第二卷第四期

贈閱

第二卷第四期目錄

封面　笛喀兒肖像

三分之二應改讀爲"二被三分"

勞 啓 祥

高等算學爲重要自然科學之一種，普通算學爲人人必備之常識，高等算學以普通算學爲根基，而普通算學又以種種基礎法則爲依據，各項基礎法則中，尤以分數之種種運算爲最重要，凡學生對於分數之意義及其運算方法未能有十分把握者，其算學必無深造之希望，作者非謂學生了解分數卽可知一切算學，然不了解分數者決不能再進而研究高深則可斷言也，又凡學生在學習算術或初等代數時，若不能使之澈底了解分數之意義及其算法，則其終身卽難再有了解之希望.

本年教育部發表各省市中小學畢業會考結果，以算學一門成績最爲低劣，教育當局或以此歸咎於課本之不良，或謂敎學未得其法，然自作者視之，其最大原因卽由於學生不能澈底了解分數，其所以不能了解者，則完全由於分數名稱之錯誤有以致之.

某次與五六十位小學算學敎師研究算學敎學問題，詢以敎學上有何困難，則皆異口同聲以分數對，作者又曾徵求多數初中算學敎員之意見，亦莫不認分數各項法則最難使學生了解，而其中分數乘法及分數除法尙覺較易，尤難者莫如分數加法及分數減法，此無他卽分數名稱錯誤之所致也.

比如有數$\frac{2}{3}$，吾人讀爲"三分之二"，此項讀法至爲呆笨，不便運算之用，且對於初學者引起誤會甚多，蓋按照語言慣例，凡述一名數，必先表其數目，然後及其物名，比如"三匹馬""五本書"之類，此不僅在吾國文字爲然，卽英文中亦只有"three horses"與"five books"而無"horses three"或"books five"之用法，獨吾人對於分數之讀法，則以分母居前，分子居後，換言之卽表示單位者居前，表示數目者居後，天下之謬誤，甯有大於此者.

夫名稱者物質之代表，然必具有簡單，明瞭，便利三項特點，方足以盡其代表之能事，比如社會以錢幣爲物品之代價，銅幣旣嫌過重，乃以銀幣金幣以補救之，近且

有鈔票支票匯票等等其便利較之實際授受貨品，誠有天壤之別．昔斯巴達國因欲提倡尚武，禁止人民經商，乃以鐵鑄錢幣，使之笨重異常，交易至感不便，結果其人民經商者極少，今吾人讀⅔為"三分之二"，其笨重不便，正如斯巴達人之鐵幣，宜乎全國中小學會考成績以算學最為低劣也．

西方之研究算學教學法者不有言曰，算學教師須使學生感覺到分數四則，小數四則，複名數四則均與整數四則根據於同一之原理，則能於了解上減少許多困難，此誠至理名言，惜乎吾國分數之讀法太笨，以致此種合乎學理之教學方法不能完全實施．

初習分數之兒童，每犯下列之錯誤，即"$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$" 按照普通思想習慣及唸讀習慣"三匹馬加二匹馬等於五匹馬"或"三尺布加二尺布等於五尺布"已成為學童腦中之一種反應動作，故若詢以"三分之一加二分之一等於多少？"彼當然答為"五分之一"蓋彼心中"三加二等於五"，而"分之一"又與"匹馬""尺布"種種名數單位所處之地位完全相同，故其作如是之答．

西國唸讀分數之法係以分子在前分母在後，輸用時一與整數無異，其教學上之困難較吾國為少，例如 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 英文讀作 "One fifth plus two fifths equals three fifths". 因常人皆知 One plus two equals three"，故此題之答可以反應動作求得之，今吾人欲求分數教學收獲良好之效果，唯有將唸讀分數之法改變次序，以分子在前分母在後．

然則⅔究應如何唸讀乎，或曰可讀"二個三分之一"，準此例以推之則 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 可讀作"一個五分之一加二個五分之一等於三個五分之一"，此項讀法其意義固較舊法略為明瞭，然其繁笨殆過之，故亦不宜於採用．

或又曰⅔讀作"二個三分"可乎，準例以推之則 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 當讀作"一個五分加二個五分等於三個五分"，此項讀法較之第一法為簡，然其中所用之"五分"與

"買布六尺三寸五分"中之"五分",或"大洋一元七角五分"中之"五分"全無差異恐因混亂而發生誤會,或仍主張採用上列之第二法但於"分"字之傍加一單人邊寫作"份",例如⅔讀作"二個三份",又$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$,則讀作"一個五份加二個五份等於三個五份",$3\frac{1}{2}$讀作"三又一個二份",$\frac{a}{b}$讀作"a個b份",又0.5讀作"五個十份",0.023讀作二十三個千份,25%讀作"二十五個百份",此項讀法對於分數之加減法增加便宜甚多,但於分數化法又生障礙,蓋吾人皆知"二個五斤等於一個十斤",探若用上列之第三種讀法,兒童或將犯下列之錯誤:$\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$,蓋此式彼可讀為"二個五份等於一個十份"也

欲求有利而無弊唯有讀⅔為"二被三分",準此例以推之則$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$可讀作"一被五分加二被五分等於三被五分",又$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$可讀作"一被三分等於二被六分",$\frac{a}{b}$可讀為"a被b分",0.32可讀"三十二被百分"0.035可讀為"三十五被千分" 2%可讀作"二被百分",此項讀法可使學童視分數為普通名數之一種,其加減時卽可以整數加減法同一之原理施行之,至於½與⅓可視為兩種單位不同之名數,如"三磅與七斤",非經化作同等單位後不能發生直接關係,例如"一個人加一點鐘"不能得答故知"一被二分與一被三分"亦當然不直接能相加.

或謂吾國讀⅔為"三分之二"之法由來甚久,國人用之已成習慣,今欲驟然改讀為"二被三分"姑無論能否推行順利,縱能之而於社會實用上不將引起種種誤會乎,曰古人讀⅔為"三之二",而非"三分之二",且彼時算學尚未昌明,既鮮種種繁雜之計算,故"三之二"之讀法實用上尚無大礙,若處今日而仍沿襲之,是猶度炎夏而着冬裘也,況吾國對於種種科學名詞及算學名詞本無絕對統一之規定,著書之人恆取其自視為便利者而採用之,故於每一名詞之後附以英文原名,以免因譯名之差異而引起誤解.

總之作者認爲欲提高中國學生算學程度必須注重分數敎學，而欲改良分數敎學則必須改變分數之讀法，至於改變後究應如何讀之個作者亦無絕對之成見，本文所提"二被三分"亦不過個人之主張，海內同道如以較好之讀法見示作者亦極爲歡迎，但其讀法必具下列各項.

(1)簡單　卽所用字數不得超過舊法所用字數

(2)明瞭　卽其名稱不得與任何原有之他種算學名稱相同俾免因混淆而生誤會

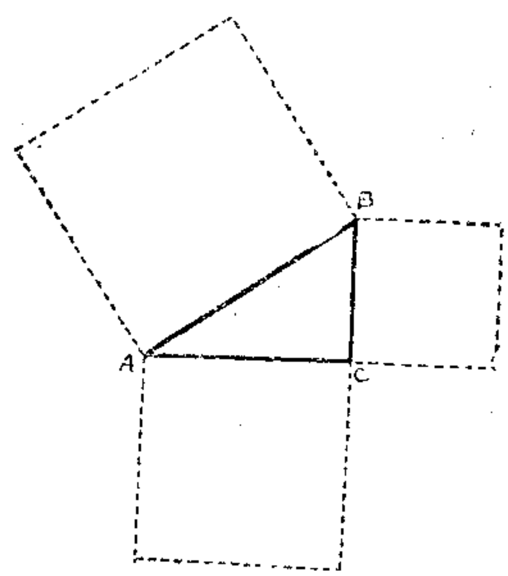
(3)便利　卽分子在前分母在後換言之表示數目者在前表示單位者在後以增加敎學上與社會實用上之便利

此項改良分數唸讀之法，如欲施行，可先於中小學之敎科書中規定之，在未普及以前，社會實用上可暫准其新舊幷用，至八年或十年以後，習於此項新讀法之學生出而任事於社會，則舊法自必因不適合環境而消滅，唯施行之初，或不免有一部人因誤會而反對耳.

畢達哥拉斯數

王元吉

"畢達哥拉斯",在今日的中學校裏應該是一個熟習的名字. 他是古希臘的一位哲學家,一個學派的領袖. 在當日的學術界上,他眞有惟我獨尊,莫可一世的氣概,可是這些都不足以使他在中學校裏享如許盛名,最使我們中學朋友心折的却是一個幾何定理.(關於這定理有一個有趣的故事,讀者諸君可參閱本刊第一卷第一期,那裏載有他的像片和傳記).



定理:直角三角形斜邊上正方形的面積,等於兩股上正方形面積之和. 或更說淸楚一點,

定理:$\triangle ABC$其$\angle BCA = R\angle$則命x,y,z各爲 BC, CA, AB 之長,可得

$$x^2+y^2=z^2 \qquad (1)$$

據說畢氏發明此定理時, 曾宰牛一百頭做犧牲,可見他是如何重這條視定理了. 本來,事實上如果沒有牠,那麼三角學,幾何學,以及許多部份的高等算學簡直是不能動手呢! 證明牠的方法隨便那本幾何教科書都有,讀者可自翻閱,並且也超出本文範圍,只好按下不表.

却說這個定理倒引出另一個問題:"假使(1)式內x,y都是整數,z是不是一定爲整數?" 顯而易見, x, y 爲整數時, z 不得分數; x^2+y^2則不論x,y之正負總是正數,故z亦不得爲虛數. 結果是:"z可爲整數,如x=±3, y=±4時, z=±5; 但亦可爲無理數,如x=±1, y=±2, z=$\pm\sqrt{5}$."

得了這個結果,我們可進一步研:"x,y究應爲如何的整數,z纔是整數呢?"這樣的整數(如±3, ±4, ±5)我們統稱爲畢達哥拉斯數. 因爲我們研究本問題的動

機，全是畢氏定理引起的，起這個名字來紀念他，想來總不算過分罷！

下面載有這問題的兩個解法.

A. 假使 x,y,z 有公因數，我們可以約去牠來解決 $x^2{}_1+y^2{}_1=z^2{}_1$，使牠們之間無公因數；反轉來，求出 x_1,y_1,z_1 後再各以同一因數乘之，也可合於(1)式的.所以解決(1)式的問題現在化爲解決 (1')

$$x_1{}^2+y_1{}^2=z_1{}^2,$$

其 x_1,y_1,z_1 無公因數．不但如此，(a) x_1,y,z_1 每二者應爲互素，不然則代入(1)，另一者亦有其公因數，遂與假設不合．(b)x_1,y_1,z_1 三者中不能有二者爲偶數．不然則代入(1')中，另一數亦必爲偶數而三者至少有2爲公因數，是與(a)衝突．根據(b)既應該有二者爲奇數，但x,y不得同時爲奇，不然則因

$$x=2p+1,\ \ y=2q+1$$

其 p,q 皆爲整數，代入(1')而得

$$4(p^2+q^2+p+q)+2=z_1{}^2.$$

上式左方以4除剩餘爲2.但(i)z_1爲奇數 $2f+1$，則$z_1{}^2=4(f^2+f)+1$，以4除剩餘爲1:(ii)z_1 爲偶數 $2g$，則$z_1{}^2=4g^2$，以4除剩餘爲O.無論 z_1之奇偶，剩餘總不能爲2，豈不是z_1奇也不行，偶也不行，上式當然不對啊！綜合(i)(ii)兩端，我們可說 x_1,z_1，應同爲奇數，要不然就 y_1,z_1 應同爲奇數.下面且命 x_1,z_1 同爲奇；y_1,z_1 同爲奇可以類似方法推得.

(1')可改寫爲，

$$y_1{}^2=z_1{}^2-x_1{}^2=(z_1+x_1)(z_1-x_1) \tag{2}$$

因已假設x_1,z_1同爲奇數，故知 (z_1+x_1)，(z_1-x_1)必同爲偶數，可命

$$z_1+x_1=2a,\quad z_1-x_1=2b,$$

於是 $$x_1=a-b,\qquad z_1=a+b,$$

其 a，b 應爲互素，不然則 x_1，z_1 有公因數，而 y_1 也必有此因數，遂與(a)不合.代入(2)式

得　　$y_1^2=2a\cdot 2b=4ab.$

而已知 a, b 無因數，是以非各自爲平方數

$$a=m^2,\quad b=n^2,$$

或　　$a=-m^2,\quad b=-n^2,$

不可.

於是　　$x_1=\pm(m^2-n^2),\quad y_1=\pm 2mn,\quad z_1=\pm(m^2+n^2)\qquad (3)$

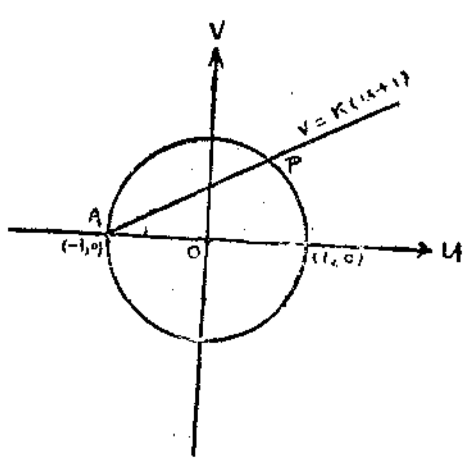
其 m, n 皆爲整數. 反轉來，代入(1')當可適合. 或更以同一因數 l 乘之

得　　$x_1=\pm l(m^2-n^2),\ y_1=\pm 2lmn,\ z_1=\pm l(m^2+n^2)\qquad (3')$

亦能適合.

B. 同A可知 x_1, y_1, z_1 每二者應爲互素. 於是以 z_1^2 除(1')式兩邊

得　　$\left(\frac{x_1}{z_1}\right)^2+\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2=1,$



命　　$u=\frac{x_1}{z_1},\ v=\frac{y_1}{z_1}$

則　　$u^2+v^2=1\qquad (4)$

牠的幾何表示是圓心在原點的單位圓. 通過 A: $(-1,0)$ 作一束直線

$$v=k(u+1)\qquad (5)$$

k 爲直線之斜度(Slope)，在(5)式內是一個褁變數(Parameter)我們可以說:"若 k 爲有理數，則直線(5)與圓(4)的另一交點P的坐標都是有理數,"蓋若以(5)代入(4)

得　　$(1+k^2)u^2+2k^2u+k^2-1=0,$

其一解爲 $u=-1,\ v=0$ 乃 A 之坐標，另一解

$$u=\frac{1-k^2}{1+k^2},\ v=\frac{2k}{1+k^2}\qquad (6)$$

乃 P 之坐標. 因 k 旣爲有理數，u, v 亦非爲有理數不可. 反轉來"圓(4)上點之坐標爲有理者如 $P(p_1,p_2)$ 與 A 聯成之直綫可化爲(5)式之形，而相當之 k 亦爲有理數."蓋AP直線之方程式爲

$$v=\frac{p_2}{p_1+1}(u+1)$$

因 p_1, p_2 同爲有理數,故其相當之 $k=\frac{p_2}{1+p_1}$ 亦爲有理數.

