算學小叢書

代數學

冪法開法及無理虛數

林鶴一　矢田吉熊著

黃　元　吉譯

商務印書館發行

算學小叢書

代數學

冪法開法及無理虛數

林鶴一　矢田吉熊著
黃元吉譯

商務印書館發行

中華民國十五年十二月初版
中華民國二十四年五月[redacted]第三版

(52574)

算學小叢書 代數學——冪法開法及無理數虛數 一冊

每冊定價大洋肆角
外埠酌加運費匯費

原著者 林鶴一 矢田吉熊

譯述者 黃元吉

發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

國

二四五〇上

目　次

代數學

冪法　開法及無理數　虛數

第一章

冪　　法

1.　定義.　同爲一數 a 而有 m 個之集合以成乘積, 此謂 a 之 m 乘冪, 或稱 m 乘方, 以 a^m 之記號表之, 其 m 爲指數.

求某數或代數學式之若干乘冪, 其計算謂之冪法.

由乘冪之定義及乘法, 除法之法則, 可得下列諸定理之證明, 此諸定理, 謂之指數之法則, 乃學冪法前所常用者.

2.　定理.　就某數各種之乘冪而總求其乘積, 即係擴張其乘冪, 故其積之指數, 等於諸因數之指數之和.

如 $m, n, p\cdots\cdots$ 爲正整數.

則 $a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots}$

此爲乘法之指數法則.

證明．依乘冪之定義，

$$a^m=a\times a\times a\times\cdots\cdots\cdots m\text{ 因數止},$$

$$a^n=a\times a\times a\times\cdots\cdots\cdots n\text{ 因數止},$$

$$\therefore a^m a^n=(a\times a\times a\times\cdots\cdot m\text{因數止})(a\times a\times a\times\cdots\cdot n\text{ 因數止})$$

$$=a\times a\times a\times\cdots\cdots\cdots(m+n)\text{因數止}$$

$$=a^{m+n}.$$

又 $a^m\times a^n\times a^p=(a^m\times a^n)\times a^p$

$$=a^{m+n}\times a^p$$

$$=a^{m+n+p}$$

因數在三個以上，其證明相同．

如 $a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots\cdots=a^{m+n+p\cdots\cdots\cdots}$

3．定理． 某數之乘冪如 a^m 以其乘冪 a^n 除之，得商 $a^m\div a^n$，即 $\dfrac{a^m}{a^n}$

$$\text{若 } m>n,\text{ 則}\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$\text{若 } m<n,\text{ 則}\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$$

$$\text{若 } m=n,\text{ 則}\frac{a^m}{a^n}\text{ 等於 } 1.$$

此爲除法之指數法則．

證明 m, n 爲正整數而 $m>n$.

則 $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a\times a\times a\times\cdots\cdots m\text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\cdots\cdots n\text{ 因數止}}$

$$=a\times a\times a\times\cdots\cdots(m-n)\text{ 因數止}$$

$$=a^{m-n}.$$

次 $m<n$.

則 $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a\times a\times a\times\cdots\cdots m\text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\cdots\cdots n\text{ 因數止}}$

$$=\frac{1}{a\times a\times a\times\cdots\cdots(n-m)\text{因數止}}$$

$$=\frac{1}{a^{n-m}}$$

又 $m=n$ 則 $a^m=a^n$.

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^n}{a^n}=1.$$

別證．　若 $m>n$ 則依前節.

$$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}$$

$$=a^m,$$

$$\therefore\qquad a^m\div a^n=a^{m-n}$$

次 $m<n$.

則 $$a^{n-m}\times a^m=a^{n-m+m}$$

$$=a^n.$$

$$\therefore \qquad a^m = \frac{a^n}{a^{n-m}}$$

此等式之兩邊以 a^n 除之.

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$$

又 $m=n$

則 $$1 \times a^n = a^n = a^m$$

$$\therefore \qquad a^m \div a^n = 1.$$

4. 定理. 某數之 m 乘冪之 n 乘冪, 等於其數之 mn 乘冪.

即 $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

此為冪法之指數法則.

證. m, n 為正整數.

則 $$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \cdots\cdots n \text{ 因數止}$$

$$= a^{m+m+m+\cdots\cdots\cdots\cdots n\text{項止}}$$

$$= a^{mn}.$$

系. 某數之 m 乘冪之 n 乘冪, 等於其數之 n 乘冪之 m 乘冪.

即 $$(a^m)^n = (a^n)^m$$

蓋 $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}$ 故也.

5. 定理. 若干因數之積之 m 乘冪,等於各因數之 m 乘冪之積.

即
$$(abc\cdots\cdots)^m = a^m b^m c^m\cdots\cdots$$

證. m 爲正整數.

則 $(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \cdots\cdots m$ 因數止

$= (a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ 因數止$)$

$\times (b \times b \times b \times \cdots\cdots m$ 因數止$)$

$= a^m b^m.$

$\therefore (abc)^m = \{(ab)c\}^m$

$= (ab)^m c^m$

$= a^m b^m c^m.$

故凡因數之數多者, 可依此類推.

如 $(abc\cdots\cdots)^m = a^m b^m c^m\cdots\cdots$

6. 定理. 二數之商之 m 乘冪, 等於二數之 m 乘冪之商.

即
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

證. m 爲正整數.

則 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots\cdots m$ 因數止

$$=\frac{aaa\cdots\cdots m\text{ 因數止}}{bbb\cdots\cdots m\text{ 因數止}}$$

$$=\frac{a^m}{b^m}.$$

別證. 令 $\frac{a}{b}\times b=a.$

作此式兩邊之 m 乘冪,由前節之定理,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\times b^m=a^m,$$

$$\therefore\quad \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

注意. 本定理又可換言之如次:

分數之 m 乘冪,等於以分母子之 m 乘冪爲分母子之分數.

7. 由上證明得各公式如次:

$$a^m\times a^n=a^{m+n}. \qquad [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} m>n\text{ 則 } a^m\div a^n=a^{m-n} \\ m<n\text{ 則 } a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}. \end{array}\right\} \qquad [2]$$

$$(a^m)^n=a^{mn}. \qquad [3]$$

$$(ab)^m=a^mb^m. \qquad [4]$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}. \qquad [5]$$

8. 單項式之冪法.

依前節公式 [3], [4], [5] 卽得其法則如次:

〔法則〕. 作單項式之 m 乘冪者,先作其數係數之 m 乘冪,而各因數之指數則附以 m 倍.

作分數式之 m 乘冪者,乃作以分母子之 m 乘冪爲分母子之分數.

例 1. 求 $-2a^2b^3$ 之五乘冪.

解. $(-2a^2b^3)^5=(-2)^5(a^2)^5(b^3)^5=-32a^{10}b^{15}$

例 2. 求 $-3xy^3z^5$ 之四乘冪.

解. $$(-3xy^3z^5)^4=(-3)^4x^4(y^3)^4(z^5)^4$$
$$=81x^4y^{12}z^{20}.$$

例 3. $$\left(\frac{2ab^3}{3x^2y^4}\right)^6=\frac{(2ab^3)^6}{(3x^2y^4)^6}$$
$$=\frac{64a^6b^{18}}{729x^{12}y^{24}}$$

例 4. $$\{(-5x^4)^3\}^2=\{-125x^{12}\}^2$$
$$=15625x^{24}.$$

[問 1] 求下列之乘冪.

(一) $(7ab^2)^2$. (二) $(-2a^7c^2)^3$

(三) $(3a^2b^3)^4$. (四) $(-a^2x)^6$.

(五) $(-2x^2y)^5$.　　　　(六) $(-\frac{1}{3}x^3)^7$.

(七) $5a(-2a)^3(a^2)^4$　　　　(八) $(-3^6ax^2y^5)^m$.

〔問 2〕 求下列之乘冪.

(一) $\left(\dfrac{3a^2b^3}{4c^5x^4}\right)^2$.　　　　(二) $\left(-\dfrac{3x^5}{5a^3}\right)^3$.

(三) $\left(\dfrac{2abc}{3m^2n^3}\right)^n$.

〔問 3〕 下式試簡之.

(一) $\{(2a^3)^2\}^4$.　　　　(二) $3x\{(-x^2)^3\}^4$.

(三) $-5\{(m^2n)^5(mn^2)^2\}^2$.

9. 多項式之平方. 依乘法,得各公式如次:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab,$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

依此結果,即得其法則如次:

〔**法則**〕. 作多項式之平方者,作各項之平方,又作各項與其下各項相乘之積之二倍,統為相加可也.

例 1. $(x-y+z)^2=x^2+(-y)^2+z^2+2x(-y)+2xz$
$$+2(-y)z$$
$$=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz.$$

例 2. $(1+2x-x^2)^2=1^2+(2x)^2+(-x^2)^2+2\times1\times(2x)$

$$+2\times1\times(-x^2)+2(2x)(-x^2)$$

$$=1+4x^2+x^4+4x-2x^2-4x^3$$

$$=1+4x+2x^2-4x^3+x^4.$$

例 3. $(5a^3-7a^2b+3ab^2-6b^3)^2$

$$=25a^6+49a^4b^2+9a^2b^4+36b^6$$

$$-70a^5b+30a^4b^2-60a^3b^3$$

$$-42a^3b^3+84a^2b^4$$

$$-36ab^5$$

$$=25a^6-70a^5b+79a^4b^2$$

$$-102a^3b^3+93a^2b^4$$

$$-36ab^5+36b^6.$$

注意. 各項之平方恆為正,又$(-a-b-c)^2=(a+b+c)^2$,

去多項式乘冪之括弧者,謂之**展開**,展開所得之式謂之**展開式**.

[問 4] 下式試展開之.

(一) $(a+b-c)^2$. (二) $(a-b-c)^2$.

(三) $\left(\frac{2}{3}x^2-x+\frac{3}{2}\right)^2$. (四) $(1-x+x^2-x^3)^2$.

10. 二項式 $a+b$ 之乘冪.

如 $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

此固所已知者,若欲求 $a+b$ 之四乘冪,則依乘法實算之如次:

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ \quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

依此結果,知 $(a+b)^4$ 之展開式,其初項為 a^4,末項為 b^4,而其中間各項之文字則順次為 a^3b, a^2b^2, ab^3, 即 a 之降冪而 b 之昇冪也.

其含 a^3b 之項,則 a^3 以 b 乘之,a^2b 以 a 乘之,相因而成者也,故其係數為 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^3 之係數與 a^2b 之係數之和,如 1+3 即 4 是也.

又含 a^2b^2 之項,則 a^2b 以 b 乘之,ab^2 以 a 乘之,相因而

成者也，故其係數爲 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^2b 及 ab^2 之係數之和，如 $3+3$ 卽 6 是也.

依同理，ab^3 之係數爲 $3+1$ 卽 4 是也.

$$\therefore\quad (a+b)^4=a^4+(1+3)a^3b+(3+3)a^2b^2+(3+1)ab^3+b^4$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

依同理，由 $(a+b)^4$ 之展開式，可得 $(a+b)^5$ 之展開式，

卽
$$(a+b)^5=a^5+(1+4)a^4b+(4+6)a^3b^2+(6+4)a^2b^3+(4+1)ab^4+b^5.$$
$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

依此方法，順次作 $a+b$ 之六乘，七乘，八乘等之展開式亦甚容易，玆明其法則如次：

〔法則〕．二項式 $a+b$ 之 n 乘冪，由 $(n+1)$ 項而成，其初項爲 a^n，第二項以下爲 a 之降冪 b 之昇冪，其指數順次以 1 增減，而 a 與 b 之指數之和，恆等於 n，其係數爲 $a+b$ 之 $(n-1)$ 乘冪之展開式中第一項第二項之係數之和，又第二項第三項之係數之和順次類推以取之可也，至最後之項則爲 b^n.

今將 $a+b$ 之十乘冪，逐一展開之，而取其係數，列表如次：

$(a+b)^1$ ……… 1, 1.

$(a+b)^2$ ……… 1, 2, 1.

$(a+b)^3$ ……… 1, 3, 3, 1.

$(a+b)^4$ ……… 1, 4, 6, 4, 1.

$(a+b)^5$ ……… 1, 5, 10, 10, 5, 1.

$(a+b)^6$ ……… 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

$(a+b)^7$ ……… 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

$(a+b)^8$ ……… 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.

$(a+b)^9$ ……… 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.

$(a+b)^{10}$ ……… 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

前表，$(a+b)^6$ 之初項末項之係數皆爲 1，第二項之係數 6 卽 $(a+b)^5$ 之展開式中係數 1 與 5 之和，又第三項之係數 15 卽 5 與 10 之和，第四項之係數 20 卽 10 與 10 之和.

$$\therefore\quad (a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

注意．$(a+b)^n$ 之展開式，其諸項之係數，由初項順取之，或由末項逆取之，皆同也.

例 1．$(3x+2y)^3$ 展開之.

解．依 $(a+b)^3$ 之展開式，令 $a=3x$，$b=2y$，

則 $(3x+2y)^3=(3x)^3+3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2+(2y)^3$

$$=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3.$$

例 2.　$(m-3n)^5$ 展開之.

解.　依 $(a+b)^5$ 之公式, 令 $a=m$, $b=-3n$,

則 $(m-3n)^5=m^5+5m^4(-3n)+10m^3(-3n)^2$

$$+10m^2(-3n)^3+5m(-3n)^4+(-3n)^5$$

$$=m^5-15m^4n+90m^3n^2-270m^2n^3$$

$$+405mn^4-243n^5$$

例 3.　求 998 之平方.

解.　依 $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$, 令 $a=1000$, $b=2$,

則 $998^2=(1000-2)^2=1000^2+2^2-2\times1000\times2$

$$=1000000+4-4000$$

$$=996004.$$

例 4　計算 8.999993^3 至小數第七位.

解.　$8.999993^3=(9-0.000007)^3$

$$=9^3+3\times9^2\times(-0.000007)$$

$$+3\times9\times(0.000007)^2+(-0.000007)^3.$$

因第三項與第四項, 其數值於小數七位固不生影響者也 故捨之

但取　$8.999993^3=9^3-3\times81\times0.000007$

$$=729-0.001701$$

$$=728.998299.$$

注意.　凡求 $(a\pm x)^n$ 之近似值,若 x 比 a 爲非常小之數值,則 x^2x^3……略之可也.

如但取　$(a\pm x)^2=a^2\pm2ax,$

$$(a\pm x)^3=a^3\pm3a^2x,$$

$$(a\pm x)^4=a^4\pm4a^3x.$$

[問 5]　下式試展開之.

(一)　$\left(\frac{1}{6}a+2x\right)^3.$　　(二)　$\left(\frac{3}{5}x-\frac{5}{3}y\right)^4.$

(三)　$(2-3y)^5$　　(四)　$(1+2x+x^2)^3.$

(五)　$\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)^7.$　　(六)　$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8.$

(七)　$(x^2-2xy+y^2)^6.$

[問 6]　求下式之值.　[參照例 3]

(一)　$999^2.$　　(二)　$9987^3.$

[問 7]　求下列乘冪之值至小數五位.　[參照例 4]

(一)　$287.00006^2.$　　(二)　$81.99994^3.$

[問 8]　求下式之值至小數七位.

(一)　17.999997^3.　　　(二)　3.0003^9.

練習問題 I.

1.　下式試簡之.

(一)　$\left(\frac{2}{3}a^2\right)^3\left(\frac{3}{2}a^3\right)^2$.　　　(二)　$[\{(a)^2\}^3]^5$.

(三)　$\left(\frac{a^2bc}{b^2cayz}\right)^2\left(\frac{b^2ca}{c^2abzx}\right)^2\left(\frac{c^2ab}{a^2bcxy}\right)^2$.

2.　下式試計算之.

(一)　$25^3\times4^3$.　　　(二)　$125^4\times4^4\times2^4$.

(三)　$5^8\times2^{11}$.　　　(四)　$\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{9}{16}\right)^4$.

(五)　$9^5\times17^5\div51^5$.　(六)　$\frac{5^8\times15^4\times(2^2\times3^{15}\div5^2)^3}{(5\times60\times3^8)^5}$.

3.　下式試簡之.

(一)　$\frac{(x^2yz)^l(xy^2z)^m(xyz^2)^n}{\left(\frac{yz}{x^2}\right)^l\left(\frac{zx}{y^2}\right)^m\left(\frac{xy}{z^2}\right)^n}$.

(二)　$\left\{\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^l\left(\frac{x^m}{x^l}\right)^m\right\}\div\{(x^l)^l\times(x^m)^m\}$

$$\times\{(x^m)^l\times(x^l)^m\}.$$

*4.　下式試證明之.

$$\frac{(yz)^{qr}(zx)^{rp}(xy)^{pq}}{(y^{q-1}z^{r-1})^p(z^{r-1}x^{p-1})^q(x^{p-1}y^{q-1})^r}=\frac{(xyz)^{p+q+r}}{x^py^qz^r}.$$

5.　若 $\left(\frac{yz}{x}\right)^l\left(\frac{zx}{y}\right)^m\left(\frac{xy}{z}\right)^n=\left(\frac{x^2}{yz}\right)^l\left(\frac{y^2}{zx}\right)^m\left(\frac{z^2}{xy}\right)^n$

則有下式之關係,試證之.

$$(x^2y^2z^2)^{l+m+n}=(x^ly^mz^n)^5.$$

6.　若 x, y, z 爲正整數,而 $x=y^z$, $y=z^x$, $z=x^y$,

則 $x=y=z=1$,試證明之.

*7.　若 $m=a^x$, $n=a^y$, $a^2=(m^yn^x)^z$,

則 $xyz=1$,試證之.

8.　設有方程式 $2^x=8^{y+1}$, $9^y=3^{x-9}$,試解之.

9.　下式試展開之.

(一)　$\left(\frac{1}{3}x^2-3x\right)^3$.　　(二)　$(4mnp-5mpq)^3$.

(三)　$(a-b)^5(a^2+ab+b^2)^5$.　(四)　$(a-b)^7(a+b)^7$.

10.　下列各公式試證明之.

(一)　$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)$
$+3c^2(a+b)+6abc.$

注意.　初學者遇記 * 之處,姑從略可也.

(二)　$(a+b+c+d)^3=a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)$

$$+3b^2(a+c+d)+3c^2(a+b+d)+3d^2(a+b+c)$$

$$+6bcd+6acd+6abd+6abc.$$

11.　試依前問之公式，將 $(x+2y-3z)^3$ 展開之.

12.　下列各恆等式試證明之

(一)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2.$

(二)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

(三)　$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$

$$=(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx-cw+dz)^2$$

$$+(az-cx+bw-dy)^2+(aw-dx-bz+cy)^2.$$

13.　若 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$

則 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$，試證明之.

但 a, b, c 及 x, y, z 皆為實數.

14.　$a, b, c\cdots\cdots$ 皆為實數，

(一)　若 $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$，則 $a=b$.

(二)　若 $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$，則 $a=b=c$.

(三)　若 $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$，

則 $a=b=c=d$.

(四)　若 $n(a^2+b^2+c^2+\cdots\cdots)=(a+b+c+\cdots\cdots)^2$,

則 $a=b=c=\cdots\cdots$(但 n 爲數字), 試各證明之.

15.　若 a b, c, d 爲正實數,

而 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$

則 $a=b=c=d$, 試證明之.

16.　試計算下列之乘冪至小數第五位止.

(一)　$(291,99993)^2$,　　　　(二)　$(53,00007)^3$.

17.　若 k 爲非常小之數值,則 $\dfrac{1}{(1\pm k)^2}$ 之近似數爲 $1\mp 2k$,

又 $\dfrac{1}{(1\pm k)^3}$ 之近似數爲 $1\mp 3k$, 試證明之.

第 二 章

開 方 法

11. 定義. 若 a 之 n 乘冪等於 b, 則 a 爲 b 之 n **乘根**

求某數或式之若干乘根, 其計算謂之**開方法**.

例如 $2^5=32$ 則 2 爲 32 之五乘根. 以 $\sqrt[5]{32}=2$ 記之,

又 $(x^2)^3=x^6$ 則 x^2 爲 x^6 之三乘根, 即 $\sqrt[3]{x^6}=x^2$.

故凡 $\qquad a^n=b$

則 $\qquad \sqrt[n]{b}=a$, 因之 $(\sqrt[n]{b})^n=b$.

$\sqrt[n]{\ }$ 謂之根號, 其 n 爲根指數, 因欲與根指數有區別, 故於乘冪之指數, 特稱之爲冪指數, 若單稱指數, 則指冪指數言也. 二乘根, 三乘根, 特稱之爲平方根, 立方根, 而平方根之根指數 2 恆從略.

例如 $\sqrt{9}=\sqrt[2]{9}=3$.

注意. 開方法即冪法運算之逆也.

12. (一). 正數之偶數乘根, 有正負二種, 其絕對值

相等.

例如 $(+4)^2=16,\ (-4)^2=16.$

故 16 之平方根爲 $+4$ 及 -4.

本書正數之平方根符號 $\sqrt{}$ 僅表示正根.

故 16 之平方根 $=\pm\sqrt{16}=\pm 4.$

又凡偶數乘根之根號, 亦僅表示正根,

16 之四乘根 $=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2.$

〔第二〕. 正數之奇數乘根, 僅爲正數.

例如 $\sqrt[3]{8}=2,\ \sqrt[5]{100000}=10.$

〔第三〕. 負數之奇數乘根爲負數.

例如 $\sqrt[3]{-64}=-4$, 因 $(-4)^3=-64$

表負數之奇數乘根者用 $\sqrt[n]{}$, 故 a 爲正而 n 爲奇數,

則 $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}.$

〔第四〕. 負數之偶數乘根, 非正數, 亦非負數.

蓋無論正數負數, 其偶數乘冪, 必皆爲正.

故若 $\sqrt{-16}$ 此名虛數, 後章詳論之.

13. 定理 若 a b 皆爲正而 $a^n=b^n$, 則 $a=b$.

證. 因 $a^3=b^3$ 則 $a=b$

蓋若 $a \gtrless b$ 則有三不等式如次,

$$a \gtrless b,\ a \gtrless b,\ a \gtrless b$$

連乘則得 $a^3 \gtrless b^3$

若易以其他之整數如 n 者，理亦同.

14. 定理. 若干正因數之積之 n 乘根，等於各因數之 n 乘根之積.

即 n 爲正整數而 $a, b, c, \cdots$ 爲正，

則 $$\sqrt[n]{abc\cdots} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \cdots\cdots$$

證. 此兩邊之 n 乘冪必相等. 依前節卽知本定理之眞確.

蓋左邊之 n 乘冪依第 11 節，

爲 $$(\sqrt[n]{abc\cdots})^n = abc\cdots\cdots,$$

又右邊之 n 乘冪依第 5 節，

爲 $$(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \cdot (\sqrt[n]{c})^n \cdots\cdots = abc\cdots\cdots$$

因之本定理爲眞確.

例如 $$\sqrt{25 \times 16} = \sqrt{25} \times \sqrt{16}$$

注意. 若 n 爲奇數，則 $a, b, c, \cdots$ 之中雖有負數，亦得適用本定理.

例如 $$\sqrt[3]{-8000} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{1000}.$$

15. 定理. 二正數之商之 n 乘根，等於二正數各 n 乘

根之商.

卽 a, b 爲正而 n 爲正整數,

則
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

證. 兩邊之 n 乘冪皆爲 $\frac{a}{b}$ 故也.

前節之注意, 本定理亦適用之.

16. 定理. 正數 a 之 m 乘冪之 n 乘根等於 $a^{\frac{m}{n}}$; 但 m, n 爲正整數, 而 m 爲 n 之倍數.

卽
$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

證. 左邊 n 乘冪爲 a^m, 右邊 n 乘冪爲
$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$$

故本定理爲眞確.

例如
$$\sqrt[3]{a^{15}}=a^{\frac{15}{3}}=a^5.$$

第十四節之注意, 本節亦適用之.

注意. m 非 n 之倍數者, 後章詳論之.

17 單項式之開方法.

依第 14, 15, 16 節, 得其法則如次:

〔**法則**〕. 求單項式之 n 乘根者, 先求係數之 n 乘根, 乃於各文字因數之指數, 悉以 n 除之.

分數式之 n 乘根，等於取分母子之 n 乘根爲分母子之分數．

例 1.　求 $16x^8y^6$ 之平方根．

解．　所求之平方根爲 $\pm 4x^4y^3$，雖然，正根負根，僅符號之不同，故本書祇取其一．

又含文字之式，其平方根之一方（爲正者），以根號表之．

如　$\sqrt{16x^8y^6}=\sqrt{16}x^{\frac{8}{2}}y^{\frac{6}{2}}=4x^4y^3$.

例 2　求 $-125a^6b^9c^3$ 之立方根．

解．　$\sqrt[3]{-125a^6b^9c^3}=\sqrt[3]{-125}a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{9}{3}}c^{\frac{3}{3}}=-5a^2b^3c.$

例 3.　求 $\dfrac{a^8b^6}{25x^4y^2z^{10}}$ 之平方根．

解．　$\sqrt{\left(\dfrac{a^8b^6}{25x^4y^2z^{10}}\right)}=\dfrac{\sqrt{a^8b^6}}{\sqrt{(25x^4y^2z^{10})}}=\dfrac{a^4b^3}{5x^2yz^5}.$

［問 1］　求下式之平方根．

（一）$25x^4y^6z^2$.　　（二）$16a^4b^2c^6d^8$.　　（三）$64x^{16}y^{23}$.

（四）$\dfrac{a^{16}b^8}{49}$.　　（五）$\dfrac{256x^2y^4}{289p^{14}}$.

［問 2］　求下式之立方根．

（一）$27a^6b^3c^3$.　　（二）$-343a^{12}b^{18}$.

（三）$\dfrac{125a^3b^6}{216x^6y^9}$.　　（四）$-\dfrac{27x^{27}}{64y^{63}}$.

［問 3］　試就下式計算之

(一)　$\sqrt[4]{a^8x^{12}}$.　　(二)　$\sqrt[5]{32x^5y^{10}}$.

