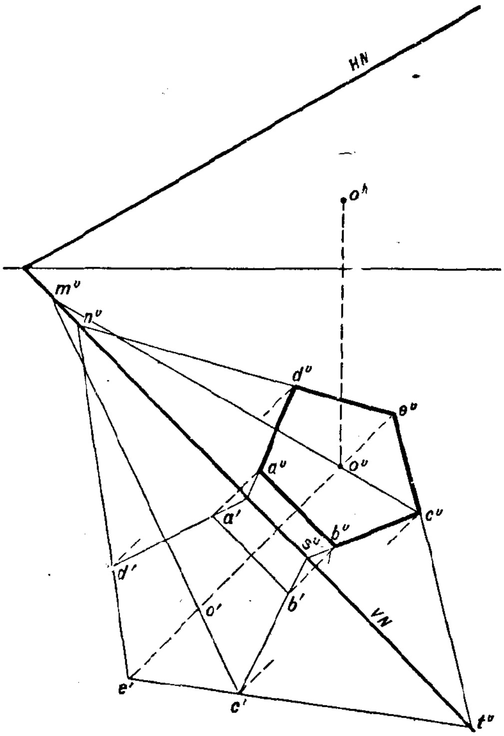


圖 106.

引伸五邊形任意一邊，如 $e'c'$，交跡 VN 於 t^v，交 HN' 於 k'. t^v 於迴轉時固定不動；k' 迴轉後得 k^v 及 k^h. 線 ec 包含於 kt 內，可由 e' 及 c' 投影得之. 同樣得其他各頂點，惟請特別注意 d.

60. 半徑已知之一圓切於二已知直線，求圓之二投影.

〔作圖〕 圖 108. 設 A 及 B 爲已知二直線，x 爲圓之半徑. 先求二線所定平面之二跡，HS 及 VS. 將 A，B 依 HS 軸迴轉而至 A' 及 B'，其間夾角眞實表示 A，B 間角度. 作一半徑爲 x 之圓，切於 A' 及 B'，於是得圓心 o'.

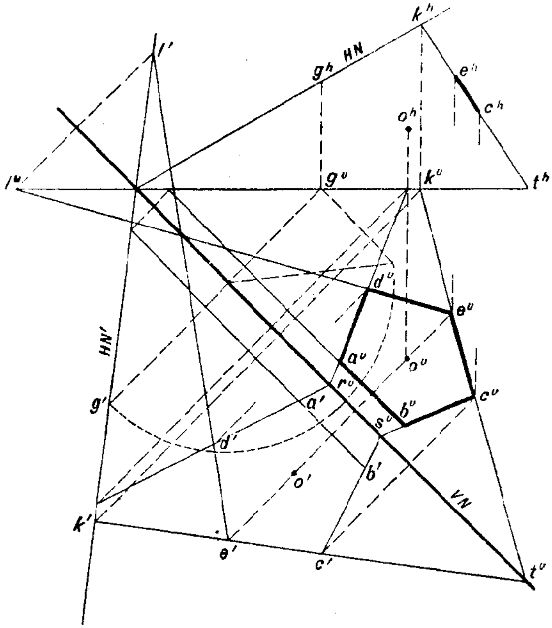


圖 107.

將圓視爲一邊數甚多之多邊形，照前述諸法轉回之，或用下法亦可.

傾斜於投影面之一圓，投影於該面上成一橢圓；其長軸(major axis) 平行於投影面，長度等於圓之眞直徑. 將圓心轉回至 o^h 及

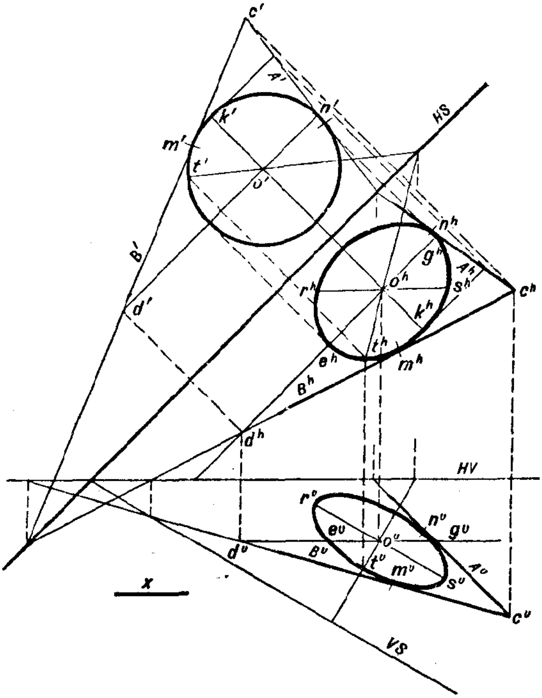


圖 108.

o^v. 在圓之平面上，通過 o 作 od 平行於 H；其水平投影 o^hd^h 平行於 HS，垂直投影 o^vd^v 平行於 HV. 於 o^hd^h 上作 e^h 及 g^h，使 o^he^h 及 o^hg^h 均等於圓之半徑；e^hg^h 即爲橢圓長軸. 短軸(minor axis)始終垂直於長軸，故作 o^hk^h 垂直於 $e^ho^hg^h$. 至於 k^h 之位置則由 k 轉回得之，如此得短軸之半，o^hk^h. 既定長短二軸，即可利用任何幾何方法（第 189 頁，第 232 節）作橢圓. 請注意圓與 A，B 之切

點 m 及 n.

圓之垂直投影,亦爲橢圓. 求長軸時,可過 o 作 rs 平行於 V,其垂直投影 $r^v s^v$ 平行於 VS,使 $r^v s^v$ 等於已知圓之直徑. 同前,短軸垂直於長軸. 欲求短軸之端 t^v,先定 ot 迴轉後之位置 $o't'$; 將 t' 轉回,求其二投影 t^h 及 t^v. 此橢圓亦可以幾何方法作成,並以切點 m 及 n 核對之. $e^h g^h$ 雖爲一橢圓之長軸,然 $e^v g^v$ 則非另一橢圓之長軸或短軸;反之亦然. 此點宜予注意.

61. 求作二平面交線之投影.

〔原則〕 二平面之交線爲二者所共有,故交線之二跡必在每平面之二跡上. 由是,二平面垂直跡之交點爲所求線之垂直跡,二平面水平跡之交點爲所求線之水平跡.

作圖時可遇到下列三種情形:

款1. 不需輔平面者.

款2. 需一平行於 V 或 H 之輔平面者.

款3. 需一平行於 P 之輔平面者.

62. **款**1. 二平面之相當跡在圖紙範圍內相交,解題不需輔平面.

〔方法〕 1. 先求二平面相當跡之交點. 此二交點卽平面交線之跡. 2. 作交線之投影.

〔作圖〕 圖 109 及 110 示此理甚明,毋需解釋;圖內線 cb (卽 NS) 爲已知平面 N 及 S 之交線.

圖 111 及 112 中一平面平行於一坐標平面,示款1之特例. 平面 R 垂直於 V, 平面 N 傾斜於 V 及 H 二者. 因 R 垂直於 V,

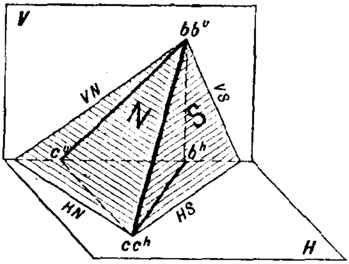


圖 109.

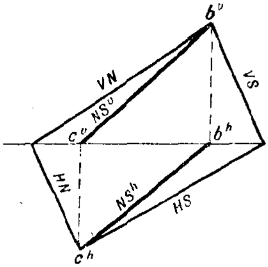


圖 110.

N 及 R 交線之垂直投影，e^vf^v，即爲 R 之垂直跡。又因 e^v 爲線 ef 之垂直跡，此線之水平投影即爲平行於 HN 之 e^hf^h（第 42 頁，第 43 節）。

63. **款 2.** 二已知平面之一對或二對相當跡不在圖紙範圍內相交（然並不平行），或所有跡相交於 HV 上一點；解題時需用平行於 V 或 H 之輔切割平面(auxiliary cutting plane).

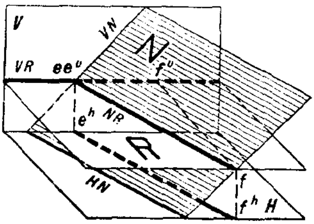


圖 111.

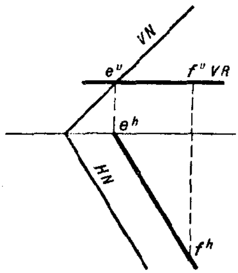


圖 112.

〔方法〕 1. 作一輔切割平面平行於 V 或 H，求其與二已知平面之二交線。交線之交點爲二已知平面所共有，故必爲所求線

上一點． 2．作另一輔切割平面平行於 V 或 H，再得所求線上一點． 於是得該所求交線．

〔作圖〕 圖 113 示二平面 T 及 M，其水平跡相交，惟垂直跡交於圖外．

由款 1，知點 d 爲二平面交線上一點． 作輔平面 X 平行於 V，HX 平行於 HV． X 與 M 交線之水平投影 C^h 在 HX 內；垂直投影 C^v 平行於 VM（款 1）． 同此，X 與 T 交線之水平投影 B^h 在 HX 內；垂直投影 B^v 平行於 VT． 二線 B 及 C 之交點 a 卽爲 M 與 T 交線上一點；因點 a 在平面 M 之線 C 內，又在平面 T 之線 B 內也． 故線 ad 爲二已知平面之交線．

若已知平面之一對垂直跡及一對水平跡均不在圖內相交，則需用二個輔切割平面． 此二輔平面，或俱平行於 V，或俱平行於 H，或一平行於 V，另一平行於 H．

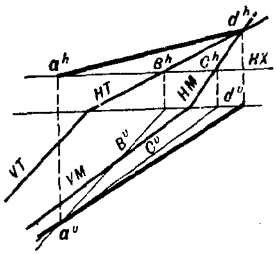


圖 113.

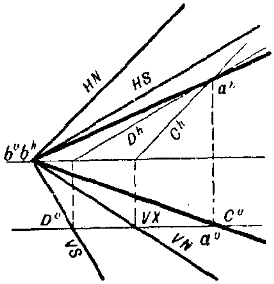


圖 114.

64．**已知二平面有一對相同跡平行．** 若已知二平面有一對相同跡平行，則平面之交線平行於一坐標平面． 此交線之一投影平

行於 HV，另一投影平行於已知平面之一對平行跡.

65. **所有跡交於一點.** 圖 114 示二平面之四跡交 HV 於一點，此二平面並不包含 HV. 四跡交點 b 卽爲所求交線內之一點(款 1). 以下法求另一點 a: 作一輔切割平面 X 平行於 H，交平面 N 於線 C，交平面 S 於線 D. C 與 D 之交點 a，卽爲所求交線上另一點(款 2). 故 ab 爲所求之交線.

66. **款 3.** 相交二平面均平行於 HV。 或其中有一平面包含 HV.

〔方法〕 1. 作一輔切割平面平行於 P. 2. 求其與已知二平面之交線. 3. 該二交線之交點爲所求交線上一點. 旣知一點，毋需再求第二點，因已知平面均平行於 HV，其交線亦平行於 HV 也.

〔作圖〕 圖 115 內二平面 N 及 S 均平行於 HV. 作輔側面 P，交平面 N 於一線，此線之側投影爲 PN；P 與平面 S 交線之側投影爲 PS. 二線交點 A^p 爲平面 N 與 S 交線之側投影；由此得他二投影 A^v 及 A^h.

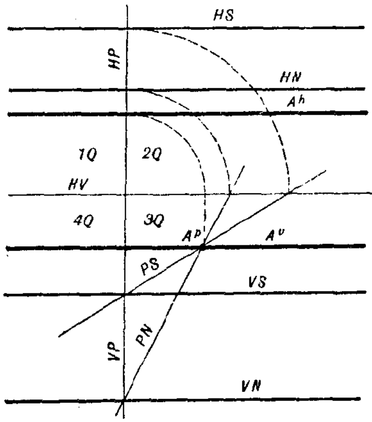


圖 115.

若一平面包含 HV，他一平面傾斜於 V 及 H，則交線之一點爲所有跡之交點，另一點以上法求之.

67. 一平面包含 HV. 圖116內，平面 N 傾斜於 V，H 及 P；平面 S 包含 HV，通過 $1Q$ 及 $3Q$，與 V 成 θ 角。作一輔側面，用上節方法求得平面 N 之側跡 PN。次作 S 之側跡 PS，通過 $1Q$ 及 $3Q$，與 VP 成 θ 角。PN 與 PS 之交點 d^p 卽為 N 與 S 交線上一點之側投影；d^v 及 d^h 為該點之他二投影。因 VN 與 VS 相交於 b，又因 HN 與 HS 亦相交於此；故 N 與 S 交線之垂直跡及水平跡均在 b。今該線上二點之投影均已求得，卽可進而作此線之投影 A^v 及 A^h。

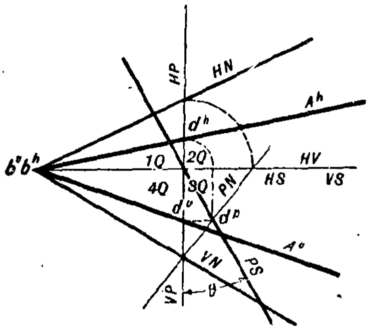


圖 116.

款3可適用於一切此類之問題。圖117示用此法求圖114中平面 N 與 S 之交線 ab。

68. 一線穿過一平面，試定其穿過點(Point of Piercing).

〔方法〕 1. 作一通過該線之輔平面，與已知面相交。2. 求已知面與輔平面之交線。3. 此交線與已知線之交點卽所求者。

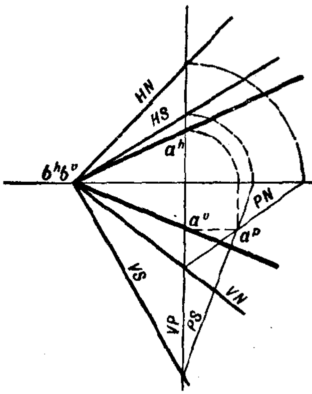


圖 117.

作圖時有四種情形：

款1. 用任何包含此線之輔平面。

款 2. 用此線之水平投射面或垂直投射面(第 27 頁,第 23 節)作輔平面.

款 3. 已知線平行於 P,故用一包含此線之輔側面.

款 4. 已知平面乃由非其跡之二線所決定者.

69. 款 1. 用任何包含此線之輔平面.

〔作圖〕 圖 118. 設 A 爲已知線,N 爲已知平面. 過線 A 作任何輔平面 Z 交 N 於線 C(第 57 頁,第 61 節). A 及 C 均在平面 Z 內,故 d 爲二線交點;然 C 又爲平面 N 之一線,故 d 爲線 A 及平面 N 所公有,即爲所求之交點.

70. 款 2. 用此線之水平投射面或垂直投射面作輔平面.

〔作圖〕 圖 119 之線 A 及平面 N 與上圖同. 作線 A 之垂直投射面 X,交平面 N 於線 C(第 57 頁,第 61 節). A 及 C 相交於點 d,即求得線 A 在平面 N 上之穿過點.

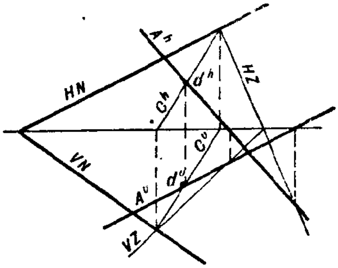


圖 118.

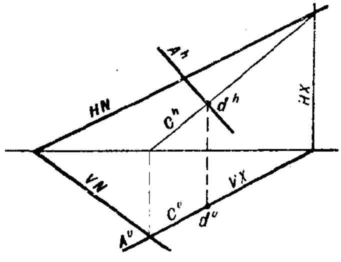


圖 119.

圖 120 示用線 A 之水平投射面 Y,以解此題.

71. 款 3. 已知線平行於 P,故用一包含此線之輔側面.

〔作圖〕 圖 121. 設 N 爲已知平面,平行於 P 之線 ab 爲已

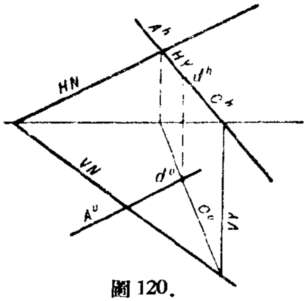


圖 120.

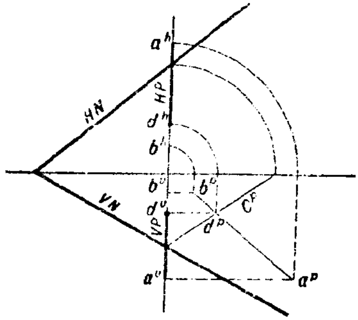


圖 121.

知線。作一輔側面 P 通過 ab，交平面 N 於線 C，其側投影爲 C^p（第 60 頁，第 66 節）。再作已知線之側投影 a^pb^p　C^p 與 a^pb^p 交於 d^p，是卽線 ab 在平面 N 上穿過點之側投影。此點之他二投影爲 d^v 及 d^h。

72. **款** 4. 已知平面乃由非其跡之二線所決定者.

〔作圖〕 圖 122 及 123. 設已知平面上二線 B 及 D，及穿過平面之一線 A，求穿過點. 解此題時勿用任何平面之跡. 作線 A 之水平投射面，交線 B 於點 e，交線 D 於點 f；卽交 B 及 D 之平面於線 ef. 因線 A 之水平投射面垂直於 H，投射面內所有線之水平投影均疊合；故 e^hf^h 爲輔平面與 B，D 所在平面交線之水平投影. 作 e 及 f 之垂直投影，並連結之，得線 ef 之垂直投影 e^vf^v.　e^vf^v 與 A^v 之交點 d^v，卽線 A 與 B，D 所在平面交點之垂直投影.

若用線 A 之垂直投射面，所得結果亦同.

73. **穿過平面之線之可見部分** (Visibility). 圖 124 示一線穿過一平面，平面之跡未知. 用第 72 節之法，求得穿過點 d. 若

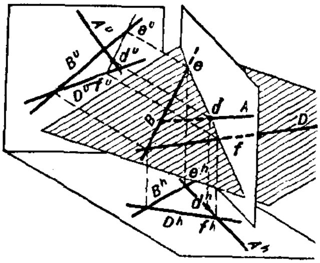


圖 122.

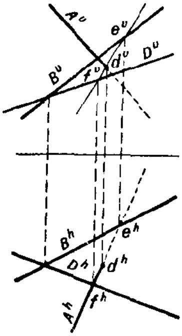


圖 123.

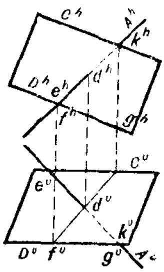


圖 124.

此平面（或矩形厚紙片）並不透明，試求二視圖內線 A 之不可見部分.

今試考慮其水平投影. 在線 A 上擇一點 e，又在平面之稜 D 上擇點 f，使 e 及 f 在水平坐標平面之同一垂線上. 故 e^h 及 f^h 疊合. 惟 e^v 及 f^v 不必疊合，今 e^v 在 f^v 上，表示線 A 之點 e 在平面稜 D 上方，故可見於水平投影中，直至 d^h，始沒於平面之後.

今考慮其垂直投影，情形亦相倣. 今線 D 上點 g 及線 A 上點 k，二者之垂直投影疊合，而 k^h 則在 g^h 之後. 故知 kd 在平面後：$k^v d^v$ 不可見.

74. 一直線垂直於一平面，則該線諸投影垂直於平面諸跡.

證之如下：圖 125 及 126 內，線 A 垂直於一平面，平面之跡爲 HN 及 VN. 線 A 之水平投射面垂直於 H（定義）；該面亦垂直於

N，因其包含之線 A 垂直於 N（第 20 頁，定理 3）．該面既垂直於 H 及 N，必垂直於二面之交線 HN（第21頁，定理 9）．故 HN 垂直於 A^h（第 20 頁，定理 2）．

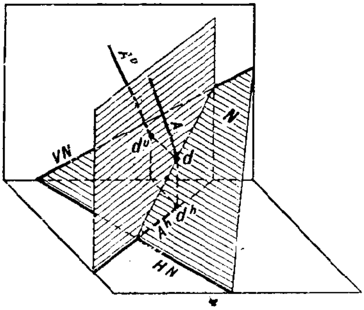


圖 125．

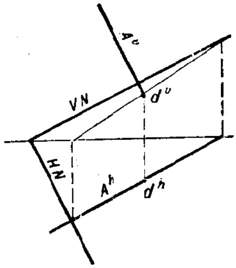


圖 126．

同理可證 VN 垂直於 A^v． 此定理之逆亦眞．

75．於一斜平面 (Oblique Plane) 上作一點之投影．

〔原則〕 一點在任何平面上之投影，爲從該點至平面所畫垂線之足．

〔方法〕 1．從已知點作已知平面之垂線（第64頁，第74節）．2．求垂線在平面上之穿過點（第 61 頁，第 68 節）．該點即已知點在斜平面上之投影．

76．於一斜平面上作一線之投影．

〔方法〕 若此線爲直線，作其上二點之投影（第 75 節）．若此線爲曲線，作其上多點之投影，點之多少以足能藉之拘繪曲線爲度．

77．通過斜平面上一已知點，求作一垂線，其長度等於定長．

〔方法〕 1. 在此平面之已知點上，作一垂線（第 64 頁，第 74 節）. 2. 在此線上假定任意一點，並求此點與已知點間線段之眞實長度（第 38 頁，第 39 節）. 3. 在此眞實長度上，從已知點量所需之長. 4. 將此量得之點轉囘.

〔作圖〕 圖 127. 設 d 爲平面 N 上之已知點. 作 de 垂直於平面 N（第 64 頁，第 74 節）. 任此線上假定一點 e. 迴轉 de，使平行於 V，求得眞實長度 $d^v e'$. 在 $d^v e'$ 上量 $d^v f'$ 等於所需之長. 轉囘 f' 至 f^v 及 f^h，得 $d^v f^v$ 及 $d^h f^h$，即爲所求垂線之投影.

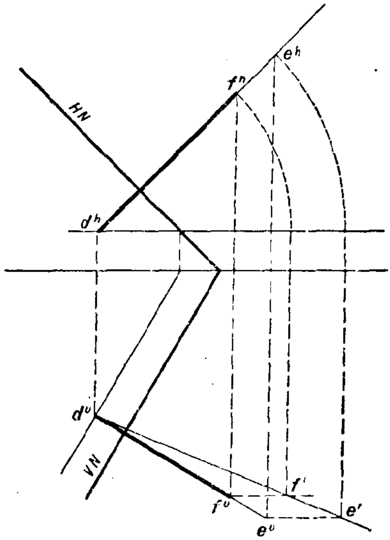


圖 127.

78. 求一點至一平面之最短距離.

〔原則〕 一點至一平面之最短距爲此點至平面間垂線之長度.

〔方法〕 1. 從已知點作一垂線至已知平面（第 64 頁，第 74 節）. 2. 求此垂線在平面上之穿過點（第 61 頁，第 68 節）. 3. 求此垂線之眞實長度（第 38 頁，第 39 節）.

79. **陰及影**(Shade and Shadow). 作物體之寫生畫，若加上該物投下之影，往往使圖畫愈益生動，易於瞭解. 若物體爲建

築性質者，此理尤顯.

一物體受光線照射，其背光部分爲光線所不及，名曰陰．見圖 128．置一面於物體背光面之後，則面上所受之光爲物體遮去一部，此一部分面名曰影．無光之空間名曰影區(umbra)，或隱影(invisible shadow)．

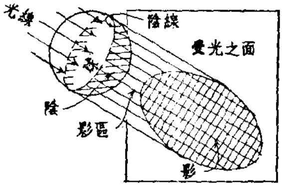


圖 128.

(a)空間一點之影區當然爲一線.

(b)一線之影區通常爲一平面.

(c)一平面之影區通常爲一立體.

(d)一物體在他物體上之影爲前者之影區與後者之面相交處．由圖 128 觀之，其理甚明.

物體向光部與陰暗部之分隔線名爲陰線 (shade line)．由圖 128，可知陰線爲陰之界線；又知物體之影爲物體陰線之影所包圍之空間.

設光源 (source of light) 在無窮遠處，則諸光線爲互相平行之直線．通常假定光線之方向爲一立方體之一對角線，其傾斜度爲向下，向後，向右．此立方體各面與 V, H, 及 P 平行或垂直(見圖 129)．光線與坐標平面成 $35°15'52''$ 之角，惟觀察圖 129 及 130，可見光線之投影爲正方形之對角線，故與 HV 成 $45°$

因物體恆以其投影表示之，光線亦以其投影表示.

欲求物體在 V 及 H 上之影，此物非置於第一象限不可.

80．求作一點在一已知面上之影． 通過此點作該點之影區

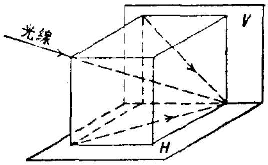


圖 129.

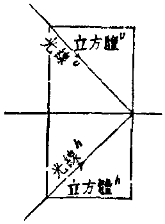


圖 130.

(或如通常所謂：通過此點作一光線)，求影區(或光線)與已知面之交點。若已知面爲一坐標平面，用第 36 頁，第 37 節之法求交點；若已知面爲斜平面，用第 61 頁，第 68 節之法求之。

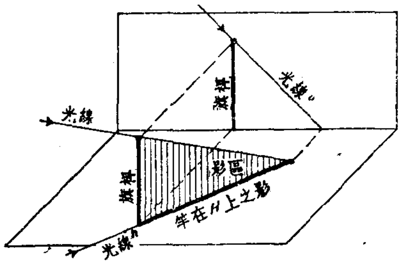


圖 131.

81. 求作一線在一已知面上之影. 卽求作線之影區與已知面之交線（或交點）。若線爲直線，求其兩端之影並連結之。若線爲曲線，則必須求其上數點之影方可。

圖 131 以寫生法示一旗桿，光線通過桿頂之球。光線之水平跡爲球在 H 上之影；旗桿之影區與 H 相交處卽爲旗桿在 H 上之影。

圖 132 及 133 中，bcd 爲一 $30° \times 60°$ 之三角板，其短邊 cd 置於 H 上。作一光線通過 b，並求光線之水平跡，得 b 在 H 上之影 b^{sh}。因點 c 在 H 內，c 卽其本身在 H 上之影。由是得 bc 在 H 上之影 $c^h b^{sh}$。因 cd 在 H 內，cd 卽其本身在 H 上之影。由是得

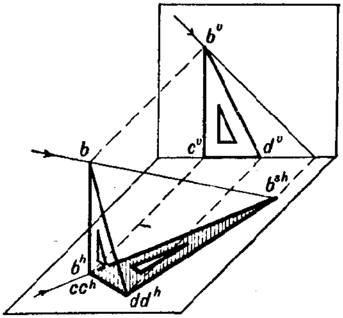


圖 132.

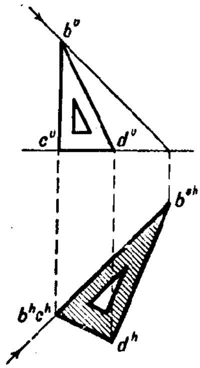


圖 133.

三角形在 H 上之影 $c^h d^h b^{sh}$. 欲求三角板洞之影，可求其三頂點之影，其法與求 b^{sh} 同.

82. **一線在二面上之影.** 圖 134 為一寫生，與圖 131 頗相似. 但旗桿離 V 甚近，故桿之影區與 V 相交，桿影之一部分投於 V 上，而桿頂小球之影為通過此球之光線之垂直跡. 因旗桿平行於 V，桿在 V 上之影平行於桿之垂直投影，是可從圖上察得者.

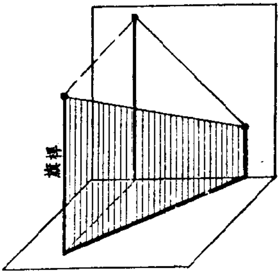


圖 134.

83. **求作一立體在一已知面上之影.** 即為求立體陰線之影. 若不易察出物體上何線為陰線，則宜將物體每線之影求出. 諸影之輪廓即所求者.

有在第一象限之六角柱，其軸垂直於 H. 圖 135 示六角柱在

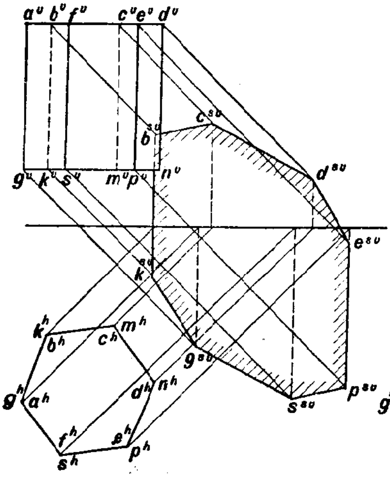


圖 135.

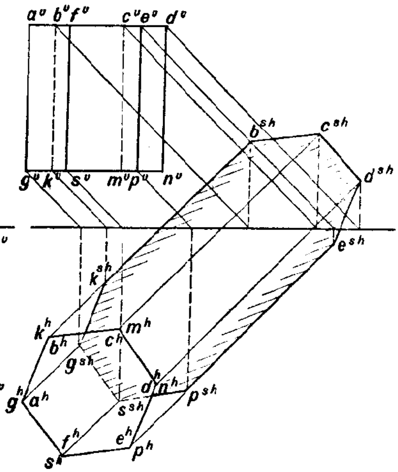


圖 136.

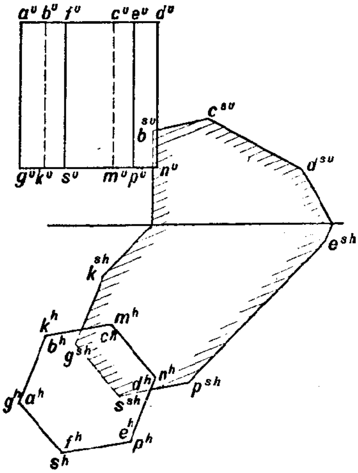


圖 137.

V 上之影,宛若無 H 之存在者. 圖 136 示其在 H 上之影,宛若無 V 之存在者. 圖 137 示其影一部分在 V 上,一部分在 H 上,此爲 V 及 H 同時存在時之影.

若一物體在 V 及 H 上均有影,最好先求其在兩平面上之全影,而後保留線 HV 上之垂直影及 HV 下之水平影. 圖 137 卽其一例,蓋爲

圖 135 及 136 結合而成者也.

圖 138 示一垂直牆上之托架吊一三角燈. 求得其每線之影

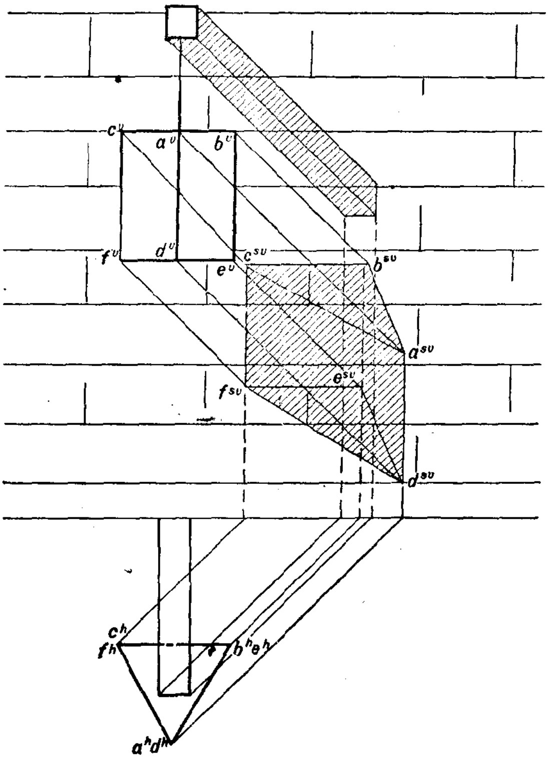


圖 138.

後,將全影塗黑. 於是可知燈之陰線之影爲 $a^{sv}\,b^{sv}$, $b^{sv}\,c^{sv}$, $c^{sv}\,f^{sv}$, $f^{sv}\,d^{sv}$ 及 $d^{sv}a^{sv}$, 而 e^{sv} 實不必費心求出.

從此前數圖,察得下列事實:

若一點在一平面上，此點在平面上之影即其本身.

若一線平行於一平面，其在平面上之影，平行於空間原線，兩者之長相等.

若二線平行，其影亦平行.

若一線垂直於一坐標平面，則其在該平面上之影在通過此線之光線諸投影上.

若一物體之影全部在 V 上，如圖 139 中之托架及燈，則利用側投影求影尤稱便利. 圖中僅示數點之求影法. 燈頂突出於下端

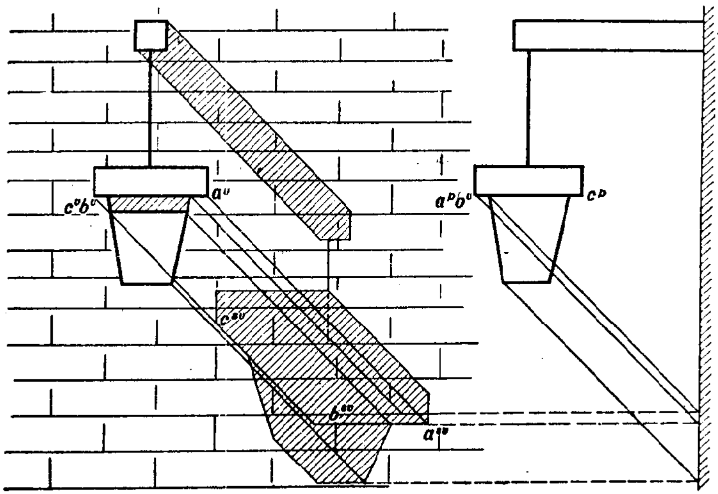


圖 139.

之外，故線 ab 之影非全部投在 V 上，而有一部分影投在燈下端之正面上. 同此，線 bc 之一部分影投於燈之左面上. 燈及托架之右側當然全係陰面.

84. **求作一線在單曲面**(註) (Single Curved Surface) **上之影.** 圖 140 示一柱上有一直徑較大之錐. 今欲求錐底在柱面上之影. 觀察水平投影,可知通過錐底點 c 之光之垂直平面切柱於素線 ed;故在垂直投影內,e^vd^v 右面之柱爲陰面. 點 c 之影爲 c^{sv}. 錐底任何點 b 之影爲 b^{sv}. 左端影之可見部分自該端圍素線(contour element) 上一點 a^{sv} 起;欲求 a^{sv},須先求 a^{sh},次之 a^h;a^v,最後得 a^{sv}. 錐影在柱後(以其不可見,故未繪出)綿延,達於 f 處之陰線,過 f 則融入一片陰暗中.

85. **求作空間一點在球上或迴轉複曲面**(註)(Double Curved Surface of Revolution)**上之影.**

圖 141 中,已知點 n 之投影 n^h 與 n^v,及球之投影. 球心爲 o^h 及 o^v. 通過 n 作光之垂直平面,與球相交處爲一圓;圓之水平投影爲一直線 $a^hc^hb^h$,其垂直投影爲一橢圓(圖上雖然繪出,却非解題所必需). 欲求通過 n 之光線與圓之交點,可將光線之垂直平面(連同其與球相交而成之圓,以及通過 n 之光線),依球之垂直軸迴轉,以與 V 平行,其新位置爲 $n_1^ha_1^hc_1^hb_1^h$. 於是圓之垂直投影爲一眞圓,圓心爲 c_1^v,半徑 $c_1^va_1^v$ 等於水平投影圖內之 $c_1^ha_1^h$. 設 d 爲通過 n 之光線上任意點,則迴轉後此光線之位置爲 $n_1^hd_1^h$ 及 $n_1^vd_1^v$. 引伸 $n_1^vd_1^v$ 交迴轉後之圓於 n_1^{sv}. 轉回光線之垂直平面,得 n 在球上之影 n^{sv} 及 n^{sh}.

86. **作一平面通過一點或一線,與其他已知線或平面有某種固定關係.** 此類題目可能有五種款式:

註. 面之分類在第 91 頁,第 109 節.

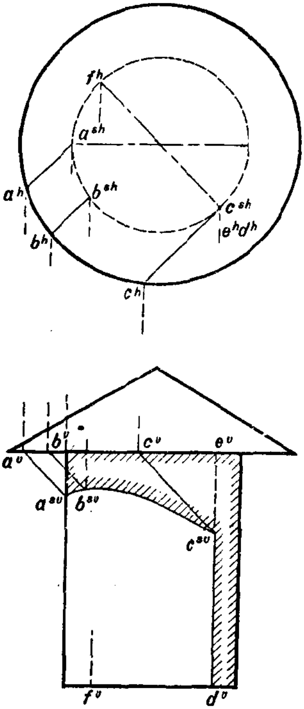


圖 140.

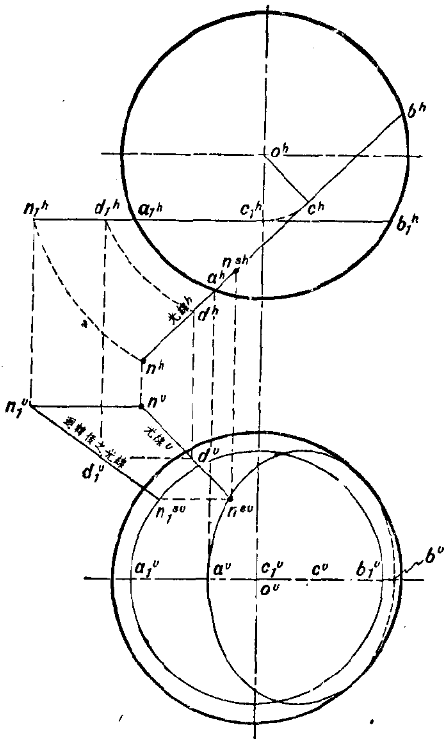


圖 141.

款 1. 作一平面通過一已知點，且平行於一已知平面.

款 2. 作一平面通過一已知點，且垂直於一已知線.

款 3. 作一平面通過一已知點，且平行於二已知線.

款 4. 作一平面通過一已知線，且平行於另一已知線.

款 5. 作一平面通過一已知線，且垂直於一已知平面.

在款1及2中，已知所求跡之方向．在款3、4及5中，已知所求平面之二線．

87．款1．作一平面通過一已知點，且平行於一已知平面．

〔原則〕因所求平面須平行於已知平面，故二者之跡平行．作一直線通過已知點平行於任何一跡，即可決定所求平面．

〔方法〕1．通過已知點作一線平行於一坐標平面，並在所求平面上（第28頁，第24節及第46頁，第50節）．2．求此線之跡，由是得所求平面之跡上一點．3．作所求平面之跡平行於已知平面之跡．

〔作圖〕圖142．設N為已知平面，b為已知點．過b作線A平行於V，並注意其方向，使此線適在所求平面上；故A^h平行於HV，A^v平行於VN(第46頁，第50節)．求線A之水平跡d^h，通過d^h作HS平行於HN，HS即所求平面之水面跡．VS平行於A^v及VN．

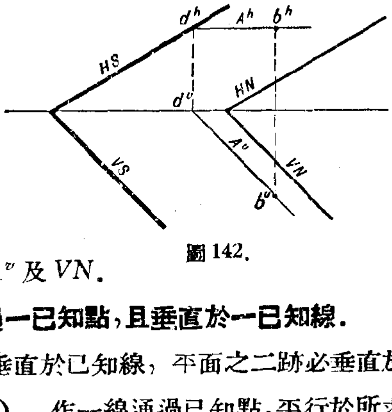


圖142．

88．款2．作一平面通過一已知點，且垂直於一已知線．

〔原則〕因所求平面須垂直於已知線，平面之二跡必垂直於線之投影(第64頁，第74節)．作一線通過已知點，平行於所求平面之一跡，及平行於此跡所在之坐標平面．如此之線即可決定所求平面．

〔方法〕1．通過已知點作一線，平行於一坐標平面，且在所

求平面上. 2. 求此線之一跡，由是得所求平面跡上一點. 3. 作所求平面之二跡，垂直於已知線之二投影.

〔作圖〕 圖 143. 過點 b 作線 C 平行於 V，且在所求平面 S 上. 故 C^v 垂直於 A^v（第 64 頁，第 74 節）. HS 及 VS 爲所求之跡.

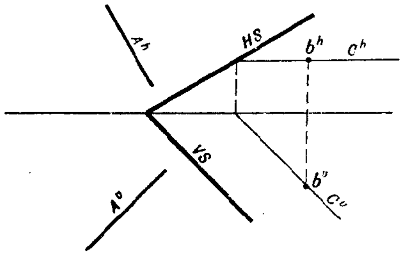


圖 143.

89. 款 3. 作一平面通過一已知點，且平行於二已知線.

〔原則〕 凡通過已知點平行於已知線之諸線，必在所求平面上.

〔方法〕 1. 通過已知點，作二線平行於二已知線. 2. 求此二線之平面（第 43 頁，第 45 節）.

〔作圖〕 圖 144. 已知線 A、線 B 及點 b. 過點 b 作線 C，平行於 A，作線 D 平行於 B. C 及 D 之平面 S，卽爲所求平面.

90. 款 4. 作一平面通過一已知線，且平行於另一已知線.

〔原則〕 若作一線交一已知線，且平行於另一已知線，則所求之平面必包含相交二線.

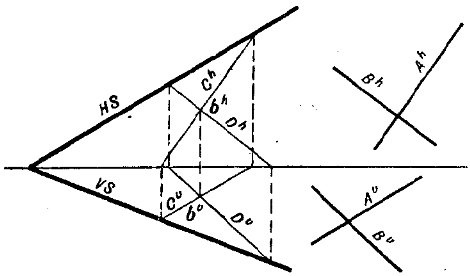


圖 144.

〔方法〕 1. 過已

知線上任意點，作一線平行於另一已知線。 2. 求此相交二直線之平面(第 43 頁，第 45 節)。

91. 款 5. **作一平面通過一已知線，且垂直於一已知平面.**

〔原則〕 若作一線交已知線，且垂直於已知平面，再作一平面包含此線及已知線，則該平面卽爲所求。

〔方法〕 1. 過已知線上任意點，作一線垂直於已知平面 2. 求二線之平面。

〔作圖〕 圖 145. 已知線 A 及平面 N. 過 A 上任意點作線 C 垂直於平面 N(第 64 頁，第 74 節). 求 A 及 C 之平面 S.

92. **第 86 節之特例及方法.**

款 1.(註) 作一平面通過一已知點，且平行於一已知平面.

圖 146 示一特例：已知平面 N 平行於 HV，故須用一輔側面. 過已知點 b 作側面 P. 先求 b^p 及 PN. 過 b^p 作 PS 平行於 PN, P

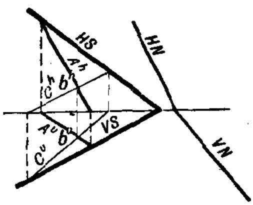


圖 145.

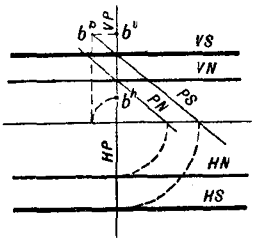


圖 146.

S 卽爲所求平面之側跡. 於是求其他二跡 VS 及 HS.

此題亦可用圖 147 所示之法解之. 過已知點 b 作一線 A，平

註. 各款所標號碼與第 73 頁，第 86 節同.

行於已知平面 N 上任意線 C. 通過線 A 二跡，作所求平面 S 之二跡，各平行於 HN 及 VN 之一. 此法適用於款 1 之一切題目.

93. 款 2.（見前註）作一平面通過一已知點，且垂直於一已知線. 圖 148 示一特例：已知線之二投影垂直於 HV. 故所求平面之跡平行於 HV. 設 ac 爲已知線，b 爲已知點. 作一輔側面 P，求已知線之側投影 a^pc^p，及已知點之側投影 b^p. 過 b^p 作 PS 垂直於 a^pc^p，PS 卽所求平面之側跡. 由此得 VS 及 HS.

94. 款 5.（見前註）作一平面通過一已知線，且垂直於一已知平面.

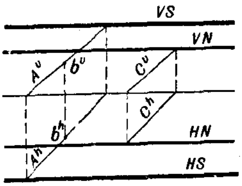


圖 147.

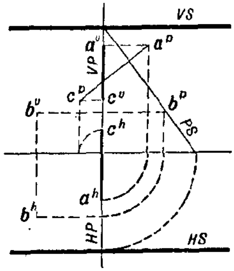


圖 148.

圖 149 示一特例：已知線 ab 平行於 P. 此題可用輔側面，或

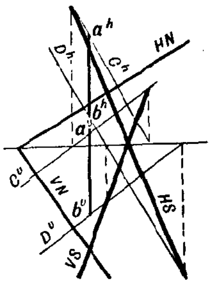


圖 149.

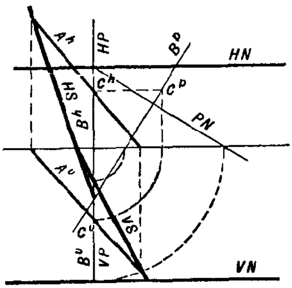


圖 150.

以下法解之：過 ab 上二點，作輔線 C 及 D 垂直於已知平面 N. 求此二平行線 C 及 D 之平面 S. S 卽爲所求平面，包含線 ab，且垂直於平面 N.

圖 150 示一特例：已知平面 N 平行於 HV. 過已知線 A 上任意點，作輔線 B 垂直於已知平面 N. 今作一輔側面 P，以求 B 之跡. 因 B 垂直於 N，B^p 必垂直於 PN. 其他步驟與第 77 頁，第 91 節相同.

95. 求不在一平面上二直線間之最短距離，並求此最短距離線之投影.

〔原則〕 不在一平面上二直線間祗可作一垂線，二線間之最短距離卽爲此垂線.

〔方法〕 1. 通過一已知線，作一平面平行於第二線. 2. 將第二線投影於所作之平面上. 3. 今平面上有二線：一爲該面所通過之線，一爲第二線之投影. 於二線之交點作一線垂直於平面. 此垂線必交第二線. 4. 求垂線之眞實長度，卽爲欲求之結果.