綜合上二層可得:"圓上點之坐標爲有理數者皆包於(6)式之內."

拋開幾何不談,此意卽:"方程式(4)之解爲有理數者皆包於(6)式之內."

u, v 是我們設爲 $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ 的,u, v究竟爲如何有理數, x_1, y_1, z_1 纔是整數呢?

這問題很易解決. 因(6)式之k爲有理數,故可命爲二整數之商 $\frac{m}{n}$. 代入之

得 $$u=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},\quad v=\frac{2mn}{m^2+n^2}$$

卽 $$\frac{x_1}{z_1}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},\quad \frac{y_1}{z_1}=\frac{2mn}{m^2+n^2}$$

故祇須 $x_1:y_1:z_1=\pm(m^2-n^2):\pm 2mn:\pm(m^2+n^2)$

意思就是說, $x_1=\pm l(m^2-n^2)$, $y_1=\pm 2lmn$, $z_1=\pm l(m^2+n^2)$ (3")

其 l 爲任意整數, 並且±號可任意取.

畢達哥拉斯數的討論, 在國內代數教本裏不多載, 本來單論到牠並無多大意味; 假使推廣起來討論到 $x^3+y^3=z^3$, $x^4+y^4=z^4$, 或一班 $x^n+y^n=z^n$, $n>2$ 則頗有趣味. 讀者諸君可先行自試一下. 留到以後再談罷!

圓內接多邊形的一個通性

楊 堯 農

以上三定理，卽第五期傅仲嘉先生通信一文中之(2·1)，(2·2)，(2,3)諸定理也．但傅先生言之甚略，似不易爲初學者所了解，楊君加以證明，實有便於初學，但來稿有欠整理處，經編者修改發表於此．　　　　編者．

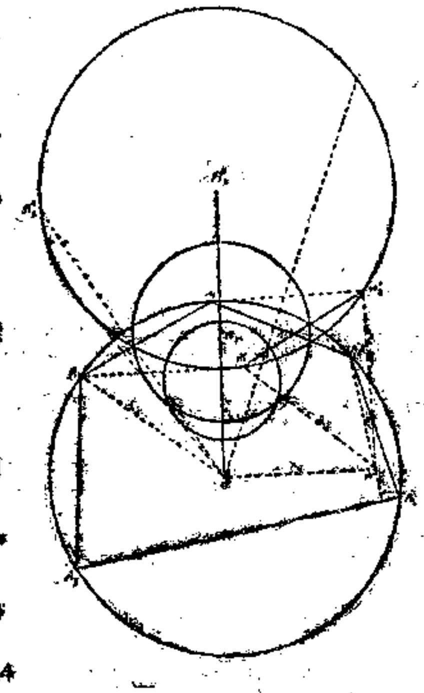
引定理　圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 每去一頂點A_i $(i=1,2,3,4)$ 其餘三點之垂心爲 H_1^i，則各 $A_i H_1^i$ 之中點相重於一點$(i=1,2,3,4)$

[證]　因 $\triangle A_2A_3A_4$ 之垂心爲 H_1^1，命 A_3A_4 之中點爲 M，$A_1A_2A_3$ 外圓之心爲 O，則 $A_2H_1^1 \mathrel{\underline{\parallel}} 2OM$．又 $\triangle A_1A_3A_4$之垂心爲H_1^2，同理$A_1H_1^2 \mathrel{\underline{\parallel}} 2OM$　故 $A_1H_1^2 \mathrel{\underline{\parallel}} H_2A_1^1$及$A_1A_2 \mathrel{\underline{\parallel}} H_1^1H_1^2$．所以$A_1H_1^1$與$A_2H_1^2$互相平分．同理 $A_1H_1^i$ 與 $A_iH_1^i$ $(i=2,3,4)$互相平分，故如題所云．

定理一　圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 每去一頂點A_i 其餘三點之垂心爲 H_1^i，之九點圓心爲N_1^i，之重心爲G_1^i則

(i)　四邊形$H_1^1H_1^2H_1^3H_1^4$內接於圓，圓心爲H_2；且OH_2與$A_iH_1^i$互相平分．

(ii)　四邊形 $N_1^1N_1^2N_1^3N_1^4$ 內接於圓，圓心爲N_2；四邊形 $G_1^1G_1^2G_1^3G_1^4$ 內接於圓，圓心爲 G_2；$O,G_2,N_2\,H_2$ 共綫且成調和列點．



[證] (1)由引定理，卽知四邊形 $H_1^1H_1^2H_1^3H_1^4$與四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 相似．相似中也爲S_1(S_1乃$A_iH_1^i$ 之中點)．相似比爲1．故四點 $H_1^1H_1^2H_1^3H_1^4$共圓，圓心爲H_2，則O,S_1,H_2共線，且 $OS_1=S_1H_2$．而 $A_iH_1^i$之中點亦爲S_i $(i=1,2,3,4)$．所以$A_iH_1^i$與OH_2互相平分．

(ii) 又O,G_1^i,N_1^i,H_1^i共線，且成調和列點．卽$3OG_1^i=2ON_1^i=OH_1^i$(參看第一卷第七期之調和四心線)．故有各四邊形$H_1^1,H_1^2H_1^3H_1^4$，$N_1^1N_1^2N_1^3N_1^4$，$G_1^1G_1^2G_1^3G_1^4$ 相似，相似中心爲O．因$H_1^1H_1^2H_1^3H_1^4$

內接於圓，所以 $N_1^1N_1^2N_1^3N_1^4$, $G_1^1G_1^2G_1^3G_1^4$ 亦各內接於圓，其相應之圓心爲 N_2, G_2 則 $\Delta H_2H_1^iH_1^j$, $\Delta N_2N_1^iN_1^j$, $\Delta G_2G_1^iG_1^j$ $(i \neq j; i,j=1,2,3,4)$ 皆爲等腰相似三角形，相似中心爲O. 因 O, G_1^i, N_1^i, H_1^i 共線，O, G_1^j, N_1^j, H_1^j 共線，所以 O, G_2, N_2, H_2 非共線不可。又因 $3OG_1^i=2ON_1^i$, $2ON_1^i=OH_1^i$, 亦可知 $3OG_2=2ON_2=OH_2$. 此即 O, G_2, N_2, H_2 爲調和列點也.

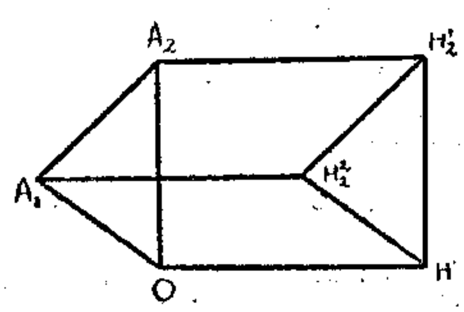
定理二 圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 每去一頂點 A_i $(i=1,2,3,4,5)$ 其餘四點必有一(H_2)爲H_2^i, 一(N_2)爲N_2^i, 一(G_2)爲G_2^i（中 H_2, N_2, G_2 與定理一之 H_2, N_2, G_2 有同一之意義，以後倣此）. 則

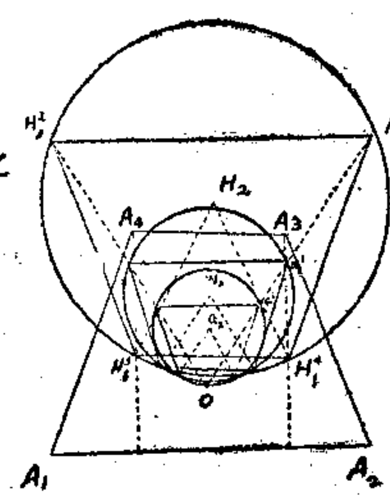
(i) 五邊形 $H_2^1H_2^2H_2^3H_2^4H_2^5$ 內接於圓，圓心爲 H_3, OH_3 與 $A_iH_2^i$ 互相平分. $(i=1,2,3,4,5)$,

(ii) $N_2^1N_2^2N_2^3N_2^4N_2^5$, $G_2^1G_2^2G_2^3G_2^4G_2^5$ 亦各內於圓；圓心爲 N_3, G_3. O, G_3, N_3, H_3 共線且成調和列點.

[證]

(i) 因 $A_2A_3A_4A_5$ 之(H_2)爲H_2^1, 命 $A_3A_4A_5$之





垂心爲 H' 由定理一之 (i)可知 OH_2^1 與 A_2H' 互相平分. 又 $A_1A_3A_4A_5$之(H_2)爲 H_2^2, 同理 OH_2^2 與 A_1H' 互相平分故知$A_1H_2^1$與$A_2H_2^2$互相平分. 同理可知$A_1H_2^1$與$A_iH_2^i$ $(i=2,3,4,5)$互相平分. 所以五邊形 $H_2^1H_2^2H_2^3H_2^4H_2^5$ 與 $A_1A_2A_3A_4A_3$ 相似，其相似中心 S_2 即爲 $A_iH_2^i$ 之中點. 故 $H_2^1H_2^2H_2^3H_2^4H_2^5$ 能內接於圓明甚，設其圓心爲 H_3, 則與 O 必對稱於 S_2, 因此 $A_iH_2^i$ 與 OH_3 互相平分.

(ii) 由定理一之(ii)可知 O, G_2^i, N_2^i, H_2^i $(i=1,2,3,4,5)$共線，而$G_2^1G_2^2G_2^3$

$G_2^4G_2^5$, $N_2^1N_2^2N_2^3N_2^4N_2^5$, $H_2^1H_2^2H_2^3H_2^4H_2^5$ 爲相似亦明甚，所以 $N_2^1N_2^2N_2^3N_2^4N_2^5$, $G_2^1G_2^2G_2^3G_2^4G_2^5$ 亦各內接於圓也．命其相應之圓心爲 N_3, G_3；如定理一之(ii)之証明，亦易知 O, G_3, N_3, H_3 共綫且有

$$3OG_3=2ON_3=OH_3$$

卽 O, G_3, N_3, H_3, 成調和列點．

定理三　圓內接n多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，每去一頂點 A_i $(i=1,2,\cdots n)$ 其餘 $n-1$ 點必有一 (H_{n-3}) 爲 $H^i{}_{n-3}$，一 (N_{n-3}) 爲 $N^i{}_{n-3}$，一 (G_{n-3}) 爲 $G^i{}_{n-3}$ 則

(i) 多邊形 $H^1{}_{n-3}H^2{}_{n-3}\cdots H^n{}_{n-3}$ 內接於圓，圓心爲 H_{n-2}，HO_{n-2} 與 $A_iH^i{}_{n-3}$ 互相平分．

(ii) $N^1{}_{n-3}N^2{}_{n-3}\cdots N^n{}_{n-3}$, $G^1{}_{n-3}G^2{}_{n-3}\cdots G^n{}_{n-3}$ 亦各內接於圓，其相應之圓心爲 $N^n{}_{-2}$, G_{n-2} 則 O, G_{n-2}, N_{n-2} H_{n-2} 共線且成調和列點．

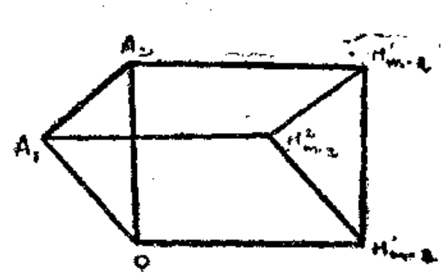
[證]　設此定理在 $n=m$ 時爲眞，則有

(1°) 多邊形 $H^1{}_{m-3}H^2{}_{m-3}\cdots H^m{}_{m-3}$ 內接於圓，圓心爲 H_{m-2}, OH_{m-2} 與 $A_iH^i{}_{m-3}$ 互相平分

(2°) $N^1{}_{m-3}N^2{}_{m-3}\cdots N^m{}_{m-3}$, $G^1{}_{m-3}G^2{}_{m-3}\cdots G^m{}_{m-3}$ 皆各內接於一圓，其圓心爲 N_{m-2}, G_{m-2}；且 O, G_{m-2}, N_{m-2}, H_{m-2} 共綫幷成調和列點．$(i=1,2,\cdots,m)$

今於此圓周上任取一點 A_{m+1}，於此 $m+1$ 多形每去一頂點 A_i $(i=1,2,\cdots m+1)$ 其餘m點由假設必有一 (H_{m-2}) 爲 $H^i{}_{m-2}$，一 $(N^i{}_{m-2})$ 爲 $N^i{}_{m-2}$，一 (G_{m-2}) 爲 $G^i{}_{m-2}$．

就m多邊形 $A_2A_3\cdots A_{m+1}$ 觀之，$A_3A_4\cdots A_{m+1}$ 之 (H_{m-3}) 爲 $H^1{}_{m-3}$，而 $A_2A_3\cdots A_{m+1}$ 之 (H_{m-2}) 爲 $H^1{}_{m-2}$，由 (1^0) 之末段，可知 $OH^1{}_{m-2}$ 與 $A_2H^1{}_{m-3}$ 互相平分．又 $A_1A_3A_4\cdots A_{m+1}$ m多邊形之 (H_{m-2}) 爲 $H^2{}_{m-2}$，同理可知 $OH^2{}_{m-2}$ 與 $A_1H^1{}_{m-3}$ 互相平分．所以 $A_1H^1{}_{m-2}$ 與 $A_2H^2{}_{m-2}$ 互相平分．



同理可知 $A_1H^1{}_{m-2}$ 與 $A_iH^i{}_{m-2}$ $(i=2,3,\cdots,m+1)$ 互相平分．卽兩 $m+1$ 多邊形 $A_1A_2\cdots A_{m+1}$ 與 $H^1{}_{m-2}H^2{}_{m-2}\cdots H^{m+1}_{m-2}$ 相似．其相似中心爲 S_{m-2} 卽 $A_iH^i{}_{m-2}$ 之中點．

因之 $H^1_{m-2}H^2_{m-2}\cdots H^{m+1}_{m-2}$ 多邊形能內接於圓，其圓心 H_{m-1} 與 O 對稱於 S_{m-2}. 故 $A_iH^i_{m-2}$ 與 OH_{m-1} 互相平分.