(三)　$\sqrt[6]{729a^{18}b^6}$.　　(四)　$\sqrt[5]{-x^{10}y^{15}}$.

(五)　$\sqrt[8]{256a^8x^{64}}$.　　(六)　$\sqrt[7]{\dfrac{128}{a^{63}b^{56}}}$.

(七)　$\sqrt[10]{\dfrac{a^{30}x^{50}}{b^{100}}}$.　　(八)　$\sqrt[n+1]{a^{3n+3}b^{5n+5}}$.

開　平　方　法

18. 由視察而得者.

求某數或式之平方根，其方法謂之開平方法.

依視察以求多項式之平方根，其方法所已知者如次：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (-a-b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

故 $a^2+2ab+b^2$ 之平方根爲 $a+b$ 及 $-a-b$，故既知平方根之一，變其符號，卽爲其他之一根.

故本書祇就其求一根之法揭示之，附以根號如次：

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b,$$

依同理，　$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b.$$

故以所設之多項式，依 $A^2\pm 2AB+B^2$ 之形化之.

則其平方根，由視察卽知爲 $A\pm B$ 之形.

詳言之則多項式化為三項式之形，若其二項各為完全平方，其他一項，卽此二項之平方根之積之二倍，則此多項式之平方根，必為其完全平方之二項之平方根之和或差.

例 1.　求 $16x^2+24xy+9y^2$ 之平方根.

解.　題式 $=(4x)^2+2(4x)(3y)+(3y)^2$

$$=(4x+3y)^2.$$

$$\therefore \qquad \sqrt{(16x^2+24xy+9y^2)}=4x+3y.$$

例 2.　求 $4a^4+25b^4-20a^2b^2$ 之平方根.

解. $\sqrt{4a^4+25b^4-20a^2b^2}=\sqrt{(2a^2)^2+(5b^2)^2-2(2a^2)(5b^2)}$

$$=\sqrt{(2a^2-5b^2)^2}=2a^2-5b^2.$$

例 3.　求 $\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{2ax}{by}+\dfrac{a^2}{b^2}$ 之平方根.

解. $\dfrac{x^2}{y^2}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2, \dfrac{a^2}{b^2}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2, -\dfrac{2ax}{by}=-2\left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right).$

$\therefore$　平方根 $=\dfrac{x}{y}-\dfrac{a}{b}$

例 4.　求 $4x^2+12xy-16xz+9y^2-24yz+16z^2$ 之平方根.

解.　依 x 之降冪整理之.

題式 $=4x^2+(12xy-16xz)+(9y^2-24yz+16z^2)$

$=(2x)^2+2(2x)(3y-4z)+(3y-4z)^2$

$=\{2x+(3y-4z)\}^2.$

$\therefore$ 平方根 $=2x+3y-4z.$

注意 代數式依某文字之冪僅爲平方者，則其式依某文字之降冪或昇冪整理之使成三項式之形，由視察以求其平方根，故如例 4 又得依 y 及 z 之冪，順次整理之，以求平方根.

例 5. 求 $4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$ 之平方根.

解. 題式 $=(4x^4-12x^3+9x^2)+(4x^2-6x)+1$

$=(2x^2-3x)^2+2(2x^2-3x)+1$

$=(2x^2-3x+1)^2.$

$\therefore$ 平方根 $=2x^2-3x+1.$

[問 4] 求下列各式之平方根.

(一) $p^2-2pq+q^2.$ (二) $9x^2+12xy+4y^2.$

(三) $49a^2+112ab^2+64b^4.$ (四) $a^6-14a^3b^3+49b^6.$

(五) $p^{10}-18p^5+81.$

(六) $(x+y)^2-2(x+y)(a+b)+(a+b)^2.$

(七) $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{10x}{y}+25.$ (八) $\dfrac{9x^2}{25}-2+\dfrac{25}{9x^2}.$

[問 5] 求下列各式之平方根. [參照例 4]

(一) $a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2$.

(二) $x^2+4xy-6xz+4y^2-12yz+9z^2$.

(三) $9m^2-6mn+n^2-24m+8n+16$.

[問 6] 求下式之平方根. [參照例 5]

(一) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

(二) $4x^4-20x^3+13x^2+30x+9$.

(三) $9a^4-12a^3+22a^2-12a+9$.

19. 一般之方法. 凡不能由視察而得多項式之平方根者, 悉依此.

以所設之多項式爲 P, 但其次數, 依某文字例如 x 之降冪(或昇冪)整列之.

若 P 爲完全平方, 則其平方根亦爲多項式明矣, 平方根之諸項以 $a, b, c, \cdots\cdots$ 表之, 且此諸項依 x 之降冪整列之.

$$P=(a+b+c+\cdots\cdots)^2.$$

開平方法卽係由 P 以求 $a, b, c, \cdots\cdots$

然 $a, b, c\cdots\cdots$ 之値, 不拘其爲如何,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b.$$

$$(a+b+c)\ =(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

$$=a^2+(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c.$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c$$
$$+\{2(a+b+c)+d\}d.$$

以下準此.

以上各等式右邊之各羣,其初項備列之如次:

$$a^2,\ 2ab,\ 2ac,\ 2ad,\ \cdots\cdots$$

其 x 之次數,比各羣之他項爲高.

依此知 P 之平方根之求法如下:

〔法則〕. (1). 求 P 初項之平方根 a, 是爲根之初項.

(2). 由 P 減 a^2 所餘爲第一之剩餘.

如 $$R_1=(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c+\cdots\cdots$$

其初項 $2ab$ 以 $2a$ 除之,得根之第二項 b.

(3). 得 b 之後,以 $(2a+b)b$ 由 R_1 減之,所餘爲第二之剩餘.

如 $$R_2=\{2(a+b)+c\}c+\{2(a+b+c)+d\}d+\cdots$$

其初項 $2ac$ 以 $2a$ 除之,得根之第三項 c.

(4). 依上法繼續求之,至其剩餘之初項比 a 爲低次而止.

若最後之剩餘爲零,則 P 爲完全平方,其平方根爲

$a+b+c+\cdots\cdots$明矣.

此爲 P 依平方開之適盡云.

若最後之剩餘不爲零, 則 P 非完全平方, 列其形如次:

$$P=(a+b+c+\cdots\cdots)^2+R.$$

此爲 P 依平方開之不能適盡, 其 R 爲開平剩餘.

例 1. $9x^2+30x+25$ 開平方.

運算

$$\begin{array}{r|l}
9x^2+30x+25 & 3x+5 \\
9x^2 & \overline{(6x+5)\times 5} \\
\hline
+30x+25 & \\
+30x+25 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

答 $3x+5$.

說明. (1). 先 $P=9x^2+30x+25$ 依 x 之降冪整列之.

(2). P 之初項 $9x^2$ 之平方根爲 $3x$ 卽根之初項 a.

(3). $a^2=9x^2$ 由 P 減之得第一剩餘 $R_1=+30x+25$ 以 $2a=6x$ 除 R_1 之初項 $30x$ 得商 5, 卽根之第二項 b.

(4). $(2a+b)\times b=30x+25$ 由 R_1 減之無餘.

$\therefore$ $a+b$ 卽 $3x+5$ 爲所求之平方根.

本題係開之適盡者.

例 2. 求 $4x^4+9y^4+13x^2y^2-6xy^3-4x^3y$ 之平方根.

運算

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4-4x^3y+13x^2y^2-6xy^3+9y^4 & 2x^2-xy+3y^2 \\
4x^4 & \overline{(4x^2-xy)(-xy)} \\
\hline
-4x^3y+13x^2y^2-6xy^3+9y^4 & (4x^2-2xy+3y^2)(3y^2) \\
-4x^3y+x^2y^2 & \\
\hline
+12x^2y^2-6xy^3+9y^4 & \\
+12x^2y^2-6xy^3+9y^4 & \\
\hline
0 & 答\quad 2x^2-xy+3y^2.
\end{array}
$$

說明.　(1).　題式 P 依 x 之降冪整列之.

(2).　P 之初項 $4x^4$ 之平方根爲 $2x^2$ 卽根之初項 a.

(3).　$a^2=4x^4$ 由 P 減之得第一剩餘 $R_1=-4x^3y+\cdots\cdots$

(4).　以 $2a=4x^2$ 除 R_1 之初項 $-4x^3y$ 得根之第二項 $-xy$ 卽 b.

(5).　$(2a+b)b=(4x^2-xy)(-xy)=-4x^3y+x^2y^2$ 由 R_1 減之,得第二剩餘 $R_2=+12x^2y^2-\cdots\cdots$

(6).　R_2 之初項 $+12x^2y^2$ 以 $2a=4x^2$ 除之,得商 $+3y^2$ 卽根之第三項 c.

(7).　$\{2(a+b)+c\}\times c=(4x^2-2xy+3y^2)\times 3y^2$

$$=+12x^2y^2-6xy^3+9y^4$$

由 R_2 減之得剩餘 $R_3=0$.

$\therefore\quad a+b+c=2x^2-xy+3y^2$ 爲所求之平方根.

本題亦開之適盡者.

例 3.　$4x^4-12x^3+25x^2-13x+8$ 開平方.

運算

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4-12x^3+25x^2-13x+8 & 2x^2-3x+4 \\
\cline{2-2}
4x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & (4x^2-3x)(-3x) \\
\hline
-12x^3+25x^2-13x+8 & (4x^2-6x+4)\times 4 \\
-12x^3+9x^2 \qquad\qquad\quad & \\
\hline
+16x^2-13x+8 & \\
+16x^2-24x+16 & \\
\cline{1-1}
+11x-8 & 答\left\{\begin{array}{l}\text{平方根 } 2x^2-3x+4 \\ \text{開平剩餘 } 11x-8\end{array}\right.
\end{array}
$$

第三之剩餘 $11x-8$ 比平方根爲低次，故本式開之不能適盡.

如 $4x^4-12x^3+25x^2-13x+8=(2x^2-3x+4)^2+11x-8$.

[問 7]　求下列各式之平方根.

(一)　$49x^4-126x^2y^2+81y^4$.

(二)　$4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$.

(三)　$25x^4-30ax^3+49a^2x^2-24a^3x+16a^4$.

(四)　$4a^2c^2+9b^2c^2-4a^2c-6abc+12abc^2+a^2$.

(五)　$4x^6+4x^5-3x^4-10x^3-3x^2+4x+4$.

(六)　$x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$.

(七)　$6a^3b^2-4a^2b^3+b^4-12a^5b+9a^6+4a^4b^2$.

[問 8]　求 $1-x$ 之平方根，至第五項止.

20.　含某文字及其逆數之諸乘冪之多項式.

如　$2x+\dfrac{1}{x^2}+4+x^3+\dfrac{5}{x}-7x^2+\dfrac{8}{x^3}$ 者,

依 x 之降冪排列之,其絕對項則置於 x 與 $\dfrac{1}{x}$ 之間,而分母之次數遞次增大.

如　$x^3+7x^2+2x+4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}$.

例. 求 $24+\dfrac{16y^2}{x^2}-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{32y}{x}$ 之平方根.

運算. 依 y 之降冪整列之乃通常之方法.

$$
\begin{array}{r|l}
\dfrac{16y^2}{x^2}-\dfrac{32y}{x}+24-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2} & \dfrac{4y}{x}-4+\dfrac{x}{y} \\
\hline
\dfrac{16y^2}{x^2}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \left(\dfrac{8y}{x}-4\right)\times(-4) \\
\hline
-\dfrac{32y}{x}+24-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2} & \left(\dfrac{8y}{x}-8+\dfrac{x}{y}\right)\times\dfrac{x}{y} \\
-\dfrac{32y}{x}+16\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
+\ 8-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2} & \\
+\ 8-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2} & \text{答}\quad \dfrac{4y}{x}-4+\dfrac{x}{y}. \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

蓋視如 $a=\dfrac{4y}{x}$, $b=-4$, $c=+\dfrac{x}{y}$ 可也.

[問 9]　求下列各式之平方根.

(一)　$\dfrac{x^4}{4}+2x^3+3x^2-5x-3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

(二)　$\frac{9a^2}{x^2}-\frac{6a}{5x}+\frac{101}{25}-\frac{4x}{15a}+\frac{4x^2}{9a^2}$.

(三)　$\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)^2}{x^2}-\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}-\frac{7}{4}$.

數之開平方法

21. 數之平方根之位數. 依實算如下:

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$,

$7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$, $100^2=10000$,

$1000^2=1000000$,………

故一位或二位整數之平方根, 爲一位之數, 三位或四位整數之平方根, 爲二位之數, 以下倣此.

故欲定某整數平方根數字之數者由單位起每二位區分之, 其區分之數, 卽根之位數.

例如　43|56 之平方根, 爲二位之數, 又 6|15|24 之平方根, 爲三位之數.

又小數之平方所占小數位之數, 爲原數之小數位數之倍.

例如　$0.1^2=0.01$, $0.2^2=0.04$,…………, $0.01^2=0.0001$. $0.001^2=0.000001$,………

故欲定小數之平方根之位數者，由單位以下每二位區分之可也.

22. 整數及小數之開平方法. 整數及小數之開平方法與多項式之開平方法無異，故祇舉例說明，不更言其法則.

例 1.　求 625 之平方根.

$$a+b$$

運算.（甲）

$$\begin{array}{r|l} 6\,|\,25 & 20+5 \\ \cline{2-2} 400 & (40+5)\times 5 \\ \cline{1-1} 225 & \\ 225 & \\ \cline{1-1} 0 & 答\quad 25 \end{array}$$

（乙）

$$\begin{array}{l|l} 6\,|\,25 & 25 \\ \cline{2-2} 4 & 45\times 5 \\ \cline{1-1} 225 & \\ 225 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

證明.　先由625之右端，計二數字之前，作縱線，分爲二區，故知平方根爲二位之數.

令 $625=(a+b)^2$ 其 600 之中含最大平方數者，依開平九九* 知 $20^2=400$ 故 $a=20$，乃由 625 減 $a^2=400$ 剩餘 225，此 225 以 $2a=40$ 除之，得商 5 作爲 b 之數以試之，則 $2a+b=40+5$ 以 $b=5$ 乘之，此結果 45×5 得225 適與剩餘相等，減之無餘，故 $b=5$.

本題無剩餘，故 $\sqrt{625}=25$.

*開平九九，即 $1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，$9^2=81$ 云.

通常略甲之算式如乙.

例 2.　求 69169 之平方根.

運算

$$
\begin{array}{r|l}
6|91|69 & 263 \\ \cline{2-2}
4 & 46\times 6 \\ \cline{1-1}
291 & 523\times 3 \\
276 & \\ \cline{1-1}
1569 & \\
1569 & \\ \cline{1-1}
0 & \text{答 } 263.
\end{array}
$$

說明.　(1).　69169 分爲三區,故知平方根爲三位之數,令百位數,十位數,單位數,爲 a, b, c 卽平方根爲 $a+b+c$.

(2).　$3^2>6>2^2$ 故根之第一數爲 2, 卽 $a=200$.

(3).　$a^2=4$ 萬由 69169 減之,得 $R_1=29169$,但依算式則末二位可省略.

(4).　以 $2a=400$ 除 R_1 或 28 以 4 除之得商 7,然 $b=70$,則 $(2a+b)\times b=470\times 70=32900$ 比 R_1 大,故 b 不能爲 70,因之 $b=60$.

(5).　$(2a+b)\times b=460\times 60=27600$, 由 R_1 減之得 $R_2=1569$, 以 $2(a+b)=260\times 2=520$ 除之得 $c=3$.

(6).　$\{2(a+b)+b\}\times c=523\times 3=1569$, 由 R_2 減之適盡,故平方根爲 $a+b+c=263$.

注意.　多項式之開平,其求根之第二項,第三項,……恆

於 $R_1, R_2, \cdots\cdots$ 以 $2a$ 除之,然數之開平方則以 $2a, 2(a+b)$, $2(a+b+c), \cdots\cdots$ 除之.

例 3.　求小數 0.0001713481 之平方根.

運算

```
0.00|01|71|34|81 | 0.01309
        1        |----------
     ----------- |  23×3
        71       |  2609×9
        69       |
     ----------- 
        23481
        23481
     -----------
          0
```

答　0.01309.

說明.　由小數點右方每二位區分之,計分爲五區,故知平方根爲小數五位之數,凡所設之數小數點以下有二個零者,根之小數點以下作一個零.

又剩餘 234 比 260 小,故以下段所區分者,併爲 23481 而於根作零,然後運算.

例 4.　求 72.313 之平方根至小數第四位止.

運算

```
72.31|30|00|00 | 8.5037
64             |-----------
-------------- | 165×5
 831           | 17003×3
 825           | 170067×7
-------------- |
   63000       |
   51009       |
-------------- |
   1199100     |
   1190469     |
-------------- |
      8631     |
```

答 8.5037.

說明．凡帶小數者，由小數點左右每二位區分之，而尤要者須作零以足其位．

本題係開之不盡者．

$$72.313=(8.5037)^2+0.00008631.$$

卽所設之數，比 8.5037 之平方大，比 8.5038 之平方小，此二值爲平方根之近似數，前者稱之爲不足之近似數，後者稱之謂有餘之近似數，但前者又單稱近似數云．

注意．開平剩餘，不能如除法，以剩餘爲分子作分數．

［問 10］　求下列各數之平方根．

(一) 676.　　(二) 1444.　　(三) 11664.

(四) 207936.　　(五) 9634816.　　(六) 51825601.

(七) 13.69.　　(八) 227.7081.　　(九) 0.00056644.

［問 11］　求下列各數之平方根至小數第二位止．

(一) 1053.　　(二) 11.665.　　(三) 0.4.

23．分數之開平方法．　求分數之平方根，其分母子爲完全平方者，各求其平方根，(帶分數先化爲假分數)　若非完全平方，則化其分數爲小數，然後依平方開之．

例 1．　求 $\frac{529}{2209}$ 之平方根．

解. $\sqrt{\left(\frac{529}{2209}\right)}=\frac{\sqrt{529}}{\sqrt{2209}}=\frac{23}{47}.$

例 2. $3\frac{69}{169}$ 之平方根若何?

解. $\sqrt{\left(3\frac{69}{169}\right)}=\sqrt{\left(\frac{576}{169}\right)}=\frac{24}{13}=1\frac{11}{13}.$

例 3. 求 $\frac{4}{7}$ 之平方根至小數第三位止.

解. $\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)}=\sqrt{0.571428}=0.755\cdots\cdots$

根之小數求至第三位止者其 $\frac{4}{7}$ 所應取之小數位數爲二倍, 卽至第六位止.

[問 12] 求下列各分數之平方根.

(一) $\frac{784}{2809}$. (二) $5\frac{551}{1369}$. (三) $9\frac{11104}{12769}$.

[問 13] 求下列各分數之平方根, 至小數第三位止.

(一) $\frac{17}{49}$. (二) $\frac{3}{11}$. (三) $\frac{22}{7}$. (四) $\frac{215472}{108}$.

***24. 省略開平方法.**

求某數之平方根, 其根爲 $(2n+1)$ 位之數者, 依開平方法, 求其初之 $(n+1)$ 位, 尙餘 n 位依除法求之可也.

證. N 爲所設之數，a 爲其初所求得根之部分，x 爲未知之部分.

則 $$\sqrt{N}=a+x,$$

∴ $$N=a^2+2ax+x^2.$$

因之 $$\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}.$$

卽 $N-a^2$ 以 $2a$ 除之所得之商，等於根未知之部分 x 加 $\frac{x^2}{2a}$.

然 $\frac{x^2}{2a}$ 之分子 x 爲 n 位之數，故 x^2 之位數爲不大於 $2n$，而 $2a$ 爲 $(2n+1)$ 位之數.

故 $$\frac{x^2}{2a}<1.$$

可知此分數雖捨棄之，其於 x 之值固不生影響者也，故其初之 $(n+1)$ 位 a 旣求得以後，其開平剩餘 $N-a^2$ 以 $2a$ 除之，卽得根未知之部分 x 取 n 位而止，亦殊精密.

據此則 x 無論爲整數且爲完全平方，卽爲小數或開不盡者，皆得適用.

注意. $n=1$ 則 $n+1=2$，故數之開平方法，非其初根

之二數字求得後，不能依除法而決定其次之數字歸於正確也. [參照第 22 節例 2 之說明]

例. 求 $\sqrt{5}$ 至小數第十位止.

解. 所求之根爲 11 位之數,故於其初之六位依開平方法求之; 其餘五位依除法.

$$
\begin{array}{r|l}
5.00|00|00|00|00 & 2.23\,606 \\
\hline
4 & 42\times 2 \\
\overline{100} & 443\times 3 \\
84 & 4466\times 6 \\
\overline{1600} & 447206\times 6 \\
1329 & \\
\overline{27100} & \\
26796 & \\
\overline{3040000} & \\
2683236 & \\
\overline{356764} &
\end{array}
$$

乃以 $2a=4.47212$ 除剩餘 0.0000356764 得商 $0.0000079775\cdots\cdots$ 以既知之部分加之，得其值如次

$\sqrt{5}=2.2360679775\cdots\cdots$

[問 14] 試依省略法，求下列各數之平方根，至小數六位止.

(一) 3. (二) 4.9. (三) 25.16.

(四) 18439. (五) 0.00064.

開立方法

25　視察法.

求某式或數之立方根，其方法謂之開立方法.

某二項式 $a \pm b$ 之立方爲 $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

故 $$\sqrt[3]{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} = a \pm b.$$

故凡某式或數可化爲 $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$ 之形者，其立方根不難直接而知之.

例 1.　求 $8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$ 之立方根.

解 $$\sqrt[3]{(8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3)}$$
$$= \sqrt[3]{\{(2x)^3 - 3(2x)^2(5y) + 3(2x)(5y)^2 - (5y)^3\}}$$
$$= \sqrt[3]{(2x - 5y)^3}$$
$$= 2x - 5y.$$

例 2.　求 1331 之立方根.

解 $$\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{\{1000 + 300 + 30 + 1\}}$$
$$= \sqrt[3]{\{10^3 + 3 \times 10^2 \times 1 + 3 \times 10 \times 1^2 + 1^3\}}$$
$$= \sqrt[3]{(10 + 1)^3}$$
$$= 10 + 1 = 11.$$

例 3. 求 $(p+q)^3+3(p+q)^2(m-n)+3(p+q)(m-n)^2+(m-n)^3$ 之立方根. 答 $p+q+m-n$.

[問 15] 試依視察法求下式之立方根.

(一) $x^3+6x^2+12x+8$.

(二) $a^3x^3-3a^2x^2y^2+3axy^4-y^6$.

(三) $x^3+3x^2(a-b+c)+3x(a-b+c)^2+(a-b+c)^3$.

(四) $\frac{8}{a^6}-\frac{36}{a^3}+54-27a^3$.

(五) $8a^6+60a^4b^2+150a^2b^4+125b^6$.

(六) $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)+1$.

(七) $(5x-3y)^3-12(5x-3y)^2(x+y)$
$+48(5x-3y)(x+y)^2-64(x+y)^3$.

26. 一般之方法. 以所設之多項式爲 P, 其次數依某文字例如 x 之降冪 (或昇冪) 整列之.

立方根之諸項以 $a, b, c, \cdots\cdots$ 表之, 且此諸項依 x 之降冪整列之, P 若爲完全立方, 則 $P=(a+b+c+\cdots\cdots)^3$.

開立方式係由 P 以求 $a, b, c, \cdots\cdots$ 之方法也.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3\\&=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b\\&\qquad+\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c,\end{aligned}$$

以下做此.

以上各等式右邊之各羣,其初項順次如 a^3, $3a^2b$, $3a^2c$,…. 係各羣中之最高乘冪也.

爰有法則如次:

〔**法則**〕. (1). 求 P 初項之立方根 a, 是爲根之初項.

(2). 由 P 減 a^3, 而第一剩餘 R_1 之初項 $3a^2b$ 以 $3a^2$ 除之, 得根之第二項 b.

(3). 由 R_1 減 $(3a^2+3ab+b^2)\times b$ 而第二剩餘 R_2 之初項 $3a^2c$ 以 $3a^2$ 除之, 得根之第三項 c.

(4). 依上法繼續求之, 至剩餘 R 比 a^2 爲低次而止, 其 $a+b+c+\cdots\cdots$ 即所求之根, 而 R 爲開立剩餘.

R 若爲零, 則曰 P **依立方開之爲適盡**, 若 R 不爲零, 則 P 非完全立方.

如 $$P=(a+b+c+\cdots\cdots)^3+R.$$

此爲 P **依立方開之不能適盡**.

例 1.　求 $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ 之立方根.

運算.

$$
\begin{array}{r|l}
8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3 & 2x+3y \\
8x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & 3(2x)^2=12x^2 \\
\hline
+36x^2y+54xy^2+27y^3 & 3(2x)(3y)=18xy \\
+36x^2y+54xy^2+27y^3 & (3y)^2=9y^2 \\
\hline
0 \qquad\qquad & (12x^2+18xy+9y^2)\times 3y
\end{array}
$$

答　$2x+3y$.

說明.　$8x^3$ 之立方根爲 $2x$, 是卽根之初項 a.

$(2x)^3=8x^3$　由題式減之得 $R=+36x^2y+\cdots\cdots$ 其初項 $+36x^2y$ 以 $3a^2=12x^2$ 除之得 $3y$ 是卽根之第二項 b.

$3a^2+3ab+b^2=12x^2+18xy+9y^2$ 以 b 卽 $3y$ 乘之得積.

由 R 減之無餘.

故 $a+b=2x+3y$ 爲所求之立方根.

例 2.　求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 之立方根.

$$
\begin{array}{r|l}
x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & x^2+2x+3 \\
x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 3(x^2)^2=3x^4 \\
\hline
+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & 3x^2(2x)=6x^3 \\
+6x^5+12x^4+8x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & (2x)^2=4x^2 \\
\hline
+\ 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27 & (3x^4+6x^3+4x^2)\times 2x \\
+\ 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27 & 3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3 \\
\hline
0 \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad +12x^2 \\
 & 3(x^2+2x)\times 3=9x^2+18x \\
 & 3^2=9 \\
\hline
 & (3x^4+12x^3+21x^2+18x+9)\times 3
\end{array}
$$

答　x^2+2x+3.

