

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 15

AUFGABE 15.1. Analysiere das Schnittverhalten des Achsenkreuzes $V(XY)$ mit beliebigen Geraden.

AUFGABE 15.2. Analysiere das Schnittverhalten von ebenen monomialen Kurven $V(X^r - Y^s)$ mit beliebigen Geraden.

AUFGABE 15.3. Analysiere das Schnittverhalten von $V(XYZ)$ mit beliebigen Geraden.

AUFGABE 15.4. Bestimme, welche Geraden

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} t$$

ganz auf der A_1 -Singularität $V(XY - Z^2)$ verlaufen.

AUFGABE 15.5. Es sei $P \in K^n$ ein Punkt. Zeige, dass die Zugehörigkeit $P \in G$ eine Zariski-abgeschlossene Bedingung im Parameterraum aller Geraden $G \subseteq K^n$ ist.

AUFGABE 15.6. Es sei $f \in K[X]$ ein Polynom $\neq 0$. Zeige, dass die einzige Gerade durch einen Punkt $(x, f(x))$ mit der Eigenschaft, dass $Y - f(X)$ aufgefasst auf dieser Geraden in diesem Punkt eine mehrfache Nullstelle besitzt, die Tangente durch diesen Punkt ist.

AUFGABE 15.7. Es sei $P \in V = V(F) \subseteq K^n$ ein glatter Punkt zu $F \in K[X_1, \dots, X_n]$. Es sei G eine Gerade durch P . Zeige, dass die Vielfachheit von P in $V \cap G$ genau dann ≥ 2 ist, wenn G zum Tangentialraum von V an P gehört.

Man versuche, die folgenden Formulierungen, bei denen das Wort „generisch“ verwendet wird, zu erläutern, zu präzisieren und zu begründen.

AUFGABE 15.8. Sei $E \subset K^n$ eine Hyperebene, $n \geq 2$. Dann ist die generische Gerade nicht parallel zu E .

AUFGABE 15.9. Die generische quadratische Matrix ist invertierbar.

AUFGABE 15.10. Das generische Polynom besitzt nur einfache Nullstellen.

AUFGABE 15.11. Der generische Punkt auf einer Hyperfläche ist glatt.

AUFGABE 15.12. Man gebe Beispiele für zweidimensionale isolierte Hyperflächensingularitäten, deren Milnorzahl übereinstimmt, deren Multiplizität aber verschieden ist.

AUFGABE 15.13. Man gebe Beispiele für zweidimensionale isolierte Hyperflächensingularitäten, deren Milnorzahl verschieden ist, deren Multiplizität aber gleich ist.

AUFGABE 15.14. Es sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad m . Präzisiere und begründe die Aussage, dass zu einer Geraden, die nahe am Nullpunkt verläuft, sämtliche Schnittpunkte der Geraden mit $V(F)$ sich in der Nähe des Nullpunktes befinden.

Im Fall von ebenen Kurven gibt es einige Besonderheiten, da über einem algebraisch abgeschlossenen Körper die homogene Komponente zum Untergrad in Linearfaktoren zerfällt.

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein von 0 verschiedenes Polynom. Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ein Punkt der zugehörigen affinen ebenen Kurve, der (nach einer linearen Variablentransformation) der Nullpunkt sei. Es sei

$$F = F_d + F_{d-1} + \dots + F_m$$

die homogene Zerlegung von F mit $F_d \neq 0$ und $F_m \neq 0$, $d \geq m$. Es sei $F_m = G_1 \cdots G_m$ die Zerlegung in lineare Faktoren. Dann nennt man jede Gerade $V(G_i)$, $i = 1, \dots, m$, eine *Tangente* an C im Punkt P .

AUFGABE 15.15.*

Bestimme die Multiplizität und die Tangenten (mit ihrer Multiplizität) der Kurve

$$V(X^2 + 5Y^2 + 3X^2Y - 7XY^2 + 11X^9) \subset \mathbb{A}_\mathbb{C}^2$$

im Nullpunkt.

AUFGABE 15.16.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung des Polynoms

$$X^3 + XY^2 \in \mathbb{C}[X, Y]$$

und bestimme die Singularitäten der zugehörigen affinen Kurve samt ihren Multiplizitäten und Tangenten.

AUFGABE 15.17.*

Bestimme über die partiellen Ableitungen für das durch das Polynom

$$V^3 + U^2V - 2UV + 2U^2 - 4U - 2V$$

gegebene Nullstellengebilde einen singulären Punkt. Führe eine Koordinatentransformation durch, die diesen Punkt in den Nullpunkt überführt. Bestimme die Multiplizität und die Tangenten in diesem Punkt.

AUFGABE 15.18. Bestimme die Singularitäten (mit Multiplizitäten und Tangenten) der durch

$$V \left((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2 \right)$$

gegebenen *Kardioide*.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5