由(2^c)可知 $O, G^i_{m-2}, N^i_{m-2}, H^i_{m-2}(i=1,2,\cdots m+1)$ 共線且有

$$3OG^i_{m-2}=2ON^i_{m-2}=OH^i_{m-2}.$$

亦不難證明 $G^1_{m-2}G^2_{m-2}\cdots G^{m+1}_{m-2}$, $N^1_{m-2}N^2_{m-2}\cdots N^{m+1}_{m-2}$ 與 $H^1_{m-2}H^2_{m-2}\cdots H^{m+1}_{m-2}$ 爲相似，其相中心爲 O，而 $H^1_{m-2}H^2_{m-2}\cdots H^{m+1}_{m-2}$ 內接於圓，故 $G^1_{m-2}G^2_{m-2}\cdots G^{m+1}_{m-2}$, $N^1_{m-2}N^2_{m-2}\cdots N^{m+1}_{m-2}$ 亦各內接於圓，命其相應之圓心爲 G_{m-1}, N_{m-1} 因 O, G^i_{m-2}. N^i_{m-2}, H^i_{m-2} 共線，且有

$$3OG^i_{m-2}=2ON^i_{m-2}=OH^i_{2},\ (i=1,2,3,\cdots n+1)$$

如定理一之(ii)之証法，亦易推知 $O, G_{m-1}, N_{m-1}, H_{m-1}$ 共線且

$$3OG_{m-1}=2ON_{m-1}=OH_{m-1}$$

所以 $O, G_{m-1}, N_{m-1}\ H_{m-1}$ 成調和列點也.

由此觀之當 $n=m$ 時若眞，則 $n=m+1$ 時亦有同樣之性質爲眞，但 $n=4, n=5$ 已證明爲眞，則 $n=6,7,\cdots n$ 可依同法證明爲眞也.

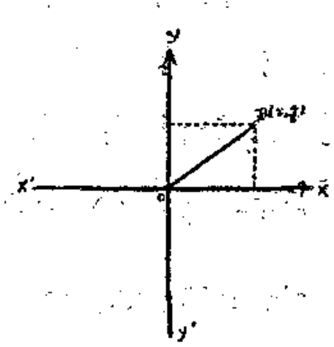
任意角三角函數之推廣法

蕭 而 廣

初學三角的人，對于銳角之三角函數，容易了解，因為就銳角所作成之直角三角形，顯而易見，所謂對邊斜邊鄰邊等名稱，觀念亦易明了，故就牠們來確定三角函數之意義，因而推出種種公式，均皆具體易見。若是要把角之意義擴充，由銳角而達于任意量之角，一般，對于此任意角函數之概念，每每感受困難，角之量既超過九十度，似無求作直角三角形之可能性，疑竇既多，處理自無把握。

任意角之三角函數，一般說明的方法，大都以矩形座標為基礎，其大概情形，有如次述：

設 XX′，YY′，為直交之橫軸和縱軸，交點為 O，則此二直線分全平面為四象限，今于任一象限內取一點P，令其座標為(x，y)，又令P點與O點之距離 OP＝y，則三角函數之意義，訂之如次：



sinMOP＝縱座標：距離＝y：r

cosMOP＝橫座標：距離＝x：r

tanMOP＝縱座標：橫座標＝y：x

……………………………………………

此種說明的方法，與銳角函數說明法彼此無關，不過是另立一定義而已，現在我們要由銳角函數之義意，推到任意角之函數，此種擴充之方法，非常簡易。原來所謂角之對邊云者，即係指不鄰近該角之邊之謂，又所謂由P點向OX作垂線，此垂線立於OX本身線上或立於OX之引長線上，乃是同一回事，蓋依純粹幾何的意義，OX與OX之引長線OX′毫無差別，不過討論三角函數的時候，依其度量時之向右或向左以區別線之符號耳，此點既明，無論角之大小如何，總之

sinMOP＝對邊：斜邊，　cosMOP＝鄰邊：斜邊

tanMOP＝對邊：鄰邊．　……………………………

至於角之界線位居於某一象限，不過能影響於函數之符號，定義之形式，永遠不變也．

普通討三角函數之方式，不外三層，(一)函數中彼此之關係，(二)函數之性質，(三)和角差角倍角分角等函數之化法，此三種討論的方法，無不以銳角爲出發點，推廣之法，普通教材中均欠詳細的說明，今約略述之如下，

(i) 三角函數中之關察最普通的．有如

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，　$1+\tan^2 A=\sec^2 A$，　$1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$，……………，

在 A 角爲銳角時，自不成問題，A 角由銳角而擴充至任意角時，亦能簡單的說明其仍能成立也．原來此等公式之所以能成立，全賴於直三角形OPM之一重要性質，卽 $OP^2=OM^2+MP^2$ 是也，今若OP的位置變更，OM，MP雖要變換符號，但直三角形之此性質，毫無變動，蓋 OM，MP均爲平方冪故也，基本性質之關係式旣不以OP之位置而轉移，藉此關係而成立之種種公式，其不因角之大小而受影響也明矣．

(ii)在角爲銳角時，吾人已知

$\sin(n\cdot 90^0\pm A)=\sin A$ 或 $-\sin A$，(n爲偶數)，

$\sin(n\cdot 90^0\pm A)=\cos A$ 或 $-\cos A$．(n爲奇數)．

…………………………………………………………

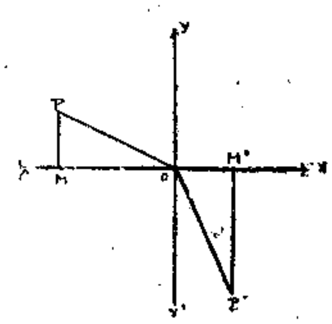
推廣之法，雖然沒有一個能够包括一切的總訣，我們可舉其一端以類推其全豹．如圖，設 $\angle XOP=\angle A$，則 $\angle XOP'=90^0-\angle A$，無論 A 之大小如何，總之 $\angle OP'M'=\angle POM$ 故 ΔOMP 及 $OM'P'$ 就幾何之意義言，乃完全相等，因之MP之絕對值＝OM'之絕對值，又 OM之絕對值＝M'P'之絕對值．今就A與 90^0-A 之關係觀之，可得下之四條例，

若P在XX'上,P'必在YY'之右,

若P在XX'下,P'必在YY'之左,

若P'在XX'上,P必在YY'之右,

若P'在XX'下,P必在YY'之左.

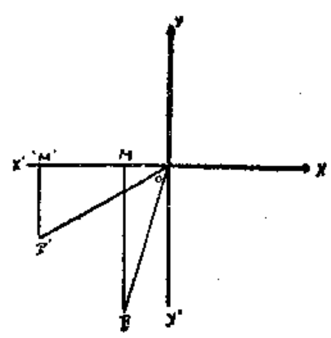


在此四條之保障之下，吾人可知MP與OM'又M'P'與OM,大小相等,符號亦一致,是故乃有

$$\sin(90^0-A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A,$$

$$\cos(90^0-A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin A,$$

$$\tan(90^0-A)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{MP}=\cot A$$



....

(iii)和角公式,如

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$ ....(1)

$\cos(A+B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B,$ ....(2)

在$\angle A$,$\angle B$, $\angle A+\angle B$ 均小於90^0時,吾人固已知其一定成立者也.

但 $\cos(A+B)=\sin(A+B+90^0)=\sin(\overline{A+90^0}+B),$

$\cos A=\sin(A+90^0),$

$-\sin A=\cos(A+90^0),$

今以此代入(2)中之各相當項內,則可得,

$\sin(\overline{A+90^0}+B)=\sin(A+90^0)\cos B+\cos(A+90^0)\sin B,$

用同法,又可証明

$\cos(\overline{A+90^0}+B)=\cos(A+90^0)\cos B-\sin(A+90^0)\sin B$

故吾人知,A+B之正弦和餘弦二公式,當A角增加90^0時,皆能仍舊保持其真確

性;同樣,B角增加 90^0 時,亦能仍舊成立.是故連續施以同樣變換數回後,則在A,或B,或A與B同時增加90^0的任何倍時,此等公式將永遠成立.

復次, $\cos(A+B)=-\sin(\overline{A-90^0}+B)$,

$\cos A=-\sin(\overline{A-90^0})$,

$\cos A=\cos(A-90^0)$,

以此等之式代入(2)中,則有

$$\sin(\overline{A-90^0}+B)=\sin(A-90^0)\cos B+\cos(A-90^0)\sin B.$$

同樣,又可得

$$\cos(\overline{A-90^0}+B)=\cos(A-90^0)\cos B-\sin(A-90^0)\sin B.$$

故吾人知,A+B 之正弦和餘弦二公式,當A角減少 90^0 時,均還能夠保持其真確性.同樣地,B角減少90^0時,亦均仍舊成立,是故連續施以同樣變換數回後,則在A或B,或A和B同時減少 90^0 的任何倍時,此等公式永遠成立.

故 $\sin(\overline{A\pm m\cdot 90^0}+\overline{B\pm n\cdot 90^0})=\sin(A\pm m\cdot 90^0)\cos(B\pm n\cdot 90^0)+\cos(A\pm m\cdot 90^0)\sin(B\pm n\cdot 90^0)$,

$\cos(\overline{A\pm m\cdot 90^0}+\overline{B\pm n\cdot 90^0})=\cos(A\pm m\cdot 90^0)\cos(B\pm n\cdot 90^0)+\sin(A\pm m\cdot 90^0)\cdot\sin(B\pm n\cdot 90^0)$. (但式中m,n為正整數).

由是以觀,可知任意角的代數和之正弦餘弦等公式,一般均能成立,無疑也.又由此二公式所導出之其他倍角,分角等公式,其能一般的成立,固毋庸諱言矣.

笛 喀 兒

(Rene' Descartes 1596—1650 A.D.)

瘦 桐

笛喀兒要算中學裡的朋友比較熟識的一個算學家了. 他不但是在算學史上佔重要的地位,在哲學界裡的風頭,尤其十足.可惜在這兒我們沒有談到的機會.

他是1596年3月出生於法國圖城(Tours)的近傍,1650年2月11日死在瑞典的首都斯德哥爾摩(Stockholm),和從前曾經替大家介紹過的伽利略,將要介紹於大家的德薩給(Desargues)是同時代的人.他的父親是個紳士,做過了地方議會的議員,生有二子一女,他是當中的一個.

他八歲時就進了拉嘿城(la Fléche)的 Jesuit學校. 這學校訓練認眞教規甚嚴,使笛喀兒終身受益不忘,後來時常向人稱道. 他少時體質虛弱,每朝不能早起,積久竟成爲習慣.當1647年他訪問巴斯喀(Pascal)的時候,特別的提及這事,嘗對巴斯喀說:『爲了做一部算學上的良著,要想維持身體的健康,不能起來太早使睡眠不足.』

1612年笛喀兒脫離了學校生活,來到巴黎小住了數年.那時天下洶洶,一般有志之士,多從事於軍事或宗教的活動,青年笛喀兒也爲熱血鼓動,遂於1617年投身入屯紮不勒達(Breda)的奧倫治(Orange)公爵摩里士(Mourice)軍中.

有一天笛喀兒無事在街上閑逛,偶然拾着一張紙片. 這紙上寫着一些荷蘭文,笛喀兒完全不懂. 恰巧有一個荷蘭大學長依薩克俾克曼(Isaac Beeckman)打從他身旁經過,笛喀兒就央他翻譯成法文,原來這張紙片上是一個徵解的幾何問題. 笛喀兒不一會就把牠解决了,俾克曼大爲驚奇,從此這兩位陌路生生的過客,竟結成忘形的密友了.

笛喀兒因爲生性長於算學,對於和算學性質相異的軍事,有時頗想離去. 但是因爲他祖先世代以武功名世,却又不願到他手裡一旦拋却.迨三十年戰爭發生的時

候，又被勸加入巴維也拉(Bavaria)的軍隊充當義勇兵．在戎馬倉皇裡，只要有閒暇的時候，他總研究算學．1619年11月10日夜在紐波格(Neuberg)多腦河陣中做了三場大夢．他的哲學和算學的創見，都萌芽於此，的確這一天要算笛喀兒變換生活確定前途方向的一天了．

1621年他終於離開了軍隊，在各處游歷好幾年．1628年接受祈禱會(Oratorans)的開山老祖喀地那白魯爾(Cardinal de Berulle)的勸導，移住荷蘭在這裡埋頭於哲學數理的研究，足有20年，他的幾部名着都是在這時期內完成的．

他在算學上的功績，以解析幾何學為最著．創用縱橫坐標以定平面上點的位置，將幾何學的圖形化為代數的方程，用解析的方法從方程裡發見圖形之種種性質，以免就圖立論之繁．為二千年來研究幾何學者另闢途徑，流風所及，幾使純正幾何學湮沒不彰，影響不小，後人紀念他的功勞，特將解析幾何學尊稱笛氏幾何學，眞是榮譽極了．他那創見解析幾何學的念頭，是由於研究巴帕斯(Pappus)問題發生的．在本卷第一期牛頓傳裡，已經和大家講了一些，這裡不多說了．

笛喀兒在代數學上也頗有名氣，讀過方程式論的朋友，大概都知道有所謂笛喀兒符號的定律(Decartes' rule for Signs)，就是"一個實係數的整方程式正根的個數，不能比牠各項符號的變異來得多"，除此還有用羅馬字起首的字母代表已知數，末了的一些字母代表未知數，採定現在指數的記法，用未定係數法解方程式等．他也曾嘗試過任意次代數方程式的解法，不過是一個誤謬的結果．

笛喀兒的這些創見都是寫在他著的一部書名叫 Discours 的裡邊，這部書一共有三卷，但每立一論，敘述非常難懂，文字特別晦澁．這大概是他猜忌心太重的緣故吧．

余之物理學無他，不過
幾何學而已．——笛喀兒

科學之女王

E. T. Bell 原著 乙閣譯

第四章 論普通代數

普通代數之種類

稍通文學者,必能辨詩與詞之不同,蓋從句法之構造上考之卽可矣. 設有詩二首於此,雖同爲七律或絕句,然在識者觀之,則其一吟風,其他咏雪,立卽可以明辨,此無他,用字命意之不同耳.

算學中亦有類於此者. 所論不同,而抽象之形式則一. 兩種抽象形式相同之算學,其外觀及應用之不同,恰如兩首七律然. 不過此種比擬,祇就大致而言,非謂一切皆相似也,讀者其勿誤會.