說明. x^6 之立方根爲 x^2, 而 27 之立方根爲 3, 故知根爲三項式, 故題式等於 $(a+b+c)^3$ 或等於 $(a+b+c)^3+R$.

依例 2. $a+b=x^2+2x$.

其第二剩餘之初項 $9x^4$ 以 $3a^2=3x^4$ 除之得 $c=3$.

而 $\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}\times c$ 由第二剩餘減之適盡.

[問 16]　試就下列各式依立方開之.

(一) $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

(二) $27x^6-81x^5+108x^4-81x^3+36x^2-9x+1$.

(三) $24x^4y^2+96x^2y^4-6x^5y+x^6-96xy^5+64y^6$
$-56x^3y^3$.

(四) $1-3x+6x^2-10x^3+12x^4-12x^5+10x^6$
$-6x^7+3x^8-x^9$.

(五) $\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{6x^2}{y^2}+\dfrac{9x}{y}-4-\dfrac{9y}{x}+\dfrac{6y^2}{x^2}-\dfrac{y^3}{x^3}$.

27.　多項式之高次乘根.

多項式之平方根之平方根, 爲其四乘根, 平方根之立方根或立方根之平方根, 爲其六乘根.

因 $(A^2)^2=A^4$,　$(A^3)^2=(A^2)^3=A^6$.

故凡根指數由 2 及 3 之因數而成者, 可依開平方及開立方逐次以求其根.

五乘根，七乘根等之開法，姑從略.

[問 17]　求下列各式之四乘根.

(一)　$81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$.

(二)　$x^8-\frac{3a^2}{b}x^7+\frac{27a^4}{8b^2}x^6-\frac{72a^6}{16b^3}x^5-\frac{81a^8}{256b^4}x^4$.

[問 18]　求下列各式之六乘根.

(一)　$1+6x+14x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$.

(二)　$x^6-12ax^5+240a^4x^2-192a^5x+60a^2x^4$

$-160a^3x^3+64a^6$.

數之開立方法

28. 數之立方根之位數.　依實算如次:

$1^3=1,\ 2^3=8,\ 3^3=27,\ 4^3=64,\ 5^3=125,\ 6^3=216,$

$7^3=343,\ \ 8^3=512,\ \ 9^3=729,$ *$10^3=1000,$

$100^3=1000000,\ 1000^3=1000000000,\cdots\cdots$

故一位至三位之數之立方根，爲一位之數，四位至六位之數之立方根，爲二位之數.

故整數由單位起每三位區分之，卽可知其立方根之位數.

*由 $1^3=1$ 至 $9^3=729$ 謂之開立方九九，讀法如下:
一一得一，二二得八，三三得二十七，……，九九七百二十九.

例如　8|325 之立方根，爲二位之數，64|382|507 之立方根，爲三位之數.

又小數之立方根之小數位數，爲其小數之位數之三分之一，故由小數點向右每三位區分之，即可知其立方根之小數位數.

例如　0.006|425 之立方根，爲小數二位之數.

29.　整數及小數之開立方法.

由下例即知其開法.

例 1.　求 1728 之立方根.

(甲)　運算　(乙)

$$\begin{array}{r|lr}
 & a+b & \\
1|728 & 10+2 & \\ \cline{2-3}
1000 & 3\times10^2= & 300\\ \cline{1-1}
728 & 3\times10\times2= & 60\\
 & 2^2= & 4\\ \cline{2-3}
728 & & 364\times2\\ \cline{1-1}
0 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|lr}
1|728 & 12 & \\ \cline{2-3}
1 & 3\times10^2= & 300\\ \cline{1-1}
728 & 3\times10\times2= & 60\\
728 & 2^2= & 4\\ \cline{1-1}\cline{3-3}
0 & & 364\times2
\end{array}$$

答　12.

說明.　(1)　1728 之立方根爲二位之數，故等於 $a+b$ (甲).

(2)　1000 之中含最大立方數者，爲 10 之立方，故 $a=10$.

(3)　由 1728 減 $a^3=1000$ 得 $R=728$.

(4)　以 $3a^2=300$ 除 R 得 2，故 $b=2$.

(5).　$3a^2+3ab+b^2=364$, 以 $b=2$ 乘之,其積 728 由 R 減之無餘, 故 $a+b=12$ 爲所求之根.

通例略 (甲) 如 (乙).

例 2.　求 14886936 之立方根.

運算

$$
\begin{array}{r|l|l}
14|886|936 & 246 & \\
\hline
8 & 3\times 20^2 \quad\;\; =1200 & 3\times 240^2 \quad\; =172800 \\
\hline
6886 & \quad 3\times 20\times 4= \;\; 240 & 3\times 240\times 6= \quad 4320 \\
5824 & \qquad\qquad 4^2= \quad 16 & \qquad\qquad 6^2= \qquad 36 \\
\hline
1062936 & \qquad\qquad\quad 1456\times 4 & \qquad\qquad\quad 177156\times 6 \\
1062936 & & \\
\hline
0 & &
\end{array}
$$

答　246.

說明.　所設之數可分爲三區. 故知立方根爲三位之數, 其百位數, 十位數, 單位數順次以 a, b, c 表之, 依例 1 得 $a=200$, $b=40$.

乃以 $3(a+b)^2=172800$ 除第二剩餘 1062936 得 $c=6$.

例 3.　0.000007645373 開立方.

運算.

$$
\begin{array}{r|l|l}
0.000|007|645|373 & 0.0197 & \\
\hline
1 & 3\times 10^2 \quad =300 & 3\times 190^2=108300 \\
\hline
6645 & 3\times 10\times 9=270 & 3\times 190\times 7=3990 \\
5859 & \qquad\quad 9^2= \;\; 81 & \qquad\quad 7^2= \quad 49 \\
\hline
786373 & \qquad\quad 651\times 9 & \qquad 112339\times 7 \\
786373 & & \\
\hline
0 & &
\end{array}
$$

答　0.0197.

上例，皆開之適盡者，若開之不能適盡，則與開平方相同，求立方根之近似數.

[問 19]　求下列各數之立方根.

(一)　6859.　　(二)　74088.

(三)　389017.　　(四)　912673.

(五)　152273304.　　(六)　348913664.

(七)　27081081027.　　(八)　371.694959.

(九)　0.001771561.

[問 20]　求下列各數之立方根至小數第三位止.

(一)　2515123.　　(二)　38272712.

[問 21]　求下列各數.

(一)　$\sqrt[4]{38950081}$.　　(二)　$\sqrt[4]{1698181681}$.

(三)　$\sqrt[6]{24137569}$.　　(四)　$\sqrt[9]{2224847691}$.

30　分數之開立方法.　求分數之立方根，其分母子爲完全立方者，各求其立方根，(帶分數先化爲假分數)，若非完全立方，則先化其分數爲小數，然後依立方開之.

例 1.　求 $\frac{3375}{59319}$ 之立方根.

解.
$$\sqrt[3]{\frac{3375}{59319}}=\frac{\sqrt[3]{3375}}{\sqrt[3]{59319}}=\frac{15}{39}.$$

例 2.　求 $\frac{3}{4}$ 之立方根.(小數二位止, 以下四捨五入.)

解.
$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{0.75}=0.908\cdots\cdots$$

注意.　所設之分數爲循環小數者, 先求得其循環之數字, 然後依立方開之.

[問 22]　求下列各分數之立方根(若開之不盡, 則求至小數三位止, 以下四捨五入).

(一)　$\frac{2197}{15625}$.　　(二)　$\frac{5}{6}$.　　(三)　$\frac{355}{113}$.

31.　省略開立方法.

求某數 N 之立方根, 其根爲 $(2n+2)$ 位之數者, 依開立方法,求其初之 $(n+2)$ 位之數 a, 倘餘 n 位,則於開立剩餘 $N-a^3$ 以 $3a^2$ 除之,求其商可也.

其證明與開平方法相同, 故略之.

例.　$\sqrt[3]{2}$ 求至小數五位止.

運算.

2|000|000|000	1.259		
1	$3\times10^2=300$	$3\times120^2=43200$	$3\times1250^2=4687500$
1 000	$3\times10\times2=60$	$3\times120\times5=1800$	$3\times1250\times9=33750$
728	$2^2=4$	$5^2=25$	$9^2=81$
272 000	364×2	45025×5	4721331×9
225 125			
46 875 000			
42 491 979			
4 383 021			

$$0.004383021\div(3\times1.259^2)=0.00092\cdots\cdots$$

$\therefore \qquad \sqrt[3]{2} = 1.25992\cdots\cdots$

注意．由 2 減 $(1.25992)^3$ 餘以 $3\times(1.25992)^2$ 除之，倘可得根之四數字．

［問 23］ 試依省略算求下列各數之立方根至小數第五位止．

（一） 3.　　　　（二） 5.

未定係數法

32 依未定係數法，解開法問題，舉其二三例如次：

問題 I． 三項式 x^2+Px+Q 不拘 x 之値若何，但爲完全平方者，其條件若何？

解． 題式爲完全平方者，其根必爲 $x+a$ 之形係一次二項式，故得恆等式如次：

$$x^2+Px+Q=(x+a)^2,$$

$$\therefore \qquad x^2+Px+Q=x^2+2ax+a^2,$$

兩邊 x 同次項之係數相等，故得等式如次：

$$P=2a \qquad [1]$$

$$Q=a^2 \qquad [2]$$

上二式消去 a，即由 [1] 得 $a=\frac{1}{2}P$ 代入 [2]．則

$$Q=\left(\frac{1}{2}P\right)^2,$$

$$\therefore \qquad P^2=4Q$$

卽所求之條件，此解法謂之未定係數法.

別解．　所設之式依平方開之如次：

$$\begin{array}{r|l}
x^2+Px+Q & \quad x+\frac{1}{2}P \\ \cline{2-2}
x^2 \qquad\qquad & (2x+\frac{1}{2}P)\times\frac{1}{2}P \\ \cline{1-1}
+Px+Q & \\
+Px+\frac{1}{4}P^2 & \\ \cline{1-1}
Q-\frac{1}{4}P^2 &
\end{array}$$

題式爲完全平方，故其剩餘必爲零.

$$\text{卽} \qquad Q-\frac{1}{4}P^2=0,$$

$$\therefore \qquad P^2=4Q.$$

問題 II.　依未定係數法，求下式之平方根.

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9.$$

解．　題式若爲完全平方，則其平方根必爲 $2x^2+Mx+N$ 之形，係二次三項式，故得恆等式如下：

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9=(2x^2+Mx+N)^2$$
$$\equiv 4x^4+4Mx^3+(M^2+4N)x^2+2MNx+N^2.$$

$$\therefore \quad -4=4M \quad (1), \qquad +13=M^2+4N \quad (2),$$
$$-6=2MN \quad (3), \qquad +9=\quad +N^2 \quad (4).$$

四等式中(1)及(2) $M=-1, N=3$, 以此值代入(3)及(4)適合.

故所求之平方根, 爲 $2x^2-x+3$.

若(1), (2)所得 M, N 之值, 不能與(3), (4)適合, 則題式非完全平方.

問題 III.　設有多項式如次, 問是否爲完全立方, 如爲完全立方, 試求其立方根.

$$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27.$$

解.　題式若爲完全立方, 則其立方根必爲 x^2+Mx+N 之形.

$$\begin{aligned}(x^2+Mx+N)^3 &= x^6+3Mx^5+3(M^2+N)x^4+(M^3+6MN)x^3 \\ &\quad +3(M^2N+N^2)x^2+3MN^2x+N^3 \\ &= x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27.\end{aligned}$$

若 M, N 之值, 與下列六等式適合, 則題式爲完全立方.

$$3M=6,\quad 3(M^2+N)=21,\quad M^3+6MN=44,$$
$$3(M^2N+N^2)=63,\quad 3MN^2=54,\quad N^3=27.$$

由前二式得 $M=2, N=3$, 以此值代入餘四式適合.

故題式爲完全立方, 其立方根爲 x^2+2x+3.

[問 24]　ax^2+bx+c 若爲完全平方式, 則 $b^2=4ac$, 試證之.

［問 25］ 試依未定係數法，求下式之平方根.

(一) $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4$.

(二) $x^{10}+6x^9+13x^8+4x^7-18x^6-12x^5$

$+14x^4-12x^3+9x^2-2x+1$.

［問 26］ 試依未定係數法，求下式之立方根.

$8x^6-36x^5+78x^4-99x^3+78x^2-36x+8$.

［問 27］ 下列各代數式，若爲完全平方，其 a, b, c 等之值各若何？

(一) $4x^4-12x^3+5x^2+ax+b$.

(二) $x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$.

(三) $(x^2+2x+4)^3-(ax^4+bx^3+cx^2)$.

［問 28］ 三次式 x^3+3ax^2+bx+c 其 x 之值不拘如何而爲完全立方者，其 b,c 間之關係若何？

練 習 問 題 II.

1. 試依視察求下式之平方根.

(一) $25a^4+9b^4+4c^4+12b^2c^2-20c^2a^2-30a^2b^2$.

(二) $a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2bcx^3+c^2x^4$.

(三) $x^6-2x^5+3x^4+2x^3(y-1)+x^2(1-2y)+2xy+y^2$.

(四) $\dfrac{a^2}{b^2c^2}+\dfrac{b^2}{c^2a^2}+\dfrac{c^2}{a^2b^2}+2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$.

2. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ 必爲完全平方.試證之.

3. 求下列各式之平方根.

(一) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{2a}{3}+\dfrac{7a^2}{9}-\dfrac{2a^3}{3}+\dfrac{a^4}{9}$.

(二) $a^4-3a^3+\dfrac{25}{9}-5a+\dfrac{67}{12}a^2$.

(三) $\dfrac{25x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{25x^2}-20\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{5x}+2$.

(四) $a^2-6ab+10ac-14ad+9b^2-30bc$

$$+42bd+25c^2-70cd+49d^2.$$

(五) $x^4+(2a-4)x^3+(a^2-2a+4)x^2+(2a^2-4a)x+a^2$.

(六) $6ax(x^3-a^2b)+x^2(x^4-2a^2bx+9a^2)+a^4b^2$.

(七) $4(x-1)(x^3-1)+9x^2$.

(八) $2a^2(b+c)^2+2b^2(c+a)^2+2c^2(a+b)^2$

$$+4abc(a+b+c)$$

(九) $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$.

(十) $x^2(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+zx(y+z)(yz-x^2)$.

4. 下式爲完全平方，試證之.

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$$

5. 試依視察求下式之立方根.

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+3b^2c+3bc^2.$$

6. 求下列各式之立方根.

(一) $8z^9-12z^8+6z^7-37z^6+36z^5-9z^4+54z^3-27z^2-27.$

(二) $4x^2(2x-y^2)+y^4\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{27}y^2\right).$

(三) $8x^6-36cx^5+102c^2x^4-171c^3x^3+204c^4x^2-144c^5x+64c^6.$

7. 求 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$ 之四乘根.

8. 求 $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^2-6\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+9\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ 之六乘根.

9. 求下列各數之平方根.

(一) 9054081.　　(二) 10246401.

(三) 9.86965056.

10. 求下列各數之立方根.

(一) 20910518875. (二) 0.588480472.

(三) 122615.327232.

11. 求下列各數.

(一) $\sqrt[4]{0.001698181681}$. (二) $\sqrt[6]{1544804416}$.

(三) $\sqrt[8]{5764801}$.

12. 求 $\sqrt{25.481}$ 與 $\sqrt[3]{128.3092}$ 之差, 至小數點以下四位止.

13. 若下列各式爲完全平方數, 其 x 之數值若何?

(一) $x^4+6x^3+11x^2+3x+31$.

(二) $x^4-2ax^3+(a^2+2b)x^2-3abx+2b^2$.

(三) $x^4+2ax^3+3bx^2+cx+d$.

14. 若 $8x^3-36x^2+56x-39$ 爲完全立方數, 其 x 之數值若何?

15. 若下列各代數式爲完全平方, 其 p, q, r 之數值各若何?

(一) $9x^6-24x^5+px^4+qx^3+rx^2-60x+36$.

(二) $9x^2+2pxy+4y^2+2qx+2ry+4$.

16. $4x^6+12x^5+5x^4-2x^3$ 爲完全平方式之前四項, 問

其餘諸項若何？

17. 不拘 x 之值如何，而 $x^4-ax^3+bx^2-cx+1$ 爲完全平方者，其條件若何？

18. 不拘 x 之值如何，而 $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 爲完全平方，則 $(q-\frac{1}{4}p^2)^3=4s, r^2=p^2s$，試證之.

19. 若 $3mx^2+6(m-2)x+1$ 爲完全平方，其 m 之數值若何？

20. 若 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ 爲 x, y, z 有理整多項式之平方，其條件若何？

21. ax^3+bx^2+cx+d 其 x 之值不拘如何，而爲完全立方，則 $b^2=3ac$, $c^2=3bd$，試證之.

第 三 章

諸 種 之 指 數

33. 關於指數之公式，摘記之如次.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \cdots\cdots\cdots\cdots [1]$$

$$\left.\begin{array}{ll} m>n & a^m \div a^n = a^{m-n}. \\ m<n & a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}. \\ m=n & a^m \div a^n = 1. \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots [2]$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \cdots\cdots\cdots\cdots [3]$$

$$(ab)^m = a^m b^m \cdots\cdots\cdots\cdots [4]$$

m 爲 n 之倍數 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots [5]$

以上各公式 m, n 爲正整數，若此等指數爲分數或負數(例如 $a^{\frac{2}{3}}, a^{-5}$)，則以上各公式爲全無意義.

然若不拘此制限，其指數爲分數或負數者，此於代數計算上大爲便利，惟以分數或負數爲指數者，尙當依代數學基礎之諸原則及指數定則以審定此等指數之意義.

34. 分數指數.

若前節公式[1]假定 m, n 雖爲分數,亦得適用.

則 $$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^{1}.$$

即 $$(a^{\frac{1}{2}})^{2}=a.$$

如是則 $a^{\frac{1}{2}}$ 之平方卽爲 a, 故 $a^{\frac{1}{2}}$ 必爲 a 之平方根.

$\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$ 但爲便利計,故祇取其正根.

如 $$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.$$

依同理 $$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$$

故凡 n 爲正整數者.

則 $$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots n\text{因數止}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdots\cdots n\text{項止}}$$
$$=a^{1}=a,$$

故 $a^{\frac{1}{n}}$ 必爲 a 之 n 乘根.

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[6]$$

又 $$(a^{\frac{2}{3}})^{3}=a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=a^{2}.$$

即 $a^{\frac{2}{3}}$ 之三乘爲 a^{2}.

故 $$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^{2}}.$$

故凡 m, n 爲正整數,

則 $$(a^{\frac{m}{n}})^{n}=a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots n\text{因數止}=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots n\text{項止}}$$
$$=a^{m}.$$

故　$a^{\frac{m}{n}}$ 必爲 a^m 之 n 乘根.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[7]$$

故凡 $a^{\frac{m}{n}}$ 爲 a 之 m 乘羃之 n 乘根.

以上所定分數指數之意義, 其結果則前節之公式 (5) m 非 n 之倍數者, 亦得成立.

[參照第 16 節]

系 I.　$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m\cdots\cdots\cdots\cdots[8]$$

證.　$(\sqrt[n]{a})^m=a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots m$ 因數止.

$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots m}$ 項止.

$=a^{\frac{m}{n}}.$

系 II.　$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[9]$$

證.　令 $x=a^{\frac{m}{n}}$, 則 $x^n=a^m$, 故 $x^{np}=a^{mp}$.

$\therefore$　$x=a^{\frac{mp}{np}}$, 卽 $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$.

例 1.　$3y^{\frac{2}{5}}=3\sqrt[5]{y^2}$.

例 2.　$5\sqrt[4]{a^3}=5a^{\frac{3}{4}}$.

例 3. $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{4^3}=\sqrt{64}=8.$

或 $4^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{4})^3=2^3=8.$

例 4. $a^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{4}{10}}=a^{\frac{6}{15}}=\cdots\cdots$

$a^2=a^{\frac{4}{2}}=a^{\frac{6}{3}}=\cdots\cdots$

[問 1] 試就下列各式, 去其分數指數而以根號表之.

(一) $a^{\frac{1}{3}}z.$ (二) $2a^{\frac{1}{n}}.$ (三) $3y^{\frac{2}{m}}.$

(四) $x^{\frac{n+1}{2}}.$ (五) $8^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}.$ (六) $a^{\frac{m+n}{m-n}}$

[問 2] 試就下式去其根號, 而以分數指數表之.

(一) $\sqrt{3}.$ (二) $\sqrt[7]{x^4}.$

(三) $\sqrt{(x+y)^3}.$ (四) $\sqrt[4]{c^{n-1}}.$

[問 3] 求下列各式之數值.

(一) $16^{\frac{6}{8}}.$ (二) $125^{\frac{2}{3}}.$ (三) $243^{\frac{4}{10}}.$

(四) $0.008^{\frac{4}{3}}.$ (五) $36^{1.5}.$ (六) $2.25^{2.5}.$

(七) $256^{0.125}.$ (八) $(0.0001)^{\frac{1}{4}}.$ (九) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{4}{3}}.$

(十) $\left(20\frac{51}{64}\right)^{\frac{2}{3}}.$ (十一) $0.00032^{\frac{3}{5}}.$

[問 4] 試就指數法詳說之, 其 $x^{\frac{1}{m}}$ 等於 $\sqrt[m]{x}$, 併證明之.

35. 零指數.

公式 $a^m\times a^n=a^{m+n}$, 若 $m=0$ 而亦適用.

則 $$a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n.$$

故若 $a\neq 0$

則 $$a^0=\frac{a^n}{a^n}=1.$$

即 $$\mathbf{a^0=1} \qquad\text{[10]}$$

是不爲零者之任何數之零乘冪爲 1 也.

36. 負指數.

公式 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 若 $m=-n$

則 $$a^{-n}\times a^n=a^{-n+n}=a^0=1.$$

故 $$\mathbf{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}. \qquad\text{[11]}$$

是某數之 $-n$ 乘冪,即其 n 乘冪之逆數也.

又由上式 $$\mathbf{a^n=\frac{1}{a^{-n}}}. \qquad\text{[12]}$$

以上所定負指數之意義, 其結果則第 33 節公式 [2] 可併爲一式如次:

即不關於 m, n 之大小如何,

而爲 $$\frac{\mathbf{a^m}}{\mathbf{a^n}}=\mathbf{a^{m-n}=a^{-(n-m)}} \qquad\text{[13]}$$

又由公式[11]及[12]述之如次.

分數分子中之因數,移於分母,或分母中之因數移於分子,當變其指數之符號.

例 1. $x^{a-b}\times x^{b-a}=x^{a-b+b-a}=x^0=1.$

例 2. $a^{-\frac{5}{6}}=\dfrac{1}{a^{\frac{5}{6}}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^5}}.$

例 3. $\dfrac{a^2b^3}{4x^5y^2}$ 去其分母.

解. 題式 $=4^{-1}a^2b^3x^{-5}y^{-2}.$

例 4. $\dfrac{3a^{-2}}{5x^{-1}y^3}$ 以正指數表之.

解. 題式 $=\dfrac{3x}{5a^2y^3}.$

[問 5] 試就下列各式之指數,以正指數表之.

(一) $5a^{-\frac{2}{3}}.$ (二) $2x^{-2}y^2.$ (三) $a\div a^{-2}.$

(四) $\dfrac{1}{7x^{-\frac{1}{2}}}.$ (五) $\dfrac{3a^{-3}x^2}{8b^{-4}y^{-2}}.$ (六) $\dfrac{2}{\sqrt{y^{-3}}}.$

(七) $\dfrac{1}{4\sqrt[5]{x^{-\frac{8}{4}}}}.$ (八) $\dfrac{a^0}{b^{-n}}.$ (九) $\dfrac{m^{-n}}{x^0}.$

(十) $\dfrac{x^{-2}}{y^{n-3}}.$ (十一) $\dfrac{a^{-p}}{b^{-q}}.$ (十二) $\dfrac{2^3a^{-2}c^2}{2^4x^{-3}y^2}.$

[問 6] 求下列各式之數值.

(一)　$4^{-\frac{3}{2}}$.　　(二)　$8^{-\frac{2}{3}}$.　　(三)　$\dfrac{1}{25^{-2}}$.

(四)　$(0.0001)^{-\frac{1}{4}}$.(五)　$(0.0625)^{-\frac{3}{4}}$,　(六)　$\left(15\dfrac{5}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

［問 7］　下式去其負指數及分數指數.

$$x^{-\frac{2}{3}}y^{3}-2^{-1}x^{\frac{1}{2}}y^{-3}$$

37. 以分數及負數爲指數之單項式之計算.

前諸節所定分數指數零指數及負指數之意義,其結果則第 33 節諸公式 m, n 爲零或分數或負數,皆得適用,故凡含此等指數之式,其於乘法,除法,羃法,開法等之計算,仍與正整數相同.

例 1.　$3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ 以 $4a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{2}}$ 乘之.

解.　$3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\times 4a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{2}}=12a^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)}b^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}$

$$=12a^{\frac{1}{2}}b^{3}.$$

例 2.　求 $\dfrac{2}{7}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{5}}$ 之立方.

解.　$\left(\dfrac{2}{7}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{5}}\right)^{3}=\left(\dfrac{2}{7}\right)^{3}a^{\frac{2}{3}\times 3}b^{-\frac{1}{5}\times 3}$

$$=\frac{8}{343}a^{2}b^{-\frac{3}{5}}.$$

例 3.　$\dfrac{\sqrt[6]{x^{5}}\times\sqrt[4]{y^{3}}}{\sqrt[3]{x^{2}}\times\sqrt{y^{-1}}}$,試簡之.