〔作圖〕 圖 151 及 152. 已知線 A 及 B. 過 A 作一平面 S 平行於 B（第 76 頁，第 90 節）. 作輔線 D 垂直平面 S 於點 k. 因線 B 平行於平面 S，B 在 S 上之投影 B_1 亦必平行於 B；故 B 及 B_1 之投影亦平行（第 29 頁，第 28 節）. 通過 k^h 及 k^v 作 $B_1{}^h$ 及 $B_1{}^v$ 各平行於 B^h 及 B^v，交 A 於 n. 於 n 作所求線 E 垂直於平面 S（第 64 頁，第 74 節），交線 B 於 o. 用第 38 頁，第 39 節之法求線 E 之眞實長度（圖中從略）.

96. 求一線及一平面間之角.

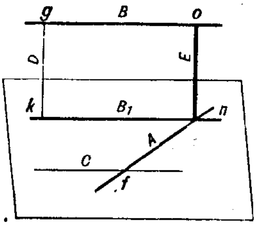


圖 151.

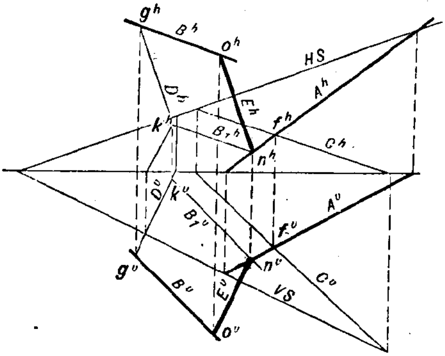


圖 152.

〔原則〕 一線與一平面之夾角爲此線與其在平面上投影之夾角，亦爲此線與其任一投射線(卽通過已知線上任意點對已知平面所作之垂線)間夾角之餘角。 此線本身、線在平面上之投影、及投射線構成一直角三角形。

〔方法〕 1. 過已知線上任意點對已知平面作垂線. 2. 求此垂線與已知線間之角，卽爲所求角之餘角。

〔作圖〕 圖 153. 已知線 A 及平面 N. 過 A 上任意點 c，作線 B 垂直於平面 N (第 64 頁，第 74 節). 求 A 及 B 所在平面之一跡，如 VS. 將 A 及 B 依 VS 軸迴轉入 V，其新位置爲 A' 及 B' (第 50 頁，第 54 節). 角 $d^v c' e^v$ 爲 A 與 B 夾角之眞實大小，而其餘角 $e^v c' f$ 卽爲線 A 與平面 N 間之角. (第 51 頁，第 55 節).

圖 154 中之平面 N 平行於 HV. 因之垂直於 N 之輔線 B 平行於 P，故求其跡時，需要一側投影. VS 爲 A，B 所在平面之垂直跡(水平跡不必求). 角 $d^v c' f$ 爲線 A 及平面 N 間夾角.

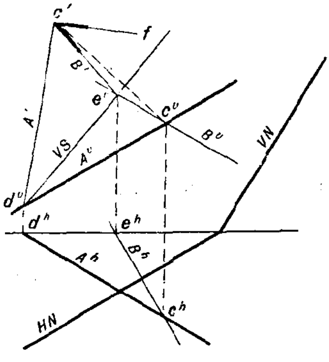


圖 153.

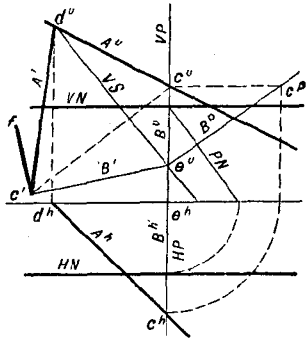


圖 154.

97. 求一線及坐標平面間之角.

〔原則〕 此爲第 79 頁,第96 節之特例,且已於第 38 頁,第 39 節中詳述. 茲錄二法如下:

〔第一法〕 1. 將此線以其水平投影爲軸迴轉,求得此線與 H 所夾之角. 2. 將此線以其垂直投影爲軸迴轉,求得此線與 V 所夾之角.

〔第二法〕 1. 迴轉此線,使之平行於 V, 以得此線與 H 所夾之角. 2. 迴轉此線,使之平行於 H, 以得此線與 V 所夾之角(第 38 頁, 第 39 節).

98. 求作一定長線之投影,此線通過一已知點,且與諸坐標平面成已知角.

〔原則〕 此爲第 97 節之逆,可能有八組解答. 但 α 及 β (此線與二坐標平面間之角)之和不得大於 $90°$.

〔作圖〕 圖 155. 設今欲求一線,經過點 b,長度等於 x,與 H

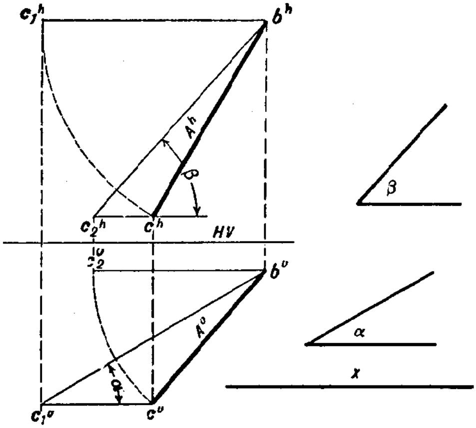


圖 155.

成 α 角，與 V 成 β 角. 過 b^v 作 $b^vc_1^v$ 等於 x，且與 HV 成 α 角；作 $b^hc_1^h$ 平行於 HV. $b^vc_1^v$ 及 $b^hc_1^h$ 表示所求線依通過 b 垂直於 H 之軸迴轉後之投影，故此線與 H 之夾角爲 α. 同此，作投影 $b^hc_2^h$ 及 $b^vc_2^v$，表示所求線依通過 b 垂直於 V 之軸迴轉後之投影，故此線與 V 之夾角爲 β.

依通過 b 垂直於 H 之軸轉回，線 A 之一切可能水平投影應從 b^h 畫起，止於通過 c_2^h 平行於 HV 之線 $c_2^hc^h$ 上. 但水平投影又應從 b^h 畫至弧 $c_1^hc^h$. 故$c_2^h c^h$ 與弧 $c_1^h c^h$之交點 c^h，即爲所求線水平投影之一端，另端卽 b^h. c^h 之垂直投影應在通過 c_1^v 平行於 HV 之線上，又應在弧 $c_2^vc^v$ 上，此點地位由是確定. 從而得所求線之垂直投影.

99. **求二平面間之角.**

〔原則〕 若有一平面垂直於二面角之稜，交二面於二線，二線間之角稱為二面角之平面角 (plane angle of the diedral). 二面角卽以其平面角量度之(第 20 頁，第 16 節，第 11 段).

〔方法〕 1. 作一輔平面垂直於已知二平面之稜（故亦垂直於二平面). 2. 求輔平面與已知面之二交線. 3. 求平面角之眞實大小.

100. 款 1. 求二斜平面 N 及 L 間之角.

〔作圖〕 圖 156 及 157 中之二面角不同，然其中註字標準並無差異.

作輔平面 S 垂直於平面 N 及 L 之交線 A. 解題時祇需 S 之一跡，此處擇其水平跡. HS 必垂直於 A^h（第 64 頁，第 74 節). HS 與已知二平面之水平跡相交於 f 及 e，各在輔平面與一已知平面之交線上. 至於二交線之交點 d，可以下法求之：A 之

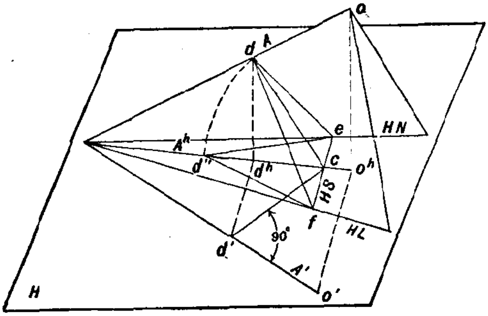


圖 156.

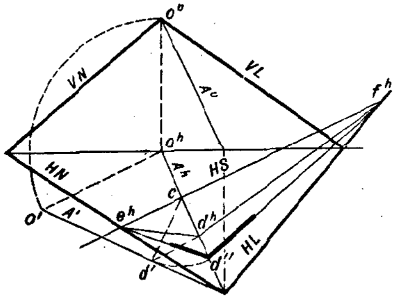


圖 157.

水平投射面交輔平面於 dc，爲垂直於 A 之一線。以 A 之水平投影爲軸，迴轉 A 入 H，得 dc 迴轉後之位置 $d'c$。轉回之，得點 d。次以 HS 爲軸，迴轉 de 及 df 入 H，以量度其間之角，$ed''f$ 卽爲所求之兩面角。

圖 158 示通常遇到之一種情形：已知面 N 垂直於 H，已知面 L 垂直於 V. 故二平面交線 A 之水平投影與 N 之水平跡疊合，而 A^v 與 VL 疊合。角 $e^h d'' f^h$ 爲平面 N 及 L 間角度之眞實大小。

101. **款 1 之另一法.** 圖 159 以寫生表示二相交平面 N 與 R，爲求二面角之另一法。從空間任意點 a 對每一平面作垂線。此二線間之角爲 N 與 R 間角度之補角，卽可用以量度二面角。

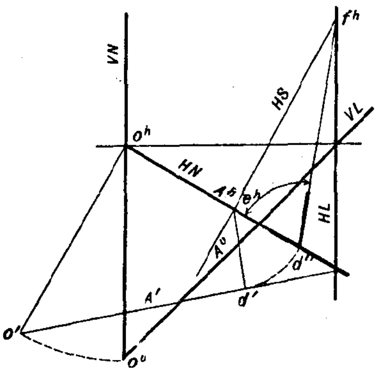


圖 158.

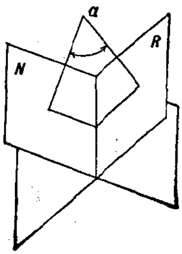


圖 159.

102. **款 2.** 求一斜平面與一坐標平面間之角。

〔作圖〕 圖 160 及 161. 今欲求平面 N 及 H 間角度之眞實大小。作輔平面 X 與 N 及 H 垂直，故與二平面之交線 HN 垂直。於是 HX 垂直於 HN，VX 垂直於 HV.

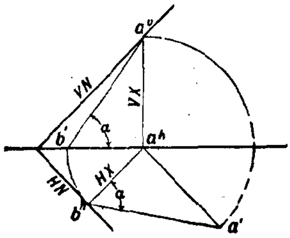


圖 160.

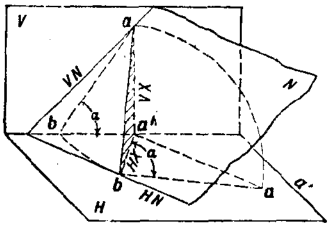


圖 161.

平面 X 與 N 交於 ab，與H 交於 HX. ab 與 HX 間之角卽爲所求角. 將包含此角之三角形依 VX 軸迴轉入 V(或依 HX 軸迴轉入H)，卽得此角之眞實大小 α.

線 ab 稱爲平面 N 與 H 所成之最大傾斜線 (line of maximum inclination of plane N with H).

設欲求平面 N 與 V 間夾角之眞實大小. 先求 N 與 V 所成之最大傾斜線，再求其與 V 所成之角.

103. 求廡殿式屋頂(亦稱三落水屋面，"Hip Roof")上木材之長度及斜角.

在裝配屋架之前，務須先將木材切割妥當，故應從圖上求得必需之二面角. 圖 162 示一屋架之正面圖及平面圖，其上並註有各材料之名稱及欲求之十角.

〔長椽(common rafter)〕 下切角(down cut angle) 5，底切角 (heel cut) 6，及椽之眞實長度均在正面圖中表示.

〔短椽 (jack rafter)〕 求最長之短椽之長度，可從平面圖上 $n^h o^h$ 投影至正面圖 $n^v o^v$.

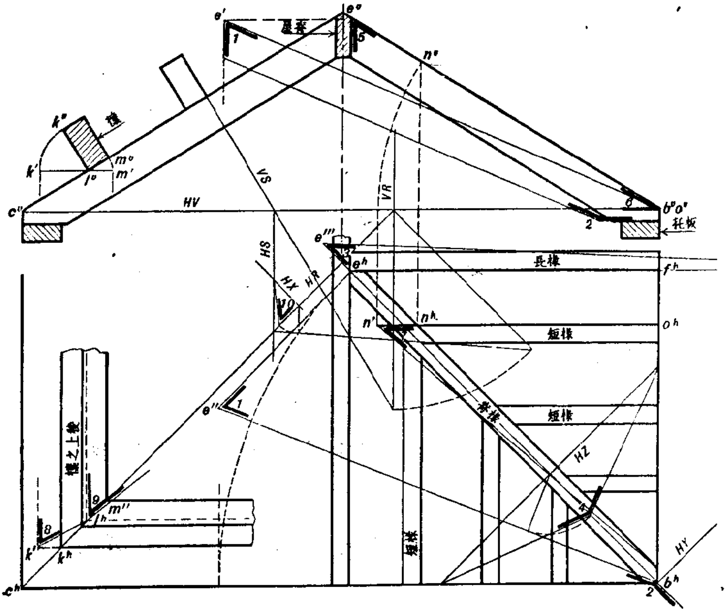


圖 162.

下切角 5 及底切角 6 與長椽同． 迴轉短椽於 $n'o^h$ 以平行於 H，求得側切角 (side cut) 7.

〔脊椽 (hip rafter)〕 迴轉 eb 至 $e'b^v$ 平行於 V(或至 $e''b^h$ 平

行於 H),求得 eb 之眞實長度.

下切角 1 爲角椽與屋脊相交處之角. 迴轉角椽至 $e'b^{r}$,平行於 V(或至 $e''b^{h}$ 平行於 H),與求眞實大小時同.

底切角 2 爲脊椽與托板(plate)相交處之角. 將脊椽迴轉使平行於 V(或轉入 H),與求眞實大小時同.

角 4 爲頂斜角(top bevel)用第 99 節之法,求側頂與端頂(side roof and end roof)間之二面角. HZ 爲輔平面之跡.

角 3 在脊椽與長椽間. 此角往往決定於脊椽未切斜角(4)之前,故必須在通過脊椽頂之平面上量度之,此平面之跡 HY 垂直於 $e^{h}b^{h}$. 求此跡與 $e^{h}f^{h}$ 延長線之交點. 將線 ef 及 eb 依 HY 軸轉入 H. 從 e''' 作線在 HY 上交 $e^{h}f^{h}$. 所求角爲 3.

〔檩(purlin)〕 求下切角 8 時,將側面 kl 迴轉至 $k''l^{h}$ 以平行於 H

側切角 9 爲檩之頂面及底面上之角. 將底面 lm 迴轉以平行於 H. 迴轉後之位置爲 $l^{r}m', l^{k}m''$.

角 10 爲側面與端面間之角. 用第 83 頁,第 100 節之法,求平面 S 及 R 間之二面角卽可.

104. 已知一平面之一跡及此平面與一坐標平面間之角,求另一跡.

此類題目必有下列二種情形:

款 1. 已知跡與已知角爲就同一坐標平面而言者.

〔作圖〕 圖 163. 設 HT 爲已知跡,α 爲 T 及 H 間之已知角. 作 A^{h} 垂直於 HT,A^{h} 卽爲 T 與 H 所成最大傾斜線之水平

投影. 若將此最大傾斜線迴轉入 H, 則與 A^h 成 α 角. d' 爲此最大傾斜線之垂直跡迴轉後之位置. 此跡之垂直投影必在 A 水平投射面之垂直跡上,與 HV 之距離等於 d^hd'. 由是確定 d^v, 而 d^v 爲 VT 上之一點,故得所求之跡 VT.

VT 或在 HV 之上,或在其下,故可能有兩種解答.

105. **款 2.** 已知跡與已知角爲各就一坐標平面而言者.

〔作圖〕 圖 164. 設 HT 爲已知跡,β 爲 T 及 V 間之已知角.

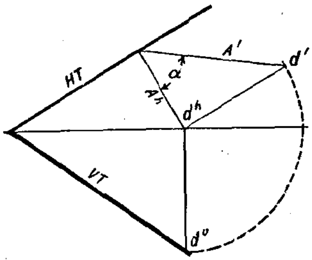


圖 163.

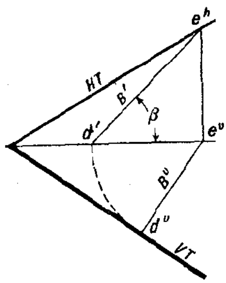


圖 164.

B 爲 T 與 V 所成之最大傾斜線,將 B 以其垂直投射面之水平跡爲軸迴轉入 H, 得 B', B' 與 HV 成 β 角. d' 爲 B 之垂直跡迴轉後之位置. 以 e^v 爲中心, e^vd' 爲半徑,作弧 $d'd^v$. 作 VT 切於此弧,卽得所求之跡. VT 或在 HV 之上,或在其下,故可能有二解.

106. **已知一平面與二坐標平面所成之二角,求其二跡.**

〔作圖〕 圖 165. 平面 T 與 V 成角 β, 與 H 成角 α. (α 及 β 之和不得小於 90°,大於 180°). 求 T 之二跡. 今假想所求平

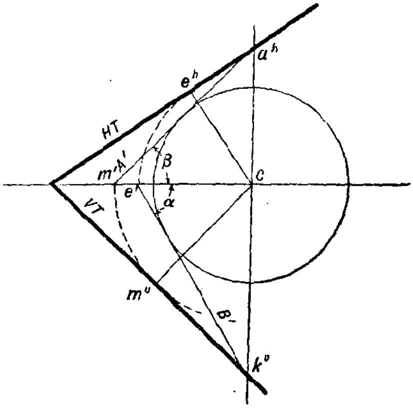


圖 165.

面 T 切於一球，球心 c 在 HV 內．通過該球與 T 之切點，假想作 T 與二坐標平面所成之最大傾斜線．若將 T 與 V 所成之最大傾斜線，依球之水平軸迴轉入 H，此迴轉後之位置 A' 必仍切球，A' 與 HV 間之角必等於已知角 β．此最大傾斜線之水平跡 a^h 在迴轉軸上，其垂直跡在以 c 為中心、cm' 為半徑所作之圓上．同此，若將 T 與 H 所成之最大傾斜線迴轉入 V，迴轉後之位置 B' 必與 HV 成 α 角．其垂直跡 k^v 在迴轉軸上，其水平跡在以 c 為中心，ce' 為半徑所作之圓上．所求之 HT 必包含 a^h，切於弧 e^he'；VT 必包含 k^v，切於弧 m^vm'．二跡可同在 HV 之上，亦可同在其下，然必交 HV 於一點．

107．求作已知形狀大小之一正稜柱之投影，其一底在一傾斜平面上之位置固定，已知此傾斜平面與二坐標平面間之角．

〔方法〕 1．求傾斜平面之二跡． 2．求在該傾斜平面上之稜柱底之二投影． 3．在此底每角上作垂線，使垂線之長等於正稜柱之高；再連結各垂線終點，得第二底面．

〔作圖〕 圖 166． 用第 51 頁，第 56 節之法求此稜柱之迴轉後位置． 轉回之時，作平面 X 垂直於 N 及 V，交 N 之處即 N 與

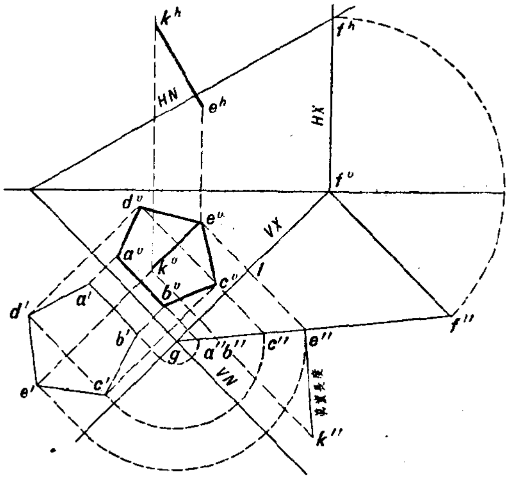


圖 166.

V 所成之最大傾斜線，圖中示其迴轉後之位置 gf''. 因 gf'' 爲眞實長度，在 N 上垂直於 VN 之所有之線均可作於 gf'' 上. 故 ge'' 爲點 e' 至 VN 之距離，而 e^v 即在經過 e'' 平行於 VN 之線上. 同此求得五邊形其他各點. $e''l$ 爲空間點 e 至 V 之距離，故 e^h 離 HV 之遠等於 $e''l$.

側稜之求法如下：

在任意角頂 e'' 上，作 $e''k''$ 垂直於 gf''，使其長等於稜柱高. 用求 e^v 及 e^h 之法，得 k^v 及 k^h. e^vk^v 爲一側稜之垂直投影，e^hk^h 爲其水平投影. 其他各側稜之垂直投影與 e^vk^v 平行且等長，水平投影與 e^hk^h 平行且等長. 聯接各稜之端，求得第二底面.

第四章　面之產生及分類.

108. 面之產生法. 每面 (surface) 可視爲由一線依某一定律移動而產生者. 此移動之線名爲動線 (generatrix),其在面上各種不同之位置稱爲面之素線 (element of the surface). 連續二素線,其間無可以確指之距離者,稱爲相鄰素線 (consecutive elements). 引領(或管理)動線之線名爲準線(directrix).

109. 面之分類. 依動線之形式而定:

直紋面(ruled surface)爲由直動線(rectilinear generatrix)所產生者.

複曲面 (double-curved surface) 爲由曲動線 (curvilinear generatrix) 所產生者,故無直素線.

直紋面分爲可展曲面 (developable surface) 及不可展曲面或翹曲面 (nondevelopable or warped surface).

- 面
  - 直紋面
    - 平面
    - 單曲面(可展曲面)
      - 柱面
      - 錐面
      - 盤旋面 (convolute)
    - 翹曲面(不可展)
  - 複曲面(不可展)

110. **直紋面.** 一直線移動可使每素線在一平面範圍內；可使任何二相鄰素線在一平面內；亦可使任何二相鄰素線不在一平面內. 故直紋面復可分爲三類:

平面:所有直素線在同一平面內.

單曲面:任何二相鄰直素線在同一平面內，非平行卽相交.

翹曲面:任何二相鄰直素線不在同一平面內，旣不平行又不相交.

111. **平面.** 凡平面均相似，其各種產生法如下. 直動線移動時始終平行於其起先之位置，而與一直準線相接觸. 或直動線移動時與平行或相交之二直準線相接觸. 或直動線以與其垂直之他一直線爲軸而迴轉.

112. **單曲面.** 此種面復可分成三類:

錐面:所有之直素線交於一點，名爲頂點(apex).

柱面:所有之直素線互相平行，可認爲頂點在無窮遠處之錐.

盤旋面:相鄰素線兩兩相交，無三素線交於一點者.

113. **錐面.** 動線移動時如通過一定點(頂點)，幷與一已知曲線(準線)相觸卽生錐面. 因動線之長無限，故錐面在頂點處劃分爲二，稱爲二葉(nappes)，卽對頂錐面. 通常所謂之錐面係指從頂點至切割所有素線之一平面間之錐面. 此平面名爲錐底(base of the cone)，其與錐面相交線之形狀或爲圓，或爲橢圓，或爲拋物線，各錐之名稱因之. 若錐底有一中心，則通過此心及頂點之直線名爲錐軸(axis of the cone).

直錐(right cone)爲錐之一種，其底垂直於其軸.

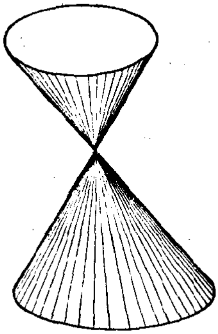


圖 167.

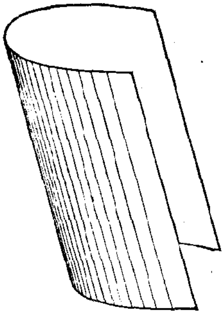


圖 168.

114. **柱面.** 柱爲錐之一種，其頂點在無窮遠處. 柱之直動線移動時各位置平行，而恆與一已知曲準線相接觸. 切割柱面所有素線之一平面，稱爲柱之底；底與柱面相交處之形狀決定該柱之名稱，與錐之情形同. 若底有一中心，穿過此心平行於素線之一直線名爲軸.

柱亦可由一曲動線產生之，此線移動時線上各點同向而行，速度相等.

直柱(right cylinder)爲柱之一種，其底垂直於軸.

115. **盤旋面.** 一直動線移動時，如恆切於一雙曲率線(註) (line of double curvature)，卽產生一盤旋面. 二相鄰素線在同一平面內，然無任何三素線在同一平面內. 因雙曲率線之種類無限，故盤旋面之種類亦殊繁夥. 其中有名螺旋面(helical convolute)者，可用圖 169 所示之法產生之. 此面由一直角三角形

註. 雙曲率線爲線之一種，其上無四相鄰點在一平面上者.

之斜邊產生，其法如下：設有一直角三角形紙片（或其他薄而柔之材料），將其捲於一直柱四周，使三角形之一股與柱之一素線疊合．若將此三角形放開，則其頂點作出柱底之漸伸線（involute），其斜邊與柱之切點軌跡爲一螺旋線（helix）；斜邊所生之面名曰螺旋面．此盤旋面亦可認爲由一直動線所產生，此線移動時恆與漸伸線及螺旋線相接觸（卽二線爲動線之準線），且與漸伸線之平面成一固定之角．

116．**翹曲面**．一直動線移動時，其相鄰位置不在同一平面內，則所產生者爲翹曲面．適合此條件之直動線能有若干移動方法（換言之，能有若干定律約束其行動），翹曲面卽有若干種．

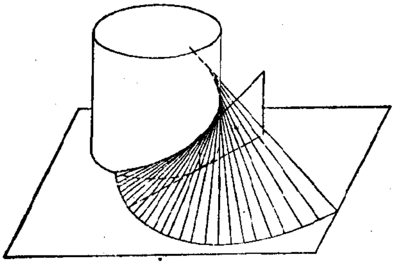


圖 169．

翹曲面可由一直動線產生，此直線移動時與二準線接觸，且或平行於一已知平面，或順次平行於一已知錐面之各素線．此平面名爲準平面（plane director），此錐面稱爲準錐面（cone director）．

117．**翹曲面之數型**．圖 170 至 175 爲翹曲面之數型，讀者試觀察之，當能領會翹曲面之數種特性．

雙曲拋物面（hyperbolic paraboloid），圖 170．二直準線及一準平面，或三直準線．

劈錐曲面（conoid），圖 171．一直準線，一曲準線及一準平面．

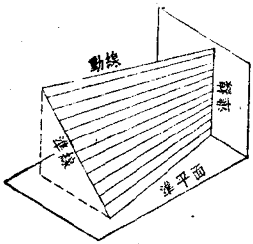


圖 170.

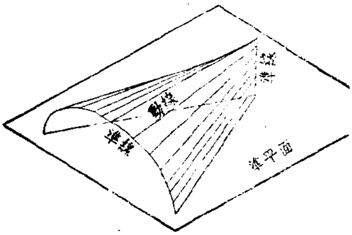


圖 171.

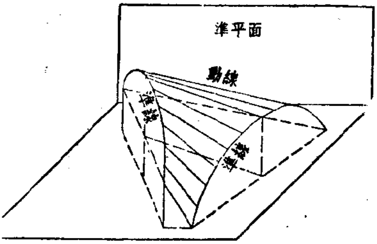


圖 172.

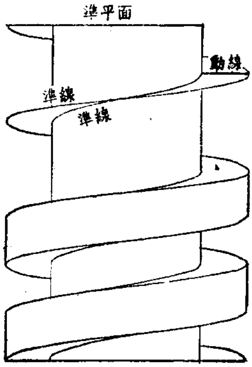


圖 173.

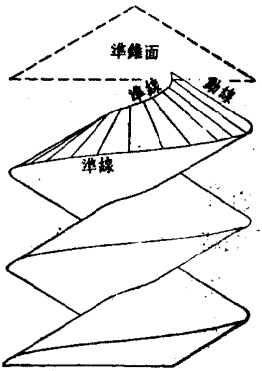


圖 174.

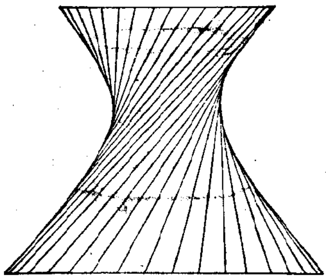


圖 175.

圓柱性面(cylindroid),圖 172. 二曲準線及一準平面.

正螺旋面(right helicoid),圖 173. 二曲準線及一準平面.

斜螺旋面(oblique helicoid),圖 174. 二曲準線及一準錐面.

迴轉雙曲面(hyperboloid of revolution),圖 175. 二曲準線及一準錐面,或三曲準線.

118. **迴轉曲面**(Surface of Revolution). 圖 176. 迴轉曲面為任何線(或動線)之軌跡,此線以一固定直線為軸迴轉,然無論在何位置,二線間之關係不變. 此固定直線名為迴轉軸 (axis of revolution). 動線上任一點所生之圓名為緯圈 (parallel);垂直於軸之平面與曲面相交處俱為緯圈. 任何包含迴轉軸之平面名為子午平面 (meridian plane),此面與曲面之交線名為子午線 (meridian line). 同一曲面上所有子午線均相同,故任一子午線可作為動線. 平行於一坐標平面之一子午平面,名為主子午平面 (principal meridian plane).

若動線為一直線,且與軸在同一平面內. 動線平行於軸,則產生柱面;二者相交,則產生錐面. 僅柱面及錐面為迴轉單曲面 (single-curved surface of revolution).

若動線與軸不在同一平面內,則相鄰之素線既不平行亦不相交. 故曲面為翹曲面,其子午線為雙曲線;此乃惟一之迴轉翹曲面(warped surface of revolution). 此曲面亦可將一雙曲線依其共軛軸 (conjugate axis) 迴轉而產生,故名為一葉之迴轉雙曲面(hyperboloid of revolution of one nappe). 見圖 175.

119. **複曲面**. 除柱面、錐面及迴轉雙曲面之外,所有迴轉

曲面均爲雙曲率者．其種類及數目無窮多．足資代表之型式如下：

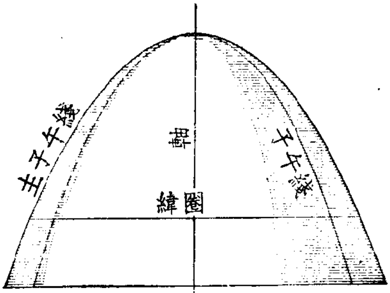
球面：一圓以其直徑爲軸廻轉而產生者．

長球面 (prolate spheroid)：一橢圓依其長軸廻轉而產生者(第 106 頁，圖 183)．

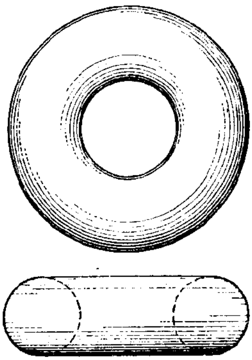
扁球面 (oblate spheroid)：一橢圓依其短軸廻轉而產生者．

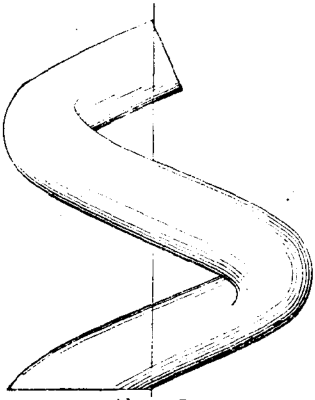
拋物面 (paraboloid)：一拋物線依其軸廻轉而產生者(圖 176)．

二葉之雙曲面 (hyperboloid of two nappes)：



拋物面
圖 176.


環面(圓環形)
圖 177.


蜿蜒面
圖 178.

一雙曲線依其貫軸 (transverse axis) 廻轉而產生者.

環面 (torus): 半圓或其他曲線以非其直徑之直線爲軸廻轉而產生. 軸在動線之平面內, 且恆與動線之直徑相距甚遠. 若以一圓爲動線, 則所生之曲面稱爲圓環面 (annular torus), 見圖 177.

易位複曲面 (double-curved surface of transposition)—

蛇蜒面 (serpentine): 一球之球心沿螺旋線移動而產生者. 圖 178.

第五章　切　面

120. **一平面切於一單曲面.** 一平面如包含一單曲面上一素線，且僅含一素線時，該平面即與此單曲面相切. 通常用以決定切面之二線爲切素線(tangent element)及此素線上一點之曲面切線. 若第二線在一坐標平面內，則爲切面之一跡.

圖 179 中，點 d 在一錐面上，今欲作一切面過 d. 作一線通過 d 及錐頂，切面即在此線切於錐面，故此線爲切面之一線. 若作第二線 ck 過點 d，切於任一包含 d 之錐截口(section)；ck 即爲切面之另一線. 此二線之跡決定 HS 及 VS，是即所求切面之跡. 若此單曲面之底疊合於一坐標平面，如圖 179 所示者，則可用 bk 作爲切線，於是直接求得水平跡.

121. **單曲面上一點之一投影已知，求作一切面切曲面於包含已知點之素線上.**

〔原則〕 切面由相交二線決定，一線爲已知點所在之曲面素線，第二線交此素線並切於單曲線(適合此條件者甚多，然以用底平面上之線爲佳).

〔方法〕 1. 作包含已知點之素線之二投影. 2. 在底平面內作第二線切底於此切素線. 3. 求第二線及素線之平面.

若底平面疊合於一坐標平面，則切線(即上述第二線)爲所求切面之一跡.

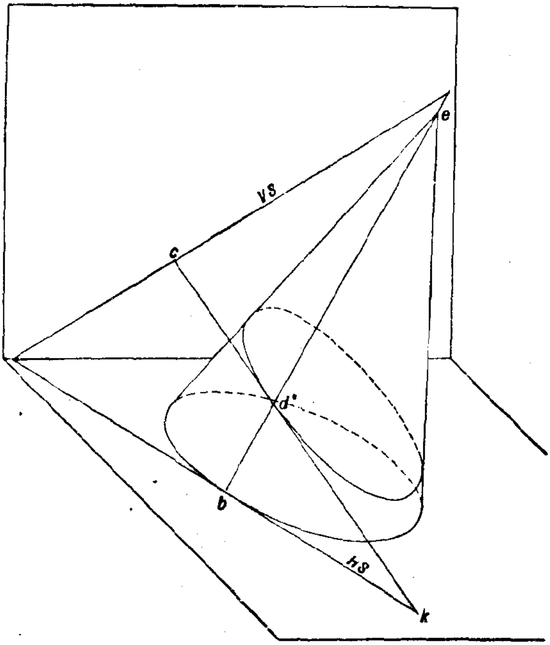


圖 179.

〔註〕 在此題及以下各題中，單曲面之底在一坐標平面上.

〔作圖〕 圖 180. 設此單曲面爲一錐面，其二投影已知，其底在一坐標平面內(今在 H 內). 設 c^v 爲已知點之垂直投影. 過 c^v 作 E^v，卽爲切素線之垂直投影. 此素線水平跡之垂直投影爲 k^v，乃底上之點，其水平投影爲 $k_1{}^h$ 及 $k_2{}^h$，故得二可能之切素線 E_1 及 E_2. 點 c 亦有二可能位置. 故有二可能切面. 因錐底在 H 內，故切面 S 及 N 之水平跡 HS 及 HN 切底於 $k_2{}^h$ 及 $k_1{}^h$. 切素線之

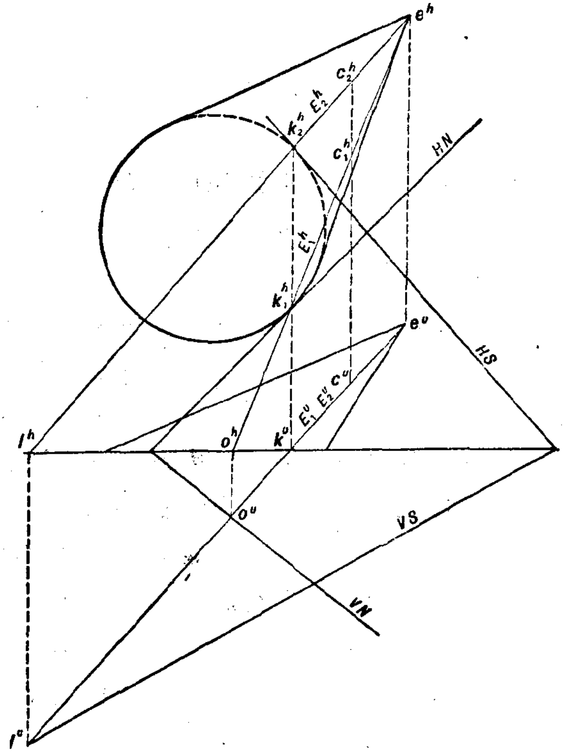


圖 180.

垂直跡 l^v 及 o^v 決定 VS 及 VN，是即所求切面之垂直跡.

122. 求作一平面切於一錐面，且通過曲面外一已知點.

〔原則〕 因所有切面均包含錐之頂點，所求平面必包含頂點及已知點間之線. 又因錐底在一坐標平面上，所求平面之一跡必切於錐底.

〔方法〕 1. 作一線通過錐之頂點及已知點，求此線之二投影. 2. 求其二跡. 3. 在錐底所在之平面上，過輔線之跡作所求切面之跡切於錐底. 4. 過輔線之另一跡作切面之另一跡. 此題有二可能切面.

123. 求作一平面切於一錐面，並平行於一已知線.

〔原則〕 此切面必包含錐之頂點及一線，該線通過頂點平行於已知線.

〔方法〕 1. 過錐之頂點作一線平行於已知線. 2. 求得此輔線之二跡. 3. 作所求切面之二跡通過輔線二跡，使切面之一跡切於錐底. 此題有二可能切面.

124. 求作一平面切於一柱面，且通過曲面外一已知點.

〔原則〕 切面由二交線決定，一線過已知點平行於柱面之素線，第二線過第一線上一點切於柱面(此線最好在底平面內).

〔方法〕 1. 過已知點作平行於素線之線之二投影. 2. 求此輔線之二跡. 3. 在柱底所在之坐標平面內，過輔線之跡作所求面之一跡切於柱底 4. 過輔線之他跡，作切面之他跡. 此題有二可能切面.

〔作圖〕 圖 181. 設 a^v 及 a^h 爲已知點之投影. 柱底在 H 上. B^v 及 B^h 爲輔線之投影，此輔線過點 a 且平行於柱面之素線. 過此線之水平跡 d^h，作二可能切面之水平跡 HS 及 HN 切於柱底. 此二切面之垂直跡 VS 及 VN 必包含線 B 之垂直跡 c^v. 平面 N 切於素線 F，平面 S 切於素線 K.

125. 求作一平面切於一柱面，且平行於一已知線.

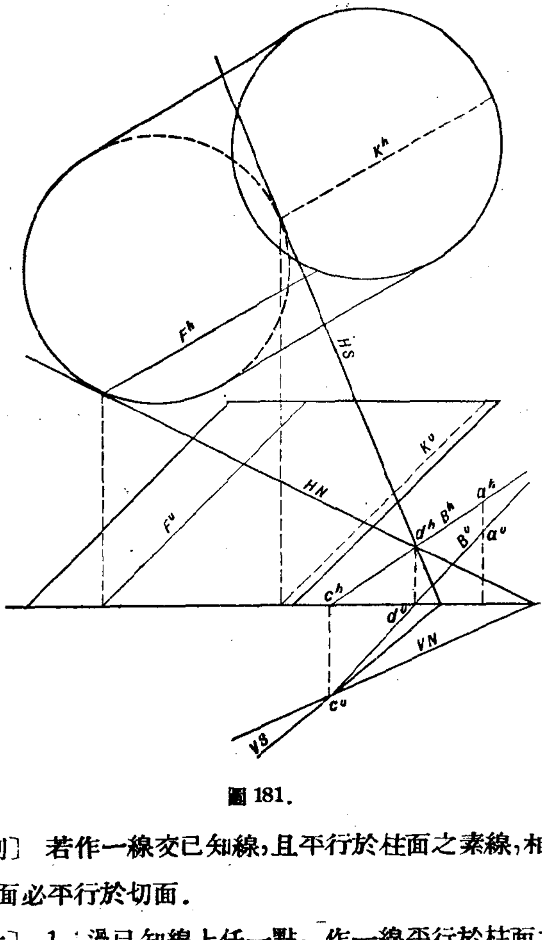


圖 181.

〔原則〕 若作一線交已知線，且平行於柱面之素線，相交二線決定之平面必平行於切面.

〔方法〕 1. 過已知線上任一點，作一線平行於柱面之素線. 2. 求相交二線所在平面之二跡. 3. 作切面之二跡平行於輔平面之二跡，切面一跡切於柱底. 在任何情形下均有二可能切面.

〔作圖〕 圖 182. 過已知線 A 上任意點 c 作線 B 平行於柱面之素線，所求二切面必平行於 A 及 B 之平面 X. N 及 S 爲所求切面.

126. **一平面切於一複曲面.** 此平面包含曲面上一點，且僅含一點. 通常用以決定切面之二線爲在切點切子午線及緯圈者.

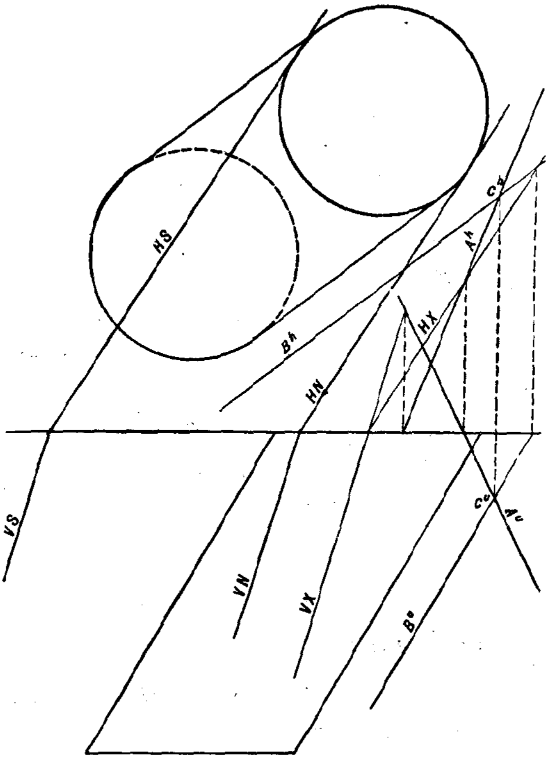


圖 182.

法線(normal)爲在切點垂直於切面之線.

法面(normal plane)爲包含法線之任意面.

127. 迴轉複曲面上一點之一投影已知,欲求一平面過此點切於曲面.

〔原則〕 迴轉複曲面之切面必包含在切點切子午線及緯圈之二線.

求切面有二法.

〔第一法〕 1. 過已知點作一子午線及一緯圈(第96頁,第118節). 2. 在已知點作二切線切子午線及緯圈. 3. 求此二切線之平面.

〔作圖〕 圖183. 已知一橢面(ellipsoid),其軸垂直於 H. 求作一平面切曲面於一點,此點之水平投影爲 e^h. 以 f^he^h 爲半徑,f^h 爲圓心,作一圓,是即過 e 之緯圈之水平投影. 緯圈之一可能垂直投影即 B^v 在橢圓內之一部分. 將 e^h 投影於 B^v 上得 e^v,即爲已知點 e 之垂直投影. 過點 e 作線 B 切於緯圈,故 B 在緯圈之平面內. A^h 在圓(橢面之水平投影)內之一部分爲過點 e 之子午線之水平投影. 將此子午線依 fk 軸迴轉,以疊合主子午線,其垂直投影即圖中之橢圓. 迴轉後之點 e 之垂直投影爲 $e_1{}^v$,過 $e_1{}^v$ 作子午線之切線,其投影爲 $A_1{}^v$ 及 $A_1{}^h$. 轉回此子午平面,以定切線之眞實位置 A^v 及 A^h. 切線 A 及 B 之跡可定所求切面之跡. 可能之切面爲數有二.

〔第二法〕 1. 求一錐之投影,該錐切此迴轉複曲面於過已知點之緯圈. 2. 作一平面切輔錐(auxiliary cone)於過已知點之

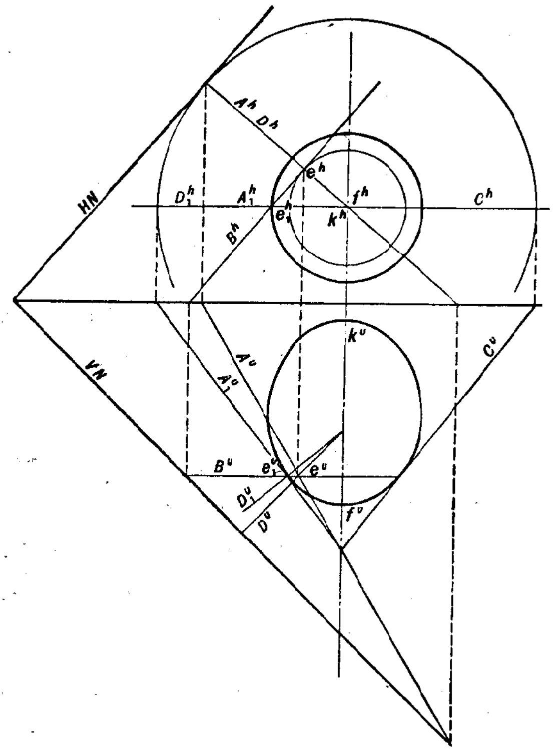


圖 183.

素線（第 99 頁，第 121 節）.

〔作圖〕 圖 183. 今設有一錐包含點 e，且切於橢面，錐上過 e 之素線之投影為 A^h 及 A^v. 在線 A 切錐之平面即為所求平面. 若線 A 之垂直跡在圖紙範圍外，則請注意所求平面之跡必垂直於點 e 處之法線 D，於是確定 VN 之方向.（第 104 頁，第 126 節）.

此題有二可能切面.

128. 過空間一點作一平面,切迴轉複曲面於一已知緯圈.

