數學研究小叢書

從代數回到算術

李緒文著

余介石校

中華書局印行

數學研究小叢書

從代數回到算術

撰述者　李緒文
（金陵女子文理學院數理系副教授）

主編者　中等算學研究會
校訂者　余介石
（金陵女子文理學院教育部講座）

中華書局印行

發刊旨趣

本叢書取材或切實用，或備應試，要皆不踰中等數學範圍，求便於中學生之課外閱讀，及一般人士之公餘瀏覽也。方今萬事艱辛。編印困難，購讀亦復非易，故篇幅務簡，內容務精，以期書價抑低，披閱稱便，或亦物資與精力節約之一道。各書編述，非出一手，體裁出入，自所不免，然本會有一貫計劃以聯繫之，并請專家分別校訂，以求充實正確，不是，旨趣如此，能力所限，雖不能至，心嚮往之，則無時或已。方家大雅，幸有以教之。

算術四則應用問題貌似粗淺而實艱澀，初學遇此，雖困而學之仍難猝通，若不善予指導，徒令其心懷畏懼，則其學習之興趣尚未萌芽，驟遭打擊，更何能望其對於數學有所成就耶。凡曾習代數者，解算術四則問題之能力即較強，此中必有原因，爰就所見從代數立場，澈底研討此類問題算術解法之來源與思考之程序，并略論圖解法與試差法而擇若干主要問題用各種方法反復詳演示範，藉收互相發明之效，凡此諸法皆他書所未載，而偶為吾人採用者，特未具體論究耳。著者不敏，加以闡述，撰成此冊，俾教者可取以參考。即初學之稍習一次方程者讀之亦可毫無扞格，果能稍有裨益卽幸甚矣。本書撰述時多承余介石先生鼓勵與匡正，謹此誌謝。

著者謹識

目　錄

從代數回到算術

第一章 由代數推求算術應用問題解法

在算術中，整數小數分數四則應用問題，初學每視爲畏途，即爲教師者遇有疑難問題，亦不易逕以算術方法解之，察其困難之點乃因所求諸量不能與題中各已知量合併運算，藉以顯示題意，是以不易探得解法之正當途徑，摸索而前，輒有捫壁之苦。有時解法曲折奧妙，無線索可尋，則尤令人瞠目束手，無從下筆，故凡稍習代數學者，常以代數方法解之，如此演算，可以文字代表所求諸量，使其與已知諸量結合，立成等式，表明題意，更解所立方程式即得答案。此法程序，順情合理，固簡易矣，惜乎不能舉以教授未習代數之學生，在自修者亦深以不能由此推求算術解法爲憾。按代數解法所得結果，殆即算術解法之算式，吾人宜從算術的立場，將此結果予以適當之解釋說明其意義，使之能離開其所從來之代數方程式而作爲純粹的算術解法。然此事頗不易爲，蓋以此結果乃一算式含有各已知量之加減乘除等基本運算，關係複雜，殊不易釋明其所以相加相減，或互相乘除之理由。是以答案雖已求得，而佈算之步驟及原理仍茫然不知，在算術方面言之，此問題固不能謂爲已完全解決也

欲由應用問題之代數解法推求算術解法，果宜如何進行，尚未見有算術或代數書籍論及此事。然算術教科書中論及應用問題解法時，間有於不知不覺中引用代數觀念者，學者於此，輒感新奇而不知如何利用之爲解題之新器。本章即擬將此略爲研究，以爲尋覓應用問題解法之助。

由代數解法所得表示答案之算式，關係複雜，前以言之，欲僅由此式推求算術解法之道，實不易爲。故吾人宜着眼於其所從來之方程式，逐步探求其歷次移項，併項，移除作乘，及移乘作除等運算在事實方面之意義，並注意其中各量之正確單位，俾便於推斷各量和，差，積，商所應有之單位，既免混淆，又助解釋。

考算術整數，小數，分數四則應用問題，大率可用一元一次方程式表達其意義。題義稍繁者可用二元或三元一次聯立方程式。吾人且就立方程式之道試一論究。

以代數取題，在先就題義立適當之方程式，其步驟如下：

(1) 以一文字代表所求之量，或以之代表一與所求量有密切關係之量，視立式之難易而擇一行之。

(2) 令此文字及題中各已知量遵循題義合成形式互異而表示同一數量或相等二量之兩代數式。

(3) 使此二代數式相等，是卽所求之方程式。

(4) 若題義較繁，須假設數文字代表所求諸量或相關諸量時，吾人卽按題中所示諸關係立成與文字個數相等之方程式。

於此有宜注意者二事：

(1) 方程式中各項必皆爲同類名數（或盡爲不名數），且必須具有同一之單位。

(2) 各項中二量乘除之結果，應取何單位，宜熟識之。因各量單位之正確解釋頗能顯示算式之意義，特詳述於下。

按乘法親則，a 與 b 二量相乘時，最多只能有一量爲名數，且二者之積與之爲同名數，斷不容有二名數相乘之事。例如每小時行 a 里，問 b 小時可行幾里。此題之答案爲 ab 里，算式 a×b 不能視爲 a 里與 b 小時之乘積，而當視作 a 里之 b 倍，其結果乃得 ab 里。卽以由長方形之長 a 尺及寬 b 尺求其面積之算式而言，亦不宜作

a 尺$)\times b$ 尺$=ab$ 平方尺解，實應視作 a 平方尺之 b 倍或 b 平方尺之 a 倍，因此長方形可以平行於長之直線分作 b 個長方形，各含並列之 a 個平方尺，或以平行於寬之直線分作 a 個長方形，各含並列之 b 個平方尺也。故取題中二名數 a 與 b 相乘時，務須注意其當視為 a 量之 b 倍，抑為 b 量之 a 倍，方合題意而便於解釋。

按除法規則，同單位二名數可以相除，商為不名數，但於除法完成後可按題意賦予此商以適當之單位，例如均分梨 a 個與兒童，每人得 b 個，求兒童人數，其算式 $\frac{a}{b}$ 之正當解釋為梨 a 個可均分為 $\frac{a}{b}$ 份，每份有梨 b 個。今令每一兒童取其一份，恰盡無餘，故知兒童人數當與所分份數相同，即應有兒童 $\frac{a}{b}$ 人。若 a 為名數，b 為不名數，則商 $\frac{a}{b}$ 與 a 為同名數，且二者之單位相同。例如某人在 b 小時內行 ab 里，則此人每小時行 $\frac{ab}{b}=a$ 里，式中除數 b 宜暫視作不名數方可相除，因吾人意在均分 ab 里作 b 份，每小時所行距離恰為其一份也。至於被除數為不名數，而除數為名數之情形則不容存在。故取題中二名數相除時，亦宜特別其意義，當視作同單位二名數之商抑為名數與不名數之商，若在前者，更須審察其是否應具有一適當之單位。

關於兩量之積或商之單位，本可按物理學中各導出量計算之法推定。例如速度為每分鐘行 a 尺，做 b 分鐘行 ab 尺，ab 之單位"尺"乃由速度之單位"尺/分"，與時間之單位"分"相乘而得。仿此，每一兒童得梨 a 個，則 b 個兒童共得梨 ab 個，蓋因 a 之單位為"（一個梨）/（一兒童）"，b 之單位為"一兒童"，令此二單位相乘立即見其積之單位應為"一個梨"矣。又如某人每小時行 a 里，

則行 a b 里需 b 小時，乃因 a 之單位爲"里/小時"，a b 之單位爲"里"，故其商 $\frac{ab}{a}=b$ 之單位乃上述二單位之商，固甚易見其爲"小時"也。此法本較簡易明顯，且不小易致誤，顧算術中並無如是解釋者，故本書仍循常例，寧多加解釋，俾未習物理學者，亦可瞭然。

方程式既立，卽當進而求其解矣。按一元一次方程式之解法步驟有四：

(1) 去括號，去分母： 將各括號一一乘出及以分母之最小公倍數遍乘各項。

(2) 移項： 使各已知項集於等式之右邊，含未知量各項則集於左邊。

(3) 合併兩邊各項： 使此方程式化爲 $ax=b$ 之標準形式。

(4) 移乘作除： 以未知量之係數除兩邊，卽得所求之解答。

如按題意立成二元或三元一次聯立方程式，首須用代入法或加減法消去其一元或二元而得一一元一次方程式，再實施上列四步驟以求解。消元時以採用加減法爲便，於此須尋求各方程須各乘以某一常數之實際意義。

爲便於解釋方程式之意義起見，上述各步驟，可稍變通。例如各已知之分母卽宜保留，故去分母一事，可毋庸實施，但須將 $\frac{ax+b}{c}$ 一類之項分爲 $\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}$ 以便在第二步中實行移項。

移項以後，在方程式兩邊諸項之前，有附加號者，有附減號者，其應加入之項，含有補足欠缺之意，其應減去者含有截去多餘之意，其目的在將兩邊截長補短，使右邊各已知項加減之結果，恰爲未知量之若干倍或幾分之幾。此時之方程式最可誘導吾人達於算

術解法之正當途徑，因其含有題中已知各量，並將此諸量互相結合之正確方法，完全呈現。熟諳其各項之單位，並參照題意，稍加思索，或借助於圖表，卽可說明各已知量何以應如此結合之理由。

合併方程式兩邊各項一事，可暫從緩，而先移乘作除，以左邊未知量之係數除兩邊，是卽算術解法所需之算式。更將此算式化簡，卽得所求未知量之值矣。此未知量之單位，可按前述規則判定之。依此規則，若未知數爲不名數，則須視題意賦予以適當之單位。有時問題所要求之答案應爲不名數卽任其爲不名數可也。

如上所述，在以代數方法解算術四則應用問題之運算中，逐步探求其實際意義，則非特算式可以求得，且此算式縱極繁複，其中各已知量互相加減或乘除之如何與事理吻合，俱可瞭然。吾人至此，已將算術解法之關鍵及算式一一獲得，再按算術解題步驟，整列所得算式，並述其佈算之理由，卽成一純粹算術解法，可以脫離所從出之代數解法而獨立存在，使閱此者卽可領略矣。

❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀

茲舉若干算術應用問題，首用代數解法，次由此推求算術解法，藉以闡明上述之理。

問題1 自1點至12點間，時鐘上時針與分針重疊之時刻爲何？

〔代數解法〕 吾人姑求 m（m 爲介於零與12間之正整數）。點與 m+1 點間時針與分針重疊之時刻。設此重疊之時刻爲在 m 點後之 x 分鐘。因時針原在分針之 5m 個分劃之前，又時針之速率僅爲分針速率之$\frac{1}{12}$，故當分針行 x 分劃時，時針祇行$\frac{x}{12}$分劃。俟兩重疊時，分針應較時針多行 5m 分劃。故以每分劃爲單位，卽得立成方程式

$$x-\frac{x}{12}=5m$$

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)x=5m$$

由上所述，$1-\frac{1}{12}$乃分針與時針在1分鐘內所行分劃數之差，其單位仍爲1分劃。此量之x倍恰爲5m分劃，故x爲不名數。移乘作除，即得其值爲

$$x=\frac{5m}{1-\frac{1}{12}}=\frac{60}{11}m.$$

因5m分劃可均分爲每份$1-\frac{1}{12}$分劃之x份。分針與時針所行分劃數之差若爲此1份，即需時1分鐘，欲二者之差達到此份之x倍，即需時x分鐘，故按本題意義解釋，斯時當爲m點後之$\frac{60}{11}$m分鐘。

