Н. А. Рынинъ.

Начертательная Геометрія

(МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНІЯ).

А. Введеніе.

Б. Отдѣлъ I.

"Ортогональныя проекціи".

ЛЕКЦІИ

читанныя на I-мъ семестрѣ инженерныхъ отдѣленій С.-Петербургскаго Политехническаго Института въ 1911 акад. году.

С. ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

1911.

А. ВВЕДЕНІЕ.

I. *ПРЕДМЕТЪ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.*

Среди различныхъ нашихъ потребностей весьма видную роль играетъ потребность съ тою или иною цѣлью сообщать другъ другу мысли и наши представленія о предметахъ.

Для удовлетворенія этой потребности въ нашемъ распоряженіи имѣется цѣлый *рядъ способовъ,* причемъ одна и та же мысль въ большинствѣ случаевъ можетъ быть выражена *различными способами.*

Избраніе того или другого способа сообщенія зависитъ, съ одной стороны, отъ *рода мыслей* или рода тѣхъ предметовъ, представленіе о которыхъ мы желаемъ передать, съ другой стороны отъ нѣкоторыхъ условій *самой передачи.*

Отъ цѣлесообразности избранія способа сообщенія мысли зависитъ большая или меньшая степень легкости ея усвоенія. Съ цѣлью облегченія понять данную мысль очень часто пользуются *нѣсколькими* способами одновременно.

Разсмотримъ въ общихъ чертахъ способы сообщеній мыслей и представленій.

Однимъ изъ наиболѣе употребительныхъ способовъ является *устная рѣчь,* которая имѣетъ свои достоинства и недостатки. Къ *достоинствамъ* ея относится возможность сообщать мысль *одновременно большому числу* слушателей. Лицо, обладающее даромъ слова, умѣющее говорить, можетъ дѣйствовать не только на разсудокъ слушателя, но и на чувство; поэтому говорятъ, что *живое слово убѣдительно.*

Недостатки устной рѣчи заключаются въ томъ, что не оставляетъ по себѣ вещественнаго слѣда, ограничивается временемъ и пространствомъ: воспринимать сообщаемую этимъ способомъ мысль только въ моментъ ея сообщенія, слушать живое слово можно на небольшомъ только сравнительно разстояніи отъ говорящаго.

Для устраненія этихъ недостатковъ изобрѣтены *фонографъ и телефонъ.* Первый запечатлѣваетъ звуки и можетъ ихъ воспроизвести въ любое время; второй передаетъ ихъ на большое разстояніе. Можетъ быть, со временемъ оба эти изобрѣтенія будутъ настолько усовершенствованы, что вышеуказанные недостатки устной рѣчи будутъ совершенно ими устранены, но пока они далеки отъ этого. Телефонъ, хотя и получилъ права гражданства, но звуки, передаваемые имъ, не настолько сильны, чтобы ихъ могло слышать много лицъ одновременно. Фонографъ передаетъ не всѣ звуки одинаково хорошо. Поэтому въ настоящее время, если мы желаемъ сообщить нашу мысль лицу, удаленному отъ насъ во времени и пространствѣ, мы должны обращаться къ другому способу сообщенія - къ *письменному изложенію.*

Особенности этого способа противоположны свойствамъ устной рѣчи: мысль облекается въ условную вещественную форму, въ которой она можетъ быть передана на любое разстояніе и сохраняться произвольно долгое время. Одновременное пользованіе рукописью доступно очень небольшому числу лицъ, если не переводятъ написанное въ устную рѣчь путемъ чтенія вслухъ.

Изобрѣтеніе *книгопечатанія* вполнѣ устранило этотъ недостатокъ; оно дало возможность, такъ сказать, вещественную оболочку мысли воспроизводить въ произвольно большомъ количествѣ экземпляровъ и дѣлать ее доступною для одновременнаго пользованія многимъ лицамъ. Но обыкновенное письмо или печать приложимы не ко всѣмъ родамъ мыслей: такъ напримѣръ, для передачи, при тѣхъ же условіяхъ времени и пространства, мыслей музыкальныхъ нужно особое условное письмо - ноты. Для передачи мыслей математическихъ принято условное письмо - *цифры.* Есть цѣлая категорія мыслей, которыя хотя и возможно выразить устно или письменно, но для воспріятія ихъ нужно или значительное напряженіе умственныхъ силъ со стороны слушателя или читателя, или особый талантъ со стороны лица, излагающаго эти мысли.

Дѣйствительно, подъ вліяніемъ тѣхъ или иныхъ возбудителей, въ нашемъ воображеніи создаются образы такихъ предметовъ, непосредственно отъ которыхъ мы иногда никакихъ впечатлѣній не воспринимали. Напримѣръ, при чтеніи описанія какого-либо путешествія или историческаго очерка въ нашемъ воображеніи рисуется природа и обитатели невѣдомыхъ намъ странъ, возникаютъ образы отжившихъ героевъ и т.д. Однако, если намъ придется увидѣть тотъ предметъ, представленіе о которомъ у насъ сложилось подъ вліяніемъ чтенія или разсказа о немъ, то почти всегда оказывается, что мы представляли его иначе, чѣмъ онъ есть на самомъ дѣлѣ. Дѣйствительно, въ описаніи почти невозможно указать на всѣ признаки и свойства какого-либо предмета, и часто недостающія свойства дополняются нашимъ воображеніемъ, что и бываетъ причиною разницы между предметомъ воображаемымъ и дѣйствительнымъ.

Такимъ образомъ, въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется точно передать тотъ или иной образъ, нельзя довольствоваться устной рѣчью или письменнымъ описаніемъ предмета. Равнымъ образомъ не всегда возможно бываетъ и пользоваться самимъ предметомъ, который можетъ быть удаленъ отъ насъ во времени и пространствѣ, могъ существовать прежде, или только долженъ образоваться. Единственнымъ способомъ выйти изъ подобнаго затрудненія является пользованіе *изображеніями* предмета, которыя, конечно, не могутъ замѣнить самаго предмета, но даютъ намъ больше представленій о предметѣ, нежели описаніе предмета, и во многихъ случаяхъ пользованіе изображеніями даже представляетъ больше преимуществъ, нежели пользованіе самими предметами. Съ помощью изображенія можно представить предметы не только существующіе, но и такіе, которые уже перестали или еще не начали существовать.

При изображеніи какого-либо предмета необходимо различать въ послѣднемъ: a) форму его, b) освѣщенность и c) окраску, которыя являются элементами, характеризующими какъ видъ самого предмета, такъ и видъ изображенія его. При этомъ элементы эти съ теченіемъ извѣстнаго промежутка времени могутъ измѣняться (напримѣръ, картины кинематографа въ краскахъ) или могутъ оставаться безъ измѣненія (фотографія, картина, барельефъ и т п.). Если, при исполненіи изображенія какого-либо предмета, желаютъ, чтобы оно производило на глазъ такое же впечатлѣніе, какое производитъ самый предметъ, то здѣсь данныхъ одной геометріи оказывается уже недостаточно и необходимо примѣнять данныя физики (оптика, ученіе о свѣтѣ, о цвѣтѣ) и физіологіи (ученіе о глазѣ, зрительныя ощущенія). Часто приходится намѣренно искажать геометрическую форму изображенія, чтобы глазъ получилъ впечатлѣніе о формѣ предмета, напримѣръ, чтобы глазъ получилъ впечатлѣніе о горизонтальности потолка большой залы, необходимо ему придавать извѣстный подъемъ въ серединѣ, иначе онъ будетъ *казаться* провисшимъ. Изъ этихъ же соображеній придаютъ по серединѣ моста подъемъ его нижнему поясу. Куполъ церкви, сдѣланный шарообразной формы, будетъ *казаться* немного приплюснутымъ, поэтому ему слѣдуетъ дать нѣкоторый подъемъ, сдѣлавъ его эллипсоидальной формы и т.д. Такія же явленія наблюдаются при изображеніи степени освѣщенности (тѣни) и окраски предмета. Напримѣръ, красный цвѣтъ, помѣщенный рядомъ съ зеленымъ *кажется* болѣе краснымъ, нежели тогда, когда онъ находится на другомъ фонѣ и т.п.

Такимъ образомъ, отъ *дѣйствительнаго* вида изображенія слѣдуетъ отличить *кажущійся* его видъ.

Начертательная геометрія является отдѣломъ науки о методахъ изо-

браженія. Она показываетъ, какъ строить изображенія лишь геометрической формы предмета, какъ рѣшать различныя геометрическія задачи, пользуясь этимъ изображеніемъ и какъ, пользуясь изображеніемъ, возстановить въ пространствѣ данную форму. На основаніи вышеизложеннаго, можно составить слѣдующую табличку видовъ изображеній:

Изображенія дѣйствительныя и кажущіяся; какъ тѣ, такъ и другія могутъ быть:

Постоянными и перемѣнными, кромѣ того, изображать можно:

форму, освѣщенность и цвѣтъ.