今試就上章所述之"集"舉例言之. 集之界說,由於七條公設,此等公設所言者,爲所設一類之事物及其結合之法則若何. 設結合法則爲加法及乘法之運算,而所設之類爲有理數之類,則所得之集爲有理數之代數. 若所設之類爲實數之全體,則得實數之代數. 又若所設之類爲複數之類,則又得複數之代數. 以是言之,普通代數.可分爲三種,仍取前譬,卽皆爲七律,但命意各相異耳. 公設所言及之類及結合法則,槪爲抽象的,猶之七律之格調,槪爲"仄仄平平仄仄平、平平仄仄仄平平,………". 然一旦塡入相當之字句,具有相當之意義,則爲實在的詩而非抽象的格調矣. 抽象之意,卽謂類中之物,及結合之法則,槪爲空無所指之記號,此等物與法則間之關係,由公設定之,可用普通邏輯演繹之而已,故若言類中之物爲實數,吾人卽已賦與實在的意義,公設中並無此涵義也. 對此等記號,加與一定之限制後,所得之集乃特別的集而非抽象的集,前者種種皆爲後者相當部分之實例.

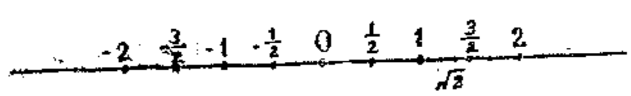
今請言有理數、實數及複數之意義. 此等觀念,充滿於算學之中. 但正負整數及零之意義,必假設爲已知.

設 a, b 爲整數, b 不爲零, 則 a 比 b 之結果, 記以 a/b (亦卽以 b 除 a 之結果).

兩個整數之比，謂之有理數，是爲有理數之界說．若 b 爲1，則見一切整數皆爲有理數．故整數之類，爲有理數類中之一子類（subclass）.

有理數類不能包括所謂無理數．無理數者，卽不能表爲一雙整數之比之數，例如$\sqrt{2}$是．於此有故典二則，足供談助．畢達哥拉斯之宇宙論，謂一切數皆爲有理數，聞有人發見$\sqrt{2}$爲無理數者，大爲不懌．於是誘而溺之，以爲破壞其理論者戒．又此事在希臘黃金時代，幾於無人不曉，柏拉圖氏至謂不知$\sqrt{2}$之爲無理數者，非人而實獸云.

合一切有理數及無理數，遂成實數之類．此等實數，可用圖表示之．於無限長之一直線上取任意點O，再取一相當之長度以爲度量之單位．自O向右量之，得點記以1,2,3,……，又自O向左量之，記以$-1,-2,-3,\cdots$．如此以O爲零，則所有整數皆於線上見之．一切有理數，亦均在線上，圖中略示其一二．至於$\sqrt{2}$則在O之右方 140/100 及 142/100 兩有理數之間．由此足見每綫上之一點，有一實數與之相當，或爲有理數，或爲無理數．實數之在此線上處處密集（everywhere dense），蓋



在任何兩實數之間，必可尋到一個實數，祇須取其兩代表點之中點可矣．實數類中之元，與此直綫上之點，其間之對應爲一一對應（Oee-to-one correspondence）.

至若複數所成之類，則更爲龐大．此種數在中學教本中皆有之，說明亦頗得法．今姑捨之而介紹高斯之說法，由此可見過去七十年間算學家對於複數，如何推廣，因以發見超複數（hypercomplex numbers）.

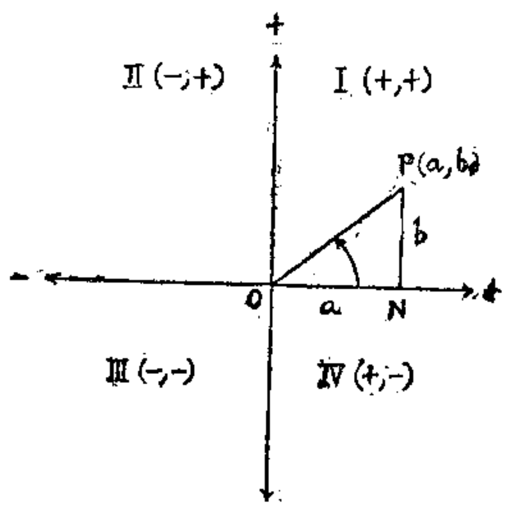
依高斯之說，若 a,b 爲任何兩實數，則可作成一有序數偶（ordered couple），以(a,b)記之．集此等數偶爲一類，令其適合幾條公設，則每一數偶，卽稱爲一個複數．關於此類數間之關係及其運算，先規定次列三條：

兩個複數(a,b),(c,d)相加之結果，爲複數$(a+c,b+d)$；相乘之結果爲$(ac-bd,ad+bc)$；又$(a,b)=(c,d)$，則必 $a=c,b=d$，反之亦然．以上 $a+c$,ac 等等，

其意義與在實數時相同.

此等"加","乘"及"相等"之界說定後,極易証明此複數之類,於上章所述之七條公設,皆能適合.

於此可將複數之幾何表示法,略事敘述.於頃間代表實數之直線上,過O作另一直線與之垂直.在此二線所定平面上,任取一點P.作PN與代表實數之直綫垂直,若ON之長爲a,NP之長爲b,則P點所代表者卽爲複數(a,b).a,b之符號視P所在之地位而定,一切均如普通解析幾何中所定,請參閱右圖.至於所謂"虛"數,如$\sqrt{-1}$等,則在縱線上可見之.又(a,b)之位置,由OP之長及NOP角之大小,亦得定之.是則OP乃爲一向量,其長爲OP,其向爲NOP者.交流電之理論中,複數最關重要,由此可以恍然矣.



於此有一重要之事實,殊堪注意.實數之類及複數之類,皆爲無窮.而在代表複數之平面上,可作無窮數之代表實數之直線.就常識言之,複數之爲數,必無窮倍於實數矣.而孰知其不然.在一直綫上之點,爲數與一平面上之點恰同,此爲黃金時代大發明之一,後此當詳論之.不僅此也,卽於直綫上取一小段,祇須其長不爲零,則其上之點數,與整個平面上所有之點數,亦復相同.尤奇者,此渺小之線段上所有之點數,與可數無限多度空間中所含者,爲數亦同.而頃謂此爲"黃金時代大發明之一"讀者幸勿以爲言之過甚其詞,史傳云云,吾亦云云耳.須知發明自發明,不必卽爲定論.但此發明之經過及其由來,在過去二十年間,羣認爲近代算學之一大轉變,其爲前進抑爲後退,非吾人所能知已.

有理數爲實數之一部分,實數又爲複數之一部分,吾人於此層層包括之外,所知尚有何事?由此三種數所成之集,抽象上之結構,完全一致,所不同者僅實質耳.

高斯以數偶(a,b)爲一複數,此種觀念,是否可以推廣?推廣之後,是否仍能適合以前之七條公設?設取三個實數a,b,c爲一組,依序記如(a,b,c).亦認爲一種數,如是所得之一類究將何如?

此問題之解決,亦爲算學史上劃分時代之事實.約當1860年時,魏爾司托勒司(Karl Weierstrass 1815-1897)證明此種推廣爲不可能.其後希柏特氏亦有更簡之証明.魏氏証明之結果,有明白敘述之必要.即若保留上章所述公設全組,則捨複數及其子類以外,另求適合此等公設之一類,乃不可能之事實.

此一証明,在黃金時代固曾哄動一時,然過去六七年間算學進步之速,大足驚人,於是對於魏氏等證明所用之理由,頗有疑難之處,不過所證明之事實,依然存在.此種關於邏輯推論之問題,不容吾人置喙,聽之可也.

推廣既不可能,吾人將何以求進步乎?曰,是必另闢途徑然後可.在最近一世紀中,算學家所新創之路途,何啻百數.所謂平直締合代數(linear associative algebra),即其中坦途之一,前途發展,殆無可限量.此種代數之公設中,乘法之交換律被廢棄,僅餘締合律而已.

曩者羅巴契夫斯奇,罕爾勒登及其他諸賢,曾作違反顯然事實之假設,因以成就其創造之學理,有志創作之士,固未始不可師其故智,將一組公設,删去一條或數條,因而達到其理想中之勝境.然而此種方法,究非正途,且既經前人採用,一意效顰,亦無趣味.十九世紀中算學上登峯造極之發明,擧其一端,卽足見一種有價值學說之成功,非襲人故智所能爲力.此一高峯,隱於雲霧之中,旅途人士,但見其較下之片段而不知其尖端之所在者,幾及百年,始由一十八齡之童子造其巔.此青年之發明家名迦羅華(Evariste Galois 1811-1832),惜事後不及三年,死於決鬥.由於迦氏之發明,繼以約當(Jordan),克龍內克諸人之研究,自高峯下望代數方程式及代數數論之區域,整齊美觀,爲從來所未見.克萊因氏及其徒輩,則更上一層,因見黃金時代所發明之各種幾何學,聯成一體,其間溝通綫索,一目了然.此等高峯之究竟,容再論之.(第四章完全書待續)

β社小史（續）

舞東

4. 我之 sinx 觀

轉眼又到暑假了．這次 β 社同志畢業的，有李壽田， 助詩，二人．他們平時玩得好很親熱，現在一旦分離當然有點不捨．為了這緣故，大家議決開歡送會．

這會的節目和平常的歡送會差不多，不過有一點很奇特，他們所謂"歡送詞"，"答詞"等都不是和其他的歡送會的"老生常談"；而是用一篇簡短演講代替．首先由高中二年級的丁子固致歡送詞，他的題目是"我之sinx觀"．以下是他的演詞．

"sinx 這東西，初與牠見面實在覺得牠有點討厭；雖然先生千叮萬囑說這是一記號，不能當作乘的意思．講的時候很是明白，一到自己做題目，不知不覺又犯像這種錯誤了"．說着，就在黑版上寫

$$\sin(x+y)=\sin x+\sin y.$$

"為了這種錯誤，給王先生扣分不少呢！"

在下面坐着的王通伯先生微微的一笑，丁子固接着講，

"好容易把牠弄熟．第二點討厭的事情又來了．起先說 sinx 說是直角三角形對邊與斜邊之比，後來又說牠是縱座標與距離之比． 不過還不難清楚就是了．可是由討厭而反引起我研究的興趣．起先覺得這是一種基本觀念，不把牠弄清了，將來有很大障礙．後來到反越研究越有興趣．我覺得講三角函數可以另用一種立足點去講牠．這函數

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

用 sinx 這樣的一個記號去代表牠，乾脆點 sinx 是無窮級數'

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

的簡寫．不過巧得很，這種函數(sinx)正好就是縱座標和距離之比，也正好是直角三角形對邊與斜邊之比，要證明這點，祇要由

$$\sin x=\frac{\text{縱座標}}{\text{距離}}$$

的定義出發一直證到

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots\cdots$$

一步一步的翻上去就是了，爲簡便起見而規定

$$\cos x=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots\cdots$$

所以也可以說解三角形是三角函數在幾何上的一種應用”．

5．零不能爲除數

丁子固講完，接着便是畢業同志答詞，他們依次致答，李壽田開始：

“‘零不能爲除數’是全部算學一句很重要的說話，年來受楊先生的千叮萬囑，練成一種謹慎的習慣，如今將近畢業，就拿這來做演詞，一方面奉勸諸位也得注意這點，一方面告訴楊先生請他放心，我對於這種已略知謹慎了．

“我在高中一年級時，曾經發生過這樣的一個疑問：

$\because \quad 1^2=1,\quad 1^3=1$

$\therefore \quad 1^2=1^3$

$\therefore \quad 2=3$ 何故？

“當時我很誠懇地寫了一封信問某雜誌，所得的答覆等於 O，他說這是一種 Paradox．今年受楊先生“零不能爲除數”的訓練，才覺悟這謬點．因從$1^2=1^3$到$2=3$，要經過一步

$$2\log 1=3\log 1$$

由這步到 $2=3$

要兩邊用 log1 除之，但 $\log 1=0$，所以用 log1 作除數亦在被禁之列”．

6. 零能爲除數

李壽田講過以後，接着便是陸助詩講；他的講題是"零能爲除數"．當他把題目宣佈，大家都覺得很奇怪．性急的雷端，忍不住站起質問，

"那末 2 可以等於 3 了！"

陸助詩微微一笑，開始講道：

"不會的． 李君講的沒有錯，我講的也沒有錯．不過李君所謂不能爲除數的零是'絕對的零'，我所謂能爲除數的零是'極限的零'．甚麽叫"絕對的零"呢？$4-5=0$ 裏的零就是絕對的零． 我且舉幾樁事實來說明這等式的意義，好比說"房間有四個人，走了四個，還剩幾個？"當然是沒有嘛！ 又好比說"某甲身邊有五元，一天用一元，用了五天後，還剩幾元？"當然是沒有嘛！又好比說"A，B 兩城相距4里，Q 先生由 A 走到 B，每天走1里走了4天，還剩多少路？"當然是沒有嘛！所以絕對的零便是"沒有"的記號，本來大可寫

$$4-4=\text{沒有}.$$

不過算學是一種記號的科學，常有遇着"沒有"的情形，所以爲'一勞永逸'計，用 O 代表牠了．

"至於'極限的零'便不容易解釋了．現在祇能用一個例子來說明．（編者按：極限的概念請參看本刊二卷三期）

還是用剛說的例吧．有一位 P 先生，也從A城到 B 城，不過他走的方法不同，他是這樣走的：

第 1 天走 AB 的 $\frac{1}{2}$，走到 P_1，即 $P_1B=2$ 里，

第 2 天走 P_1B 的 $\frac{1}{2}$，走到 P_2，即 $P_2B=1$ 里，

第 3 天走 P_2B 的 $\frac{1}{2}$，走到 P_3，即 $P_3B=\frac{1}{2}$ 里，

……………………………………

第n天走 $P_{n-1}B$ 的 $\frac{1}{2}$，走到 P_n，即 $P_nB=\frac{1}{2^{n-2}}$ 里，

照他這樣走法，一輩子都走不到 B 的．不過多走一天，便和 B 越近一點．我們

便說P^nB的極限，當 n 大至無窮的時候爲零．這一句話用記號表示起來便是

$$\lim_{n\to\infty} P_nB=0.$$

"剛才那句話，不過多走一天，便和B越近一點"很重要的．假使又有位R先生，第一天走 AB 的一半到 R_1，

第二天回轉頭來走 R_1A 的一半到 R_2，第三天走 R_2A 的一半到 R_3，……這是當然不能說

$$\lim_{n\to} R_nB=0$$

了．

有了這兩種零的觀念，們可以講到本題了．還是拿P先生走路的問題來討論吧！我們要問

$AB\div P_nB=?$

$AB\div P_1B=4$里$\div 2$里$=2$

$AB\div P_2B=4$里$\div 1$里$=4$

$AB\div P_3B=4$里$\div \frac{1}{2}$里$=8$

$AB\div P_4B=4$里$\div \frac{1}{4}$里$=16$

………………………………

由此推下，知 P_nB 漸漸減少時商數便漸漸增大，等到 P_nB 趨近零，商數便大到不可名狀，我們也給牠一個記號，∞．寫起來便是

$$\lim_{P_nB\to 0}\frac{AB}{P_nB}=\infty.$$

我們常可見到

$$\frac{a}{0}=\infty,$$ 內 a 爲常數．

其實這是一種偸懶的寫法，正式寫起來便是

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty,$$ 內 a 爲常數．

多寫一個$\lim\limits_{x\to 0}$便是分別極限的零與絕對的零"．

（本節完，全篇未完）

教科書難題解答

甲. 范氏高等代數學(Fine: college algebra.)