時針與分針係同向前行，試觀x之算式，即知本題與追及問題類似。故得下列之

〔算術解法〕 分針每行1分劃$\left(\text{即鐘面周圍之}\frac{1}{60}\right)$，短針祇行$\frac{1}{12}$分劃，當自m點出發時，分針原在時針之後5m分劃，故每隔1分鐘，分針即趕上$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$分劃，而使其與時針愈行愈近。待兩針重疊時，兩針之間已無距離。由此可知5m分劃中有若干個$\frac{11}{12}$分劃即需若干分鐘方可達兩針重疊之時刻，如此分析，即得算式

$$\frac{5m}{1-\frac{1}{12}}=\frac{5m}{\frac{11}{12}}=\frac{60}{11}m$$

答分針與時針重疊之時刻為 m 點後 $\frac{60}{11}m$ 分。

依次令 $m=1, 2, 3, \cdots, 11$，卽得自 1 點至 12 點間分針與時針重疊之時刻為：

1 點 $5\frac{5}{11}$ 分，　2 點 $10\frac{10}{11}$ 分，　3 點 $16\frac{4}{11}$ 分，

4 點 $21\frac{9}{11}$ 分，　5 點 $27\frac{3}{11}$ 分，　6 點 $32\frac{8}{11}$ 分，

7 點 $38\frac{2}{11}$ 分，　8 點 $43\frac{7}{11}$ 分，　9 點 $49\frac{1}{11}$ 分，

10點 $54\frac{6}{11}$ 分，　11點60分卽，12點。

問題 2　自1點至12點間，時鐘上時針與分針分居"1,""2,""3"，等字兩側，而與各該字有相等距離之時刻為何？

〔代數解法〕設所求各時刻之一為 m（m 為介於零與 12 間之正整數）點後之 x 分鐘，因分針每分鐘行鐘面上之一分劃，而時針只行 $\frac{1}{12}$ 分劃，故由 m 點鐘至 m 點鐘後之 x 分鐘，分針行 x 分劃，而時針行 $\frac{1}{12}x$ 分劃。吾人注意 x 及 $\frac{1}{12}x$ 兩式中之 x 應作不名數解而其係數 1 及 $\frac{1}{12}$ 則為名數，各以 1 分劃為單位。是時分針距"m"字有 $5m-x$ 分劃，時針距"m"字有 $\frac{1}{12}x$ 分劃，題云此二距離係相等之量，且在"m"字之兩側，故得立成方程式如下，

$$5m-x=\frac{1}{12}x$$

移項得 $$x+\frac{1}{12}x=5m$$

此式表示在 x 分劃上補足 $\frac{1}{12}x$ 分劃恰爲5m 分劃，更合併同類項得 $$\left(1+\frac{1}{12}\right)x=5m$$

如上所述， $1+\frac{1}{12}$ 乃時針與分針在一分鐘內所共行之分劃數。此量之 x 倍恰爲 5m 分劃，故 x 爲不名數，其値爲

$$x=\frac{5m}{1+\frac{1}{12}}=\frac{60}{13}m。$$

但 5m 分劃可按每份 $\left(1+\frac{1}{12}\right)$ 分劃均分爲 x 份，時分兩針行此一份需時一分鐘，故行此 x 份需時 x 分鐘，是以按照題義解釋，此時當爲 m 點鐘後 $\frac{60}{13}m$ 分鐘。

移項後之方程式，$x+\frac{1}{12}x=5m$，顯示時分兩針在 x 分鐘內當共行 5m 分劃，此一事實示其與吾人所習知之相向走路問題相髣髴。但時針與分針之方向原係相同，欲令其改爲時分兩針在 x 分鐘內相向而行，行共 5m 分劃之問題，祗有假設時針在此時間內倒行 $\frac{1}{12}x$ 分劃之一法，而此種假設恰爲題義所許可，因題云在 x 分鐘時，時針所至之處至"m"字之距離與分針所至之處至"m"字之距離固相等也。經如此分析後，遂得本題解法之關鍵，故知

〔算術解法〕 設時針倒行而速率不變，則由 m 點鐘起至兩針相會之時間當與由 m 點鐘起至兩針分居"m"字兩側且與之等距離之時間相同。兩針在 m 點鐘時相距 5m 分劃，每分鐘共行

$\left(1+\frac{1}{12}\right)$分割。若二者相向而行，則由 m 點鐘起至相會時刻之分鐘數為

$$5m\div\left(1+\frac{1}{12}\right)=5m\div\frac{13}{12}=\frac{60}{13}m$$

答此時為 m 點$\frac{60}{13}$m 分鐘。

依次命 m=1, 2, 3, …, 11 卽得自 1 點至12點間時針與分針分居"1","2","3",…… "11" 等字之兩側且與各該字有相等距離之時刻為

1 點 $4\frac{8}{13}$分，　2 點 $9\frac{3}{13}$分，　3 點$13\frac{11}{13}$分，

4 點$18\frac{6}{13}$分，　5 點$23\frac{1}{13}$分，　6 點$27\frac{9}{13}$分，

7 點$32\frac{4}{13}$分，　8 點$36\frac{12}{13}$分，　9 點$41\frac{7}{13}$分，

10點$46\frac{2}{13}$分，　11點$50\frac{10}{13}$分。

問題3　老夫婦年齡之和為 135，由夫之年齡之三倍減去婦之年齡，則較二人年齡之和多 10，問兩人之年齡各若干？

〔代數解法〕　設夫之年齡為 x 歲，則婦之年齡為(135－x)歲。今按題意以 1 歲(卽 1 年)為單位立方程式

$$3x-(135-x)=135+10,$$

去括號　$$3x-135+x=135+10,$$

移項得　$$3x+x=135+10+135,$$

卽　$$(3+1)x=135+10+135.$$

將 －135 移至右邊之意卽在兩邊各加 135，在右邊補足 135 歲

後適爲夫年之 $3+1=4$ 倍。此事提示吾人在算術解法中所應取之步驟。其理由至易說明，蓋所立方程式之左邊原爲夫年之三倍中欠缺婦年之一倍，今加入 135 歲，（即夫年之一倍及婦年之一倍）則在補足其中所缺婦年之一倍外並另加夫年之一倍，故合成夫年之 $3+1=4$ 倍矣。此 4 字乃一不名數，因之求得之

$$x=\frac{135+10+135}{3+1}=70$$

應以歲爲單位，故老人爲 70 歲，其婦爲 65 歲。

〔算術解法〕 題云 $135+10=145$ 歲比夫年之三倍少婦年之一倍。若加入婦年之一倍及夫年之一倍，即 135 歲，則 $145+135=280$ 歲，當爲夫年之 $3+1=4$ 倍，故求夫年之算式爲

$$(135+10+135)\div(3+1)=280\div4=70$$

$$135-70=65$$

答夫年70歲，婦年65歲。

問題 4 甲乙二人同時由南村向北出發，甲每小時行六里，乙每小時行七里，約定過若干小時以後，二人均照原速度每小時加快三里依原路回歸南村，計甲早到南村六分鐘，問由出發至約定回轉之時刻究係幾小時？

〔代數解法〕 設由出發至約定回轉之時刻相隔 x 小時，往時甲行 6x 里，乙行 7x 里，此中 x 視作不名數計算。回轉後二人速度每小時各增 3 里，甲需 $\frac{6x}{6+3}$ 小時回至南村，乙需 $\frac{7x}{7+3}$ 小時回至南村。題云甲早到 6 分鐘，即甲在回程上比乙少行 6 分鐘，故以小時爲各項之單位立成方程式

$$\frac{7x}{7+3}-\frac{6x}{6+3}=\frac{6}{60}.$$

合併同類項，得

$$\left(\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}\right)x=\frac{6}{60}.$$

按立式之初，x 原視作不名數，$\frac{6x}{6+3}$一項之單位爲小時，故$\frac{6}{6+3}$之單位仍係小時。考$\frac{6}{6+3}$之實際意義，乃甲往時行 1 小時之路程，回時所需之小時數。蓋將往時所行之 6 里分爲$\frac{6}{6+3}$等份，回時每份須行 1 小時也。同理，$\frac{7}{7+3}$乃乙往時行 1 小時之路程回時所需之小時數，而二者之差爲二人往時各行 1 小時，回時所差之小時數，上列方程式表示積此差之 x 倍，恰成$\frac{6}{60}$小時，故移乘作除後之

$$x=\frac{\frac{6}{60}}{\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}}=3$$

即係預先約定之小時數。

由此觀之，此題解法之要點，在先求二人往時各行 1 小時後回時所差之小時數，再以之除實際相差之時數，$\frac{6}{60}$，即得所求之時數，故得

〔算術解法〕設約定由出發至約定回轉之時刻爲 1 小時，則回程上甲行$\frac{6}{6+3}$小時，乙行$\frac{7}{7+3}$小時，故甲可早到$\left(\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}\right)$小時。今知甲早到 6 分鐘$=\frac{6}{60}$小時，故將$\frac{6}{60}$小時分爲每

份$\left(\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}\right)$小時之若干等份。此等份之個數卽所求之小時數也。其算式如次

$$\frac{6}{60}\div\left(\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}\right)=\frac{1}{10}\div\frac{1}{30}=3.$$

答由出發至約定回轉時刻爲3小時。

問題5　雞足比兎足多80，若二者隻數互換，則雞足比兎足少280，求原來雞兎之隻數。

〔代數解法〕　設兎有x隻，因兎有4足而雞只有2足，當雞兎足數相等時，雞數已爲兎數之$\frac{4}{2}=2$倍。今雞足比兎足多80，故雞數較兎數之2倍猶多$\frac{80}{2}=40$，卽雞有$\left(2x+\frac{80}{2}\right)$隻。二者隻數互換以後，則兎足有$4\left(2x+\frac{80}{2}\right)$，雞足2x。前者比後者多280，故以足爲單位卽可立成方程式

$$4\left(2x+\frac{80}{2}\right)=2x+280.$$

去括號，　$$4\times2x+4\times\frac{80}{2}=2x+280,$$

移項　$$4\times2x-2x=280-4\times\frac{80}{2},$$

卽　$$(4\times2-2)x=280-4\times\frac{80}{2}.$$

因雞數原比兎數之二倍多$\frac{80}{2}=40$，故互換以後兎數反較雞數之二倍多40矣。上式右邊減去$4\times\frac{80}{2}=160$之意乃將此多餘之40隻兎之足數160減去，亦卽取去兎40隻，使剩餘之兎數恰爲