解. 題式 $=\dfrac{x^{\frac{5}{6}}\times y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}\times y^{-\frac{1}{2}}}=x^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}\times y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{4}}.$

例 4. 求 $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{4}{3}}$ 之平方根.

解. $\sqrt{\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{4}{3}}\right)}=a^{\frac{1}{2}\div 2}b^{\frac{2}{3}\div 2}c^{-\frac{4}{3}\div 2}.$

$$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5. $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{y^{-1}}}{y\sqrt[3]{x^{-2}}}\div\sqrt{\dfrac{x\sqrt{y^{-4}}}{y\sqrt{x^{-2}}}}\right)^4$ 試簡之.

解. 題式 $=\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}}{yx^{-\frac{2}{3}}}\div\sqrt{\dfrac{xy^{-2}}{yx^{-1}}}\right)^4=\left(x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{3}{2}}\div\sqrt{x^2y^{-3}}\right)^4$

$$=\left(x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{3}{2}}\div xy^{-\frac{3}{2}}\right)^4=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4=x^{\frac{4}{3}}.$$

[問 8] 試就下式計算, 其結果以正指數表之.

(一) $2x^{\frac{1}{2}}\times 3x^{-1}$. (二) $1\div 2a^{-\frac{1}{2}}$.

(三) $\sqrt[4]{x^3}\div\sqrt{x^{-1}}$. (四) $a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\div a^{-3}$.

(五) $\sqrt[3]{a^{-1}}\div\sqrt[3]{a}$. (六) $\sqrt[5]{a^{-3}}\div\sqrt[5]{a^7}$.

[問 9] 試就下式計算, 其結果以根號及正指數表之.

(一) $a^{-\frac{1}{3}}\times 3a^{-\frac{1}{2}}$. (二) $5a^{-\frac{1}{2}}\times 3a^{-1}$.

(三) $\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt{a^{-3}}$. (四) $\sqrt[5]{a^{-x}}\times\sqrt[5]{a^{-2x}}$.

(五) $\sqrt[4]{a^n}\times\sqrt[3]{a^n}\div\sqrt[12]{a^{5n}}$.

[問 10]　試就下式簡之，其結果以正指數表之.

(一)　$\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{4b^2}\right)^{-2}$.　　(二)　$\sqrt{a^{-2}b}\times\sqrt[3]{ab^{-3}}$.

(三)　$\dfrac{\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}}}{\sqrt{y\sqrt[3]{x}}}$　　(四)　$\sqrt[3]{(a+b)^5}\times(a+b)^{\frac{2}{3}}$.

(五)　$(a+b)^{\frac{2}{3}}\div(a-b)^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{a^{-2}b^2}$.

(六)　$\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{3}{4}}\div(ab^{-7})^{\frac{1}{12}}$.

(七)　$\dfrac{\sqrt[3]{x^{-\frac{3}{4}}(x^{-2})^3}}{x^{(\frac{1}{2})^2}(x^{-3})^{\frac{3}{8}}}$　　(八)　$\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-\frac{2}{3}}c}\right)^{-\frac{3}{2}}\div\left(\dfrac{\sqrt{a^{-\frac{1}{2}}}\sqrt[6]{b^3}}{a^{3}c^{-1}}\right)^2$.

38.　多項式之計算.

含分數及負數之指數者之多項式，與含正整數指數之多項式，其計算固相同也.

含此等之指數及根號者之多項式.

如　$\dfrac{3x^2}{y}+\dfrac{2\sqrt{x^3}}{y^{-\frac{1}{3}}}+x-\dfrac{1}{2}y+x^3-6\sqrt{(x^5y^{-1})}$.

依 x 之降冪整頓之，其根號則以分數指數表之，分母之文字，移於分子，其不含 x 之項作爲 x^0 而 x 指數之大小，順次排列之.

如 $x^3-6x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{3}}+3x^2y^{-1}+2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}+x-\frac{1}{2}y.$

[參照第 20 節]

多項式之乘法,除法,冪法,開法等,須先依某文字之乘冪整頓之,然後運算.

例 1. $3a^{-\frac{1}{3}}+a+2a^{\frac{2}{3}}$ 以 $a^{\frac{1}{3}}-2$ 乘之.

運算.
$$\begin{array}{rl}
& a+2a^{\frac{2}{3}}+3a^{-\frac{1}{3}} \\
& a^{\frac{1}{3}}-2 \\ \hline
& a^{\frac{4}{3}}+2a+3 \\
& \quad -2a-4a^{\frac{2}{3}}-6a^{-\frac{1}{3}} \\ \hline
\text{答} & a^{\frac{4}{3}} \qquad -4a^{\frac{2}{3}}+3-6a^{-\frac{1}{3}}
\end{array}$$

例 2. 求 $x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$ 之立方.

解. $(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3=(x^{\frac{2}{3}})^3+3(x^{\frac{2}{3}})^2(y^{-\frac{2}{3}})+3(x^{\frac{2}{3}})(y^{-\frac{2}{3}})^2+(y^{-\frac{2}{3}})^3$

$$=x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}$$

例 3. $a+b$ 以 $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ 除之.

運算.
$$\begin{array}{r|l}
a \qquad\qquad\qquad +b & a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}} \\ \cline{2-2}
a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} & a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}} \text{ 答} \\ \cline{1-1}
+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b & \\
+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

或　$(a+b)\div(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$$=\{(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3\}\div\{(a^{\frac{1}{3}})^2-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}})^2\}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}.$$

注意．此種計算亦可依公式行之．

例 4.　求　$9x^{-4}-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+15x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2$　之平方根．

運算．

$$\begin{array}{r|l}
9x^{-4}-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+15x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2 & \underline{3x^{-2}-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y} \\
\underline{9x^{-4}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\
-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+15x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2 & (6x^{-2}-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}})(-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}}). \\
\underline{-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+\ 9x^{-2}y\qquad\qquad\qquad} & \\
6x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2 & \\
\underline{6x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2} & (6x^{-2}-6x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y)(y) \\
0 & \text{答}\quad 3x^{-2}-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y.
\end{array}$$

[問 11]　試就下列各式計算之．

(一)　$(x^{\frac{1}{2}}-5)(x^{\frac{1}{2}}+5)$.

(二)　$(2x^{\frac{1}{3}}+4+3x^{-\frac{1}{3}})(2x^{\frac{1}{3}}+4-3x^{-\frac{1}{3}})$.

(三)　$(n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}+1)(n^{\frac{1}{3}}-1)$.

(四)　$(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})$.

(五)　$\left(2\sqrt[3]{a^5}-a^{\frac{1}{3}}-\dfrac{3}{a}\right)\left(2a-3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}-a^{-\frac{5}{3}}\right)$.

[問 12]　試就下列各式計算之．

（一）　$(x^{\frac{5}{6}}+2x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})^2.$　　（二）　$\{(e^x+e^{-x})^2-4\}^{\frac{1}{2}}.$

（三）　$(e^{-x}-e^x)(e^{-x}+e^x)+(e^x+e^{-x})^2.$

（四）　$(x^{\frac{1}{12}}+y^{\frac{1}{24}})^4.$

［問 13］　試就下列各式計算.

（一）　$(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})\div(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}).$

（二）　$(a^{-1}-1)\div(a^{-\frac{1}{3}}-1).$

（三）　$(x+y+2\sqrt{xy}-z)\div(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}).$

（四）　$(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{2}{3}}+2b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}})\div(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}).$

（五）　$(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})\div(a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}).$

（六）
$$\left(4\sqrt[3]{x^2}-8x^{\frac{1}{3}}-5+\frac{10}{\sqrt[3]{x}}+3x^{-\frac{2}{3}}\right)$$
$$\div\left(2x^{\frac{5}{12}}-\sqrt[12]{x}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right).$$

［問 14］　求下列各式之平方根.

（一）　$x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{2}{3}}+2x+x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}.$

（二）　$4\sqrt{x^3}-12\sqrt[4]{x^3}\,y+25\sqrt{y}-24\sqrt[4]{\dfrac{y^3}{x^3}}+16x^{-\frac{3}{2}}y$

［問 15］　求下列各式之立方根.

（一）　$x^3-9x+27x^{-1}-27x^{-3}.$

（二）　$a^{\frac{3}{2}}+3ax^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}+x.$

練習問題 III.

1. 下列各式試簡之:

(一)　$\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{\frac{2}{3}}} \div \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b^4c^{-1}}$.

(二)　$\left(\dfrac{a^{-2}b}{a^3b^{-4}}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{ab^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^5$.

(三)　$(3a^6b^{12}c^{18})^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[5]{a^{-\frac{5}{3}}b^{-5}c^{-\frac{25}{3}}}\right)^3 \div (9a^6b^{15}c^{24})^{\frac{1}{3}}$.

(四)　$(x^{q-r})^p \times (x^{r-p})^q \times (x^{p-q})^r$.

(五)　$\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}} \times \left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}$.

(六)　$\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$.

(七)　$\left\{\left(x^{\frac{p-q}{r}}\right)^{\frac{q-r}{p}}\right\}^{\frac{r-p}{q}} \times x^{\frac{p-q}{r}} \times x^{\frac{q-r}{p}} \times x^{\frac{r-p}{q}}$.

(八)　$\left\{\dfrac{a^{p-q}}{\sqrt[q]{a^{q^2-pq}}} \times a^{2(p-q)}\right\}^n$.

(九)　$\left(a^{\frac{n}{m}-1}\right)^{-\frac{m}{n-m}} \times \sqrt[m]{\dfrac{a^{\frac{m-n}{2}}}{(a^{-m}a^{-n})^{\frac{1}{2}}}}$.

(十)　$\left(a^{\frac{a}{b}}y^{-1}\right)^b \div \left(\dfrac{x^{a^2-b^2}}{y^{a^2+b^2}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$.

(十一) $$\frac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{q}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^n}\left(\sqrt[m]{b}\right)^r\right\}^{mq}}\div\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^q\right\}^r.$$

(十二) $$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{p+q}{p-q}}\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{p-q}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\right\}.$$

2. 下式試證明之.

$$\sqrt[y+3]{\left(\frac{\sqrt[y-1]{x^2}}{\sqrt[y+1]{x}}\right)^{y^2-1}}=x.$$

3. 下式試證明之.

$$\frac{\sqrt[n]{\sqrt[n+1]{x}}}{\sqrt[n+1]{\sqrt[n+2]{x}}}=\sqrt[n]{x}\div\sqrt[n+1]{x^2}\times\sqrt[n+2]{x}.$$

4. 試就下列各式計算之.

(一) $$\frac{4^{\frac{3}{2}}\times 9^{-2}}{81^{-\frac{3}{2}}\times 16^{\frac{7}{4}}}$$

(二) $$\sqrt[5]{2^2\times(2^4)^3\div 2^5}.$$

(三) $$\frac{5^3\times 2^{\frac{3}{4}}\times 10^{-\frac{1}{4}}}{15^{\frac{3}{4}}\times 6^{-\frac{3}{4}}\times 4^{\frac{5}{8}}}.$$

(四) $$\frac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}}\div\frac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}.$$

(五) $$\left\{\frac{(9^{n+\frac{1}{4}}\times\sqrt{3\times 3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

5. 求下列各式之積.

(一) $$(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1)(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1)(x-x^{\frac{1}{2}}+1).$$

(二)　$(x-x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+x^{-1})$.

(三)　$(x^{-\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\div\sqrt[6]{x}+y^{\frac{2}{3}})(x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{y})$.

(四)　$(x^{\frac{2}{n}}-2x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{2}{n}})(x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{2n}}y^{\frac{1}{2n}}+y^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n}})$.

(五)　$\left\{\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}}+\sqrt{\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b}}\right\}\left\{\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}}-\sqrt{\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b}}\right\}$.

6.　求下列各式之商.

(一)　$(x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}})\div(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$.

(二)　$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\right)$

$$\div\{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\}.$$

(三)　$(1-\sqrt{x}-\frac{2}{x^{-1}}+2x^2)\div(1-x^{\frac{1}{2}})$.

(四)　$(a+b+c-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}})\div(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})$.

(五)　$\left(\frac{x^{\frac{7}{3}}}{y^{\frac{14}{5}}}+\frac{y^{\frac{14}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}}\right)\div\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}+\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$.

7.　求下列各式之平方根.

(一)　$a+b+\frac{4}{a+b}-4$.

(二)　$x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$.

(三)　$x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$

8. 求 $x^3+3x^2+6x+7+6x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}$ 之立方根.

9. 下列各式試簡之.

(一) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$.

(二) $\dfrac{a^2+b^2+ab}{(a^3-b^3)(x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}})}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(a-b)(x-a)}$.

(三) $\sqrt{x-2+x^{-1}}\times\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-1}$.

(四) $\dfrac{x-7x^{\frac{1}{2}}}{x-5\sqrt{x}-14}\div\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{-1}$.

(五) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}$.　(六) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-4\sqrt[3]{x^{-2}}}{\sqrt[3]{x^2}+4+4x^{-\frac{2}{3}}}$.

(七) $\dfrac{21x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}{3x^{\frac{1}{3}}+1}$.　(八) $\dfrac{ax^{-1}+a^{-1}x+2}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-1}$.

(九) $\dfrac{a^{-2}-2a^{-1}c^{-1}+c^{-2}}{a^{-3}-c^{-3}}$.　(十) $\dfrac{a^2-a^2b^{-2}-1+b^{-2}}{a+ab^{-1}+1+b^{-1}}$.

(十一) $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$.

(十二) $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}$.

10. 下列各式試證之.

(一) $$\frac{(xy^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2y)^{\frac{1}{3}}+x}{x+y}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}.$$

(二) $$\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{2}{3}}+2.$$

(三) $$\frac{a^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x-x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^2x^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{3}{2}}x-3ax^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^2-x^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{x+a}{x^2+3ax+a^2}.$$

(四) $$\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b^4}}.$$

(五) $(2x+y^{-1})(2y+x^{-1})=(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})^2.$

11. $$\frac{x^{-1}(1+\sqrt{1-x^3})^{\frac{1}{3}}}{\dfrac{x^{\frac{2}{3}}(1+\sqrt{1-x^3})^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt{1-x^3}}+x^{-\frac{2}{3}}(1+\sqrt{1-x^3})^{\frac{1}{3}}},$$ 試簡之.

12. $$\frac{1}{(4x^3-3x)^2}-\left\{\frac{\dfrac{3}{x}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{x^3}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}}{1-\dfrac{3}{x^2}(1-x^2)}\right\}^2,$$ 試簡之.

13. 若 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ 則 $(x+y+z)^3=27xyz$, 試證之.

14. 若 $a^b=b^a$ 則 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$, 試證之.

15. 若 $b^2=ac$ 則 $\frac{a^2-b^2+c^2}{a^{-2}-b^{-2}+c^{-2}}=b^4$, 試證之.

16. 下列各方程式試解之.

(一) $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}+1=0.$　　(二) $x^{\frac{2}{5}}-x^{\frac{1}{5}}-6=0.$

(三) $2x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}=5.$　　(四) $4^x+8=9\times 2^x.$

第四章

無理數

39. 定義. 某數之若干乘根，不能完全求得者其根謂之無理數，亦稱不盡根數.

例如 $\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{9}$ 爲無理數.

對於無理數，特稱整數及分數爲有理數.

整數或分數之 n 乘冪，爲整數或分數，然逆之則整數或分數之 n 乘根，未必爲整數或分數.

例如 $2^2=4$ 與 $3^2=9$ 之間，有四個整數，其中任取一數如 5 之平方根，則旣不能得整數，又不能成分數，試證明之.

$$2^2<5<3^2,$$

$$\therefore \quad 2<\sqrt{5}<3.$$

卽 $\sqrt{5}$ 在 2 與 3 之間，其非整數明矣，又 $\sqrt{5}$ 假若等於旣約分數 $\frac{m}{n}$.

則 $$\sqrt{5}=\frac{m}{n},$$

兩邊各自乘， $5=\dfrac{m^2}{n^2}$.

然既約分數之平方仍爲既約分數，故如上式爲不合理，故 $\sqrt{5}$ 不能爲分數，即 $\sqrt{5}$ 不能以整數或分數表之，故推廣數之範圍，而以 $\sqrt{5}$ 爲平方爲 5 之數，即 $(\sqrt{5})^2=5$ 一種之數，於是稱之爲無理數，而與整數分數視同一類.

依同理，$\sqrt[3]{9}$ 爲無理數，爲三乘冪爲 9 之數.

又凡 $\boldsymbol{a}$ 之 $\boldsymbol{n}$ 乘根若爲無理數，亦得式如次，

$$(\sqrt[n]{a})^n=a. \qquad \text{[參照第 11 節]}$$

分數亦然，證明如次.

既約分數 $\dfrac{a}{b}$ 其 a, b 非同時爲某整數之 n 乘冪者，則 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ 爲無理數.

例如 $\dfrac{4}{15}$ 其 15 非平方數，故 $\sqrt{\dfrac{4}{15}}$ 爲無理數.

注意. 此爲分子非不盡根數之無理數也，凡非有理數之數，皆稱無理數，例如圓周率即 3.14159265………本書取狹義謂之無理數，若取廣義則此無理數特稱之爲不盡數，於是有理數稱爲盡數.

40. 無理數，其値不能完全求得，然依開方法，則固可求其任何接近之小數.

例如依開平方法,(第 24 節例)

$$2<\sqrt{5}<3,$$

$$2.2<\sqrt{5}<2.3,$$

$$2.23<\sqrt{5}<2.24,$$

$$2.236<\sqrt{5}<2.237,$$

$$2.2360<\sqrt{5}<2.2361,$$

$$2.23606<\sqrt{5}<2.23607$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因 $\sqrt{5}$ 之近似數 2.23606 與 2.23607 之差爲 0.00001, 故各近似數與 $\sqrt{5}$ 之差皆比 0.00001 小, 故 $\sqrt{5}$ 之值, 任取前者, 或取後者, 其誤差皆比 0.00001 小.

然依開平方法連續計算, 所得小數, 雖與 $\sqrt{5}$ 之眞值, 愈益接近, 而 $\sqrt{5}$ 之眞值, 究不能以有限之數字表之, 此所以名爲不盡根數也.

代數之計算, 不必一一求無理數之近似數, 惟視 $\sqrt{5}$ 之數爲平方爲 5 之數處理之而已, 若必明言其數, 則於最後以求其近似數可也.

注意.　前式 $\sqrt{5}$ 左邊之數, 皆爲不足之近似數, 右邊皆

爲有餘之近似數，與第 22 節例 4 之說明參照.

41.　定義.　附有根號之代數式，稱之爲**無理式**，或稱**不盡根式**.

因欲與無理式有區別，故特稱整式及分數式爲**有理式**.

無理數無理式，通稱之爲無理數或不盡根數.

例如　$\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ 爲無理式.

有形似無理式者，其實非無理式也.

例如　$\sqrt[3]{a^6}$, 及 $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ 皆爲有理式.

42.　不盡根數計算之公式.

本章所用之文字爲正整數.

I.　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.　　［參照第 34 節系］

證.　左邊取 np 乘冪 $(\sqrt[n]{a^m})^{np}=\{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p$　［第 4 節］

$=(a^m)^p$　［第 11 節］

$=a^{mp}$.　［第 4 節］

右邊取 np 乘冪　$(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$.　［第 11 節］

$\therefore$　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.　［第 13 節］

不盡根數，其根指數與根號內之數之冪指數，若同以某整數乘之，或同以其公約數除之，其值不變.

例.　$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$.

II. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. ［第 14 節］

例. $\sqrt{12ab^3}=\sqrt{4b^2\times 3ab}=\sqrt{4b^2}\sqrt{3ab}=2b\sqrt{3ab}$.

III. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ［第 15 節］

例. $\sqrt[3]{\dfrac{3x}{8y^3z^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{8y^3z^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3x}}{2yz^2}$.

IV. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

證. 左邊取 n 乘冪 $\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m$ ［第 8 節］

$=a^m$. ［第 11 節］

右邊取 n 乘冪　$(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$.

$\therefore$　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$. ［第 13 節］

V. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

此因兩邊若同取 mn 乘冪，則皆爲 a.

例. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}$.

系. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

43. 定義. 不盡根數最簡單之形云者，係指根號內之數或式化爲最簡單之整數或整式者而言也.

由前節之公式，化不盡根數爲最簡形，其法則如次.

〔法則 I〕 根號內之數之冪指數與根指數有公約者，以

公約數除雙方之指數.　[前節公式 I]

例 1.　$\sqrt[4]{49}=\sqrt[4]{7^2}=\sqrt{7}$.

例 2.　$\sqrt[12]{27x^3y^6}=\sqrt[12]{(3xy^2)^3}=\sqrt[4]{3xy^2}$.

II.　根號內之某因數之冪指數爲根指數之倍數者,先以根指數除之,然後出其因數於根號之外.

[前節公式 II]

例 1.　$\sqrt{80}=\sqrt{4^2\times 5}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.

例 2.　$\sqrt[4]{16a^7b^9}=\sqrt[4]{2^4a^4b^8a^3b}=\sqrt[4]{2^4a^4b^8}\sqrt[4]{a^3b}$

$$=2ab^2\sqrt[4]{a^3b}.$$

由有理數與不盡數之積所成之式,後者稱爲無理因數,前者爲其係數,如前例(1) $\sqrt{5}$ 爲無理因數,4 爲其係數.

III.　根號內之數爲分數者,以便宜之數乘分母子,而令根號僅屬於分子.

卽　$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{bb^{n-1}}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}}$$

$$=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}.$$

例 1.　$\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{4\times 5}{5\times 5}}=\frac{\sqrt{4\times 5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

例 2.　$\sqrt[3]{\frac{7}{9}}=\sqrt[3]{\frac{7\times3}{3^2\times3}}=\frac{\sqrt[3]{7\times3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{21}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{21}.$

例 3.　$\sqrt[3]{\frac{xy}{2z^2}}=\sqrt[3]{\frac{4xyz}{8z^3}}=\frac{1}{2z}\sqrt[3]{4xyz}.$

［問 1］　下列諸式，試化爲最簡形.　［參照法則 I］

(一)　$\sqrt[4]{36}.$　(二)　$\sqrt[8]{16}.$

(三)　$\sqrt[3]{27^2}.$　(四)　$\sqrt[9]{1000}.$

(五)　$\sqrt[12]{8x^6y^9z^{15}}.$　(六)　$\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6}.$

［問 2］　下列諸式，試化爲最簡形.　［參照法則 II］

(一)　$\sqrt{18}.$　(二)　$\sqrt{588}.$

(三)　$\sqrt[3]{432}.$　(四)　$\sqrt{125\times135}.$

(五)　$\sqrt[3]{40\times45\times48}.$　(六)　$\sqrt[4]{3125}.$

(七)　$\sqrt{27a^3b^5}.$　(八)　$\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}.$

(九)　$\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}.$　(十)　$\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}.$

(十一)　$\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}.$　(十二)　$\sqrt{pq^2-6pq+9p}.$

［問 3］　下列諸式，試化爲最簡形.　［參照法則 III］

(一)　$\sqrt{\frac{3}{2}}.$　(二)　$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$　(三)　$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$

(四)　$\sqrt[5]{\frac{3}{16}}.$　(五)　$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$　(六)　$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{32ab^3}}.$

(七) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}$. (八) $\sqrt[3]{1-\dfrac{a^3}{b^3}}$.

(九) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}\right)}$.

44. 不盡根數之係數，入於根號之內.

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}$$

$$=\sqrt[n]{a^nb}. \qquad \text{[第 42 節 II]}$$

〔**法則**〕 不盡根數之係數，欲使之入於根號之內者，先以無理因數之根指數乘係數之指數，然後入於根號之內.

例 1. $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{75}$.

例 2. $\dfrac{2}{x^2}\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}x}=\sqrt[3]{\dfrac{8}{x^6}\times\dfrac{4}{9}x}=\sqrt[3]{\dfrac{32}{9x^5}}$.

[問 4] 試將下式之係數，入於根號之內.

(一) $14\sqrt{5}$. (二) $5\sqrt[3]{6}$.

(三) $3a\sqrt{3a}$. (四) $\dfrac{4}{11}\sqrt{\dfrac{77}{8}}$.

(五) $3ax\sqrt[4]{\dfrac{1}{27a^3x^3}}$. (六) $\dfrac{y}{x^n}\sqrt{\dfrac{x^{2n+1}}{y^3}}$.

(七) $\dfrac{a}{b}\sqrt[p]{\dfrac{b^{p+1}}{a^{p-1}}}$. (八) $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.

(九) $\dfrac{1}{x-3}\sqrt{x^2+x-12}$. (十) $\dfrac{ax}{a-x}\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2x^2}}$.

45. 定義. 不盡根數最簡單之諸形,惟其係數爲異者,謂之**同類根數.**

例如　$7\sqrt{3}$ 與 $5\sqrt{3}$ 爲同類根數.

例.　$\sqrt{9a^3b}$ 與 $\sqrt{64a^5b^3}$ 爲同類根數,試證之.

解. 化二式爲最簡形.

$$\sqrt{9a^3b}=3a\sqrt{ab},\qquad \sqrt{64a^5b^3}=8a^2b\sqrt{ab}.$$

故二式爲同類根數.

[問 5]　試化下列諸不盡根數爲同類根數.

(一)　$\sqrt{18},\ \sqrt{50},\ \sqrt{\dfrac{1}{8}}.$　(二)　$\sqrt[3]{24},\ \sqrt[3]{192},\ \sqrt[3]{\dfrac{8}{9}}.$

(三)　$\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)},\ \sqrt{(x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4)}.$

無理單項式之計算

46. 加法及減法.

〔**法則**〕　求二以上不盡根數之代數和者,先化各數爲最簡單之形,依同類根數作其係數之代數和,而以公共之無理因數附之.