〔方法〕 1. 作一錐切迴轉複曲面於已知緯圈. 2. 作一平面過已知點切於錐(第 101 頁,第 122 節). 此題有二可能之切面.

129. 求作一面切球面於一已知點.

〔方法〕 此題可用第 127 節之法解之,若用下法亦可. 1. 過已知點作球之一半徑. 2. 作一平面過已知點垂直於半徑(第 75 頁,第 88 節),此即所求平面.

130. 過一已知線求作切於一球面之諸平面.(註)

〔原則〕 假想有一平面過球心垂直於已知線,則此平面於球上割一大圓(great circle),於所求諸切面上割諸線. 諸線切於大圓;並與已知線相交於後者(已知線)交輔平面之處. 諸切線與已知線決定之諸平面即爲所求切面.

〔方法〕 1. 過球心作一平面垂直於已知線(第 75 頁,第 88 節),並求平面之二跡. 2. 求已知線穿面之點(第 61 頁,第 68 節). 3. 將此包含球心之輔平面,連同其與球相割之大圓,及與已知線之交點,全部迴轉入一坐標平面. 4. 過輔平面與已知線之交點,作諸線切於迴轉後之大圓. 此諸線乃在所求諸切面上者. 5. 轉回此包含諸切線之輔平面. 6. 求諸切線與已知線所決定之諸平面,是即所求切面.

〔作圖〕 圖 184. 已知線爲 A,球心爲 e. HX 及 VX 爲垂

註. 請閱第 149 頁,第 176 節,可得下一問題之一般解法(general solution),即過一已知線,求作切於一迴轉複曲面之諸平面.

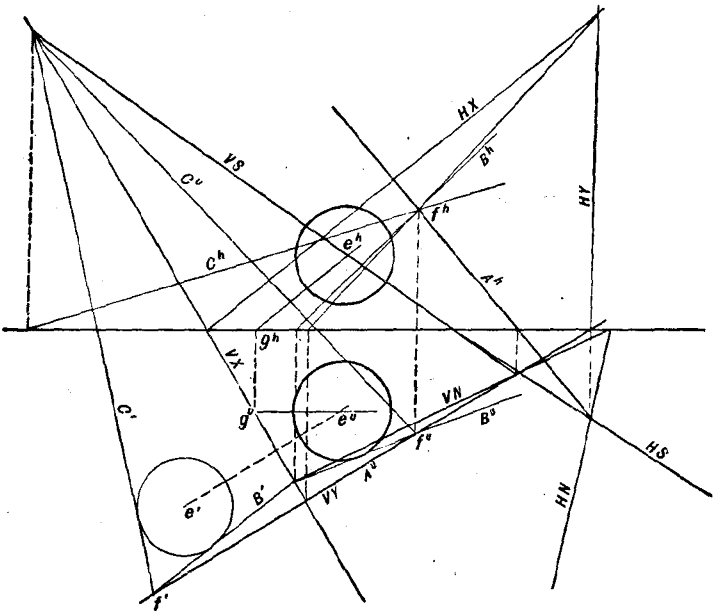


圖 184.

直於 A 通過 e 之輔平面之跡（第 75 頁，第 88 節）. 點 f 爲線 A 與平面 X 之交點. 迴轉平面 X 入垂直坐標平面；e' 爲 e 迴轉後之位置，f' 爲 f 迴轉後之位置. 作大圓及切線 C'，B'.

轉回後切線爲 C 及 B，交 A 於 f. C 及 A 爲所求平面之一 S 上之二交線. A 及 B 決定第二平面 N.

第六章　平面與曲面之相交及曲面之展開

131．**求作任何曲面與任何割面(Secant Plane)之交線．**

〔一般方法〕 1．作一羣輔助切割平面，於曲面上割直線或曲線，於割面上割直線． 2．諸線之交點爲所求相交曲線上諸點．

此法適用於稜柱面、稜錐面、柱面、錐面及迴轉複曲面． 諸輔助切割平面之位置原可隨意，惟爲便利計，自宜善擇其地位，務使從曲面割下者爲最簡單之曲線，卽直線或圓方可．

若遇稜柱、稜錐、單曲面或其他直紋面等立體，則用第 61 頁，第 68 節之法求各素線與斜平面之交點．

132．**平面與單曲面之相交曲線之切線．** 求此切線可作一平面切曲面於題中規定之點（第 99 頁，第 121 節）． 切面與割面之交線卽所求切線．

133．**截口 (Cut Section) 之眞實大小．** 將此截口以割面之一跡爲軸迴轉入一坐標平面，其眞實大小卽可求得．

134．**正截口 (Right Section)．** 正截口乃以一垂直於曲面軸之平面由曲面上割下之截口．

135．**曲面之展開面 (Development of a Surface)．** 此卽曲面鋪展於平面上時之眞實大小及形狀．相鄰二素線在同平面內之曲面始能展開之，因僅此類曲面能與平面疊合也． 故能展開者惟有單曲面及由平面圍成之立體．欲展開平面圍成之立體可求其

各連續面之眞實大小及形狀．展開單曲面可先將一素線與平面接觸，再將曲面滾轉使每素線觸及平面． 迴轉時平面被曲面遮蓋之部分卽爲曲面之展開面．

136．求一平面與一稜錐之交線．

〔原則〕 因稜錐爲平面所圍之立體，故此一問題遂成爲求取兩平面之交線． 又因稜錐可由其稜表出，故更進一步言，此題實卽求諸稜穿過平面之點．

〔方法〕 1．求已知稜錐之稜穿過已知面於何點．2．依次聯接所得各點，於是求得平面與稜錐之交線．

〔作圖〕 圖 185．已知稜錐之側稜爲 A，B，C，D 及 E． 今有已知平面 N 與稜錐相交．用諸素線之諸水平投射面，以求諸稜穿過 N 之點 a，b，c，d 及 e（第 62 頁，第 70 節）．依次連結各點，得線 ab，bc，cd，de 及 ea，卽爲平面與稜錐之交線．

因所用之輔平面均包含稜錐頂點 l，並垂直於 H，故必含過 l 垂直於 H 之一線． 此線穿過 N 之點 o 爲 N 與各輔平面之交線所公有． 明乎此，作圖法可略予簡化．

欲求剖面之眞實大小，可將剖面諸點以 VN 爲軸迴轉入 V．

137．展開稜錐．

〔原則〕 將稜錐置於一平面上，並將其滾轉，使各面順次與平面接觸． 迴轉時，平面被稜錐遮蓋之部分爲稜錐之展開面． 從上所述，顯見稜錐之每線與每面於展開後均可顯眞實之大小．

〔方法〕 1．求稜錐每線之眞實長度． 2．作順次相接之各面，其大小與眞實同．

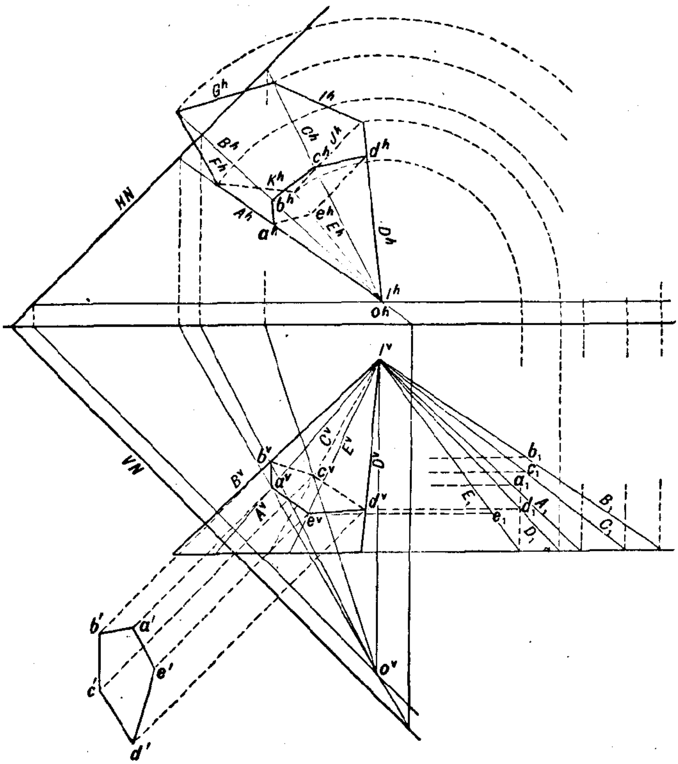


圖 185.

〔作圖〕 圖 185 及 186. 求素線及其線段 (segment) 之眞長，可將諸線迴轉，使平行於 V 得圖 185 中之 A_1，B_1 等及 a_1，b_1 等. 稜 F，G，I，J 及 K 之水平投影爲眞長，因稜錐之底面平行於 H. 於圖 186 中，過任何點 l（代表頂點）作線 B 與 E_1 等長. 以 l 爲中心，C_1 爲半徑，作一任意長之弧. 以 B 之端爲中心，G^h 爲半徑，

作一弧交前弧於點 n，線 C 及 G 於是固定．其他諸面之求法同此．

截口之展開以下法求之：於每素線上，從 l 量一點，令其距離等於相應素線上自稜錐頂點至截口之眞實長度．連結如此所得之各點．

欲得稜錐展開面之全形，可加底及截口．

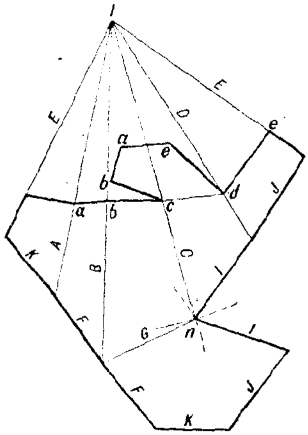


圖 186.

138．求一平面與一錐面之相交曲線．

〔原則〕　此題同於求平面與稜錐面之相交曲線，因錐可視作具無窮多面之稜錐．

〔方法〕　1．作一羣輔平面垂直一坐標平面，割錐上諸素線．2．每輔平面(除切面外)於錐上切割二素線，於已知平面上切割一直線．此直線與素線相交之二點在所求曲線上．

〔作圖〕　圖 187．今欲求平面 N 與斜錐 (oblique cone) 之相交曲線，斜錐之圓底平行於 H．作一羣輔助切割平面過錐，包含其頂點 a 並垂直於 H．其中一平面 X 於錐上切割二素線 ab 及 ac，於平面 N 上切割線 B．B 交素線 ac 於點 e，交素線 ab 於點 f；e 及 f 爲平面 N 及錐面之相交曲線上二點．以同法定其他點，其數以能作平滑曲線爲度．包含圍素線(contour elements)之平面在決定曲線之臨界點(critical point)時，最爲重要．

因所有輔平面垂直於 H，並通過錐之頂點，故均包含過頂點垂

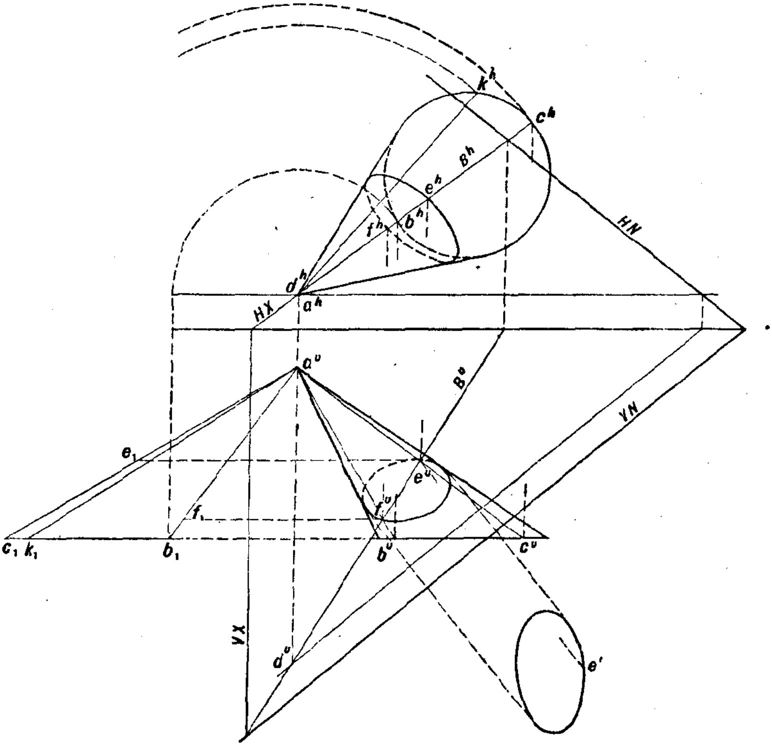


圖 187.

直於 H 之一線. 此線於點 d 穿過平面 N, d 爲 N 與諸輔平面之諸交線所公有者. 明乎此,即可將作圖法簡化,與稜錐之情形同.

欲求截口之眞實大小,可將其上各點以 VN 爲軸迴轉入 V.

139. **求任何斜錐之展開面.**

〔原則〕 將一錐面放在一平面上滾動之，其頂點固定不動，其各素線在滾動時連續與平面接觸。滾動時，平面上之素線爲眞實長度，素線間距離亦爲眞實者。

〔作圖〕 圖 187 中，錐底平行於 H，故素線間之眞實距離可於底之周上量得之。若將此錐面於平面上展開，過代表頂點之任意點 a(圖 188)，作一線 ac，其長度等於素線 ac 迴轉後之位置 $a^v c_1$ (圖 187)。 以 a 爲圓心，另一素線 ak 之眞長爲半徑，作一任意長之弧。 以 c 爲圓心，$c^h k^h$ 爲半徑，作一弧交前弧於 k。 如此重複之，以求得展開面之全形。 展開面之精確度視所用素線之數而定，其數愈多，愈爲精確。

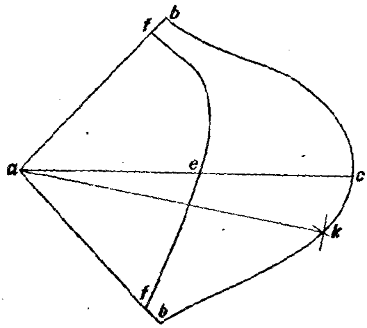


圖 188.

求相交曲線之展開形，法與求稜錐與平面之交線同：在每素線上，從頂點量一點，其間距離等於相應素線上自頂點至截口之眞實長度，再連結如此所得之各點。

140. **求一平面及一柱面之相交曲線.**

〔原則〕 作一羣輔助切割平面平行於柱軸，垂直於一坐標平面；諸輔平面於柱上切割素線，於已知平面上切割直線。直線與素線之諸交點在所求曲線上。

〔作圖〕 圖 189. 已知一斜橢圓柱面 (oblique elliptical cylinder)爲一平面 N 所切割. 作一羣輔助切割平面平行於柱軸，

垂直於 H. 其中一平面 X 切於柱面，故僅包含一素線 A，並交已知平面於線 G. 線 G 及 A 在平面 X 內，交於點 a，即爲柱面與已知平面 N 相交曲線上之一點. 同此；平面 Z 交柱面於素線 C 及 D，交平面 N 於線 K；K 與 C 之交點爲 c，與 D 之交點爲 d；c 及 d 爲所求曲線上二點. 解題時最應注意用包含圓素線之平面.

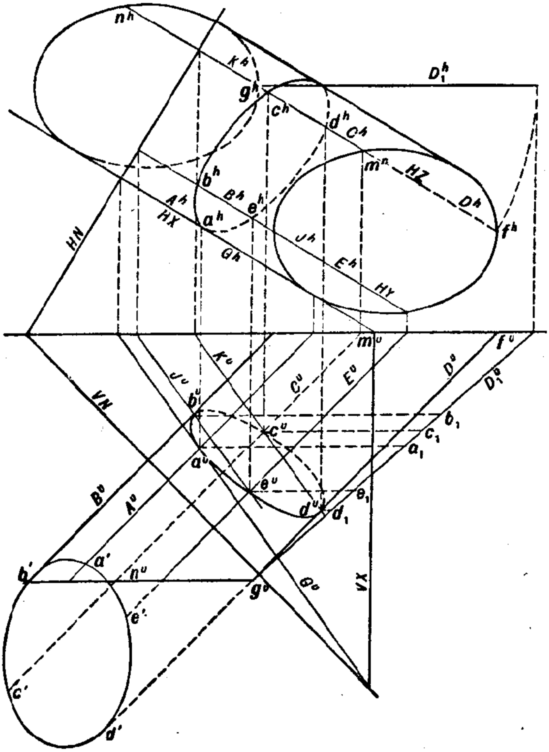


圖 189.

求截口之眞實大小，可將其依 VN 迴轉入 V.

141. **展開柱面**

〔原則〕 求柱之展開面時，將柱面在平面上滾動，則所有素線在平面上均平行，其長眞實，彼此之距離亦爲眞實者. 因斜柱之底展開時爲曲線，故須先作一正截口，此截口展開時爲直線；素線間之眞實距離可作於其上. 此線既爲正截口之周界，素線自必垂直之. 每垂線端離截口展開線之距離等於每素線端離正截口之距離. 於是可將各垂線端連結而得一平滑曲線.

〔方法〕 1. 作一直線，其長等於正截口之周界. 2. 在此直線上作諸點，其間距離等於素線間之眞實距離. 3. 於諸點上作展開線之諸垂線. 4. 垂線以展開線爲界，分上下兩段；於垂線之每段上量其相應素線之眞實長度. 5. 循垂線之端，繪一平滑曲線.

〔作圖〕 圖 189 及 190. 圖 189 中所用之割面 N，於柱上切割一正截口. 故 N 之跡垂直於柱軸之投影（第 64 頁，第 74 節）. 迴轉素線 D 使平行於 V，以得其眞實長度 D_1. 將 d^v 投影於 D_1^v 上得 d_1，即得 D 每部分之眞實長度. 因柱之素線均等長，故 D_1 爲每素線之眞長；若將截口各點投影於 D_1，得 b_1，c_1 等，由是得各素線之線段之眞長. 圖 190 中，於直線 dd 上作素線間眞距離 dc，$cb\cdots$等於 $d'c'$，$c'b'\cdots$（$d'c'$，$c'b'$在正截口之眞實形上）之伸直距離. 過點 d，c，b 等，作垂直於 dd 之線，使其長等於各素線之眞實長度. dd 代表截口，在 dd 上方及下方之部分，其長等於截口上方及下方之素線長度.

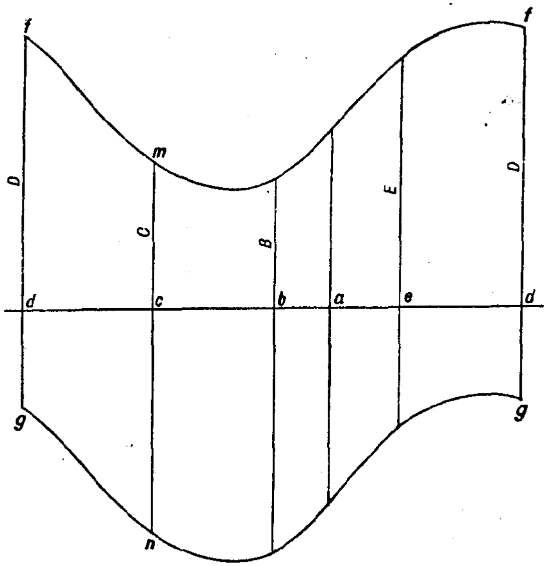


圖 190.

142. 柱軸平行於一坐標平面. 此時不用正截口即可求得展開面.

圖 191 示一斜柱面，其軸平行於 V，底平行於 H. 垂直投影中，素線之長度爲眞實者；水平投影中，素線間距離爲眞實者（素線間距離於底之周界上量得）. 若將柱面在平面上滾動，各素線之端必在垂直於素線之平面內移動. 故 b' 在垂直於 B^v 之 $b^v b'$ 上，b' 與 a^v 之距離等於 $a^h b^h$. 同此，c' 在垂直於 C^v 之 $c^v c'$ 上，c' 與 b' 之距離等於 $b^h c^h$. 餘類推. 此圖僅示展開面之半.

143. 求一平面及一積柱面之相交曲線.

〔原則〕 稜柱可視作頂點在無窮遠處之稜錐．故此題與稜錐題在原則上及方法上均無所異．

〔作圖〕 圖 192．已知稜柱，其素線爲 A，B，C 及 D． 稜柱爲平面 N 所交． 素線 B，C 及 D 穿過平面 N 之處爲點 b，c 及 d，是乃用各素線之垂直投射面以求得者(第 62 頁，第 70 節)． 若將素線 A 引伸，則亦可以同法求得其穿過 N 之點 a． 聯接 ab，bc，cd 及 da，卽求得各交線． 然因 a 不在已知稜柱上，線 ab 及 da 僅有一部分 eb 及 df 在稜柱上，卽平面 N 交稜柱之上底於線 ef．

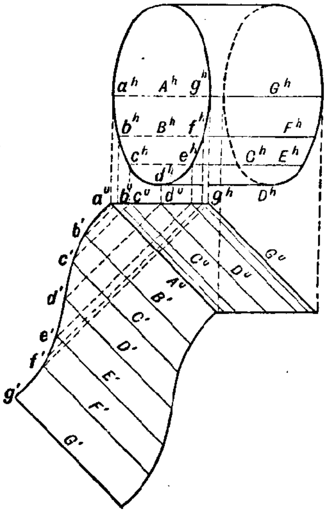


圖 191．

點 e 及 f 可以用線 E 及 F 之垂直投射面求得之，若是則毋需點 a．

因諸素線之垂直投射面彼此平行，故彼等與已知平面之諸交線亦彼此平行． 明乎此，作圖法遂可簡化．

求截口之眞實大小時，可將其上每點以 HN 或 VN 爲軸迴轉入 H 或 V．

144．展開稜柱．

〔方法〕 先求一正截口之眞實大小，而後依展開柱面（第 116 頁，第 141 節）之步驟進行． 或將稜柱迴轉，使平行於一坐標平

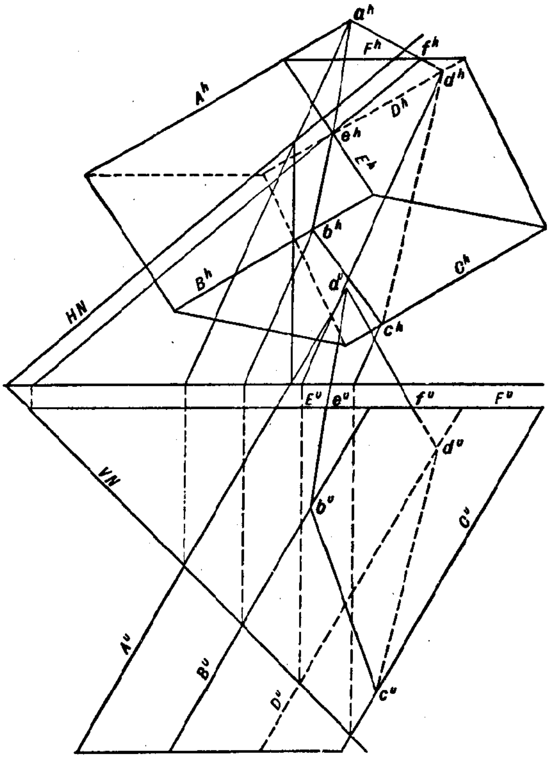


圖192.

面，而後依展開柱面（第117頁，第142節）之步驟進行。

145. **螺旋面.** 圖193示一平面三角形切於一直圓柱. 三角形之底邊等於柱底之周. 若將三角形捲於柱上，則點 c 接觸柱上點 c_1，a 接觸 a_1，斜邊 ac 成爲螺旋線，其螺距爲 a_1c_1，螺距角爲角 acd. 若將直線 ac 自柱面漸漸放開，而始終切於螺旋線，與底面

成常角 θ；則產生二葉之盤旋面 (convolute of two nappes). 於此二葉中，吾人僅取該直線在切點下之可變部分所生之一葉.

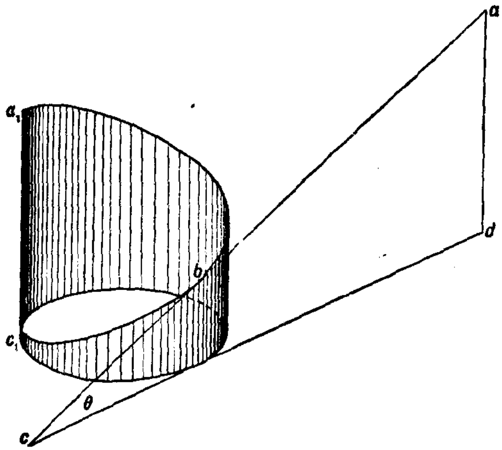


圖 193.

146. **求作螺旋面之素線.**

〔作圖〕 圖 194. 已知 a^hl^h 爲所求螺旋面之直徑，a^vc^v 爲其螺距. $a^vl^vb^ve^vc^v$ 爲螺旋線之垂直投影，螺旋線(本身)之切線爲盤旋面之素線. 從任意點 b 作一切線至螺旋線. 切線之水平投影 b^hk^h 於 b^h 切圓（柱之水平投影），b^hk^h 之長等於弧 $b^he^hc^h$. 故 k^h 爲素線 bk 水平跡之水平投影，bk 之垂直投影爲 b^vk^v. 同此，其他素線之跡亦可求得，其軌跡在盤旋面底，即柱底之漸伸線上（第

註. 螺旋線及漸伸線之理論及作圖，請參閱第 194 頁，第 243 及 244 節.

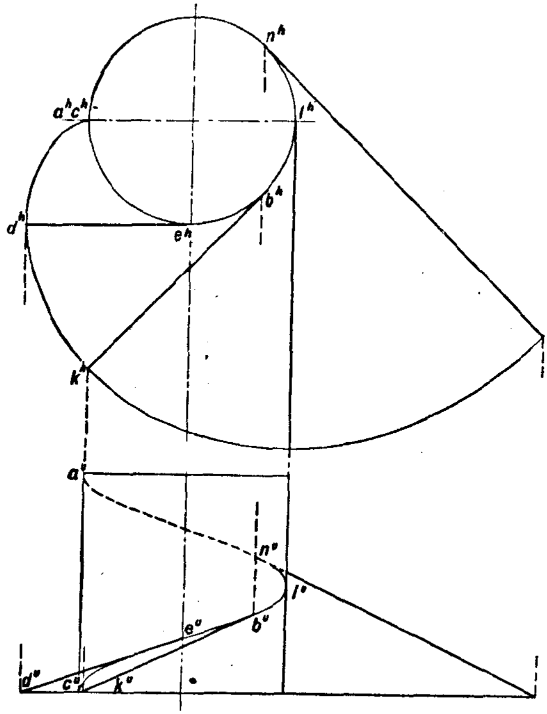


圖 194.

194 頁，第 243 節）．今若作柱底之圓之切線，止於此圓之漸伸線，此切線卽爲盤旋面之素線．

147．**展開螺旋面．**

螺旋面爲可展者（第 93 頁，第 115 節），故可將此面放於一平面上滾動，平面上之素線爲眞長，並切於一圓，此圓爲螺旋線（螺旋線之曲率爲常數）展開所成者．展開之曲面爲圓及其漸伸線間之

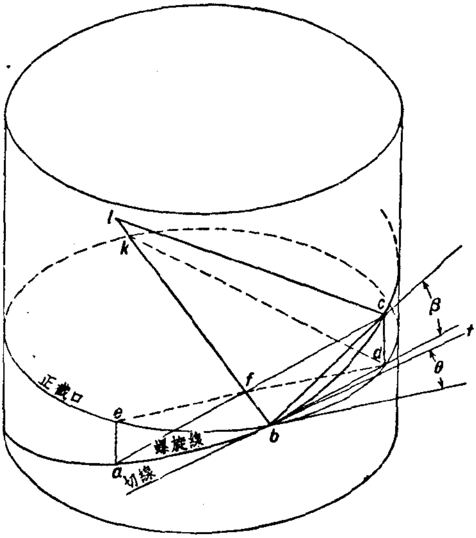


圖 195.

面積.

展開螺旋線所成之圓之半徑以下法求之：圖 195 中，a,b 及 c 為螺旋線上之點，a 及 c 離 b 等遠，bt 為在 b 點之螺旋線切線．作一通過 b 之正截口，a 及 c 在截口平面上之投影為 e 及 d．過 a,b,c 三點作一圓弧，與螺旋線之曲率近似，ac 為此圓弧之弦，bl 為其直徑，三角形 lcb 內接於半圓周，故為直角三角形．同理，在正截口平面內之三角形 bdk 亦為一直角三角形．在三角形 bcl 及 bdk 內，bc 為 fb 及 bl 之比例中項，bd 為 fb 及 bk 之比例中項．以 R 代螺旋線之曲率半徑 $\frac{bl}{2}$，以 r 代圓（螺旋線之投影）之半徑 $\frac{bk}{2}$，則

得 $\overline{bc}^2=fb\times 2R$，及 $\overline{bd}^2=fb\times 2r$。以第一式除第二式，得 $\dfrac{\overline{bd}^2}{\overline{bc}^2}=\dfrac{r}{R}$；但 $\dfrac{bd}{bc}=\cos\beta$，其中 β 爲弦 bc 與水平面所成之角．故 $R=\dfrac{r}{\cos^2\beta}$．當點 a 及 c 互相接近時，弦 bc 接近 bt（bt 爲在 b 之螺旋線切線）；在極限情形，角 β 等於角 θ（θ 爲切線與水平面所成之角）；故 $R=\dfrac{r}{\cos^2\theta}$．

此值亦可以簡單之圖解法得之：圖 196．於 b 作螺旋線之切線．此切線與柱之圍素線交於 c，再過 c 作一水平線，止於在點 b 所作切線之垂線上．今 $bc=\dfrac{ac}{\cos\theta}$，又 $bc=cd\quad\cos\theta$，因此

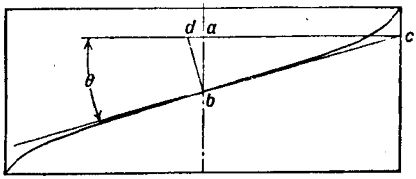


圖 196.

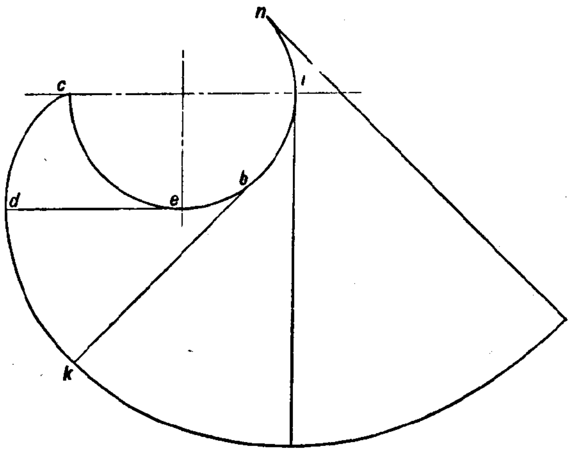


圖 197.

$cd=\frac{ac}{\cos^2\theta}=\frac{r}{\cos^2\theta}$，卽 cd 爲展開後螺旋線之半徑.

已定螺旋線之曲率半徑，作圓及其漸伸線，以求盤旋面之展開形. 圖 197 爲螺旋面(其投影在圖 194 中)之展開.

148. 求作一平面及一迴轉曲面之相交曲線.

在以下諸情形中，設想迴轉軸垂直於一坐標平面.

〔方法〕 1. 作一羣輔助切割平面垂直於迴轉軸. 此等平面割曲面於圓，割已知平面於直線. 2. 諸圓與諸直線之交點在相交曲線上.

〔作圖 1〕 圖 198. 已知平面 S 交已知橢面，後者之軸垂直於 V. 作一羣輔平面垂直於橢面之軸，其中一平面爲 Y. HY 平行 HV. Y 割橢面於一圓，此圓在垂直投影內爲圓，在水平投影內與 HY 疊合，Y 割已知平面 S 於線 B，交圓於 i 及 g，兩點均在橢面與已知平面之相交曲線上. 如此重複之，以能藉所得之點描繪平滑曲線爲度.

解題時，若能預知輔平面應作於何範圍內，因而確定相交曲線之兩端，豈非便利不少. 故作子午平面 U 垂直於 S，交 S 於線 D，卽於其上求得 a 及 b. 請注意 D^v 爲曲線垂直投影之對稱軸.

用何輔平面以決定曲線與圍線 (contour line) 之切點，亦屬重要之事. 於求橢面與平面之交線時，用二平面 X 及 W. 平面 X 割曲面於最大緯圈，在垂直投影內割於圍線；平面 W 割曲面於主子午線. 前者於垂直投影內決定切點 e^v 及 f^v；後者於水平投影內決定切點 c^h 及 d^h. a,b,c,d,e 及 f 等點名爲曲線之臨界點.

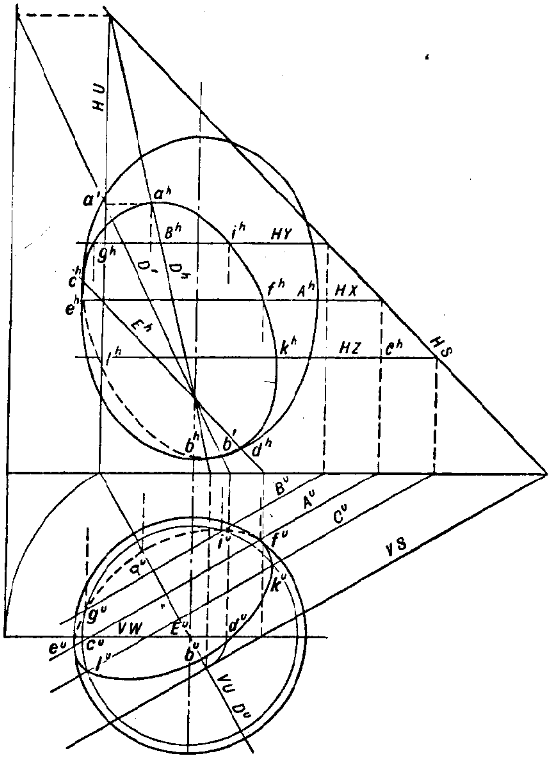

HU
a'
a^h
B^h
i^h
HY
g^h
D'
D^h
c^h
f^h
A^h
HX
e^h
E^h
k^h
HZ
c^h
HS
l^h
b^h
b'
d^h
B^v
A^v
C^v
VS
i^v
f^v
q^v
k^v
g^v
VW
E^v
d^v
e^v
c^v
b^v
l^v
VU
D^v

圖 198.

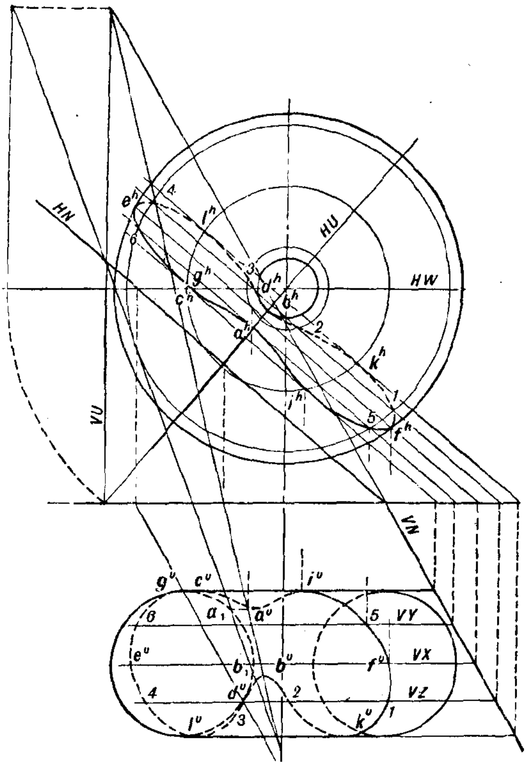


圖 199.

〔作圖 2〕 圖 199. 已知平面 N 交已知環面 (torus)，其軸垂直於 H. 輔平面平行於 H. 臨界點在平面 U 上者爲 a 及 b；在平面 X 上者爲 e 及 f；在平面 W 上者爲 c 及 d. 最高點 g,i 及最低點 l,k 亦應求出.

第七章　曲面之相交

149．**曲面相交之一般原則．** 兩物體之曲面相交，則爲繪畫插圖及展開曲面起見，恆需決定其交線．交線爲二曲面所公有，其特性決定於曲面之性質與其相對大小及相對位置． 求交線、交線之投影及相交曲面之展開等問題之原則在上章已予詳述．然欲使輔助切割平面割二曲面之素線，而非僅切割一曲面，則必須考慮輔助切割平面之特性及其應用方法．

150．**輔助切割面(Auxiliary Cutting Surface)之特性．** 以前所謂之輔助切割面均爲平面；其實柱及球若能割相交曲面於直線或圓弧，則亦未嘗不可應用． 因輔助面與曲面之交線，以直線及圓弧爲最佳；故應考慮相交曲面之性質，以定輔平面或輔曲面之性質及其應用方法，俾獲得最佳之交線．

下列諸款說明各型之相交曲面對輔助切割面(平面或曲面)性質及位置之影響．

〔款1〕 柱及錐其軸傾斜於坐標平面者：用包含錐頂且平行於柱軸之諸輔平面．

〔款2〕 二柱其軸傾斜於坐標平面者：用平行於二軸之諸輔平面．

〔款3〕 二錐其軸傾斜於坐標平面者：用包含二錐頂之諸輔平面．

〔款 4〕 一迴轉單曲面及一迴轉複曲面，其軸彼此平行，且垂直於一坐標平面者：用垂直於軸之諸輔平面。

〔款 5〕 一迴轉單曲面及一迴轉複曲面，二迴轉單曲面，或二迴轉複曲面，其軸雖彼此傾斜但屬相交，且平行於一坐標平面者：用諸輔切割球面，球心卽軸之交點。

〔款 6〕 一迴轉複曲面(其軸垂直於一坐標平面)及任一單曲面：若單曲面爲柱面，則用諸輔助切割柱面：其軸平行於已知柱面之軸，且與複曲面之軸相交，切割柱面與複曲面相割處爲圓。若單曲面爲錐面，則用諸輔助切割錐面：其頂點卽已知錐之頂點，輔錐面與複曲面相割處爲圓。

〔款 7〕 除款 6 外各款，亦可以稜柱代圓柱，以稜錐代圓錐。

〔款 8〕 兩稜柱、兩稜錐、或一稜柱一稜錐：毋需輔平面。求一物體之稜與他物體之面之交點。

151. **求錐面及柱面之相交曲線，兩者之軸傾斜於坐標平面。**(註) 圖 200。

〔原則〕 因相交曲線爲二曲面所公有，故可由諸相交素線之公點求得。作一羣切割平面通過錐之頂點且平行於柱軸，則於錐面及柱面上均切割素線。因此種素線在同一平面內，故可相交；其交點爲二曲面公有，故爲所求曲線上一點。

〔方法〕 1. 作一線通過錐之頂點平行於柱軸。 2. 求其在柱底及錐底平面（二者之底在一平面內）內之跡。 3. 過此跡於柱底及錐底之平面內作諸線以割截二底。此等線卽輔助切割平面

註. 通常將一者或兩者之底置於一坐標平面上.

之跡．4．從諸跡與二底之交點，作二曲面之素線．5．過柱及錐之素線之交點，作所求相交曲線．

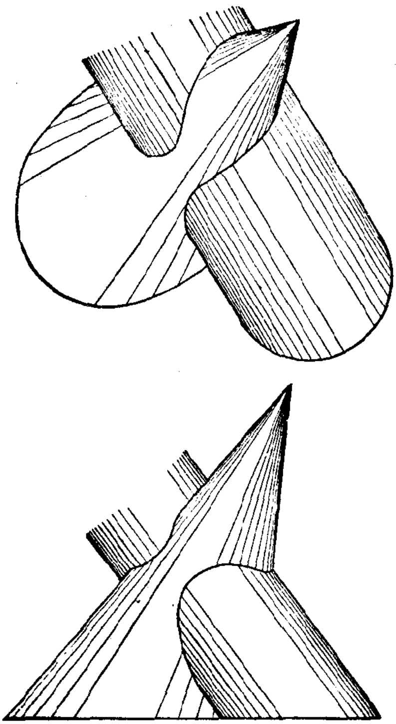


圖 200.

〔作圖〕圖 201．過錐之頂點作線 A 平行於柱之軸(或素線)．此線爲一切輔助切割平面所公有，此線之水平跡 b^h 爲諸平面水平跡之公點．HN 爲輔平面之一跡，割柱底或切柱底於 c^h，割錐底於 d^h 及 e^h．因此等點在輔平面 N 與柱錐相割之素線上，故即可作此類素線之水平及垂直投影．線 E 爲從柱面上割下之素線，da 及 ea 爲從錐面上割下者．諸素線交點 f 及 g 爲柱及錐所公有，故在所求相交曲線上．

平面 N 及 S 爲切面：前者切於柱面，後者切於錐面．故每平面僅決定兩點．中間平面如 M 者，於每曲面切割二素線，故共切割四素線，決定四交點．所作輔平面之數，以能求得曲線爲度．解題時最好能求得曲線與圍素線之切點，故應竭力獲致適當之中間平面，以切割含臨界點之素線．

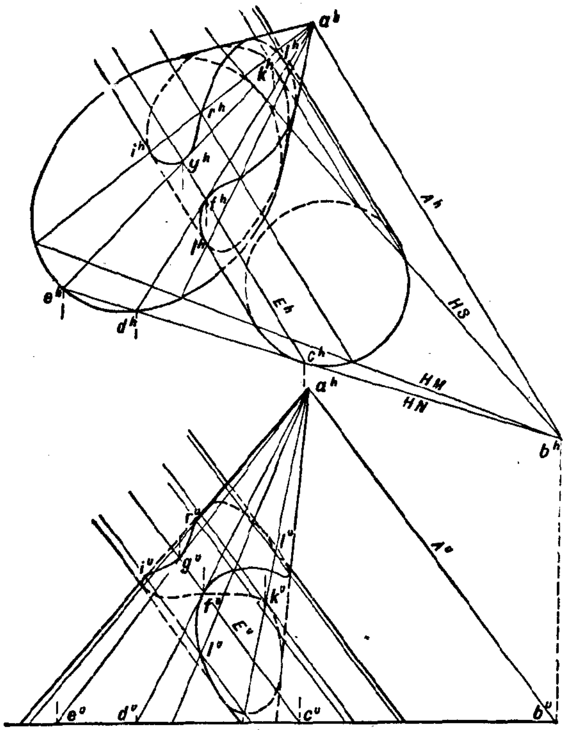


圖 201.

152. **切割平面之次序及選擇.** 先作切面，俾決定曲線之極限點 (limiting point) 如 f,g,k,l 等；並決定相交曲線爲數是一是二(見第 153 節). 次作諸平面切割二視圖中之圓素線. 平面 M 爲其一例，以其切割柱之水平投影之一圓素線，決定點 i 及 l(曲線水平投影之極限點)也.

153. 決定相交曲線爲數是一是二. 柱面錐面相交，究有交線若干，可於未求交線上諸點之前，先行決定. 視察圖 201，可見僅有一連續相交曲線，此蓋由於柱面之二輔切面中，僅有一平面切割錐面. 圖 202 所示爲柱面、錐面及平面之跡，圖中之曲面因其大小或位置關係，柱面直接穿過錐面. 柱面之二切面均切割錐面，故有二相交曲線. 圖 203 中，錐面之二切面切割柱面，錐面穿過柱面，故有二獨立相交曲線. 圖 204 所示之情形卽第 151 節中之題目，表示僅有一相交曲線.

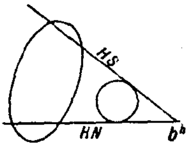


圖 202.

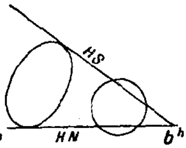


圖 203.

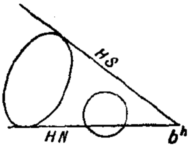


圖 204.

154. 求曲線之可見部分. 1. 相交曲線上一點，若在物體之不可見素線上，則不可見. 2. 相交曲線爲二曲面公有，故須在二曲面之前方，始可見於垂直投影中. 3. 相交曲線須在二曲面之上方，始可見於水平投影中. 4. 自可見轉移至不可見部分之點，恆在一曲面之一圍素線上. 圖 200 中錐面柱面相交，僅示可見部分.

155. 求作二柱面之相交曲線，二者之軸傾斜於二坐標平面.

〔原則〕 平行於二柱軸之各輔平面切割每柱之素線；素線之交點在所求曲線上. 因輔平面平行於二軸，故輔平面彼此平行，彼等之跡亦平行.

〔方法〕 1. 過一軸作一平面平行於另一軸（第 76 頁，第 90 節），此卽爲輔平面之一，其他所有切割平面均須與之平行. 2. 決

定相交曲線有一有二. 3. 先用各切面作輔平面通過每視圖中之圍素線,若所求之點爲數尙嫌不足,可加用其他平面. 4. 作曲線,用第154節之法定其可見部分.

156. 求作二錐面之相交曲線,二者之軸傾斜於二坐標平面.

〔原則〕 包含二錐頂點之輔平面切割每曲面之素線. 故所有切割平面均包含二頂點之連線; 輔平面一切跡均交於頂點連線之跡上.

此題解法與第128頁,第151節之法相似.

157. 求作一橢面及一斜柱面之相交曲線.

〔原則〕 用諸輔柱面,其軸平行於斜柱面之軸, 並與橢面之軸相交, 其截口之形狀以能從橢面割圓, 從柱割素線爲度.

〔作圖〕 圖205. 於垂直投影內作任何緯圈 b^vc^v; 設想此緯圈之水平投影爲一輔柱之水平截口, 輔柱之軸爲 de. 輔柱之水平跡爲以 e^h 爲心之一圓, 其直徑等於 b^vc^v,因所有之水平截口相等

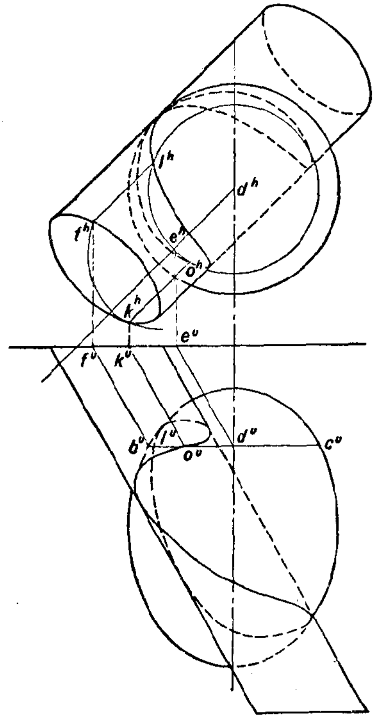


圖 205.