雞數之2倍也。斯時兎足仍比雞足多 $280-160=120$。然每有2兎即有1雞，2兎之足數，$4\times2=8$，比一雞之足數多 $4\times2-2=6$。由是可知上式右邊及 x 之係數皆以足為單位，因之移乘作除求得

$$x=\frac{280-4\times\frac{80}{2}}{4\times2-2}=20$$

乃一不名數，表示足數120按每份6足而均分之份數，每份中含有兩兎一雞，故此時雞數與份數相等，兎數為份數之二倍。更將前此取去之40隻兎加入，即知此時雞有20隻，兎有 $2\times20+40=80$ 隻，此係二者隻數互換以後之情形，至於原有之雞數則為80，而兎數則為20。

經此分析，算術解法之要點已豁然自現，茲更述如下。

〔算術解法〕 雞數比兎數之 $\frac{4}{2}=2$ 倍猶多 $\frac{80}{2}=40$，故互換以後兎數比雞數之2倍多40。今將此40隻兎取去，則其數適為雞數之2倍又其足數亦隨之減少 $4\times40=160$，故此時之兎足僅較雞足多 $280-160=120$。是時每有兩兎即有一雞，而兩兎比一雞多 $4\times2-2=6$ 足。果以兩兎一雞為一羣，而將所多之120兎足按羣分配之，即得

$$\frac{280-4\times\frac{80}{2}}{4\times2-2}=\frac{280-160}{6}=\frac{120}{6}=20$$

羣。每羣中有一雞，故雞數為20，而兎數則為

$$2\times20+\frac{80}{2}=40+40=80。$$

在互換以前雞兎之隻數，適與此相反，故

答原來有雞80隻，兎20隻。

問題6 在兔跳4步所需時間內，狗僅跳3步，而狗跳2步之距離則等於兔跳3步之距離。今兔先跳350步，狗方追去，問狗須跳若干步方可將兔追及。

〔代數解法〕 吾人以兔跳一步之長爲單位距離，而稱之曰"兔步"，又以兔跳4步，即狗跳3步之時間爲單位時間。

設狗須跳過x"兔步"方可將兔追及。因1"狗步"之長等於1"兔步"之$\frac{3}{2}$，乃知此x"兔步"等於$x \div \frac{3}{2} = \frac{2}{3}x$"狗步"之長。狗在每1單位時間內可跳3步，故狗跳此$\frac{2}{3}x$步所需時間爲$\frac{2}{3}x \div 3 = \frac{2}{9}x$個單位時間。在同一時間內，兔可跳$\frac{2}{9}x \times 4 = \frac{8}{9}x$步。題云狗出發時原在兔後350"兔步"，故自狗出發以迄其追及兔時狗應多跳過350個"兔步"。據此即得立成方程式

$$x - \frac{\frac{2}{3}x}{3} \times 4 = 350$$

即

$$\left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{3} \times 4\right) x = 350$$

在所立方程式中，各項俱以"兔步"爲距離之單位。吾人可視上式括號內兩項各以"兔步"爲單位而視以x爲不名數。由此推求算術解法之關鍵端在解釋此括號內兩項差之實際意義。容於該法中詳述之。

將上式中x之係數移乘作除而得

$$x = \frac{350}{1 - \frac{\frac{2}{3}}{3} \times 4} = 3150,$$

即當狗追及兔時，彼已跳過 3150 "兔步"矣。此距離等於 $3150 \div \frac{3}{2} = 3150 \times \frac{2}{3} = 2100$ 個"狗步"之長，是以狗須跳過 2100 步方可追及先行之兔。

〔算術解法〕 狗每跳 1 "兔步"之長等於其自身跳躍 1 步之長之 $\frac{2}{3}$。狗跳 3 步需 1 單位時間，故跳過 $\frac{2}{3}$ 步需時 $\frac{2}{3} \div 3 = \frac{2}{9}$ 單位時間。在此時間內兔可跳過 $\frac{2}{3} \div 3 \times 4 = \frac{8}{9}$ "兔步"；然則狗每跳 1 "兔步"即可與兔接近 $1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$ "兔步"。今知狗出發時係在兔後 350 "兔步"。此係 $\frac{1}{9}$ "兔步"之 $350 \div \frac{1}{9} = 3150$ 倍，每有 1 倍，狗跳 1 "兔步"，故當二者之間距離減至 0 時，即當狗追及兔時，狗已跳過 3150 "兔步"矣。此 3150 "兔步"又可化爲 $3150 \div \frac{3}{2} = 2100$ "狗步"。故得算式如下：

$$\frac{350}{1-\frac{\frac{2}{3}}{3}\times 4} \div \frac{3}{2} = \frac{350}{1-\frac{8}{9}} \times \frac{2}{3} = 350 \times 9 \times \frac{2}{3}$$

$$= 3150 \times \frac{2}{3} = 2100$$

答狗須跳2100步方可將兔追及。

問題 7. 在闊一百五十尺長二百二十八尺之地基內，有長三十尺闊十四尺深八尺之池六口，今如以基地內之土，將此池填滿，並使全基地各處等高，問全基地應低下幾尺？

〔代數解法〕 設全基地低下 x 呎，基地面積爲 $160 \times 228 - 30$

$\times 15 = 33750$ 平方尺，故可掘起之土有 $33750x$ 立方尺，題云此土填入池中，池適填滿與四周基地等高，故此土之體積當與掘土以後之池之體積 $30\times 15(8-x)=450(8-x)$ 立方尺相等，因得方程式

$$(150\times 228-15\times 30)x=15\times 30(8-x).$$

即 $$150\times 228x-15\times 30x=15\times 30\times 8-15\times 30x.$$

化簡得

$$150\times 228x=15\times 30\times 8,$$

此式表示掘起之土之體積及池口深 x 尺之體積之和當與此池原來之容積相等，算術解法卽當着眼於此點。

移乘作除，得

$$x=\frac{15\times 30\times 8}{150\times 228}=\frac{2}{19},$$

故此基地應低下 $\frac{2}{19}$ 尺。

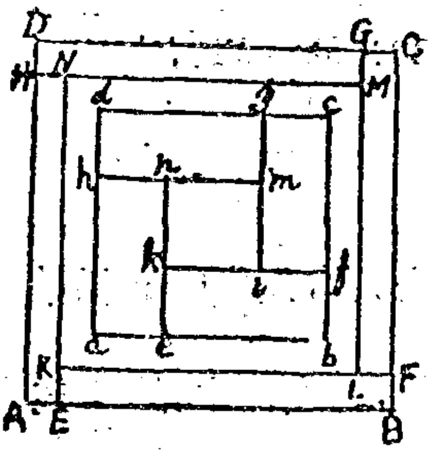
〔算術解法〕 假設此基地中並無池沼，原係一片平原，而普遍掘下若干尺，則所掘起之土之體積須與題中所云之池之容積相等方能符合題意。池之容積爲 $15\times 30\times 8=3600$ 立方尺，而基地之面積爲 $150\times 228=34200$ 平方尺，故應掘下之尺數當爲

$$\frac{15\times 30\times 8}{150\times 228}=\frac{3600}{34200}=\frac{2}{19}.$$

答此地基應低下 $\frac{2}{19}$ 尺.

問題 8　兵士一隊排成空心方陣，共有四層，如將外層每邊減少16人，卽可排成另一空心方陣，共有八層。試求此隊兵士之人數。

〔代數解法〕 設全隊有 x 人。試作圖 ABCD 表示此隊士兵第一次排成空心方陣之情形。吾人可將其分成四個全等實心長方陣



AENH, BFKE, CGDF, 及 DHMG, 各含 $\frac{x}{4}$ 人。因原排空心方陣厚四層，故上列各長方陣較短之一邊計有 4 人，故其較長之一邊應有 $\frac{x}{4}\div 4=\frac{x}{16}$ 人。由此可知原排空心方陣最外層每邊必有 $\frac{x}{16}+4$ 人。第二次改排之空心方陣之情形則如圖 abcd 所示亦可分成四個全等實心長方陣，aenh, bfke, cglf 及 dhmg，亦各含 $\frac{x}{4}$ 人。因此空心方陣厚八層，故上列各長方陣之短邊有 8 人，長邊有 $\frac{x}{4}\div 8=\frac{x}{32}$ 人。由此可知改排後之空心方陣每邊應有 $\frac{x}{32}+8$ 人，

題云，第一空心方陣最外層每邊人數較第二空心方陣最外層每邊人數多 16 人，故可列成方程式

$$\frac{x}{16}+4-\left(\frac{x}{32}+8\right)=16,$$

即

$$\frac{x}{16}+4-\frac{x}{32}-8=16.$$

移項並合併同類項即得

$$\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)x=16+8-4.$$

此式右邊之量與左邊之 x 均指人數，即二者俱以一人為單位。而 x 之係數則為不名數，其意義容於算術解法中言之，將此係數移乘作除，則得

$$x=\frac{16+8-4}{\frac{1}{16}-\frac{1}{32}}=20\times 32=640,$$

故此隊士兵有640人。

〔算術解法〕本解之要旨端在說明上列方程式中x係數$\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$與右邊人數之實際意義。如前所述，在附圖中，實心長方陣AENH之AH邊上所站人數乃全隊人數之$\frac{1}{4}$之$\frac{1}{4}$即$\frac{1}{16}$，實心長方陣aenh之ah邊上所站人數乃全隊人數之$\frac{1}{4}$之$\frac{1}{8}$，即$\frac{1}{32}$。然則AH邊所站人數當較ah邊所站人數多全隊人數之$\frac{1}{16}-\frac{1}{32}=\frac{1}{32}$矣。

再從另一方面言之，題云AD邊所站人數原較ad邊所站人數多16人。今自前者減去4人而成AH邊，自後者減去8人而成ah邊，即自AD邊所減人數較自ad邊所減人數少$8-4=4$。故其結果乃知AH邊當較ah邊多站$16+(8-4)=16+4=20$人。

綜上所論，可知全隊人數之$\frac{1}{32}$當適為20人，故全隊人數為$20\div\frac{1}{32}=640$人。此解法之完備算式乃得立成如下：

$$\frac{16+(8-4)}{\frac{\frac{1}{4}}{4}-\frac{\frac{1}{4}}{8}}=\frac{20}{\frac{1}{32}}=640.$$

此式與由前法運算而得者全同，故結果亦相若。

答全隊士兵有640人。

問題 9 在與鐵路平行之公路上，甲步行，乙乘脚踏車，二人同方向前進，甲每小時行三哩，乙每小時行十五哩。又有火車一列從二人之後向前疾駛，該火車在十五秒鐘內追過甲，在四十五秒鐘內追過乙。問火車之速度爲每小時若干哩？車身長幾呎？（1 哩 = 5280呎）