Въ частности изображенія формы предмета могутъ быть пространственными и поверхностными.

Къ первымъ относятся разнаго рода *декораціи, изваянія, барельефы, модели;* ко вторымъ - *панорамы, картины, фотографіи, рисунки и чертежи.* Наиболѣе употребительными являются изображенія поверхностныя и въ частности - плоскостныя. Наиболѣе совершенными изъ поверхностныхъ изображеній являются панорамы; такъ называются изображенія, нарисованныя на внутренней поверхности цилиндра и обнимающія весь видимый горизонтъ. Панорамы при удачномъ устройствѣ даютъ иногда полную иллюзію и даже трудно отличить, гдѣ кончается дѣйствительность и гдѣ начинается изображеніе. Однако, устройство панорамы обходится очень дорого и требуетъ большого умѣнія.

Нѣсколько менѣе совершенными являются изображенія въ краскахъ - *картины,* исполненныя на плоскости и обнимающія только часть видимаго горизонта.

Еще менѣе совершенными являются изображенія одноцвѣтныя: фотографіи, гравюры у т.п. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что однимъ изъ достоинствъ фотографіи является быстрота производимаго ею изображенія, и то, что это изображеніе можетъ быть снято только съ предмета, который дѣйствительно существовалъ. Кромѣ того, за послѣднее время фотографія уже переходитъ въ область точность наукъ. Ею пользуются для снимакія плановъ и рельефовъ мѣстности, что составляетъ предметъ науки - *фототопографіи и стереофототопографіи.*

Отъ вышеописанныхъ изображеній слѣдуетъ отличать *чертежи.* Отличіе чертежей отъ рисунковъ заключается въ томъ, что размѣръ и положеніе каждой линіи на чертежѣ опредѣляется на основаніи особыхъ правилъ при помощи чертежныхъ инструментовъ въ точной зависимости отъ истинныхъ размѣровъ и положенія въ пространствѣ соотвѣтственныхъ линій предмета, между тѣмъ какъ на рисункѣ то и другое опредѣляется на глазъ. Иногда на рисункѣ надписываютъ размѣры отдѣльныхъ частей. Такой рисунокъ называется *эскизомъ.* Упомянутое свойство чертежа - *измѣримость* является весьма цѣннымъ. Для техника чертежъ является незамѣнимымъ средствомъ выражать ту или иную идею и въ этомъ отношеніи чертежъ по справедливости заслуживаетъ названіе "языка техника", даннаго ему знаменитымъ французскимъ геометромъ *Гаспаромъ Монжемъ.* Если чертежъ является языкомъ техника, одинаково понятнымъ всѣмъ образованнымъ народамъ, то Начертательная Геометрія служитъ грамматикой этого мірового языка, такъ какъ она учитъ насъ правильно читать чужія и излагать наши собственныя мысли, пользуясь въ качествѣ словъ одними только линіями и точками, какъ элементами всякаго изображенія.

Кромѣ того, изученіе Начертательной Геометріи имѣетъ значеніе воспитательное въ смыслѣ развитія нашего воображенія, а безъ достаточно развитого воображенія немыслимо никакое серьезное техническое творчество, т.е. проектированіе *).

---

*) *Болѣе подробныя данныя о значеніи и содержаніи Начертательной Геометріи можно найти въ сочиненіи Н. Рынина "Значеніе Начертательной Геометріи и сравнительная оцѣнка главнѣйшихъ ея методовъ". С.-Петербургъ. 1907 г.*

Методы изображенія освѣщенности предметовъ (теорія тѣней, и методы изображенія цвѣта основаны на примѣненіи физики къ начертательной геометріи. Равнымъ образомъ, построеніе кажущихся изображеній (оптическія, иллюзіи) основано на примѣненіи физіологіи къ начертательной геометріи. Въ настоящемъ курсѣ будутъ разсмотрѣны лишь вопросы Начертательной Геометріи, т.е. вопросы, относящіеся къ построенію изображеній формы предметовъ и къ рѣшенію нѣкоторыхъ геометрическихъ задачъ на основаніи этихъ изображеній. Въ частности также будутъ разсмотрѣны простѣйшія задачи на построеніе тѣней, касаясь лишь вопроса объ очертаніи тѣней собственныхъ и падающихъ, такъ какъ этотъ вопросъ можно трактовать пользуясь только геометрическими построеніями и не касаясь физической стороны явленія. Вопросы же объ изображеніяхъ освѣщенности, цвѣта и о кажущихся изображеніяхъ составитъ предметъ особаго труда.

------ II ------

КРАТКАЯ ИСТОРІЯ РАЗВИТІЯ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

Если опредѣлять Начертательную Геометрію какъ приложеніе Геометріи къ построенію изображеній различныхъ предметовъ, то начало ея слѣдуетъ искать въ глубокой древности, когда человѣкъ впервые задался цѣлью *изобразить* какой-либо предметъ такъ, чтобы изображеніе болѣе или менѣе *соотвѣтствовало* формѣ. Есть основаніе предполагать, что за 1000 лѣтъ до Рождества Христова искусство изображать предметы въ планѣ и фасадѣ было извѣстно, такъ какъ невозможно себѣ представить, какимъ образомъ, не зная этого элементарнаго способа изображенія, могли воздвигнуть такое сложное зданіе, какъ Іерусалимскій храмъ, который былъ выстроенъ жителями Тира. Въ 1-й книгѣ царствъ говорится: "И былъ воздвигнутъ домъ, камни котораго заранѣе были совершенно приготовлены, такъ что при постройкѣ не слышалось ни молота, ни топора, ни другого какого желѣзнаго инструмента".

Примѣненіе плановъ и фасадовъ съ надписанными на чертежахъ числами для обозначенія размѣровъ отдѣльныхъ частей было широко распространено среди древнихъ грековъ и римлянъ и свѣдѣнія о такихъ чертежахъ даетъ римскій архитекторъ Витрувій, жившій во времена Іисуса Христа. Подобно тому, какъ въ техникѣ требовалось примѣненіе плановъ и фасадовъ предмета, такъ и въ живописи возникъ способъ изображенія предметовъ такими, какими они кажутся глазу, т.е. возникли перспективныя изображенія вначалѣ мало совершенныя, а потомъ болѣе и болѣе отвѣчающія правиламъ перспективы. Напримѣръ, на стѣнахъ древне-египетскихъ сооруженій часто изображается человѣческое тѣло, но почти безъ примѣненія правилъ перспективы: лицо изображается en face, ноги въ профиль и т.д. Подобное же отсутствіе правилъ перспективы можно замѣтить на изображеніи, сдѣланномъ на гробницѣ Абдъ-ель-Гурна въ Өивахъ. Изображается квадратный прудъ въ планѣ, деревья же въ фасадѣ.

Болѣе правильныя понятія о перспективѣ мы можемъ найти въ твореніяхъ грековъ и римлянъ, причемъ съ теченіемъ времени частью эмпирическимъ путемъ, частью разсужденіями вырабатывались правила перспективы, которыя были собраны и изложены въ систематическомъ сочиненіи Леона Альберти (1404-1472 г.) "О живописи". Позднѣе эти свѣдѣнія были дополнены и развиты живописцемъ Піетро-Франческо (1444 г.) и Леонардо-да-Винчи (1452-1519 г.). Сочиненіе послѣдняго "Trattato della pittura" изобилуетъ многочисленными практическими совѣтами не только по линейной, но и по воздушной перспективѣ, т.е. объ изображеніяхъ оттѣнковъ свѣта и цвѣта.

Слѣдуетъ замѣтить, что нѣкоторыя данныя о способахъ изображенія можно найти въ сочиненіяхъ по оптикѣ Евклида и Геродора. Гиппархъ (161-126 г. до Р.Х.) предложилъ для изображенія небеснаго свода методъ стереографическихъ проекцій. Вообще же въ древніе времена не только въ Европѣ, но и въ Африкѣ (Египетъ) и въ Азіи (Китай) для построенія изображеній въ живописи примѣняли инстинктивно тотъ методъ, который носитъ нынѣ названіе "косоугольной проекціи". Въ средніе вѣка толчекъ къ теоретическому изслѣдованію методовъ изображенія дало сочиненіе Альбрехта Дюрера, подъ названіемъ: "Правила измѣренія циркулемъ и линейкой" (Нюренбергъ, 1525 г.). Въ этомъ сочиненіи авторъ показываетъ, какъ можно получить перспективу предмета въ видѣ сѣченія пучка лучей зрѣнія съ картинною плоскостью, пользуясь планомъ и фасадомъ предмета.

Ламбертъ въ своемъ сочиненіи "Свободная перспектива" (1728, Эльзасъ) даетъ новые способы построенія перспективныхъ изображеній не пользуясь планомъ и фасадомъ предмета, а лишь зная размѣры частей предмета.