肇 父

27. 以1,2,3,2,3,4,2,4,5,3,6,7各數字作成4位之數,共有若干?(406面19題).

(解)此處數字計有

2,2,2;3,3,3;4,4;1,5,6,7.

(1)若此數含有三個相同數字,即得2×6種組合與$\frac{2\times6\times4!}{3!}=48$種排列.

(2)若此數含有兩對相同數字,即得${}_3C_2$或3種組合與$\frac{3\times4!}{2!\times2!}=18$種排列.

(3)若此數含有兩個相同文字與兩個不同文字,即得$3\times{}_6C_2$種組合與$3\times{}_6C_2\times\frac{4!}{2!}=540$種排列.

(4)若此數含有四個不同文字,即得${}_7P_4=840$種排列.

故各種排列總數應為

$$2\times6\times\frac{4!}{3!}+3\times\frac{4!}{2!2!}+3\times{}_6C_2\times\frac{4!}{2!}+{}_7P_4=48+18+540+840$$
$$=1446.$$

28. 設有15人票選5位候選者充任某職,其投票之方法有若干?又對於5位候選者投票相同時其投法有若干?(407面28題).

(解)(子)若候選人中有1人得11票,其他各得1票,則投票方法有

${}_{15}C_{11}\times{}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1=32760$種.

(丑)若候選人中有1人得7票,其他各得2票則投法有

${}_{15}C_7\times{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=16222200$種.

(寅)若選舉票等分於5位候選者,其投法應有$\frac{15!}{3!3!3!3!3!}=\frac{15!}{(3!)^5}=16816800$種.

(卯)若候選人中有3人各得1票,其投法應有下列各種:

1. ${}_{15}C_6\times{}_9C_6\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1=2522520$;

2. ${}_{15}C_7\times{}_8C_5\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1=2162160$;

3. ${}_{15}C_8\times{}_7C_4\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1=1351350$;

4. ${}_{15}C_9\times{}_6C_3\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1=600600$;

5. ${}_{15}C_{10}\times{}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1=180180$.

（辰）若候選人中有3人各得2票，其投法應有下列各種：

1. $_{15}C_8\times{}_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2$
$=4054050$；

2. $_{15}C_6\times{}_9C_3\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2$
$=37837800$；

3. $_{15}C_5\times{}_{10}C_4\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2$
$=56756700$.

（己）若候選人中有3人各得3票，其投法應有下列兩種：

1. $_{15}C_5\times{}_{10}C_1\times{}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3$
$=50450400$：

2. $_{15}C_4\times{}_{11}C_2\times{}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3$
$=126126000$.

（午）若候選人中有3人各得4票，其投法應有

$_{15}C_1\times{}_{14}C_2\times{}_{12}C_4\times{}_8C_4\times{}_4C_4$
$=47297250$種.

（未）若候選人中有兩對所得票數相同，其投法應有下列各種：

1. $_{15}C_9\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1$
$=900900$；

2. $_{15}C_7\times{}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1$
$=7207200$；

3. $_{15}C_5\times{}_{10}C_4\times{}_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1$
$=1911890$；

4. $_{15}C_3\times{}_{12}C_5\times{}_7C_5\times{}_2C_1\times{}_1C_1$
$=151315120$；

5. $_{15}C_5\times{}_{10}C_3\times{}_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2C_2$
$=765650$；

6. $_{15}C_3\times{}_{12}C_4\times{}_8C_4\times{}_4C_2\times{}_2C_2$
$=53014500$；

7. $_{15}C_2\times{}_{14}C_5\times{}_9C_5\times{}_4C_2\times{}_2C_2$
$=22702680$.

（申）若候選人中有2人各得1票，其餘所得票數不同，其投法應有下列各種：

1. $_{15}C_3\times{}_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1$
$=270270$；

2. $_{15}C_7\times{}_8C_4\times{}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1$
$=5405400$；

3. $_{15}C_6\times{}_9C_5\times{}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1$
$=76576500$；

4. $_{15}C_6\times{}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1$
$=12612600$.

（酉）若候選人中有2人各得2票，其餘所得票數不同，其投法應有下列各種：

1. $_{15}C_7\times{}_8C_3\times{}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2$
$=10810800$；

2. $_{15}C_6\times{}_9C_4\times{}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2$
$=18918900$.

（戌）若候選人中有2人各得3票，其餘所得票數不同，其投法應有

$_{15}C_6\times{}_9C_2\times{}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3$
$=25225200$種.

（亥）若候選人所得票數均不相同，其投法應有

$_{15}C_5\times{}_{10}C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=37837800$種.

故以上十類相加即得所有任意投票方

法之總數,單就(寅)類而言卽是平均投票之方法數.

29. 今有18名球員組成每隊9人之棒球隊,若10人認定在場內,5人認定在場外,其他3人不論在場內或場外均可,問其組合方法有幾?(407面30題).

(解)因棒球隊係5人在場內,4人在場外,今由三方面考察.

1.若在場內之球員均由認定在場內之10人組合,則其方法,應有下列各種:

$_{10}C_5\times{}_5C_4=1260$;

$_{10}C_5\times{}_5C_3\times{}_3C_1=7560$;

$_{10}C_5\times{}_5C_2\times{}_3C_2=7560$;

$_{10}C_5\times{}_5C_1\times{}_3C_3=1260$.

2.若在場外之球均由認定在場外之5人組合,則其方法應有下列各種:

$_5C_4\times{}_{10}C_4\times{}_3C_1=25200$;

$_5C_4\times{}_{10}C_3\times{}_3C_2=1800$;

$_5C_4\times{}_{10}C_2\times{}_3C_3=225$.

3.若不認定場內或場外之球員分別加入場內或場外時,則其組合方法應有下列各種:

$_{10}C_4\times{}_3C_1\times{}_5C_3\times{}_3C_1=1800$;

$_{10}C_3\times{}_3C_2\times{}_5C_3\times{}_3C_1=3650$

$_{10}C_4\times{}_3C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_2=6300$.

故組合總數爲$1260+7560+7560+1260+25200+1800+225+1800+3650+6300=365395$.

30. 若α,β,γ爲$x^3-2x^2+x-3=0$之根,試求下式之值:

(1) $\alpha/\beta\gamma+\beta/\gamma\alpha+\gamma/\alpha\beta$;

(2) $\alpha\beta/\gamma+\beta\gamma/\alpha+\gamma\alpha/\beta$;

(3) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$.

(解) (1) $\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}=$$

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{2^2-2\times1}{3}=\frac{2}{3}.$$

(2) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}+\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta}$

$$=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=[(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma\times(\alpha+\beta+\gamma)]/\alpha\beta\gamma$$

$$=\frac{1^2-2\times3\times2}{3}=-\frac{11}{3}.$$

(3) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$$=\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+2\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma)+(\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma)+(\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+\alpha\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma$$

$$=\alpha(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+\beta(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+\gamma(\gamma\alpha+\beta\gamma+\alpha\beta)-\alpha\beta\gamma$$

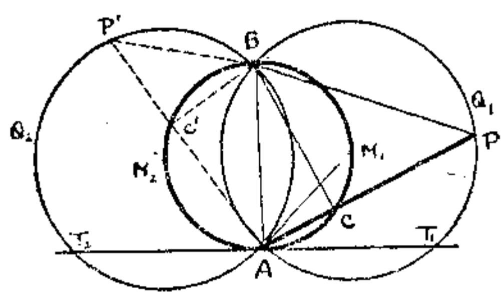
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma$$

$$=1\times2-3=-1.$$

乙. 吳在淵編： 高級幾何學

迺 槪

2) 從圓之直徑 AB 之一端引任意弦 AC, 延長之至 P, 令 CP=CB, 則 P 點之軌跡如何?(P. 143. Ex. 28.)



解： 設 P 爲所求軌跡上一點

聯 BP, ∵ CP=CB,

∴ $\angle CBP=\angle CPB$,

而 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\angle R$;

故 P 在以AB 爲弦含定角 $\frac{1}{2}\angle R$ 之兩圓弧 AQ_1B 或 AQ_2B 上.

次, 過 A 引定圓切綫 T_1T_2, 與$\frown AQ_1B$, $\frown AQ_2B$ 各交於 T_1 及 T_2. 於弧上任取一點 P', 聯 AP', 交定圓於 C', 聯 BC', BP',

$$\because \angle C'BP'=\angle AC'B-\angle AP'B$$
$$=\frac{1}{2}\angle R=\angle C'P'B,$$

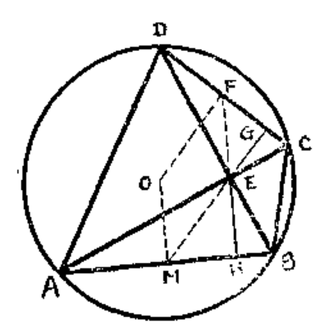
∴ C'P'=BC',而 P' 合於所設條件.

由是知所求軌跡爲 $\frown T_1Q_1B$ 及 T_2Q_2B.

附註1. 所求軌跡爲以半圓弧 AB之中點 M_1 或 M_2 爲心, AM_1 爲半徑之二半圓.

附註2. T_1Q_1B 及 T_2Q_2B 之共軛弧爲於 A C 上反取 CP=CB之P 點軌跡.

21 圓內接四邊形之二對角線互相垂直, 則從圓心至一邊之距離等於此邊對邊之半分. (P. 143. Ex. 31.)



解： O 爲四邊形 ABCD 之外接圓心,其對角綫 AC ,BD 直交於E.

自 O 引 $OM\perp AB$, 則 $OM=\frac{1}{2}CD$.

證： 過 E 引 $EH\perp AB$, $EG\perp CD$, 延長之,則 EG 必過 AB 之中點 M, EH 必過 CD 之中點 F;

∴ $OM\parallel EF$, $OF\parallel EM$,

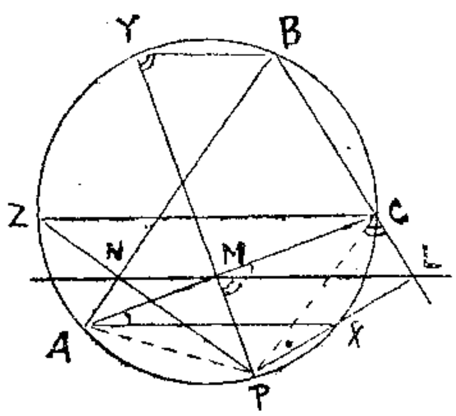
而 OMEF 爲一平行四邊形; OM=EF,

又 F 爲直角三角形 CED 斜邊中點,

∴　$EF=CF=DF$,

而　$OM=\frac{1}{2}CD$.　　Q.E.D.

22. 自△ABC外接圓上一點，P向各邊引垂綫PL,PM,PN,延長之與圓周再交於X,Y,Z,連結AX,BY,CZ,則此綫綫皆與P之Simson綫平行.(P.143. Ex.33.)



證：聯結PC，∵C，M，P，L共圓，

∴∠LMC=∠LPC=∠XAC，

而　AX∥LMN;

又∠PML=∠PCL=∠PYB,

∴　BY∥LMN;

同理,聯結AP,可證 CZ∥LMN.

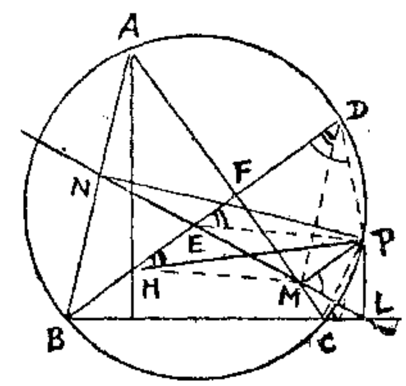
23. 連結三角形之垂心及其外接圓周上任意點之綫分，爲此點之Simson綫所等分.

解：H爲△ABC之垂心,

P爲其外接圓周上一點,

LMN爲P之Simson綫;

聯HP,則HP爲LMN所等分.



證1：延BH,交外接圓於D,交西綫及AC於E,F,　聯PD,PC,

∵EDPC共圓,∴∠PCL=∠BDP;

PMCL共圓,∴∠PCL=∠PML;

∴∠BDP=∠PML,而PMED共圓,且PMED爲其內接等邊梯形.

再聯DM,PE及HM,

則∵ ∠PED=∠MDF,

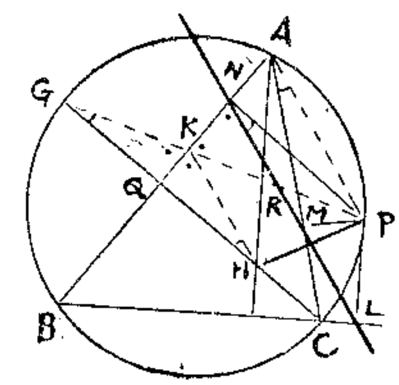
且由HF=FD，知 △HMF≡△DMF;

∴ ∠PED=∠MHF，而 EP∥HM.

又由HE∥PM,知平行四邊形MHEP之對角綫HP,EM必互等分,

是卽已證HP爲西綫LMN所等分也,

證2：延CH,交AB及外接圓周於Q,G;聯PG,交AB及西綫於K,R;再聯AP,KH. ∵A,N,M,P共圓.



且 $\triangle GKQ \equiv \triangle HKQ$,

∴ $\angle PNM = \angle PAM$

$= \angle PGH = \angle KHQ$;

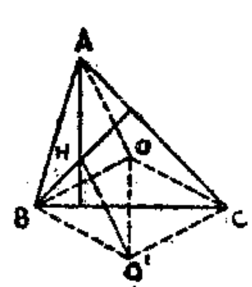
既 $PN /\!/ HQ$, ∴ $KH /\!/ MN$.