也。已知柱及輔柱之底交於 f 及 k，此卽二柱公素線上之點。此二素線交緯圈於橢面上 l 及 o 二點，l 及 o 爲橢面及斜柱面之公點，故在所求曲線上。同此，求其他各點，其數以能作平滑曲線爲度。

158. 求作一環面及一柱面之相交曲線，二者之軸均垂直於水平坐標平面.

〔原則〕 垂直於二軸之各輔平面割二曲面於圓，圓之交點爲二曲面公有。或用環面之子午平面代輔平面亦可。環面之子午平面割柱於素線，割環面於子午線；素線與子午線之交點在所求曲線上。

〔方法〕 1. 用包含柱軸之一子午切割平面 (meridian cutting plane)，以求環面內外曲面上相交曲線之最低點。2. 用包含柱圍素線之子午切割平面，以求相交曲線與圍素線之切點。3. 用一輔平面切割最高緯圈，以求曲線上最高點。4. 用其他諸輔平面切割環面於緯圈，切割柱於圓，以求中間各點。

〔作圖〕 圖 206. 過柱之軸作環面之子午平面，割柱面之二素線及環面之一子午線。將此平面依環面之軸迴轉，使平行於 V. 在此位置，二素線之垂直投影爲 A_1^v 及 B_1^v；二者與環面子午線之交點爲 c_1^v 及 d_1^v。轉回之，二點遂至 c^v 及 d^v，於是決定環面內外曲面上曲線之最低點。子午平面 N 及 M 割柱面之圍素線，同前求得圍素線與環面交點之垂直投影，e^v 及 f^v。如此進行之，當可求得一切交點。否則，用切割緯圈之平面亦無不可，如 R 及 S 卽是。R 切於環面之上面，割環面及柱面之處均爲圓，諸圓交點爲 k 及 l. 求曲線上其他必需之點，均可依照用輔平面 S 求點之法.

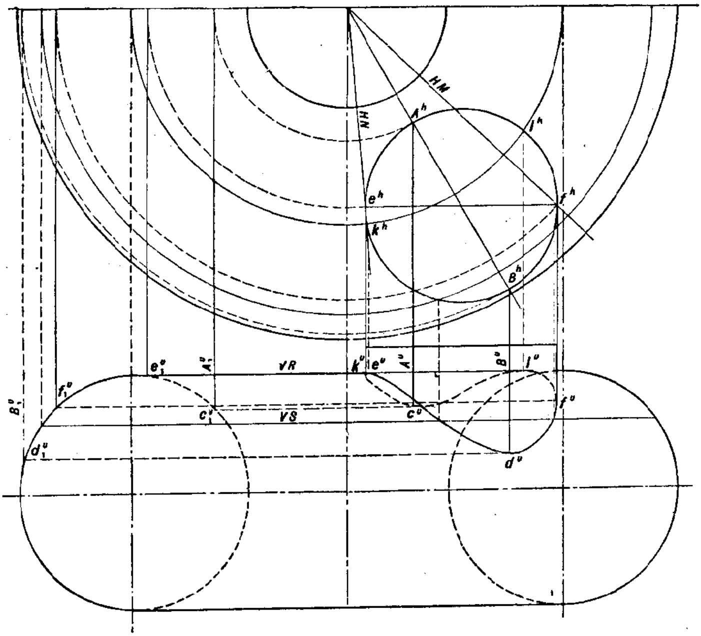


圖 206.

159. 求作一橢面及一拋物面之相交曲線，二者之軸相交，且平行於垂直坐標平面.

〔原則〕 以二廻轉曲面軸之交點爲心之輔球面，割相交二曲面之處爲圓，圓之一投影爲直線.

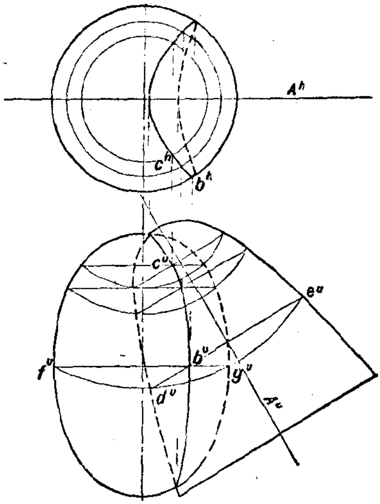


圖 207.

〔作圖〕 圖 207 示此情形. 圖中略去抛物面之水平投影，因決定相交曲線，僅需二曲面之垂直投影及橢面諸緯圈之水平投影也.

第八章　翹曲面

160. **翹曲面.** 翹曲面[註]爲直紋面，由一直線之移動而產生，其相鄰位置不在同一平面內. 控制直動線之法有二:

1. 動線與三直準線相接觸.

2. 動線與二直準線相接觸，同時平行於一平面或一種曲面. 若此控制面爲平面，稱準平面. 若爲錐面，則稱準錐面；動線移動時應順次平行於其各素線.

下列諸型將在本章中討論，其爲首二型用以表現翹曲面之特徵.

一面之動線由三曲準線控制者.

一面之動線由二曲準線及一準平面控制者.

雙曲拋物面爲翹曲面之一種，其動線由二直準線及一準平面控制.

斜螺旋面爲翹曲面之一種，其動線由二曲準線及一準錐面控制.

一葉之迴轉雙曲面爲翹曲面中惟一之迴轉曲面，可用數法產生之.

161. **已知三曲準線及一點(在其中一曲準線上)，求作翹曲面**

註. 研讀是章之前，應複習第四章中面之分類，而尤重第 94 及 95 頁，第 116 及 117 節有關翹曲面之部分.

上通過此點之素線之二投影.

〔原則〕 自已知點(在一準線上)至他一準線上任意所取之各點，作各直線；此諸線爲一錐面之素線. 若求得此錐面與第三準線之交點，此點卽在輔錐面一素線上，此素線旣與三準線相接觸，當亦爲翹曲面之素線.

〔方法〕 1. 於非已知點所在之一準線上，取任意數點，自各點作直線至已知點，直線卽輔錐面之素線. 2. 求輔錐面與第三準線之交點. 3. 過此交點及已知點作所求素線.

〔作圖〕 圖 208. A,B 及 C 爲一翹曲面之三曲準線. 已知 A 上一點 d，今欲作過 d 之曲面素線. 於 C 上任取點 e,f,k 及 l，作諸線至 d. C 旣爲曲線；適才所作各線當爲錐面之素線. 玆作 B 之水平投影柱面 (horizontal projecting cylinder) 以求準線 B 及輔錐面之交點，故 B^h 爲該輔柱面之水平跡，亦爲輔錐面與輔柱面交線之水平投影. 水平投影中，錐面素線與柱面素線之交點爲 n^h,m^h,r^h 及 s^h. 諸點之垂直投影爲 n^v,m^v,r^v 及 s^v，均在相交曲線之垂直投影上. 由是得點 o，卽爲準線 B 與輔錐面之交點. o 必在輔錐面上，因其在柱面與錐面之相交曲線上也；是故過 o 所作之素線交錐面之準線 C. doj 旣與三準線 A,B 及 C 相接觸，故卽爲翹曲面之一素線.

162. 已知二曲準線及一準平面，求作翹曲面之一素線.

款 1. 此素線須過一準線上一已知點.

〔原則〕 若作一平面過已知點平行於準平面，則交他準線於一點. 聯接此點與已知點之線爲翹曲面上一素線，平行於準平面

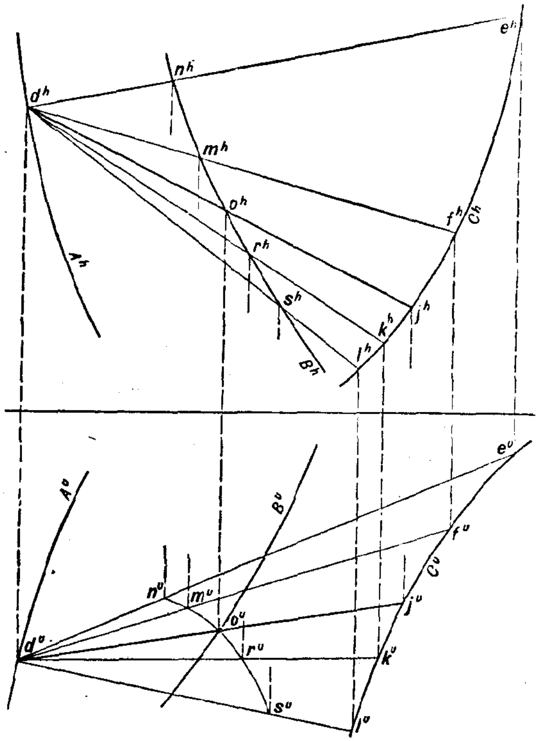


圖 208.

且與二準線相接觸.

〔方法〕 1. 過準平面上任點作此平面之發散線. 2. 過已知點作數直線平行於發散線. 3. 用第二準線之投影柱面,以求含2中諸直線之平面與第二準線相交之點. 4. 聯接交點與已知點.

〔作圖〕 圖 209. 已知準線 A 及 B,準平面 N,點 d 在 A 上. 從準平面上任點 c,作發散線 E,F 及 G. 過點 d 作 dt,ds 及 dr 平

行於準平面上三線，於是得平行於 N 之平面．此平面與 B 之水平投影柱面相交，其相交曲線之垂直投影爲 $r^v s^v t^v$．此曲線與 B 之交點爲 m，故 dm 爲翹曲面上所求之素線．

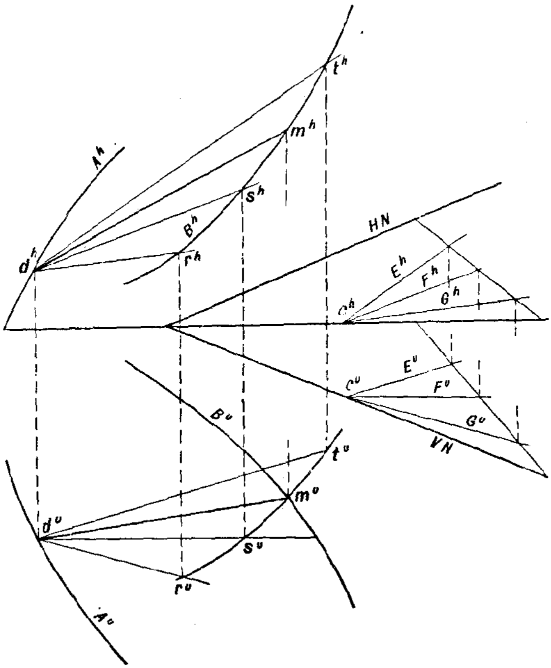


圖 209.

163．款 2．此素線須平行於準平面上一線．

〔原則〕　若作一輔柱面，其準線爲已知二曲準線之一，其素線平行於已知線，其中一素線交於他一曲準線．此素線平行於已知線，且與二準線相接觸，故爲翹曲面之一素線．

〔方法〕 1. 過一準線上任意之數點，作直線平行於準平面內之已知線，於是得一輔柱面. 2. 求此柱面與第二準線一投影柱面(水平或垂直均可)之相交曲線. 3. 過此曲線與第二準線之交點，作平行於已知線之所求素線.

〔作圖〕 圖 210. 已知準線 A 及 B，準平面 N，及平面上一線 C. 於 A 上假定 e, f, k 及 l 諸點，過之作直線平行於 C，以爲輔

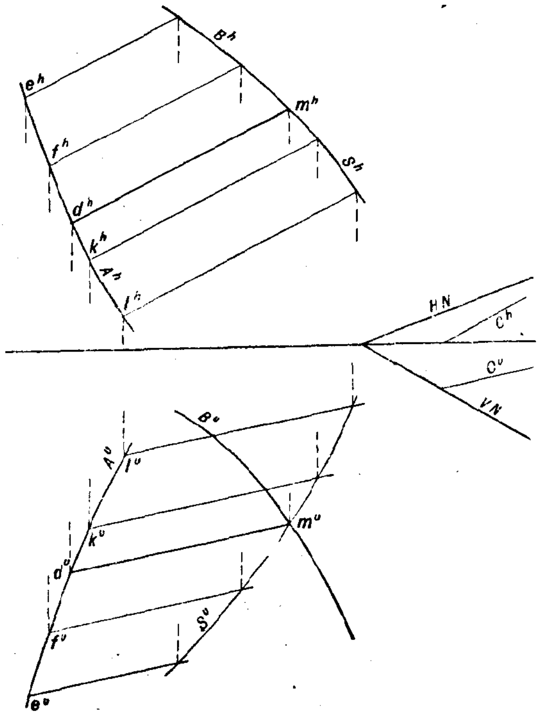


圖 210.

柱面之素線．此過 A 之輔柱面交 B 之水平投影柱面，其相交曲線之垂直投影為 S^v．輔柱面與準線 B 公有點 m，故 dm 為翹曲面之所求素線．

164．第 161 及 162 節中翹曲面之變相． 若將第 161 及 162 節中之二種翹曲面稍加更改，可得一切翹曲面．

於第一型中，三準線可全為曲線，全為直線，或兼有直線與曲線．於第二型中，有二準線及一準平面，準線亦可直可曲，平面則可以錐面代之．如此，可產生一切直紋面．

165．雙曲拋物面． 若第 162 節中之二曲準線改為直線，而控制動線者仍繼續為一準平面，則所產生之面為雙曲拋物面．所以如此命名者，以其剖面或為拋物線或為雙曲線也．圖 211 及212 表示此面．圖 211 中，A 及 B 為準線，H 為準平面．在各位置之動線(或素線)以虛線表之．各素線分二準線成比例，故作素線時，可將二準線分成同數之等格，再依次聯接分點．

若設想素線 D 及 C 為準線，P 為準平面，亦可產生此面．若

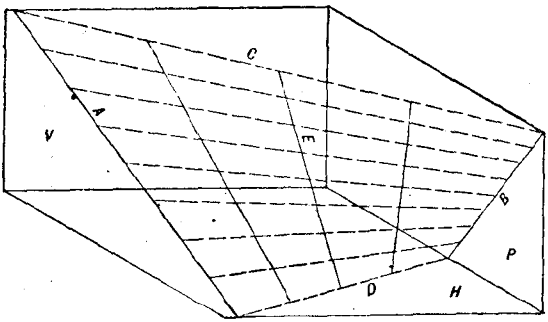


圖 211．

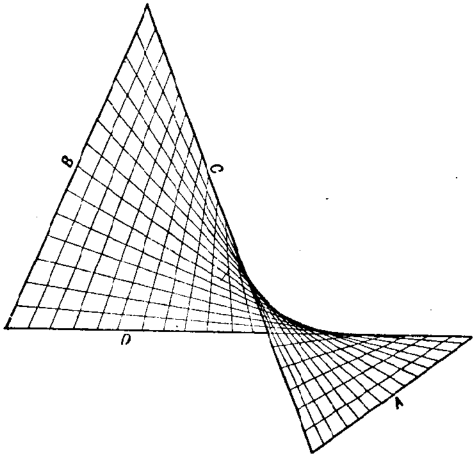


圖 212.

是則素線平行於 P，且分準線 C 及 D 成比例.

若以線 A，E 及 B 爲三直準線，控制動線 D 之行動，亦可產生此面. 然三準線若非平行於同一平面，則所產生之面，性質卽行

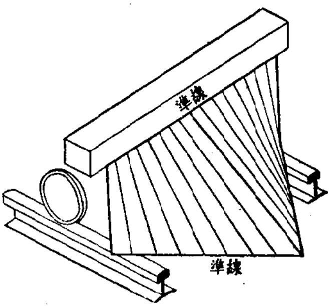


圖 213.

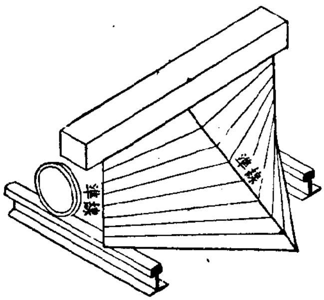


圖 214.

改變，而成爲一葉之雙曲面.

火車頭之排障器爲由二雙曲拋物面所構成，二面對稱於火車頭中心之垂直平面．此爲該面饒有興趣之一應用．圖 213 及 214 表示普通應用之型．前圖中之準平面爲鉛直者，且平行於軌；後圖中之準平面爲水平者．

166．過一準線上一點，求作雙曲拋物面之一素線．

〔原則〕 若有一平面包含已知點，平行於準平面，則所求素線必在其內．此輔平面與他一準線之交點，爲此素線之第二點．

〔方法〕 1．過已知點作二線，各平行於準平面之一跡（第 75 頁，第 87 節）． 2．求該二線之平面與他一準線之交點（第 63 頁，第 72 節）． 3．聯接交點及已知點．

〔作圖〕 圖 215．已知準線 A 及 B，點 n．過 n 作 E 平行於平面 N 之水平跡，作 F 平行於垂直跡．二線決定平行於 N 之一平面．次求該平面與準線 B 之交點．此點爲 m，故 mn 爲所求素線．

167．雙曲拋物面上一點之一投影已知，求他一投影，並作一素線過此點．

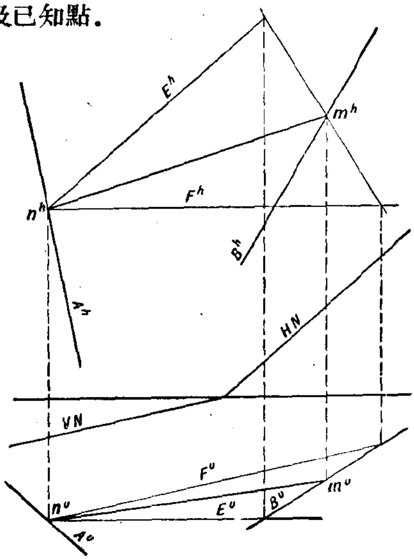


圖 215.

〔作圖〕 圖 216. 雙曲拋物面之準線爲 A 及 B, 準平面爲 N. 此翹曲面上一點之水平投影 m^h 爲已知. 過 m 作 mg 垂直於 H, 並求其與翹曲面之交點如下:

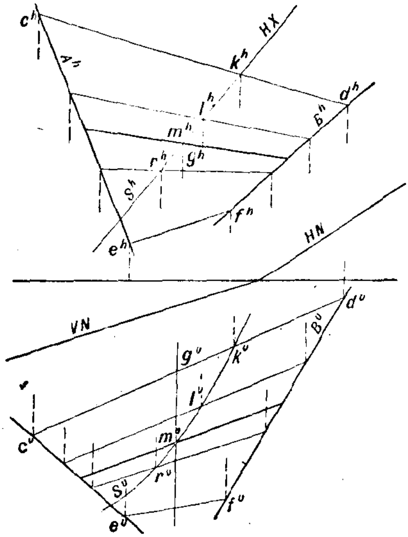


圖 216.

於準線近端之處, 作二素線 cd 及 ef (第 143 頁, 第 166 節), 其作法從略. 將二準線在 cd 及 ef 間之部分分成同數之等格, 依次聯接分點, 以求翹曲面之素線(第 141 頁, 第 165 節). 過垂線 mg 作一輔平面 X. X 交三素線於 k, l 及 r; 聯接諸點之曲線 S 卽爲輔平面 X 與翹曲面之交線. 曲線 S 與垂線 mg 均在平面 X 內, 二者之交點必爲垂線與翹曲面所公有. 故 m^v 及 m^h 爲所求點之投影.

欲得所求素線, 作一平面過此點 m, 平行於準平面 N, 並求輔平面與一準線之交點 (第 143 頁, 第 166 節). 過此交點及點 m, 作所求素線. 作法從略.

168. **翹曲螺旋面** (Warped Helicoid). 設圖 217 中之線 bc, 依線 cd 爲軸均勻迴轉, 迴轉時 bc 與水平面成定角 θ, 同時不離軸而沿軸均勻上升. 線 bc 內每點(除與軸接觸之一點外)產生一

螺旋線，其螺距不變；bc 所產生之面稱爲斜螺旋面． 軸及點 b 所成之螺旋線可視作二準線，與螺旋面共軸之錐面爲準錐面，錐面之素線與 H 成角 θ．

螺旋面亦可以二螺旋準線及一準錐面，控制動線而產生之，如圖 218 所示．

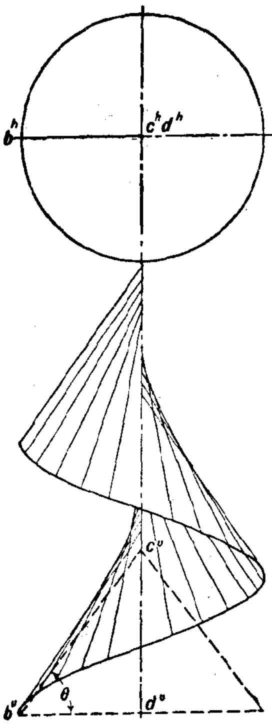


圖 217.

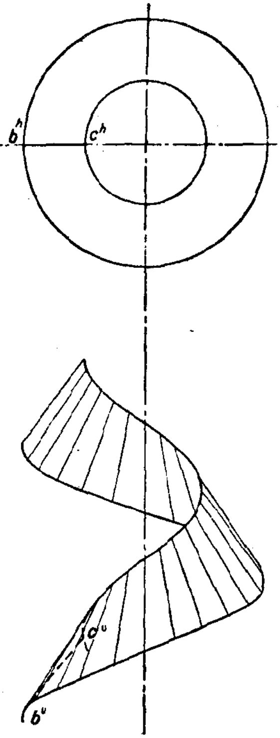


圖 218.

再者，螺旋面亦可由三準線產生之，於圖 218 中卽爲二螺旋線及一軸. V 紋螺旋（V-threaded screw）爲斜螺旋面最熟知之應用（第 95 頁，圖 174）.

169. **正螺旋面.** 若動線垂直於軸，如圖 219 所示者，其準線與前此所述者同，惟準錐面變爲準平面，由是產生之面爲正螺旋面

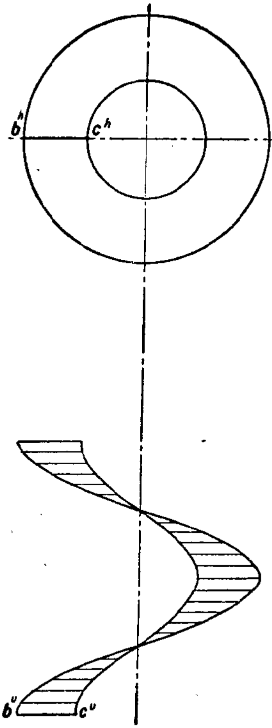


圖 219.

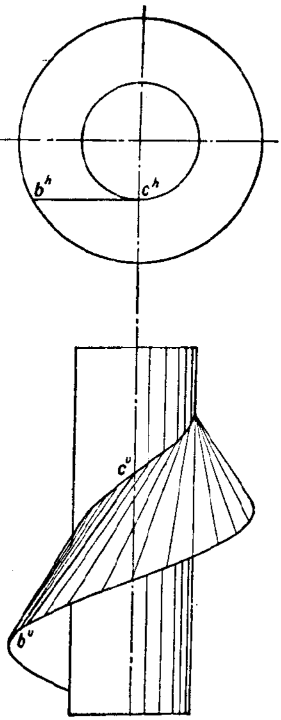


圖 220.

(right helicoid)．此種面可由方紋螺旋(square-threaded screw)(第95頁,圖173)表示之．

170．**翹曲螺旋面較一般之型式．** 動線若非如以前各例之與軸相交,則可得一更普遍之面型,如圖220． 此圖中之動線由二螺旋準線及一準錐面控制;此動線切於一柱面,內螺旋線即在其上．

171．**一葉之迴轉雙曲面．** 此爲一迴轉曲面，由雙曲線依其共軛軸迴轉而成，如圖221．此面亦爲一翹曲面，因其可由一直線依一軸迴轉而產生，此直線既不相交於軸，亦不與之平行． 更有進者，控制此直動線之行動者可爲三直準線,三曲準線,或二曲準線及一準錐面．

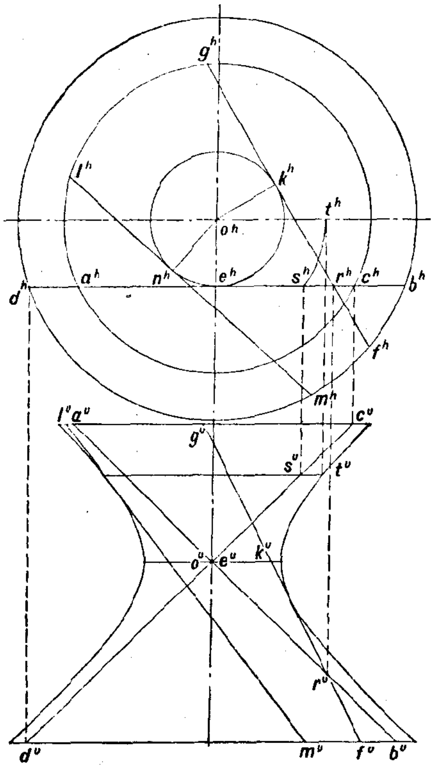


圖221．

圖221中，設想動線 cd 與水平面成定角 $c^v d^v b^v$,並依通過 o 之垂直軸迴轉．點 c 在上底產生圓 cgl,點 d 在下底產生圓 dmf，與軸距離

最近之點 e 作成圓 ekn，稱爲扼圓 (circle of the gorge)． 動線之每點均如此作圓，諸圓卽爲此曲面之緯圈．旣定緯圈，遂可定子午線，是爲一雙曲線． 動線上之點 s，迴轉至主子午平面內時爲 t，t^v 爲垂直投影中圍線(一雙曲線)上一點．

172．**求作一素線過此曲面上任一點．** 若此點僅一投影已知，則作過此點之緯圈，以求另一投影． 過此點之水平投影，作扼圓之切線，卽爲所求素線之水平投影，其兩端在曲面上下二底之水平投影上． 通過此已知點可作二切線，故有二素線，其與水平坐標面所成之角相等．

173．**此面之動線，可由三直準線管理之．** 圖 221． 若過扼圓上點 e 作二素線 ab 及 cd，二者均可作爲曲面之動線． 其一稱爲首次產生之素線 (element of the first generation)，他一稱爲再次產生之素線(element of the second generation)．

設 ab 固定，而 cd 爲動線．依軸迴轉時，cd 與 ab (或兩者之引長線)恆相交．此可證之如下：若 cd 迴轉至 gf 之位置，ab 與 gf 二者之水平投影相交於 r^h． r^h 與二切點 e^h 及 k^h 等遠；又因 ab 及 gf 與 H 成等角，er 及 kr 必等長；是故 r 必爲 ab 及 gf 之交點． 若以 ab 爲動線，則必相交三素線 cd，gf 及 lm，故三者可視爲準線．

如以三緯圈爲準線，亦能充分控制動線之行徑．

174．**此動線可由二曲準線及一準錐面管理之．** 圖 221． 因曲面之素線平行於頂角爲 $d^ve^vb^v$ 之錐面之素線，故此錐面可認爲準錐面．同時此動線復受曲面之二緯圈控制，此二緯圈或爲二底，或爲一底及一扼圓．

175. **過此曲面上任一點作其切面.** 過此點作一首次產生之素線及一再次產生之素線，此二素線所決定之平面，即曲面在此點之切面. 圖 221 中，由線 ab 及 gf 決定之平面切曲面於點 r.

176. **過一直線求作一平面切於任何迴轉複曲面.** 用一葉之迴轉雙曲面作爲輔曲面，對於求作一迴轉複曲面之切面，即可得一一般之解法如下：

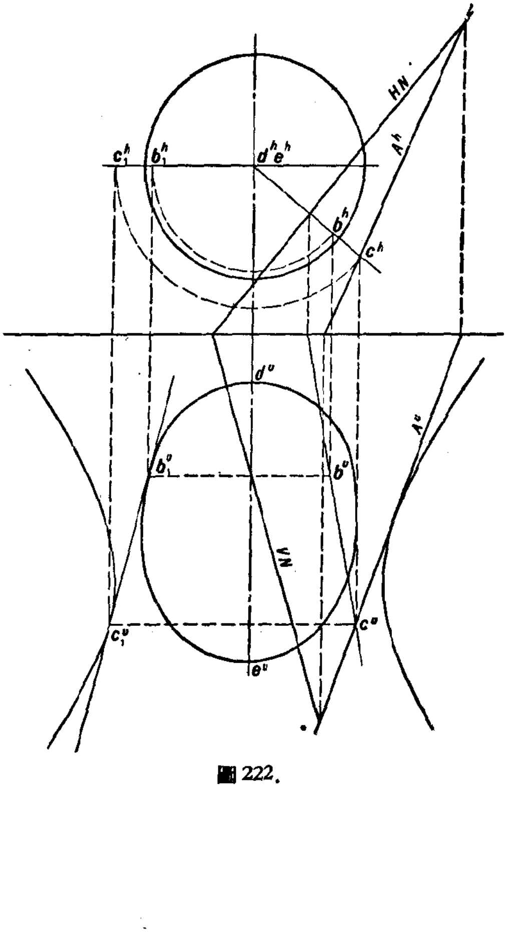


圖 222.

〔原則〕 若將已知直線依迴轉複曲面之軸迴轉，則產生一迴轉雙曲面．切於二曲面且包含已知線(已知線乃一曲面之一素線)之平面卽爲所求者． 因過一切點僅能作一子午平面垂直於切面，又因二迴轉曲面之軸公有；故該僅有之子午平面於切面上割一線，此線通過二曲面上之二切點，並切於二子午線． 此交線與已知線決定切面．

〔方法〕 1．作以已知線爲動線之迴轉雙曲面． 求其主子午截口 (principal meridian section)． 2．作一直線切於二面之主子午截口． 3．將此線依曲面之軸迴轉，使與已知線相交；切線在雙曲線上之切點，卽爲已知線上一點． 4．求含切線與已知線之平面．

〔作圖〕 圖 222．以已知線 A 爲動線，作就迴轉雙曲面之後，畫 $c_1{}^v b_1{}^v$ 切於二子午線． $c_1{}^v b_1{}^v$ 卽爲二曲面之切線迴轉後之垂直投影． 轉回後，此線交已知線 A 於 c，卽爲切點 c_1 轉回後之位置；其所以如此者，因 A 爲迴轉雙曲面之一素線，必與過 c_1 之緯圈相接觸也． 點 b_1 轉回後爲 b． bc 爲切面上一線． 平面 N 含 bc 及已知線 A，故爲所求切面．

第九章　寫生式之投影

透視投影等角投影及斜投影

177. 透視投影或錐形投影(Conical Projection). 此項投影與正投影相異處爲投射線收斂於一公點,而非彼此平行者. 第2頁,第3節中曾簡短介紹其原則,說明畫面、視點 (point of sight) 及圖畫 (picture) 之意義,並謂作透視投影之方法在於求視線(visual ray)或投射線與投影面或畫面之交點.

投影幾何中討論之透視投影問題大致如下:已知一點及其視線(或投射線)之方向,欲求此投射線與一已知平面之交點,此交點卽爲圖畫(或稱該點之透視投影). 圖 223 爲一矩形塊之水平投影及側投影,今欲藉投射線將該塊投影至 V,然所有之投射線必需通過一點 s,其三投影 s^v,s^h 及 s^p 已知. 此與正投影之相異處僅在用一套新投射線而已. 矩形塊上點 b 之投射線(或視線)之水平投影爲 $b^h s^h$,側投影爲 $b^p s^p$. 此投射線交 V 於 b',卽爲所求點 b 之投影(或透視). 同此,得物體之其他各點,聯接後遂得該物體之透視圖 (perspective drawing) 或錐形投影. 點 s 稱爲視點,或稱物體諸點視線錐之焦點. 過 s^v 之水平線稱視平線(horizon),此線與人目(或視點)等高.

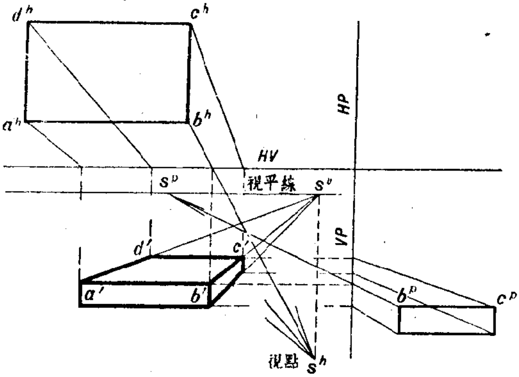


圖 223.

178. **平行線之透視投影.** 用上節所述之法，求物體各點在畫面上之位置，未免累贅. 蓋稍加觀察，可見該物體之一切水平平行線交於圖内一點；此點位於視平線内，稱爲該線系之沒影點 (vanishing point). 諸平行線若垂直於畫面，則交視平線於視點，而諸線遂見縮短. 諸平行線若平行於畫面，則交視平線於無窮遠處，並不縮短. 鉛直線於畫面上始終鉛直.

179. **應用對角線作透視.** 圖 224 中之底座卽爲圖 223 中之矩形塊 $abcd$，且亦以同法求得其透視. 底座上置較小之三矩形塊. 圖中所示之作圖法，並不用前此所用之水平視圖及側視圖作爲輔助. 此新作圖法爲第 178 節所述原則之應用，因在透視中，非平行於畫面之諸平行線收斂於一點，故可利用此線系量度線之長短. 玆假定相同三矩形塊底邊與底座相當底邊之比等於 $e'f'$ 與 $a'b'$ 之比. 過 e' 及 f' 作諸線，收斂於 s^v (vp)，以表平行於 $b'c'$ 之

線．作底座之對角線 $b'd'$，由其與平行線 $f's^v$ 及 $e's^v$ 之交點，可作平行於 $a'b'$ 之諸線，於是求得新矩形之底．

今假定新矩形塊之高等於底座之高之三倍，則可求其透視如下：透視中長度之比較須於平行畫面之一平面內爲之；故延長 $k'l'$ 以交 $b'c'$ 於 m'，$m'n'$ 表底之單位高度，由是可作 $l'o'$．點 o' 既定，遂可作上底之透視．同法求他二矩形塊．請注意鉛直面上之對角線．

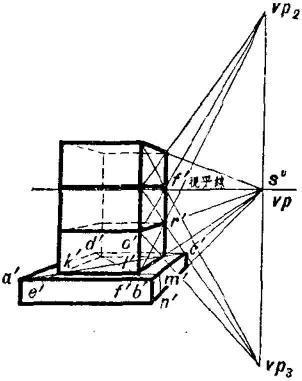


圖 224.

180．**作傾斜於畫面之物體之透視投影．** 圖 225 示一三角柱之透視．三角柱之一面水平，然無平行於 V 之稜．

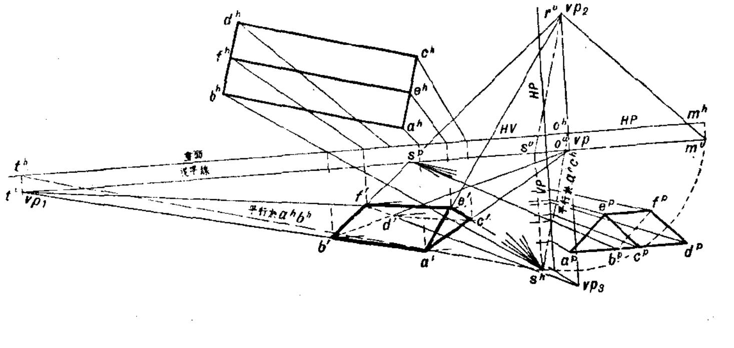


圖 225.

已知水平投影及側投影，可用第 152 頁，圖 223 之法求透視投影．既作透視投影之數線後，可見此物體有四平行線系，即有四沒影點：水平線有二沒影點 vp 及 vp_1，斜稜亦有二沒影點 vp_2 及 vp_3．

然沒影點亦可以先行求出． 求任何平行線系之沒影點，可作一線通過視點，而後求此線與畫面之交點．

ab 平行線之水平投影爲 s^ht^h，其與畫面交點之垂直投影 t^v (vp)在視平線上．ac 平行線之水平投影爲 s^ho^h，其與畫面交點之垂直投影 o^v (vp) 在視平線上． 斜稜 ae 平行線之水平投影爲 s^ho^h；欲求其垂直投影 s^vr^v，先於 m^v 作 m^vr^v，此線與地平面 (ground plane)，即水平面，所成之角等於斜稜 ae 與地平面間之角；將 m^vr^v 轉回之，即得 s^vr^v． 斜稜 ce 沒影於 vp_3，vp_3 與 vp_2 離視平線之距離相等．

181．求作一紀念碑之透視投影，此碑之正投影已知．

圖 226 爲其三正投影．於圖 227 中，先假定視點、畫面及物體上視圖之位置．此處該物之一稜觸及畫面，故並不縮短． 次之，再假定地平線，即畫面與物體所在面之交線． 視平線離地平線之遠等於視點在地面上之高度． 再求平行於底稜 ab 及

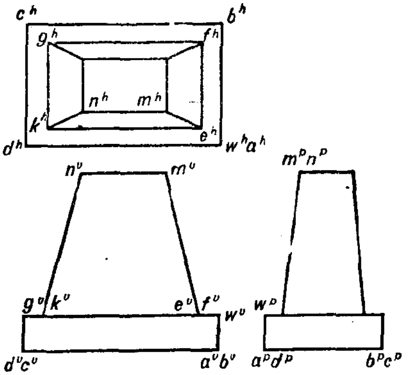


圖 226.

ad 之水平線系之沒影點，vp^v 及 $vp_1{}^v$． 底之鉛直稜 aw 與畫面接

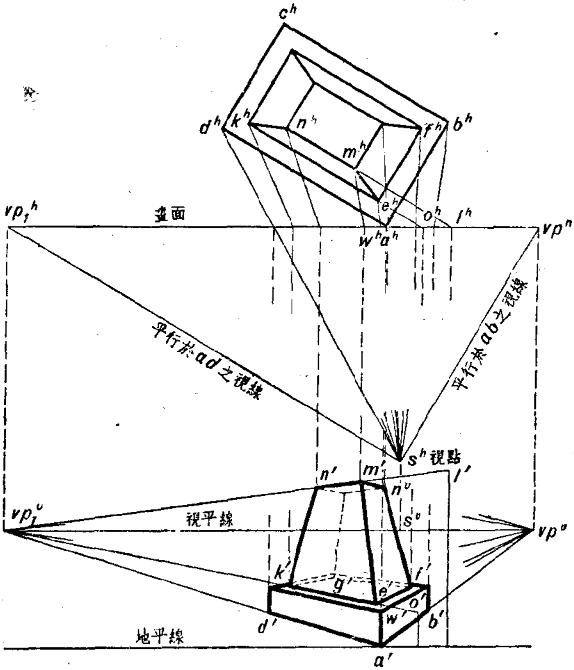


圖 227.

觸，故透視中之 $a'w'$ 爲其眞實高度． 由此數點及上視圖及沒影點，可求全部底座之透視投影，此與以前所述者同．

求上底內任一點 e' 之透視時，延長平面圖內之稜 k^he^h，使與畫面交於 o^h，其透視爲 o'；o' 與 w' 等高，因其在畫面上也． 於是可作線 $o'vp_1^v$，定點 e' 及 k'，並作底 $e'f'g'k'$ 之透視． 同此，求上底內之點 m'：延長 n^hm^h，交畫面於 l^h，其透視爲 l'；l' 之高等於圖 226 中點 m 與 n 之高．

182. **透視法中名詞之定義.**

〔畫面〕 一投影面,其上作有物體之透視圖.

〔視點〕 任意假定之一點,由此點觀察物體以作其透視圖.

〔視線〕 從物體任點至視點之一投射線.

〔視平線〕 畫面與含視點之水平面相交之線.

〔沒影點〕 畫面內一點,平行線系中所有之線消失於此. 若諸線爲水平者,沒影點在視平線內.

〔地平線及作圖象限〕 於透視圖內, 通常將物體置於第二象限內. 故平面 H 代表地平面(卽安放物體之面),其與 V(卽畫面)之交線,稱爲地平線(GL). 以前之投影幾何著作咸用 GL 代 HV,其實用後者表水平與垂直坐標平面之交線,似較合邏輯.

183. **等角投影及斜投影.** 用透視法表示物體, 往往嫌其繁複, 又未能用縮尺作畫; 故通常應用不等角投影 (axonometric projection) 及斜投影 (oblique projection), 以作物體之圖畫. 此二法中均僅需一視圖卽可,故稱一面法 (one-plane method). 不等角投影中包括等角投影,所用之投射線垂直於投影面;斜投影中之投射線則傾斜於投影面.

184. **不等角投影.** 在此法中,物體所放之位置,須能使互相垂直之三軸之縮短度成某種固定比例. 而凡平行於三軸之線,均可用特殊之比例尺量度. 於等角投影 (圖 228)中,三軸與投影面成等角,故縮短度相等. 於圖 229 之兩等角投影(dimetric projection) 中,二軸之縮短度相等,第三軸縮短至前二軸之半. 於三度投影 (trimetric projection) 中,三軸之縮短度均不相等,此

法之應用範圍較小.

185. **等角投影.** 此爲不等角投影中最常用之一種. 將物體放於某一位置, 使其互相垂直之三軸與投影面所成之角相等, 此時所作之正投影卽爲等角投影; 故投影圖上三軸縮短度相同.

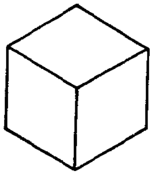


圖 228.

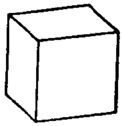


圖 229.

將一立方體依圖 230,231 及 232 之法迴轉之, 可得等角投影所需之位置. 圖 231 表圖 230 中之立方體依垂直於 H 之軸迴轉 45° 後之三視圖 (用第 15 頁, 第 14 節之法). 於垂直投影中, 稜 cd,cb 及一切與其平行之稜均有相同之縮短度. 次將立方體自圖

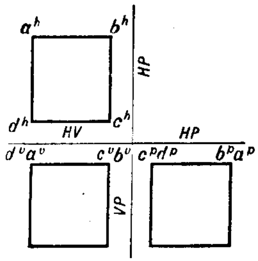


圖 230.

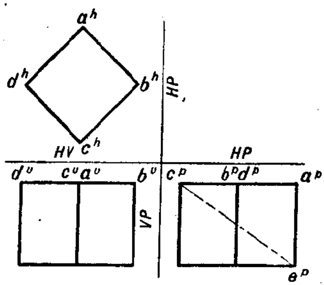


圖 231.

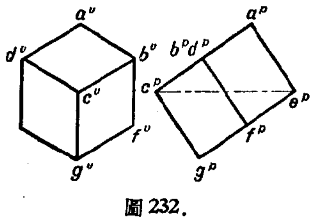


圖 232.

231 之位置迴轉至圖 232 之位置．此乃將其依垂直於 P 之軸迴轉 35°15′52″，使對角線 ce 成水平． 於是在垂直投影中，一切稜之縮短度相等，卽縮成眞實長度之.81649，與 HV 所成角或爲 30°，或爲 90°． 此垂直投影卽爲該立方體之等角投影；各稜之縮短度旣相等，遂可用一特製比例尺作圖，此尺之一寸實際上爲.81649″．請注意三對角線 d^vb^v，d^vg^v 及 b^vg^v 爲眞實長度（非等角投影之比例尺），因彼等平行於 V 也，然三面之其他對角線則旣非眞實長度，亦不依等角投影之比例尺縮短．

186．**等角畫**(Isometric Drawing)． 用等角投影之比例尺作物體縮小之圖形，諸多不便；故物體之各邊雖平行於三等角軸(isometric axis)，作圖時仍有應用普通比例尺者．如此乃得物體之放大視圖．圖 233 中所示者，一爲眞等角投影，一爲此放大之視圖（稱爲等角畫）；二者自圖畫觀點視之，效果相同．

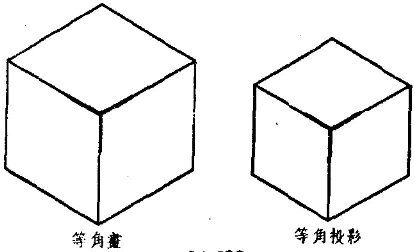


圖 233.

187．**非等角線**(Non-Isometric Line)．平行於等角軸之線，其方向及長度極易確定；求不平行於等角軸之線時，非用平行於軸之坐標不可． 今欲求圖 234 中圖形之等角畫，該圖形中諸邊彼此旣不平行，亦不垂直，僅一邊與一等角軸 XX 疊合． 茲設第二軸 YY 通過一點，遂可求其他各點之坐標，如圖 235 所示．

圖 236 示一嵌線(molding)剖面之輪廓及等角畫，並示用坐

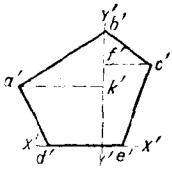


圖 234.

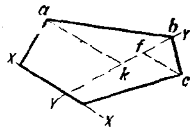


圖 235.

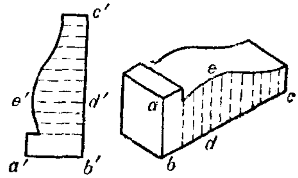


圖 236.

標法求曲線之等角畫. 線 *ab* 及 *bc* 作爲等角軸. 若欲求曲線上點 *e*，可先作 *bd*，再作 *de*. 曲線上其他各點之求法同此.

圖 237 爲正投影，示四平面構成四角 0°，15°，30° 及 45°. 圖 238 爲諸角之等角畫.