〔代數解法〕 設火車之速度爲每小時 x 哩。自火車頭追及甲至車尾超越甲需時15秒鐘 $=\frac{15}{60\times60}=\frac{1}{240}$ 小時，在此時間內火車前進 $\frac{1}{240}x$ 哩，而甲僅前進 $\frac{1}{240}\cdot3$ 哩，二者之差 $\left(\frac{1}{240}x-\frac{1}{240}\cdot3\right)$ 哩乃車身之長。同理，就火車追過乙之例而言，又知車身之長等於 $\left(\frac{1}{80}x-\frac{1}{80}\cdot15\right)$ 哩。故得方程式

$$\frac{1}{80}x-\frac{1}{80}\cdot15=\frac{1}{240}x-\frac{1}{240}\cdot3,$$

移項得 $$\frac{1}{80}x-\frac{1}{240}x=\frac{1}{80}\cdot15-\frac{1}{240}\cdot3,$$

即 $$\left(\frac{1}{80}-\frac{1}{240}\right)x=\frac{1}{80}\cdot15-\frac{1}{240}\cdot3,$$

其中各項俱以哩爲單位。

此式指示火車在 $\left(\frac{1}{80}-\frac{1}{240}\right)$ 小時內所行之距離當與乙在 $\frac{1}{80}$ 小時內前進之哩數減去甲在 $\frac{1}{240}$ 小時內前進哩數之差相等。此點乃算術解法之關鍵，其理由容於該法中以圖解顯示之。在所立方程式中，x 之係數原視爲不名數，故移乘作除後之

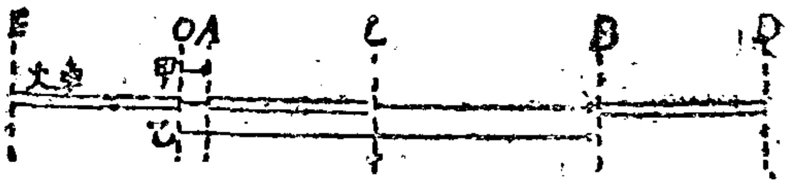
$$x=\frac{\frac{1}{80}\cdot 15-\frac{1}{240}\cdot 3}{\frac{1}{80}-\frac{1}{240}}=21$$

逕以哩爲單位，即火車之速度爲每小時行21哩。

又車身之長 $=\frac{1}{240}x-\frac{1}{240}\cdot 3=\frac{21}{240}-\frac{3}{240}=\frac{3}{40}$ 哩 $=396$ 呎。

由上述之代數解法所提示，得

〔算術解法〕 火車追逐甲乙二人之處，題中並未規定，故可隨意假定；爲簡便計，設甲乙二人及火車俱由下圖中同一地點O出發，同向而行。在15秒鐘 $=\frac{1}{240}$ 小時內甲所行之路爲 $OA=\frac{1}{240}\cdot 3$ 哩，



火車頭所行之路爲OC；又在45秒鐘 $=\frac{1}{80}$ 小時內乙所行之路爲 $OB=\frac{1}{80}\cdot 15$ 哩，火車頭所行之路爲OD。AC及BD皆係車身之長，由圖易知 $CD=AB=OB-OA$，該式表示火車頭在 $\frac{1}{80}-\frac{1}{240}=\frac{1}{120}$ 小時內所行之路CD等於乙在 $\frac{1}{80}$ 小時內所行之路OB減去甲在 $\frac{1}{240}$ 小時內所行之路OA，即 $\frac{1}{80}\cdot 15-\frac{1}{240}\cdot 3=\frac{21}{120}$ 哩。然則火車速度當爲每小時行 $\frac{21}{120}\div\frac{1}{120}=21$ 哩矣。茲再將本解法之完備算式列後

$$\left(\frac{45}{60\times 60}\times 15-\frac{15}{60\times 60}\times 3\right)\div\left(\frac{45}{60\times 60}-\frac{15}{60\times 60}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{80}\times 15-\frac{1}{240}\times 3\right)\div\left(\frac{1}{80}-\frac{1}{240}\right)$$

$$=\frac{21}{120}\div\frac{1}{120}=21。$$

至於車身之長則爲 AC＝OC－OA，故以哩爲單位長時，其算式爲

$$\frac{1}{240}\times 21-\frac{1}{240}\times 3=\frac{1}{240}\times 18=\frac{3}{40}$$

因 1哩＝5280 呎，故其長爲$\frac{3}{40}\times 5280=396$ 呎。

答火車速度每小時21哩。

火車車身長 396 呎。

＊　＊　＊　＊　＊

上列各題之代數解法皆用一元一次方程式，若題義繁複而晦澀，則常設數文字代表所求諸未知量或與之相關之量，而按題中各層意義逐一立二或多元一次方程式以表示之。將所得諸方程式聯立解之卽得所求諸量。由此推求算術解法固必較難，玆更舉若干題例以供讀者硏討。

問題10　雇工運米，各人所運袋數相同。若多雇四人，則各人可少運一袋；若少雇 3 人則各人須多運一袋。問共運米若干袋，雇工若干人？

〔代數解法〕　設雇工 x 人，每人運米 y 袋，則所運之米共有 xy 袋；若多雇 4 人，卽共有 x＋4 人，每人可較前少運 1 袋，卽各運 y－1 袋，則所運之米共有 (x＋4)(y－1) 袋；若少雇 3 人，卽只

有 $x-3$ 人，每人須多運 1 袋，即各運 $y+1$ 袋，則所運之米共有 $(x-3)(y+1)$ 袋。因所運之袋數，前後相同，故可立成兩聯立方程式如下

$$(x+4)(y-1)=xy \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(x-3)(y+1)=xy \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

上列二者於展開，移項，並消去 xy 項後即成兩聯立之二元一次方程式

$$4y=x+4 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$3y=x-3 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

此二者表示原定每人所運袋數之 4 倍較原有人數多 4，而其 3 倍則較後者少 3。故其 $4-3=1$ 倍，即每人所運袋數適為 $4+3=7$，而由(3)減(4)之結果

$$y=4-(-3)=7$$

恰與此意相符。上述各點乃算術解法所必須之要義，當於該法就事實釋明其意。

原雇人數可按(3)式求得其為

$$x=4y-4=4\times7-4=24。$$

至於所運米之袋數則為

$$xy=24\times7=168。$$

〔算術解法〕 按本題第一假定，原雇工人各於自身所應運之米中取出 1 袋照此時各人所運袋數平均分配與新雇 4 人運之，適盡無餘，即此 4 人實際運輸之袋數當與原有人數相等。然則此 4 人果各多運 1 袋，因而共運原定每人所運袋數之 4 倍，豈非恰較原有人數多 4 乎？此即前法(3)式之涵義也。

更按本題第二假定，將減雇 3 人所應運之米平均分配與其餘

各人，應各多運1袋，而亦恰盡無餘，故原定每人所運袋數之3倍適較原有人數少3，此卽前法(4)式之涵義也。

由上述兩事實，可知原定每人所運袋數之 4－3＝1 倍應恰為 4＋3＝7，故其算式為

$$(4+3)\div(4-3)=7。$$

據上述本題第一假定之意義，原有人數當比原定每人所運袋數之4倍少4，故求原有人數之算式為

$$7\times4-4=28-4=24，$$

此24人旣各運米7袋，故共運米 7×24＝168 袋。

答共運米168袋，雇工24人。

問題11 在河流上下游河邊有上下兩村，相距二公里。某日有甲船從上村，又有乙船從下村同時相向航行，二船相會於兩村中央之處。相會後甲船到達下村，乙船到達上村時，並不停留仍循原路回航，而二船又在離中央半公里下游之處相會，第二次相會離第一次相會之時間相隔一小時又二十分鐘。問此河流之速度為每小時幾公里？

〔代數解法〕 設河流之速度為每小時 x 公里，本題所求之答案雖僅此一個，但方程式不易排列。按甲乙二船同時啟椗會於兩村之中央，故二船又必同時到達目的地。在相會後，甲續行1公里而達下村；當甲由下村回轉時，乙適由上村折返，此次二船會於中央下游半公里之處，故甲在回程上祇行半公里。前後兩次由出發至相會之時間應相等，卽各為 $1\frac{20}{60}\div2=\frac{2}{3}$ 小時，蓋此時間乃兩船速度和除兩村距離之商也。今更設甲船在靜水之速度為每小時 y 公里，則按兩次相會前，甲船順流與逆流之行程，可立二方程式

$$\frac{2}{3}(y+x)=1,$$

$$\frac{2}{3}(y-x)=\frac{1}{2}.$$

是卽
$$y+x=\frac{1}{\frac{2}{3}},$$

$$y-x=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}.$$

甲船之速度非題所求，故可將此兩方程式相減而得

$$2x=\frac{1}{\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}.$$

此式表示水流速度之兩倍當與甲船順流速度與逆流速度之差相等，解之卽得水流之速度

$$x=\frac{3}{8},$$

卽每小時流 $\frac{3}{8}$ 公里。準此乃得

〔算術解法〕 甲乙兩船兩次出發至相會之時間及在此時間內甲所行之路程俱如上述，茲不復贅。由此可知甲順流之速度爲每小時 $1\div\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$ 公里，逆流之速度爲每小時 $\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ 公里。

按甲船逆流之速度乃其靜水之速度減水流速度之差，若加入水流速度之兩倍則成其靜水之速度與水流速度之和，是卽其順流之

速度也。故其順流與逆流兩速度之差當爲水流速度之兩倍。故求水流速度之算式爲

$$\left[1\div\left(1\frac{20}{60}\div2\right)-\frac{1}{2}\div\left(1\frac{20}{60}\div2\right)\right]\div2$$

$$=\left[1\div\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}\right]\div2$$

$$=\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right]\div2$$

$$=\frac{3}{4}\div2$$

$$=\frac{3}{8}.$$

答水流之速度爲每小時$\frac{3}{8}$公里。

問題12　有一牧場，其草繼續長成，牛二十七頭食之六星期可盡，又牛二十三頭食之九星期可盡。如祗有牛二十一頭，問須星期方可食盡？

〔代數解法〕　設此牧場之草料可共牛 21 頭食 x 星期而盡，以牛每頭每星期所食之草料爲單位。更設每星期長成之草料爲此單位之 y 倍，即可供給牛 y 頭作一星期之食料也。

按上述之假設，可知牧場原有之草料在題中所提及之三種情形當順次爲 $27\times6-6y$，$23\times9-9y$ 及 $21x-xy$。此三者必須相等，否則本題爲不可解，故得方程式

$$27\times6-6y=23\times9-9y=21x-xy,$$

其中各項俱以牛每頭每星期所食之草料爲單位。

取上列方程式之第一第二兩節而致

$$27\times6-6y=23\times9-9y,$$

移項得

$$9y-6y=23\times9-27\times6,$$

即 $$(9-6)y=23\times9-27\times6。$$

此方程式右邊第一項言此牧場可供牛23頭食9星期，而第二項言其祇可供牛27頭食6星期，二者相差$23\times9-27\times6=207-162=45$頭牛一星期之草料。是蓋因多一星期，則繼續長成之草可多供給牛y頭一星期之食料，今積 $9-6=3$ 星期而有此差，故移乘作除