例 1.　$3\sqrt{45}-\sqrt{20}+7\sqrt{5}=9\sqrt{5}-2\sqrt{5}+7\sqrt{5}$

$$=14\sqrt{5}.$$

例 2.　$\sqrt{16a^2b}-8\sqrt{ab^2}+3a\sqrt{b}-7b\sqrt{a}$

$=4a\sqrt{b}+3a\sqrt{b}-8b\sqrt{a}-7b\sqrt{a}$

$=7a\sqrt{b}-15b\sqrt{a}$.

例 3.　$2\sqrt{3}+\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}=2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{16}{3}}$

$=2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\left(2+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)\sqrt{3}$.

$=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

注意.　非同類之不盡根數，其和不能得單一之不盡根數.

[問 6]　下列各式，試簡之.

(一)　$\sqrt{24}+\sqrt{150}+\sqrt{54}$.

(二)　$\sqrt{44}-5\sqrt{176}+2\sqrt{99}$.

(三)　$\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$.

(四)　$3\sqrt[4]{162}-72\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{1250}$.

(五)　$7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128}$.

[問 7]　下式試簡之.

(一)　$\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{\frac{1}{20}}$.

(二)　$\sqrt{252}+\sqrt{294}-48\sqrt{\frac{1}{6}}$.　(三)　$\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{1}{3}}$.

(四)　$\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[9]{\frac{1}{2}}$.　(五)　$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$.

[問 8]　下式試簡之.

(一)　$\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$.

(二)　$\sqrt[3]{16a+24}+\sqrt[3]{54a+81}$.

(三)　$\sqrt{a^3-a^2c}-\sqrt{ac^2-c^3}-\sqrt{(a+c)(a^2-c^2)}$.

(四)　$\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}$.

(五)　$\sqrt{(ax^3+6ax^2+9ax)}-\sqrt{(ax^3-4a^2x^2+4a^3x)}$.

(六)　$\sqrt{(2ax^2-4ax+2a)}-\sqrt{(2ax^2+4ax+2a)}$.

47.　**次數.**　不盡根數之次數, 依根指數定之.

例如　$\sqrt{a}$ 爲二次, $\sqrt[3]{xy^2}$ 爲三次之不盡根數.

根指數相同之不盡根數, 稱爲**同次根數**.

化若干不盡根數爲同次根數, 即據公式化之如次:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

例 1.　化 $\sqrt[6]{a^5}$ 與 $\sqrt[8]{b^3}$ 爲同次根數.

解.　以根指數 6 與 8 之最小公倍數 24 爲公共之根指數.

$$\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[6\times4]{a^{5\times4}}=\sqrt[24]{a^{20}}.$$

$$\sqrt[8]{b^3}=\sqrt[8\times3]{b^{3\times3}}=\sqrt[24]{b^9}.$$

例 2.　$2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt[3]{41}$ 孰大.

解.　以二數化爲同次不盡根數.

$$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt[6]{12^3}=\sqrt[6]{1728}.$$

$$\sqrt[3]{41}=\sqrt[6]{41^2}=\sqrt[6]{1681}.$$

故　$$\sqrt[6]{1728}>\sqrt[6]{1681}.$$

∴　$$2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}.$$

比較不盡根數之大小,先化爲同次根數,然後就其根號內之數大小比較之.

[問 9]　化下列各題爲最低次之同次根數.

(一)　$\sqrt{3},\sqrt[3]{3}$.　　(二)　$\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{6}$.

(三)　$3,\sqrt[4]{6}$,　　(四)　$\sqrt[4]{7},\sqrt[5]{5},\sqrt[10]{120}$.

(五)　$\sqrt[6]{3},\sqrt[10]{3},\sqrt[15]{3}$.　(六)　$\sqrt[m]{a^n},\sqrt[n]{a^m}$.

(七)　$\sqrt[3]{a^2},\sqrt[4]{2a^3b^2},\sqrt[6]{7b^5}$.

[問 10]　試比較下列各題不盡根數之大小.

(一)　$3\sqrt{2},2\sqrt[3]{3}$.　　(二)　$\sqrt{3},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{5}$.

(三)　$\sqrt[15]{16},\sqrt[10]{6},\sqrt[6]{3}$.

(四) 若 a, b, n 爲正整數, 而 $a<b$ 則 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ 與 $\sqrt[n+1]{\dfrac{a}{b}}$ 之大小比較若何?

乘法及除法

〔法則〕 求二不盡根數之積或商, 先化無理因數爲同次根數, 然後求係數與係數, 無理因數與無理因數之積或商, 其結果之積化爲最簡形.

$$a\sqrt[n]{x}\times b\sqrt[n]{y}=ab\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$$

$$=ab\sqrt[n]{xy}. \qquad \text{[第 42 節公式 II]}$$

$$a\sqrt[n]{x}\div b\sqrt[n]{y}=(a\div b)\times(\sqrt[n]{x}\div\sqrt[n]{y})$$

$$=\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}. \qquad \text{[第42節公式I]}$$

例 1. $2\sqrt{3}\times3\sqrt{8}=6\sqrt{24}=6\times2\sqrt{6}=12\sqrt{6}.$

例 2. $5\sqrt{x}\times\sqrt[3]{x^2y}=5\sqrt[6]{x^3}\times\sqrt[6]{x^4y^2}$

$$=5\sqrt[6]{x^7y^2}=5x\sqrt[6]{xy^2}.$$

例 3. $7\sqrt{75}\div25\sqrt{56}=35\sqrt{3}\div50\sqrt{14}$

$$=\frac{35}{50}\sqrt{\frac{3}{14}}=\frac{7}{10}\sqrt{\frac{3\times14}{14\times14}}=\frac{1}{20}\sqrt{42}.$$

別法. $7\sqrt{75}\div25\sqrt{56}=\dfrac{35\sqrt{3}}{50\sqrt{14}}=\dfrac{7\sqrt{3}\sqrt{14}}{10\sqrt{14}\sqrt{14}}$

$$=\frac{7\sqrt{42}}{140}=\frac{1}{20}\sqrt{42}.$$

例3別法,係除法之法則,又得說明如次.

不盡根數之除法,其商先以分數之形表之.然後去分母之根號.

分數之値不變,而分母之根號化去者,此謂對於分母之有理化.

例4. 1以$2\sqrt{3}$除之其商至小數第四位止.

解. 先求$\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$ 乃以$2\sqrt{3}=3.464\cdots\cdots$除1其計算非常煩雜,故先將其分母爲有理化.

如 $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1.73205\cdots\cdots}{6}$

$$=0.2886\cdots\cdots$$

例5. $\dfrac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{98}}\div\dfrac{5}{7\sqrt{22}}$,試簡之.

解. 題式$=\dfrac{3\sqrt{11}}{14\sqrt{2}}\times\dfrac{7\sqrt{22}}{5}=\dfrac{3\times7}{14\times5}\sqrt{\dfrac{11\times22}{2}}$

$$=\frac{3}{10}\sqrt{11^2}=\frac{33}{10}.$$

又　題式 $=\dfrac{3\cdot\sqrt{11}}{14\cdot\sqrt{2}}\times\dfrac{7\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}{5}=\dfrac{3(\sqrt{11})^2}{10}=\dfrac{33}{10}$

[問 11]　求下題之乘算.

(一) $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$.　(二) $3\sqrt{12}\times5\sqrt{24}$.

(三) $\sqrt{6}\times\sqrt{10}\times\sqrt{15}$.　(四) $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{15}$.

(五) $\sqrt[3]{60}\times\sqrt[3]{90}\times\sqrt[3]{15}$.　(六) $\sqrt{\dfrac{21}{2}}\times\sqrt{\dfrac{35}{8}}$.

(七) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}$.　(八) $\sqrt{a^3b^5c^7}\times\sqrt[3]{a^2b^4c^8}$

(九) $\sqrt[2n]{a}\times\sqrt[3n]{a}$

[問 12]　求下題之除算.

(一) $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$.　(二) $10\div2\sqrt{5}$.

(三) $\sqrt{35}\div\sqrt{\dfrac{7}{5}}$.　(四) $21\sqrt{384}\div8\sqrt{98}$

(五) $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}$.

(六) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}\div\left(\sqrt{2}+3\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$.

(七) $\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{1}{3}}\div\left(\sqrt{3}+2\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.

(八) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\div\left(3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)$.

(九) $\sqrt[6]{\dfrac{a}{b}} \div \sqrt[9]{\dfrac{a}{b}}$.

(十) $\dfrac{3}{a-b}\sqrt{\dfrac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\dfrac{18x^3}{(a-b)^5}}$.

[問 13] 下式試簡之.

(一) $\dfrac{3\sqrt{48}}{5\sqrt{112}} \div \dfrac{6\sqrt{84}}{\sqrt{392}}$.

(二) $\left(2\sqrt{8} \times 4\sqrt[4]{\dfrac{1}{4}}\right) \div \left(4\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \times \sqrt[6]{4}\right)$.

(三) $\dfrac{\sqrt[3]{(ab^2)}\sqrt[6]{(ab^5)}}{\sqrt[10]{(a^7b^9)}\sqrt[15]{(a^{12}b^{14})}}$.

[問 14] 求下式之值至小數第四位止.

但 $\sqrt{3} = 1.73205$, $\sqrt{5} = 2.23607$,

$\sqrt{6} = 2.44949$, $\sqrt{7} = 2.64575$.

(一) $\dfrac{60}{\sqrt{5}}$. (二) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

(三) $4 \div \sqrt{243}$. (四) $\dfrac{25}{\sqrt{252}}$.

49. 冪法. 由公式 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, 及 $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ 得其法則如次.

〔法則〕 求不盡根數之 m 乘冪, 先以係數及根號內之

數各取 m 乘冪，然後化為最簡形.

例. $(2\sqrt[6]{xy^2z^3})^9=2^9\sqrt[6]{(xy^2z^3)^9}=512\sqrt{(xy^2z^3)^3}$

$$=512\sqrt{x^3y^6z^9}=512xy^3z^4\sqrt{xz}.$$

[問 15]　下式試簡之.

(一)　$(\sqrt{12})^3$.　　　　(二)　$(\sqrt[6]{9})^5$.

(三)　$\{\sqrt[8]{a^2}\}^6$.　　　　(四)　$[2\sqrt[4]{a^2bc^3}]^6$.

(五)　$(\sqrt[7]{a^3b^5})^3\times(\sqrt[7]{a^3b^{12}})^4$.　(六)　$(\sqrt[3]{2})^5\times(\sqrt[5]{3})^2$.

50. 開法.　由公式 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ 及 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ 得其法則如次.

〔法則〕　求不盡根數之 m 乘根，先求係數之 m 乘根，次於無理因數之根指數取 m 倍，然後化為最簡形.

例 1.　求 $\sqrt[5]{a^2b^6}$ 之四乘根.

解.　$\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^2b^6}}=\sqrt[20]{a^2b^6}=\sqrt[10]{ab^3}.$

例 2.　求 $54a\sqrt{bx^9}$ 之立方根.

解.　$\sqrt[3]{54a\sqrt{bx^9}}=\sqrt[3]{54a}\sqrt[6]{bx^9}=3\sqrt[3]{2a}\sqrt[6]{bx^9}$

$$=3x\sqrt[6]{4a^2bx^3}.$$

[問 16]　下式試簡之.

(一)　$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$.　　(二)　$\sqrt[6]{\sqrt{8}}$.　　(三)　$\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$.

(四) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^3b^6c^9}}$.　　(五) $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

(六) $\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}}$.　　(七) $\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a^m}}$.

(八) $\{\sqrt[2m]{\sqrt[2n]{a}}\}^{mnp}$.　　(九) $\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}}$.

無理多項式之計算

51. 乘法.

無理多項式之乘法及冪法，與有理多項式計算相同.

例 1. $2\sqrt{x}-5\sqrt{y}$ 以 $3\sqrt{x}$ 乘之.

解. $(2\sqrt{x}-5\sqrt{y})\times3\sqrt{x}=2\sqrt{x}\times3\sqrt{x}-5\sqrt{y}\times3\sqrt{x}$

$$=6x-15\sqrt{xy}.$$

例 2. 求 $3\sqrt{6}+2\sqrt{5}$ 與 $2\sqrt{3}-\sqrt{10}$ 之積.

解. $(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10})$

$$=(3\sqrt{6})(2\sqrt{3})+(2\sqrt{5})(2\sqrt{3})$$

$$-(3\sqrt{6})(\sqrt{10})-(2\sqrt{5})(\sqrt{10})$$

$$=6\sqrt{18}+4\sqrt{15}-3\sqrt{60}-2\sqrt{50}$$

$$=18\sqrt{2}+4\sqrt{15}-6\sqrt{15}-10\sqrt{2}$$

$$=8\sqrt{2}-2\sqrt{15}.$$

例 3. 求 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ 之平方.

解.　$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt[3]{4})^2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}$

$$=2+\sqrt[3]{16}+2\sqrt[6]{8\times16}$$

$$=2+2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[6]{2}.$$

此題適用 $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm2ab$ 之公式.

例 4.　定 $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 與 $\sqrt{6}+2$ 之大小.

解.　二式皆為正數，故就其平方之大小比較之.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=10+2\sqrt{21},$$

$$(\sqrt{6}+2)^2=10+4\sqrt{6}.$$

此二式右邊之大小，視 $\sqrt{21}$, $2\sqrt{6}$ 之大小可知. 然 $(2\sqrt{6})^2=24$ 比 $(\sqrt{21})^2=21$ 大.

故　$2\sqrt{6}>\sqrt{21}$.

因之 $10+4\sqrt{6}>10+2\sqrt{21}$

則　$(\sqrt{6}+2)^2>(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$,

$$\therefore\ \sqrt{6}+2>\sqrt{3}+\sqrt{7}.$$

[問 17]　試就下式計算之.

(一)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\times\sqrt{6}$.

(二)　$(3\sqrt{x}-15)\times8\sqrt{x}$.

(三)　$(18+2\sqrt{72}-3\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{128})\times\sqrt{2}$.

(四) $\sqrt[3]{2}(3\sqrt[3]{24}+4\sqrt[3]{81}-5\sqrt[3]{375}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{192})$

(五) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})\times(2+\sqrt{15})$.

(六) $(3\sqrt{45}-7\sqrt{5})\left(\sqrt{\dfrac{9}{5}}+2\sqrt{\dfrac{49}{9}}\right)$.

(七) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{8})(8\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{8})$.

(八) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$.

(九) $(35\sqrt{10}+77\sqrt{2}+63\sqrt{3}+28\sqrt{15})$

$\times(\sqrt{10}-\sqrt{3})$.

[問 18] 試就下式計算之.

(一) $(3x\sqrt{2}-3\sqrt{7-2x^2})^2$.

(二) $(\sqrt{10+\sqrt{51}}+\sqrt{10-\sqrt{51}})^2$.

[問 19] 試就下列各題二式之大小比較之. [參照例 4]

(一) $2\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $\sqrt{5}+\sqrt{23}$.

(二) $\sqrt{10}+\sqrt{7}$, $\sqrt{19}+\sqrt{3}$.

(三) $\sqrt{5}+\sqrt{14}$, $\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

52. 共軛不盡根數之積.

定義. 兩二項二次不盡根數,僅聯其二項之符號不同者,此二式稱爲**共軛不盡根數**.

例如 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 是也.

例 1.　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$$=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$$

例 2.　$(3\sqrt{5}+4\sqrt{3})(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})=9\times5-16\times3$

$$=45-48=-3.$$

是二共軛不盡根數之積爲有理數也.

故　$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ 爲 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 之有理化因數.

凡無理式化爲有理式者,其所用之因數,謂之有理化因數.

[問 20]　試計算下列各式.

(一)　$(5\sqrt{8}-2\sqrt{7})(5\sqrt{8}+2\sqrt{7})$.

(二)　$(\sqrt{2p+3q}-2\sqrt{q})(\sqrt{2p+3q}+2\sqrt{q})$.

(三)　$(\sqrt{9+\sqrt{17}})\times(\sqrt{9-\sqrt{17}})$.

(四)　$(\sqrt[3]{12+\sqrt{19}})(\sqrt[3]{12-\sqrt{19}})$.

(五)　$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$.

(六)　$\sqrt{(2-\sqrt{2})(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{2})(5-\sqrt{7})}$.

53. 分母之有理化.

例 1.　求 $\dfrac{2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ 分母之有理化.

解. 以分母之共軛不盡根式乘分母子.

$$題式=\frac{(2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b})(2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}{(2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}$$

$$=\frac{4(a+b)+6\sqrt{a^2-b^2}+2\sqrt{a^2-b^2}+3(a-b)}{4(a+b)-(a-b)}$$

$$=\frac{7a+b+8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}.$$

例 2. $\sqrt{5}-2$ 以 $9-4\sqrt{5}$ 除之, 至小數第三位止.

解. $$\frac{\sqrt{5}-2}{9-4\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}-2)(9+4\sqrt{5})}{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}$$

$$=9\sqrt{5}-18+20-8\sqrt{5}$$

$$=\sqrt{5}+2=2.236+2=4.236.$$

先求分母之有理化, 然後求其近似數, 所以避繁雜之計算也.

除數爲無理多項式者, 其商先以分數表之, 然後求其分母之有理化.

例 3. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}$, 試簡之.

解. 因數分解之, 則分母 $=(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$

$$=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3}).$$

$\therefore$ 題式

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(4+2\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1-2)(1-3)}=\frac{4+2\sqrt{3}-4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{(-1)(-2)}$$

$$=2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

例 4. 求 $\dfrac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ 分母之有理化.

解. 題式 $=\dfrac{(4+2\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}\}}$

$$=\frac{4+2\sqrt{5}+4\sqrt{2}+2\sqrt{10}-4\sqrt{5}-10}{(1+\sqrt{2})^2-5}$$

$$=\frac{-6+4\sqrt{2}-2\sqrt{5}+2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}-2}$$

$$=\frac{-3+2\sqrt{2}+-\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{5}.$$

故凡分母有 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 之形者，先以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ 乘分母子.

則分母 $=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c=a+b-c+2\sqrt{ab}.$$

再以 $a+b-c-2\sqrt{ab}$ 乘分母子.

$$(a+b-c+2\sqrt{ab})(a+b-c-2\sqrt{ab})$$

$$=(a+b-c)^2-4ab$$

$$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca.$$

如是則分母爲有理化矣.

即 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 之有理化因數爲

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})$$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}).$$

注意. 此蓋就恆等式 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

$$=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

以比較之者也.

其他四項以上,仍依此法,逐次推求,可得分母之有理化.

例 5. 求 $\dfrac{12}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 分母之有理化.

解. 題式 $=\dfrac{12(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$$=\frac{12(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-5}$$

$$=\frac{12(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+3-2\sqrt{6}-5}$$

$$=\frac{12(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{6\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-6}.$$

$$=-\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}$$

$$=-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}.$$

注意．　如例 5, 先求分母 $\sqrt{5}$ 之有理化, 俾有理數之部爲零, 而分母即成單項式矣, 若先以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 乘, 則 $\sqrt{3}$ 成有理化, 而分母爲 $4+2\sqrt{10}$, 然後以 $2-\sqrt{10}$ 乘, 俾分母爲全有理化, 似較複雜.

故凡分母爲 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}$ 之形者, 須先使 $\sqrt{x+y}$ 之項成有理化.

例 6.　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$, 試簡之.

解．　分母 $=(\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3}\times1+1^2$, 故依 $(a^2-ab+b^2)(a-b)=a^3+b^3$ 之公式, 即可求得分母之有理化.

$$題式=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\{(\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3}+1\}(\sqrt[3]{3}+1)}=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{3+1}$$

$$=\tfrac{1}{4}(\sqrt[3]{3}+1).$$

[問 21] 下列各式，試簡之.

(一) $(2\sqrt{3}+7\sqrt{2})\div(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})$.

(二) $(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})\div(5-\sqrt{5})$.

[問 22] 求下列各式分母之有理化.

(一) $\dfrac{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. (二) $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$

[問 23] 求下列各式之值至小數第三位止. [參照例 2]

(一) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}$. (二) $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

[問 24] 下列各式，試簡之.

(一) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

(二) $\dfrac{\sqrt{245}+\sqrt{75}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{245}-\sqrt{75}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

(三) $\dfrac{2\sqrt{15}+8}{5+\sqrt{15}}\div\dfrac{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$.

(四) $\dfrac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}+\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}$.

[問 25]　求下列各式分母之有理化.　[參照例 3]

(一)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$.

(二)　$\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{21}-\sqrt{10}-\sqrt{35}}$.

[問 26]　求下列各式分母之有理化.　[參照例 4 例 5]

(一)　$\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.　(二)　$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

(三)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{35}}$.

[問 27]　求下列各式分母之有理化.　[參照例 6]

(一)　$\dfrac{16}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$.　(二)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}$

(三)　$\dfrac{8}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$.

*54. 任意二項無理式之有理化因數.

1.　所設之無理式如 $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}$

令　$\sqrt[p]{a}=X$, $\sqrt[q]{b}=Y$ 而 n 為 p, q 之 $L.C.M.$,故 X^n, Y^n 皆為有理數.

然 X^n-Y^n 則 n 之值無論如何,恆得以 $X-Y$ 整除之,卽

$$X^n-Y^n=(X-Y)(X^{n-1}+X^{n-2}Y+\cdots\cdots+Y^{n-1}).$$

是其有理化因數,爲 $X^{n-1}+X^{n-2}Y+\cdots+Y^{n-1}$.

2. 所設之無理式爲 $\sqrt[p]{a}+\sqrt[q]{b}$.

X, Y, n 同前.

I. n 爲偶數.

$$X^n-Y^n=(X+Y)(X^{n-1}-X^{n-2}Y+\cdots+XY^{n-2}-Y^{n-1}).$$

是其有理化因數爲

$$X^{n-1}-X^{n-2}Y+\cdots\cdots+XY^{n-2}-Y^{n-1}.$$

II. n 爲奇數.

$$X^n+Y^n=(X+Y)(X^{n-1}-X^{n-2}Y+\cdots-XY^{n-2}+Y^{n-1}).$$

是其有理化因數爲

$$X^{n-1}-X^{n-2}Y+\cdots-XY^{n-2}+Y^{n-1}.$$

例. 求 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$ 之有理化因數.

解. $\sqrt{2}=X, \sqrt[3]{5}=Y, n=6$, 而

$$X^6-Y^6=(X+Y)(X^5-X^4Y+X^3Y^2-X^2Y^3+XY^4-Y^5).$$

故 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$ 之有理化因數爲

$$(\sqrt{2})^5-(\sqrt{2})^4(\sqrt[3]{5})+(\sqrt{2})^3(\sqrt[3]{5})^2$$
$$-(\sqrt{2})^2(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt{2})(\sqrt[3]{5})^4-(\sqrt[3]{5})^5.$$

卽　$4\sqrt{2}-4\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}\sqrt[3]{25}-10+5\sqrt{2}\sqrt[3]{5}$
$$-5\sqrt[3]{25}.$$

其相乘積爲 $(\sqrt{2})^6-(\sqrt[3]{5})^6=2^3-5^2=-17.$

注意．根號依分數計算爲便．

[問 28]　求下列各式之有理化因數．

(一)　$\sqrt[3]{x^2}-a\sqrt[6]{y^5}.$　　(二)　$\sqrt{a}+\sqrt[3]{b^4}.$

(三)　$2+\sqrt[5]{3}.$　　(四)　$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{1}{5}}.$

二次不盡根式

55．定理． 某數之平方根，其一部爲有理數者，其他部必不能爲二次不盡根數．

證．假若 $\sqrt{n}=a+\sqrt{m}$

兩邊各自乘．

$$n=a^2+2a\sqrt{m}+m,$$

故
$$\sqrt{m}=\frac{n-a^2-m}{2a}$$

是無理數等於有理數，殊不合理，故 $\sqrt{n}$ 不能等於 $a+\sqrt{m}.$

56. 定理. 由有理數與二次不盡根數之和所成之二式若相等,則有理,無理之部分必兩兩相等.

例如 $$x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}.$$

則 $$x=a,\ \sqrt{y}=\sqrt{b}.$$

證. 如謂 x 與 a 不相等,則或 $x+c=a$

$$x+\sqrt{y}=x+c+\sqrt{b}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{y}=c+\sqrt{b}.$$

是與前節之定理不合.

故 x 必與 a 相等, $\sqrt{y}=\sqrt{b}$. $\therefore\quad y=b.$

57. $A\pm\sqrt{B}$ 之平方根. 凡如 $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ 之形,可使之等於二不盡根數之和或差,爲簡單之形.

蓋假若 $$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

兩邊各自乘.

$$A\pm\sqrt{B}=x+y\pm\sqrt{4xy},$$

依前節之定理.

$$x+y=A\cdots\cdots\cdots\cdots[1]$$

$$4xy=B\cdots\cdots\cdots\cdots[2]$$

由此二式,求 x, y 之值,可由 [1] 兩邊之平方減去 [2] 如下

$$x^2-2xy+y^2=A^2-B,$$

即　$$(x-y)^2=A^2-B.$$

假若 $x>y$

則　$$x-y=\sqrt{A^2-B}\cdots\cdots\cdots\cdots[3]$$

乃由 [1] 及 [3].

得　$$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2},\qquad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\left\{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\right\}}\pm\sqrt{\left\{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}\right\}}.$$

以上公式 若 A^2-B 非完全平方數,則右邊比左邊更爲複雜,故此法惟 A^2-B 爲完全平方者方爲有效.

例 1.　求 $8+2\sqrt{15}$ 之平方根.

解. 假定 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

兩邊各自乘.

$$8+2\sqrt{15}=x+y+2\sqrt{xy}$$

因之　$x+y=8\cdots\cdots[1],\qquad xy=15\cdots\cdots[2]$

由 [1] 及 [2] $(x+y)^2-4xy=64-60=4.$

即　$(x-y)^2=4.$

故　$x-y=2\cdots\cdots\cdots[3]$

由 [1], [3] $x=5$, $y=3$.

$$\therefore\quad \sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

或依公式, 令 $A=8, B=60$ 則 $\sqrt{A^2-B}=2$.

$$\therefore\quad \sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{\left\{\frac{8+2}{2}\right\}}+\sqrt{\left\{\frac{8-2}{2}\right\}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

別解. ab 爲正數.

$$\sqrt{(a+b\pm2\sqrt{ab})}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b},$$

依此公式, $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5+3+2\sqrt{5\times3}}$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

此固可由視察而得其解者也.