188. 圓之等角畫. 圖 239 爲一立方體之等角畫，立方體之上面及左面均有一內切圓. 上面之圓用近似法求得，左面之圓爲用等角畫作成者. 圓之等角畫爲橢圓，故祗需求得長軸及短軸，即可用第 189 頁，第 232 節之梁規法作橢圓. 二軸在對角線 *dg* 及 *hc* 上，二軸之端可以下法求得：對角線 *dg* 及 *hc* 均爲非等角線，*dk* 之

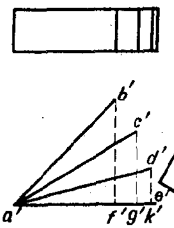


圖 237.

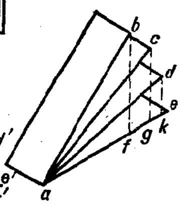


圖 238.

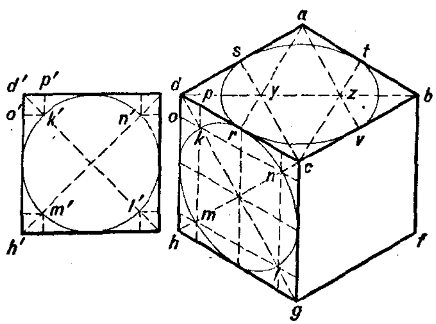
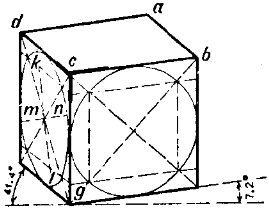


圖 239.

長不能量得；故欲得 dk，必先作平行於等角軸之 pk 及 ok；pk 及 ok 等於左首正方形內之 $p'k'$ 及 $o'k'$. 於是求得長軸之一端 k. 過 k 作 kn 平行於 dc，與另一對角線交於 n，卽爲短軸之一端. 再得 m 及 l，用梁規法作橢圓.

立方體上面所示之作圖法爲簡易之近似法，用途甚廣. 其法如下：平分立方體之各稜，過平分點，如圖 239 中之 s，t，r 及 v，作各稜之垂線，必與頂點 c 及 a 相交. 以彼等之交點 y 及 z 爲心，作弧 rs 及 tv；以 c 及 a 爲心，作弧 st 及 vr.



兩等角投影

圖 240.

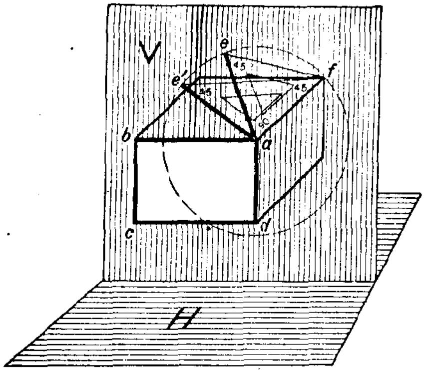
189. **兩等角投影.** 此爲不等角投影之一種，其互成垂直之三軸(或一立方體之三稜)中有二軸(如圖 240 中之 cg 及 cb) 與投影面成同等傾斜，其第三軸(cd)縮爲 cg 及 cb 之一半. 三稜與水平線所成之角爲 7.2°，41.4° 及 90°. 此法之弊爲需用二特製三角板及二比例尺.（一比例尺量度平行於 cg 及 cb 之線，爲原來之長；一比例尺量度平行於 cd 之線，爲原長之半）. 然等角畫中圖形失眞，此則能免其弊.

曲線及不平行於軸之線須用坐標求之，與作等角畫時同.

190. **斜投影.** 以前所述之投影法中，投射線或垂直投影面(如正投影)，或與投影面成各種角度而收斂於一點（如錐形投影或透視投影）. 斜投影則與此不同，蓋其投射線彼此平行而傾斜於投影面.

圖 241 示一置於透明投影面後之矩形柱之透視，其水平稜 af

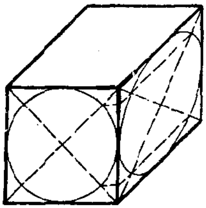
與一三角板之一直角邊相接觸。三角板之另一直角邊與投影面相接觸；其斜邊一端在稜 af 之端 f 上，另一端接觸於投影面。設想此斜邊 ef 爲一投射線，則其所在之位置將決定 af 投影之爲 ae，ae' 或 af。因投射線恆與投影面成 45° 角，故 af 之各投影均與原線等長，而可用比例尺繪之。爲便利起見，使物體之一重要面疊合於投影面。於是可作一面投影 (one-plane projection)，其中平行於三軸之諸線均可用原尺寸作之，與等角畫同。



斜投影

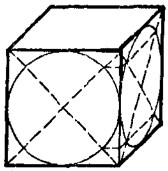
圖 241.

圖 242 爲用斜投影法所作之一立方體，其垂直於投影面之線均與水平線成 45° 角。其實儘可採用他種角度，如圖 241 中之線 ae 或 ae'，均可作爲 af 之投影，其惟一條件爲所有其他投射線均須平行於 ef 或 $e'f$。



斜投影

圖 242.

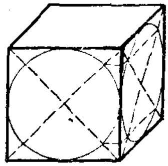


半斜投影

圖 243.

畫物體之一面時，除非該面平行於坐標平面，則務須注意使各項尺寸之量度均平行於軸，此與等角投影無異。在前面之一圓之斜投影仍爲圓，然在側面及頂面者之斜投影爲橢圓。側面上橢圓

之長軸及短軸，從前面用圖上所示之虛線求得，其他各點之作法相同．


半斜投影
圖 243.

191．**半斜投影**（Cabinet Projection）．圖 243 中所示之投影稱爲半斜投影；其投射線與投影面所成之角使線 af 縮成一半，以免斜投影失眞之弊．此法需要二比例尺，45° 諸線爲眞長之一半．作圓之法與以前同，然面之對角線不復爲橢圓之二軸．斜投影及半斜投影有一面不縮短，此爲勝過等角投影之處．

第十章　不用地平線及平面跡之射影幾何

192. **引言.** 此章討論諸線及諸面間之關係，所用之方法中省去坐標投影面間之參攷線（如地平線 HV）. 故表示一平面，不復用其跡，而用其上之相交或平行二直線. 本章與第二、三章所述者差別僅在於此.

本章之觀點更近於從事實際工作之製圖員. 若讀者先事攻習第一章，以澈底了解投影方法，則本章亦可作爲第四章及其後各章之準備.

193. **建築物之屋頂.** 建築物屋頂之四向傾斜者（圖 244 以寫生表示；圖 245 以正投影表示，其一爲水平投影，一爲垂直投影）可作爲其後大部分例解之基礎，因無人不熟悉此屋頂也.

194. **空間一線及其斜度 (Slope) 或傾斜度 (Inclination).** 圖 244 及 245 中建築物各線之斜度各異，分述於下：

(*a*)屋脊 ef 爲一水平線，卽其斜度旣不向上亦不向下；此因圖 245 中 f^v 旣不高於亦不低於 e^v，從知 f 與 e 之高低相同故也. 線 ef 從 e 向 f 後傾，此因 e^h 較 f^h 爲近，知 e 較 f 爲近故也. 線 ef 從 e 向 f 右傾，因在二投影中 f 均在 e 之右方也. 故曰線 ef 從 e 至 f 後傾及右傾. 圖 246 示此線與建築物之他線隔離後之情形.

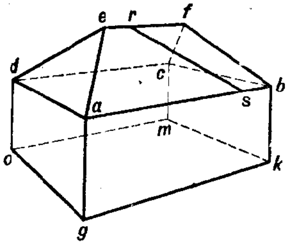
(*b*)圖 245 中之屋角 (Hip) ae 從 a 至 e 上傾、後傾、並右傾.

因 e^v 高於 a^v，故 e 高於 a；e^h 比 a^h 遠，故 e 比 a 遠；e^v 在 a^v 右方，e^h 在 a^h 右方，故 e 在 a 右方. 圖 247 示此線與建築物之他線隔離後之情形.

(c)同理，圖 245 及 248 中之屋角 fc 從 f 至 c 下傾、後傾、並右傾.

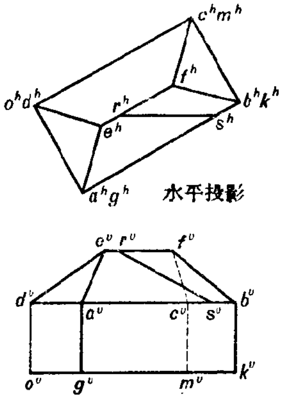
(d)圖 245 及 249 中之屋角 de 從 d 至 e 上傾、前傾、並右傾.

(e)圖 245 及 250 中之屋角 fb 從 f 至 b 下傾、前傾、並右傾.



寫生畫

圖 244.



垂直投影

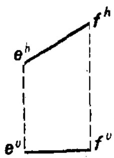
圖 245.

(f)圖 245 及 251 中之牆角 ag 爲一垂直線；其水平投影 a^hg^h 爲一點，故此線既不後傾亦不前傾，既不向右，亦不向左. ag 僅有向上或向下之傾斜.

(g)圖 245 及 252 中一線 rs 在屋頂上，既不前傾亦不後傾（見 r^hs^h），但向下並向右（見 r^vs^v）.

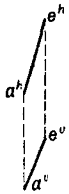
(h) 圖 253 中之線 xw 僅自 x 向後傾.

195. **相交諸線.**　二線公有一點,名曰相交.　圖 244 及 245 內,屋脊 ef 及屋角 ea 相交於點 e,因二線之水平投影均過 e^h,二線之垂直投影均過 e^v.　藉正投影原則,e^h 及 e^v 之連線垂直於一丁字尺線,此線乃假定平行於水平坐標投影面及垂直坐標投影面之交線者.　圖 254 示交於點 e 之二線 A,B;復示無公點故不相交之二線 C,D.　二平行線相交於無窮處之一點.



後右

圖 246.

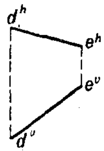


上後右

圖 247.

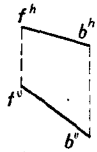
下後右

圖 248.



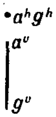
上前右

圖 249.



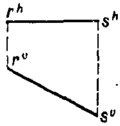
下前右

圖 250.



上或下

圖 251.



下右

圖 252.

後或前

圖 253.

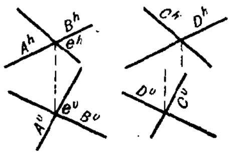


圖 254.

196. **平行線.**　相平行之兩線永不相交(或交於無窮處);故其水平投影相平行,垂直投影亦然.　圖 244 及 245 中,屋脊 ef 及屋簷 ab 平行,因不僅 e^vf^v 平行於 a^vb^v,e^hf^h 亦平行於 a^hb^h.　圖 249 中之線 de 不平行於圖 250 中之線 fb,因 d^he^h 雖平行於 f^hb^h,d^ve^v 並不平行於 f^vb^v 也.

197. 一線之眞實長度及其傾斜度. 一線平行於一坐標平面，則在其上之投影爲眞實長度. 故一線若平行於垂直投影面(卽既不後傾，亦不前傾)，則其垂直投影等於該線之眞實長度；而此投影之下傾角等於空間該線之下傾角. 同此，一線若平行於水平投影面(卽既不向上，亦不向下)，則其水平投影等於該線之眞實長度；而此投影之後傾角等於空間該線之後傾角.

198. 求一線之眞實長度及下傾角.

〔款 1〕 迴轉此線使平行於 V，於是此線在 V 上之投影及下傾角均與眞者無異. 圖 255 中，設有一繩繫於高 40 呎之旗竿頂上，拉緊此繩至地上離竿足 30 呎處之點 b. 該空間之繩爲一直角三角形之斜邊，此三角形之一股爲旗竿，他股爲自竿足至地上繫繩處點 b 之距離. 繩長爲 $\sqrt{40^2+30^2}=50$ 呎. 將繩依竿爲軸迴轉至 ab_1，使平行於 V；此時 a^hb^h 迴轉至 $a^hb_1^h$，a^vb^v 至 $a^vb_1^v$；$a^vb_1^v$ 爲斜邊之眞實長度，卽空間之線長. 而此整個三角形之眞實大小由是得以表示. 線 ab 任意一部分(如從點 a 至一結 k)之眞實長度亦可以決定. 線 ab 之下傾角(卽繩與地所成之角)，由角 $a^vb_1^vb^v$ 表示其眞實大小.

圖 256 示求此直角三角形眞實大小之第二作圖法，卽將繩及竿置於地上(迴轉入 H).

199. 款 1 之定律. 從上節，得知任何線之眞實長度爲一直角三角形之斜邊，此三角形之一股爲該線之水平投影，他股爲該線二端高度之差. 下傾角爲眞長線與長度等於水平投影之一股間之角.

200. 求一線之眞實長度及後傾角.

〔款 2〕 圖 257 中，設圖 255 中繩之下端繫於建築物底點 b 上，再設自竿頂作線垂直建築物之牆於點 x. 故空間之繩爲一直角三角形之斜邊，此三角形之一股爲自竿頂至建築物之距離 a^hx^h，他股爲該繩投於牆上之影 x^vb^v 欲得此三角形之眞實大小，可將繩索依 ax 軸迴轉至 ab_1，使平行於 H；此時 a^vb^v 迴轉至 $a^vb_1^v$，a^hb^h 至

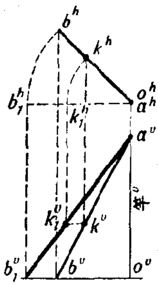


圖 255.

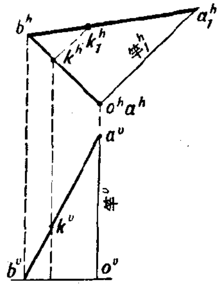


圖 256.

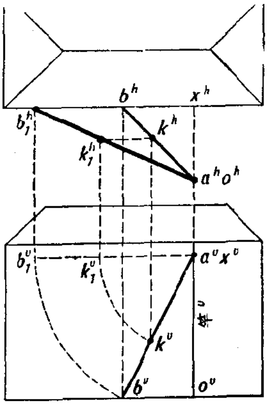


圖 257.

$a^h b_1^h$；$a^h b_1^h$ 爲斜邊之眞實長度，卽空間該線之長． 再者，該線任何部分（如從點 a 至結 k）之眞實長度亦可同樣决定． 線 ab 之後傾角（卽繩與建築物所成之角）由角 $a^h b_1^h b^h$ 表示其眞實大小．

圖 258 示求此直角三角形眞實大小之第二作圖法，卽將三角形以 $a^v b^v$ 爲軸迴轉入建築物之牆．

201．**款 2 之定律．** 從上節，故知任何線之眞實長度爲一直角三角形之斜邊，此三角形之一股爲該線之垂直投影，他股爲該線兩端至一垂直平面（在該線之前或後均可）之距離之差． 其後傾角爲眞長線與長度等於垂直投影之一股間之角．

202．**平面．** 在一平面上所作之任意二直線，若此平面與直線之範圍均無限制，則必相交或平行；故一平面可由相交或平行之二線决定． 圖 259 中，rs 及 tw 爲建築物頂上二線． 二者交於點 m． 圖 260 示此二線與他線隔離後之情形，然彼等决定之平面，其

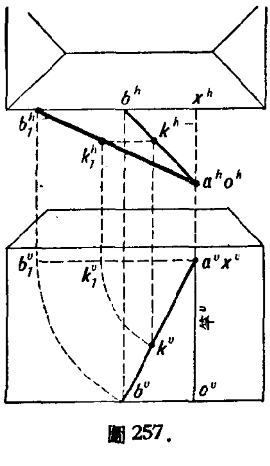


圖 257．

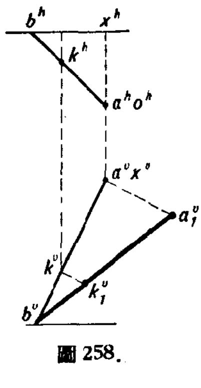


圖 258．

特徵與上圖屋頂之特徵初無二致．圖 261 中之二平行線 R 及 S 亦代表一平面，假若此二線之相對位置與圖 259 中屋脊及屋簷之相對位置一般無二，則 R 及 S 所定之平面當與屋頂平面相同．故圖 259，260 及 261 代表同一平面：

不在一直線內之三點決定一平面，因聯接三點可成二相交線；或聯接其中二點成一線，再過第三點作他線平行於第一線，則二平

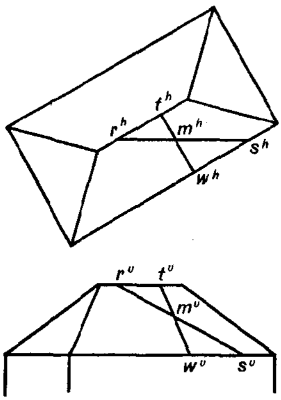


圖 259.

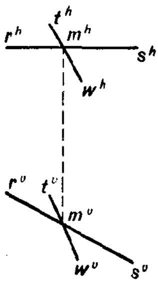


圖 260.

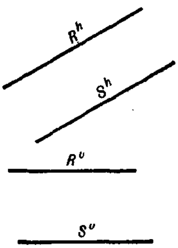


圖 261.

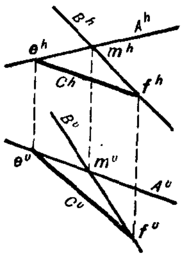


圖 262.

行線決定一平面．但任意選擇三個以上之點，未見必能定一平面．

203．在一平面內之諸線． 因一平面恆爲相交或平行之二線所代表，故欲在此平面上作第三線，可作一線連結每線上一點．圖262中，相交直線 A 及 B 代表一平面，此平面名爲 AB．第三線 C 連結線 A 上任一點 e 及線 B 上任一點 f，故在此平面內．

欲於一平面內作一線，此線有四型，玆分述如下：

(a)平行於 H 之一線（既不向上，亦不向下），如圖263中之線 D．已知平面 AB．可作既不向上亦不向下之 D^v，交 B^v 於 g^v，A^v 於 k^v．定 g^h 及 k^h，再作 D^h．

(b)平行於 V 之一線（既不後傾，亦不前傾），如圖264中之線 E．已知平面 AB．可作既不前傾亦不後傾之 E^h，交 B^h 於 c^h，A^h 於 d^h．定 c^v 及 d^v，再作 E^v．

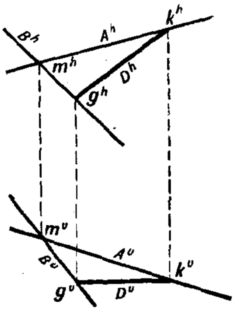


圖263．

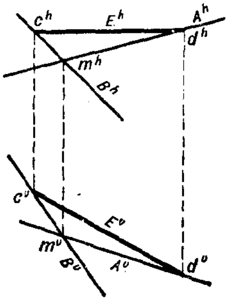


圖264．

(c)在平面上具最大下傾角之一線．（見第205節）．

(d)在平面上具最大後傾角之一線．（見第206節）．

204．一平面之傾斜度或斜度． 若一球落於圖265中屋頂上

之點 c，則依線 cd 滾下；cd 爲最陡之線，即在平面上具最大下傾角之線 (line of greatest downward inclination of the plane). 線 cd 垂直於屋簷線 ab，惟此僅能於水平投影中表示之，即 c^hd^h 垂直於 a^hb^h，而 c^vd^v 並不垂直於 a^vb^v.

在一平面上具最大下傾角之線爲該面上一線，垂直於平面上既不向上又不向下之一線. 一平面上具最大後傾角之線(line of

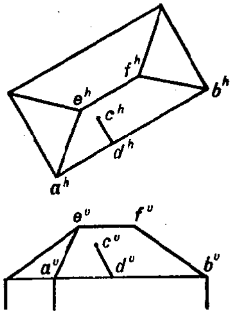


圖 265.

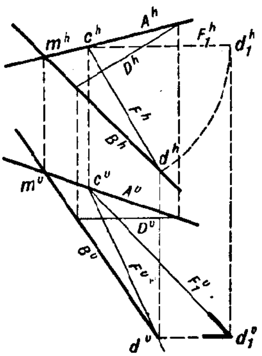


圖 266.

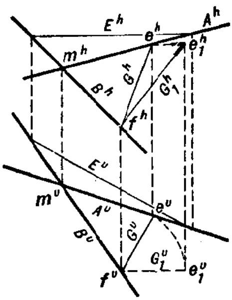


圖 267.

greatest backward inclination of a plane) 亦爲該面上一線；但垂直於平面上旣不前傾又不後傾之一線.

205. **求任意平面之下傾角.** 一平面之下傾角爲該面具最大下傾角之線之下傾角. 圖 266 中，令 AB 爲已知平面. 在平面 AB 上作線 D 平行於 H (第 170 頁，第 203 節，(a))；再在 AB 上作線 F 垂直於線 D. 由前節所述，故知 F^h 垂直於 D^h，交 A^h 於 c^h，B^h 於 d^h. 作 F^v 過 c^v 及 d^v. 用第 166 頁，第 198 節之法求得線 F 之下傾角 $c^v d_1^v d^v$，卽爲平面 AB 之下傾角.

206. **求任意平面之後傾角.** 一平面之後傾角爲該面具最大後傾角之線之後傾角. 圖 267 中，令 AB 爲已知平面. 在平面 AB 上，作線 E 平行於 V (第 170 頁，第 203 節，(b))；再在 AB 上作線 G 垂直於線 E. G^v 垂直於 E^v，交 A^v 於 e^v，B^v 於 f^v. 作 G^h 過 e^h 及 f^h. 用第 166 頁，第 200 節之法求得線 G 之後傾角 $f^h e_1^h e^h$，卽爲平面 AB 之後傾角.

207. **一平面之稜視圖**(Edge View). 一平面之投影成爲一線，則該投影名爲此平面之稜視圖. 圖 268 中，爲實用上常見之三投影(第 4 頁，第 5 節)：卽是一建築物之水平、垂直及右側投影 (right profile projection). 屋頂之前面，平面 RS，於側投影中成爲一線 $R^s S^s$，故此線卽爲該平面之稜視圖.

圖 269 示作於另一位置之側投影. 圖 270 示建築物之牆不平行於 V 及 P 時，建築物之側視圖及屋頂前面之稜視圖. 應用一平面之稜視圖以解多種問題，均屬便利，因其能表示：(一)平面之下傾角 $a'd'e'$ 及最大下傾線之眞實長度 $a'd'$. (二)屋頂前面之垂

線 ck，於輔視圖中爲 $c'k'$，其長度爲眞實，且垂直於 $a'd'$. 請注意建築物之線 S 及 ed 均平行於 H.

任何平面之稜視圖可以下法得之：圖 271 中，已知平面 AB. 於此平面上作線 S 平行於 H（第 170 頁，第 203 節，(a)）. 作 $d'x'$ 垂直於 S^h，以爲輔視圖. 於此平面之一已知線上任一點 a，作 a^hx' 垂直於 $d'x'$；並作 $x'a'$，使其長等於 a 在 S 上（或下）之高度 a^vx^v. 作 $a'd'$，即爲平面 AB 之稜視圖. 角 $a'd'x'$ 爲該平面之最大下傾角.

208. **垂直於一平面之一線.** 一線垂直一平面於任一點，必垂直於面上經過該點之一切線（第 20 頁，第 16 節）；故該垂線必垂直於通過垂足之下列特別線：

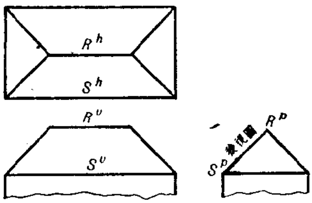


圖 268.

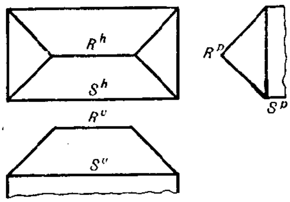


圖 269.

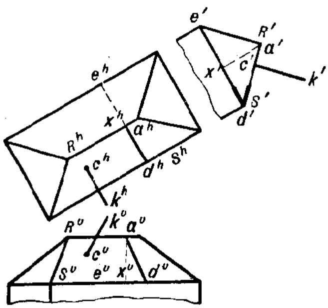


圖 270.

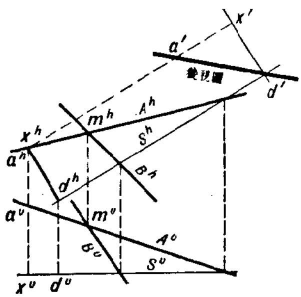


圖 271.

(a)既不向上亦不向下之一線(平行於 H).

(b)既不後傾亦不前傾之一線(平行於 V).

(c)最大下傾線.

(d)最大後傾線.

圖 272 中,線 ck 垂直屋頂平面於點 c. 線 ck 垂直於線 mn(平行於 V),垂直於線 cd(該平面上具最大下傾角之線);垂直於線 cr(該平面上具最大後傾角之線),亦垂直於線 cs (平行於 H). 垂直於平面之線 ck 在 cd (該面上具最大下傾角之線) 之正上方; 故 c^hk^h 疊合於 c^hd^h, 並垂直於 c^hs^h (第 170 頁, 第 204 節). ck 又在 cr (該面上具最大後傾角之線) 之正前方;故 c^vk^v 疊合於 c^vr^v, 並垂直於 m^vn^v(第 172 頁,第 206 節).

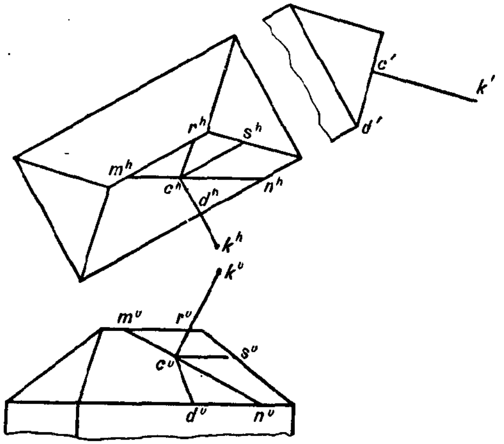


圖 272.

209. 求作垂直於一平面 AB 之線之投影. 圖 273. (1)於該

平面上作一既不向上亦不向下之線 D. (2)作所求線之水平投影垂直於線 D 之水平投影(c^hk^h 垂直於 D^h)(第 173 頁,第 208 節). (3) 於該平面上作一既不前傾亦不後傾之線 E. (4)作所求線之垂直投影垂直於線 E 之垂直投影 (c^vk^v 垂直於 E^v)(第 173 頁,第 208 節). ck 為所求垂直於平面之線.

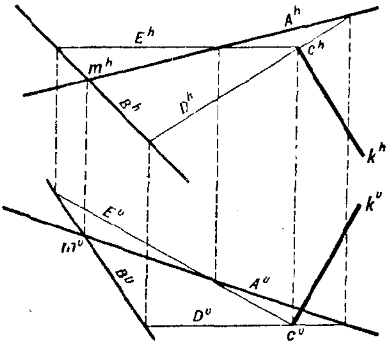


圖 273.

210. 求一線穿過一平面之點. 一線穿過一平面,則該線之一部分在其上,一部分在其下. 線之一部分在平面後,一部分在其前. 圖 274 中,設已知平面有二線 A 及 B,線 C 穿過平面 AB 於某點 x,求 x. 在 AB 上作線 ab 於線 C 之正上方及正下方. C^h 與 a^hb^h 疊合,但 a^vb^v 於 x^v 處穿過 C^v. x^v 卽為線 C 穿過平面 AB 之點之

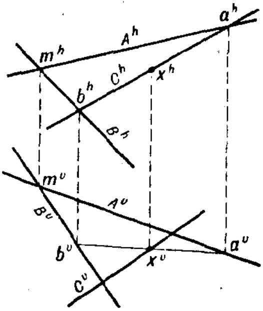


圖 274.

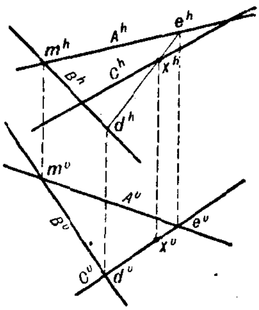


圖 275.

垂直投影． 其理由如下：點 x 在平面內線 ab 之上，故在平面內；x^v 在 C^v 內，x^h 在 C^h 內，故點 x 在線 C 內． 於是 x 必爲線 C 及平面 AB 所公有，故爲線 C 穿過該平面之點．

圖 275 示求點 x 之另一法，於平面上作一線 de 在線 C 之正前方及正後方；於是先得 x^h，次得 x^v．

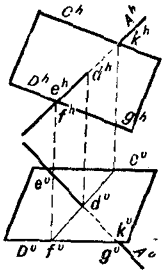


圖 276.

211. **線穿過平面之可見部分．** 圖 276 示一線與一平面相交．既用第 210 節之法求得穿過點 d，茲欲求線 A 在兩視圖中之不可見部分（假定平面或矩形厚紙片爲不透明）．

考慮水平投影時，於線 A 上擇一點 e，位於平面稜 D 之正上方（或正下方）． 於稜 D 上擇一點 f，位於點 e 之正上方（或正下方）． e^h 及 f^h 疊合，惟 A^v 內之 e^v 在 D^v 內之 f^v 上方，表示線 A 於此點在厚紙片稜之上方．線 A 可見於水平投影內，至點 d 穿過厚紙片而不可見．

考慮垂直投影時亦同：試觀察線 D 上一點 g 及線 A 上一點 k，二者之垂直投影疊合，而 k^h 在 g^h 之後；故知 A 在稜 D 之後，而 A^v 自 k^v 至 d^v 之一段爲不可見．

212. **求一物體之影．** 習慣上求一物體之影，係假定太陽光線之方向爲一立方體之對角線，此立方體之一面置於 H 上，其前面平行於 V． 故光線之下傾角及後傾角均爲 $35°15'52''$；其垂直投影向右首下傾 $45°$，水平投影向右首後傾 $45°$．

設欲求圖 277 中旗竿 ab 在地上之影． 作光線過竿頂 a，再求出光線觸地之點 a^{sh} 及 a^{sv}． 將此桿頂之影與桿足相聯，即得此桿

在地面上之影 $a^{sh}b^h$. 第二竿 cd 之影一部分在地上，一部分在籬上(xd 部分投影於地上，xc 部分投影於籬上). 第三竿 ef 之影 fy 在地上，yz 在建築上，ze 在屋頂上. 影 $e^{sv}e^{sh}$ 爲過 e 之光線在屋頂上之穿過點(用第 175 頁，第 210 節之法求得者).

關於求影問題之其他題目則已見第 79,83,84,及 85 諸節.

213. **平面之迴轉.** 已知一傾斜平面上一點. 今將平面依該面上一水平線爲軸廻轉，使之成水平，求該點之位置.

圖 278 中已知傾斜平面 S 上點 a. 若將平面 S 依水平線 B 爲軸迴轉，使與一水平面 N 疊合，求點 a 之位置. 點 a 在一圓弧內迴轉，圓弧之平面垂直於線 B; a 離開 B 之距離爲 xa''，等於一直角三角形之斜邊(ax); 三角形之一股爲該點水平投影至軸之距離(a^hx)，他股爲該點在軸上之高度(aa^h).

圖 279 爲圖 278 之正投影，示點 a 以 B^h 爲軸迴轉至 a'', a'' 離

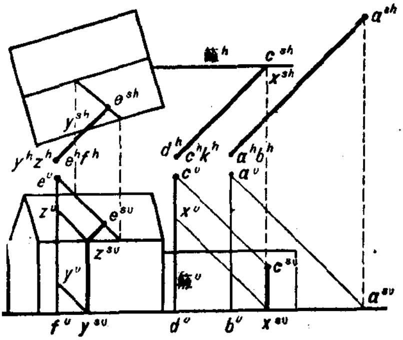


圖 277.

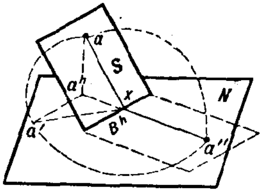


圖 278.

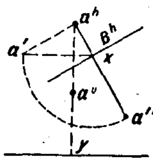


圖 279.

B^h 之遠等於三角形 xa^ha' 之斜邊． a^ha' 等於點 a 在平面 N 上之高度 a^vy．

214．**求作平面多邊形眞實大小及形狀．** 若任何平面多邊形平行於 H（或 V），則此多邊形在該坐標平面上之投影爲眞實大小及形狀．若多邊形之位置並不平行於 H 或 V，則可用第 213 節之法將其每頂點廻轉，使其平行．圖 280 示多邊形 $abcd$ 之各頂點依 B^h 爲軸廻轉，是卽使多邊形以水平線 B 爲軸迴轉而平行於 H．

圖 281 示多邊形 $abcd$ 以平行於 V 之線 C 爲軸廻轉，而入於一鉛直位置；然由是而得之大小及形狀，固與圖 280 中者相同也．

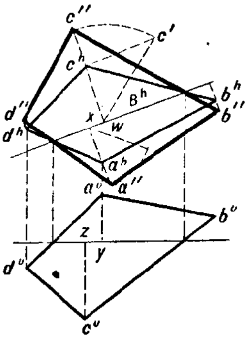


圖 280.

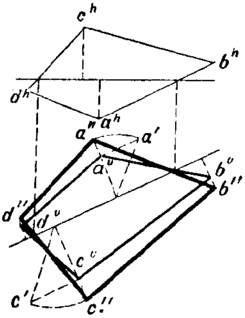


圖 281.

215．**求相交二線間夾角之眞實大小．** 用平行於H(或 V)之第三線連結二線，由是構成一三角形；用第 214 節之法將此形依第三線爲軸廻轉，使其平行於 H（或 V），以得其眞實大小．

216．**求任何三角形之眞實大小．** 此可用第166頁，第197節之法先求三邊之眞實長度；而後用此三眞長之線爲邊，作一新三角

形． 任何多邊形可分成二個或二個以上三角形，求每三角形之眞實大小，卽得此多邊形之眞實大小．

217. **在已知平面上已知位置作一多邊形之投影，多邊形之形狀及大小爲已知．** 例如在圖 282 中，有一正方形，每邊長 $\frac{1}{2}''$，中心在點 o，其一邊旣不後傾亦不前傾． 今欲求此形在線 A 及 B 所構成之平面上之投影．

在平面上作一旣不向上亦不向下之線 C． 以線 C 爲鉸鏈(或軸)，廻轉平面 AB，使入一水平位置 $A'B'C^h$，此時之面爲眞實大小及形狀． 廻轉平面 AB，以下法爲最簡便：過線 A 及 B 之交點，作最大下傾線 mn；而垂直於 C^h 之 n^hm' 卽爲 mn 之眞實長度． 點 x 及 y 在軸內，故廻轉時並不移動；將 x^h 及 y^h 各與 m' 連結，卽得 A' 及 B'． 於平面內作旣不後傾亦不前傾之線 D 通過點 o． 求 D' 及 o' 之法頗爲顯明，茲不多贅． 正方形有一邊旣不後傾亦不前傾，此邊必平行於線 D，故可以 o' 爲中心，作每邊長 $\frac{1}{2}''$ 之正方形，其一

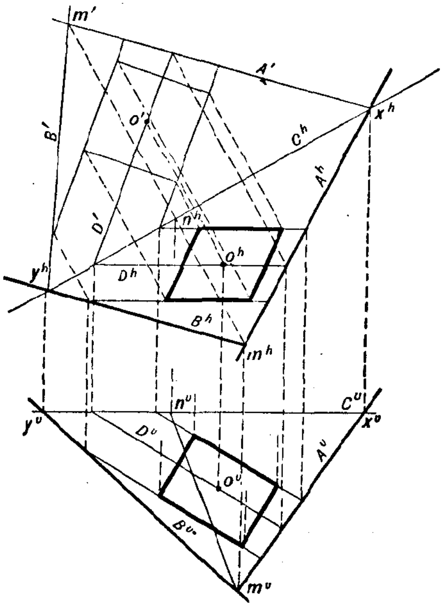


圖 282.

邊平行於D'.

用反轉(即將平面以線C爲軸轉回之，使回復原來位置)求正方形之水平及垂直投影，其法可於圖中察得，茲不具述.

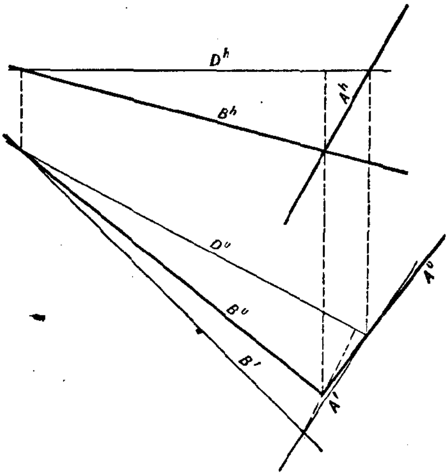


圖 283.

若以一既不後傾亦不前傾之線爲軸，使平面AB廻轉入一鉛直位置，亦可同樣求出結果.

圖 283 中之平面與圖282中者相似，該面以線D爲軸廻轉入一鉛直位置. 三角形$A'B'D''$爲A,B,及D所圍之平面之眞實大小.

218. **求二平面之交線.** 已知二平面：其中之一由二相交線A及B表示，他一由二相交線C及D表示.

〔款 1〕 此題可用第 210 節之法解之，即先求線C及D穿過平面AB之點，再連結二穿過點，如圖 284 所示. 或求線A及B穿過平面CD之點，再連結之，如圖 285 所示. 二結果當然相同.

此題亦可由他法解之：圖 286 中，於平面AB上作一水平線E，於平面CD上作一水平線F，使E及F在同一水平上. 二線交於一點a，此點爲二已知平面所公有，故在其相交線上. 在他一水平上重複此步驟，於平面AB上作線G，於平面CD上作線K，於是得

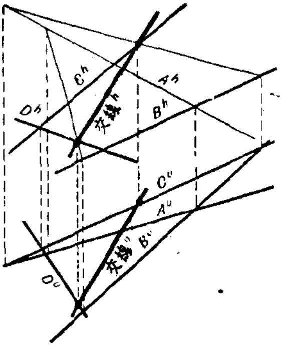


圖 284.

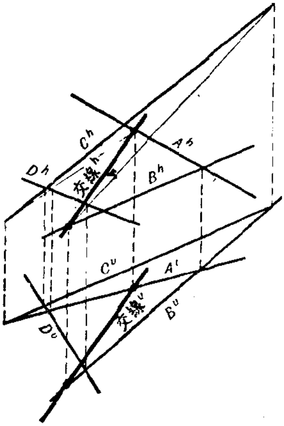


圖 285.

二已知平面公有之另一點 b. 連結 a 與 b,卽得已知平面之交線.

〔款 2〕 設二已知平面各為二平行線所代表,每平行線均平行於 H 及 V. 圖 287 中,一平面由平行線 A 及 B 代表,他一平面由平行線 C 及 D 代表. 作二平面之側投影(側視圖). 於側投影

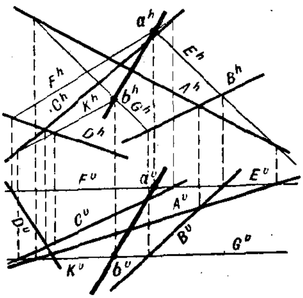


圖 286.

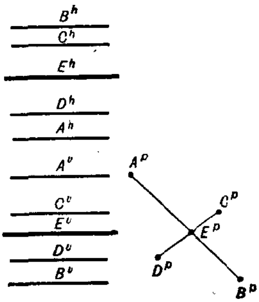


圖 287.

中，線 A,B,C 及 D 成為點，二平面成為線 A^hB^h 及 C^hD^h. 彼等之交點 E' 即為二平面之交線 E: 於垂直投影中為 E^v，水平投影中為 E^h，均平行於已知線.

219. 過一點或線作一平面與一已知線或平面有固定之關係. 此類題目可分為五款，述之如下：

款1. 求作一平面經過一已知點，平行於一已知平面.

款2. 求作一平面經過一已知點，垂直於一已知線.

款3. 求作一平面經過一已知點，平行於二已知線.

款4. 求作一平面經過一已知線，平行於另一已知線.

款5. 求作一平面經過一已知線，垂直於一已知平面.

220. 款1. 求作一平面經過一已知點，平行於一已知平面. 過已知點作二線，各平行於已知平面上二線之一.

221. 款2. 求作一平面經過一已知點，垂直於一已知線. 此為第174頁，第209節之逆. 過已知點作二線：一線平行於 H，其水平投影垂直於已知線之水平投影；他線平行於 V，其垂直投影正交已知線之垂直投影.

222. 款3. 求作一平面經過一已知點，平行於二已知線. 過已知點作二線，平行於二已知線.

223. 款4. 求作一平面經過一已知線，平行於另一已知線. 過已知線上任一點作一線，平行於第二已知線.

224. 款5. 求作一平面經過一已知線，垂直於一已知平面. 過已知線上任一點作一線，垂直於已知平面(第174頁，第209節).

225. 求一線與一平面間之角. 圖 288 中，設一 $30^\circ \times 60^\circ$ 之

三角板垂直於畫圖板，其短股置於板上．故其斜邊與板成 60° 角．此角爲 30° 角（卽垂直於板之股與斜邊間之角）之餘角． 求一線與一平面間之角，於是得一簡法： 1．於已知線上任一點作一線垂直於已知平面（第 174 頁，第 209 節）． 2．求已知線及垂線間角度之眞實大小（第 178 頁，第 215 節）． 3．作上角之餘角．

226．**不在一平面內之二直線間有一最短距離線，求此線之投影及眞實長度．**不在一平面內之二直線間之最短距離爲二者間之垂距，由第 20 頁，第 16 節，第 6 段，知此二直線間僅有一垂線．

圖 289 以寫生法表示二線 A 及 B．

1．過一已知線作一平面，平行於第二已知線．（平面 AC 過 A 平行於 B）．

2．將第二線投影於第一線所在之平面．（將 B 投影至 B_1）．

3．於第二線投影及第一線之交點（點 n）上作一線垂直於平面（線 E）． 此垂線必交第二線於點 o．

4．求垂線（E）之眞實長度，卽爲所求結果．

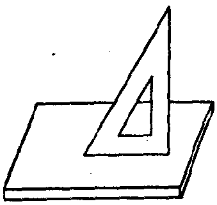


圖 288.

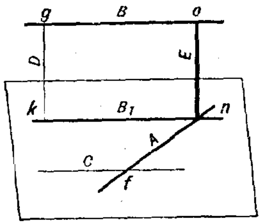


圖 289.

解題之步驟，已如上述．茲參攷圖 290 之正投影，再述其詳細作圖法． 圖中之 A 及 B 爲二已知線．

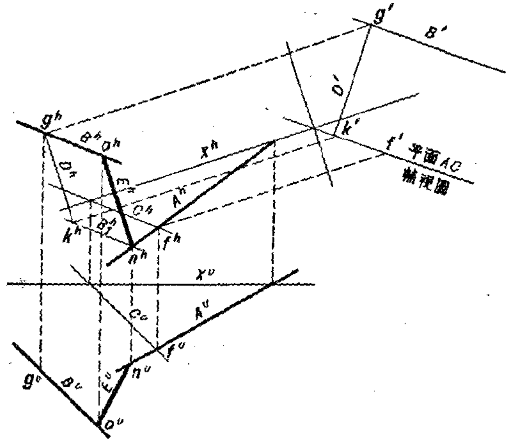


圖 290.

1. 過線 A 上任一點 f，作線 C 平行於線 B，於是得平面 AC (第 182 頁，第 223 節).

2. 於平面 AC 上作線 X 平行於 H. 於線 B 上任一點 g 作線 D 垂直於平面 AC. D^h 垂直於 X^h，D^v 於解題時並不需要(第 174 頁，第 209 節). 作平面 AC，線 B 及線 D 之輔視圖(第 172 頁，第 207 節). 過 g' 作線 B 之輔視圖 B' 平行於該平面之輔視圖，因線 B 平行於該平面也. D' 垂直於平面之輔視圖. D' 於 k' 穿過平面. 轉回 k' 至 k^h (毋需 k^v)，作 B_1^h 平行於 B.

3. B_1^h 交 A^h 於 n^h. 定 n^v. 於 n 作所求之平面垂線，線 E 交線 B 於點 o.

4. 線 E 之眞實長度尙未決定，然因線 D 與線 E 之長度相等，線 D 之眞實長度爲 D'(第 172 頁，第 207 節)，故亦可視爲線 E 之

眞長。

227. 求二已知平面間夾角之眞實大小. 圖 291 中，設二已知平面 R 及 S 爲屋頂之二側，兩者相交於線 ab. 二面角由其平面角量度之，故在二平面上各作一線正交二面角之稜於某一點，再求此二線間夾角之眞實大小.

〔解法 1〕 圖 291. 將交線 ab 依水平線 a^hd^h 爲軸廻轉，以求 ab 之眞實長度. 廻轉後之位置爲 a^hb'，從其上任點 c' 作一線 $c'd^h$ 垂直於 a^hb'，交 a^hd^h 於 d^h. 決定 c^h 及 c^v. 作 d^he^h 垂直於 a^hb^h. 作 ec. 角 ecd 卽爲所求者，其眞實大小爲 $e^hc''d^h$，用第 178 頁，第 215 節之法定之.

請注意求角之眞實大小時，僅需作此角水平投影或垂直投影之一.

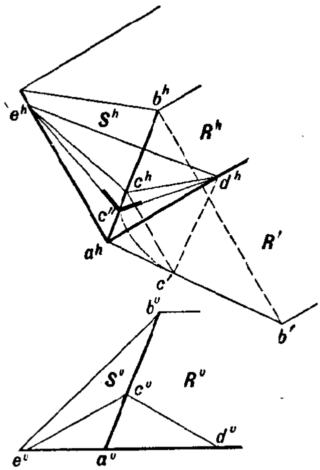


圖 291.

〔解法 2〕 圖 292. 將稜 ab 依 a^hb^h 爲軸廻轉，使與 H 平行，以求 ab 之眞實長度，得 a^hb'. 作垂直於 a^hb^h 之任一線 c^hd^h，交 a^hb^h 於 k^h. 作 k^hc' 垂直於 a^hb'. 定 c'' $(k^hc''=k^hc')$，並作 $e^hc''d^h$，於是所求角之眞實大小得以決定(第 178 頁，第 215 節).