而得 $$y=\frac{23\times9-27\times6}{9-6}=\frac{45}{3}=15。$$

即每星期長成之草料可供牛15頭一星期之食料。

次取所立方程式之第二第三兩節而成

$$21x-xy=23\times9-9y。$$

以 $y=15$ 代入右邊，可知牧場原有草料有 $23\times9-9\times15=207-135=72$ 個單位，即可供給牛72頭作一星期之食料。以 $y=15$ 代入左邊得 $21x-15x=6x$，意云此一羣牛中，有15頭食新長草料，祇有 $21-15=6$ 頭食原有草料，而此6頭在x星期恰將原有草料食盡，故可食之星期數為

$$(21-15)x=23\times9-9\times15$$

$$x=\frac{23\times9-9\times15}{21-15}=\frac{72}{6}=12。$$

〔算術解法〕 牛27頭食6星期之草料等於 $27\times6=162$ 頭食一星期之草料；又牛23頭食9星期之草料等於 $23\times9=207$ 頭食一星期之草料。同一牧場，6星期食盡與9星期食盡竟相差牛 $207-162=45$ 頭食一星期之草料。可知多出之草料乃在後 $9-6=3$ 星期中繼續長成，故每星期所長新草等於牛 $45\div3=15$ 頭一

星期之食料。

除繼續長成之草料外，此牧場原有草料可供牛 $23\times9-15\times9=207-135=72$ 頭食一星期。今令牛21頭入此牧場，其中15頭食繼續長成之新草料，祇有 $21-15=6$ 頭食原有草料，故此牧場之草料可於 $72\div6=12$ 星期中食盡。

茲將完備之算式列後：

$$\left(23-\frac{23\times9-27\times6}{9-6}\right)\times9\div\left(21-\frac{23\times9-27\times6}{9-6}\right)$$

$$=\left(23-\frac{207-162}{3}\right)\times9\div\left(21-\frac{207-162}{3}\right)$$

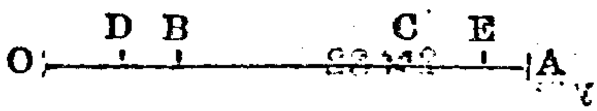
$$=(23-15)\times9\div(21-15)$$

$$=72\div6=12。$$

答此牧場之草料供牛21頭食12星期而盡。

問題13　六人同時起程，前往距此32里之某地遊覽，合僱汽車一輛，但此車僅容三人，乃先由三人乘車，三人步行，至中途後，乘車三人下車步行，將汽車開回迎接步行三人登車。六人須同時到達某地。若汽車每小時駛行40里，步行者每小時各行8里，試求(1)先乘車之三人應在何時下車？(2)先步行之三人應在何時登車？(3)各人步行若干里？(4)汽車共駛行若干里？

〔代數解法〕　為行文便利計，姑稱先步行之三人曰甲，先乘汽車之三人曰乙，時間則自出發之時刻算起。



於上圖中，設六人同由 O 處出發，其目的地為 A，先乘車之乙於 x 小時在 C 處下車步行，開回之汽車於 y 小時與先步行之甲相遇於 B，甲即於該處登車。當乙在 C 處下車時汽車已行 40x 里，

是時甲已步行8x里至D處而與汽車相距 $DC=40x-8x=(40-8)x$ 里。自此時起以至甲與折回之汽車相遇時止，即在此 $y-x$ 小時內實為一相遇問題，故得方程式

$$(40+8)(y-x)=(40-8)x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

當汽車載甲由B前進時乙已步行 $8(y-x)$ 里而至E處與汽車相距 $BE=OC+CE-OB=40x+8(y-x)-8y=(40-8)x$ 里。乙在前，而汽車在後，同向前進須於同一時刻到達目的地A，故自此以後又為一追及問題。汽車由B至A須行 $BA=OA-OB=32-8y$ 里，需耗 $\frac{32-8y}{40}$ 小時，故又得方程式

$$(40-8)\frac{32-8y}{40}=(40-8)x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)化簡，得 $5x-3y=0$

由(2)化簡，得 $5x+3y=4$

聯立解之，得 $x=\frac{3}{5}$, $y=1$。

故乙於 $\frac{3}{5}$ 小時下車，甲於1小時登車。甲行 $OB=8y=8\times1=8$ 里，乙行 $CA=32-40x=32-40\times\frac{3}{5}=32-24=8$ 里，汽車共行 $OA+2BC=32+2\times16=64$ 里。

〔算術解法〕 由前法方程式(1)與(2)解出未知量時若保留已知各量，即得

$$y=\frac{2\times32}{2\times8+8+40}.$$

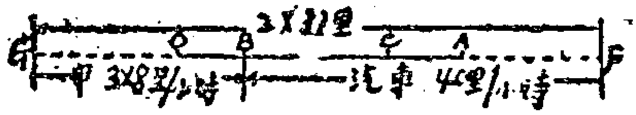
欲釋明此式之意義，須知甲與乙之速率相同，且汽車之速率始終未變，故甲乙步行之距離亦必相等，即在上圖中 $OB=CA$；蓋若不然，則步行路程較短者必先達目的地而與題意不合矣。

由起程時至開回之汽車與甲相遇時止，汽車所行路程為 OC+CB，甲所行路程為 OB；二者之和為 OC+CE+OB=2(OC)。在每一小時內汽車與甲共行 8+40=48 里，故所需時間為 $\frac{2(OC)}{8+40}$ 小時。但以不知 OC 之長度，途不能得解。於此若細察表 y 之算式與 $\frac{2(OC)}{8+40}$ 之相異處，卽可悟得解法之關鍵當如下述。蓋表示 y 之式可書作

$$y=\frac{2\times 32}{(8+2\times 8)+40},$$

若以 32，卽 OA，代 OC，8+2×8 代 8 卽可得解。以 OA 代 OC 之用意在假設甲多行 2·CA 之距離，以 8+2×8 代 8 之用意在假設甲之速度每小時增加 2×8 里。因 CA=OB，乃有 OB+2CA=3(OB)。又 8+2×8=3×8，甲所行距離與其速度若均三倍於前，其所需時間自亦與前無殊。

綜上所論，可知在算術解法中為便於推想計，吾人宜將此問題改成一相遇問題，圖示如下：



圖中 OA 部分與前圖同，GO=2CA=2(OB)，CF=OC。設甲與汽車同時由 G 與 F 相向而行，而相遇於 B；並設甲每小時行 3×8 里，汽車之速度則如題示。由此圖示固不難求得甲與汽車相遇之時刻為在出發後之

$$\frac{2\times 32}{3\times 8+40}=\frac{64}{24+40}=\frac{64}{64}=1$$

小時也。

旣知甲步行1小時，於前圖中，易知 $OB=CA=8\times1=8$ 里，$OC=OA-CA=32-8=24$ 里，此乃乙下車前汽車之行程，故乙當在出發後之 $\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$ 小時下車，而其算式爲

$$\frac{32-8\times1}{40}=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}.$$

至於甲乙與汽車所行里數俱如前法所云，固甚易求之也。

答 (1) 先乘車之三人應在出發後 $\frac{3}{5}$ 小時下車。

(2) 先步行之三人應在出發後1小時登車。

(3) 各人步行8里。

(4) 汽車共駛行64里。

問題14 甲乙丙三牧場之面積各爲5，6，8市畝。場中草長相同，生長速度亦同。甲場之草，可供牛75頭12日之食料；乙場之草，可供牛81頭15日之食料。問丙場之草可供牛若干頭作18日之食料？

〔代數解法〕 吾人以牛每頭每日之食料爲草料之單位。設每畝原有草料爲 y 個單位，每市畝每日新長草料有 z 個單位，又設丙場草料可供牛 x 頭食18日。

就甲場言之，其原有草料應有 5y 個單位，其在12日間新長草料應有 $12\times5z$ 個單位，因在此12日內本場可供牛75頭之食料，故其原有草料與新長成者共有 75×12 個單位。據此，即可立方程式

$$5y+12\times5z=75\times12 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

仿此，就乙，丙兩牧場而言，得立兩方程式

$$6y+15\times6z=81\times15 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$8y+18\times 8z=18x \cdots\cdots(3)$$

以3乘(1)之兩邊得 $3\times 5y+3\times 12\times 5z=3\times 75\times 12 \cdots(4)$

以2乘(2)之兩邊得 $2\times 6y+2\times 15\times 6z=2\times 81\times 15 \cdots(5)$

(4)式減(5)式,並解出y,得

$$y=\frac{3\times 75\times 12-2\times 81\times 15}{3\times 5-2\times 6}=90 \cdots\cdots(6)$$

仿此,解出z,卽 $z=\frac{5\times 81\times 15-6\times 75\times 12}{5\times 15\times 6-6\times 12\times 5}=7.5 \cdots\cdots(7)$

將y,z之値代入(3)中,卽可解得

$$x=\frac{8\times 90+18\times 8\times 7.5}{18}=100 \cdots\cdots(8)$$

故知丙場草料可供牛100頭食18日而盡。

〔算術解法〕 按上述代數解法之程序,卽知本題算術解法之關鍵在先求得每市畝原有草料之數量與每市畝每日新長草料之數量。欲求前者須予(6)式以適當之解釋;欲求後者則須正確解釋(7)式之意義。

茲就(6)式言之,因甲場在12日內新長草料乃每市畝每日新長草料之 12×5 倍。乙場在15日內新長草料乃每市畝每日新長草料之 15×6 倍。此二者之比爲 $\frac{12\times 5}{15\times 6}=\frac{2}{3}$,故甲場在12日內新長草料之3倍當與乙場在15日內新長草料之2倍相等。若設甲場擴大爲 $3\times 5=15$ 市畝,乙場擴大爲 $2\times 6=12$ 市畝,則前者(原有草料+12日內新長草料)與後者(原有草料+15日內新長草料)之差,卽爲前者與後者原有草料之差。此差恰爲每市畝原有草料之 $3\times 5-2\times 6=15-12=3$ 倍。題設甲場可供牛75頭食12日,故其原有草料與12日內之新長草料共有 75×12 個單位;乙場可供牛