例 2. 求 $7-4\sqrt{3}$ 之平方根.

解. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4+3-4\sqrt{3}}$

$$=\sqrt{2^2+3-2(2\sqrt{3})}.$$

$$=2-\sqrt{3}.$$

例 3. 求 $3\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}$ 之四乘根.

解 由公式或由視察, 求兩次平方根.

$$\sqrt{\left(3\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)}=\sqrt{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4}\right)}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}+1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$\therefore\qquad \sqrt[4]{3\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

例 4.　求 $\sqrt{32}-\sqrt{30}$ 之平方根.

解. $\sqrt{32}-\sqrt{30}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{15}=\sqrt{2}(4-\sqrt{15})$

$$\therefore\quad \sqrt{(\sqrt{32}-\sqrt{30})}=\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

$$=\sqrt[4]{2}\sqrt{\left(\frac{8-2\sqrt{15}}{2}\right)}$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6}).$$

此結果又等於 $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ 或 $\frac{1}{2}(\sqrt[4]{200}-\sqrt[4]{72})$.

例 4 所設之式, 係 $\sqrt{(a^2c)}\pm\sqrt{b}$ 之形, 故爲 $\sqrt{c}$ $\left(a\pm\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$.

故若 $a^2-\frac{b}{c}$ 爲完全平方數, 則 $a\pm\sqrt{\frac{b}{c}}$ 之平方根, 必可以 $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ 之形表之,

因之 $\sqrt{(a^2c)}\pm\sqrt{b}$ 之平方根可以 $\sqrt[4]{c}(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})$ 之形表之.

[問 29]　求下列各式之平方根.　[參照例 1, 例 2]

(一)　$3-2\sqrt{2}$.　(二)　$16+6\sqrt{7}$.

(三)　$11-2\sqrt{30}$.　(四)　$26+\sqrt{660}$.

(五)　$30-12\sqrt{6}$.　(六)　$151-20\sqrt{57}$.

(七)　$2\frac{1}{4}-\sqrt{5}$.　(八)　$4\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

(九)　$2a+2\sqrt{a^2-x^2}$,　(十)　$b+2\sqrt{ab-a^2}$.

(十一)　$(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}$.

[問 30]　求下列各式之四乘根.　[參照例 3]

(一)　$56-24\sqrt{5}$.　(二)　$17+12\sqrt{2}$.

[問 31]　求下列各式之平方根.　[參照例 4]

(一)　$\sqrt{27}+2\sqrt{6}$.　(二)　$\sqrt{63}-\sqrt{35}$.

(三)　$18+12\sqrt{3}$.

[問 32]下列各式試簡之.　[參照第 53 節]

(一)　$\dfrac{1}{\sqrt{(5+\sqrt{24})}}$.　(二)　$\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)}$.

(三)　$\dfrac{\sqrt{(16+6\sqrt{3})}}{1+\sqrt{3}}$.

(四)　$\dfrac{1}{\sqrt{(15-6\sqrt{6})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(9+6\sqrt{2})}}$

(五)　$\sqrt{\left(9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)}$.

(六)　$\sqrt{\{1+\sqrt{(21+12\sqrt{3})}\}}$.

(七)　$\sqrt{45}+\sqrt{8}-\sqrt{80}+\sqrt{18}-\sqrt{7-\sqrt{40}}$.

***58. $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ 之平方根.**　二項以上之二次不盡根式，如 $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ 其平方根可以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 之形表之.

蓋假若 $\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

兩邊各自乘，

$$A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=x+y+z+2\sqrt{(xy)}+2\sqrt{(yz)}+2\sqrt{(zx)}.$$

故若　$2\sqrt{(xy)}=\sqrt{B},\ 2\sqrt{(yz)}=\sqrt{C},\ 2\sqrt{(zx)}=\sqrt{D}.$

及　$$x+y+z=A.$$

適可求得 x, y, z 之有理値，則所求之平方根必可以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 之形表之.

例. 求 $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ 之平方根.

解. 令 $\sqrt{(11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

兩邊各自乘.

$$11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.$$

若　$2\sqrt{xy}=6\sqrt{2}$，$2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$，$2\sqrt{zx}=2\sqrt{6}$.

則　　$\sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}=6\sqrt{6}$，$\sqrt{zx}=\sqrt{6}$

由除法，　　$y=6$

因之　　$x=3$，　$z=2$

而此等之值適合 $x+y+z=11$ 之方程式，故所求之平方根爲 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

[問 33]　求下列各式之平方根.

(一)　$8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$.

(二)　$6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

(三)　$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$.

(四)　$5+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{15}$.

(五)　$21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$.

(六)　$a+3b+4+4\sqrt{a}-4\sqrt{3b}-2\sqrt{3ab}$.

練習問題 IV.

1. 試就下列各式,化為最簡形.

(一) $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}$.　　(二) $\sqrt{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$.

(三) $\sqrt{18a^3c^4-27a^4c^3}$.

(四) $\sqrt{(x^2+x-6)(x^2-3x+2)}$.

(五) $\sqrt{\left(\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{2ax}{b^2}+\frac{1}{b}\right)}$.

2. $2\sqrt{3}+\sqrt{75}-\frac{1}{2}\sqrt{8}$ 求至小數第三位止.

3. 下式試簡之.

(一) $\frac{1}{2}\sqrt{32}-\frac{7}{3}\sqrt{162}+\frac{5}{2}\sqrt{288}-\frac{1}{5}\sqrt{200}$.

(二) $5\sqrt[3]{81}-7\sqrt[3]{192}+4\sqrt[3]{648}$.

(三) $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{1}{x^2-y^2}}$.

4. 試計算下列各式.

(一) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+5)$
$$(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-5).$$

(二) $(x-1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{3})$
$$(x-1-\sqrt{3}).$$

5. $x=1+\sqrt{3}$ 求 x^3+x^2+x+1 之值.

6. $x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ 求 $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$ 之值.

7. $\sqrt[3]{5}+1$ 與 $2\sqrt{2}$ 之大小若何?

8. 求下式之有理化因數.

(一) $\sqrt[7]{a^5}$. (二) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$.

(三) $\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}+\sqrt{x^7}$.

9. 下式求分母之有理化.

$$\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$$

10. 下式試簡之.

(一) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

(二) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

(三) $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^2}+\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}$.

(四) $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$.

11. $\dfrac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(\sqrt{3}+1)}$ 求至小數第五位止.

12. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{27}-2\sqrt{8}+\sqrt{50}}$ 求至小數二位止.

13. $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}=\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)$

求證.

14. $3x=1$ 求 $\dfrac{2(1+2\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$ 之值.

15. 分數式 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, 試先化分母爲有理式.

然後求其以 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ 代入之值.

16. $\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$, 試簡之.

17. 下式求分母之有理化.

(一) $\dfrac{1+3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{12}}$.

(二) $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

18. $\dfrac{2}{\sqrt{(y-z)}+\sqrt{(z-x)}+\sqrt{(x-y)}}$

$=\dfrac{\sqrt{(y-z)^3}+\sqrt{(z-x)^3}+\sqrt{(x-y)^3}+\sqrt{\{(y-z)(z-x)(x-y)\}}}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$,

求證.

19. 下式試簡之.

(一) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$.

(二) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}$.

(三) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}\times\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.

(四) $\sqrt[3]{2}-1+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}}$.

20. $2x=a+\dfrac{1}{a}$,　$2y=b+\dfrac{1}{b}$

試計算 $2\{xy-\sqrt{(x^2-1)}\sqrt{(y^2-1)}\}$ 之值.

***21.** 求 $\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}$ 之有理化因數.

***22.** 下式求分母之有理化.

(一) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}$.　　(二) $\dfrac{1}{a-\sqrt[5]{b}}$.

23. 下式試簡之.

(一) $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3}$.

(二) $(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2-1})^{-3}+(\sqrt{p^2+1}-\sqrt{p^2-1})^{-3}$

24. 下式試簡之.

(一) $\sqrt{\left(3\frac{1}{10}-\sqrt{6}\right)}$. (二) $\sqrt{\{7(3+2\sqrt{2})\}}$.

(三) $\sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})}$. (四) $\sqrt{(56+\sqrt{3})}$.

(五) $\sqrt{\{a+\sqrt{(a^2+2bc-b^2-c^2)}\}}$.

(六) $\sqrt{[(2p-1)+\sqrt{\{(2p-1)^2-1\}}]}$.

(七) $\sqrt{\{x^2+x+1-\sqrt{(2x^3+x^2+2x)}\}}$.

(八) $\sqrt{\{ab+c^2\}+\sqrt{\{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\}}}$.

(九) $\sqrt{\{1+(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}\}}$.

***25.** 求下二式之比例中項.

(一) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$, $11\sqrt{7}+13\sqrt{5}$.

(二) $5+7\sqrt{2}$, $\frac{1}{73}(29+47\sqrt{2})$.

***26.** 求下列各式之平方根.

(一) $25-4\sqrt{3}-12\sqrt{2}+6\sqrt{6}$.

(二) $11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})$.

(三) $48+12\sqrt{5}+12\sqrt{7}+2\sqrt{35}$.

27. $\sqrt{[2+\sqrt{\{3+2\sqrt{(5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}})}\}}]}$, 試簡之.

28. 求 $\dfrac{\sqrt{(10+2\sqrt{21})}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 之值,依四捨五入,至小數第二位止.

29. 下式試簡之，且求其值，(小數第三位止).

(一) $$\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\frac{3}{\sqrt{(7+2\sqrt{10})}}.$$

(二) $$\frac{1}{\sqrt{(16+2\sqrt{63})}}+\frac{1}{\sqrt{(16-2\sqrt{63})}}.$$

30. 問根數式 $\sqrt{\left(\frac{9+2\sqrt{14}}{2(4+\sqrt{15})}\right)}$ 如何化法，俾求其近似值爲最便利.

31. $\sqrt{13+2\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{13+3\sqrt{13}}{2}}+\sqrt{\frac{13-3\sqrt{13}}{2}}$，求證.

32. 下式試證之.

(一) $$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

(二) $$\frac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\frac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\frac{2}{\sqrt{(10+\sqrt{84})}}=0.$$

(三) $$\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\frac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}=0.$$

33. $\sqrt{73-12\sqrt{35}}=x\sqrt{5}-y\sqrt{7}$ 求 x,y 之值.

34. $\dfrac{\sqrt{(4+\sqrt{15})^3}+\sqrt{(4-\sqrt{15})^3}}{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}-\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}$, 試簡之.

35. 下式試證明之.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\tfrac{1}{2}(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$

36. 下式試證之.

$$\frac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}=\frac{(x+1)\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+2)}.$$

37. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 求 $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{(1+x)}}+\dfrac{1-x}{1+\sqrt{(1-x)}}$ 之值.

38. 若 $x=\sqrt[3]{\{a+\sqrt{(a^2-b^3)}\}}+\sqrt[3]{\{a-\sqrt{(a^2-b^3)}\}}$

則必爲方程式 $x^3-3bx-2a=0$ 之一根, 求證.

39. 若 $x=\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}$

則　$(x^3-2a)^3=27(a^2-b)x^3$, 求證.

第五章

虛數及複素數

虛數

59. 無論爲正數爲負數,其二乘冪必爲正數,故凡數之平方無爲負數者,雖然,負數之平方根,亦一新數也,特稱之爲虛數.

定義. **虛數者**,其平方爲負數之數也.

例如 $\sqrt{-36}$ 爲虛數,而 $(\sqrt{-36})^2=-36$.

對於虛數而爲正或負之有理數及無理數者,總稱之爲**實數**.

60. **虛數之單位.** 負數之平方根,與正數之平方根相同,有正根負根二種,例如 -36 之平方根爲 $\pm\sqrt{-36}$.

此計算當作 $\sqrt{-36}=\sqrt{36\times(-1)}=6\sqrt{-1}$.

其 $\sqrt{-1}$ 以 i 表之.

如 $\sqrt{-36}=6i$.

故凡 a 爲實數,

則 $$\sqrt{-a^2}=ai.$$

又 b 爲正實數.

則 $$\sqrt{-b}=i\sqrt{b}.$$

故虛數者實數與 i 之乘積也,故稱 i 爲虛數之單位,而 i 之二乘冪,則爲 -1 之數云.

如 $$i^2=-1.$$

61. 虛數之加減乘除. 虛數之計算,依前節,先就虛數以實數與 i 之積表之,乃如法計算,與實數同.

例 1. 求 $\sqrt{-9}$ 與 $\sqrt{-25}$ 之和.

解. $\sqrt{-9}+\sqrt{-25}=i\sqrt{9}+i\sqrt{25}=3i+5i=8i.$

例 2. 由 $\sqrt{-81}$ 減 $\sqrt{-121}$.

解. $\sqrt{-81}-\sqrt{-121}=9i-11i=-2i.$

例 3. $\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{-2}$ 之積若何?

解. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\,i=\sqrt{6}\,i.$

例 4. $\sqrt{-3}$ 與 $\sqrt{-12}$ 之積若何?

解. $$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-12}=\sqrt{3}\cdot i\cdot\sqrt{12}\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2.$$
$$=6\times(-1)=-6.$$

注意. 求二虛數之積,不能依公式 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 求

之.如例 4 依此公式求之,

則 $$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-12}=\sqrt{(-3)(-12)}=\sqrt{36}=6$$

其誤可知,故凡 $\sqrt{-a}$ 須化爲 $i\sqrt{a}$ 之形.

例 5. $\sqrt{18}$ 以 $\sqrt{-2}$ 除之.

解. $$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}=\frac{3\sqrt{2}}{i\sqrt{2}}=\frac{3}{i}=\frac{3i}{i\cdot i}=\frac{3i}{-1}=-3i.$$

例 6. $\sqrt{-21}$ 以 $\sqrt{-8}$ 除之.

解. $$\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-8}}=\frac{i\sqrt{21}}{i\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{2}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{42}.$$

故凡 a, b 爲實數.

則 $$ai\pm bi=(a\pm b)i.$$

$$a\times bi=abi.$$

$$ai\times bi=-ab.$$

$$\frac{a}{bi}=-\frac{a}{b}i.$$

$$\frac{ai}{bi}=\frac{a}{b}.$$

[問 1] 試說明 $\sqrt{-25}$ 及 $\sqrt{-0.75}$ 之意義.

[問 2] 若下列各式爲虛數,其 x 之限界若何?

$$\sqrt{3-x},\quad \sqrt{7-2x},\quad \sqrt{1+\tfrac{3}{4}x}.$$

［問 3］　問下列各數爲何數之平方?

$$-9,\quad -\frac{4}{9},\quad -0.25,\quad -5\frac{1}{16}.$$

［問 4］　下列各式試簡之.

(一) $\sqrt{-9}+\sqrt{-49}$.　　(二) $5\sqrt{3-64}-\sqrt{-144}$.

(三) $\sqrt{-x}+\sqrt{-y}$.　　(四) $a\sqrt{-a^3}-\sqrt{-a^5}$.

(五) $\sqrt{-(a-c)^2}+\sqrt{-(a+c)^2}$.

［問 5］　下列各式試簡之.

(一) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{-2}$.　　(二) $\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-24}$.

(三) $(\sqrt{-6})^2$.　　(四) $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$

(五) $-\sqrt{-8}\times(-\sqrt{-2})$.

［問 6］　下列各式試簡之.

(一) $\sqrt{-24}\div\sqrt{-6}$.　　(二) $\sqrt{-21}\div\sqrt{7}$.

(三) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}\,i}$.　　(四) $\dfrac{(-\sqrt{5})(-\sqrt{3}\,i)}{-\sqrt{15}}$.

(五) $\dfrac{\sqrt{5}}{i\sqrt{20}}$.

62. i 之乘冪.　$i=\sqrt{-1}$ 之乘冪如次:

$$i^2=-1.$$

$$i^3=i^2i=-1\times i=-i.$$

$$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = -(-1) = 1.$$

$$i^5 = i^4 \times i = \quad 1 \times i = i.$$

$$i^6 = i^5 \times i = \quad i \times i = -1.$$

....

如是則 i^5, i^6, i^7, i^8, 等於 i, i^2, i^3, i^4 以下順次循環相等,

故 n 爲 0 或正整數.

則 $\qquad i^{4n} = 1. \qquad i^{4n+1} = i.$

$\qquad\qquad i^{4n+2} = -1. \qquad i^{4n+3} = -i.$

例 1. 求 i^{13} 之値.

解. $\quad i^{13} = i^{4\times3+1} = i.$

例 2. $i^3 \times i^7 \times i^9$ 試計算之.

解. $\quad i^3 \cdot i^7 \cdot i^9 = i^{19} = i^{4\times4+3} = -i.$

[問 7] 試計算下列各式.

(一) i^{12}. (二) i^{15}. (三) $i^5 \times i^6 \times i^7$.

(四) $(-1) \div i^{17}$. (五) $\dfrac{3i}{i^3}$.

複 素 數

63. 定義. 若 a, b 皆爲實數而有 $a+bi$ 之形者, 謂之**複素數**.

複素數及虛數，通稱之爲虛數.

複素數 $a+bi$，若 b 爲零則得實數 a，若 a 爲零則得虛數 bi，故一切之數胥含於 $a+bi$ 之形之中.

64. 定理. 二複素數相等者，其實數部與虛數部必各相等.

例如　$a+bi=c+di$ 則 $a=c$, $b=d$,

證.
$$a+bi=c+di$$
$$\therefore\quad a-c=(d-b)i.$$

兩邊各自乘　$$(a-c)^2=-(d-b)^2.$$

此等式左邊爲正，而右邊爲負，故兩邊非皆爲零，不能成立.

$$\therefore\quad a-c=0,\quad d-b=0.$$
$$\therefore\quad a=c,\quad b=d.$$

65. 複素數之加，減及乘法. 依下例，即知其計算法.

例 1.　求 $2+3i$ 與 $5-4i$ 之和.

解.　$(2+3i)+(5-4i)=(2+5)+(3-4)i=7-i.$

例 2.　由 $16+5i$ 減 $3+2i$.

解.　$16+5i-(3+2i)=(16-3)+(5-2)i=13+3i.$

例 3.　求 $5+3i$ 與 $7-2i$ 之積.

解. $(5+3i)(7-2i)=35+21i-10i-6i^2$

$$=35+6+11i=41+11i.$$

例 4. 求 $1+i$ 之四乘冪.

解. $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i.$

$$(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4.$$

故 $1+i$ 爲 -4 之四乘根.

依同理 $-(1+i)$, $1-i$, $-(1-i)$ 皆爲 -4 之四乘根, 卽 -4 之四乘根有四, 皆爲複素數.

故凡負數之高次偶數乘根, 皆複素數也.

注意. 凡某數之 n 乘根有 n 個, 如第二章第 12 節依實數之範圍所述是也.

例 5. $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 皆爲一之立方根, 求證.

解. $\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$+3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

$$=-\frac{1}{8}\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}\mp\frac{3\sqrt{3}}{8}i=1.$$

故此二複素數, 皆爲 1 之立方根.

通例此二數以 ω_1 及 ω_2 表之,故 1 之立方根為 $1, \omega_1$ 及 ω_2 凡三個.

由以上諸例,知凡複素數之和,差及積,皆為複素數,但特別之處,固亦有為實數或虛數者.

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

$$(a+bi)\ (c+di)\ =(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

[問 8]　下列各式,試簡之.

(一) $(3-2i)-(1-i)-(7+2i)$.　(二) $5i+\sqrt{-16i}$.

[問 9]　試計算下列各式.

(一) $(5-i)(3+2i)$.

(二) $(\sqrt{5}+\sqrt{2i})(\sqrt{5}-\sqrt{2i})$.

(三) $(\sqrt{3}+2\sqrt{-2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$.

(四) $(\sqrt{-8}-\sqrt{-2}+6)\times i$.

[問 10]　試計算下列各式.

(一) $(5+7\sqrt{-1})^2$.　(二) $(1+2i)^3+(1-2i)^3$.

(三) $(-1+\sqrt{3i})^2-(-1-\sqrt{3i})^2$.

66. 共軛複素數及除法. 凡如 $a+bi$ 與 $a-bi$ 其實數部分與虛數部分之間,惟符號為異者.此二複素數,互為共軛.

二共軛複素數之積爲正實數.

如 $$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

故凡如 $\dfrac{a+bi}{c+di}$ 之分數, 以分母之共軛複素數乘分母子, 必可化爲複素數之形.

例. $5+7i$ 以 $3-4i$ 除之.

解. $$\frac{5+7i}{3-4i}=\frac{(5+7i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$

$$=\frac{15+21i+20i-28}{3^2-4^2i^2}$$

$$=\frac{-13+41i}{9+16}=-\frac{13}{25}+\frac{41}{25}i.$$

故凡某數以複素數除之所得之商必爲複素數, 但特別之處固亦有爲實數或虛數者.

如 $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

[問 11] 下列各式試簡之.

(一) $2\div(1-i)$. (二) $\dfrac{24}{1+4i}$.

(三) $\dfrac{1+i}{1-2i}$. (四) $\dfrac{4+6i}{1+i}+\dfrac{4-6i}{1-i}$.

(五)　$(1+i^3)+(1\div i)$.　　(六)　$(a+bi)\div(a-bi)$.

*67. **複素數之平方根.** 與第 57 節同法. 可求得複素數之平方根.

例. 求 $5+12i$ 之平方根.

解. x, y 爲正實數.

假定　$$\sqrt{5+12i}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i,$$

兩邊各自乘.

$$5+12i=x-y+2\sqrt{xy}\,i,$$

$$\therefore\quad x-y=5,\quad 2\sqrt{xy}=12.\qquad \text{[第 64 節]}$$

故　$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$

$$=5^2+12^2=169$$

$$\therefore\quad x+y=13,$$

因之　$$x=9,\quad y=4.$$

$$\therefore\quad \sqrt{5+12i}=3+2i.$$

因得公式如次:

$$\sqrt{a\pm bi}=\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}i.$$

故凡複素數之平方根爲複素數.

[問 12] 求下列各式之平方根.

(一) $-3+4i$. (二) $2i$. $-1-4\sqrt{5}\,i$,

練 習 問 題 V.

1. 下列各式試簡之.

(一) $\sqrt{-9a^2}+\sqrt{-25a^2}-\sqrt{-49a^2}$.

(二) $2\sqrt{-\frac{1}{9}}+4\sqrt{-\frac{1}{121}}$.

(三) $\sqrt{-1+2p-p^2}-\sqrt{-4p^2}$.

2. 下列各式試簡之.

(一) $-\sqrt{-6}\times\sqrt{-2}$.

(二) $\sqrt{-2}\cdot(\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7$.

(三) $\left(3\frac{1}{2}+2i\right)\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}i\right)$.

(四) $(\sqrt{3+4i}-\sqrt{3-4i})^2$.

(五) $\left(x-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. 下列各式試簡之.

(一) $\dfrac{3-\sqrt{15}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{5}\,i}$.　　(二) $\dfrac{9+3\sqrt{2}\,i}{(3+\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i)}$.

4. $x=\pm 3i$ 求 x^2+9 之值.

5. $x=5+\sqrt{-1}$ 求 $x^2-10x+26$ 之值.

6. $x=1+3i$ 求 $x^3-7x^2+20x-50$ 之值.

7. 下式試證之.

$$(1\pm\sqrt{-1})^2-2(1\pm\sqrt{-1})+2=0.$$

8. $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 爲 -1 之四乘根, 求證.

9. 設 ω_1 及 ω_2 爲 1 之立方根中之虛數, 則有各關係式如次, 試證明之.

$$1+\omega_1+\omega_2=0,$$

$$\omega_1\,\omega_2=1.$$

$$\omega_1{}^2=\omega_2.$$

$$\omega_2{}^2=\omega_1.$$

10. 若 $x=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, 其下式之值若何?

$$2x^4-11x^3-9x+4.$$

11. 下式之值, n 爲 3 之倍數, 則等於 2, 若爲其他之整數, 則等於 -1, 試證之.

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right\}^n+\left\{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}^n.$$

12. 下式試證明之. 但 ω 為 1 之立方根中虛數之一.

(一) $x^3+y^3=(x+y)(\omega x+\omega^2 y)(\omega^2 x+\omega y)$.

(二) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)$

$$\times(a+\omega^2 b+\omega c).$$

13. 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根為虛數, 則 x 任為何數, 其二次三項式 ax^2+bx+c 之符號必等於初項 a 之符號, 試證之.

14. 求 -16 之四乘根.

15. 求下式之平方根.

(一) $-7-24i$. (二) $4ab-2(a^2-b^2)i$.

16. $(x+yi)i-2+4i=(x-yi)(1+i)$ 其 xy 之實數值若何?

答及解法指針

第一章　冪法

問 1.　(一)　$49a^2b^4$.　　(二)　$-8a^{21}c^6$.

(三)　$81a^8b^{12}$.　　(四)　$a^{12}x^6$.

(五)　$-32x^{10}y^5$.　　(六)　$-\dfrac{1}{2187}x^{21}$.

(七)　$-40a^{12}$.　　(八)　$(-1)^n729^na^nx^{2n}y^{5n}$.

問 2.　(一)　$\dfrac{9a^4b^6}{16c^{10}x^8}$.　(二)　$-\dfrac{27x^{15}}{125a^9}$.　(三)　$\dfrac{2^na^nb^nc^n}{3^nm^{2n}n^{3n}}$.

問 3.　(一)　$256a^{24}$.　(二)　$3x^{24}$.　(三)　$-5m^{24}n^{18}$.

問 4.　(一)　$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.

(二)　$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

(三)　$\dfrac{4}{9}x^4-\dfrac{4}{3}x^3+3x^2-3x+\dfrac{9}{4}$.

(四)　$x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1$.

問 5.　(一)　$\dfrac{1}{216}a^3+\dfrac{1}{6}a^2x+2ax^2+8x^3$.