又 $\angle RNK = \angle HKQ$

$= \angle GKQ = \angle NKR$,

∴ R爲PK線分之中點.幷知RM必過HP之中點,即HP爲LMN所等分也.

24. △ABC之垂心爲H,則四個三角形ABC,HBC,HCA,HAB之外接圓互相等.(P.171.Ex.18.)



證:設三垂線足各爲D,E及F

在(1)圖 ∵ $\angle EAF + \angle EHF = 2\angle R$,

∴ $\angle BAC + \angle BHC = 2\angle R$.

在(2)圖 $\angle EAF = \angle EHF$,

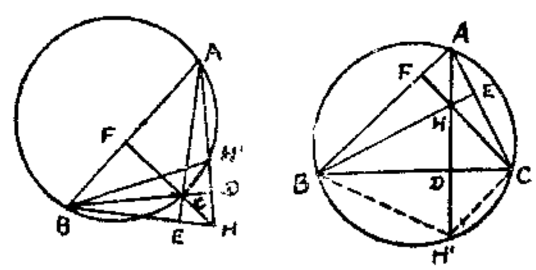
即 $\angle BHC = \angle BHC$.

作△ABC之外接圓,令AD或其延線交圓於H',聯H'B,H'C,

∵ $\triangle H'BC \equiv \triangle HBC$,

∴ ⊙HBC=⊙H'BC=⊙ABC.

同理可証 ⊙HCA,⊙HAB 均等於⊙ABC. Q.E.D.



再証:設△ABC之外心爲O,則

$OA = OB = OC$.

作菱形OBO'C,且聯O'H,

∵OO',BC互相垂直等分,

∴ $AH \perp OO'$(見前第17題)

而 $O'H = OA = O'B = O'C$;

是知O'爲△HBC之外接圓心,且

⊙HBC=⊙ABC.

同理可證 ⊙HCA=⊙ABC,

⊙HAB=⊙ABC.

丙. 趙修乾編: 新學制高級中學教科書三角術

蕭 而 廣

23. 欲延長AB直線,因B之前方有障碍物,乃于B處望∠ABP＝θ 之向量BP＝a,又于P處望∠BPC＝Φ之方向引PC,更自C引CD,使適成AB之延長線,然則

$$PC=\frac{a\sin\theta}{\sin(\theta-\Phi)},$$

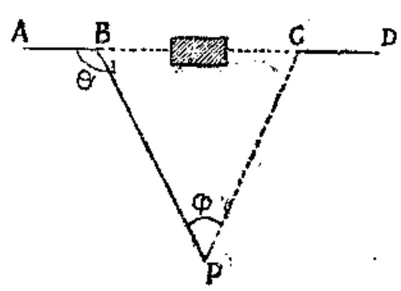
$$\angle PCD=180^\circ+\Phi-\theta,$$

試証之. 若 $\theta=154^\circ$, $\Phi=65^\circ$, a＝200尺,試計算PC及∠PCD.

(第八章習題十七,8題)

[解]:因∠PCB＋$\Phi=\theta$, ∴∠PCB＝$\theta-\Phi$.今應用正弦定理,則得

$$\frac{PC}{\sin PBC}=\frac{BP}{\sin PCB}.$$



$$\therefore\ PC=\frac{BP\cdot\sin PBC}{\sin PCB}=\frac{a\sin(180^\circ-\theta)}{\sin(\theta-\Phi)}$$

$$=\frac{a\sin\theta}{\sin(\theta-\Phi)}.$$

又$\angle PCD=180^\circ-\angle PCB=180^\circ-(\theta-\Phi)$

$$=180^\circ+\Phi-\theta.$$

今 $\theta=154^\circ$, $\Phi=65^\circ$, a＝200尺,代入之,得

$$PC=\frac{200\times\sin154^\circ}{\sin(154^\circ-65^\circ)}$$

$$=\frac{200\times\sin(90^\circ+64^\circ)}{\sin89^\circ}$$

$$\therefore\ \log PC=\log200+\log\cos64^\circ-\log\sin89^\circ$$

$$=2.3010+\bar{1}.6418-\bar{1}.9999$$

$$=1.9429.$$

$\therefore\ \log^{-1}1.9429=PC=87.68$尺.

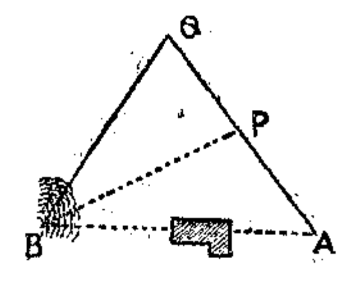
又$\angle PCD=180^\circ+65^\circ-154^\circ$

$$=91^\circ$$

24. B爲不可到之地, 在A處亦不能望見之; 今欲測AB距離, 特設APQ直線; 在P,Q二處均可以望見B, 于是作下列之觀測:

AP＝236·7尺', ∠APB＝142°37·3',

PQ＝215,9尺,∠AQB＝76°13.8'. 試計算AB, (同習題,9題.)



[解] ∠QBP＝∠APB－∠AQB＝142°37.3'－76°13.8'＝66°23.5'.

今應用正弦定理，

$$PB=\frac{PQ\sin AQB}{\sin QBP}=\frac{215.9\times\sin 76°13.8'}{\sin 66°23.5'}$$

$\therefore \log PB=\log 215.9+\log\sin 79°13.8'$

$-\log\sin 66°23.5'$.

$=2.3341+\bar{1}.9874-\bar{1}.9620$

$=2.3595$.

故$PB=\log^{-1}2.3595=228.9$.

今依餘弦定理，

$AB^2=236.7^2+228.9^2$

$-2\times 236.7\times 228.9\cos 142°37.3'$.

$=56030+52380+86334$

$=194744$.

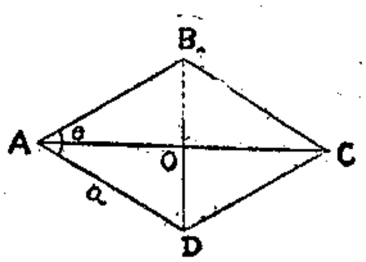
$\therefore A=441$.(弱).

20．設菱形之一角爲θ，一邊爲a，試證其兩對角綫爲

$$2a\cos\frac{\theta}{2},\quad 2a\sin\frac{\theta}{2}.$$

(第五章習題十一;19題)

[證]因ABCD爲菱形，故AB=CD=AD=BC.



且對角線AC及BD必正交，

今依直角三角形AOB觀之，

$$OA=AB\cos\frac{\theta}{2}=a\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\quad AC=2OA=2a\cos\frac{\theta}{2}.$$

又依同直角三角形觀之，

$$OB=AB\sin\frac{\theta}{2},$$

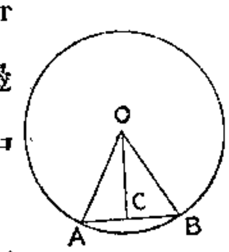
$$\therefore\ BD=2OB=2a\sin\frac{\theta}{2}.$$

21．有圓半徑爲r，試證圓內接正n邊形之周圍及面積各爲

$$2nr\sin\frac{180°}{n},\ nr^2\sin\frac{180°}{n}\cos\frac{180°}{n}.$$

(同習題,20題)

[証]:設O爲圓心，OA=r爲半徑，因內接正多邊形之邊數爲n，故每一中心角爲$\frac{360°}{n}$.



因之$\angle AOB=\frac{360°}{n}$.

今過O向AB作垂線OC，因$\triangle OAB$爲等腰，故OC必平分AB.

$$AC=AO\sin\frac{360°}{2n}=r\sin\frac{180°}{n}$$

$$\therefore\ AB=2AC=2r\sin\frac{180°}{n}.$$

$$\therefore\ 周圍=nAB=2nr\sin\frac{180°}{n}.$$

再，$\triangle OAB=\frac{1}{2}(AB\times OC)$

$$=\frac{AB}{2}\times OC=\frac{AB}{2}r\cos\frac{180°}{n}=AC\times r\cos\frac{180°}{n}$$

$$=r\sin\frac{180°}{n}\times r\cos\frac{180°}{n}$$

$$=r^2\sin\frac{180°}{n}\cos\frac{180°}{n}.$$

∴總面積＝N×△AOB

$$=nr^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

22. 若圓之半徑為 r,證圓外切正n邊形之一邊為

$$2r\tan\frac{180^\circ}{n}$$

(同習題,21題,)

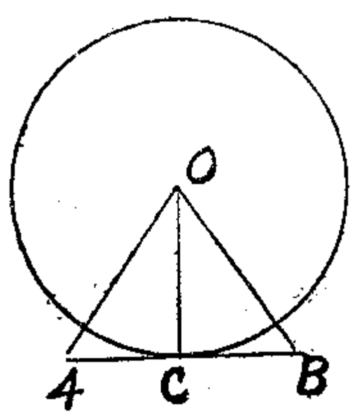
[証]因 2BC＝AB,

∴ 從直角三角形OBC內觀之,

$$BC=OC\tan\frac{BOA}{2}=r\tan COB=r\tan\frac{360^\circ}{2n}$$

$$=r\tan\frac{180^\circ}{n}$$

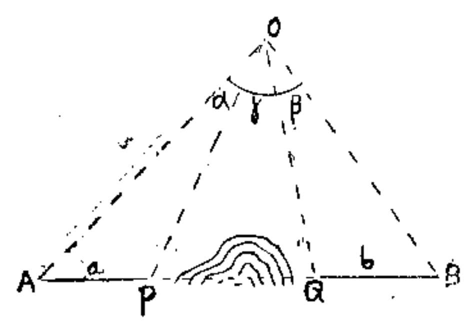
$$\therefore\ AB=2BC=2r\tan\frac{180^\circ}{n}.$$



25. PQ之間為不可到之處,今於其直線上擇A,B二點,量得AP＝a, BQ＝b;又於O處測得AP,BQ,PQ之對角各為α,β,γ;試証PQ＝x可由下式計算之:

$$\frac{(a+x)(b+x)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}=\frac{ab}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

[証] 在△OAQ 中得



$$\frac{a+x}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{OA}{\sin AQO}$$

$$=\frac{OA}{\sin BQO}\cdots\cdots(1)$$

在△OAP中得

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{OA}{\sin APO}\cdots\cdots\cdots(1')$$

在△OBP中得

$$\frac{b+x}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{OB}{\sin BPO}$$

$$=\frac{OB}{\sin APO}\cdots\cdots(2)$$

在△OBQ中得

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{OB}{\sin BQO}\cdots\cdots(2')$$

(1)×(2)得 $\frac{a+x}{\sin(\alpha+\gamma)}\times\frac{b+x}{\sin(\beta+\gamma)}$

$$=\frac{OA}{\sin BQO}\times\frac{OB}{\sin APO}=\frac{OA}{\sin APO}\times\frac{OB}{\sin BQO}$$

∴由(1')及(2')得

$$\frac{(a+x)(b+x)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}$$

$$=\frac{a}{\sin\alpha}\times\frac{b}{\sin\beta}$$

$$=\frac{ab}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

丁· 斯盖倪三氏新解析幾何學

川 島

18. 任意三圓中每兩個圓之根軸必相遇於一點.試用解析法證之.

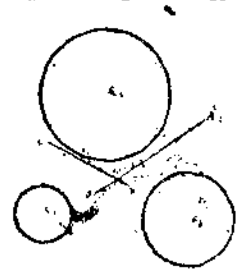
(原書81面7題)

證:設三圓之方程式如次:

$$C_1:\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$

$$C_2:\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0,$$

$$C_3:\ x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0.$$



而 C_1 及 C_3 之根軸爲 AB, C_1 及 C_2 之根軸爲 CD, $P_1(x_1,y_1)$ 爲 AB, CD 之交點.

則 $P_1T_1=P_1T_2,\ P_1T_1=P_1T_3$

$$\therefore \qquad P_1T_2=P_1T_3 \qquad (1)$$

但 $P_1T_2=\sqrt{x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2}$

$P_1T_3=\sqrt{x_1^2+y_1^2D_3x_1+E_3y_1+F_3}$

代入(1),且化簡之,遂得

$$(D_2-D_3)x_1+(E_2-E_3)y_1+(F_2-F_3)=0. \qquad (2)$$

然 C_2 及 C_3 之根軸即

$$(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+(F_2-F_3)=0,$$

故由(2), AB 及 CD 之交點在 C_2 及 C_3 之根軸上.是即 C_1, C_2; C_1, C_3; C_2, C_3; 之根軸相遇於一點.

19. 試由二圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ 及 $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ 之公弦之長度,求此二圓相切之條件.(87面11題)

解: 解所設二方程式,可求得其交點如次:

$$\left(\frac{(a+b)+\sqrt{2c^2-a^2-b^2+2ab}}{2},\ \frac{(a+b)+\sqrt{2c^2-a^2-b^2+2ab}}{2}\right),$$

及 $$\left(\frac{(a+b)-\sqrt{2c^2-a^2-b^2+2ab}}{2},\ \frac{(a+b)-\sqrt{2c^2-a^2-b^2+2ab}}{2}\right).$$

故公弦之長度爲

$$\sqrt{\left\{2\left(\frac{(a+b)+\sqrt{2c^2-a^2-b^2+2ab}}{2}-\frac{(a+b)-\sqrt{2c^2-a^2-b^2+2ab}}{2}\right)^2\right\}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2c^2-a^2-b^2+2ab}.$$

當此等圓相切時,其公弦之長度爲零;反之若其公弦之長度爲零,則是二圓相切.

故當

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2c^2-a^2-b^2+2ab}=0,$$

即 $$(a-b)^2=2c^2 \qquad (T)$$

時,此二圓相切,而(T)即爲所求之條件.

20. 試證橢圓之通徑(lotus rectum)爲其二軸之比例中項.(96面8題)

證: 以2a表長軸(major axis);2b表短軸(minor axis),L爲通徑,則

$$L=\frac{2b^2}{a}$$

$$L=\frac{4b^2}{2a}=\frac{2b\cdot 2b}{2a}$$

$$\frac{2a}{2b}=\frac{2b}{L}$$

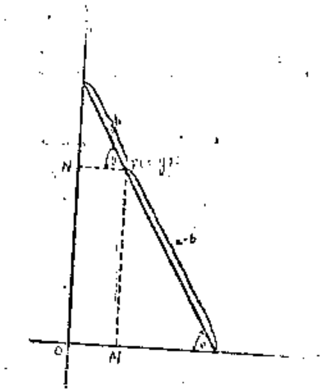
即 $$2a:2b=2b:L.$$

故如題所云.