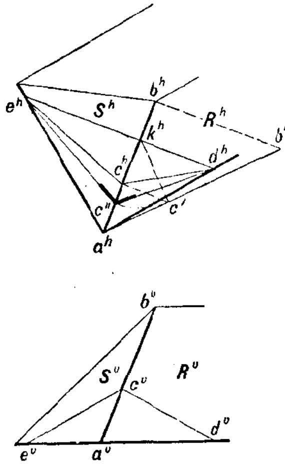


圖 292.

第十一章　割錐線螺線及螺旋線

228. **曲線.** 學圖解者常須應用普通曲線，故應對其產生法及幾何作圖法作簡短之考慮，俾能熟悉. 雖然大多學生或對本書述及之曲線，業已熟習其作圖法，但本章仍不失爲其重要特徵及作法之提示.

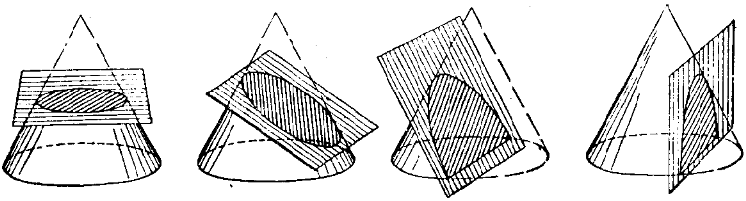
229. **割錐線.** 若將諸平面截一直立圓錐，如第293圖所示者，則得四種重要截口，名爲割錐線，其圍線爲圓、橢圓、拋物線及雙曲線.

〔圓〕 由垂直於錐軸之平面切割而得.

〔橢圓〕 由傾斜於錐軸之平面切割而得，該平面與軸所成之角大於素線與軸間之角.

〔拋物線〕 由傾斜於錐軸之平面切割而得，該平面與軸所成之角等於素線與軸間之角.

〔雙曲線〕 由傾斜於錐軸之平面切割而得，該平面與軸所成



圓　　橢圓　　拋物線　　雙曲線

圖 293.

之角小於素線與軸間之角.

此種曲線之作法甚多,下述爲其最簡單而實用者.

230. **橢圓.** 一點如與二定點之距離之和不變,則此點在平面內移動而產生之曲線,即爲橢圓. 在第294圖中,若視 EKF 爲固定於其端 E 及 F 之一線,於 K 用一筆尖將之張緊,則筆尖移動時祇能循固定之途徑,此途徑由線之長度決定之. 筆尖在 B 時,線之一段爲 BE,他段爲 BF,其和等於 KE 加 KF,亦等於 AB. 定點 E 及 F 稱爲焦點(focus). 焦點位於橢圓內最長之線上. 此線名爲長軸(major axis),通過其中心之垂線,二端止於橢圓者,稱爲短軸(minor axis). 此二軸之交點爲橢圓之中心,通過此點止於橢圓之線稱爲直徑. 若有二直徑,其中之一平行於他者端點之橢圓切線,則此二直徑稱爲共軛直徑(conjugate diameters),如 KL 及 MN.

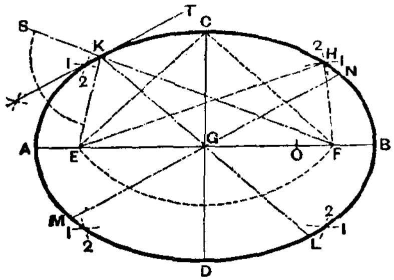


圖 294. 橢圓

欲作橢圓,需已知下列任一條件: 長軸及短軸;任一軸與二焦點;二共軛直徑;一弦及一軸.

231. **求作橢圓.** **圖 294.** 已知長軸及二焦點,以下法求曲線上諸點:以 E 爲圓心,以較 AE 爲大,EB 爲小之半徑作一圓弧. 以 F 爲圓心,以長軸及第一半徑之差爲半徑,作第二圓弧交於第一圓弧. 由是而得之交點即爲橢圓上之點,因其去二焦點之距離之

和等於長軸也. 同法作他點，其數以能藉此憑手畫出曲線為度. 通過各點輕輕作鉛筆線.

若已知長軸及短軸，則以 C 為圓心，長軸之半為半徑，作一圓弧，其與長軸之交點卽為焦點.

若已知長軸及焦點，則可如下求短軸：先在長軸之中點立一垂線，再以二焦點為圓心，長軸之半為半徑，作圓弧交於垂線，卽得短軸.

欲求橢圓上任一點 K 處之切線，則可將此點與二焦點聯接，再將其外角 SKE 平分卽得. KT 卽為所求之切線.

232. **用梁規(Trammels)法作橢圓.** 圖 295. 在邊緣光潔之紙片上，量下 RT，使等於長軸之半，量下 RS，使等於短軸之半. 若將紙片移動，移動時點 T 須置於短軸上，點 S 須置於長軸上，則點 R 所經之路線為一橢圓. 故作圖時將 R 之各次位置用點標出，再經過各點作曲線卽成橢圓.

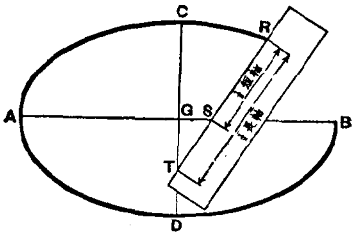


圖 295. 橢圓

此法毋需構圖線，的係佳妙. 所以名為梁規法者，因一種專繪橢圓之梁規儀，卽為基此原則而製成者也.

233. **用平行四邊形法作橢圓.** 圖 296. 此為極常用之方法，若已知長軸及短軸，或一軸及橢圓之一弦，或二共軛直徑，卽可應用此法.

今設已知長軸及短軸. 從長軸之端點，作 $B6$ 平行於短軸且

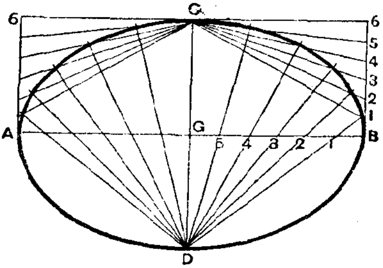


圖 296. 橢圓

等於其半；將$B6$分成數等分(於此爲六等分)。將BG分成同數之等分．過$B6$上1，2，3…諸點，作線至短軸之端點C。從短軸之他端點D，作線過BG上1，2，3…諸點；此線與上述之線相交之各點即在所求橢圓上．

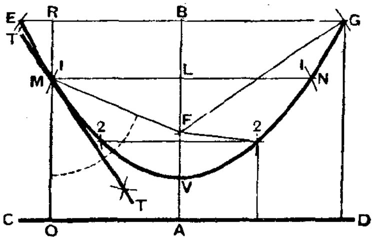


圖 297. 拋物線

234．**拋物線**．圖 297．拋物線爲一點在平面上移動而產生之曲線，此點與一定點之距離等於其與一已知直線之距離．

點F爲焦點；CD爲已知直線，稱爲準線；通過F垂直於CD之AB，稱爲軸．軸與曲線之交點V稱爲頂點．由拋物線之定義，知頂點距焦點及準線等遠．

235．**求作拋物線**．第 297 圖．已知焦點F及準線CD．平分FA以求頂點V。過軸上任點L，作MN平行於準線．以焦點F爲圓心，LA爲半徑，作圓弧1交線MN於M及N。此二點即在拋物線上。同法求其他點，並畫所求之曲線．欲過曲線上任一點M作曲線之切線，可作MO平行於軸，再平分角OMF．MT即爲所求過M之切線．

236. 用平行四邊形法作拋物線. 圖 298. 已知橫標 VB, 及二倍之縱標, GE. 作 AE 及 CG 平行且等於 VB. 將 AE 及 BE 分成同數之等分. 從 BE 上之等分點, 作線平行於軸; 從 AE 上之等分點, 作線向頂點 V 集中. 1 與 1, 2 與 2, …之交點卽在所求之曲線上. 以同法可求其相反之一邊.

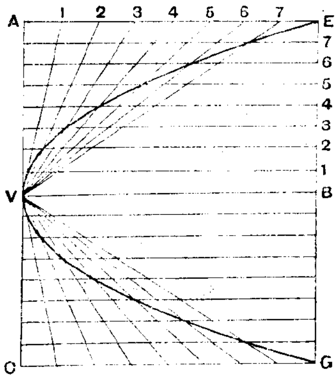


圖 298. 拋物線

237. 雙曲線. 圖 299. 雙曲線爲一點在平面內移動而產生之曲線, 此點與二定點之距離之差不變. 此定義與橢圓定義之異點, 僅在以"差"字代"和". 二定點 F 及 F' 爲焦點, 定長線 VV' 名爲貫軸(transverse axis). 從定義故知 VV' 等於 TF 減 TF', 或 NF 減 NF' 等等. 此曲線有二支.

238. 求作雙曲線. 圖 299. 已知貫軸 VV' 及焦點 F 與 F', 求作雙曲線. 以 F 及 F' 爲圓心, 任何大於 $F'V$ 之長爲半徑, 作四圓弧 2. 圓心同上, 以上述半徑減去 VV' 爲半徑, 作圓弧 1 交圓弧 2. 此等交點卽在所求曲線

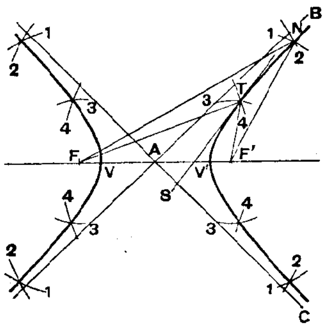


圖 299. 雙曲線

上. 任一點 T 之切線 ST 可由平分角 FTF' 而得.

239. **用平行四邊形法作雙曲線.** 圖 300. 已知軸 VV',二倍之縱軸 AD,及 AD 去頂點之距離 BV. 作 AC 及 DE 平行且等於 BV. 將 AB 及 AC 分成同數之等分. 從 AC 上諸分點畫線集中於頂點 V. 從 AB 上諸點畫線集中於頂點 V'. 線 1 與 1, 2 與 2 …之交點卽在所求之雙曲線上.

240. **螺線** (Spiral). 螺線爲一點在平面內移動而產生之曲線,該點繞一中心旋轉,其間之距離漸增.

在圖 301 中,假想一直線 AB 在紙平面內,依其一端點 A 爲軸廻轉. 同時,設想有一點在該線上任意行動. 於是可產生三種線:若直線靜止而該點移動,則產生者爲直線. 若該點靜止而直線廻轉,則產生一圓. 若點線俱動,則產生螺線. 改變點與線之相對運動,則曲線之性質亦變 而得各種不同之螺線焉.

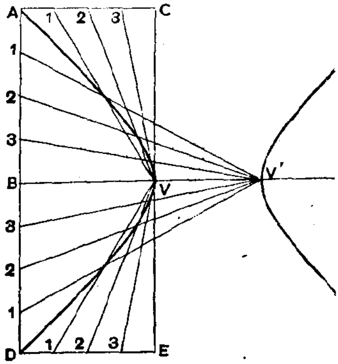


圖 300. 雙曲線

241. **阿基米德螺線**(Spiral of Archimedes, or Equable Spiral). 圖 301. 若點線之運動爲均勻者,則產生阿基米德螺線. 線 AB 稱爲向徑 (radius vector). 向徑廻轉一周時,動點所經之沿徑距離名爲螺距 (pitch). 以 AC, AD, AE……表向徑之十二個連續位置;向徑每

轉十二分之一圈，動點與中心間之距離增加螺距 AC 之十二分之一。實際作圖時，至少應定二十四點，而後輕輕溦手拘繪曲線。

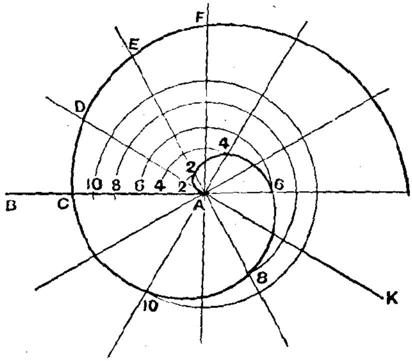


圖 301. 螺線

242. **等角螺線或對數螺線**(Equiangular, or Logarithmic, Spiral). 圖 302. 等角螺線之任一向徑（如 AD）若平分他二半徑(如 AC 及 AB) 間之夾角，則此向徑為他二向徑之比例中項即 $AD^2 = AC \times AB$. 等角螺線之作法即基此原則. 所以稱之為等角螺線者，因任一向徑與通過其端之切線間夾角不變也.

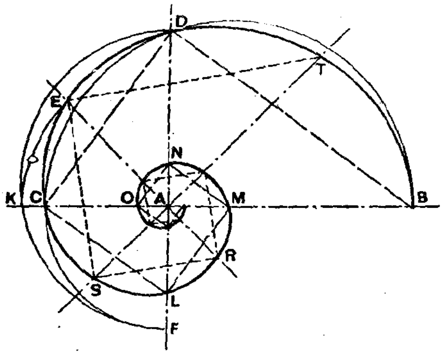


圖 302. 對數螺線

若 B 及 C 為螺線上之點，且 AC 與 AB 之比為已知，則以 BC 為直徑作一半圓，於 A 作垂線，兩者之交點即為所求之中間點 D，而 AD 即為 AC 及 AB 之比例中項. 曲線在直徑 BC 及 DF 上之其他點，即為垂線 CL, LM, MN 等與二

直徑之交點．又，已知點 C 及 D，求 AC 及 AD 之比例中項．可先作 AF 等於 AC，依前法求比例中項 AK．於是作 AE 平分 DAC，量其長等於 AK．直徑 ER 及 ST 上之其他點，可以圖中所示之垂線求之．

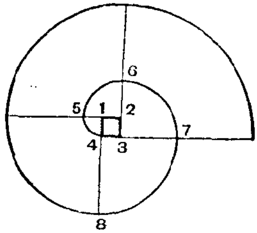


圖 303. 正方形之漸伸線

243. **漸伸線** (Involute). 從具有任何邊數之多邊形上，放開一絕對柔順而不能伸縮之線，此時卽產生是類螺線．各種漸伸線之名稱，由產生此線之多邊形定之．漸伸線由各圓弧組織而成，圓弧以多邊形之頂點爲中心，其半徑漸增，增加量等於多邊形之邊長．

圖 303 爲一正方形之漸伸線，先以 1 爲圓心，1-4 爲半徑，作四分之一圓周 4-5；再以 2 爲圓心，5-2 爲半徑，作四分之一圓周 5-6；如此進行，至已得所需之曲線長度爲止．若正方形二條對邊爲無窮小，則得一直線，其漸伸線示於圖 304．又若多邊形之邊數無窮多，則得一圓之漸伸線，如圖 305 所示．此曲線之準確度繫於

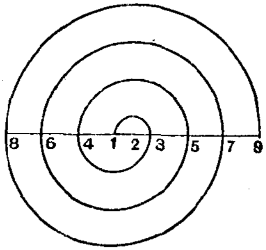


圖 304. 直線之漸伸線

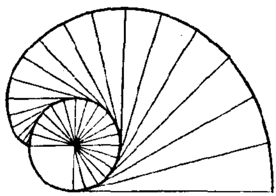


圖 305. 圓之漸伸線

圓上所取點之多寡，此處則取二十四點。

244．**螺旋線**(Helix)． 一線繞軸迴轉，兩者間之角小於 90°，則得一柱面或錐面；若同時線上有一動點移動，則所得曲線稱為螺旋線．在圖 306 中，若線 AB 與其所繞以迴轉之軸相平行，而動點則在此線上移動，於是可得三種線，與螺線一般．若點靜止而線迴轉，所產生者為圓． 若線靜止而點在線上移動，則產生一直線． 因圓與直線非在一平面內，故若二種運動同時發生，則得一螺旋線．線 AB 上之動點在一度迴轉中所經之距離稱為螺距． 線與點之運動大都為均勻者，其曲線可以下法作之：先將動素線 AB 之各位置，用等距之點 1，2，3，4 等等表之．螺距亦應分成同數之等分 1′，2′，3′，4′ 等等，各作水平線穿過之．當素線經過一格而至位置 1 時（此處即一周之十二分之一），動點在動線上亦將移動十二分之一，由是定點 K． 同理，當素線行過四分之一周時，該點亦移過螺距之四分之一而在點 C．因切點 A，D 及 B 附近之曲率驟增，故宜在該處用細分法求得較多之點數，如圖中所示者． 圖 306 中為右旋(right-handed)之單螺旋線． 若

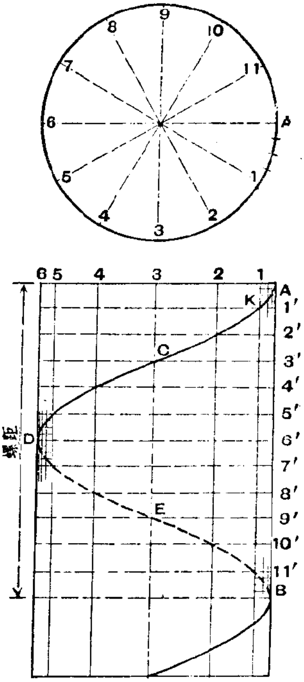


圖 306． 螺旋線

需雙螺旋線，可於點 D 之對方 $6'$ 開始，作一平行曲線。

245. **錐形螺旋線** (Conical Helix). 此線乃由圓錐素線上一點之移動而產生。 螺距之量度係平行於軸爲之，與前述者同。

第十二章　習　題

246　**解題須知.**

習題均成對，教師可令學生作其一，全作則未免太費時光．須應用第24-25頁，第19,20,21諸節之記法．學者須知點線註字準確與各種線條之使用得宜，其重要初不亞於點線之位置準確也．

習題中所用之縮寫如下：

V-pr. 爲垂直投影．

H-pr. 爲水平投影．

P-pr. 爲側投影．

V-tr. 爲垂直跡．

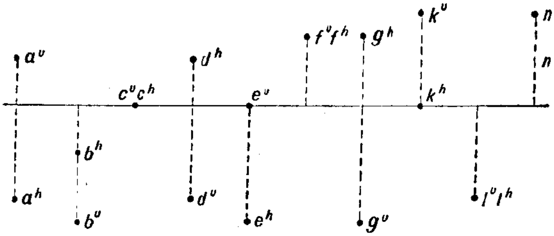
H-tr. 爲水平跡．

P-tr. 爲側跡．

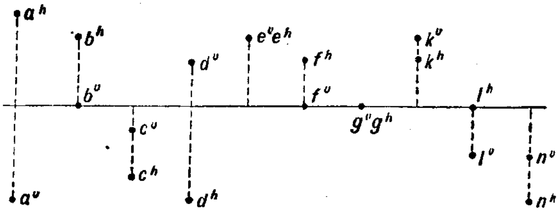
自第一題至第四十八題，每題佔地位 $3\frac{1}{2}'' \times 5''$；四題合畫於一紙，其邊框之大小爲 $7'' \times 10''$　每紙作爲一個練習．　一單位爲 $\frac{1}{8}''$．其他各題所需之地位另行說明於每題之頂上．

247．**習題．**

1．求點 a, b, c, d, e 去 H 之距離及其所在象限．　求點 f, g, k, l, n 去 V 之距離及其所在象限．（第26頁，第22節）．



2. 求點 a, b, c, d, e 去 V 之距離及其所在象限。 求點 f, g, k, l, n 去 H 之距離及其所在象限。（第 26 頁，第 22 節）。



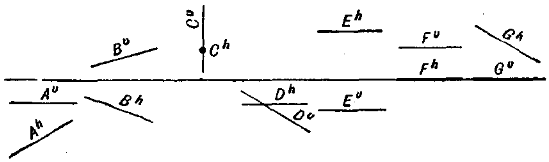
3. 求作下列各點之 H-$pr.$ 及 V-$pr.$（第 26 頁，第 22 節）。

點	a	b	c	d	e	f	k	l	m	n
象限	1	4	3	2	1-4	2	3-4	4		4
離 V 幾單位	6	5	1	4	4	4	0	4	0	4
離 H 幾單位	2	2	4	3	0	4	2	3	0	4

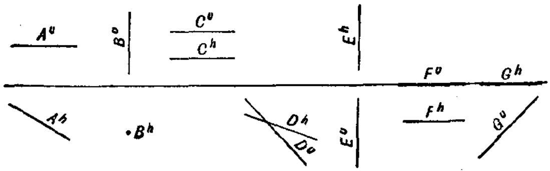
4. 同上題。

點	a	b	c	d	e	f	k	l	m	n
象限	3	2	1	4	2	1 2	2-3		3	1
離 V 幾單位	6	4	5	9	4	0	5	0	2	8
離 H 幾單位	4	4	4	4	6	10	0	0	6	8

5. 將下列各線加以詳細描寫. (第 27-29 頁, 第 23,24,25,26,27 節).



6. 同上題.



7. 求下列各線在指定象限中之 H-pr. 及 V-pr. (第 27-29 頁, 第 23-27 節).

A, 在第三象限內, 下傾, 後傾, 右傾.

B, 在第二象限內, 前傾, 右傾.

C, 在第一象限內, 下傾, 後傾.

D, 在第三象限內, 後傾.

E, 在第四象限內, 後傾, 右傾.

F, 在第二象限及第三象限間, 前傾, 右傾.

8. 同上題.

A, 在第一象限內, 上傾, 前傾, 右傾.

B, 在第三象限內, 下傾, 右傾.

C,在第三象限內,後傾.

D,在第二象限內,後傾,右傾.

E,在第四象限內,右傾.

F,在第三象限及第四象限間,上傾,右傾.

9. 作下列六線之 H-pr.及 V-pr.(第 27-31 頁,第 23-30 節).

A 及 B 在第三象限內相交. A 平行於 V,傾斜於 H. B 傾斜於 V 及 H.

C 及 D 在第二象限內相交. C 垂直於 H. D 平行於 HV.

E 及 F 在第四象限內,並不相交. E 垂直於 V. F 傾斜於 V 及 H.

10. 同上題.

A 及 B 在第三象限內,互相平行,且傾斜於 V 及 H.

C 及 D 在第一象限內相交. C 傾斜於 V 及 H. D 平行於 V.

E 及 F 在第三象限內相交. E 平行於 H,傾斜於 V. F 平行於 HV.

11. 求下列各線之 H-pr.,V-pr. 及 P-pr.(第 35 頁,第 36 節). 並說明其所在之象限及傾斜方向(第 31 頁,第 32 節).

	線 ab		線 cd		線 ef	
點	a	b	c	d	e	f
離 V	(後)6	(後)2	(前)6	(前)2	(後)2	(後)8
離 H	(下)4	(下)4	(上)4	(下)4	(上)4	(上)4
離 P	(左)8	0	(左)9	0	(左)10	0

12. 同上題.

	線 ab		線 cd		線 ef	
點	a	b	c	d	e	f
離 V	(後)2	(後)5	(前)6	(前)4	(後)6	(後)2
離 H	(上)6	(上)1	(上)1	(上)1	(下)4	(上)4
離 P	(左)7	0	(左)10	0	(左)9	0

13. 求下列三角形之 H-pr.及 V-pr.(第35頁,第36節).

	三角形 abc			三角形 def		
點	a	b	c	d	e	f
象限	3	3	3-4	2	3	2
離 V	8	1	0	2	6	2
離 H	3	10	3	2	4	2
離 P (左)	11	7	0	8	9	0

14. 同上題.

	三角形 abc			三角形 def		
點	a	b	c	d	e	f
象限	3	3	3-4	3	1	4
離 V	6	1	0	1	6	4
離 H	6	2	1	1	4	2
離 P (左)	8	6	0	11	0	6

15. 三點 a,b,c 在 P 內,在第三象限中. a 及 b 之 V-prs.在同一點上,b 及 c 之 H-prs. 在同一點上. a 離 V 及 H 4 單位;b 離 V 10 單位;c 離 H 8 單位. 求其 H-prs., V-prs. 及 P-prs. (第35頁,第36節).

16. 三點 a,b,c 在 P 內，在第三象限中． a 及 b 之 H-prs.在同一點上，b 及 c 之 V-prs.在同一點上． a 離 H 4 單位，離 V 8 單位；c 離 H 10 單位，離 V 6 單位． 求其 H-prs.，V-prs.及 P-prs. (第 35 頁，第 36 節)．

17. 求作線 ab 之 H-pr.，V-pr.及 P-pr. 點 a 在 V 後 2 單位，H 上 12 單位，P 之內． 點 b 在 V 前 9 單位，H 下 2 單位，P左 22 單位． 再求下列在線 ab 上各點之投影．

c，離 H 及 V 等遠．

d，為該線之 H-tr. 第 31 頁，第 31 節．

e，為該線之 V-tr. 第 36 頁，第 37 節．

f，離 H 較離 V 遠二倍．

k，在第四象限內，離 H 四單位．

求該線所在之各象限．

18. 求作線 ab 之 H-pr.，V-pr.及 P-pr. 點 a 在 V 前 6 單位，H 下 6 單位，P 左 20 單位． 點 b 在 V 後 2 單位，H 上 11 單位，P 之內． 其他同上題．

19. 求作第 17 題之斜投影，表出 V,H 及 P 之相對位置，該線諸投影，及線上各點．(第 160 頁，第 190 節)．

20. 求作第 18 題之斜投影．

21. 求作 P 上一線 ab 之 H-pr.，V-pr.及 P-pr. 點 a 在 V 後 2 單位，H 上 12 單位． 點 b 在 V 前 12 單位，H 下 4 單位． 求第 17 題中所述各點之投影，惟刪去 c 及 k. (第 38 頁，第 38 節)．

22. 求作 P 上一線 ab 之 H-pr.，V-pr.及 P-pr. 點 a 在 V 前

12 單位，H 上 8 單位．點 b 在 V 前 2 單位，H 下 8 單位．求第 17 題中所述各點之投影，惟刪去 c 及 k．（第 38 頁，第 38 節）．

23．求線 A 及 B 之 H-*prs.*，及 V-*prs.*，並述二線延長後所在之各象限（第 36 頁，第 37 節）．A 之 V-*tr.*在 H 下 8 單位；H-*tr.*在 V 後 6 單位，在 V-*tr.*右 10 單位．B 之 V-*tr.* 在 H 下 10 單位；H-*tr.*在 V 前 5 單位，在 V-*tr.*右 11 單位．

24．求線 C 及 D 之 H-*prs.* 及 V-*prs.*，並述二線延長後所在之象限（第 36 頁，第 37 節）．C 之 H-*tr.*在 V 後 10 單位；V-*tr.*在 H 上 4 單位，在 H-*tr.*右 11 單位．D 之 V-*tr.* 在 H 上 6 單位；H-*tr.*在 V 前 9 單位，在 V-*tr.*右 12 單位．

25．求作下列各線之 H-*pr.*及 V-*pr.*（第 36 頁，第 37 節）．A 在第一、第四、第三象限內，B 在第一、第二、第三象限內．〔示意〕先假定各線之跡，再求其投影．

26．同第 25 題．A 在第四、第一、第二象限內．B 在第二、第三、第四象限內．

27．同第 25 題．C 在第二、第四象限內．D 在第一、第三象限內．

28．同第 25 題．C 在第一、第三象限內．D 在第四象限內．

29．同第 25 題．E 在第四象限內．F 在第一、第四象限內．

30．同第 25 題．E 在第四、第二象限內．F 在第三、第二象限內．

31．同第 25 題．K 在第三、第四象限內．L 在第三象限內．

32．同第 25 題．K 在第二、第一象限內．L 在第一象限內．

33. 求作線 ab 之 H-pr. 及 V-pr. 過 ab 之中點作線 C 平行於 V，與 H 成 30° 角，向下向右傾斜。求此二線之平面之跡(第 41-44 頁，第 42-47 節)。

點	a	b
象限	3	3
離 V	1	8
離 H	6	1
離 P(左)	14	0

34. 求作線 ab 之 H-pr. 及 V-pr. 該線爲下傾、後傾、右傾者。過 ab 之中點作線 C 平行於 H，與 V 成 45° 角，向後向右傾斜。求此二線之平面之跡(第 41-44 頁，第 42-47 節)。

點	a	b
象限	3	2
離 V	6	1
離 H	2	11
離 P(左)	0	14

35. 已知上傾、前傾及右傾之一線 ab 及一點 c。過點 c 作一線平行於 ab，求此二線之平面之跡(第 41-44 頁，第 42-47 節)。

點	a	b	c
象限	1	1	1
離 V	3	7	7
離 H	3	9	4
離 P(左)	10	0	0

36. 已知線 ab 及點 c. 過點 c 作一線平行於 ab，求此二線之平面之跡(第 41-44 頁，第 42-47 節).

點	a	b	c
象限	3	4	3
離 V	3	2	6
離 H	8	12	5
離 P(左)	9	0	4

37. 已知線 ab 及點 c. 求含此二者之平面之跡(第 45 頁，第 48 節).

點	a	b	c
象限	3	3	4
離 V	1	8	6
離 H	6	1	1
離 P(左)	14	0	7

38. 同上題.

點	a	b	c
象限	3	2	4
離 V	6	1	4
離 H	2	11	4
離 P(左)	0	14	8

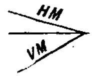
39. 求含點 a,b 及 c 之平面之跡. (第 45 頁,第 49 節).

點	a	b	c
象限	3	4	4
離 V	8	8	6
離 H	2	2	9
離 P(左)	22	0	14

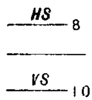
40. 同上題.

點	a	b	c
象限	3	3	3
離 V	8	3	6
離 H	4	8	12
離 P(左)	16	8	0

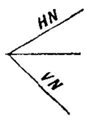
〔註〕 以下各題內,平面諸跡或與 HV 平行,或與其成 $15°$ 或 $15°$ 之倍數之角度,全可由觀察定之.



41. 在平面 M 上作一三角形. 先假定一投影圖,而後依第 46 頁,第 50 節之法進行之.

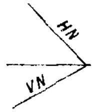


42. 在平面 S 上作一三角形. 先假定一投影圖,而後依第 46 頁,第 50 節之法進行之.

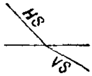


43. 求平面 N 上一點之投影,該點離 V 6 單位,離 H 4 單位(第 47 頁, 第 51,52 節). 過此點在平面上作下列三線: A,平行於 H; B,平行於 V; C,傾斜於 V 及 H (第 41,42 頁, 第 42,43 節).

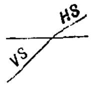
44. 求平面 N 上一點之投影，該點離 V 7 單位，離 H 4 單位(第 47 頁，第 51,52 節)。 過此點在平面上作下列三線：A，平行於 VN；B，平行於 HN；C，通過 VN 上，距 HV 12 單位之點(第 41,42 頁，第 42,43 節)。



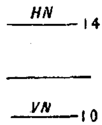
45. 求平面 S 上一點之投影，該點離 V 6 單位，離 H 5 單位(第 47 頁，第 51, 52 節)。 過此點在平面上作下列三線：A，通過第二及第三象限；B，通過第三及第四象限；C，通過第二、第三及第四象限(第 41,42 頁，第 42,43 節)。



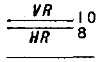
46. 求平面 S 上一點之投影，該點在第三象限內，離 V 7 單位，離 H 4 單位(第 47 頁，第 51,52 節)。 過此點在平面上作下列三線：A，平行於 V；B，平行於 H；C，通過第二、第三、第四象限(第 41,42 頁，第 42,43 節)。



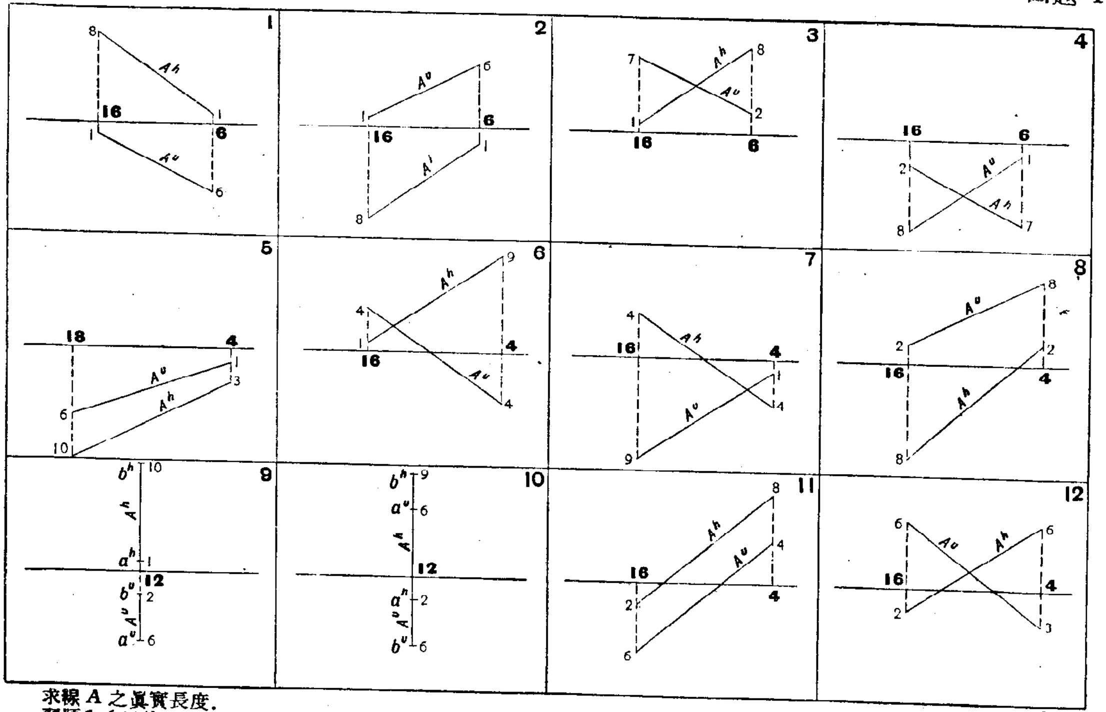
47. 求下列在平面N上各點之投影，惟各點不在同一側面上。a，在第三象限內，離 V 6 單位；b，在第三象限內，離 H 4 單位；c，在第四象限內，離 V 2 單位(第 47 頁，第 51, 52 節)。



48. 求下列在平面R上各點之投影，惟各點不在同一側面上。a，在第三象限內，離 H 4 單位；b，在第一象限內，離 V 2 單位；C，在第二象限內，離 H 4 單位(第 47 頁，第51, 52 節)。



量度單位，$\frac{1}{4}$ 吋．每題所需之地位，2$\frac{1}{2}$"×3"．與 HV 之距離以細體字表示；與右首界線之距離以粗體字表示．

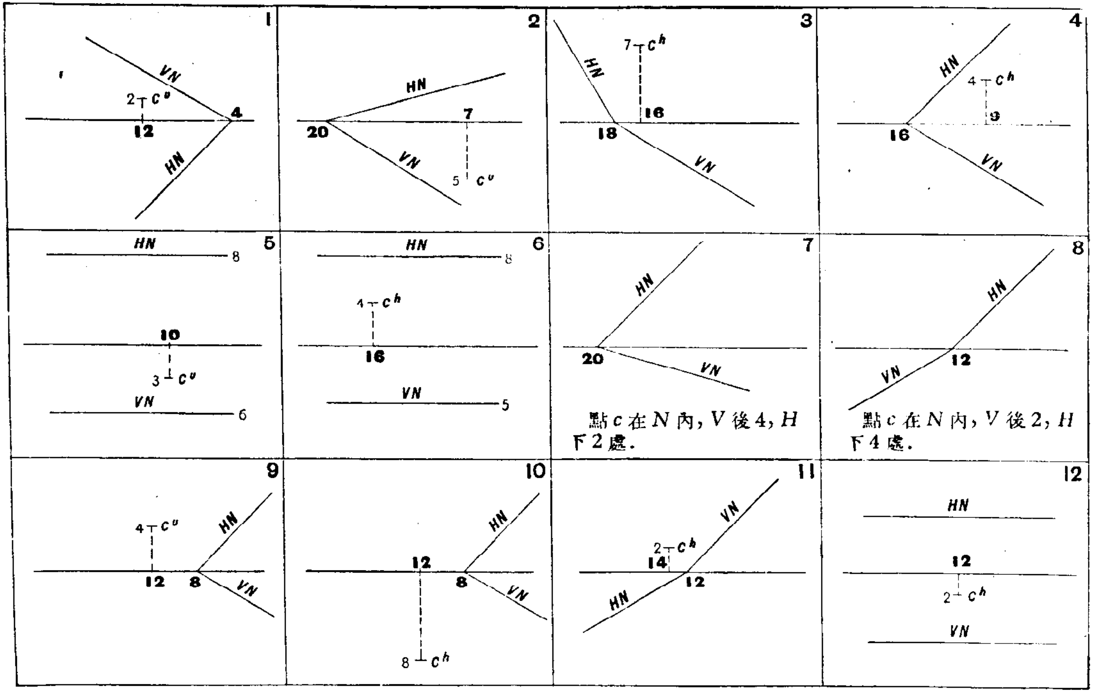


求線 A 之眞實長度．

習題 1-6 用款 1 之法，迴轉線 A 使平行於 V．（第 38 頁，第 39 節．）習題 7-12 用款 1 之法，迴轉線 A 使平行於 H．（第 38 頁，第 39 節．）習題 1-6 用款 2 之法，迴轉線 A 至 H 內．（第 40 頁，第 40,41 節．）習題 7-12 用款 2 之法，迴轉線 A 至 V 內．（第 40 頁，第 40,41 節．）

圖題 2

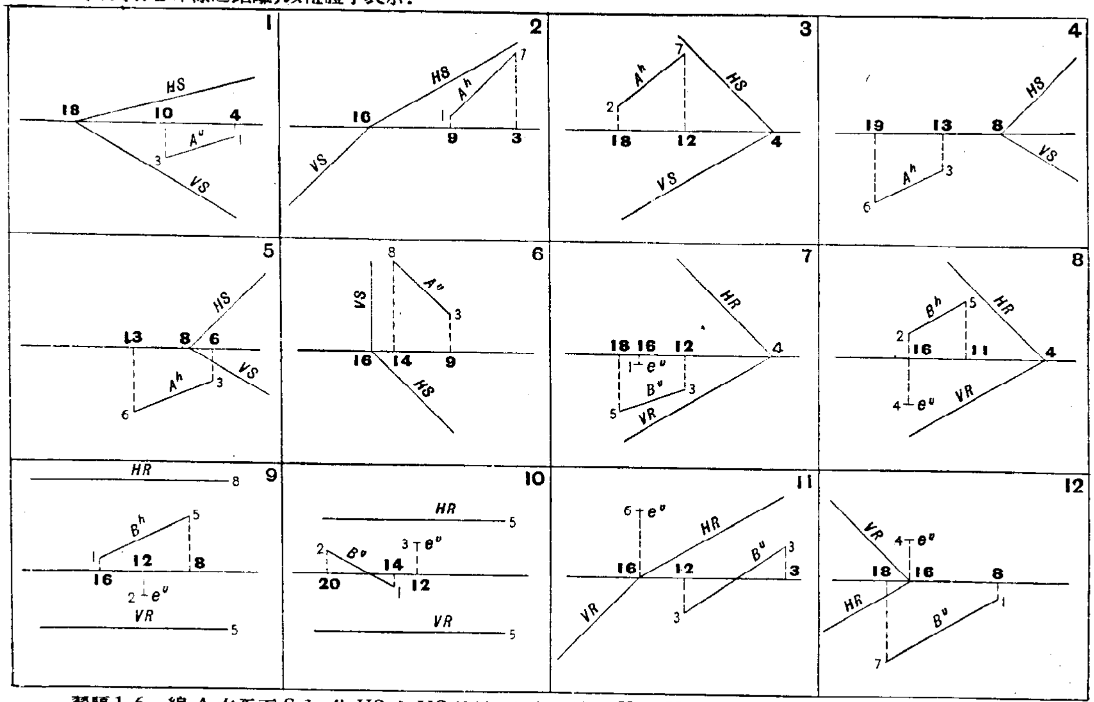
量度單位，$\frac{1}{4}$吋．每題所需之地位，$2\frac{1}{2}$"×3"．HV 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數．與 HV 之距離，只細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



點 c 在平面 N 內．依 VN 及 HN 爲軸，將 c 迴轉入 V 及 H，以求其與 VN 及 HN 之距離．（第 46 頁，第 50 節；第 49 頁，第 53 節．）

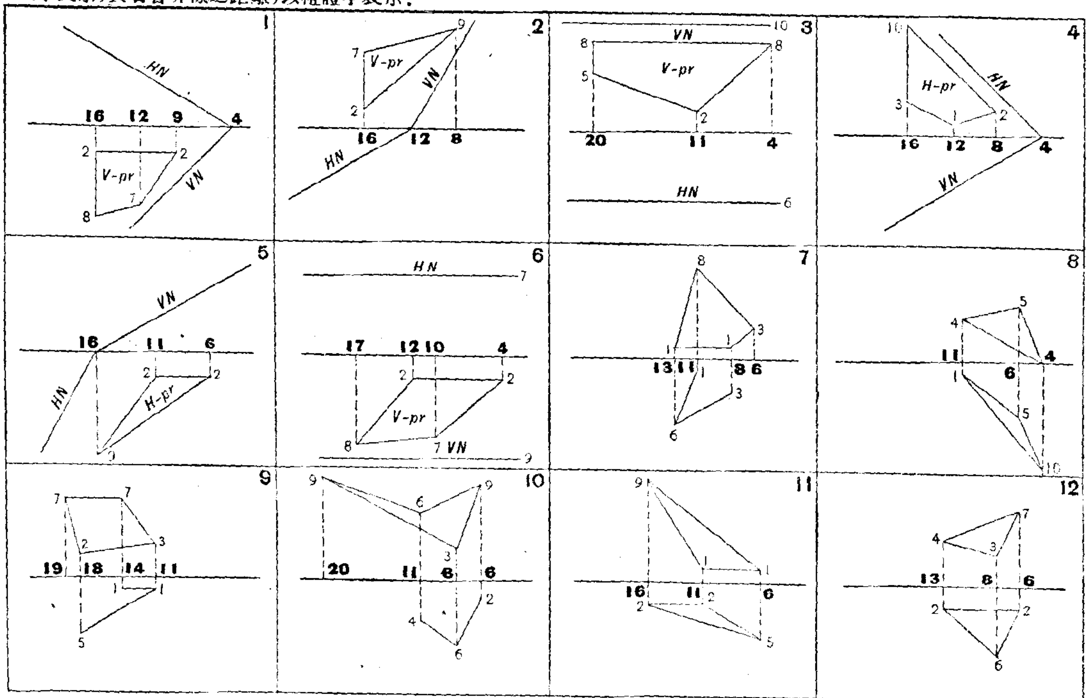
量度單位，¼ 吋. 每題所需之地位，2½"×3". HV 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數. 與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示.