(二) $\frac{81}{625}x^4-\frac{36}{25}x^3y+6x^2y^2-\frac{100}{9}xy^3+\frac{625}{81}y^4.$

(三) $32-240y+720y^2-1080y^3+810y^4-243y^5.$

(四) 題式$=\{(1+x)^2\}^3=(1+x)^6$

$=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6.$

(五) $\frac{1}{128}a^7+\frac{7}{96}a^6b+\frac{7}{24}a^5b^2+\frac{35}{54}a^4b^3+\frac{70}{81}a^3b^4$

$+\frac{56}{81}a^2b^5+\frac{224}{729}ab^6+\frac{128}{2187}b^7.$

(六) $x^8+8x^6+28x^4+56x^2+70+\frac{56}{x^2}+\frac{28}{x^4}+\frac{8}{x^6}+\frac{1}{x^8}.$

(七) 題式 $=(x-y)^{12}=x^{12}-12x^{11}y+66x^{10}y^2$

$-220x^9y^3+495x^8y^4-792x^7y^5+924x^6y^6$

$-792x^5y^7+495x^4y^8-220x^3y^9+66x^2y^{10}$

$-12xy^{11}+y^{12}.$

問 6. (一) $(999)^2=(1000-1)^2=998001.$

(二) 996105067803.

問 7. (一) $(287+0.00006)^2=82369.03444.$

[參照第 10節例 4]

(二) $(82-0.00006)^3=551366.78968.$

問 8. (一) $(18-0.000003)^3=5831.997084.$

(二) 19700.7217875.

練習問題 I.

1. (一) $\frac{2}{3}a^{12}$. (二) a^{30}.

(三) 題式 $=\left(\frac{a^2bc\times b^2ac\times c^2ab}{b^2cayz\times c^2abzx\times a^2bcxy}\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{x^2y^2z^2}\right)^2=\frac{1}{x^4y^4z^4}.$$

2. (一) $(25\times4)^3=100^3=1000000.$

(二) $1000^4=1000000000000.$

(三) $(5\times2)^8\times2^3=800000000.$

(四) $\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{16}\right)^4=\left(\frac{3}{8}\right)^4=\frac{81}{4096}.$

(五) $\left(\frac{9\times17}{51}\right)^5=3^5=243.$

(六) $15^4=3^4\times5^4,\ 60^5=2^{10}\times3^5\times5^5$ 依此計算.

答: 0.0081

3. (一) 題式 $=\left(x^2yz\times\frac{x^2}{yz}\right)^l\times\left(xy^2z\times\frac{y^2}{zx}\right)^m$

$$\times\left(xyz^2\times\frac{z^2}{xy}\right)^n=x^{4l}.y^{4m}.z^{4n}.$$

(二) 1.

4. 左邊

$$=x^{p(q+r)}y^{q(p+r)}z^{r(p+q)}\div x^{(p-1)(q+r)}y^{(q-1)(p+r)}\cdot z^{(r-1)(p+q)}$$

$$=x^{q+r}y^{p+r}z^{p+q}\ \text{左邊式同.}$$

5. 左邊 $=\dfrac{x^{m+n}y^{l+n}z^{l+m}}{x^{l}y^{m}z^{n}}$, 右邊 $=\dfrac{x^{2l}y^{2m}z^{2n}}{x^{n+m}y^{l+n}z^{l+m}}$.

故 $x^{2(m+n)}y^{2(l+n)}z^{2(l+m)}=x^{3l}y^{3m}z^{3n}$, 兩邊同以 $x^{2l}y^{2m}z^{2n}$ 乘之.

6. 由所設之三式得 $x^{xyz}=x$ $\therefore$ $xyz=1$, 然 x, y, z 皆爲整數, 故 $x=y=z=1$.

7. 以 $m^{y}=a^{xy}$, $n^{z}=a^{xy}$ 代入第三式, 則$a^{2}=a^{2xyz}$

$$\therefore\quad xyz=1.$$

8. 由 $2^{x}=(2^{3})^{y+1}=2^{3(y+1)}$, $3^{2y}=3^{x-9}$, 得方程式 $x=3(y+1)$, $2y=x-9$, 依此解之, 則 $x=21$, $y=6$.

9. (一) $\dfrac{1}{27}x^{6}-x^{5}+9x^{4}-27x^{3}$.

(二) 題式 $=m^{3}p^{3}(4n-5q)^{3}=64m^{3}n^{3}p^{3}$

$$-240m^{3}n^{2}p^{3}q+300m^{3}np^{3}q^{2}$$

$$-125m^{3}p^{3}q^{3}.$$

(三) 題式 $=(a^{3}-b^{3})^{5}=a^{15}-5a^{12}b^{3}+10a^{9}b^{6}$

$$-10a^{6}b^{9}+5a^{3}b^{12}-b^{15}.$$

(四)　題式 $=(a^2-b^2)^7=a^{14}-7a^{12}b^2+21a^{10}b^4$

$$-35a^8b^6+35a^6b^8-21a^4b^{10}$$

$$+7a^2b^{12}-b^{14}.$$

10.　左邊展開而括之.

11.　$x^3+8y^3-27z^3+6x^2y-9x^2z+12xy^2-36y^2z$

$$+27xz^2+54yz^2-36xyz.$$

12.　兩邊分別計算.

13.　由前問 (二) 之恆等式, 得 $(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2=0$, 因 a, b, c, x, y, z 皆爲實數,故左邊之各項皆爲正, 因之各項皆爲零, 卽 $bz-cy=0$　$\therefore\ \dfrac{z}{c}=\dfrac{y}{b}$.

又 $cx-az=0$.

$$\therefore\ \frac{z}{c}=\frac{x}{a}. \qquad \therefore\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

14.　(一)　由所設之條件, $(a-b)^2=0$.　$\therefore\ a=b$.

[參照前問解]

(二)　去括弧, 移項, 得 $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2$

$$+c^2-2ca+a^2=0,$$

卽　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

因之 $a-b=b-c=c-a=0$　$\therefore\ a=b=c$

（三） 與前同, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2$

$$=0.$$

（四） $(a-b)^2+(b-c)^2+\cdots\cdots=0 \quad \therefore \quad a=b=c=\cdots\cdots$

15. $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2$ $+2(ab-cd)^2=0 \quad \therefore \quad a^2-b^2=c^2-d^2=ab-cd=0$, 因皆爲正數.

故由 $a^2-b^2=0$ 得 $a=b$, 由 $c^2-d^2=0$, 得 $c=d$,

由 $ab-cd=0$ 得 $a=c$ 因之 $a=b=c=d$.

16. （一） $(292-0.00007)^2=85263.95912.$

（二） 148877.58989.

17. k 爲極小.

故 $(1\pm k)^2=1\pm 2k, \qquad (1\pm k)^3=1\pm 3k.$

因之 $$\frac{1}{(1\pm k)^2}=\frac{1}{1\pm 2k}=\frac{1\mp 2k}{(1\pm 2k)(1\mp 2k)}=\frac{1\mp 2k}{1-4k^2}$$

$$=1\mp 2k.$$

又 $$\frac{1}{(1\pm k)^3}=\frac{1}{1\pm 3k}=\frac{1\mp 3k}{(1\pm 3k)(1\mp 3k)}=\frac{1\mp 3k}{1-9k^2}$$

$$=1\mp 3k.$$

此因 $4k^2$, $9k^2$ 爲極小, 故從略.

［參照第 10 節例 4 注意］

第二章 開法

問 1. (一) $5x^2y^3z$. (二) $4a^2bc^3d^4$. (三) $8x^8y^{14}$.

(四) $\frac{a^8b^4}{7}$. (五) $\frac{16xy^2}{17p^7}$.

問 2. (一) $3a^2bc$. (二) $-7a^4b^6$. (三) $\frac{5ab^2}{6x^2y^3}$.

(四) $-\frac{3x^9}{4y^{21}}$.

問 3. (一) a^2x^3. (二) $2xy^2$. (三) $3a^3b$.

(四) $-x^2y^3$. (五) $2ax^8$. (六) $\frac{2}{a^9b^8}$.

(七) $\frac{a^3x^5}{b^{10}}$. (八) a^3b^5.

問 4. (一) $p-q$. (二) $3x+2y$.

(三) $7a+8b^2$. (四) a^3-7b^3.

(五) p^5-9. (六) $x+y-a-b$.

(七) $\frac{x}{y}+5$. (八) $\frac{3}{5}x-\frac{5}{3x}$.

問 5. (一) 題式 $=a^2-2a(b+c)+(b^2+2bc+c^2)$

$$=\{a-(b+c)\}^2.$$

又 $(a^2-2ab+b^2)-2(a-b)c+c^2=\{(a-b)-c\}^2$

答: $a-b-c$. [參照第18節例4]

(二)　$x+2y-3z.$　　(三)　$3m-n-4.$

問 6.　(一)　題式 $=(x^4+2x^3+x^2)+2(x^2+x)+1$

$=(x^2+x+1)^2.$　　答：　$x^2+x+1.$

(二)　$2x^2-5x-3.$　　(三)　$3a^2-2a+3.$

問 7.　(一)　$7x^2-9y^2.$　　(二)　$2x^2-3x-1.$

(三)　$5x^2-3ax+4a^2.$　(四)　$2ac-a+3bc.$

(五)　$2x^3+x^2-x-2.$　(六)　$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.$

(七)　$3a^3-2a^2b+b^2.$

問 8.　$1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{128}.$

問 9.　(一)　$\frac{1}{2}x^2+2x-1-\frac{1}{x}.$　　(二)　$\frac{3a}{x}-\frac{1}{5}+\frac{2x}{3a}.$

(三)　$\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}-\frac{x+1}{x}.$

問 10.　(一) 26.　　(二) 38.　　(三) 108.

(四) 456.　　(五) 3104.　　(六) 7199.

(七) 3.7.　　(八) 15.09.　　(九) 0.0238.

問 11.　(一) 32.44.　　(二) 3.41.　　(三) 0.63.

問 12.　(一) $\frac{28}{43}.$　　(二) $2\frac{12}{37}.$　　(三) $3\frac{16}{113}.$

問 13.　(一) 0.589.　　(二) 0.522.　　(三) 1.772.

(四) 44.666.

問 14. (一) 7.632050. (二) 2.213594. (三) 5.015973.

(四) 135.790279. (五) 0.025298.

問 15. (一) $x+2$. (二) $ax-y^2$.

(三) $x+a-b+c$. (四) $\frac{2}{a^2}-3a$.

(五) $2a^2+5b^2$. (六) $\frac{a-b}{a+b}+1=\frac{2a}{a+b}$.

(七) $(5x-3y)-4(x+y)=x-7y$.

問 16. (一) x^2+x+1. (二) $3x^2-3x+1$.

(三) $x^2-2xy+4y^2$. (四) $1-x+x^2-x^3$.

(五) $\frac{x}{y}+2-\frac{y}{x}$.

問 17. (一) $3x-2y$. (二) $x^2-\frac{3a^2x}{4b}$.

問 18. (一) $1+x$. (二) $x-2a$.

問 19. (一) 19. (二) 42. (三) 73.

(四) 97. (五) 534. (六) 704.

(七) 3003. (八) 7.91. (九) 0.121.

問 20. (一) 135.994. (二) 336.999.

問 21. (一) 79. (二) 203. (三) 17.

(四) 11.

問 22. (一) $\frac{13}{25}$. (二) 0.942. (三) 1.464.

問 23. (一) 1.42224. (二) 1.70997.

問 24. 依問題 I 解之可也.

問 25. (一) $5x^2+6x-7$.

(二) 題式 $=(x^5+3x^4+mx^3+nx^2+px+q)^2$.

答: $x^5+3x^4+2x^3-4x^2+x-1$.

問 26. $2x^2-3x+2$.

問 27. (一) 依問題 I 解之.

答: $a=6,\ b=1$.

(二) 題式 $=(x^3-4x^2+Mx\pm 2)^2$ 就係數比較之, 得 $M=\mp 11$, 而 $M=-11$, 則其平方根爲

$$x^3-4x^2-11x+2.$$

因之 $a=-6,\quad b=92,\quad c=105.$

若 $M=11$ 則其平方根爲 $x^3-4x^2+11x-2$.

因之 $a=38,\quad b=-92,\quad c=137.$

(三) $a=3, b=4, c=12$, 又 $a=27, b=c=108$.

問 28. 依未定係數法.

答: $b^3=27c^3$.

練 習 問 題 II.

1\. (一) $5a^2-3b^2-2c^2$.

(二) 依 a 之降冪整理之.　答: $a+bx+cx^2$.

(三) 依 y 之降冪整理之.

題式 $=y^2+2y(x^3-x^2+x)+(x^3-x^2+x)^2$

$=\{y+(x^3-x^2+x)\}^2$.　答: x^3-x^2+x+y.

(四) $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$.

2\. 題式 $=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4$.

$=(x^2+5ax)^2+10a^2(x^2+5ax)+25a^4$.

答: $x^2+5ax+5a^2$.

3\. (一) $\dfrac{1}{3}+a-\dfrac{1}{3}a^2$.　(二) $a^2-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{5}{3}$.

(三) $\dfrac{5x}{y}-2-\dfrac{y}{5x}$.　(四) $a-3b+5c-7d$.

(五) $x^2+(a-2)x+a$.　(六) $x^3+3ax-a^2b$.

(七) $2x^2-2x+2$.

(八) 依 a 之降冪整理之.

題式 $=4(b+c)^2a^2+8abc(b+c)+4b^2c^2$

$=\{2(b+c)a+2bc\}^2$.　答: $2(ab+bc+ca)$.

(九) 題式 $=a^4+2a^2b^2+b^4$. 答: a^2+b^2.

(十) 依 x 之降冪整理之. 答: $x^2-x(y+z)-yz$.

4. 題式 $=(x^2-yz)\{(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)\}+\cdots\cdots$

$$=(x^2-yz)x(x^3+y^3+z^3-3xyz)+\cdots\cdots$$

$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)\{x(x^2-yz)+y(y^2-zx)+z(z^2-xy)\}$$

$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$$

5. 依 a 之降冪整理之.

題式 $=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2+2bc)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$

$$=\{a+(b+c)\}^3.$$ 答: $a+b+c$.

6. (一) $2z^3-z^2-3$. (二) $2x-\frac{1}{3}y^2$.

(三) $2x^2-3cx+4c^2$.

7. $x-\dfrac{1}{x}$.

8. 依視察, 知其平方根 $=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3.$$ 答: $x-\dfrac{1}{x}$.

9. (一) 3009. (二) 3201. (三) 3.1416.

10. (一) 2755. (二) 0.838. (三) 49.68.

11. (一) 0.203. (二) 34. (三) 7.

12. 0.0041.

13. (一) 以題式平方開之,其平方根爲 x^2+3x+1. 又剩餘爲 $-3x+30$, 故原式爲平方數者, 則 $-3x+30=0$

$\therefore \quad x=10$ 答: 10.

〔驗算〕 $x=10$, 則 $x^2+3x+1=131$.

$$x^4+6x^3+11x^2+3x+31=17161.$$

$$131^2=17161.$$

(二) $\dfrac{b}{a}$. (三) $\dfrac{d-a^4}{2a^3-c}$.

14. 6.

15. (一) 題式 $=(3x^3-4x^2+Mx\pm 6)^2$.

若平方根爲 $3x^3-4x^2-5x+6$, 則 $p=-14, q=76$,

$r=-23$. 又平方根若爲 $3x^3-4x^2+5x-6$

則 $p=+46,\ q=-76,\ r=73$.

(二) 平方根爲 $3x+2y\pm 2$ 則 $p=6, q=\pm 6, r=\pm 4$.

爲 $3x-2y\pm 2$ 則 $p=-6, q=\pm 6, r=\mp 4$.

16. $7x^2-2x+1$.

17. 題式 $=(x^2+Mx+N)^2$ 就係數比較之.

則 $2M=-a,\ M^2+2N=b,\ 2MN=-c,\ N^2=1$ 由此四式消去 M,N 卽可求得 a,b,c 間之關係.

蓋由 第一,第二,第四三式. $\left(b-\frac{a^2}{4}\right)^2=4,$

第一,第三,第四三式. $a^2=c^2,$

是卽必要之條件.

注意. 依問題 I (第 32 節) 別解之方法亦可.

18. 與前問同解.

19. 令題式 $=(Ax+B)^2$ 則 $A^2=3m,\ 2AB=6(m-2),$ $B^2=1.$

由此消去 A,B, 得方程式 $3m^2-13m+12=0.$

依此方程式解之, $m=3$, 或 $m=\frac{4}{3}$.

20. 題式 $=(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c})^2$ 就係數比較之.

得 $f=\sqrt{bc},\ g=\sqrt{ca},\ h=\sqrt{ab}\quad\therefore\quad gh=af,\ hf=bg,$

$fg=ch.$ 是卽所求之條件.

21. 題式 $=(Mx+N)^3$ 則 $M^3=a, 3M^2N=b, 3MN^2=c.$ $N^3=d.$ 由前三式, 得 $b^2=3ac.$ 由後三式, 得 $c^2=3bd.$

第三章　諸種之指數

問 1.　(一)　$\sqrt{az}$.　(二)　$2\sqrt[n]{a}$.　(三)　$3\sqrt[m]{y^2}$.

(四)　$\sqrt{x^{n+1}}$.　(五)　$4\sqrt[4]{a^3}$.　(六)　$\sqrt[m-n]{a^{m+n}}$.

問 2.　(一)　$3^{\frac{1}{2}}$.　(二)　$x^{\frac{4}{7}}$.

(三)　$(x+y)^{\frac{3}{2}}$　(四)　$c^{\frac{n-1}{4}}$.

問 3　(一)　$16^{\frac{6}{8}}=16^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[4]{16})^3=8$.　(二)　25.

(三)　9.　(四)　0.0016.　(五)　$36^{\frac{3}{2}}=216$.

(六)　7.59375.　(七)　2.　(八)　0.1.

(九)　$\frac{81}{625}$.　(十)　$7\frac{9}{16}$.　(十一)　0.04.

問 4.　見第 34 節.

問 5.　(一)　$\frac{5}{a^{\frac{2}{3}}}$.　(二)　$\frac{2y^2}{x^2}$.　(三)　a^3.

(四)　$\frac{x^{\frac{1}{2}-2}}{7}$.　(五)　$\frac{3b^4x^2y^2}{8a^3}$.　(六)　$2y^{\frac{n}{2}}$.

(七)　$\frac{1}{4}x^{\frac{3}{5}}$.　(八)　b^n.　(九)　$\frac{1}{m^n}$.

(十)　$\frac{1}{x^2y^{n-3}}$.　(十一)　$\frac{b^q}{a^p}$.　(十二)　$\frac{c^2x^3}{2ay^2}$.

問 6.　(一)　0.03125.　(二)　0.25.　(三)　625.

(四)　10.　(五)　8.　(六)　0.16.

問 7.　$\frac{y^3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt{x}}{2y^3}$.

問 8.　(一)　$\frac{6}{x^{\frac{1}{2}}}$.　(二)　$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2}$.　(三)　$x^{\frac{5}{4}}$.

(四)　$\frac{a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$.　(五)　$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$.　(六)　$\frac{1}{a^2}$.

問 9.　(一)　$\frac{3}{\sqrt[6]{a^5}}$.　(二)　$\frac{15}{\sqrt[3]{a^4}}$.　(三)　$\frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$.

(四)　$\sqrt[5]{a^x}$.　(五)　$\sqrt[6]{a^n}$.

問 10.　(一)　$16ab^4$.　(二)　$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}}$.　(三)　$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

(四)　$a+b$.　(五)　$(a+b)^2$.　(六)　$b^{\frac{7}{6}}$.

(七)　$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$.　(八)　$c^{\frac{5}{2}}$.

問 11.　(一)　$x-25$.　(二)　$4x^{\frac{2}{3}}+16x^{\frac{1}{3}}+16-9x^{-\frac{2}{3}}$.

(三)　$n-1$.　(四)　$a+b$.

(五)　$4a^{\frac{8}{3}}-8a^{\frac{4}{3}}-5+10a^{-\frac{4}{3}}+3a^{-\frac{8}{3}}$.

問 12.　(一)　$x^{\frac{5}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{2}{3}}$.

(二) $e^{x}-c^{-x}$. (三) $2(1+e^{-2x})$.

(四) $x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{24}}+6x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{12}}+4x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{6}}$

問 13. (一) $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}$.

(二) $a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+1$.

(三) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}$.

(四) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}$.

(五) $a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}$.

(六) $2x^{\frac{1}{4}}-3x^{-\frac{1}{12}}-x^{-\frac{5}{12}}$.

問 14. (一) $x^{\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{5}{6}}$. (二) $2x^{\frac{3}{4}}-3y^{\frac{1}{4}}+4x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}$.

問 15. (一) $x-3x^{-1}$. (二) $a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$.

練 習 問 題 III.

1. (一) $\dfrac{b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{2}{3}}}{a}$. (二) $\dfrac{1}{a^{5}}$. (三) $\dfrac{a}{c}$.

(四) 指數 $=pq-pr+qr-pq+pr-qr=0$.

答: 1.

(五) 1. (六) 1.

(七) 指數

$$=\frac{(p-q)(q-r)(r-p)+pq(p-q)+qr(q-r)+rp(r-p)}{pqr}$$

$$=\frac{(p-q)(q-r)(r-p)-(p-q)(q-r)(r-p)}{pqr}=0.$$ 答：1.

(八) $a^{4n(p-q)}$. (九) 1.

(十) x^b. (十一) $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$.

(十二) $$\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{p-q}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\right\}$$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2(p-q)}{p-q}}+1\right\}$$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{2}+1\right\}$$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\times\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}.$$

$$\therefore\quad 題式=\frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2}\times\frac{(a-b)^{\frac{p+q}{p-q}}}{(a+b)^{\frac{p+q}{p-q}}}\times\frac{(a+b)^{\frac{2q}{p-q}}}{(a-b)^{\frac{2q}{p-q}}}$$

$$\times\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}=2.$$

3. 兩邊皆等於 $x^{\frac{2}{n(n+1)(n+2)}}$.

4. (一) $81^{-\frac{3}{2}}=9^{-3}$, $16^{\frac{7}{4}}=4^{\frac{7}{2}}$,依此計算. 答: $\frac{9}{16}$.

(二) 4. (三) 25. (四) $\frac{1}{8}$. (五) 27.

5. (一) x^2+x+1. (二) $x^{\frac{4}{3}}-1+2x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}$.

(三) $x^{-\frac{1}{2}}+y$.

(四) $x^{\frac{4}{n}}+x^{\frac{7}{2n}}y^{\frac{1}{2n}}-2x^{\frac{3}{n}}y^{\frac{1}{n}}-3x^{\frac{5}{2n}}y^{\frac{3}{2n}}+3x^{\frac{3}{2n}}y^{\frac{5}{2n}}$

$$+2x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{3}{n}}-x^{\frac{1}{2n}}y^{\frac{7}{2n}}-y^{\frac{4}{n}}.$$

(五) $x^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

6. (一) 被除數 $=x(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})+y(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$

$=(x+y)(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$. 答: $x+y$.

(二) $(x-a)\div 4ax$. (三) $1-2x-2x^{\frac{3}{2}}$.

(四) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$.

(五) 題式 $=\dfrac{x^{\frac{14}{3}}+y^{\frac{28}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}}\div\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}}$

$$=\frac{x^{\frac{14}{3}}+y^{\frac{28}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{5}}}\times\frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}}$$

$$=(x^{\frac{12}{3}}-x^{\frac{10}{3}}y^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{8}{5}}-x^{\frac{6}{3}}y^{\frac{12}{5}}+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{16}{5}}$$

$$-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{20}{5}}+y^{\frac{24}{5}})x^{-\frac{6}{3}}y^{-\frac{12}{5}}.$$

$$=x^2y^{-\frac{12}{5}}+x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{8}{5}}+x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{5}}-1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{5}}$$

$$-x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{8}{5}}+x^{-2}y^{\frac{12}{5}}.$$

7. (一) $\sqrt{(a+b)-4+4(a+b)^{-1}}=(a+b)^{\frac{1}{2}}-2(a+b)^{-\frac{1}{2}}.$

(二) $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}.$ (三) $a^{-\frac{3}{5}}a^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}}.$

8. $x+1+x^{-1}.$

9. (一) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b}.$ (二) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{(a-b)(x-a)}.$ (三) $x^{\frac{2}{3}}+x.$

(四) 被除數 $=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-7)}{(x^{\frac{1}{2}}-7)(x^{\frac{1}{2}}+2)}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+2}.$ 答: 1.

(五) $a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}).$ (六) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-2}{x^{\frac{2}{3}}+2}.$

(七) $7x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1.$

(八) 題式$=\{(a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}})^3+(a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3+(-1)^3-3(a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}})$

$(a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})(-1)\}\div\{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+(-1)\}$

$=a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$ 或直接除之.

(九) $\dfrac{a^{-1}-c^{-1}}{a^{-2}+a^{-1}c^{-1}+c^{-2}}$.

(十) 題式 $=\dfrac{(a^2-1)(1-b^{-2})}{(a+1)(1+b^{-1})}=a-ab^{-1}-1+b^{-1}$

(十一) $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=\dfrac{a^2b^2(a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2})}{a^2b^2(a^2b^2-a^{-2}b^{-2})}$

$$=\frac{(a^2b^2-1)(a^2+b^2)}{a^4b^4-1}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$$

又 $\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}=\dfrac{(a^2-1)(b^2-1)}{a^2b^2+1}$.

$\therefore$ 題式 $=\dfrac{a^2+b^2+(a^2-1)(b^2-1)}{a^2b^2+1}=1.$

或第二分數以 $ab-a^{-1}b^{-1}$ 乘其分母子.

(十二) $\dfrac{8}{1-x^2}$.

