Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 18

Aufgaben

In den nächsten Aufgaben verwenden wir die folgende Definition.

Ein Körper K heißt *vollkommen*, wenn jedes irreduzible Polynom $P \in K[X]$ separabel ist.

Aufgabe 18.1. Es sei K ein vollkommener Körper und $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung ist.

Aufgabe 18.2. Zeige, dass jeder Körper der Charakteristik 0 vollkommen ist.

Aufgabe 18.3. Zeige, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper vollkommen ist.

Aufgabe 18.4. Zeige, dass ein endlicher Körper vollkommen ist.

Aufgabe 18.5.*

Es sei K ein Körper der Charakteristik p. Zeige, dass K genau dann vollkommen ist, wenn der Frobeniushomomorphismus auf K surjektiv ist.

Aufgabe 18.6. Zeige, dass der Körper $\mathbb{F}_p(X)$ der rationalen Funktionen nicht vollkommen ist.

Aufgabe 18.7. Zeige mit Hilfe der Ableitung, dass der Zahlbereich

$$S = \mathbb{Z}[X]/\left(X^3 - 3X + 1\right)$$

für $p = 2, 5$ nicht verzweigt und für $p = 3$ verzweigt ist.

Aufgabe 18.8.*

Zeige mit Hilfe der Ableitung, dass der Zahlbereich
$$S = \mathbb{Z}[Y]/\big(Y^4 - Y^3 - 4Y^2 + 4Y + 1\big)$$
für $p = 2$ nicht verzweigt und für $p = 3, 5$ verzweigt ist.

Aufgabe 18.9.*

Sei $F = X^3 + 2X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

(1) Zeige, dass F und F' in $\mathbb{Q}[X]$ das Einheitsideal erzeugen. Man gebe explizit eine Darstellung der 1 an.
(2) Zeige, dass das von F und F' erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[X]$ eine minimale positive ganze Zahl $n > 0$ enthält.
(3) Bestimme, für welche Primzahlen p der Faserring
$$\mathbb{Z}/(p)[X]/\big(X^3 + 2X - 1\big)$$
reduziert ist.
(4) Bestimme für diejenigen Primzahlen p, für die der Faserring nicht reduziert ist, die Primfaktorzerlegung von $X^3 + 2X - 1$ in $\mathbb{Z}/(p)[X]$.
(5) Ist $R = \mathbb{Z}[X]/(X^3 + 2X - 1)$ ein Zahlbereich?

Aufgabe 18.10. Es seien $R \subseteq S$ und $S \subseteq T$ endliche Erweiterungen von Dedekindbereichen. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R, das in S verzweigt. Zeige, dass dann $\mathfrak{p}$ auch in T verzweigt.

Aufgabe 18.11. Es seien $S \subseteq T$ ineinander enthaltene Zahlbereiche. Zeige, dass ein Primteiler der Diskriminante von S auch ein Teiler der Diskriminante von T ist.

Aufgabe 18.12. Es sei R der p-te Kreisteilungsring zu einer ungeraden Primzahl p. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 17.20, Aufgabe 18.11, Lemma 17.16 und Lemma 9.9, dass R die Quadratwurzel aus $(-1)^{(p-1)/2}p$ enthält.

Abbildungsverzeichnis