81頭食15日，故其原有草料與15日內新長草料共有 81×15 個單位。果如所設，即將甲場改為15市畝，乙場改為12市畝，則上述之差為 $75\times12\times3-81\times5\times2=2700-2430=270$ 個單位。故每市畝原有草料之數量為

$$\frac{75\times12\times3-81\times15\times2}{3\times5-2\times6}=\frac{2700-2430}{15-12}$$

$$=\frac{270}{3}=90$$

個單位，此即(6)式之意義也。

(7)式之解釋與(6)式者相仿。因甲，乙兩場原有草料之比為 $\frac{5}{6}$，若設甲，乙兩場均擴大為 $6\times5=30$ 市畝，則乙場在15日內新長草料與甲場在12日內新長草料之差為每市畝每日新長草料之 $15\times5\times6-12\times6\times5=450-360=90$ 倍。果如所設，若甲乙兩場均為30市畝，則上述之差應合 $5\times81\times15-6\times75\times12=6075-5400=675$ 個單位。故每市畝每日新長草料之數量必為

$$\frac{5\times81\times15-6\times75\times12}{15\times5\times6-12\times6\times5}=\frac{6075-5400}{450-360}$$

$$=\frac{675}{90}=7.5$$

個單位。

最後，就丙場言之，其原有草料為每市畝原有草料之8倍，即 $8\times90=720$ 個單位；其在18日內新長草料為每市畝每日新長草料之 18×8 倍，即 $18\times8\times7.5=1080$ 個單位。此二者之和為 $720+1080=1800$ 個單位，該項草料顯為丙場在18日內所供牛數之18倍，故此場在18日內可供牛

$$\frac{8\times90+18\times8\times7.5}{18}=\frac{720+1080}{18}$$

$$=\frac{1800}{18}=100$$

頭之食料。

綜上所論，乃得本題之完備算式如下

$$\frac{8\times\frac{75\times12\times3-81\times15\times2}{3\times5-2\times6}+18\times8\times\frac{5\times81\times15-6\times75\times12}{15\times5\times6-12\times6\times5}}{18}$$

[illegible]$=100$。

答丙場在18日內可供牛100頭之食料。

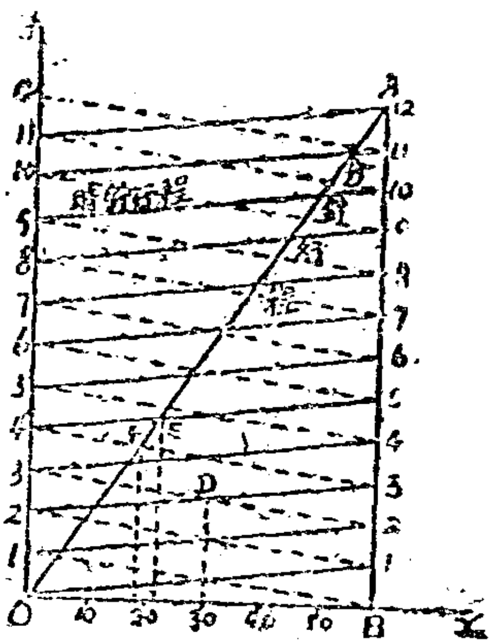
第二章　算術應用問題之圖解法

表示算術應用問題涵義之關係必爲題中二量之一次方程式，形如 $y=mx$，或 $y=mx+b$，前已言之。若用直角坐標系，以點之兩坐標分別指示各量之數值，且此諸量若均爲類似時間，距離等連續量而非人數，年齡等間斷之量，則此等一次方程式之圖示必係直線。僅須預知所論二量之二特殊關係，標出兩點，并以直尺過該兩點描一直線即得，其理甚顯，雖初學亦易了解。問題所求之量往往爲兩直線圖示交點之某一坐標，作圖果甚精密，不難就圖讀出此量之三位或四位有效數字。此法固導源於代數與前章所論密切連繫，然亦有與之似不相涉，或遠較簡捷者，且均饒有興趣，堪供研討。試取此法與前章並觀，頗有相互發明之處，大可增進吾人對於問題瞭解之程度，故仍就前章諸問題中，擇其若干，圖解如次。

※　※　※　※　※

<u>問題15</u>　見問題1（第5頁）與問題2。（第7頁）

〔圖解法〕　作長方形 OBAC，以 O 爲原點，OB 爲橫軸，OC爲縱軸。首將 OB 均分爲 60 等份，以 OB 之長表 60 分鐘，由 O 至此線段上一點之距離表 m 點鐘與 m+1 點鐘間某一時刻之分鐘數。次將 OC 亦均分爲 60 等份，表鐘面分劃數；并於 5，10，15，……等份處誌以 1，2，3，……等字，表鐘面小時數。在由某一點鐘至次一點鐘之時間內，時針衹走過鐘面一週之 $\frac{1}{12}$，即5分劃，例如由表示某一點



鐘之數碼行至次一較大之數碼處。故圖中 O1，12，23，…，等直線可表時針之行程。在由 0 分至60分之時間內，卽在 1 小時內，分針恰繞行鐘面一週，故其行程可以斜線 OA 表之。如是則在此等表示時分兩針行程諸直線上之點均可表示時間，例如 23 直線上之 D 點卽表示 2 點 30 分鐘。

自 1 點至12點間時針與分針重疊之時刻乃 OA 與 O1，12，23，……等直線諸交點所表示之時刻。例如在 4 點鐘與 5 點鐘間兩針重疊之時刻，卽爲 E 點所表示者，亦卽 4 點 21.8 分(略値)。蓋正在 4 點鐘時，時針原在分針前 $4\times5=20$ 分鐘，故時針行程始自 OC 上之 "4" 字，而分針行程則始自 "O" 字。當二針重疊時，二者適行至同一分劃處，故該時刻卽以 45 與 OA 兩行程之交點表之也。利用此圖，可讀出兩針各重疊時刻如下：

1 點 5.5 分；　2 點 10.9 分；　3 點 16.4 分；　4 點 21.8 分；
5 點 27.3 分；　6 點 32.7 分；　7 點 38.2 分；　8 點 43.6 分；
9 點 49.1 分；　10 點 54.5 分；12 點。

此等答案與前此算出者幾相吻合，其誤差乃圖解法所應有，固不足病也。

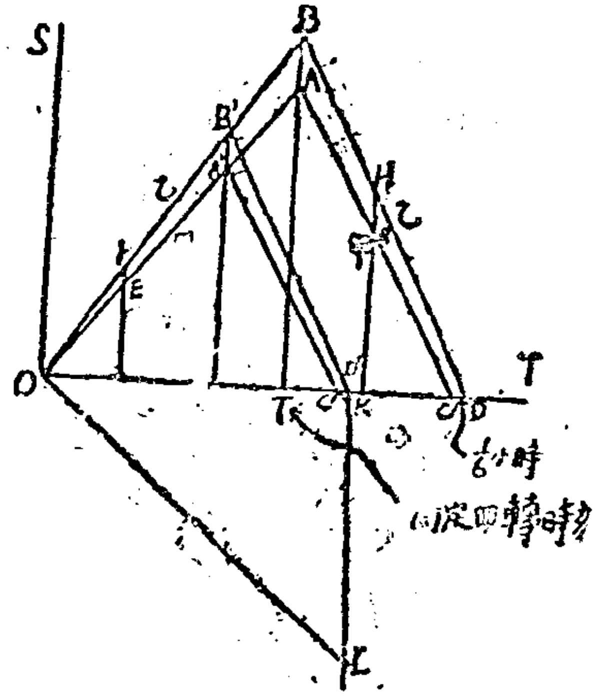
於問題 2 中，吾人曾言欲求時針分居鐘面上 "1，" "2，" "3" ……等字兩側且與各該字有相等距離之時刻須假設時針以原速率倒行，故其假定之行程須以圖中 1B，21，32，……等虛線表之，而所求諸時刻則爲 OA 與此諸虛線交點所表示者。例如在 4 點鐘與 5 鐘點間所求之時刻卽以 43 與 OA 兩行程之交點 F 表之，卽約爲 4 點 18.5 分。所求其他時刻亦可讀出如下：

1 點 5.6 分；　2 點9.2 分；　3 點 13.8 分；　4 點 18.5 分；
5 點 23.1 分；　6 點 27.9 分：　7 點 32.3 分；　8 點 36.9 分；
9 點 41.5 分；　10 點 46.2 分；11 點 50.8 分。

此等答案與由問題2算出者固亦相去無幾也。

問題16 見問題4。(第10頁)

〔圖解法〕 作直角坐標軸 OT 與 OS 而以任意一點之橫坐標表某時刻之小時數，以其縱坐標表旅行者在該時刻距南村之里數，如是則該點縱橫兩坐標之比卽爲旅行者在每一小時內所行之里數矣。甲由南村向北出發而於1小時後行至距該村6里處，於圖中求得橫坐標爲1，縱坐標爲6之點E，通過O與E之直線卽係甲之行程之圖示。乙亦同時由南村向北出發而於1小時後行至距該村7里處，於圖中求得橫坐標爲1，縱坐標爲7之點F，通過O與F之直線卽係乙之行程之圖示。



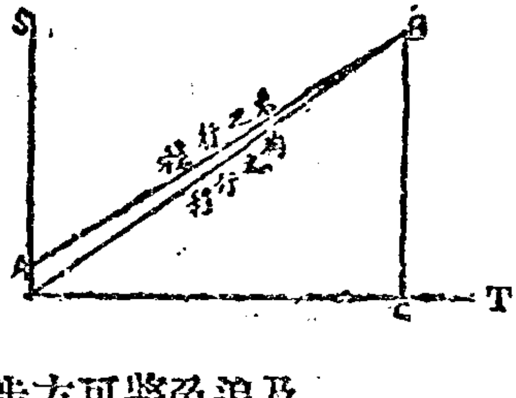
設以橫坐標軸上OT之長表所求約定回轉之時刻，作直線 TB 與 OS 平行而與甲，乙行程之圖示相交於 A,B 兩點，該兩點之縱坐標卽可表示兩人應循原路回轉南村之處。因回時與往時反向，且在每小時內各人多行3里，故在回轉1小時後甲與南村之距離減少 $6+3=9$ 里，據此求得G點；乙與南村之距離減少 $7+3=10$ 里，據此求得H點。故通過A與G及B與H之兩直線當表示甲，乙兩人回轉後之行程。AG及BH之延長線交OT於C及D，而 $OD>OC$。OC與 OD 分別代表兩人回至南村之時刻，故 $OD-OC=CD$ 之長表甲較乙早到南村之時間。題云此時間爲6分鐘，卽 $\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$ 小時，但在吾人作成之圖中，CD 之長未必恰爲 $\frac{1}{6}$，故其作法當如下

述，

任作一與 OS 平行之直線交 OE 與 OF 於 A' 與 B' 自此兩點作二直線 A'C' 及 B'D' 與上述之 AC 及 BD 取同一方向而交 OT 於 C' 及 D'。任作線段 $C'K=\frac{1}{6}$，作平行於 C'K 之直線 OL 與 D'K 之延長線交於 L。於 OT 上取 OD＝OL，$CD=\frac{1}{6}$，作 CA 與 DB 平行於 C'A' 與 D'B' 而交 OE 與 OF 於 A 與 B。A 與 B 必同在平行於 OS 之直線上，蓋按上述作法，ABDC 與 A'B'D'C' 為相似形，而 A'B' 原為平行於 OS 之一直線也。AB 與 OT 相交於 T，OT 之長即為所求約定回轉時刻之小時數，就圖讀之，當知其恰為出發後之 3 小時，與前此算出者無殊。