Параллельно съ развитіемъ практики методовъ изображенія и съ появленіемъ сочиненій, трактующихъ отдѣльные, не связанные между собою методы изображеній, шло развитіе и проективной геометріи - математической науки, изучающей свойства фигуръ и преобразованіе послѣднихъ при помощи метода проекцій. Кто былъ творцомъ проективной геометріи, трудно сказать. Эта наука постепенно формировалась, начиная съ рѣшенія ея отдѣльныхъ задачъ. Евклидомъ, Аполлоніемъ и Паппосомъ она формируется въ спеціальную дисциплину послѣ трудовъ Дезарга, Паскаля, Карно (1806 г.), Ламберта (1759), Понселе (1827 г.), Штейнера (1832), Шаля (1852 г.), Staудта (1847 г.), Кремоніе Рея, Ващенко-Захарченко и др. Хотя со времени развитія проективной геометріи и появлялись опыты изложенія спеціальныхъ методовъ изображенія, не связывая ихъ съ теоріей проективной геометріи, какъ напримѣръ, прекрасное сочиненіе Гаспара Монжа (1799 г.) "Начертательная Геометрія", гдѣ излагается, главнымъ образомъ, методъ ортогональныхъ проекцій, однако, въ большинствѣ сочиненій замѣчается стремленіе разсматривать различные методы изображенія, какъ частные случаи задачъ проективной геометріи. Въ этомъ направленіи работаютъ въ Германіи Винеръ, Фидлеръ, въ Австріи - Пелка, въ Италіи Лоріа, Аскіери, въ Россіи Купферъ и др.

Такимъ образомъ, намъ кажется, что исторію начертательной геометріи, какъ науки о методахъ изображенія, слѣдовало бы раздѣлить на 3 періода.

Первый періодъ - наблюдательный, когда изображенія строились безъ примѣненія геометрическихъ правилъ, - приблизительно до 1000 лѣтъ до Р.Х. Второй періодъ - когда къ построенію методовъ изображенія начали примѣнять законы математики. За это время появилось рядъ не связанныхъ между собою изслѣдованій по различнымъ вопросамъ Начертательной Геометріи, именно, по Перспективѣ, Ортогональнымъ Проекціямъ, Аксонометріи, Проекціямъ съ числовыми отмѣтками, напримѣръ, сочиненія Фрезье, Оливье, Гурнери, Монжа *), Кузьмери, Тено во Франціи, Альберти, Франческо, Леонардо, Беллавитиса въ Италіи, Гравезанда въ Голландіи, Тайлора въ Англіи, Вейбреннера въ Германіи, Потье, (1816 г.), Севастьянова, Галактіонова, Сомова, Редера, Дурова, Макарова и Курдюмова - въ Россіи.

---

*) *Здѣсь говорится лишь о его сочиненіи "Начертательная Геометрія" 1799.* Paris.

Второй періодъ развитія Начертательной Геометріи можно считать съ 1000 л. до Р.Х. до 20-го столѣтія, хотя и теперь еще есть авторы, излагающіе начертательную геометрію безъ связи ея съ общею теоріей проективной геометріи.

Наконецъ, третій періодъ развитія Начертательной Геометріи, какъ науки о методахъ изображенія, начался со времени примѣненія къ ней данныхъ проективной геометріи. Какъ только были сдѣланы попытки этого примѣненія, такъ сразу же обнаружилась общность между собою считавшихся ранѣе независимыми методовъ изображенія: Ортогональныхъ проекцій, Аксонометріи, Театральной, Рельефной и Линейной Перспективъ и друг. Проективная Геометрія, если можно такъ выразиться, одушевила Начертательную Геометрію, дала возможность развиваться послѣдней, какъ науки, дала возможность имѣть рядъ готовыхъ рѣшеній въ такихъ отдѣлахъ ея, которые ранѣе мало были развиты, путемъ связи ихъ съ другими на основаніи метода проективности. Съ этой новой точки зрѣнія, Начертательная Геометрія является, съ одной стороны, наукой математической, а съ другой - прикладной, такъ какъ безъ изображеній невозможно проектированіе сооруженій.

Проективная геометрія цѣликомъ или только отчасти положена въ основу ряда курсовъ Начертательной Геометріи: Ламберта, Винера, Фидлера, Шрейбера, Шенфлиса въ Германіи, Лоріа, Аскіери - въ Италіи, Панселе - во Франціи, Бека, Купфера и Джонса - въ Россіи.

Третій періодъ развитія Начертательной Геометріи можно считать приблизительно съ начала 19-го столѣтія до настоящаго времени.

Слѣдуетъ еще отмѣтить возникновеніе такъ называемой, Кинематической Геометріи, гдѣ разсматриваются различнаго рода формы, образованныя *движеніемъ* геометрическихъ элементовъ, и въ зависимости отъ этого излагаются новые способы изображенія различныхъ формъ. Одно изъ капитальныхъ сочиненій по этому вопросу написано Мангеймомъ въ въ 1864 г. Кромѣ того, примѣненіе фотографіи къ составленію плановъ мѣстностей дало развитіе особой науки: фототопографіи и стереофототопографіи, которая является однимъ изъ отдѣловъ Начертательной Геометріи.

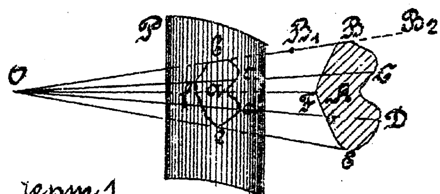
------ II ------

II. ОБЩЕЕ ПОНЯТІЕ О ПРОЕКЦІЯХЪ И О ПРОЕКТИВНЫХЪ СВОЙСТВАХЪ ФИГУРЪ.

Въ основу всѣхъ методовъ Начертательной Геометріи положенъ методъ проекцій, которыя раздѣляются на 1) полярныя или центральныя и 2) параллельныя или цилиндрическія.

а) *Методъ центральныхъ проекцій.*

Методъ центральныхъ проекцій заключается въ слѣдующемъ: возьмемъ въ пространствѣ какой-нибудь предметъ А (черт.1), точку въ пространствѣ О и какую-нибудь поверхность Р, обладающую тѣмъ свойствомъ, что прямая линія пересѣкаетъ ее только въ одной точкѣ. Соединимъ всѣ точки предмета А съ точкою О и построимъ точки пересѣченія проведенныхъ линій съ плоскостью Р. Тогда на плоскости Р получится изображеніе предмета А.

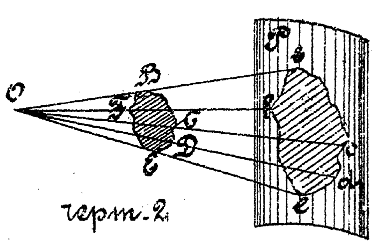


черт.1

Различные элементы чертежа носятъ слѣдующія названія: О - *центръ* или *полюсъ* проекцій; точки предмета В, С, D, Е и F - *проектируемыя точки;* Р - *поверхность проекцій.* Линіи ОВ, ОС и др. - *проектирующія* линіи или *лучи.* Точки b, c, d, e, f - точки пересѣченія лучей съ поверхностью Р, проекціи точекъ В, С, D, Е и F. Полученныя проекціи называются *полярными* или *центральными.* Такимъ образомъ, видно, что существуетъ вполнѣ опредѣленная проекція, если даны: центръ, проектируемая точка (В, С, D, Е, F) и поверхность проекціи. Обратное же заключеніе будетъ невѣрнымъ: если даны центръ проекцій и проекція точки на какую-нибудь поверхность Р, то проектируемую точку нельзя найти, такъ какъ одной и той же проекціи b (черт.1) могутъ соотвѣтствовать различныя точки В, B_1, B_2, и т.д., лежащія на одномъ и томъ же лучѣ ОВ.

Итакъ, видъ центральной проекціи зависитъ отъ положенія въ пространствѣ: центра О, проектируемой точки В и поверхности Р.

Совокупность лучей, проходящихъ черезъ центръ О и точки (В, С, D, Е, F) проектируемаго тѣла, называется проектирующимъ пучкомъ или конусомъ. Его поверхность называется поверхностью проектирующаго конуса. Если предположить (черт.2), что проектируемое тѣло BCDEF находится впереди поверхности Р и въ центрѣ О помѣщенъ глазъ наблюдателя, то тогда поверхность проектирующаго пучка называется *конусомъ видимости* даннаго тѣла.