10. (二) 左邊 $=\dfrac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)$

$$-(x^{\frac{1}{3}}-1)=x^{\frac{2}{3}}+2.$$

(三) 左邊 $=\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})(a+x)}{(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})(x^2+3ax+a^2)}$

11. 分母子以 $x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{1-x^3})^{\frac{2}{3}}$ 乘之.

$$\text{題式}=\frac{x^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{1-x^3})}{\dfrac{x^3(1+\sqrt{1-x^3})^0}{\sqrt{1-x^3}}+x^0(1+\sqrt{1-x^3})}$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{1-x^3})}{\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^3}}+(1+\sqrt{1-x^3})}$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{1-x^3})}{\dfrac{1+\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^3}}}=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^3}=\sqrt{x(1-x^3)}.$$

12. $\text{題式}=\dfrac{1}{(4x^3-3x\ )^2}-(1-x^2)\left\{\dfrac{3x^2-(1-x^2)}{x^3-3x(1-x^2)}\right\}^2=1.$

13. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$ 兩邊各作三乘方,則

$$x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=-z.$$

$$\therefore\quad x+y+z=-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}.$$

$$\therefore\quad (x+y+z)^3=27xyz.$$

14. $a^b=b^a.\quad\therefore\quad a=b^{\frac{a}{b}}.$

因之 $\dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}}=\dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{a}\qquad\therefore\quad\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}.$

15. $\text{左邊}=\dfrac{a^2-ac+c^2}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{c^2}}=a^2c^2=b^4.$

16. (一) $(x^{\frac{3}{4}})^2-2(x^{\frac{3}{4}})+1=0 \quad \therefore \quad x^{\frac{3}{4}}-1=0 \quad \therefore \quad x=1.$

(二) $(x^{\frac{1}{5}}-3)(x^{\frac{1}{5}}+2)=0.\ x^{\frac{1}{5}}-3=0$ 又 $x^{\frac{1}{5}}+2=0.$

(三) $x=4$ 或 $x=\frac{1}{4}.$

(四) $4^x=(2^x)^2, \quad \therefore \quad x=0$ 或 $x=3.$

第四章　無理數

問 1. (一) $\sqrt{6}.$　(二) $\sqrt{2}.$　(三) $9.$

(四) $\sqrt[3]{10}.$　(五) $\sqrt[4]{2x^2y^3z^5}.$　(六) $\sqrt[n]{5ab^2c^3}.$

問 2. (一) $3\sqrt{2}.$　(二) $14\sqrt{3}.$

(三) $6\sqrt[3]{2}.$　(四) $75\sqrt{3}.$

(五) $12\sqrt[3]{50}.$　(六) $5\sqrt[4]{5}.$

(七) $3ab^2\sqrt{3ab}.$　(八) $2c\sqrt[6]{2a^2b^4c^2}.$

(九) $c\sqrt[3]{ab^2}.$　(十) $x\sqrt{y^2-x^2}.$

(十一) $(x+y)\sqrt{x-y}.$　(十二) $(q-3)\sqrt{p}.$

問 3. (一) $\frac{1}{2}\sqrt{6}.$　(二) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}.$

(三) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}.$　(四) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{6}.$

(五) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$. (六) $\frac{1}{4ab}\sqrt[3]{2a^2b(a^3+b^3)}$.

(七) $\frac{\sqrt[3]{3(x^3+1)}}{3(x+1)}$. (八) $\frac{\sqrt[3]{b^3-a^3}}{b}$.

(九) $\frac{c\sqrt[3]{bc^n}}{a^nb^{n+1}}$.

問 4. (一) $\sqrt{980}$. (二) $\sqrt[3]{750}$.

(三) $\sqrt{27a^3}$. (四) $\sqrt{\frac{14}{11}}$.

(五) $\sqrt[4]{3ax}$. (六) $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

(七) $\sqrt[p]{ab}$. (八) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.

(九) $\sqrt{\frac{x+4}{x-3}}$. (十) $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

問 5. (一) $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

(二) $\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{192}=4\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.

(三) 二式爲 $(x-y)\sqrt{x^2+xy+y^2}$,

$xy\sqrt{x^2+xy+y^2}$.

問 6. (一) $10\sqrt{6}$. (二) $-12\sqrt{11}$.

(三) $10\sqrt{3}$. (四) 0.

(五) 0.

問 7. (一) $\frac{51}{10}\sqrt{5}+3\sqrt{7}$. (二) $6\sqrt{7}-\sqrt{6}$.

(三) $\frac{5}{6}\sqrt{3}$. (四) $\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$.

(五) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$.

問 8. (一) 0. (二) $5\sqrt[3]{2a+3}$.

(三) $-2c\sqrt{a-c}$. (四) $\frac{a+b+c}{abc}\sqrt{abc}$

(五) $(2a+3)\sqrt{ax}$. (六) $-2\sqrt{2a}$.

問 9. (一) $\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[6]{9}$.

(二) $\sqrt[14]{256}$, $\sqrt[12]{216}$.

(三) $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{6}$.

(四) $\sqrt[20]{19807}$, $\sqrt[20]{625}$, $\sqrt[20]{14400}$.

(五) $\sqrt[30]{243}$, $\sqrt[30]{27}$, $\sqrt[30]{9}$.

(六) $\sqrt[mn]{a^{n2}}$, $\sqrt[mn]{a^{m2}}$.

(七) $\sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{8a^9b^6}$, $\sqrt[12]{49b^{10}}$.

問 10. (一) $3\sqrt{2}>2\sqrt[3]{3}$.

(二)　$\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}.$

(三)　$\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}.$

(四)　$\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}>\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$　∵　$\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}.$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}$　然　$\frac{a}{b}<1.$

故　$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{a}{b}\right)<\left(\frac{a}{b}\right)^n.$

問 11.　(一)　10.　(二)　$180\sqrt{2}$.　(三)　30.

(四)　$12\sqrt[3]{5}.$　(五)　$30\sqrt[3]{3}.$　(六)　$\frac{7}{4}\sqrt{15}.$

(七)　$2\sqrt[12]{2}.$　(八)　$a^3b^3c^3\sqrt{ab^5c}.$　(九)　$\sqrt[6n]{a^5}.$

問 12.　(一)　$\frac{1}{3}\sqrt{6}.$　(二)　$\sqrt{5}.$

(三)　5.　(四)　$3\sqrt{3}.$

(五)　$\sqrt[3]{a^2b^2}.$　(六)　化除數爲單項式$\frac{1}{10}.$

(七)　$\frac{2}{25}.$　(八)　$\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}.$

(九)　$\frac{1}{b}\sqrt[18]{ab^{17}}.$　(十)　$\frac{a-b}{x}.$

問 13.　(一)　$\frac{1}{10}\sqrt{2}.$　(二)　$\sqrt[3]{4}.$　(三)　$\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^2}.$

問 14. (一) $12\sqrt{5}=26.8328.$ (二) $\frac{1}{3}\sqrt{6}=0.8164.$

(三) $\frac{4}{27}\sqrt{3}=0.2566.$ (四) $\frac{25}{42}\sqrt{7}=1.5748.$

問 15. (一) $24\sqrt{3}.$ (二) $3\sqrt[3]{9}.$

(三) $a^4.$ (四) $2a^3bc^4\sqrt{bc}.$

(五) $a^3b^9.$ (六) $256\sqrt[15]{23338}.$

問 16. (一) $\sqrt[6]{a}.$ (二) $\sqrt[4]{2}.$

(三) $\sqrt[3]{4}.$ (四) $\sqrt[10]{ab^2c^7}\div c$

(五) $\sqrt[4]{8}.$ (六) $\sqrt[12]{32}.$

(七) $\sqrt[2n]{a}.$ (八) $\sqrt[4]{a^p}.$

(九) $\sqrt[3]{2}.$

問 17. (一) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}.$

(二) $24x-120\sqrt{x}.$

(三) $4+18\sqrt{2}.$ 先將被乘數簡之.

(四) $-5\sqrt[3]{6}.$

(五) $7\sqrt{3}+4\sqrt{10}.$

(六) 34.

(七) $27-6\sqrt{15}+6\sqrt{10}+8\sqrt{6}.$

(八) $a-b.$ (九) 7.

問 18. (一) $63-18x\sqrt{14-4x^2}$. (二) 34.

問 19. (一) $2\sqrt{5}+7>\sqrt{5}+\sqrt{23}$.

(二) $\sqrt{10}+\sqrt{7}<\sqrt{19}+\sqrt{3}$.

(三) $\sqrt{5}+\sqrt{14}>\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

問 20. (一) 172. (二) $2p-q$. (三) 8.

(四) 5. (五) 3. (六) 6.

問 21. (一) $2+\sqrt{6}$. (二) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

問 22. (一) $14+6\sqrt{6}$. (二) $\frac{1}{a^2}(x^2+\sqrt{x^4-a^4})$.

問 23. (一) $\sqrt{2}=1.414$.

(二) $-2(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})=-9.300$.

問 24. (一) $\frac{1}{3}(5\sqrt{3}-6)$.

(二) $\sqrt{245}=7\sqrt{5}$, $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$. 答: 50.

(三) $4+\sqrt{15}$.

(四) $4a^2-2$.

問 25. (一) 分母 $=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})$.

答: $\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

(二) $\frac{3}{10}(\sqrt{6}-\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{35}$.

問 26.　(一)　$1+\frac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.$

(二)　$1+\frac{5}{6}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{10}-\frac{1}{3}\sqrt{15}.$

(三)　$(31\sqrt{10}-39\sqrt{6}-19\sqrt{35}+20\sqrt{21}\div 120.$

問 27.　(一)　$8(\sqrt[3]{3}-1).$

(二)　分母 $=\sqrt[3]{2}(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}).$

$\therefore$ 題式 $=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}(\sqrt[3]{3}-1)=\frac{1}{4}(\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}).$

(三)　$\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}.$

問 28.　(一)　$(\sqrt[3]{x^2})^5+(\sqrt[3]{x^2})^4(a\sqrt[6]{y^5})+(\sqrt[3]{x^2})^3(a\sqrt[6]{y^5})^2$

$+(\sqrt[3]{x^2})^2(a\sqrt[6]{y^5})^3+(\sqrt[3]{x^2})(a\sqrt[6]{y^5})^4$

$+(a\sqrt[6]{y^5})^5$

$=\sqrt[3]{x^{10}}+a\sqrt[3]{x^8}\sqrt[6]{y^5}+a^2x^2\sqrt[3]{x^5}$

$+a^3\sqrt[3]{x^4}\sqrt{y^5}+a^4\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y^{10}}+a^5\sqrt[6]{y^{25}}.$

(二)　$\sqrt{a^5}-a^2\sqrt[3]{b^4}+\sqrt{a^3}\sqrt[3]{b^8}-ab^4$

$+\sqrt{a}\sqrt[3]{b^{16}}-\sqrt[3]{b^{20}}.$

(三)　$2^4-2^3\sqrt[5]{3}+2^2\sqrt[5]{3^2}-2\sqrt[5]{3^3}+\sqrt[5]{3^4}.$

(四)　$a^{\frac{10}{3}}x^{\frac{25}{6}}-a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{10}{3}}y^{\frac{1}{2}}+a^2x^{\frac{5}{2}}y-a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}y^2$

$-y^{\frac{5}{2}}.$

問 29. (一) $\sqrt{2}-1.$ (二) $3+\sqrt{7}.$

(三) $\sqrt{6}-\sqrt{5}.$ (四) $\sqrt{15}+\sqrt{11}.$

(五) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$ (六) $2\sqrt{19}-5\sqrt{3}.$

(七) $\frac{\sqrt{5}}{2}-1.$ (八) $\frac{1}{3}(6-\sqrt{3}).$

(九) $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}.$ 但$a>x.$

(十) $\sqrt{a}+\sqrt{b-a}.$

(十一) 題式之平方根 $=\sqrt{\{(a-b)^2-4(a-b)}$

$\sqrt{ab}+4ab\}=a-b-2\sqrt{ab}.$

問 30. (一) $\sqrt{5}-1.$ (二) $\sqrt{2}+1.$

問 31. (一) $\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}+1)=\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{3}.$

(二) $\frac{1}{2}(\sqrt[4]{700}-\sqrt[4]{28}).$ (三) $\sqrt[4]{3}(3+\sqrt{3}).$

問 32. (一) 分母 $=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$ 答: $\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

(二) $\sqrt{3}+\sqrt{5}.$ (三) $\sqrt{3}.$

(四) $\frac{1}{3}(3+\sqrt{3}).$

(五) $\sqrt{(9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}})}=\sqrt{\{9+4(1+\sqrt{3})\}}$

$=\sqrt{(9+4+4\sqrt{3})}=\sqrt{(13+4\sqrt{3})}$

$=2\sqrt{3}+1.$

(六) $\sqrt{3}+1$. (七) $6\sqrt{2}-2\sqrt{5}$.

問 33. (一) $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$. (二) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

(三) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. (四) $1+\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(五) $2\sqrt{3}+2-\sqrt{5}$. (六) $2+\sqrt{a}-\sqrt{3b}$.

練習問題 IV.

1. (一) $ab^2c^3a^5d\sqrt[5]{25d}$. (二) $a^nb^{n+1}c^{2n}\sqrt{ab^n}$.

(三) $3ac\sqrt{2ac^2-3a^2c}$.

(四) $(x-2)\sqrt{x^2+2x-3}$.

(五) $(ax-b)\dfrac{\sqrt{b}}{b^2}$.

2. $7\sqrt{3}-\sqrt{2}=10.697$.

3. (一) $9\sqrt{2}$. (二) $11\sqrt[3]{3}$. (三) $\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}$

4. (一) 24.

(二) $(x^4-7x^2+12)+(2x^2-8)\sqrt{2}$

$+(6-2x^2)\sqrt{3}-4\sqrt{6}$.

5. (一) $16+9\sqrt{3}$.

6. $n(n-1)$.

7. $\sqrt[3]{5}+1<2\sqrt{2}$. 先兩邊各作三乘方,再作二乘方,依此比較.

8. (一) $\sqrt[7]{a^2}$. (二) $\sqrt[3]{a}\sqrt{b}$.

(三) 題式 $=\sqrt{x^3}(1+x+x^2)$, 故其有理化因數爲 $\sqrt{x}$.

9. $\dfrac{x-2\sqrt[4]{x^3y}+2\sqrt{xy}-2\sqrt[4]{xy^3}+y}{x-y}$.

10. (一) $\dfrac{17}{7}$. (二) 0. (三) 14.

(四) $(7-2\sqrt{5})(31+13\sqrt{5})=29(3+\sqrt{5})$.

$(6-2\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})=2(5+\sqrt{7})$.

答: $\dfrac{29}{2}$.

11. 分母子以 $1+\sqrt{3}$ 除之,則題式

$$=\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{5-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}=\frac{\sqrt{15}}{5}=0.77459.$$

12. 先簡其分母. 答: -5.71

13. 分母 $=\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

$$=3(\sqrt{10}-\sqrt{5})=3\sqrt{5}(\sqrt{2}-1).$$

14. 10.

15. $\frac{1}{2}b$.

16. 分母 $=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

答: $\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{21}$.

17. (一) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{3}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{20}\sqrt{10}$

$-\frac{1}{10}\sqrt{15}-\frac{7}{20}\sqrt{30}$.

(二) 分母 $=-(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})$ 先以 $\sqrt{3}$ $+\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ 乘之.

答: $-\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{2}{5}\sqrt{10}+\frac{8}{15}\sqrt{15}\right)$.

18. 左邊分母求有理化.

19. (一) $\frac{1}{4}(3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+3)$. (二) $3(\sqrt[3]{3}+1)$.

(三) 5. (四) $2(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$

20. $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ 故 $x^2-1=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1$

$$=\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2.$$

$\therefore \quad \sqrt{(x^2-1)}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$. 依同理,

$$\sqrt{(y^2-1)}=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right).$$

$$\therefore\quad 題式=2\left\{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)\times\left(b+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\times\left(b-\frac{1}{b}\right)\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right\}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

21. $\sqrt[3]{3^2}-3\sqrt[4]{5}+\sqrt{3}\sqrt{5}-\sqrt[4]{5^3}.$

22. (一) $\dfrac{a^3+a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{4}{3}}+a^2b^2+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{8}{3}}+ab^{\frac{10}{3}}+a^{\frac{1}{2}}b^4}{a^3-b^4}.$

(二) $\dfrac{a^4+a^3b^{\frac{1}{5}}+a^2b^{\frac{2}{5}}+ab^{\frac{3}{5}}+b^{\frac{4}{5}}}{a^5-b}.$

23. (一) 52.　　(二) $\left(p^2-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{p^2+1}$

24. (一) $\dfrac{1}{2}\sqrt{10}-\dfrac{1}{5}\sqrt{15}.$　　(二) $\sqrt{7}+\sqrt{14}.$

(三) $2-\sqrt{3}.$　　(四) $\sqrt[4]{2}(1+\sqrt{3}).$

(五) $\sqrt{\dfrac{1}{2}(a+b-c)}+\sqrt{\dfrac{1}{2}(a-b+c)}.$

(六) $\sqrt{p}+\sqrt{p-1}.$

(七) $\sqrt{\dfrac{2x^2+x+2}{2}}-\sqrt{\dfrac{x}{2}}.$

(八) $\sqrt{\left\{\dfrac{(a+c)(b+c)}{2}\right\}}+\sqrt{\left\{\dfrac{(a-b)(b-c)}{2}\right\}}.$

(九) 題式 $=1+\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}(1+\sqrt{1-c^2})$

答: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-c^2}}\left\{\sqrt{\dfrac{1+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{1-c}{2}}\right\}$.

25. (一) $\sqrt{\{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(11\sqrt{7}+13\sqrt{5})\}}$

$=\sqrt{(12+2\sqrt{35})}=\sqrt{7}+\sqrt{5}.$

(二) $(5+7\sqrt{2})\times\dfrac{29+47\sqrt{2}}{73}=11+6\sqrt{2},$

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}.$

26. (一) $2-\sqrt{3}-3\sqrt{2}.$ (二) $1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$

(三) $6+\sqrt{5}+\sqrt{7}.$

27. $\sqrt{2}+1.$

28. $\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{21})=4.79.$

29. (一) $\sqrt{6}+\sqrt{2}=3.863.$ (二) 3.

30. 題式 $=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{35}+\sqrt{10}-\sqrt{21}-\sqrt{6}).$

31. 兩邊各自乘.

32. (一) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{(4+2\sqrt{3})}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}.$

(三) 題式

$$=\frac{6-5}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{5-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\frac{6-2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0.$$

33. 兩邊各自乘,得方程式 $5x^2+7y^2=73,\ xy=6.$

$$\left.\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-2\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-\sqrt{\dfrac{28}{5}}\\y=-\sqrt{\dfrac{45}{7}}\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=\sqrt{\dfrac{28}{5}}\\y=\sqrt{\dfrac{45}{7}}\end{array}\right\}$$

凡四組之根,然第二,第四二組之根,將使所設之式右邊爲負,故不採.

34. 題式 $=\dfrac{(\sqrt{4+\sqrt{15}})^3+(\sqrt{4-\sqrt{15}})^3}{(\sqrt{6+\sqrt{35}})^3-(\sqrt{6-\sqrt{35}})^3}\times\dfrac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^3}$

$$=\frac{(\sqrt{8+2\sqrt{15}})^3+(\sqrt{8-2\sqrt{15}})^3}{(\sqrt{12-2\sqrt{35}})^3-(\sqrt{12-2\sqrt{35}})^3}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3-(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}=\frac{28\sqrt{5}}{52\sqrt{5}}=\frac{7}{13}.$$

答

35. 前二項之和 $=\dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2\sqrt{6}+4}.$

後二項之和 $=\dfrac{2}{2\sqrt{6}-4}.$

36. 左邊 $=\dfrac{(x+1)^2(x-2)+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{(x-1)^2(x+2)+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}$.

$$=\frac{(x+1)\{(x+1)(x-2)+(x-1)\sqrt{x^2-4}\}}{(x-1)\{(x-1)(x+2)+(x+1)\sqrt{x^2-4}\}}.$$

以$(x-1)(x+2)-(x+1)\sqrt{x^2-4}$乘其分子母,則分子爲

$(x+1)[(x-1)^2(x+2)-(x+1)^2(x-2)]\sqrt{x^2-4}$,而分母爲

$(x-1)(x+2)[(x-1)^2(x+2)-(x+1)^2(x-2)]$.

37. $\sqrt{(1+x)}=\sqrt{\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$$\sqrt{(1-x)}=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

答: $\dfrac{5\sqrt{3}-6}{3}$.

38. 公式 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

$$x^3=a+\sqrt{(a^2-b^3)}+a-\sqrt{(a^2-b^3)}$$

$$+3\sqrt[3]{\{(a+\sqrt{a^2-b^3})(a-\sqrt{a^2-b^3})\}}$$

$$\times\left[\sqrt[3]{\{a+\sqrt{(a^2-b^3)}\}}+\sqrt[3]{\{a-\sqrt{(a^2-b^3)}\}}\right]$$

$$=2a+3\sqrt[3]{a^2-a^2+b^3}.x=2a+3bx.$$

第五章 虛數及複素數

問 1. 見第58節及第59節.

問 2. $x>3$. $x>\frac{7}{2}$. $x<-\frac{4}{3}$.

問 3. $3i$, $\frac{2}{3}i$, $0.5i$, $\frac{9}{4}i$.

問 4. (一) $10i$. (二) $4i$.

(三) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})i$. (四) 0.

(五) $2ai$.

問 5. (一) $\sqrt{10}i$. (二) -12. (三) -6.

(四) $-15i$. (五) -4.

問 6. (一) 2. (二) $\sqrt{3}i$. (三) $-5i$.

(四) $-i$. (五) $-\frac{1}{2}i$.

問 7. (一) $i^{12}=i^{4\times3}=1$. (二) $-i$. (三) -1.

(四) i. (五) -3.

問 8. (一) $-5-3i$. (二) $-4+5i$.

問 9. (一) $17+7i$. (二) 7.

(三) 11. (四) $-\sqrt{2}+6i$.

問 10. (一) $-24+70i.$ (二) $-22.$

(三) $-4\sqrt{3}i.$

問 11. (一) $1+i.$ (二) $2-8i.$

(三) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i.$ (四) $10.$

(五) $(1^3+i^3)\div(1+i)=1-i+i^2=1-i-1=-i.$

(六) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i.$

問 12. (一) 依第 67 節公式, $a=-3$, $b=4$, 則

$$\sqrt{-3+4i}=\sqrt{\left(\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}\right)}i.$$

$=1+2i.$ 答.

(二) 依公式, $a=0$, $b=2$. 答: $1+i.$

(三) $2-\sqrt{5i}.$

練習問題 V.

1. (一) $ai.$ (二) $\frac{34}{33}i.$ (三) $(1-3p)i.$

2. (一) $2\sqrt{3}.$ (二) $1125\sqrt{30i}.$ (三) $\frac{1}{7}+\frac{29}{14}i.$

(四) $16.$ (五) $x^2-x+1.$

3. (一) $-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}i.$　　(二) $\frac{5}{11}-\frac{13\sqrt{2}}{11}i.$

4. 0.

5. 0.

6. 0.

8. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=-1.$

9. $\omega_1,=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \omega_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$ 依各式之左邊計算可也.

10. 因 $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 爲1之立方根,

故 $x^4=x^3\times x=1\times x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 又 $x^3=1.$

$$\therefore\quad \text{題式}=2\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)-11-9\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)+4$$

$$=-7\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)-7=7\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

或直接計算亦可.

11. 括弧內之二數皆爲1之立方根

令 $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega_1,\qquad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega_2.$

m 為正整數, 若 $n=3m$.

則 $\omega_1^{3m}+\omega_2^{3m}=\{\omega_1^3\}^m+\{\omega_2^3\}^m=1^m+1^m=2$.

若 $n=3m+1$.

則 $\omega_1^{3m+1}+\omega_2^{3m+1}=\omega_1^{3m}\times\omega_1+\omega_2^{3m}\times\omega_2$

$=\omega_1+\omega_2=-1$. [參照第 9 問]

又若 $n=3m+2$.

則 $\omega_1^{3m+2}+\omega_2^{3m+2}=\omega_1^{3m}\times\omega_1^2+\omega_2^{3m}\times\omega_2^2$

$=\omega_2+\omega_1=-1$. [參照第 9 問]

12. (一) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

故 $\omega x+\omega^2 y$ 為 $\omega^3x^3+\omega^6y^3=x^3+y^3$ 之因數.

又 $\omega^2x+\omega y$ 為 $\omega^6x^3+\omega^3y^3=x^3+y^3$ 之因數.

$\therefore\quad x^3+y^3=(x+y)(\omega x+x^2y)(\omega^2x+\omega y)$.

(二) 依公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$.

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

與 (一) 證明同.

13. 所設方程式之二虛根為 $\alpha+\beta i$ 及 $\alpha-\beta i$ 之形, 但 α, β 皆為實數.

$\therefore\quad ax^2+bx+c=a\{x-(\alpha+\beta i)\}\{x-(\alpha-\beta i)\}$

$=a\{(x-\alpha)-\beta i\}\{(x-\alpha)+\beta i\}$

$$=a\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}.$$

其　$(x-\alpha)^2+\beta^2$ 不關於 x 之值若何，固恆為正者也.

故　ax^2+bx+c 之符號與 a 之符號同.

14.　$\sqrt{-16}=4i$，而 $\sqrt{4i}=\sqrt{2}(1+i)$.　答.

注意.　$-\sqrt{4i}=-\sqrt{2}(1+i)$ 亦 -16 之四乘根之一.

又取 -16 之他平方根 $-4i$ 以求 $-4i$ 之平方根，

則得他二根為 $\sqrt{2}(1-i)$ 及 $-\sqrt{2}(1-i)$.

15.　(一)　$3-4i$.　　　(二)　$(a+b)-(a-b)i$.

16.　解括弧，移項，

$$(x+2y)-yi=-2+4i.$$

$$\therefore\quad x+2y=-2,\quad -y=4.\qquad [第62節]$$

$$\therefore\quad y=-4,\quad x=6.$$