問題17　見問題 7。(第15頁)

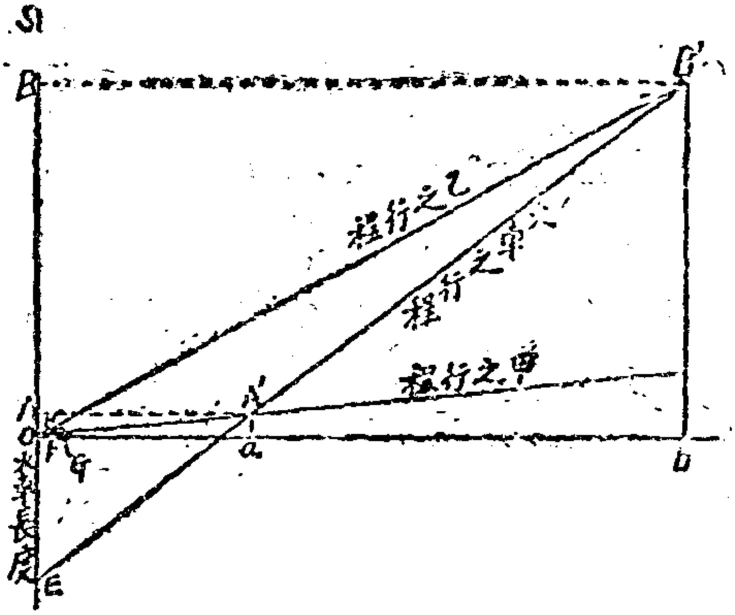
〔圖解法〕　仍仿前題，於直角坐標系中，以點之橫坐標表出發後之時間，以兔跳 4 步或狗跳 3 步所需之時間為單位；縱坐標表在該時刻至出發處之距離，以兔跳 1 步之長為單位。因狗之速度為每單位時間行 3 犬步 $=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ 兔步，兔之速度為每單位時間行 4 兔步，惟當狗初出發時兔已前行 350 兔步，故二者之行程當如圖示。



設此二圖示相交於 B，則其縱坐標 CB 之長表狗追及兔時狗已行之距離。就圖讀得此距離為 3150 兔步＝$3150\times\frac{2}{3}=2100$犬步。故狗須跳2100步方可將兔追及。

問題18　見問題 9。(第19頁)

〔圖解法〕 作縱橫兩直線 OS 與 OT，而以前者爲表距離之軸，以呎爲單位；又以後者爲表時間之軸，以秒爲單位。設甲，乙兩人與火車頭同時由原點 O 處出發，齊向 OS 方進行；如是假設，則火車後端當自 O 點後之某點 E 處出發，而 EO 之長卽爲火車車身之長。



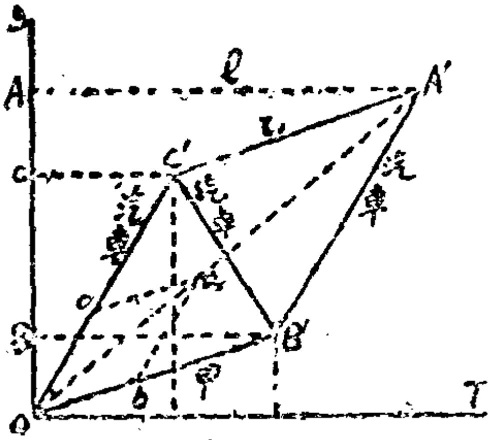
吾人此後言及火車之位置，槪以其後端爲標準。每經 1 秒鐘，甲行 $\frac{3\times5280}{60\times60}=$ 4.4 呎，乙行 $\frac{15\times5280}{60\times60}=$ 22 呎。於 OT 軸上取單位長 OF，過 F 作一直線平行於 OS，並於其上截取 FG＝4.4，及 FH＝22 兩線段而得 G, H 兩點，則 OG 與 OH 兩直線分別表示甲乙二人之行程。復於 OT 軸上取 Oa＝15，Ob＝45，過 a, b 兩點作二直線均與 OS 平行，而前者交 OG 於 A'，後者交 OH 於 B'。此 A' 與 B' 兩點之縱坐標卽可表示火車追及甲與乙時之位置，蓋題云火車於 15 秒鐘內追過甲，而於 45 秒鐘內追過乙也。如上所云，A' 與 B' 兩點亦必同在火車行程之圖示上，故此行程當卽爲通過 A'，B' 之直線所表示。設 A'B' 與 OS 軸交於 E，則就圖讀之，EO＝396 呎，表火車車身之長。又火車於 45 秒鐘內共行 $EO+bB'=396+45\times22=396+990=$ 1386 呎，故其速度爲每秒 $\frac{1386}{45}=\frac{154}{5}$ 呎，卽每小時 $\frac{154\times60\times60}{5\times5280}$ ＝ 21 哩。

試將上圖射影於 OS 軸上而得 E, O, A, B 諸點，吾人須注意此軸上之圖適與問題 9 中者完全相同，故可表示甲，乙二人與火車之

實際行程；

問題19　見問題13.(第27頁)

〔圖解法〕作直角坐標軸 OT 與 OS，並以點之橫坐標表示出發後之小時數，縱坐標表示距出發處之里數。仿前此諸題作圖，得



OB' 表甲(卽先步行之三人)之行程，OC' 表汽車載乙(卽先乘車之三人)時之行程，C'B' 表汽車調回迎甲時之行程，B'A' 表汽車載甲後之行程，C'A' 則表乙下車後之行程。因汽車之速率始終爲每小時駛行 40 里，故 OC' 應與 B'A' 平行；又甲乙步行速度亦相等，故 OB' 應與 C'A' 平行。然則 OB' A' C' 固當爲一平行四邊形，而其角頂 A' 之縱坐標必爲 32，蓋此六人遊覽之目的地距出發處 32 里也。故此問題化爲已知平行四邊形 OB' A' C' 兩邊 OB' 與 OC' 之位置而求作其他兩邊 B' A' 與 C'A' 使角頂 A' 恰在距橫坐標軸 OT 爲 32 之平行線 l 上之問題矣。

任意作一平行四邊形 Obac，延長其對角線 oa 至與 l 相交於 A'，再引 A'B' 與 A' C' 各平行於 OC' 與 OB' 卽得所求之平行四邊形 OB' A' C' 矣。就圖實測，得乙下車之時間爲 $x=C'$ 之橫坐標$=\frac{3}{5}$小時；又甲登車之時間爲 $y=B'$ 之橫坐標 $=1$小時。至於各人步行之距離則爲 B' 之縱坐標或 C'A' 在縱坐標軸上之射影 $=8$ 里，又汽車所駛行之里數則爲 OC'，C'B' 與 B'A' 在縱坐標上射影絕對值之和$=24+16+24=64$里。

平行四邊形 OB'A'C' 在 OS 上之射影，與問題 13 中第一圖相同，皆表此六人與汽車之實際行程，試取二者比較之，卽知其然矣。

第三章 用試差法解算術應用問題

一元一次方程式各種解法中有所謂試差法者，乃試設一數代已知方程式中之元，更就其與根之差而求該根之法。此法可分為單試差法與複試差法二種，茲列式說明原理如下：

(1)單試差法　　設有方程式

$$ax=b。$$

試設一任意之數 x_1，并以之代左邊之 x；而求得

$$ax_1=b_1$$

其中 $b_1 \neq b$。

上列二式相減，(以大數減小數，下仿此)得

$$a(x-x_1)=b-b_1$$

$$\therefore\ x-x_1=\frac{b-b_1}{a}$$

此式表示試設之數與所求根之差之絕對值，故所求之根極易由此推得。

(2)複試差法　　設有方程式

$$ax+bc=d \cdots\cdots(1)$$

試設一任意之數 x_1，以之代 x；並求一相當之數 c_1，以之代 c；而使上式右邊之值仍為 d，則

$$ax_1+bc_1=d \cdots\cdots(2)$$

同理，再設一數 x_2，並求一數 c_2，使

$$ax_2+bc_2=d \cdots\cdots(3)$$

求(1)與(2)；暨(2)與(3)之差，得

$$a(x-x_1)+b(c-c_1)=0,$$

$$a(x_1-x_2)+b(c_1-c_2)=0。$$

將上列二式中第二項均移至右邊幷相除，即得

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{c-c_1}{c_1-c_2}。$$

此式表示方程式之根與所設第一數之差與所設兩數差之比當與諸 c 所成相當差之比相等。由此得根與所設第一數之差爲

$$x-x_1=\frac{c-c_1}{c_1-c_2}(x_1-x_2),$$

故該根不難自此求得矣。

a, b, c, d 本爲題中已知各量，故(1)式可書作

$$ax=d-bc=e$$

而逕用單試差法解之。此就方程式言之固無不可，然於解應用問題時，必待方程式立成並化簡爲上列形式後方知 b, c, d 諸量合成一數之方法。是以代數解法果不能用而僅就算術方面論究，吾人旣未預知題中諸已知量應如何結合，則單試差法只有棄而不用而以複試差法解之。後者雖較前者繁冗，惟較諸算術解法，則又易解多多矣，故亦自有其價值。

應用問題之代數解法非立成多元一次聯立方程式者則不便採用此法，其理從略。

茲仍就第一章問題中選擇數題用此法解之，以見一斑。

❀　❀　❀　❀　❀

問題20　見問題 1。(第 5 頁)

〔試差法〕　設分針於 m 點後續行 10 分中，即行過鐘面 10 分劃，則在此時間內時針祇行 $\frac{10}{12}$ 分劃，二者相差 $10-\frac{10}{12}=\frac{110}{12}$ 分劃，又設分針行 15 分劃 則時針行 $\frac{15}{12}$ 分劃，二者相差 $15-\frac{15}{12}=$

$\frac{165}{12}$分劃。當分針與時針重疊時，二者所行分劃數之差應爲 5m 分劃，因分針原在時針後 15 分劃也。按複試差法原理，兩針重疊時分針所行分劃數減 10 之差對於 $15-10=5$ 之比應與 $5m-\frac{110}{12}=\frac{60m-110}{12}$ 對於 $\frac{165}{12}-\frac{110}{12}=\frac{55}{12}$ 之比相等，故此差爲

$$5\times\frac{60m-110}{12}\div\frac{55}{12}=\frac{60m-110}{11}$$

分劃，而所求兩針重疊之時刻爲 m 點鐘後之

$$10+\frac{60m-110}{11}=\frac{60}{11}m$$

分鐘。

問題2亦可用試差解之，且算式與本題亦極相似。

問題21 見問題3。（第9頁）

〔試差法〕 設夫之年齡爲80，則婦之年齡爲 $135-80=55$，而夫年3倍與婦年之差爲 $80\times3-55=185$。又設夫之年齡爲 60，則婦之年齡爲 $135-60=75$，而上述之差爲 $60\times3-75=105$。若夫之年齡適爲本題所求答案則按題意，上述之差當爲 $135+10=145$。按複試差法原理，夫年與60之差對於 $80-60=20$ 之比應與 $145-105=40$ 對於 $185-105=80$ 之比。故夫年與60差爲

$$20\times40\div80=10,$$

而夫之年齡爲 $60+10=70$，婦之年齡爲 $135-70=65$。

問題22 見問題4。（第10頁）

〔試差法〕 設約定回轉時間爲出發後之1小時，則甲於 $1+\frac{6\times1}{6+3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ 小時後回至南村，而乙於 $1+\frac{7\times1}{7+3}=1+\frac{7}{10}$