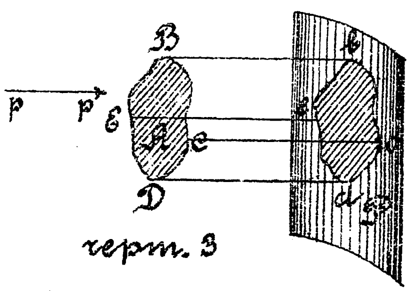
черт.2

Конусъ видимости касается съ даннымъ предметомъ или, какъ говорятъ, *обертываетъ* данное тѣло по линіи BCDEF, которая называется *контуромъ* тѣла для данной точки зрѣнія О. Контуръ проекціи (b, c, d, e, f) является перспективою контура тѣла В, С, D, Е, F.

b) *Методъ параллельныхъ проекцій.*

Другимъ методомъ проекцій, который можно разсматривать какъ частный случай перваго, является методъ *параллельныхъ* или цилиндрическихъ проекцій. Сущность его заключается въ слѣдующемъ: точку O считаютъ безконечно удаленной отъ проектируемой системы точекъ. Чтобы проектировать какой нибудь предметъ способомъ параллельныхъ проекцій, нужно знать направленіе лучей проектированія, положеніе какъ предмета, такъ и поверхности проекцій P.

Возьмемъ какое нибудь тѣло (черт.3), поверхность проекціи P и направленіе лучей pp'. Проведемъ черезъ рядъ точекъ B, C, D, E даннаго тѣла лучи, параллельные pp' до пересѣченія съ поверхностью проекцій H въ точкахъ b, c, d, e, которыя и будутъ соотвѣтственно параллельными проекціями системы точекъ B, C, D, E. При этихъ данныхъ получаются проекціи вполнѣ опредѣленныя. Обратное же будетъ невѣрно. По направленію лучей, поверхности проекцій и проекціямъ нельзя опредѣлить положеніе точекъ системы, такъ какъ можно найти на лучахъ безчисленное множество точекъ, имѣющихъ тѣ же самыя проекціи.



черт. 3

c) *Задачи проективныя и метрическія.*

При рѣшеніи различныхъ задачъ намъ въ дальнѣйшемъ придется сталкиваться съ двумя основными свойствами изображеній, какъ проекцію даннаго предмета, именно съ *геометрическими* и *проективными.*

Проективными называются такія свойства геометрическихъ формъ, которыя сохраняются въ проекціяхъ этихъ формъ, напримѣръ, пусть мы имѣемъ въ пространствѣ кубъ, въ которомъ проведены діагонали, пересѣкающіяся въ одной точкѣ. Тогда, при любомъ проектированіи проекціи діагоналей, будутъ тоже пересѣкаться въ одной точкѣ, именно, въ проекціи точки пересѣченія діагоналей. Слѣдовательно, это будетъ проективнымъ свойствомъ куба.

Метрическими свойствами называются такія, которыя основаны на понятіи мѣры и которыя исчезаютъ въ проекціи. Напримѣръ, перпендикулярность между діагоналями куба въ пространствѣ не сохраняется въ проекціяхъ.

d) *Понятіе о безконечно удаленныхъ элементахъ *).*

Мы предполагаемъ, что *прямая линія* при безконечномъ ея продолженіи въ обѣ стороны, проходитъ черезъ одну и ту же *безконечно удаленную точку.* Доказательство этого положенія основано на аксіомѣ: "Двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости, пересѣкаются въ одной точкѣ". Поэтому и двѣ параллельныя прямыя (какъ частный случай двухъ пересѣкающихся прямыхъ) должны пересѣкаться въ одной - безконечно удаленной точкѣ. Слѣдовательно, если бы прямая имѣла двѣ безконечно удаленныхъ точки, то прямая, ей параллельная, пересѣкала бы ее въ двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ, что противорѣчило бы вышеупомянутой аксіомѣ. На основаніи предыдущаго нетрудно показать, что всѣ прямыя, параллельныя данной линіи, будутъ пересѣкаться съ нею въ одной и той же

---

*) *См. М. Е. Ващенко-Захарченко "Проективная Геометрія", Кіевъ, 1897 г., стр. 5.*

безконечно-удаленной точкѣ, для опредѣленности заданія которой, поэтому, достаточно имѣть лишь *направленіе* линіи, по которому точка будетъ лежать въ безконечности.

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ *плоскость*, которую безгранично продолжаемъ во всѣ стороны. Нетрудно показать, что геометрическимъ мѣстомъ безконечно-удаленныхъ точекъ этой плоскости будетъ *прямая линія*. Дѣйствительно, если бы таковымъ геометрическимъ мѣстомъ была какая нибудь кривая линія, то можно представить себѣ въ данной плоскости прямую линію, которая при безконечномъ ея продолженіи въ обѣ стороны, пересѣкла бы вышеупомянутую кривую линію въ *двухъ* точкахъ - а это противорѣчитъ положенію, что прямая можетъ имѣть только *одну* безконечно-удаленную точку. Нетрудно показать, пользуясь тѣмъ же методомъ, который мы выше примѣняли для параллельныхъ прямыхъ линій, что плоскости, параллельныя другъ другу, пересѣкаются по одной и той же безконечно удаленной прямой, для заданія которой необходимо задаться направленіемъ одной изъ плоскостей.

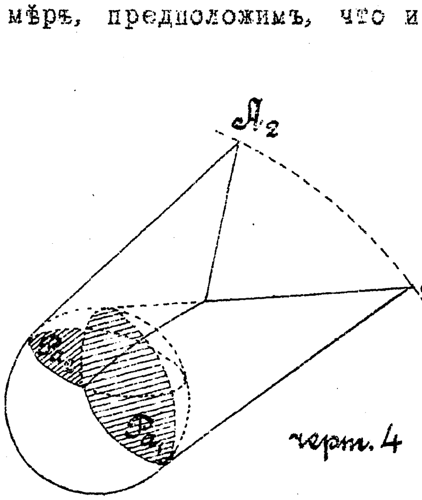
Подобнымъ же образомъ можно доказать, что *совокупность безконечно удаленныхъ точекъ пространства есть плоскость*.

Если бы таковымъ геометрическимъ мѣстомъ была не плоскость, а нѣкоторая поверхность или нѣкоторое пространство, то всегда можно вообразить въ данномъ пространствѣ прямую, которая пересѣкла бы упомянутыя поверхность или пространство въ двухъ или болѣе безконечно удаленныхъ точкахъ, что противорѣчитъ ранѣе высказанному положенію.

e) *Нѣкоторыя свѣдѣнія изъ проективной геометріи.*

Методы проектированія, общія свойства проекцій и зависимость между различными проекціями одной и той же фигуры изучаются въ *Проективной Геометріи*, которая составляетъ предметъ особаго курса, читаемаго въ нѣкоторыхъ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Предполагая, что читатель не знакомъ съ этой наукой, приводимъ тѣ положенія ея, которыя необходимы для уясненія взаимной зависимости между изображеніемъ - какъ проекціей формы и самою формою.

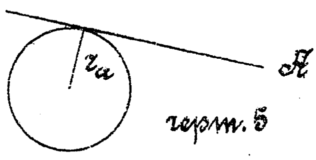
a) Геометрическое соотвѣтствіе или геометрическое сродство. Взаимность. - Если мы имѣемъ двѣ геометрическихъ системы такихъ, что извѣстному элементу одной системы соотвѣтствуетъ опредѣленный элементъ другой системы, то такія системы называются геометрически сродными или геометрически соотвѣтственными. При этомъ соотвѣтствовать между собою могутъ элементы и не однородные другъ другу, т.е. точкѣ можетъ соотвѣтствовать прямая, прямой - плоскость, плоскости - точка. Напримѣръ, предположимъ, что изъ точки A (черт.4), расположенной внѣ шара, проведенъ конусъ, касательный шару по кругу. Плоскость P_{a_1} этого круга является соотвѣтствующей точкѣ A_1. Если мы возьмемъ другую точку A_2, то подобнымъ же образомъ найдемъ новую плоскость P_{a_2} круга касанія. И, вообще, всякой точкѣ A внѣ шара, соотвѣтствуетъ опредѣленная плоскость P, сѣкущая шаръ. Такимъ образомъ, мы здѣсь имѣемъ геометрическое соотвѣтствіе между системою точекъ A и системою плоскостей P.



черт. 4

Различаютъ соотвѣтствіе пространственныхъ системъ, когда точки, хотя бы одной системы, не лежатъ въ одной плоскости, отъ соотвѣтствія плоскихъ системъ, при которомъ точки каждой системы лежатъ въ одной плоскости.

Въ частномъ случаѣ, если точкѣ соотвѣтствуетъ прямая, а прямой соотвѣтствуетъ точка, то такое соотвѣтствіе называется *взаимностью* и системы называются взаимно сродными или взаимно соотвѣтственными. Напримѣръ, проведемъ линію касательную къ кругу изъ какой нибудь точки А (черт.5), лежащей внѣ круга, и опустимъ изъ центра круга перпендикуляръ r_a на эту касательную. Тогда точка А и линія r_a будутъ взаимно соотвѣтственными или *взаимными*.