21 設一定長之直線兩端在二垂直線上移動.試求其上任一點之軌跡.(96面9題)

解: 設Y'Y及X X'爲所設之二垂直線. AB爲定長之直線.P(x,y)爲AB上任一點,且AB=a, PB=b.

則PA=a−b.



由圖, $\frac{PN}{PB}=\cos\theta$,

$$\frac{PM}{PA}=\sin\theta.$$

即 $$\frac{x}{b}=\cos\theta, \qquad (1)$$

$$\frac{y}{a-b}=\sin\theta. \qquad (2)$$

$(1)^2+(2)^2$, $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=\cos^2\theta$
$+\sin^2\theta$

即 $$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1,$$

是爲一橢圓. 即所求之軌跡. 但特別場合,P爲AB之中點時,則

$$b=\tfrac{1}{2}a,$$

而所求之軌跡遂爲

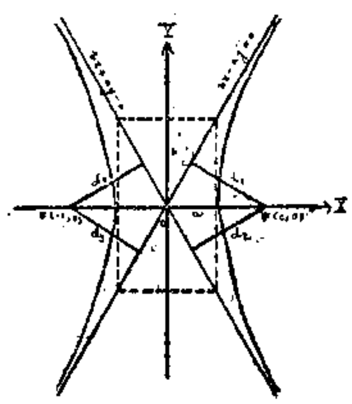
$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1$$

即 $$x^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

而爲一半徑$=\frac{a}{2}$之圓周.

22. 試證雙曲線之一漸近線與任一焦點之垂直距離與其半屬軸(Semiconjugate axis)數值地相等.(107面2題)

證.



設所設雙曲線如次:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

則其漸近線爲

$bx+ay=0,\qquad bx-ay=0.$

而其焦點爲

$F_1(c,o)$, 及 $F'(-c,o)$, 但 $c^2=a^2+b^2$.

自 F 至 $bx-ay=0$ 之距離爲

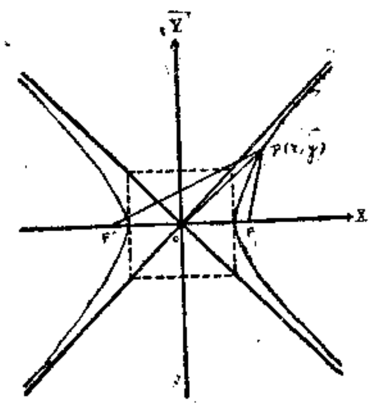
$$d_1=\frac{bc-a\cdot o}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{b\ c}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$$

$=$半屬軸.

同理, $d_1=d_2=d_3=d_4=$ 半屬軸.

23. 試証: 正雙曲線之一點與其兩焦點之距離之乘積等於此點至其中心之距離之平方.(107面5題)

證:



設正雙曲線爲

$$x^2-y^2=a^2.$$

則 $c=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}.$

∴其焦點分別爲 $F(a\sqrt{2},0)$

及 $F'(-a\sqrt{2},0)$.

設 $P(x,y)$ 爲此曲線上一點, 則

$$PF=\sqrt{(x-a\sqrt{2})^2+y^2}$$

$$PF'=\sqrt{(x+a\sqrt{2})^2+y^2}$$

$$\therefore\ PF\cdot PF'=\sqrt{(x-a\sqrt{2})^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a\sqrt{2})^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(x^2+y^2)^2+4a^4-4a^4}$$

$$=x^2+y^2$$

但 $\overline{PO}^2=x^2+y^2$

∴ $PF\cdot PF'=\overline{PO}^2$.

問題欄

本欄之目的,在徵集關於中等算學範圍內之種種問題,不拘科目,不限難易,以供讀者之研究,藉收觀摩之效. 凡本刊讀者,皆可提出問題,及解決本欄內所提出之問題. 無論出題或解題,概依收到之先後,次第編號發表,而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址,均隨題披露. 數人同解一題,解法同時則擇尤發表,解法異時則分段刊登. 來稿務祈繕寫清楚,姓名住址尤須明晰. 至解題時所用圖形務請用黑色墨水精確作好,連帶寄下. 編者謹啟.

晚到之解答

41,42,43. 武昌私立育傑中學閻立恕君.

41,42,45. 湖北省立第八中學梁代槐君.

45. 江西省立南昌第一中學葉蒼,石完璞兩君.

41,42,43,45. 湖南省立第一師範楊堯農君.

問題已解決者

35. A,B二人每日作工時間之積,與其所得工資之和為正比. 某次承辦一工程,言明工價23·2元. 第一日兩人得工資1·2元,其後每日各增加工作一小時,至最後一日兩人所得工資為7·2元,但總計前半日子所得工資,只有6·2元. 問二人第一日各作工幾小時?

解(提出人楊堯農)

設x,y為A,B二人第一日作工之時間,K為比例常數. 依題意,有

$$xy=12k, \qquad (1)$$

及 $xy+(x+1)(y+1)+(x+2)(y+2)+\cdots\cdots+(x+n-1)(y+n-1)=232k;$

後式可化成 $nxy+(1+2+3+\cdots\cdots+n-1)(x+y)+1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots$

$+(n-1)^2=232k$,

即 $$nxy+\tfrac{1}{2}n(n-1)(x+y)+\tfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)=232k \qquad (2)$$

(2)÷(1), $$n+\tfrac{1}{2}n(n-1)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)+\tfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\frac{1}{xy}=\frac{58}{3}. \qquad (3)$$

於(2)以$\frac{n}{2}$換n則得前半日子工作時間總數,而工資爲6.2元,故有

$$\frac{n}{2}xy+\tfrac{1}{8}n(n-2)(x+y)+\frac{1}{24}n(n-2)(n-1)=62k,$$

以(1)除之, $$\frac{n}{2}+\tfrac{1}{8}n(n-2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{24}n(n-2)(n-1)\frac{1}{xy}=\frac{31}{6} \qquad (4)$$

又最後一日工資爲7.2元,故有 $(x+n-1)(y+n-1)=72k.$

以(1)除之, $$1+(n-1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+(n-1)^2\frac{1}{xy}=6. \qquad (5)$$

由(3),(5)將 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 消去,略加計算,得

$$n(n-1)(n-2)\frac{1}{xy}=21n-116; \qquad (6)$$

由(4),(5)將 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 消去,略加計算,得

$$2n(n-1)^2(n-2)\cdot\frac{1}{xy}=27n^2-166n+124; \qquad (7)$$

由(6),(7)將$\frac{1}{xy}$消去,略加計算,得

$$5n^2-36n+36=0,$$

解之得 $n=6$, $\frac{6}{5}$. n旣爲工作日數,依題意不能爲分數,故將n=6代入(5),(6)

兩式得 $$1+5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{2\cdot5}{xy}=6, \quad 或 \quad x+y+5=xy; \qquad (8)$$

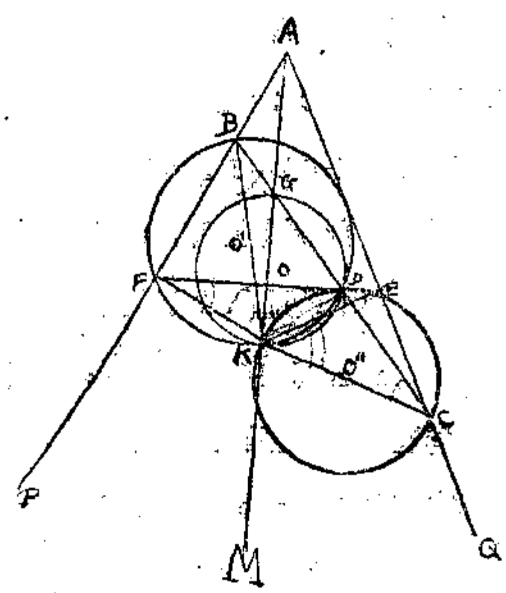
及 $$6\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{xy}=126-116=10, \quad 或 \quad xy=12. \qquad (9)$$

解(8),(9)得 $x=3, y=4$; 或 $x=4, y=3$.

47. 經過已知角之平分線上一定點，求作一直線，使夾此角之兩邊之和等於一定長.

解(江西省立南昌第一中學葉蒼石完璞合解)

(作法) 設已知角爲 PAQ,其平分綫爲 A M, 定點爲G, 定長爲 l .於 AP,AQ 各取點 F 及 E, 使 AF＝AE＝$\frac{l}{2}$.連 FE. 由 E 作 AQ 之垂綫交 A M 於 K. 以 G K 爲直徑作圓周交 F E 於 D,連 G D,兩端引長之交 AP 及 A Q 於 B 及 C,則 B C 爲所求之線分.



(證) 聯結 KD,KF. 因 GDK 與 BFK 皆爲直角,故 B. D, K, F 四點共圓,故∠KBD＝∠K F D. 因 K D C 及 K E C 均爲直角,故 C, E, D, K 四點共圓;故∠D E K＝∠DCK. 但 KF＝KE, 因之∠KF D＝∠K E D, 由是∠K B C＝∠K C B; 故 K B＝KC. 由是Rt.△BFK≌Rt.△CEK, BF＝CE 故

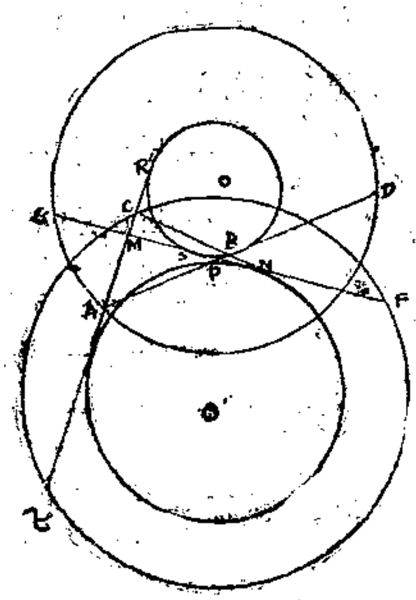
$$AB+AC=AB+AE+EC=AB+AE+BF=AF+AE=\frac{l}{2}+\frac{l}{2}=l.$$ (證訖)

(此題解者尚有湖南省立第一師範楊堯農君)

48. 求於三角形外外覓一點 P, 作一線與兩邊成一三角形,令其周爲定長.

解(湖南省立第一師範楊堯農)

(按:題文中'外覓一點)''似不需要



(作法) 設△A B C 爲所與三角形,延長 AB至 D, 令 AD＝所設定長 l. 再以 A D 之中垂綫與∠CAB之分角綫交點O爲心,作A, D 二點之圓, 又作切 AC, AD 之圓.

又延長CA至E，令$CE=1$，再以CE之中垂綫與$\angle ACB$之分角之交點O'爲心，作過C，E兩點之圓，又作切CB，CE之圓.

作O及O'圓之公切綫FG，即爲所求之線，

（證）設GF交AC，CB，AB於M，N，P. 不難證明$PD=PG$，又$AM=GM$ ($\because AR=GS, MR=MS$). 故$\triangle AMP$之周$=AM+MP+PA=GM+MP+PA=GP+PA=PD+PA=AD=1$，同樣可證$\triangle CMN$之周亦爲1. 故GF爲所求之直綫.

討論：此題有兩解，O，O'二圓之兩內公切綫皆爲所求者.　　　　（證訖）

49. 由下列方程式消去θ

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=c\cdots\cdots(1)\qquad a\csc^2\theta+b\sec^2\theta=d\cdots\cdots(2)$$

解（湖北省立高中劉後利）

由(2)式得 $a\cos^2\theta+b\sin^2\theta=d\cos^2\theta\sin^2\theta$ 與(1)相加，得

$$a+b-c=d\cos^2\theta\sin^2\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(1)式，　$a\sin^2\theta+b(1-\sin^2\theta)=c$，　即 $\sin^2\theta=\dfrac{c-b}{a-b}$；$\cos^2\theta=\dfrac{c-a}{b-a}$. 以之代入(3)而去分母，得　$(a-b)^2(c-a-b)=d(c-a)(c-b)$.

（本題解者尚有長沙段桂棠君，湖南第一師範楊堯農君，及江西七中袁漢火君）

50. 若 $\cos\theta-\sin\theta=b$，$\cos3\theta+\sin3\theta=a$；試證 $a=3b-2b^3$.

證（前人）

$$3b-2b^3=b(3-2b^2)=(\cos\theta-\sin\theta)(3-2+4\sin\theta\cos\theta)=(\cos\theta-\sin\theta)(1+4\sin\theta\cos\theta)=\cos\theta+4\sin\theta\cos^2\theta-\sin\theta-4\sin^2\theta\cos\theta=\cos\theta+4\sin\theta(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta-3\cos\theta+4\cos^3\theta=\cos3\theta+\sin3\theta=a.$$

（本題解者尚有長沙段桂棠，湖南第一師範楊堯農君及江西七中袁漢火君）

52. 試証 $\dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\dfrac{{}_nC_0}{x}-\dfrac{{}_nC_1}{x+1}+\dfrac{{}_nC_2}{x+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_nC_n}{x+n}$.

證（前人）

設 $\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}+\cdots\cdots+\frac{L}{x+n}$.

去分母， $n!\equiv A(x+1)(x+2)\cdots(x+n)+Bx(x+2)\cdots(x+n)+Cx(x+1)\cdots(x+n)+Lx(x+1)(x+2)\cdots$，若 $x=0$，則 $A=1={}_nC_0$；若 $x=-1$，則 $B=-n=-{}_nC_1$；若 $x=-2$，則 $C=\frac{n(n-1)}{2}$；……；若 $x=-n$，則 $L(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)=n!$ 卽 $n!(-1)^nL=n!$，$\therefore L=(-1)^n=(-1)^n{}_nC_n$. 將 A,B,C,…L 之值代入上式卽得.

53 試證 $\frac{1}{x+1}-\frac{n}{1}\,\frac{1}{x+2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\,\frac{1}{x+3}-\cdots+\frac{(-1)^n}{x+n+1}$

$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$$（不得利用前題之結果）

證(前人)

設 $\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}+\cdots\cdots+\frac{L}{x+n+1}$，去分母，得

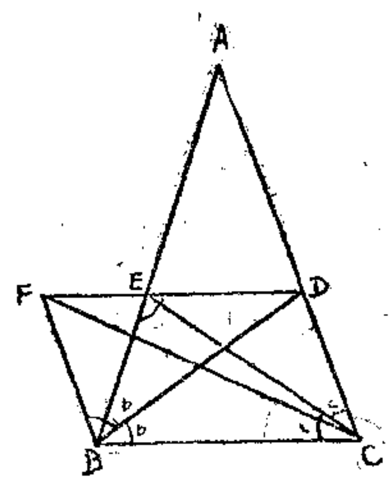
$$n!\equiv A(x+2)\cdots(x+n+1)+B(x+1)\cdots(x+n+1)+C(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)+\cdots\cdots+L(x+1)(x+2)\cdots\cdots.$$

若 $x=-1$，則 $A=1$；若 $x=-2$，則 $B=-n$；若 $x=-3$，則 $C=\frac{n(n-1)}{2}$；

若 $x=-(n+1)$，則 $n!=n!(-1)^nL$，$\therefore L=(-1)^n$. 將 A,B,C,…L 代入上式卽得.