圖題 3



習題 1-6. 線 A 在平面 S 內，依 VS 或 HS 爲軸，將 A 迴轉入 V 或 H，以求其眞實長度.（第 50 頁，第 54 節.）
習題 7-12. 線 B 及點 e 在平面 R 內. 求二者間之距離.（第 49,50 頁，第 53,54 節.）

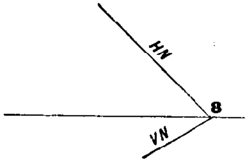
量度單位，¼吋．每題所需之地位，2½"×3"．HV 及平面諸跡間之角為15°之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



將多邊形迴轉入 V 或 H，以求其眞實大小．（第50頁，第54節．）
注意．　習題7-12中，應先求多邊形平面之諸跡．

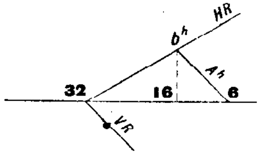
量度單位，¼吋．每題所需地位，5"×7"．HV 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．

1



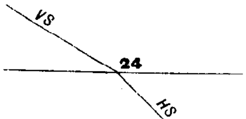
求平面 N 上一等邊三角形之投影．其中心爲 a，在 V 後 6 單位，H 下 4 單位．其一邊平行於 V，長爲 7 單位．

2



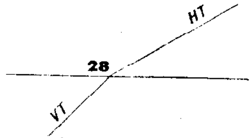
求平面 R 上正六邊形之投影．線 A 爲長直徑，其一端點爲 b．六邊形之邊長爲 5 單位．將線 A 迴轉入 V 解之最佳．

3



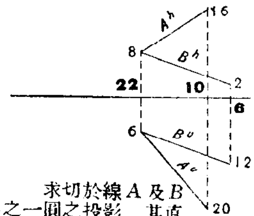
求平面 S 上一正方形之投影．其中心爲點 c，在 V 前 8 單位，H 上 5 單位．其一邊與 HS 成 60° 角，長爲 8 單位．

4



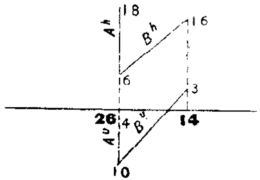
求平面 T 上一正八邊形之投影．其中心 d 在 V 後 8 單位，H 下 5 單位．其短直徑平行於 H，長 8 單位．

5



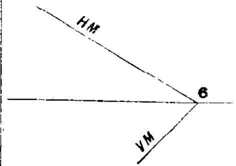
求切於線 A 及 B 之一圓之投影．其直徑爲 8 單位．迴轉入 H．

6



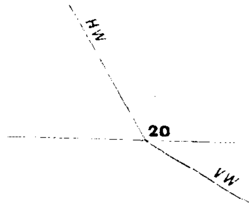
求切於線 A 及 B 之一圓之投影．其直徑爲 10 單位．

7



求切於平面 M 各跡之一圓之投影．其直徑爲 16 單位．

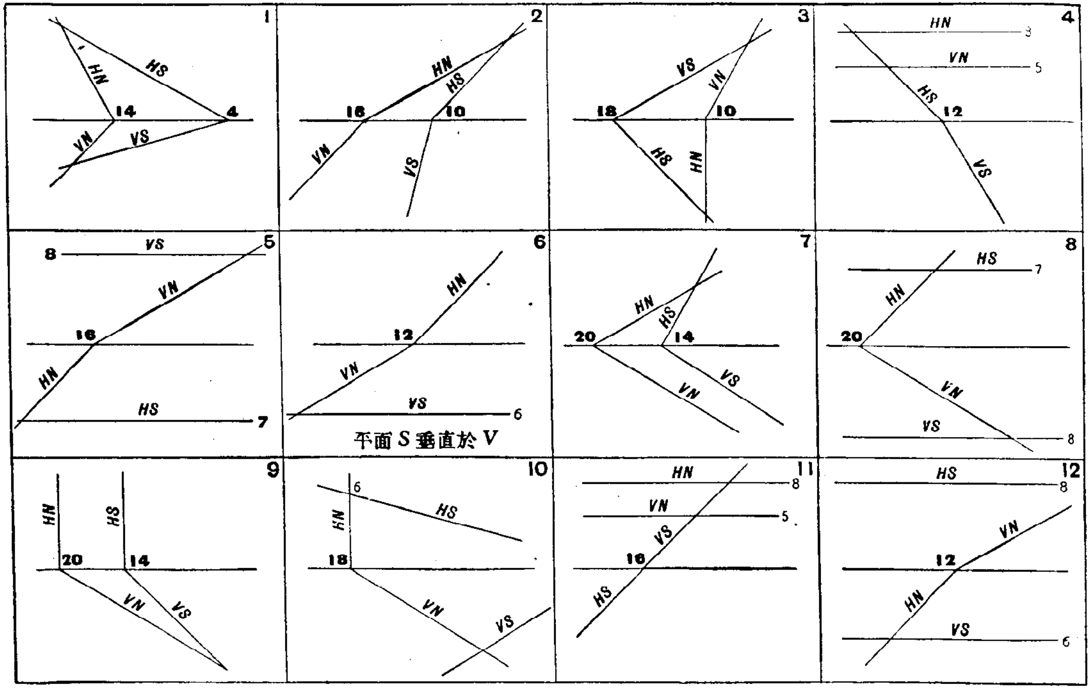
8



求切於平面 W 各跡之一圓之投影．該圓在第三象限內，其直徑爲 16 單位．

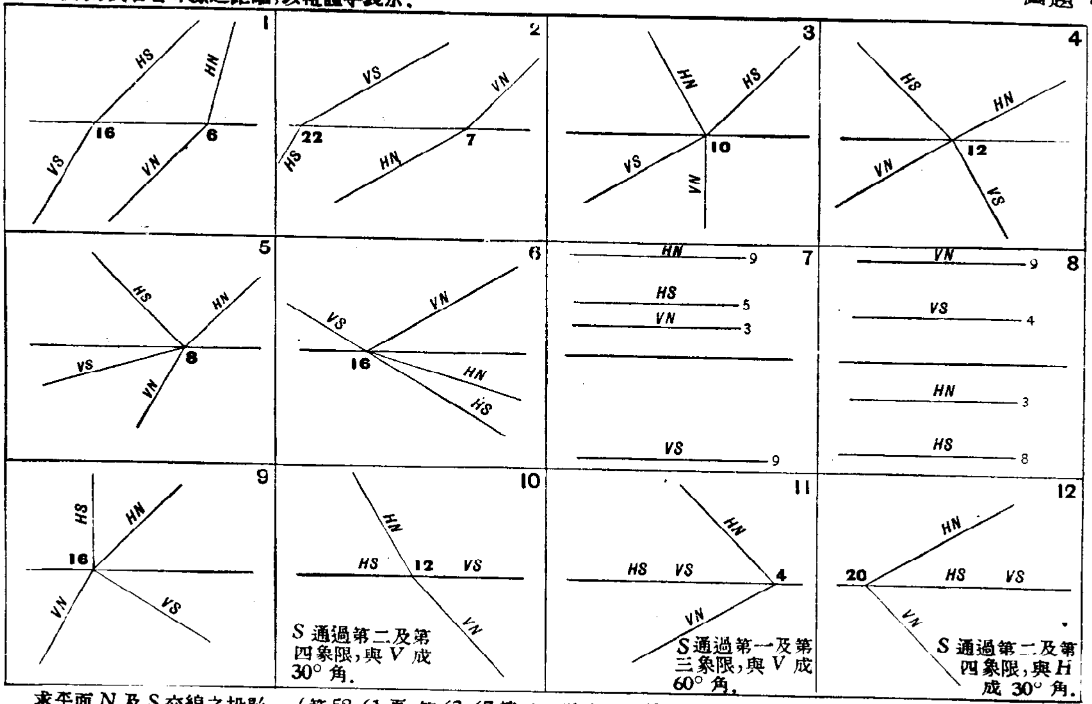
求作上述圖形之投影．（第 51-54 頁，第 56-60 節）．

量度單位，¼"吋　每題所需之地位，2½ × 3"．HV 及平面諸跡間之角為 15° 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．　　圖題 6



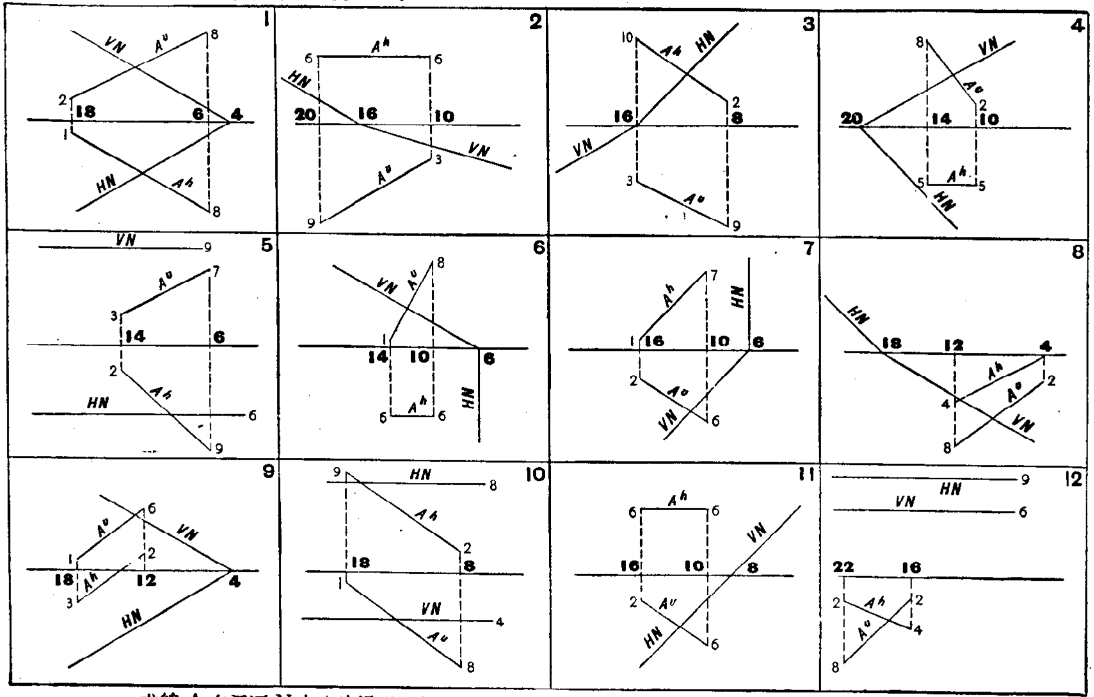
求平面 N 及 S 交線之投影．（第 57 頁，第 61,62 節；第 59 頁，第 64 節．）跡之記號為 $I^v I^h$．

量度單位，$\frac{1}{8}$ 吋． 每題所需之地位，$2\frac{1}{2}$"×3"． HV 及平面諸跡間之角為 15° 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



求平面 N 及 S 交線之投影． （第 58-61 頁，第 63-67 節．） 跡之記號為 I^vI^h． 習題 1-4．用款 2 解之．（第 58，60 頁，第 63，65 節．） 習題 5-12．用款 3 解之．（第 60，61 頁，第 66，67 節．）

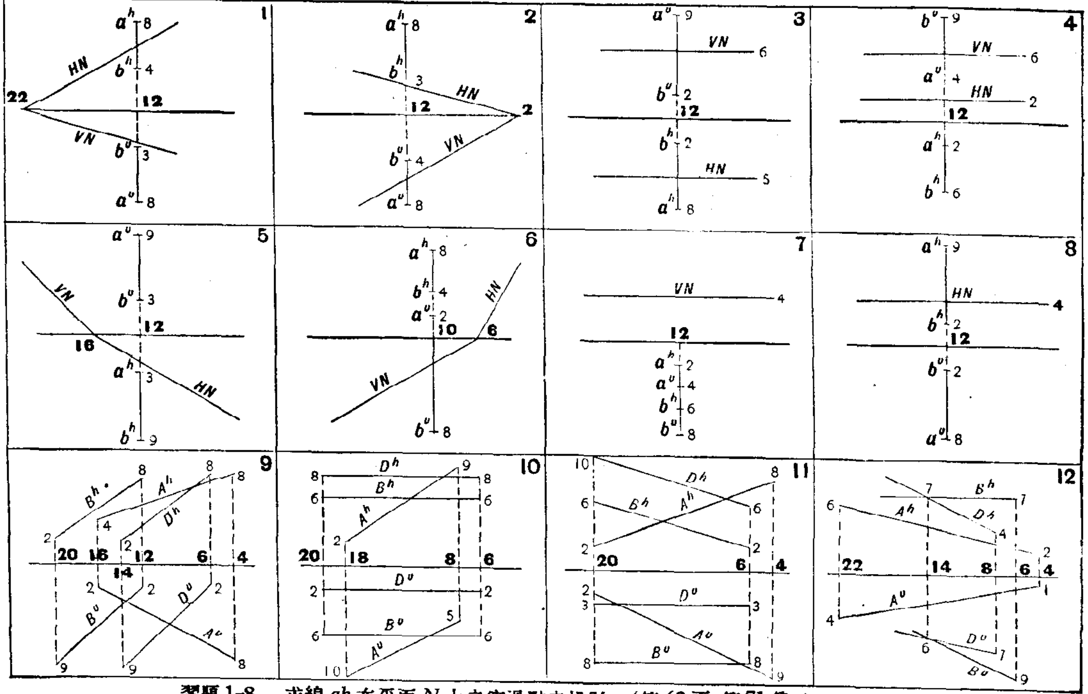
量度單位，$\frac{1}{8}$吋．每題所需之地位，$2\frac{1}{2}" \times 3"$．HV 及平面諸跡間之角爲 $15°$ 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



求線 A 在平面 N 上之穿過點之投影．投影之記號爲 c^v 及 c^h．（第 61-62 頁，第 68-70 節.）

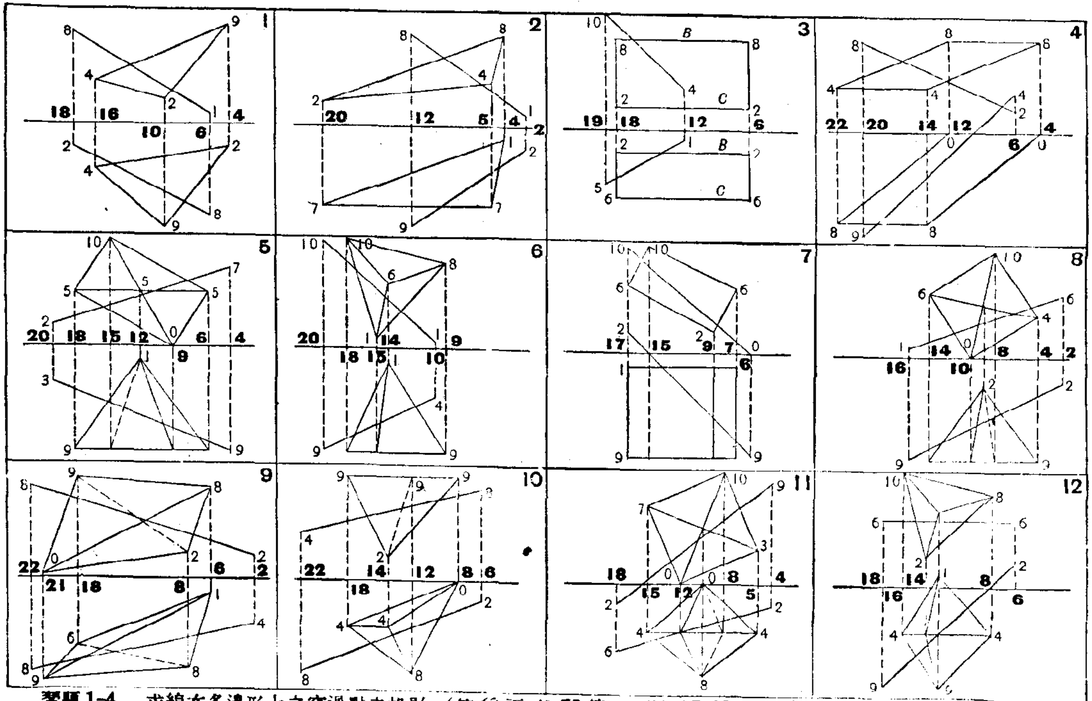
量度單位，$\frac{1}{8}$吋．每題所需之地位，$2\frac{1}{2}'' \times 3''$． HV 及平面諸跡間之角為 15° 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．

圖題 9



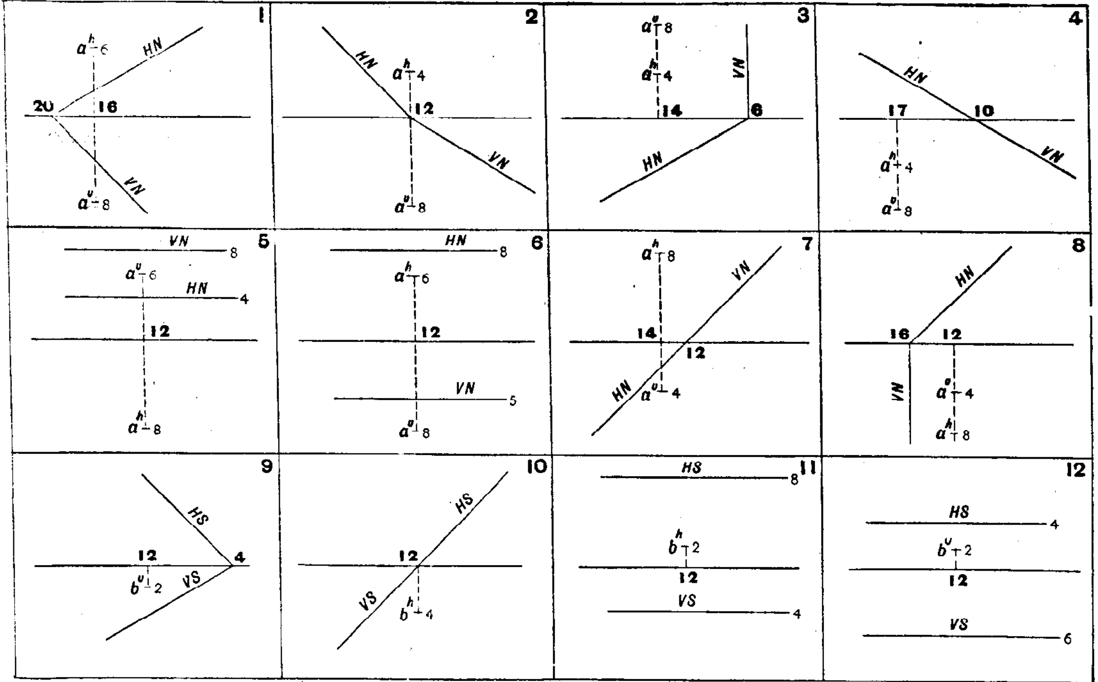
習題 1-8． 求線 ab 在平面 N 上之穿過點之投影．（第 62 頁，第 71 節．）
習題 9-12． 求線 A 在含線 B 及 D 平面上之穿過點之投影．（第 63 頁，第 72 節．）

量度單位，$\frac{1}{4}$ 吋． 每題所需之地位，$2\frac{1}{2}'' \times 3''$． 與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



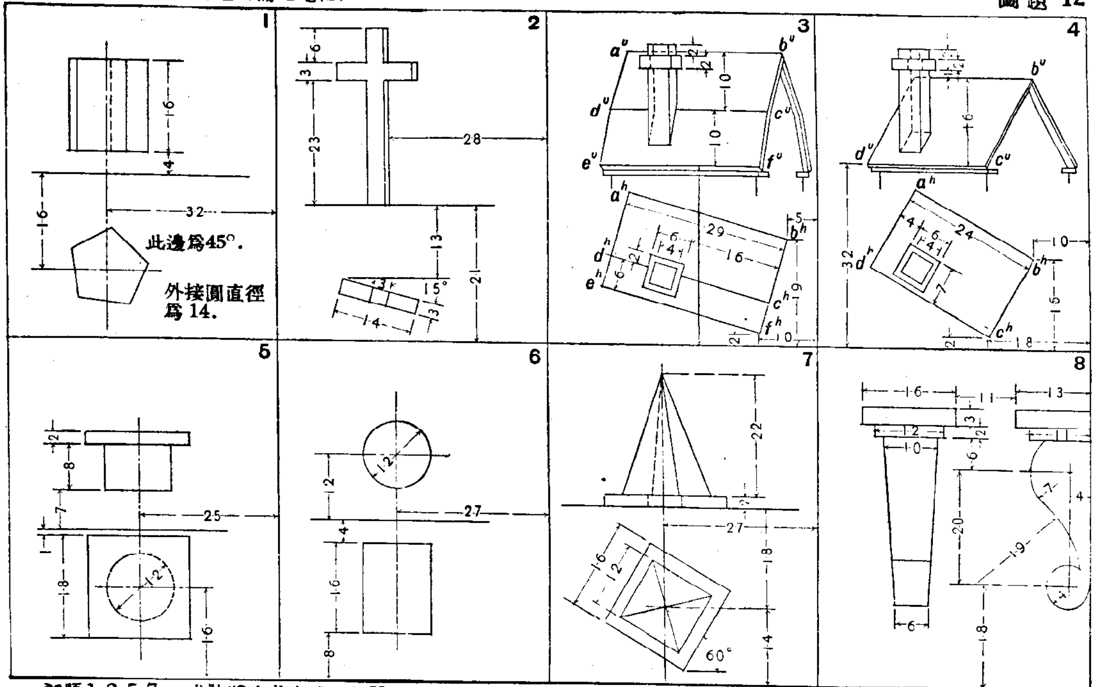
習題 1-4． 求線在多邊形上之穿過點之投影．（第 63 頁，第 72 節．） 習題 5-12． 求線在物體上之諸穿過點之投影．（第 63 頁，第 72 節．） 表出線之可見部分．（第 63 頁，第 73 節．）

量度單位，¼ 吋．每題所需之地位，2½"×3"．HV 及平面諸跡間之角為 15° 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



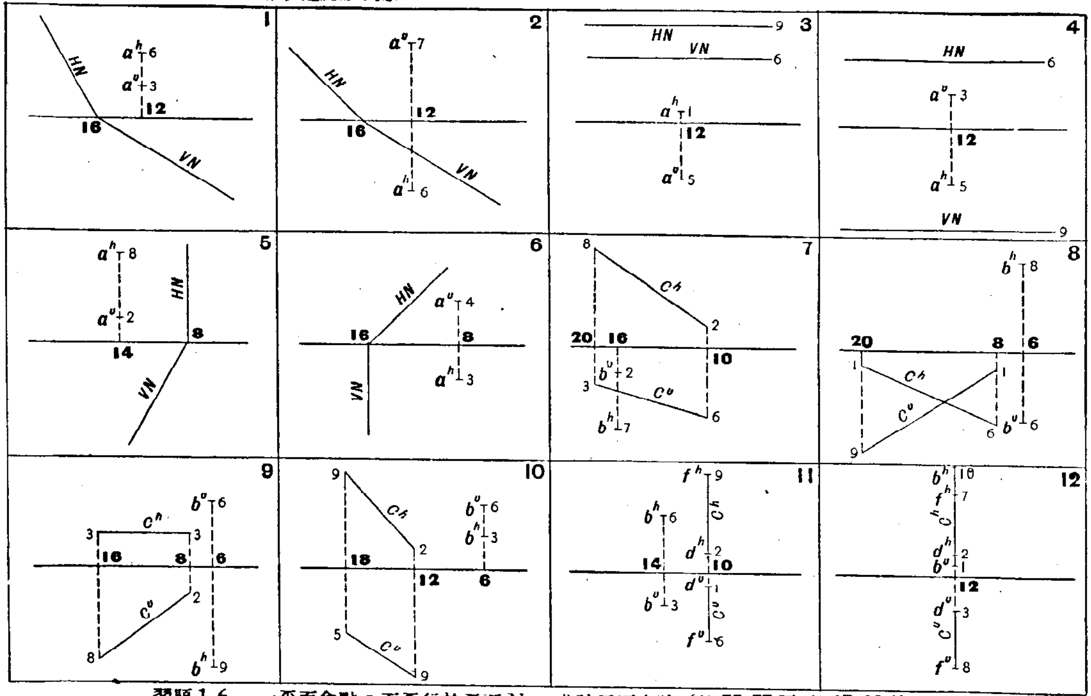
習題 1-8．求線 ab 之投影及眞實長度，並求點 a 至平面 N 之最短距離．（第 64-66 頁，第 74-78 節．） 習題 9-12．求平面 S 之垂線 ab 之投影，其垂足為平面 S 上一點 b，長為 8 單位．（第 47 頁，第 51 節；第 64-66 頁，第 74-78 節．）

量度單位，$\frac{1}{10}$吋．　每題所需之地位，5"×7"．



習題1,2,5-7．求物體在其本身，在 V 上，及 H 上之影之投影．（第66-73頁，第79-85節）．習題3,4．求煙囱在其本身及屋頂上之影之投影．習題8．求托架在本身及在 V 上之影之投影．

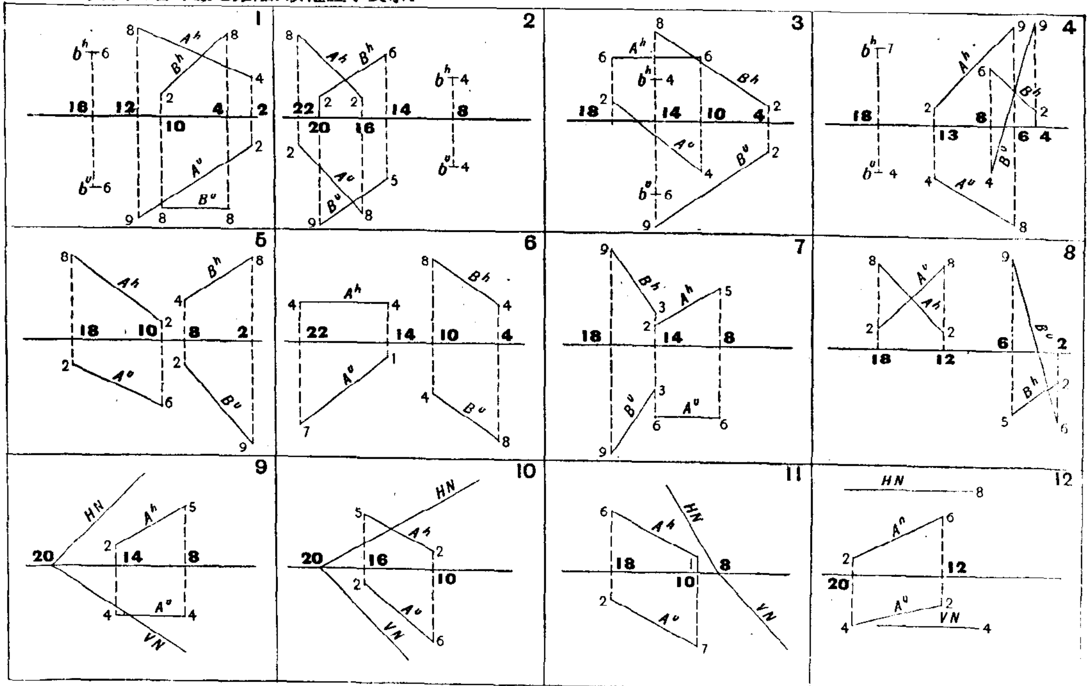
量度單位，$\frac{1}{8}$吋. 每題所需之地位，$2\frac{1}{2}$"×3". HV 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數. 與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示.



習題 1-6. 一平面含點 a 而平行於平面 N. 求該平面之跡.（第 75,77 頁，第 87,92 節.）

習題 7-12. 一平面含點 b 而垂直於線 C. 求該平面之跡.（第 75,78 頁，第 88,93 節.）

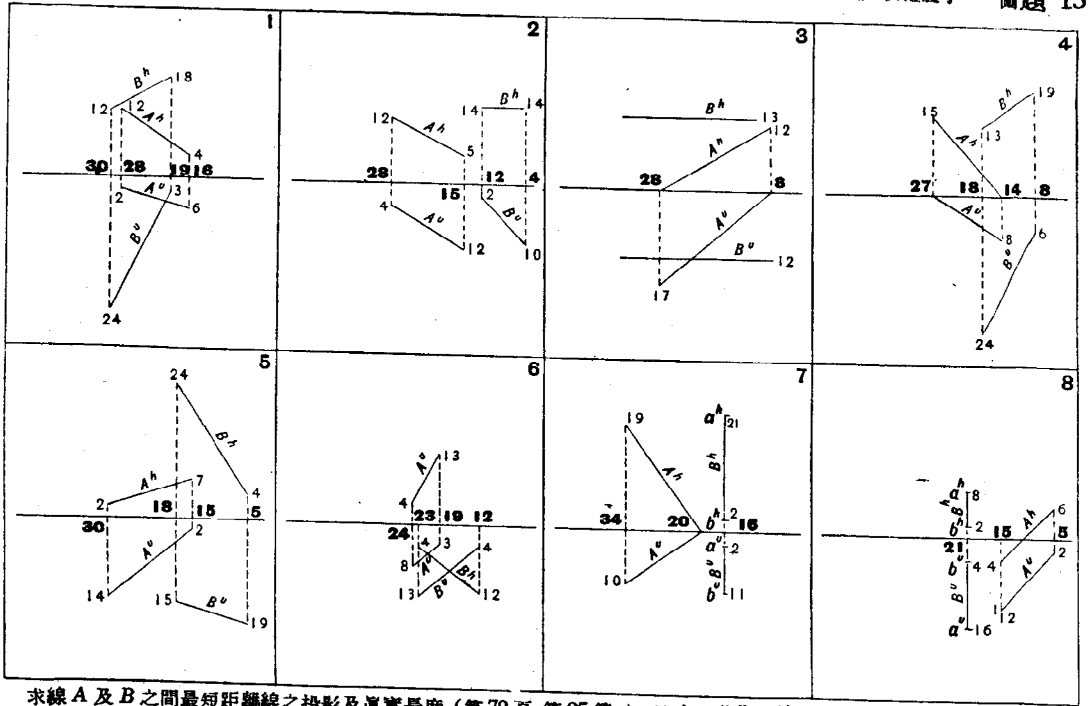
量度單位，$\frac{1}{8}$ 吋．每題所需之地位，$2\frac{1}{2}'' \times 3''$．$HV$ 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



習題 1-4．過點 b 作一平面平行於線 A 及 B．（第 76 頁，第 89 節．）習題 5-8，過線 A 作一平面平行於線 B．（第76 頁，第 90 節．）習題 9-12．過線 A 作一平面垂直於平面 N．（第 77,78頁，第 91,94 節．）

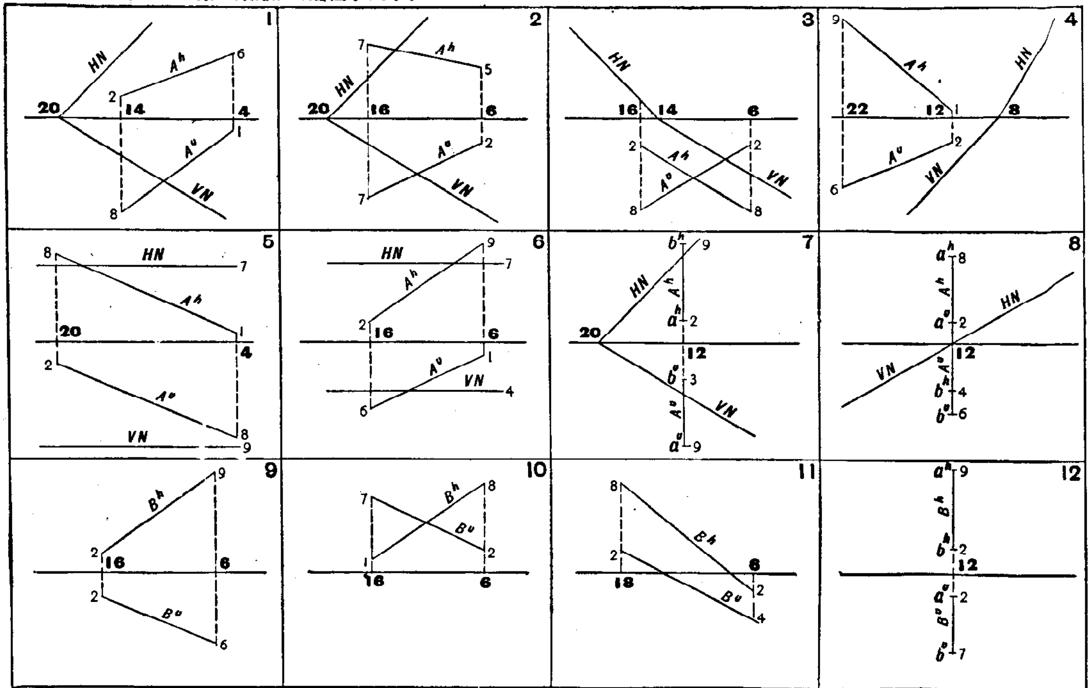
量度單位，$\frac{1}{8}$ 吋。 每題所需之地位，5"×7"。 與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示。

圖題 15



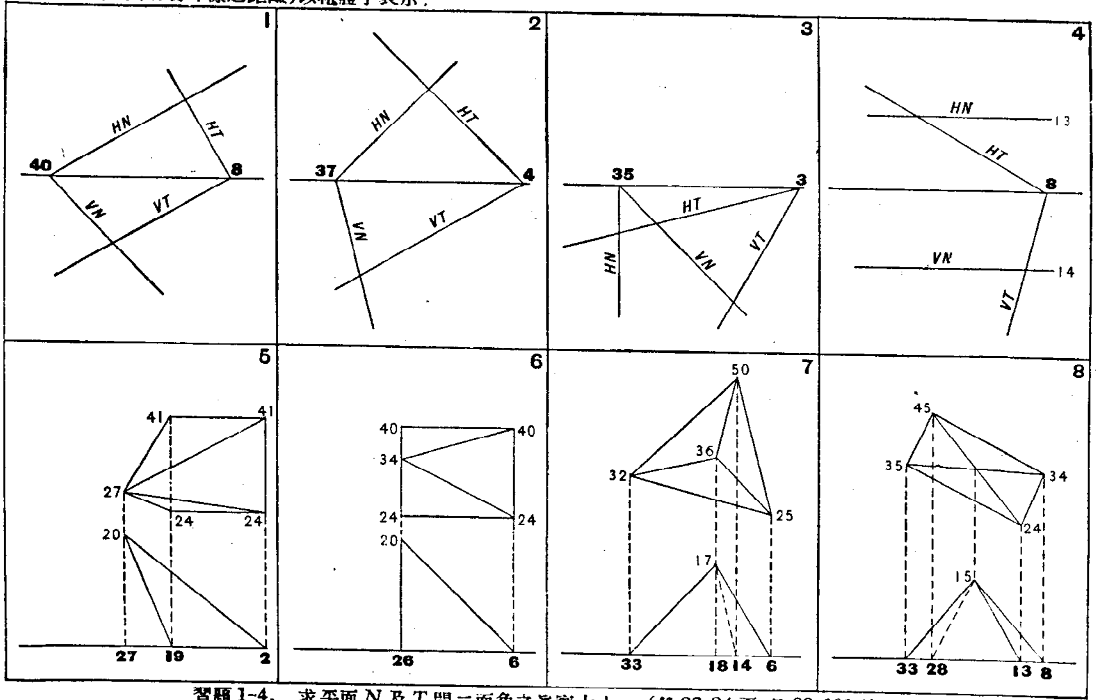
求線 A 及 B 之間最短距離線之投影及眞實長度。（第 79 頁，第 95 節。） 注意。若作一輔助平面通過線 A，則解題最易。

量度單位，¼吋．每題所需之地位，2½"×3"．HV 與平面諸跡間之角為 15° 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



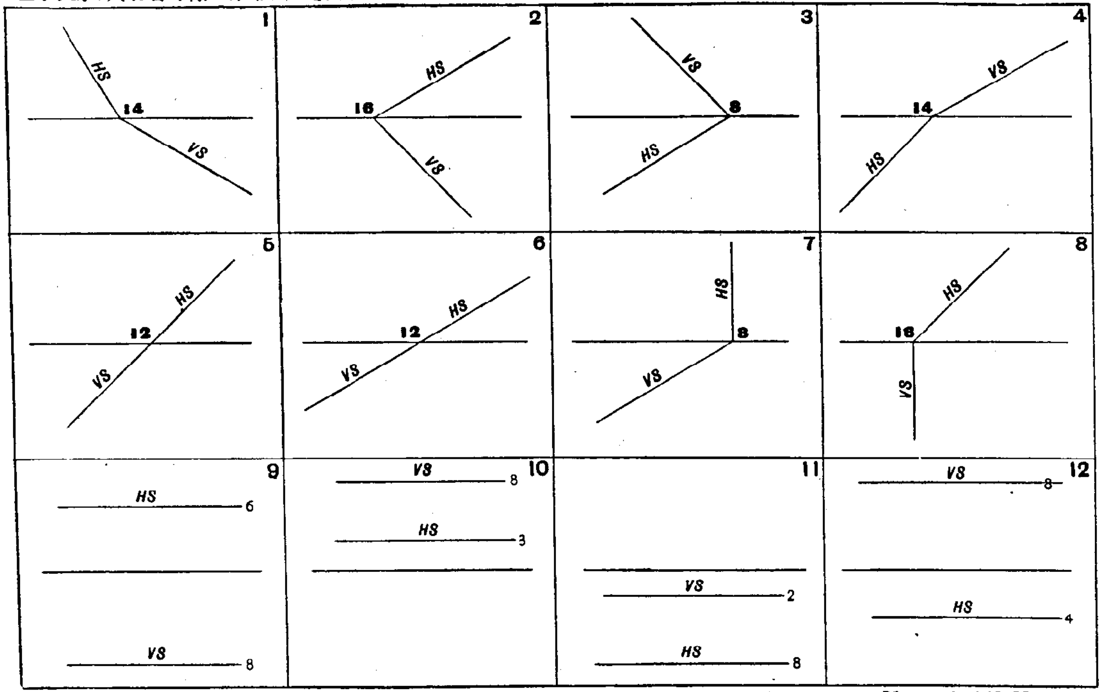
習題1-8．求線 A 與平面 N 間夾角之眞實大小．（第79頁，第96節．）習題9-12．求線 B 與 V 及與 H 間夾角之眞實大小．（第81頁，第97節．）注意．B 與 V 間之角註為 V，與 H 間之角註為 H．

量度單位，$\frac{1}{8}$吋．每題所需之地位，5"×7"．HV及平面諸跡間之角爲15°之倍數．與HV之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



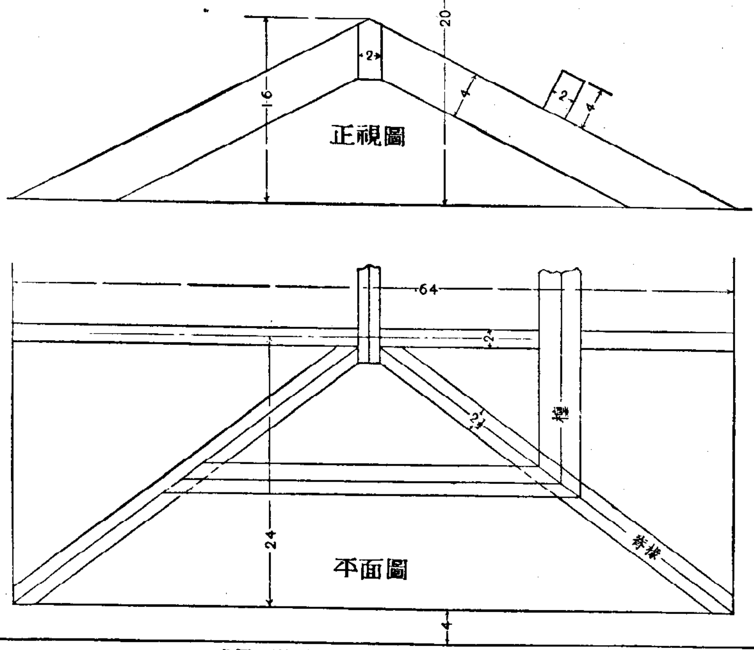
習題 1-4．　求平面N及T間二面角之眞實大小．（第82-84頁，第99-101節．）
習題 5-8．　求物體諸二面角之眞實大小．（第82-84頁，第99-101節．）

量度單位，$\frac{1}{8}$吋．每題所需之地位，$2\frac{1}{2}'' \times 3''$．$HV$ 及平面諸跡間之角為 15° 之倍數．與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



求平面 S 與 V 及與 H 間之夾角．(第 84 頁，第 102 節．)　注意．S 與 V 間之角註為 V，與 H 間之角註為 H．

量度單位，$\frac{1}{8}$吋．本題所需之地位，7" × 10".



脊椽

求其長度——下切角——底切角——側切角——頂斜角．

短椽

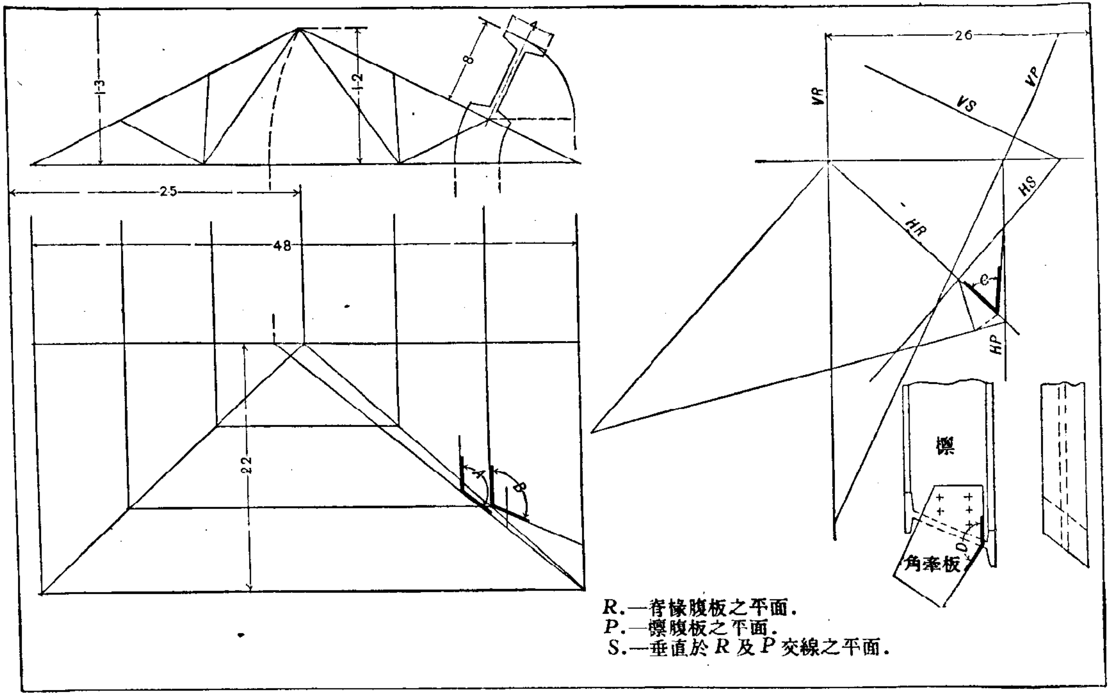
求其側切角．

檩

求其下切角——側切角——側面與端面間之角．

求屋頂構件之斜角，切角及長度，如上所示．（第85頁，第103節．）

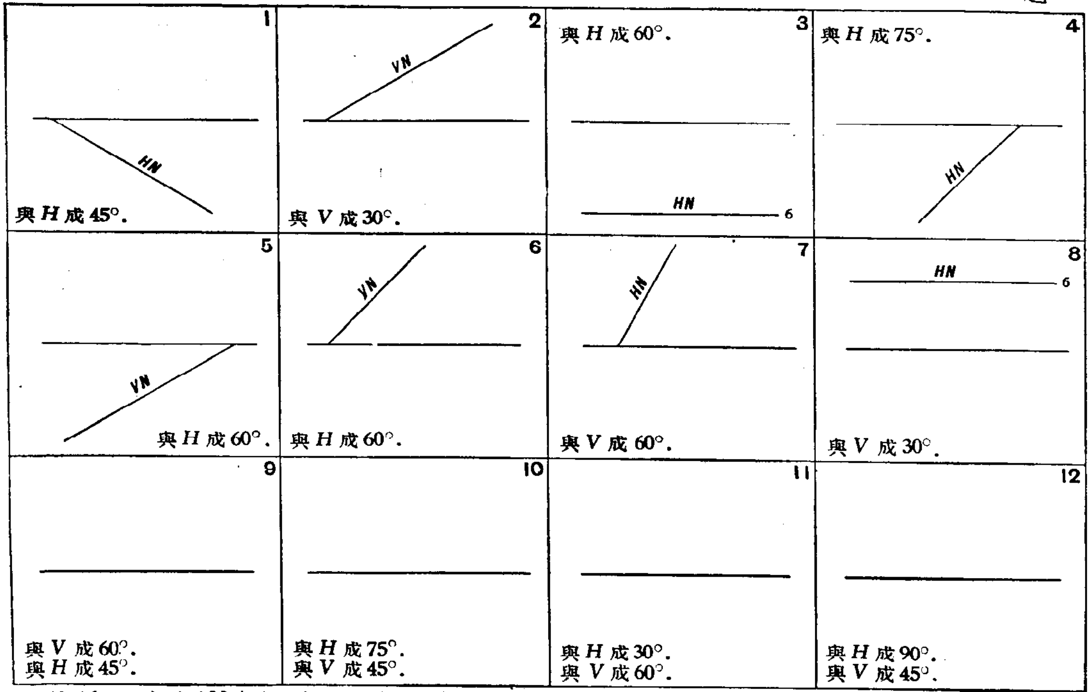
量度單位，$\frac{1}{8}$吋．　本題所需之地位，7" × 10"．　　圖題 20



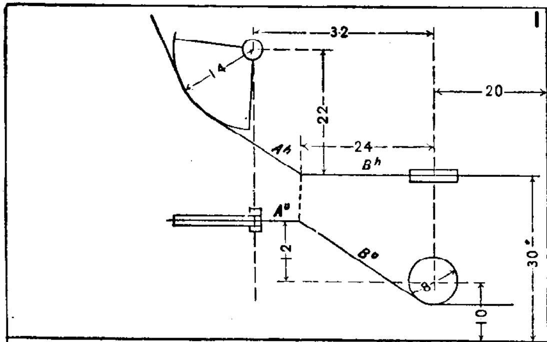
求檁頂之切角(A)．　檁腹板(web)之斜角(B)．　脊椽腹板平面與檁間之角，卽角牽板(gusset)之彎角(bend)，(C)．　角牽板頂邊間之角(D)．（第 85 頁，第 103 節）．

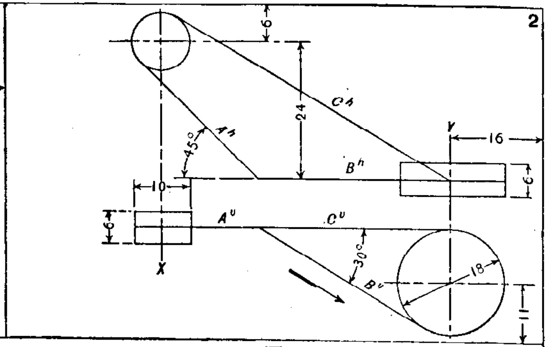
量度單位，$\frac{1}{8}$ 吋. 每題所需之地位，$2\frac{1}{2}'' \times 3''$. HV 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數.

圖題 21

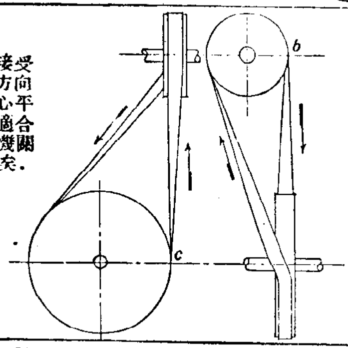


習題 1-8. 求平面 N 之他一跡. (第 87,88 頁，第 104,105 節.) 習題 9-12. 求平面 S 之二跡，該平面與 V 及與 H 之夾角如所示者. (第 88 頁，第 106 節.) 用直徑約 10 單位之球.