черт. 5

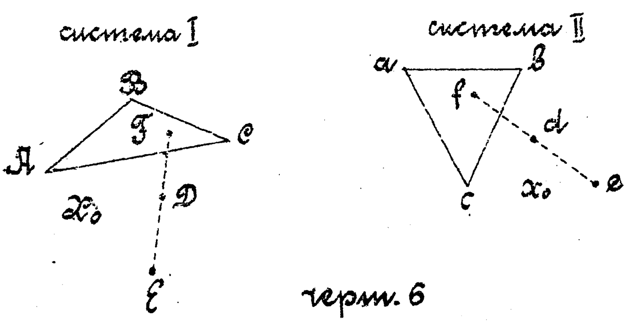
β) *Коллинеація или гомологія.* Въ частномъ случаѣ, если соотвѣтствуютъ между собою однородные элементы, то такое соотвѣтствіе называется *коллинеаціей* (общей) или *гомологіей*. При этомъ, точкѣ одной системѣ соотвѣтствуетъ точка другой системы, прямой соотвѣтствуетъ прямая и плоскости - плоскость. Подобно геометрическому соотвѣтствію коллинеарными могутъ быть *пространственныя* системы и *плоскія*.

Коллинеацію различаютъ *общую* и *центральную*. *Общій случай коллинеаціи* опредѣленъ выше.

Заимствуемъ изъ проективной геометріи доказательство слѣдующей теоремы.

"Пять паръ соотвѣтствующихъ элементовъ точекъ (или плоскостей) опредѣляютъ коллинеацію пространственныхъ системъ".

Пусть даны по пяти точекъ каждой изъ коллинеарныхъ системъ ABCDE и abcde (черт.6). Нетрудно показать, что теперь можно построить въ обѣихъ системахъ безчисленное количество новыхъ коллинеарныхъ точекъ. Дѣйствительно, проведемъ соотвѣтственно черезъ точки A, B, C и a, b, c плоскости и найдемъ пересѣченія этихъ плоскостей съ прямыми DE и de въ точкахъ F и f. Эти точки будутъ новыми соотвѣтствующими другъ другу въ обѣихъ системахъ. Продолжая подобныя же построенія далѣе, мы можемъ получить въ обѣихъ системахъ безконечно-большое количество паръ соотвѣтствующихъ другъ другу точекъ.

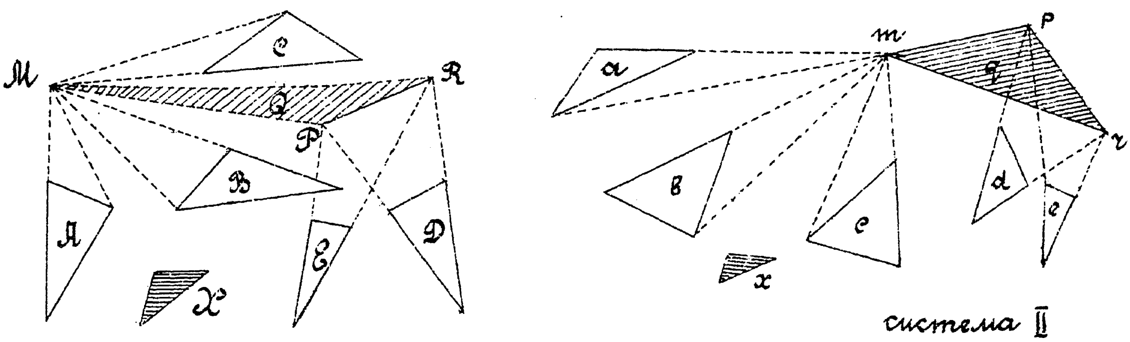


черт. 6

Если бы было дано пять паръ Aa, Bb, Cc, Dd, Ee соотвѣтствующихъ плоскостей, то, подобнымъ же образомъ нетрудно было бы опредѣлить безчисленное количество новыхъ соотвѣтствующихъ другъ другу плоскостей. Дѣйствительно, найдемъ въ системѣ I точку M - пересѣченія плоскостей A, B, C и прямую PR - пересѣченія плоскостей D, E. Точкѣ M въ системѣ II-й будетъ соотвѣтствовать точка m, пересѣченія плоскостей a, b, c, а прямой PR системы I-й будетъ соотвѣтствовать прямая pr - пересѣченія плоскостей d и l въ системѣ II-й. Соединяя соотвѣтственно M съ PRr m съ pr, получимъ новую пару соотвѣтствующихъ плоскостей. Продолжая подобныя же построенія далѣе, мы можемъ получить въ обѣихъ системахъ безконечно большое количество паръ соотвѣтствующихъ другъ другу плоскостей. Если бы требовалось *данному* элементу X одной системы отыскать соотвѣтствующій элементъ x другой системы (черт.6 и 7), то при помощи конечнаго числа построеній этого сдѣлать нельзя; однако, при безконечно-большомъ числѣ построеній мы въ концѣ концовъ нашли бы соотвѣтствующій ему элементъ x. Поэтому считаютъ въ данномъ случаѣ пространственную коллинеацію опредѣленной.

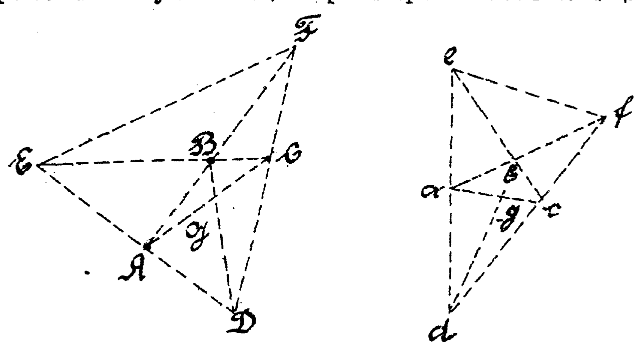
Для коллинеаціи плоскихъ системъ соотвѣтствующая теорема заключается въ слѣдующемъ:

„Четыре пары соотвѣтствующихъ точекъ (или прямыхъ) опредѣляютъ коллинеацію*). Дѣйствительно, пусть даны двѣ системы лежащихъ въ одной плоскости и попарно соотвѣтствующихъ точекъ Aa, Bb, Cc, Dd (чертежъ 8). Нетрудно получить еще цѣлый рядъ попарно соотвѣтствующихъ другъ другу точекъ. Для этого соединимъ между собою точки, какъ показано на черт.8. Въ пересѣченіи соотвѣтствующихъ прямыхъ мы получа-



черт. 7.

емъ еще три пары соотвѣтствующихъ точекъ Ee, Ff и Gg. Прибавивъ къ нимъ еще одну какую нибудь пару, напримѣръ, Aa, мы подобнымъ же образомъ получимъ еще три пары точекъ и т.д. до безконечности.



черт. 8

Если бы было задано четыре пары соотвѣтственныхъ прямыхъ AB, ab, BC, bc, CD, cd и AD, ad, то нетрудно было бы построить еще три пары новыхъ соотвѣтственныхъ прямыхъ EF, ef, AC, ac, BD, bd, соединяя концы прямыхъ и продолжая прямыя до пересѣченія, какъ показано на черт.8. Съ помощью вновь полученныхъ прямыхъ можно построить еще нѣсколько паръ соотвѣтствующихъ прямыхъ и такъ до безконечности.

Если бы требовалось *данному* элементу X одной системы отыскать соотвѣтственный элементъ x другой системы, то при помощи конечнаго числа построеній этого сдѣлать, какъ и въ пространственной коллинеаціи, нельзя; однако, при безконечно-большомъ числѣ построеній мы, въ концѣ концовъ, нашли бы соотвѣтствующій ему элементъ x. Поэтому считаютъ въ данномъ случаѣ плоскую коллинеацію опредѣленной.

Частнымъ случаемъ общей коллинеаціи является *центральная коллинеація*. Она ограничена условіемъ, что соотвѣтственныя точки обѣихъ системъ лежатъ на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ линіяхъ (лучахъ), проходящихъ черезъ особую точку, называемую *центромъ коллинеаціи* или *центромъ гомологіи*. Формы, полученныя при помощи центральной коллинеаціи, называютъ также *перспективными* и *проективными*.