55. 設三角形二底角平分綫相等，試證明此三角形爲等腰（禁用反證法）

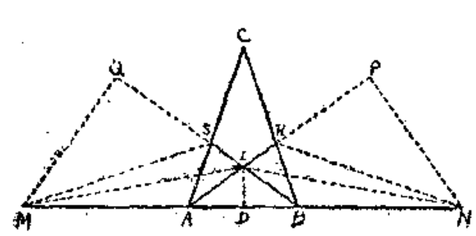
證（北平志成中學武郁文）

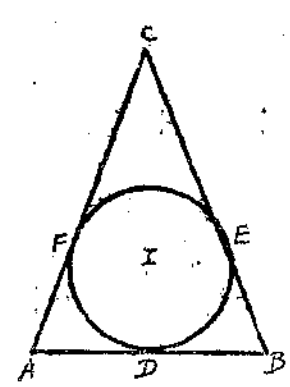


作DF與C處於BD之異側，且使$\angle FDB=\angle BCE$；又取$DF=CB$．則$\triangle FDB\cong\triangle BCE$（s.a.s）． $\therefore\angle FBD=\angle BEC$． $\therefore\angle FBC=\angle FBD+\angle DBC=\angle BEC+\angle DBA=\angle BOC$．又$\angle FDC=\angle FDB+\angle BDC=\angle DCO+\angle ODC=\angle BOC$．但$\angle BOC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}C=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A>\angle R$．故在$\triangle FBC$及$\triangle FDC$中有$CB=FB$，$CF\equiv FC$，$\angle FBC=\angle CDF=\angle BOC>\angle R$， $\therefore\triangle FBC\equiv\triangle CDF$（編者按：請參看漢譯溫氏高中幾何學66頁）$\therefore BCDF$爲平行四邊形．故$FD\parallel BC$，$\therefore\angle OBC=\angle ODF=\angle OCB$， $\therefore\angle ABC=\angle ACB$， $\therefore$ $AC=AB$． （證訖）

（葉蒼，石完璞兩君亦用同法解此題，惟證$\triangle FBC\cong\triangle CDF$時未提及$\angle BOC>2\angle R$，欠妥當，此外証明者尙有江西七中袁漢火君，及濟南省立高級中學郭鴻俊君）

別証（湖南明德學校周德珪）





如圖；AR，BS各爲$\triangle ABC$之底角$\angle A$，$\angle B$之平分綫．則AR與BS之交點I爲$\triangle ABC$之內心，……(1)．作$ID\perp AB$． 引長AB兩端至M，N，令$MA=BC$，$NB=AC$．作$MQ\perp BS$，$NP\perp AR$，聯IM，IN及RN，SM．由(1)知$BC+AD=AC+BD$

（見補題）．即 $MA+AD=NB+BD$．

或 $MD=ND$．但 $ID\perp MN$． $\therefore\ IM=IN$…………………………………………(2)

而 AR 爲 $\angle A$ 之平分綫故 R 與 AC 及 BN 等遠．且 $AC=BN$（作圖），故 $\triangle ACR\backsim\triangle BNR$．兩邊同加 $\triangle ABR$，得 $\triangle ACB\backsim\triangle ANR$．同理 $\triangle ABC\backsim\triangle BMS$，故 $\triangle ANR\backsim\triangle BMS$．但由假設，$AR=BS$，則必其高 $MQ=NP$……(3)．由(2)，(3)得知 $Rt\triangle MIQ\equiv rt\triangle NIP$． $\therefore\angle MIQ=\angle NIP$． 但 $\angle MIQ=\angle MBI+\angle IMB=\frac{1}{2}\angle B+\angle IMB$．$\angle NIP=\angle NAI+\angle INA=\frac{1}{2}\angle A+\angle INA$． 故 $\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle A$，即 $\angle B=\angle A$，故 $AC=BC$．故 $\triangle ABC$ 爲等腰． （證訖）

補題：（見圖二）任一 $\triangle ABC$ 其內心爲 I． $\odot I$ 與 AB 之切點爲 D，則有

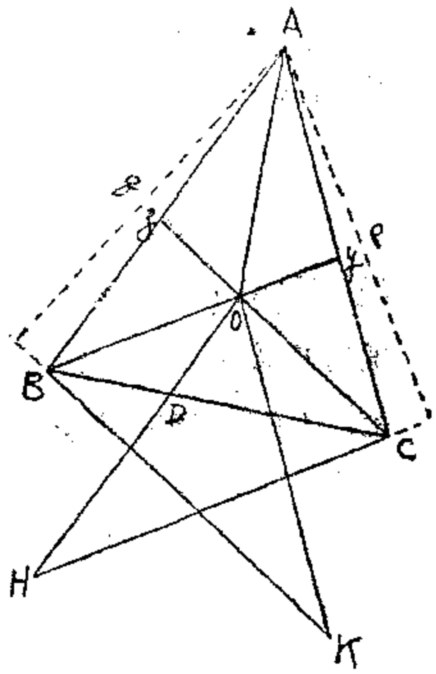
$$BC+AD=AC+BD.$$

證： 設 $\odot I$ 與 BC，CA 之切點各爲 E，F．則因 $CE=CF$，$AD=AF$，$BE=BD$，而 $BC+AD=CE+BE+AD=CE+AD+BE=CF+FA+BD$．

即 $$BC+AD=AC+BD$$ （證訖）

別証（北平育英中學郭可詹）

如圖，作 $OH /\!/ AB$，$CH /\!/ OB$；$OK /\!/ AC$，$BK /\!/ OC$．則 $OD=DB$ 及 $CD=DH$，故 $OH=BC$；同理，$OK=BC$， $\therefore$ K 與 H 二點對於 AO 爲軸對稱．$\angle AHC<\angle BHC$ 即 $<\frac{1}{2}(B+C)$，故爲銳角．



同理 $\angle AKB$ 亦爲銳角．設 p 與 q 爲 A 至 HC 及 KB 之垂線．則 $\frac{1}{2}p\cdot\overline{By}=\triangle ABy+\triangle yBC=\triangle ABC$，$\therefore p\cdot\overline{By}=2\triangle ABC$；同理，$q\cdot\overline{Cz}=2\triangle ABC$．今 $By=Cz$，$\therefore\ p=q$．在 $\triangle AOH$ 與 $\triangle AOK$ 內因 H，K 對於 AO 爲軸對稱，故 $\triangle AOH\cong\triangle AOK$，$AH=AK$．$\because\ p=q$．$AH=AK$，又 $p\perp HC$，$q\perp BK$，$\therefore$ 銳角 $AHC=\angle AKB$．但 $\angle AHO=\angle AKO$（因 H，K 爲對稱點），$\therefore\angle OMC=\angle OKB$， 即 $\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}C$，

$$\angle B=\angle C,\ \therefore\ AB=AC.$$

（証訖）

提 出 之 問 題

提出者 H.T.K.

61. 若正整數 $n>1$,則無正整數 x,y,z 能適合方程式

$$x^n+y^n=z^n$$

但 x,y 中之一個係假定爲小於或等於 n 者,求證.

62. 若 $x^{n-1}+y^{n-1}\leqq z^{n-1}$, 則 $x^n+y^n\neq z^n$

但此中 x,y,z,n 皆設爲正整數者,求證.

提出者 ㄌㄨㄥ

63. P 爲 $\triangle ABC$ 之重心,O 爲空間任意點,求証

$$3(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)-(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=(3\cdot\overline{OP})^2.$$

提出者北平志成中學武郁文

64. 於直角三角形 ABC 之各邊上各作正方形 ABFG, BCED, ACKH, 求證

(a) FG 與 HK 若交於 A', 則 $AA'\perp BC$;

(b) $\triangle ABC$ 之三中線必各垂直於 HG, EK, DF;

(c) 若 AD 與 BK, AE 與 CF, BK 與 CF 各交於 X, Y, Z, 則 $AZ\perp XY$, 及

(d) $XY\parallel BC$;

(e) 若三正方形之中心各爲 O, O', O", 則 AD, CF, GE, BO' 四線交於一點; AE, BK, DH, CO" 四線交於一點; AO, BO', CO" 三線亦交於一點.

提出者張易

65. 有夫婦五對同坐在一圓棹,男女相間,但夫妻不得相鄰,問坐法有幾?

刊 誤 表

第二卷第一期

頁	列	誤	正
目錄	10	科數學	科學
	,,	(長篇小說)	删去
1	20	$\cdot b+b\cdot a$	$a\cdot b+b\cdot a$
	21	次交換a與b	次交換a與b
2	18	$+cco$	$+ccc$
3	17	〔　〕	(　)
	19	〔　〕	(　)
4	12	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{a^2}{b}}$
	,,	$\begin{pmatrix} a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\ b\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) \end{pmatrix}\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right]$	$\begin{pmatrix} a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\ b\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) \end{pmatrix}>\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right]$
	16	$B>b$	$B_i>b_i$
5	6	$a_n\ d_n$	$a_n\ a_n$
	7	$a^n a_n$	$a_n a_n$
	13	$+a^1_n$	$+a^2_n$
6	16	$+b^2ca$	$+b^3ca$
	22	a_2^{N-}	a_2^{N-n}
7	6	$\begin{matrix}1\\b\end{matrix}$	$\frac{1}{b}$
	,,	$\begin{matrix}a^8+b^8+c^8\\a^3b^3c^3\end{matrix}$	$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$
6	7	$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^2}$	$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$

頁	列	誤	正
	17	a_2^{mn-}	a_2^{mn-k}
	18	$+\frac{a^{nmk}}{a_2^m}$	$+\frac{a_2^{m-k}}{a_2^m}$
8	14	$\wedge$	$>$
12	14	$\frac{\sqrt{q}(\sin^2\theta+\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$	$\frac{\sqrt{q}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$
13	6	$\div$	$+$
	15	脫落	故三實根爲$2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\theta+m\cdot\pi}{}$ $(m=0,1,2)$
	16	二	三
	,,	三	二
14	1	$-2\sqrt{}-p/3$	$-2\sqrt{-p/3}$
	5	$\cos^3\theta$	$\cos 3\theta$
16	2	推論廣	論推廣
	9	sn^{-2}	$\sin^{-1}2$
17	2	Y'GY	Y'OY
	18	XOZ_4	XOP_4
18	6	$\frac{1}{ai}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$	$\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$
	11	Wentwortb	Wentworth
	15	cecz	cscz
19	5	能當	當能
20	7	(grantham)	grantham
	,,	(Lincornshire	incornshire
30	3	織學	織算學
	8	試是	試都是

頁	列	誤	正
31	20	必時	必要時
	,,	征	徵
32	3	有一叫	有的叫
	8	$({}_2P_{-i}($枝l	$({}_2P_{-i2})$枝l
	14	$\csc\theta_2$	$\csc^2\theta_2$
33	2	怡	怕
34	3	幾上	幾何上
	5	公之	公式之
	18	徽	微
	19	是一	是用一
47	末2	EC : CE	EC : CD
48	1	BSR	BSY
	8		漏(1)
	9		漏(2)
	末5	經	徑
49	2	BQ	BD
	11	$\sin\alpha$	$\sin^2\alpha$
50	7	x_3	x^3

第 二 卷 第 二 期

頁	列	誤	正
封面		期二第	第二期
目錄	7	紀念棣美	紀念棣美弗
1	16	ф	中
2	8	設有講到的	沒有講到的
3	3	第一第二西書	第一第二兩書
	4	有兩介	有兩个
	13	果結教育部	結果教育部
	14	以爲成爲疑問	以爲不成爲疑問
11	1	$a_i^2b_k^3$	$a_i^2b_k^2$
	3	a^ib_i	a_ib_i
	6	9.對立積	應改大字
	8	凡本節中之〔 〕	均應改作( )
	14	$A_1+B_1)$	(A_1+B_1)
	16	$>cabc$	$>3abc$
	21	$>n\cdot 2_n$	$>n\cdot 2_n$
12	16	$>\frac{3}{a+b+b}$	$>\frac{3}{a+b+c}$
13	7	$\frac{1}{s-r_n}>$	$\frac{1}{s-a_n}>$
13	9		改用大字
	10	$AC>$	$Ac>$
	,,	或字後上下兩個$>$	均改作$<$
	12	[ ]	( )
	19	[ ]	( )
14	全面	凡[ ]	均改( )

頁	列	誤	正
14	17	$=\begin{pmatrix} p_1^{n-1}p_2+q_1^{n-1}q_2 \\ p_3^{n-1}p_2+q_3^{n-1}q_2 \end{pmatrix}$(非後一個)	$=\begin{pmatrix} p_1^{n-1}p_1+q_1^{n-1}q_1 \\ q_2^{n-1}q_2+q_2^{n-1}q_2 \end{pmatrix}$
15	1	[ ]	( )
	9	[ ]	( )
	21	[ ]	( )
16	3	但不用定理	但不用定理(5)
	10	最末一指數 $\frac{n}{m+u}$	$\frac{n}{m+n}$
19	13	智識	知識
20	7	爲爲	爲
	18	isix	isnix
21	15	分母中之 $i\sin^2 mx$	$\sin^2 mx$
22	4	第一個 sinx	sinnx
	12	sosix	cosix
	末5	isinhx	sinhx
23	9	ㅛ	π
	,,	x_n	x^n
24	5	ctoe	cote
	13	Dotrne	Dotrine
	15	出	書中
	17	2:	2!
25	2	花字中 Moive	Moïvre
	14	的候	的時候
	15	希獵	希臘
	16	賭得	得賭
	18	因比	因此
	21	Hugghen	Huygen

頁	列	誤	正
	26	原畧	原理
	"	究材	究的材
	27	$(\cos x+i\sin x)_n$	$(\cos x+i\sin x)^n$
	"	Cosnx	cosnx
37	1	難問	難題
49	7	寄	寄下
	"	下編者	編者
	13	直腰等角	直角等腰
50	末5	△ODQ	△ADQ
52	2	省立第一師範	私立明德學校
	3	外外	
	18	二底角線	二底角之平分線