用皮帶傳動，必須滿足一條件，卽：皮帶輪放出皮帶處之一點必在接受其皮帶之輪之中心平面內．若兩軸互成直角，如圖中所示，則其運動方向將如所標明者，點 b 在大皮帶輪之中心平面內，點 c 在小皮帶輪之中心平面內．但若將方向改變，則必須用導輪 (guide pulley)，以強使皮帶適合上述條件．至於導輪之位置，則全視便利與否定之．題 1 爲轉向機關 (steering gear)，需一導輪．題 2 本需二導輪，然此處僅決定其一足矣．



習題 1.　求導輪之投影，其直徑爲 8 單位，面寬爲 2 單位．並求其軸與 V 及與 H 間之角．（第 54 頁，第 60 節.）

習題 2.　求導輪之投影，其直徑爲 20 單位，面寬爲 6 單位．並求其軸與 V 及與 H 間之角．畫 4 單位寬之皮帶及 2 單位直徑之軸．（第 54 頁，第 60 節.）

量度單位，$\frac{1}{8}$吋．　每題所需之地位，7"×10"．

圖題 23

1

在離下邊框 38 單位處定 HV．　在 HV 上定點 b 離右首邊框 16 單位．

求作在第一象限中置於一平面上之正六邊柱之投影．該平面之垂直跡與 HV 成 15° 角，其水平跡與 HV 成 45° 角．　稜柱底之中心爲平面之一點，在 V 前 17 單位，H 上 4 單位．　六邊形之邊爲 6 單位，其中二邊垂直於平面之水平跡．　稜柱之高度爲 12 單位．平面諸跡交 HV 於點 b．

求該稜柱在平面上之影．

2

在離下邊框 38 單位處定 HV．　在 HV 上定點 b 離右首邊框 20 單位．

求作在第一象限中置於一平面上之正五角錐之投影．該平面之垂直跡與 HV 成15° 角，其水平跡與 HV 成 45° 角．　稜錐支於其頂點上，其位置在平面上，V 前 17 單位，H 上 4 單位處．　稜錐之軸長 12 單位，　垂直於平面．　稜錐底之外接圓之直徑爲 12 單位．　五邊形之一邊平行於 H．平面諸跡交 HV 於點 b．

求該稜錐在平面上之影．

3

在離下邊框 38 單位處定 HV．　在 HV 上定點 b 離右首邊框 16 單位．

求作在第一象限中置於一平面上之正六角錐之投影．該平面與 H 成 20° 角，與 V 成 75° 角．　稜錐支於其頂點上，其位置在平面上，V 前 18 單位處，H 上 4 單位處．稜錐之軸長 12單位，垂直於平面．底之短直徑平行於 H；長直徑之長爲 12 單位．　平面諸跡交 HV 於點 b．

求該稜錐在平面上之影．

4

在離下邊框 38 單位處定 HV．　在 HV 上定點 b 離右首邊框 60 單位．

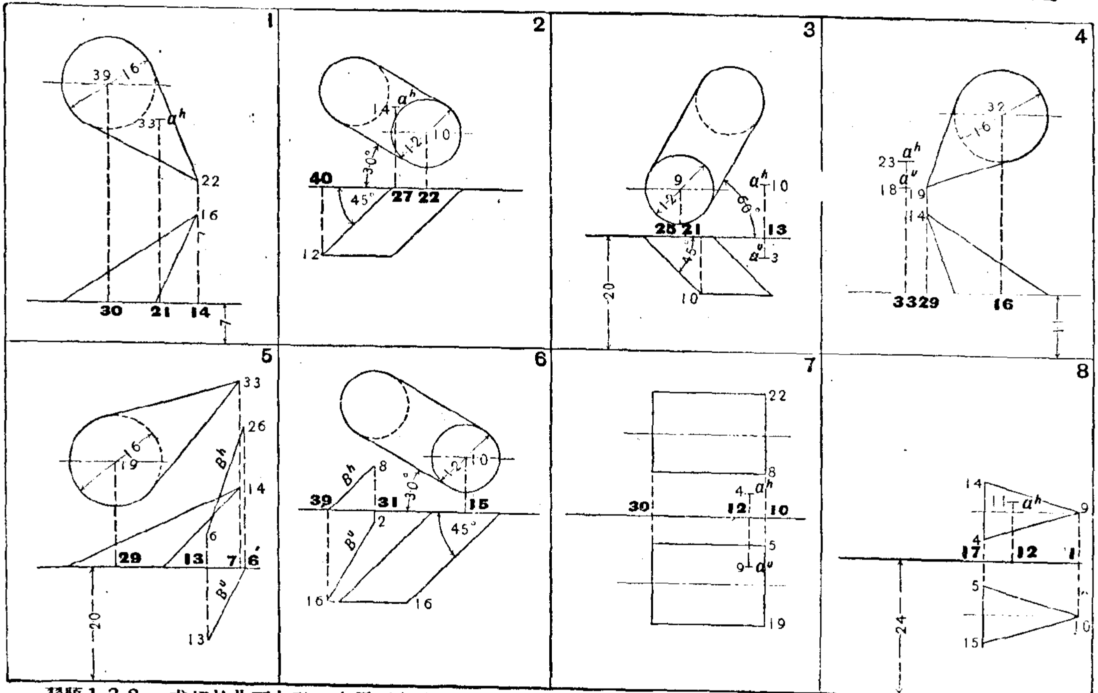
求作在第一象限中置於一平面上之立方體之投影．該平面與 H 成 30° 角，與 V 成 65° 角．　立方體底之中心離平面之水平跡 10 單位，離 V 8 單位．　底之一對角線平行於 H．　立方體之邊爲 8 單位．　平面諸跡交 HV 於點 b．

求該立方體在平面上之影．

求斜平面上一立體之投影及其在平面上之影．

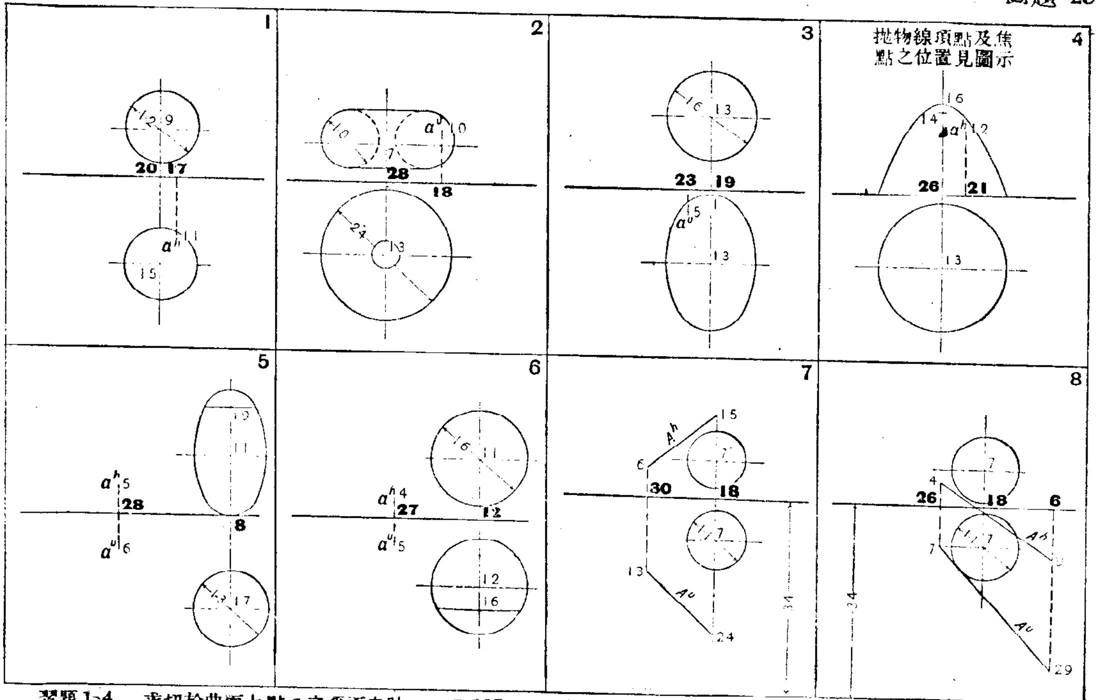
量度單位，$\frac{1}{8}$吋．　每題所需之地位，5"×7"．　與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．

圖題 24



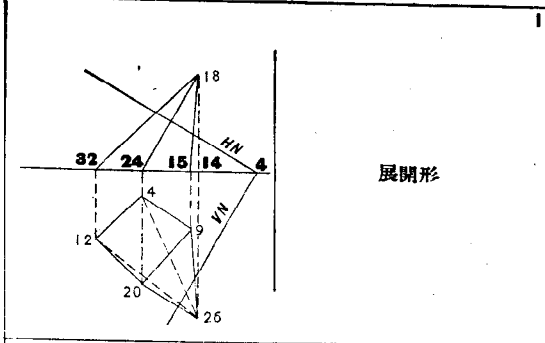
習題1,2,8.　求切於曲面上點 a 之平面之跡．（第 99 頁，第 120、121 節．）習題 3,4,7.　求切於曲面且包含點 a 之平面之跡．（第 101 頁，第 122 節；第 102 頁，第 124 節．）　習題 5,6.　求切於曲面且平行於線 B 之平面之跡．（第 102 頁，第 123 節；第 102 頁，第 125 節．）　注意．　於每題中畫出其切素線．

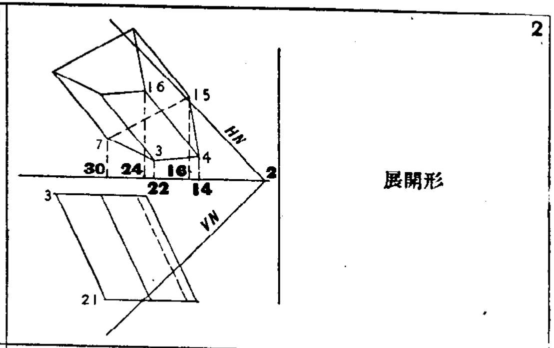
量度單位，1吋．　每題所需之地位，5"×7"．　與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．

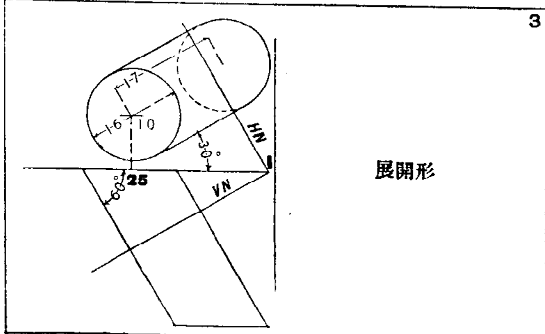


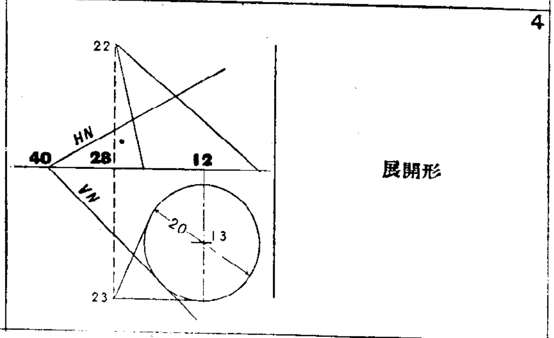
習題 1-4．　求切於曲面上點 a 之平面之跡．（第 105 頁，第 127 節．）　習題 5,6．　求包含點 a 且切曲面於指定緯圈之平面之跡．（第 107 頁，第 128 節．）　習題 7,8．　求切於球面且包含線 A 之平面之跡．（第 107 頁，第 130 節．）　注意．　習題 5-8．　求切點．

量度單位，$\frac{1}{8}$吋。 每題所需之地位，7" ×10"． HV 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數． 與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



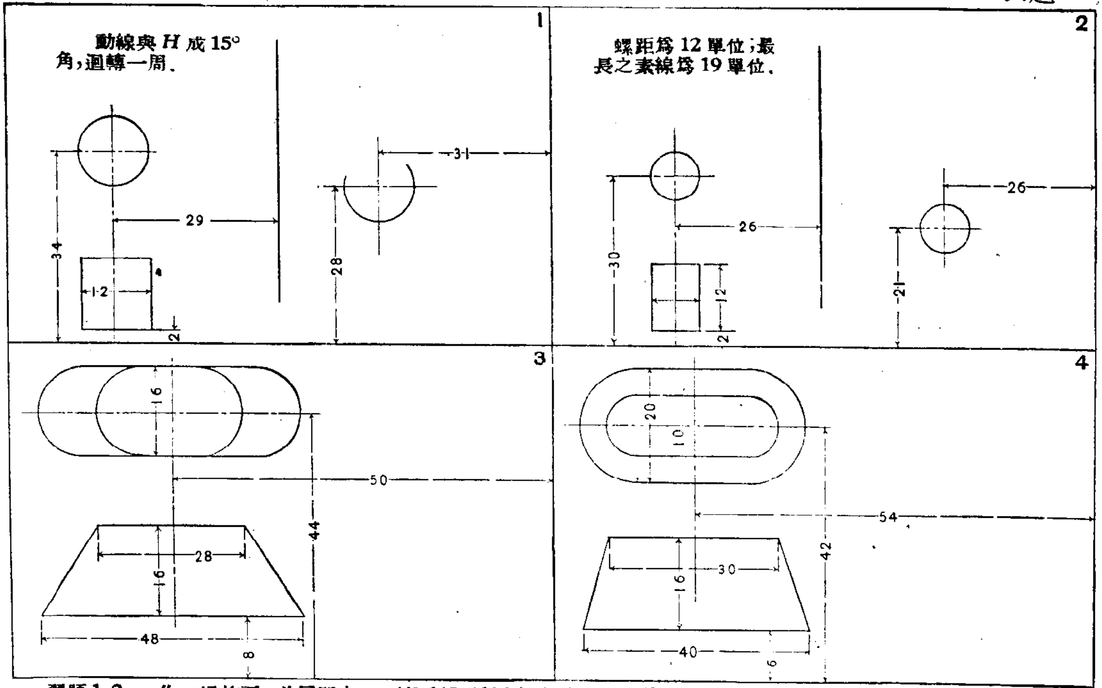






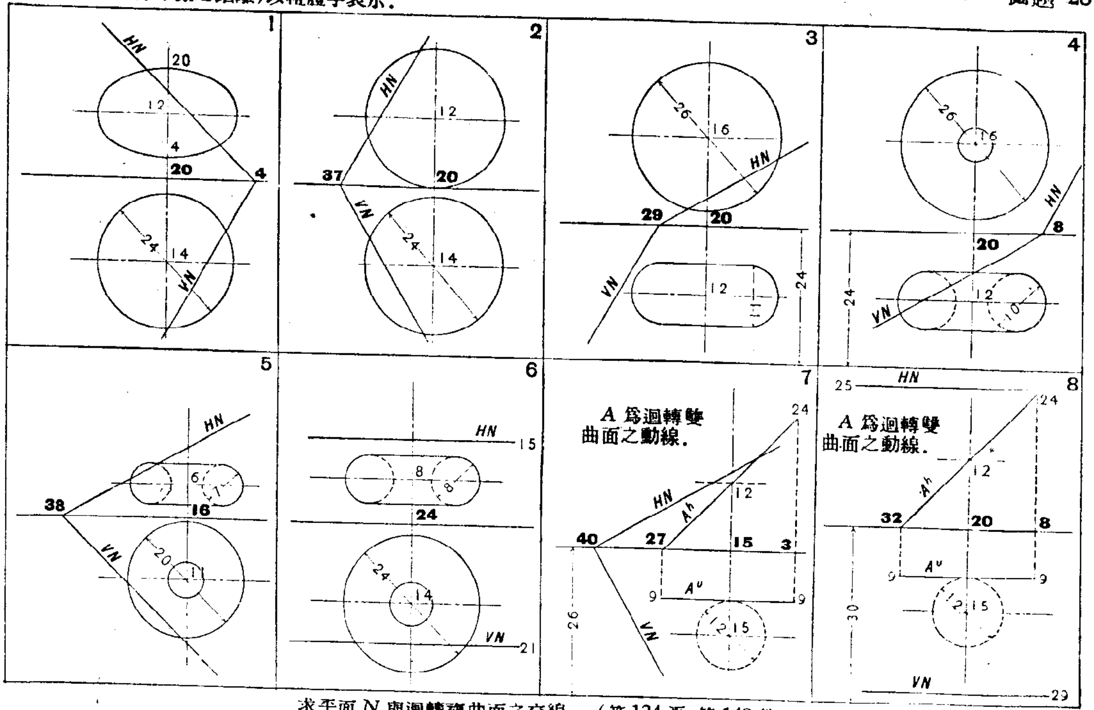
求平面與立體之交線，並展開曲面． 習題 1．（第 110 頁，第 136,137 節．） 習題 2．（第 117,118 頁，第 143, 144 節．） 習題 3．（第 114-116 頁，第 140,141 節．） 習題 4．（第 112-113 頁，第 138,139 節．）

量度單位，¼吋．　每題所需之地位，7"×10"．　　　　　　　　圖題 27



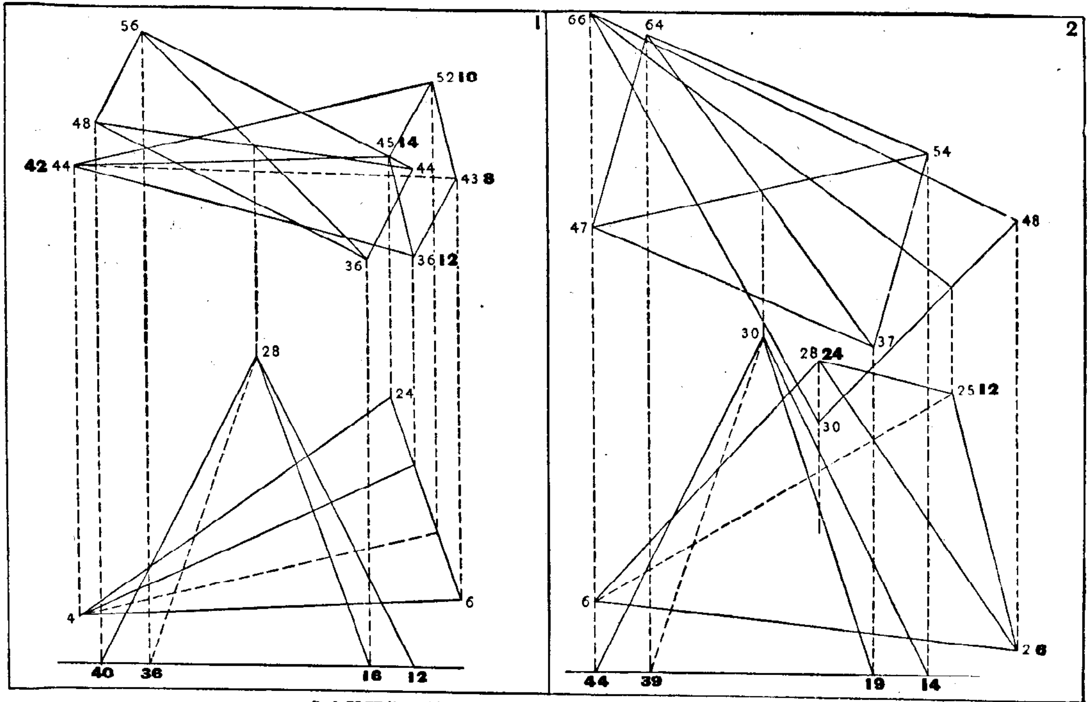
習題 1,2．　作一螺旋面，並展開之．（第 119-121 頁，第 145-147 節．）　習題 3,4．　展開煙罩之四分之一．　習題 3．（第 117 頁，第 142 節．）　習題 4．（第 113 頁，第 139 節．）

量度單位，$\frac{1}{8}$吋． 每題所需地位，5"×7"． HV 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數． 與 HV 之距離，以細體字表示，與右首界線之距離，以粗體字表示．



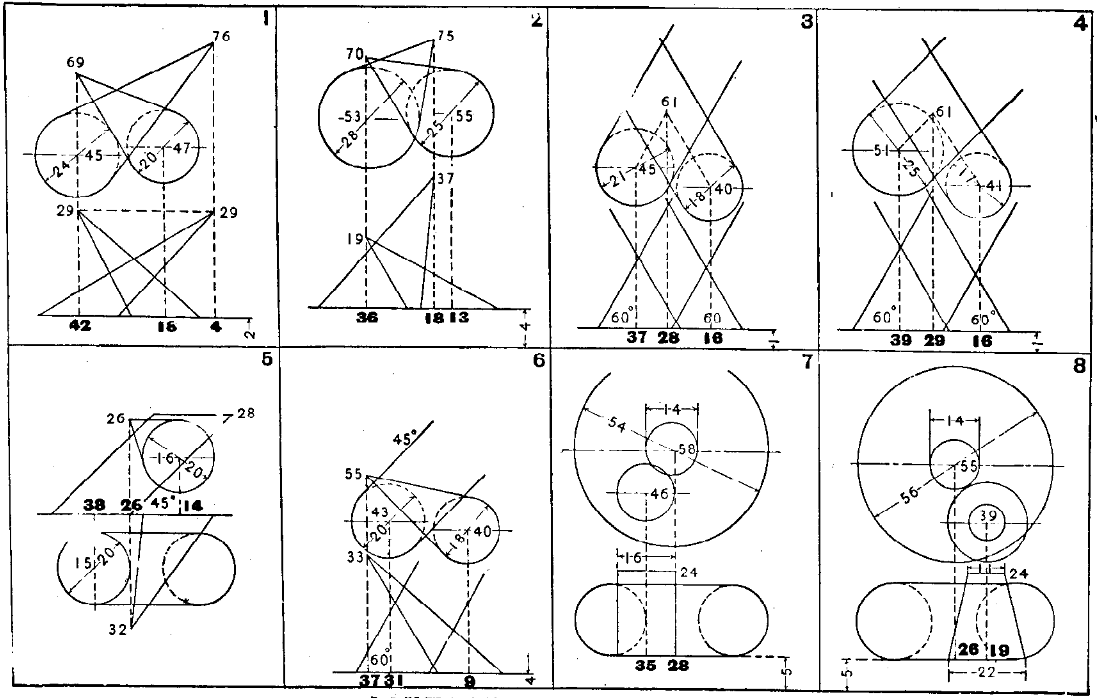
求平面 N 與迴轉複曲面之交線．（第 124 頁，第 148 節）．

量度單位，$\frac{1}{8}$吋． 每題所需地位，7" × 10"． 與 HV 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



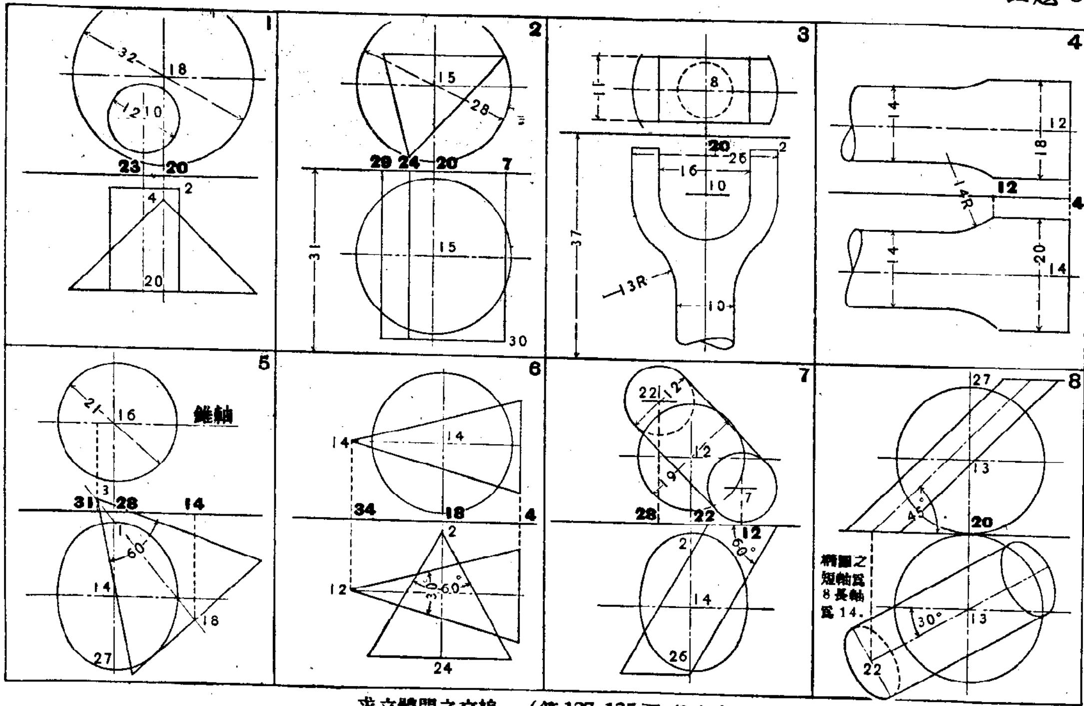
求立體間之交線．（第 63 頁，第 72 節）． 將物體之每角註字．

量度單位，$\frac{1}{8}$吋． 每題所需地位，7"×10"． 與 *HV* 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示。

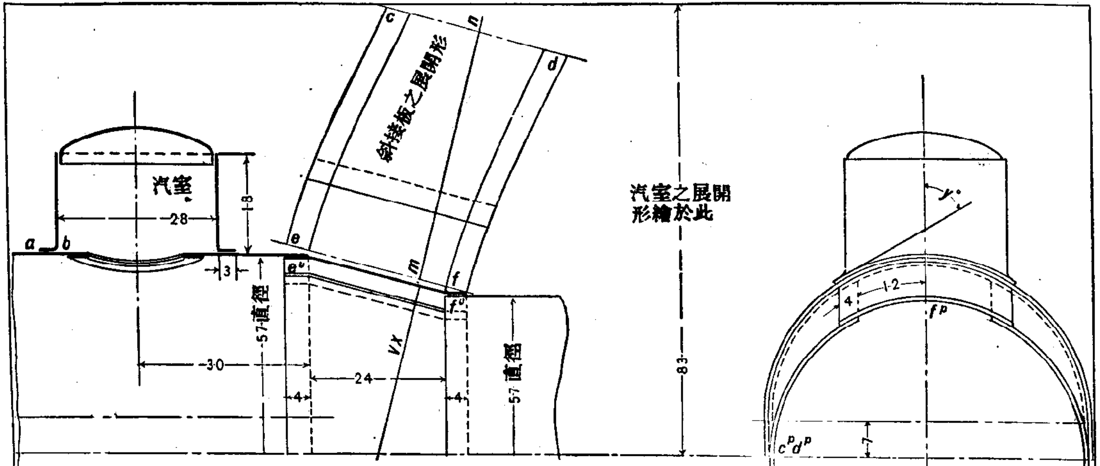


求立體間之交線．（第 127-135 頁，第七章）．

量度單位，¼吋. 每題所需地位，5"×7". 與 *HV* 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示.　　**圖題 31**



求立體間之交線.（第 127–135 頁，第七章）.

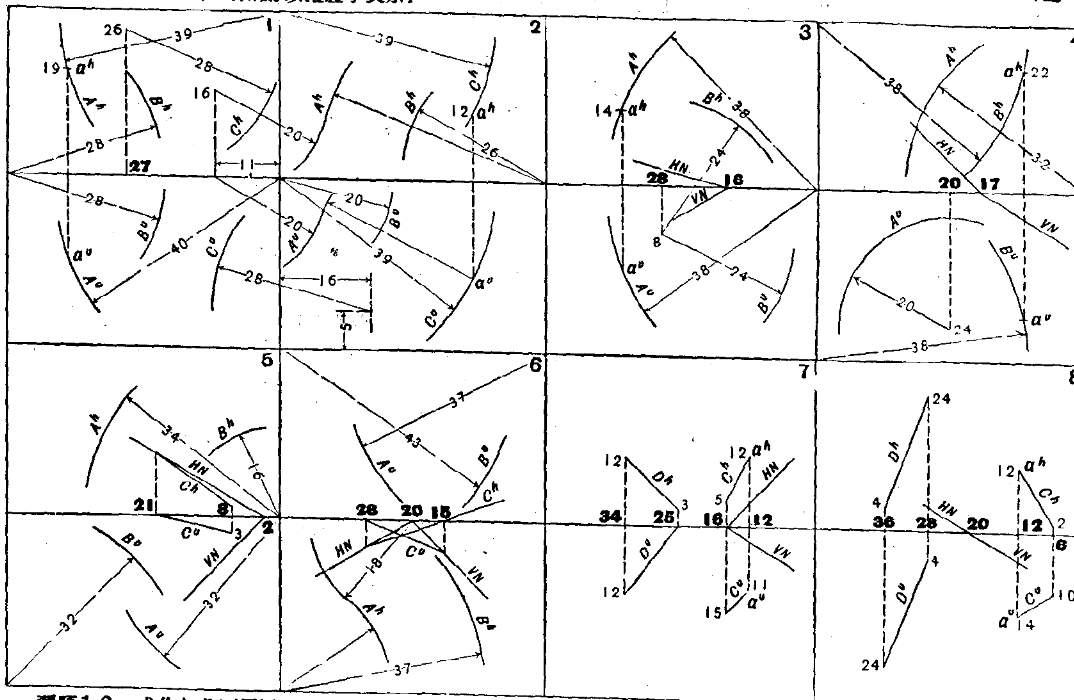


此處所示者爲鍋爐之剖視圖及側視圖．玆欲展開汽室（dome）之半，及在素線 ef 與 cd 間之一部分斜接板（slope sheet），另加搭接所需之材料．

作鍋爐之二全視圖，板之厚以單線表示．求凸緣（flange）ab 二曲線之投影，注意凸緣之輻射素線（radial element）所成角度自 $0°$ 至 $y°$．斜接板之素線彼此平行，且平行於垂直面，故其垂直投影爲眞長．展開形可以下列二法之一得之，第一法爲實際工作時應用者．第一法：因素線平行於 V，故展開形可以第 117 頁，第 142 節之法得之，另加搭接所需之材料．第二法：先作一正截口（第 109 頁，第 134 節）VX，其展開形爲一直線 mn．欲求素線間之距離，可將正截口迴轉使平行於 P，而後再在側投影（或側視圖）中量得所需之距離．依照第 116 頁，第 141 節之法展開之．

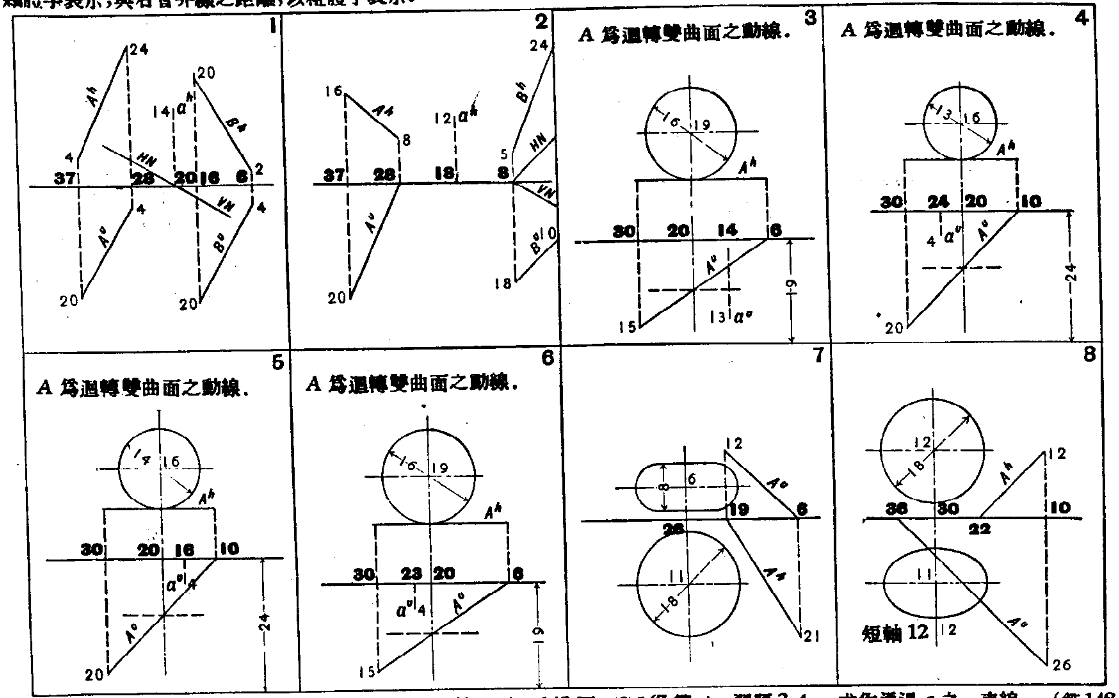
畫機車鍋爐之汽室及斜接板，並展開之．

量度單位，$\frac{1}{16}$吋．　每題所需之地位，5"×7"．　*HV* 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數．　與 *HV* 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



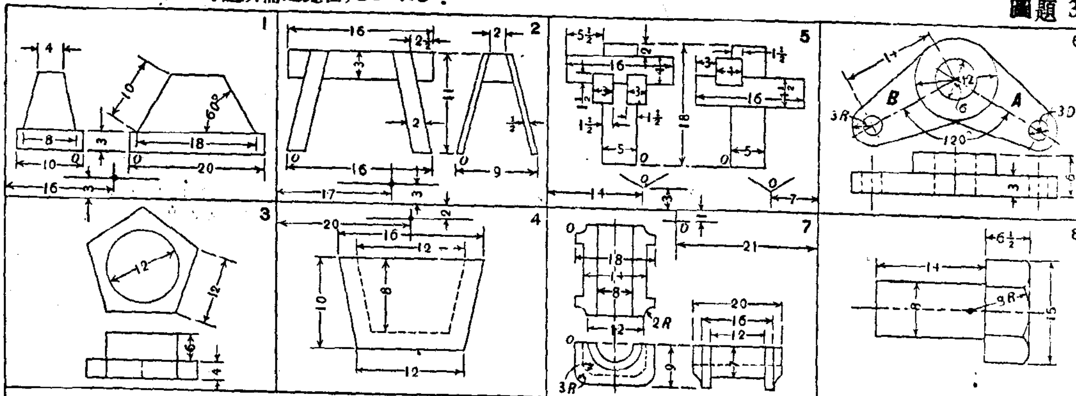
習題 1,2．　求作翹曲面通過點 *a* 之一素線（第 136 頁，第 161 節．）　習題 3,4．　求作翹曲面通過點 *a* 之一素線（第 137 頁，第 162 節．）　習題 5,6．　求作翹曲面之一素線，平行於準平面 *N* 上線 *C*．（第 139 頁，第 163 節．）　習題 7,8．　求作雙曲拋物面之一素線，通過準線上點 *a*．（第 143 頁，第 166 節．）

量度單位，1吋．　每題所需之地位，5"×7"．　*HV* 及平面諸跡間之角爲 15° 之倍數．　與 *HV* 之距離，以細體字表示；與右首界線之距離，以粗體字表示．



習題 1,2．　求作雙曲拋物面通過點 *a* 之一素線．（第 143 頁，第 167 節．）　習題 3,4．　求作通過 *a* 之一素線．（第 148 頁，第 172 節．）　習題 5,6．　求作切曲面於 *a* 之一平面．（第 149 頁，第 175 節．）　習題 7,8．　通過線 A 作一平面切於曲面．（第 149 頁，第 176 節．）

量度單位，¼吋．　每題所需之地位，3½"×5"．



依下述作等角畫．

習題 1．　依圖中之指示定角 O．　用圖 237，238 之法求得 60° 角．

習題 2．　依圖中之指示定角 O．　繪圖時，將鋸架置於矩形柱內．

習題 3．　在圖紙之中心定柱下底之中心．

習題 4．　依圖中指示之點定盤之上角．

習題 5．　(a) 依圖中之指示定角 O，作四塊之等角畫．

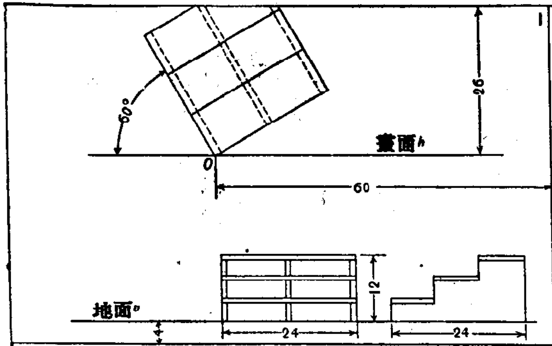
(b) 作直立塊之等角畫，必要之割去部分應予示明．　依圖中之指示定角 O．

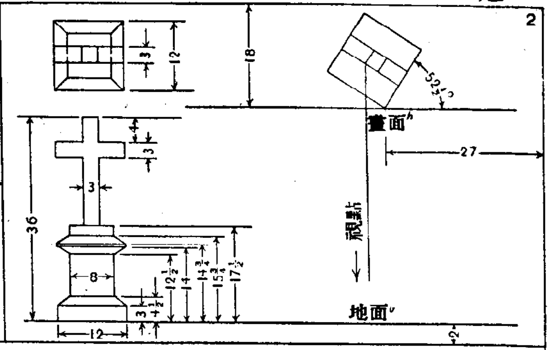
習題 6．　定輪轂(Hub)頂面之中心，離上邊框 12 單位，離右邊框 15 單位．作臂 A 之中心線以爲等角軸，其方向爲向下向左．　作臂 B 之中心線向上而向左．　用圖 237，238 之法求得 120° 角．

習題 7．　依圖中之指示定角 O．

習題 8．　用第 188 節之準確方法作頭頂上之圓，並用圖 236 之法作諸面之曲線．

求作物體之等角畫．（第 157–159 頁，第 185–188 節．）　求物體之斜投影．（第 160 頁，第 190 節．）　求物體之半斜投影．（第 162 頁，第 191 節．）





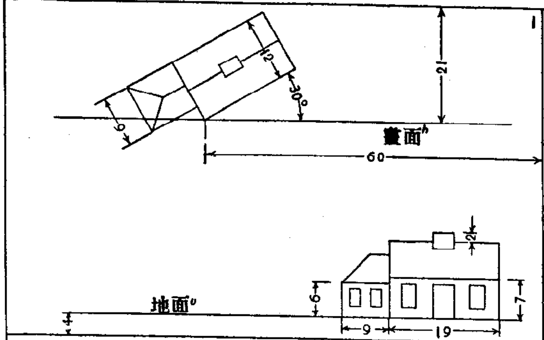
習題 1． 觀察者離畫面 31 單位，在角 O 之正前方． 視平線在地面上 21 單位． 此梯階有三豎板，均 1 單位厚；有三踏步，均 1 單位厚，8 單位寬．

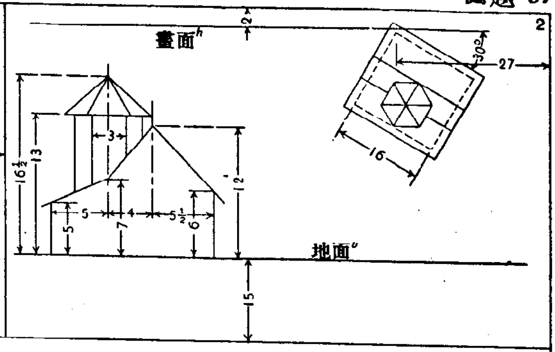
習題 2： 觀察者在所示之線上，離畫面 37 單位． 視平線在地面上 $12\frac{1}{2}$ 單位． 若用第 181 節之法解之，則碑之每一鉛直之前面用一條量度線，共用三條量度線．

作物體之透視投影，依圖中之指示定平面圖之位置．（第151-156頁，第 177-182 節．）用第 180 節或第 181 節之法解之均可．

量度單位，$\frac{1}{8}$吋．　每題所需之地位，7"×10"．

圖題 37





習題 1.　觀察者離畫面 34 單位，在與畫面相抵之屋角之正前方．　視平線在地面上 5 單位．
屋面傾斜 45°．　煙囪，3×4．　門，4×6，在側牆之中心．　大窗，3×4，離地面 2 單位，在空位之中心．　披屋之窗，2×3，其間隔 2 單位．　披屋側面之窗與正面同．

習題 2.　建築物之後牆角抵於畫面．
觀察者離畫面 34 單位，在建築物前牆角之正前方．
視平線在地面上 9 單位．
塔頂為一實心六角錐，每邊 4 單位．
因建築物在畫面之前，故透視投影圖較正投影圖為大．

作物體之透視投影，依圖中之指示定平面圖之位置．（第 151-156 頁，第 177-182 節．）　用第 181 節解之．

中英名詞對照表

一　畫

一葉之迴轉雙曲面　Hyperboloid of revolution of one nappe, 96

二　畫

二面角　Diedral angle, 21

二葉之雙曲面　Hyperboloid of two nappes, 97

二葉之盤旋面　Convolute of two nappes, 120

二面角之平面角　Plane angle of the diedral, 83

三　畫

子午線　Meridian line, 96

子午平面　Meridian plane, 96

子午切割平面　Meridian cutting plane, 133

下切角　Down cut angle, 85

下傾角　Downward inclination, 39

三落水屋面　Hip roof, 85

上視圖　Top view, 5

已知線　Given line, 25

四　畫

中心線　Center line, 19

水平投影　Horizontal projection, 5

水平坐標面　Horizontal coordinate plane, 4

水平投射面　Horizontal projecting plane, 28

水平投影柱面　Horizontal projecting cylinder, 137

反轉　Counter-revolution, 52

不可展曲面　Nondevelopable surface, 91

方紋螺旋　Square-threaded screw, 147

五　畫

主子午平面　Principal meridian Plane, 96

主子午截口　Principal meridian section, 150

正面 Front Surface, 11
正面圖 Front elevation, 6
正視圖 Front view, 6
正投影 Orthographic projection, 1
正截口 Right section, 109
正螺旋面 Right helicoid, 96, 146
切面 Tangent plane, 99
切素線 Tangent element, 99
平面圖 Plan, 5
半斜投影 Cabinet projection, 162
可展曲面 Developable surface, 91
可見部分 Visibility, 63

六 畫

地平線 Ground line, iii
交點 Point of intersection, 14
托板 Plate, 87
光源 Source of light, 67
曲動線 Curvilinear generatrix, 91
曲面之展開面 Development of a surface, 109
再次產生之素線 Element of the second generation, 148
共軛軸 Conjugate axis, 96
凸緣 Flange, 圖題 32
肋 Rib, 23

七 畫

投影 Projection or projection geometry, 2
投影面 Plane of projection, 2
投射線 Projector, 2
投影線 Projecting line, 7
投影線 Projection line, 25
投影幾何 Descriptive geometry, 1
角柱板 Gusset, 圖題 20

拋物面 Poraboloid, 97

汽室 Dome, 圖題 32

求得線 Required line, 25

李翁拿多·達文奇 Leonardo da Vinci, 1

八 畫

易位複曲面 Double-curved surface of transposition, 98

法面 Normal plane, 105

法線 Normal, 105

面 Face, 21

面 Surface, 91

面之素線 Element of a surface, 91

面之眞實表示 True representation of a surface, 9

面之最大傾斜線 Line of maximum inclination of a plane with another, 85

直柱 Right cylinder, 93

直錐 Right cone, 92

直紋面 Ruled surface, 91

直動線 Rectilinear generatrix, 91

長軸 Major axis, 55

長椽 Common rafter, 85

長球面 Prolate spheroid, 97

參攷平面 Reference plane, 19

物體之隱線 Invisible line of an object, 25

迴轉軸 Axis of revolution, 96

迴轉曲面 Surface of revolution, 96

迴轉雙曲面 Hyperboloid of revolution, 96

迴轉複曲面 Double-curved surface of revolution, 73

迴轉單曲面 Single-curved surface of revolution, 96

迴轉翹曲面 Warped surface of revolution, 96

九 畫

垂直投影 Vertical projection, 6
垂直諸度 Vertical dimensions, 16
垂直坐標面 Vertical coordinate plane, 4
垂直投射面 Vertical projecting plane, 28
後傾角 Backward inclination, 40
穿過點 Point of piercing, 61
底切角 Heel cut, 85
相隣素線 Consecutive element, 91
扁球面 Oblate spheroid, 97
首次產生之素線 Element of the first generation, 148

十 畫

草圖 Freehand sketch, 1
射影幾何 Geometry of projection, 1
素線 Element, 21
脊椽 Hip rafter, 86

十 一 畫

頂點 Apex, 92
頂斜角 Top bevel, 87
側面 Profile plane, 4
側頂 Side roof, 87
側跡 Profile trace, 37
側切角 Side cut, 86
側面圖 Side elevation, 6
側投影 Profile projection, 6
側視圖 Side view, 4
側坐標面 Profile coordinate plane, 4
側投射面 Profile projecting plane, 28
透視投影 Perspective projection, 1
視圖 View, 3
動線 Generatrix, 91
貫軸 Transverse Axis, 98

斜錐 Oblique cone, 112
斜平面 Oblique plane, 65
斜接板 Slope sheet, 圖題32
斜螺旋面 Oblique helicoid, 96
斜橢圓柱面 Oblique elliptical cylinder, 114
陰 Shade, 66
陰線 Shade line, 67

十二畫

發散量 Amount of divergence, 21
短軸 Minor axis, 56
短椽 Jack rafter, 85
虛構力 Visualization, iii
等角投影 Isometric projection, 1
畫面 Picture plane, 2
結構線 Construction line, 25
割面 Secant plane, 109
圍線 Contour line, 124
圍素線 Contour element, 112

十三畫

圓環面 Annular torus, 98
圓柱性面 Cylindroid, 96
極限點 Limiting point, 130
葉 Nappe, 92
葛司伯・蒙奇 Gaspard Monge, 2
稜 Edge, 21
準線 Directrix, 91
準平面 Plane director, 94
準錐面 Cone director, 94
單曲面 Single curved surface, 73
腹板 Web, 圖題20

十四畫

圖 Drawing, 2
圖示學 Graphics, iii
圖示學 Science of graphic expression, 1
圖解文字 Graphic language, 1
端 Extremity, 21
端頂 End roof, 87
截口 Section, 99
截口 Cut section, 109
複曲面 Double-curved surface, 91
漸伸線 Involute, 94
蜿蜒面 Serpentine, 98
輔線 Auxiliary line, 25
輔錐 Auxiliary cone, 105
輔平面 Auxiliary plane, 12
輔視圖 Auxiliary view, 23
輔切割平面 Auxiliary cutting plane, 58
輔助切割面 Auxiliary Cutting surface, 127

十五畫

線段 Segment, 111
線之跡 Trace of a line, 14
線之投射面 Plane projector or projecting plane of a line, 27
影 Shadow, 66
影區 Umbra, 67
劈錐曲面 Conoid, 94
廡殿式屋頂 Hip roof, 85
盤旋面 Convolute, 91

十六畫

導輪 Guide pulley, 圖題 22
緯圈 Parallel, 96
錐底 Base of a cone, 92

錐軸 Axis of a cone, 92

輻射素線 Radial element, 圖題 32

十七畫

檁 Purlin, 87

環面 Torus, 98

隱影 Invisible shadow, 67

螺旋面 Helical convolute, 93

螺旋線 Helix, 94

轂 Hub, 10

十八畫

雙曲率線 Line of double curvature, 93

雙曲拋物面 Hyperbolic paraboloid, 94

轉向機關 Steering gear, 圖題 22

轉回 Counter-revolve, 52

臨界點 Critical point, 112

翹曲面 Warped Surface, 91

翹曲螺旋面 Warped helicoid, 144

十九畫

鏜孔 Bore, 10

二十二畫

彎角 Bend, 圖題 20

外來字

V紋螺旋 V-threaded screw, 146