На черт.9 показанъ примѣръ центральной коллинеаціи пространственныхъ системъ въ примѣненіи къ построенію театральной декораціи комнаты. ABCDEFGH - основная система, abcdefgh - ей коллинеарная (театральная декорація комнаты). O - центръ коллинеаціи, OA, OB, OC... проекти-

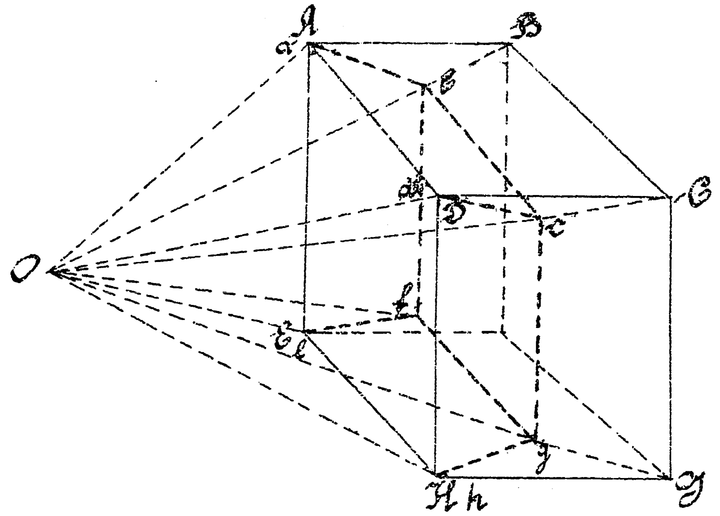
---

*) *См. М. Ващенко-Захарченко "Проективная Геометрія" Кіевъ, 1897 г. стр. 214.*

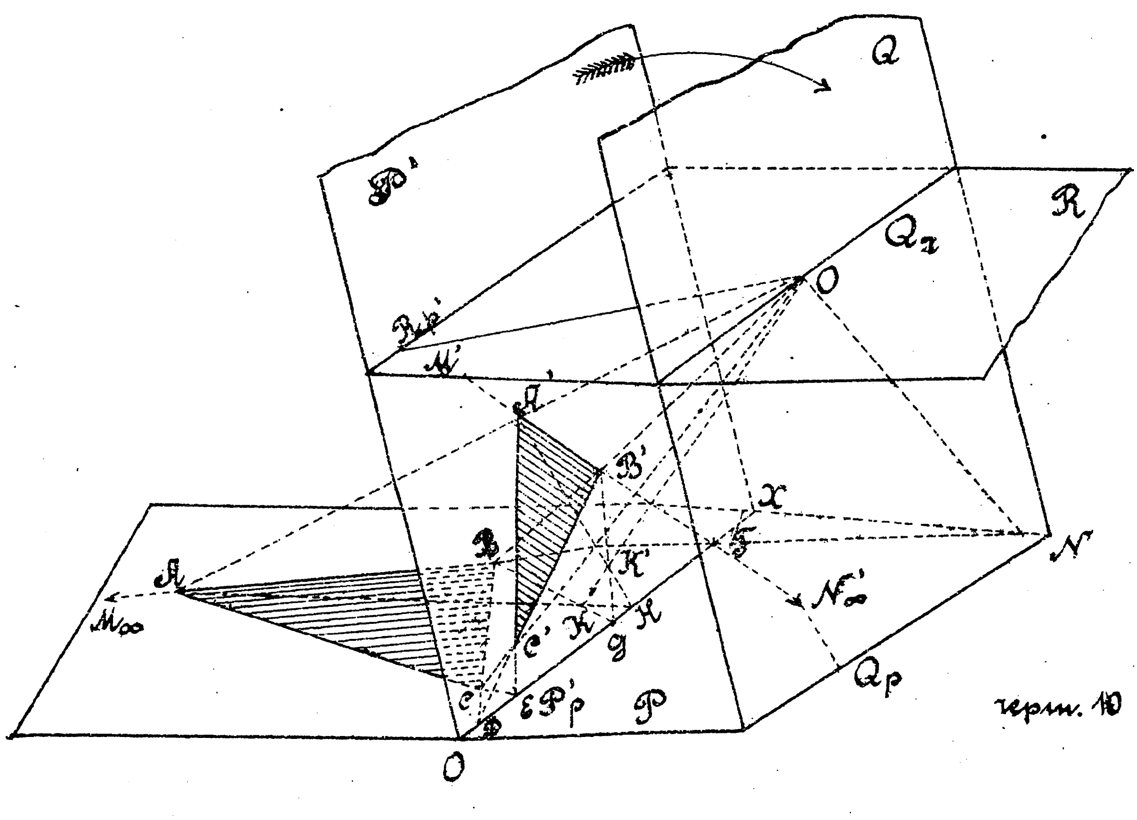
рующіе лучи.

При разсмотрѣніи любой пары лучей, соединяющихъ двѣ пары соотвѣтствующихъ точекъ, напримѣръ, лучей OB и OC нетрудно видѣть, что соотвѣтствующія прямыя BC и bc, лежатъ въ одной проектирующей плоскости.

Ось коллинеаціи плоскихъ системъ. - Предположимъ, что даны въ пространствѣ двѣ плоскія фигуры ABC и A'B'C', центрально соотвѣтствующія другъ другу (черт.10). Обозначимъ плоскость фигуры ABC черезъ P и A'B'C' - черезъ P' центръ соотвѣтствія (коллинеаціи) обозначимъ буквой O. Линія OX - сѣченія плоскостей P и P' называется *осью коллинеаціи.* Нетрудно показать, что на этой оси расположены точки D, E и F пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ фигуръ ABC и A'B'C'. Дѣйствительно, возьмемъ, напримѣръ, двѣ соотвѣтственныхъ прямыхъ AC и A'C', которыя лежатъ въ одной и той же проектирующей плоскости, проходящей черезъ центръ O. Эта плоскость пересѣкаетъ плоскости обѣихъ фигуръ по линіямъ AC и A'C' пересѣкающимся, очевидно,



черт. 9



черт. 10

въ точкѣ E, лежащей на линіи OX - сѣченія P съ P'. Подобнымъ же образомъ найдемъ, что и точки D и F пересѣченія линіи BC, B'C' и AB, A'B' лежатъ на той же линіи OX.

Ранѣе мы показали, что общая коллинеація плоскихъ системъ опредѣляется четырьмя соотвѣтственными элементами. Въ центральной же плоской коллинеаціи послѣдняя опредѣляется двумя коллинеарными точками, осью и центромъ.

Дѣйствительно, если, напримѣръ, извѣстно положеніе точекъ A, A', O и оси OX, то нетрудно въ плоскости A'OX(P') найти точку, коллинеарную любой точкѣ C, находящейся въ плоскости AOX(P). Для этого соединяемъ точки A и C и продолжаемъ линію AC до пересѣченія съ OX въ точкѣ E. Соединяемъ E съ A' и находимъ искомую точку C' пересѣченія луча OC съ линіей AE.

Если представить себѣ въ точкѣ O источникъ свѣта, а фигуру A'B'C' - непрозрачной, то, очевидно, что фигура ABC будетъ служить тѣнью A'B'C' на плоскости P. Слѣдовательно, тѣнь коллинеарна съ фигурой.

Предѣльныя точки и предѣльныя линіи при коллинеаціи плоскихъ системъ. - Продолжимъ линію AE до безконечности и пусть точка M_∞ будетъ безконечно удаленной точкой этой прямой. Чтобы найти въ плоскости P' точку, соотвѣтствующую M_∞, необходимо изъ центра O провести лучъ въ точку M_∞ и найти его пересѣченіе съ плоскостью P'. Въ данномъ случаѣ этотъ лучъ будетъ, очевидно, параллеленъ плоскости P, и въ частности прямой AB и пересѣчетъ плоскость P' въ точкѣ M', лежащей на линіи сѣченія плоскостей P' и R, проходящей черезъ O и параллельной P. Точка M', соотвѣтствующая безконечно удаленной точкѣ M_∞ называется *предѣльной точкой прямой* A'B'.

Подобнымъ же образомъ можно найти на плоскости P точку N, соотвѣтствующую безконечно удаленной точкѣ N'_∞ прямой A'B' и называемую *предѣльной точкой прямой* AB.