$=\frac{17}{10}$小時後回至南村，故甲應早到$\frac{17}{10}-\frac{5}{3}=\frac{1}{30}$小時。又設約定回轉時間爲出發後之 2 小時，則甲應較乙早回至南村 $2+\frac{7\times2}{7+3}-\left(2+\frac{6\times2}{6+3}\right)=\frac{17}{5}-\frac{10}{3}=\frac{1}{15}$小時。若約定回轉時間適爲本題答案，則甲回南村應較乙早$\frac{1}{10}$小時。故約定回轉時間減 1 之差對於 $2-1=1$ 之比必與 $\frac{1}{10}-\frac{1}{30}=\frac{2}{30}$對於$\frac{1}{15}-\frac{1}{30}=\frac{1}{30}$之比相等，即此差爲

$$1\times\frac{2}{30}\div\frac{1}{30}=2$$

小時，而約定回轉時間爲出發後 $1+2=3$ 小時。

問題23　見問題 5。(第12頁)

〔試差法〕　設有雞 100 隻，則兔有 $\frac{100\times2-80}{4}=30$隻；二者隻數互換後，雞足當比兔足少 $100\times4-30\times2=400-60=340$。又設有雞 50 隻，則兔有$\frac{50\times2-80}{4}=5$隻；二者隻數互換後，雞足當比兔足少 $50\times4-5\times2=200-10=190$。題云二者隻數互換後，雞足比兔足少 280，故雞隻數減 50 之差對於 $100-50=50$ 之比應與 $280-190=90$ 對於 $340-190=150$ 之比相等，因而求得此差爲

$$50\times90\div150=30$$

隻。是以原有雞 $50+30=80$ 隻，兔 $\frac{80\times2-80}{4}=20$隻。

問題24　見問題 6。(第14頁)

〔試差法〕 設狗跳 3000 步 $=3000\times\frac{3}{2}=4500$ 兔步，則在同時間內兔跳 $3000\times\frac{4}{3}=4000$ 兔步，故狗多跳 $4500-400=500$ 兔步。又設狗跳 1000 步 $=1000\times\frac{3}{2}=1500$ 兔步，則在同時間內，兔跳 $1000\times\frac{4}{3}=\frac{4000}{3}$ 兔步，故狗多跳 $1500-\frac{4000}{3}=\frac{500}{3}$ 兔步。題云狗須多跳 350 兔步方可追及兔，故狗所跳步數與 1000 之差對於 $3000-1000=2000$ 之比應與 $350-\frac{500}{3}=\frac{550}{3}$ 對於 $500-\frac{500}{3}=\frac{1000}{3}$ 之比相等。由此求得此差為狗所跳步數之

$$\frac{550}{3}\times 2000\div\frac{1000}{3}=1100$$

倍。因而求得狗追及兔時，狗應跳之步數為 $1000+1100=2100$。

練習問題

下列諸問題皆由代數解法入手，而推得其算術解法。其中有可兼用圖解法者，亦有可兼用試差法者。果爾，吾人宜即採用數法解之。

1. 雞兔頭數相差30，足數相差10，問雞兔各若干？

答雞55，兔25；或雞65，兔35。

2. 父年五十四，母年四十，長子十五歲，次子十三歲，三子十一歲，四子九歲，幼子七歲。問在若干年後父母年齡和爲諸子年齡之和？　答13年後。

3. 甲等酒二升，乙等酒三升之價爲三圓六角；甲等酒三升，乙等酒四升之價爲五圓零七分。今取以混合使成每升七角七分之酒三斗八升，問此兩等酒各需若干？

答甲 27.87 升，乙 10.13 升。

4. 池水漏水之遲速一定不變，雇工八人戽水入池，四小時可滿；雇工十人三小時可滿。若限於二小時內戽滿，需雇工幾人？

答14人。

5. 甲乙二人同由一處同向出發，每分鐘各行 36 步，3 分鐘後，甲因有物遺忘乃以每分鐘行 43.2 步之速度折回取物，並休息 2 分鐘，休息後急行追乙，而於 15 分鐘內追及，問甲追乙時之速度若何？　答每分 54 步。

6. 有合金一磅，含銀二份，銅三份，加銅幾何，方得熔成含銀三份，銅七份之合金？　答$\frac{1}{3}$磅。

7. 有一不準確之時鐘，時針與分針相續兩次疊合之時刻，相

隔66分，問此時鐘之誤差若何（以每小時幾秒表之）？

答每小時30秒。

8. 有甲乙二數，其和與差之比爲7:3，又乙數較總和之$\frac{1}{3}$少1，問二數爲何？　　答甲15，乙6。

9. 甲在南北之路上，由南向北行，乙在東西之路上，由西向東進行，甲出發處在二路交叉點南1120米，乙出發處爲交叉點。二人同時起程，4分鐘後，二人距交叉點等遠。自此再經52分鐘後，二人又距交叉點等遠。問甲乙二人每分鐘各行幾米？

答甲150米，乙130米。

10. 甲乙丙三人各有若干圓，若甲與乙8圓，乙與丙12圓，丙又與甲18圓，則各有30圓，問各人原有若干圓？

答甲20圓，乙34圓，丙36圓。

11. 步兵一隊，列成方陣，每邊若干人，餘42人，每邊若增2人，則不足118人，問此隊兵士若干？　　答1563人。

12. 牧場所有之馬牛羊合計80頭，馬比牛之2倍少5頭，而比羊少10頭，問各有若干？　　答馬27，牛16，羊37。

13. 某君生時，其父爲34歲，當其年齡爲父年之$\frac{16}{27}$時，父喪，其後11年，母喪，而母之享年等於父之享年，問此君生時，其母若干歲？　　答23歲。

14. 某人有金若干，每日用去清晨所有之$\frac{1}{2}$又2圓，如是三日而罄其所有，問此人原有若干元？　　答28圓。

15. 兩人各駕一汽艇循某島之周圍而駛行，每小時速度之和爲75哩。今兩人同時由同處同向出發，經20小時而相會，若改爲反向出發，則經6小時而相會，試求此島周圍之長及各人所駕汽艇

之速度。　　　　答每小時 48.75 哩及每小時 26.25 哩。

16. 兄25歲，弟 5 歲時，父按二人歲數之比各與若干元。又於兄年等於弟年 3 倍後 10 年，仍按二人歲數之比各與若干元，二次合計，兄得 160 元，弟得 50 元，問每次各得若干元？

答第一次兄得100元，弟得20元；
第二次兄得60元，弟得30元。

[illegible]件，每件運費 6 分，若損其一，除扣其運費外，[illegible]後此人僅得 6 角，問所運瓷器，破損若干件？　　　　答 10 件。

18. 試將一長方形之長寬各增 6 寸，則前者將為後者之$\frac{3}{2}$，又長方形之面積因此增加84平方寸。試求此長方形之原面積。

答 12 平方吋。

19. 甲付乙之款與乙所有者相等；乙復付甲以款，與甲所餘者相等；最後，甲付乙之款與乙所餘者亦相等，如是甲有 16 圓，乙有 24圓，問各人原有若干圓？　　　　答甲27元；乙13圓。

20. 12年前父年爲子年之 7 倍，13年後父年爲子年之 2 倍，問父子現年各若干？　　　　答父年 47，子年 17。

21. 當一舟由 A 處順流出發時，投木片於水，另一舟同時由 B 處向 A 處逆流出發，兩舟在靜水中之速度相等。木片每小時較順流之舟落後 12 里，而其與逆流之舟相遇，則比順流之舟遲 1 小時，求 A B 之距離。　　　　答 24 里。

22. 男子每日工資 5 角，女子每日工資 3 角。合雇男女 15 人，作工若干日，共付工資 28 元 5 角，其中男子比女子多得 1 元 5 角，問男女各幾人？　　　　答男 6 人，女 9 人。

23. 甲與乙競走 440 碼兩次。第一次甲讓乙先行 20 碼，仍勝

2秒，第二次甲讓乙先行4秒，仍勝6碼。問甲與乙之速率各若干？

答甲每秒$7\frac{17}{29}$碼，乙每秒7碼。

24. 有一圓銀幣，一角銀幣與一分銅幣，共計八枚。若總值增加3圓9角6分，則三者枚數倒轉，問各有幾枚？

答一圓幣1枚，

25. 袋中紅球數為白球數之二倍 求，經數次後白球適盡，而紅球尚餘十五個。 球各若干？ 24，白球12。

26. 於六點與七點之間，問時於某君，答曰，在此時刻前18分鐘，長針越過短針之角度等於在此時刻後18分鐘，長針未及短針之角度之$\frac{1}{3}$，問此時刻為何？ 答6時58分$5\frac{5}{11}$秒。

27. 有一時鐘，其時針，分針，秒針裝於同一軸上，於十二點鐘時相合。求各針平分其他二針夾角之時刻。

答秒針平分他二針夾角之時刻為12點$30\frac{390}{1427}$秒，

分針平分他二針夾角之時刻為12點$61\frac{683}{697}$秒，

時針平分他二針夾角之時刻為12點$59\frac{19}{73}$秒。

28. 有甲乙丙三組工人，甲組4人所成之事與乙組5人所成者相等，乙組4人所成之事與丙組7人所成者相等。今有一事命甲組13人，乙組12人合作3日而成，若以丙組10人為之，需幾日可成？ 答14.83125日。

29. 三種合金所含重量成份為：甲，金5銀2鉛1；乙，金2銀5鉛1；丙，金3銀1鉛4。欲求含等重量金銀鉛之合金9兩，問

應自甲,乙,丙中各取幾兩鎔合之? 答甲$\frac{1}{3}$兩, 乙$\frac{11}{3}$兩,丙5兩。

30. 射手在500碼外打靶,射擊後$2\frac{2}{5}$秒,即聞彈中靶之聲,距靶600碼且距射手210碼之觀察者,於聞鎗聲$2\frac{1}{10}$秒後方聞彈中靶之聲,試求聲之速度與彈之速度。

答聲每秒1100呎,彈每秒$1447\frac{7}{19}$呎。

(兗綵證兗字275號)

民國三十三年四月渝初版

數學研究小叢書
從代數問到算術
（全一冊）

◎ 定價國幣八角
（郵運匯費另加）

渝版漂白紙

著者　李緒文
校者　余介石
發行者　中華書局有限公司
重慶李子壩
印刷者　中華書局印刷廠
發行處　各埠中華書局