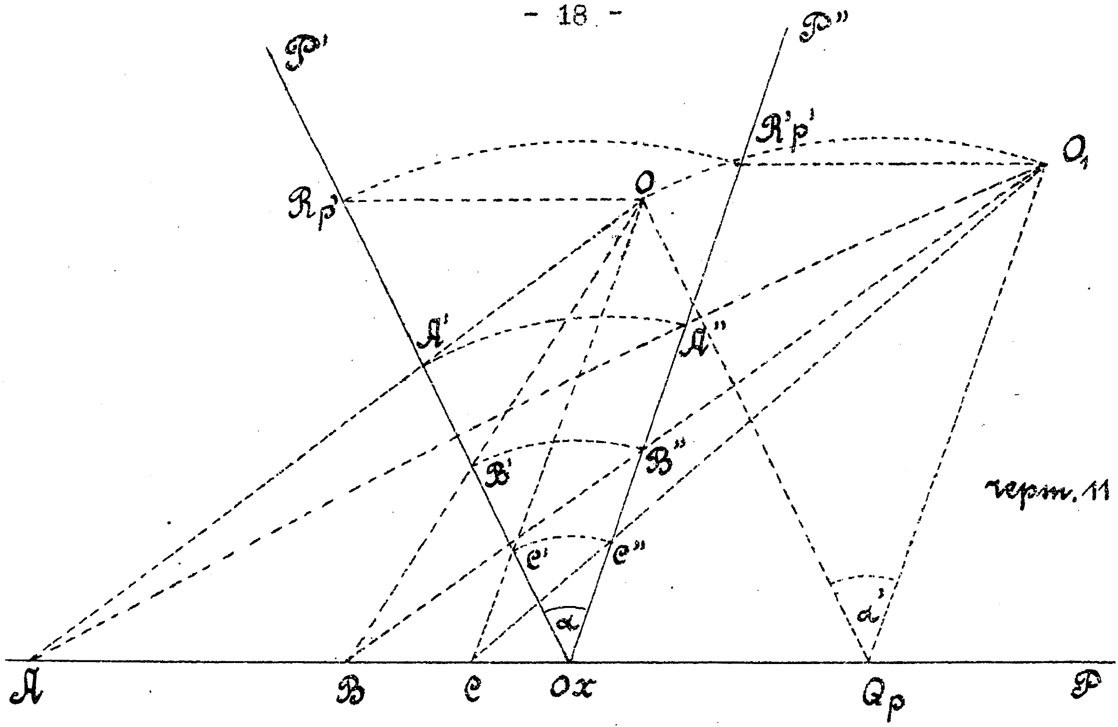
Предположимъ теперь въ плоскости P рядъ линій, продолженныхъ до безконечности. Безконечно-удаленнымъ точкамъ этихъ прямыхъ будутъ соотвѣтствовать въ плоскости P' точки, получаемыя пересѣченіемъ съ этой плоскостью лучей, проведенныхъ изъ O параллельно вышеупомянутымъ линіямъ. Геометрическимъ мѣстомъ этихъ точекъ будетъ служить, очевидно, линія R_p' сѣченія плоскости P' съ плоскостью R, проведенной черезъ O параллельно P. Линія эта называется *предѣльной линіей плоскости* P'. Подобнымъ же образомъ линія Q_p сѣченія плоскости P съ плоскостью Q, проходящей черезъ центръ O и параллельной P', называется *предѣльной линіей плоскости* P.

На основаніи вышеизложеннаго видно, что обѣ продольныя линіи параллельны оси OX и каждая изъ нихъ отстоитъ отъ оси на такомъ же разстояніи, на какомъ другая отстоитъ отъ центра; иными словами, середина разстоянія между предѣльными линіями является серединой разстоянія между центромъ и осью.

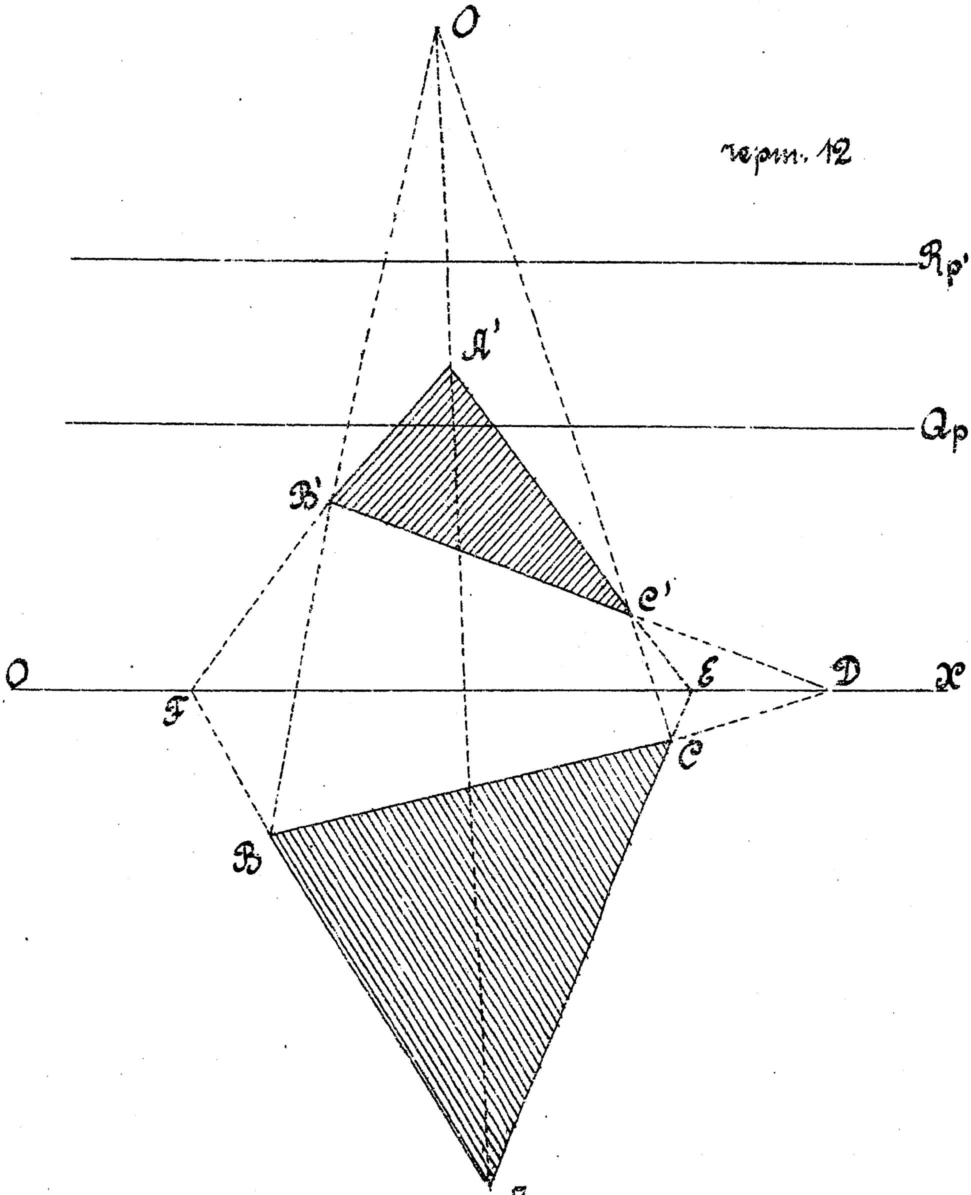
Коллинеація плоскихъ фигуръ, лежащихъ въ одной плоскости.

Докажемъ теперь, что если плоскость одной изъ двухъ центрально-коллинеарныхъ фигуръ вращать вокругъ оси соотвѣтствія до совмѣщенія съ плоскостью другой фигуры, то фигуры останутся центрально-коллинеарными (перспективными).

Предположимъ (черт.10), что даны два треугольника ABC и A'B'C' такъ, что ихъ соотвѣтственныя стороны при продолженіи пересѣкаются въ точкахъ D, E, F - лежащихъ на одной прямой OX. Такъ какъ соотвѣтственно пересѣкающіяся прямыя AB, A'B', BC, B'C' и AC, A'C' лежатъ попарно въ плоскостяхъ, то проведя эти три плоскости до ихъ взаимнаго пересѣченія, найдемъ точку O, которая и будетъ служить центромъ коллинеаціи. Для доказательства этого возьмемъ въ плоскости P еще какую нибудь точку K и покажемъ, что ей будетъ соотвѣтствовать точка K', лежащая въ мѣстѣ пересѣченія луча OK съ плоскостью P'. Для этого



черт. 11



черт. 12

соединимъ точку К съ точками А и В и продолжимъ линіи АК и ВК до пересѣченія съ осью ОХ въ точкахъ Н и G. Соединяя точки G и Н соотвѣтственно съ В' и А', получимъ линіи B'G и А'Н, соотвѣтственныя BG и АН. Плоскость BGB' пересѣкается съ плоскостью АНА' по линіи, проходящей черезъ точку К и точку К' пересѣченія линіи B'G иА'Н; на этой же линіи КК' должна лежать и точка О, такъ какъ она является точкой пересѣченія линій ВВ' и АА', принадлежащихъ упомянутымъ двумъ плоскостямъ.

Предположимъ теперь, что плоскость Р' (черт.10) вращается вправо по направленію стрѣлки вокругъ оси соотвѣтствія ОХ. Сдѣлаемъ разрѣзъ нашей системы плоскостью W, проходящей черезъ центръ О и перпендикулярной къ оси ОХ (черт.11).

Пусть новое положеніе плоскости Р' будетъ Р". Очевидно, что фигура А'В'С' въ своемъ новомъ положеніи А"В"С" будетъ соотвѣтственной АВС, такъ какъ точки D, Е, F пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ остаются безъ измѣненія, какъ лежащія на оси вращенія. Поэтому фигура А"В"С" будетъ перспективна АВС и будетъ имѣть центръ въ нѣкоторой точкѣ O_1, положеніе которой опредѣлится слѣдующимъ образомъ.

Центръ долженъ находиться на линіи сѣченія двухъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ коллинеацій и проходящихъ черезъ соотвѣтственныя предѣльныя линіи. Одна изъ предѣльныхъ линій была Qp, другая Rp' послѣ поворота займетъ положеніе R'p'. Проведя черезъ Qp плоскость, параллельную Р", а черезъ R'p' - плоскость, параллельную Р, получимъ въ пересѣченіи линію, которая въ проекціи на W дастъ искомый центръ O_1 (черт.11).

Вмѣстѣ съ тѣмъ нетрудно видѣть, что уголъ α - поворотъ плоскости Р' вокругъ оси ОХ равенъ углу α' - поворота центра вокругъ предѣльной линіи Qp. Иными словами при вращеніи плоской фигуры вокругъ оси соотвѣтствія, центръ коллинеаціи вращается вокругъ предѣльной линіи. При совпаденіи же плоскости Р' съ плоскостью Р центръ О также совпадаетъ съ плоскостью Р и будетъ находиться отъ оси ОХ въ разстояніи, равнымъ суммѣ разстояній предѣльныхъ линій до оси ОХ. На чертежѣ 12 показано расположеніе перспективныхъ фигуръ въ совмѣщенномъ положеніи.

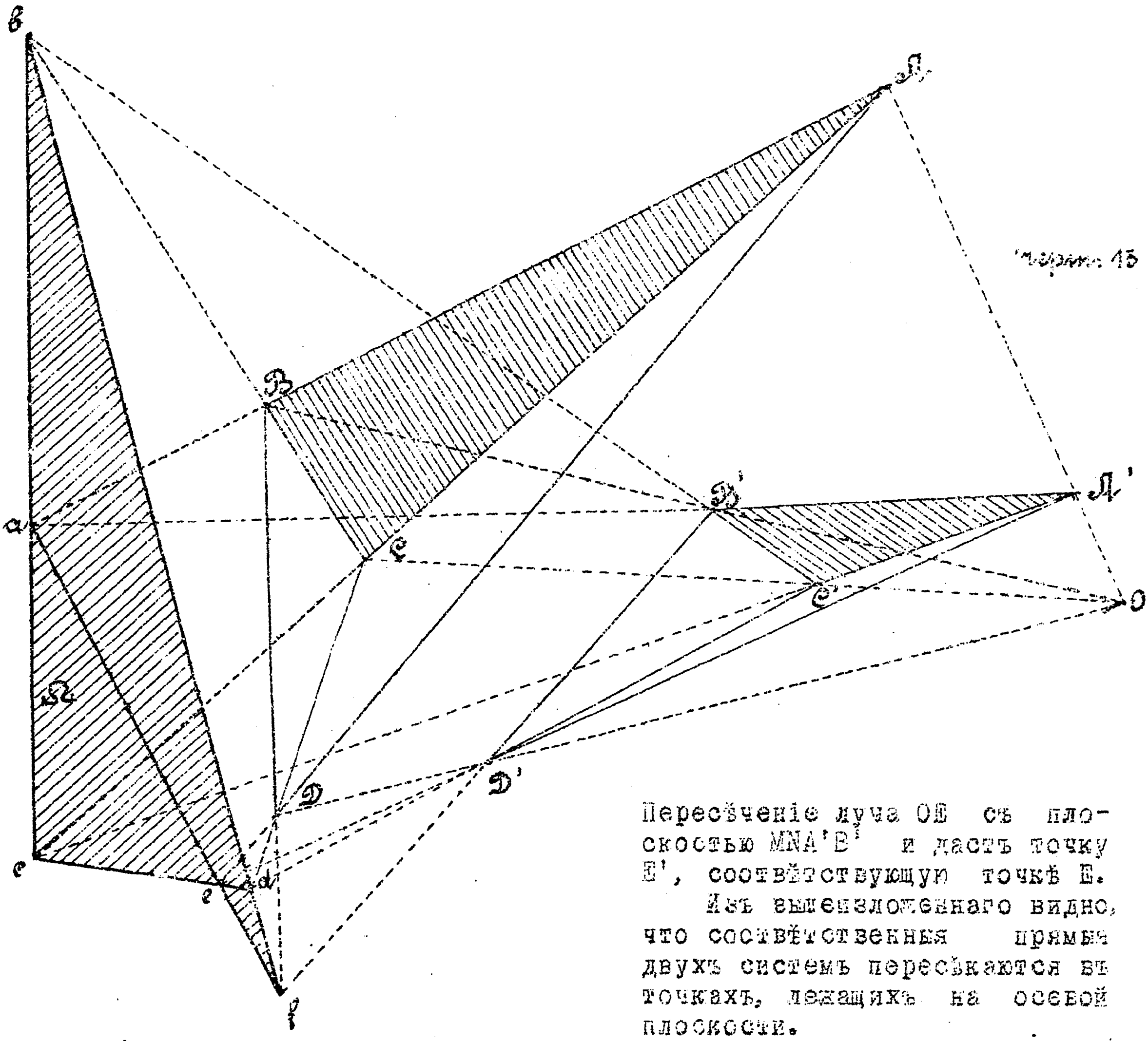
Осевая плоскость. -

Докажемъ слѣдующую теорему:

"При центральной коллинеаціи пространственныхъ системъ соотвѣтственныя плоскости пересѣкаются по прямымъ линіямъ, лежащимъ въ одной плоскости".

Пусть дана пара соотвѣтственныхъ плоскостей: АВС и А'В'С' при центрѣ О. Тогда осью коллинеаціи этихъ двухъ плоскихъ системъ будетъ служить прямая bac пересѣченія плоскостей АВС и А'В'С'. Эта линія опредѣляется точками пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ АВ съ А'В', ВС съ В'С'. На этой же прямой, конечно, должна лежать и точка пересѣченія прямыхъ АС съ А'С'. Зададимся теперь въ пространствѣ какой нибудь точкою d не лежащей въ плоскости АВС. Проведемъ лучъ DO и возьмемъ на немъ какую нибудь точку D'. Четырьмя парами точекъ ABCD и A'B'C'D' опредѣляются теперь двѣ коллинеарныя пространственныя системы. Соединимъ точку D съ точками А, В, С и точку D' съ точками А', В', С'. Тогда плоскости ACD, BCD и ABD будутъ соотвѣтствовать плоскостямъ A'C'D', B'C'D', A'B'D'. Найдемъ линіи сѣченія соотвѣтственныхъ плоскостей, именно, ced - сѣченіе ACD съ A'C'D', линію aef - сѣченіе ABD съ A'B'D' и линію bdf - сѣченіе BCD съ B'C'D'. Нетрудно видѣть, что эти линіи взаимно пересѣкаются въ точкахъ a b c d e f, такъ что двѣ линіи, напримѣръ, bc и cd, опредѣляющія плоскость bcd, пересѣкаются линіями bf и af въ точкахъ bd и ae; иными словами, всѣ эти четыре линіи лежатъ въ одной плоскости, что и требовалось доказать.

Плоскость, въ которой лежатъ линіи сѣченія соотвѣтственныхъ плоскостей обѣихъ системъ, называется *осевой плоскостью*. Условимся обозначать въ дальнѣйшемъ эту плоскость буквою Ω. Такимъ образомъ, четыре пары соотвѣтственныхъ точекъ не лежащихъ въ одной плоскости вполнѣ опредѣляютъ осевую плоскость. Если бы мы желали для какой нибудь точки E, системы ABCD, найти соотвѣтственную точку E' въ системѣ A'B'C'D', то для этого можно было бы провести черезъ и, напримѣръ, AB плоскость Q до пересѣченія съ осевой плоскостью по линіи MN, и черезъ MN и A'B' провести плоскость, соотвѣтствующую плоскости MNAB.



Пересѣченіе луча OE съ плоскостью MNA'B' и дастъ точку E', соотвѣтствующую точкѣ E.

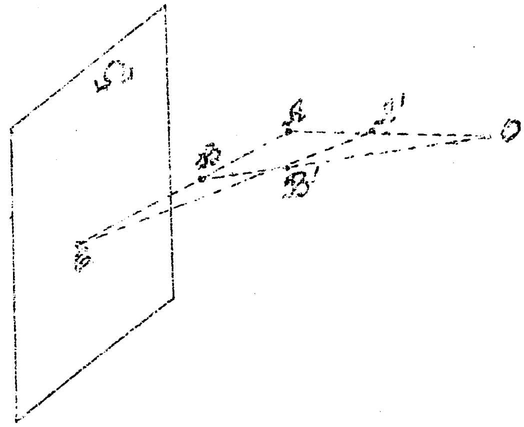
Изъ вышеизложеннаго видно, что соотвѣтственныя прямыя двухъ системъ пересѣкаются въ точкахъ, лежащихъ на осевой плоскости.

Раньше мы показали, что общая коллинеація пространственныхъ системъ опредѣляется пятью соотвѣтственными элементами. Къ центральной же коллинеаціи для опредѣленности заданія достаточно имѣть одну пару соотвѣтственныхъ точекъ, центръ и осевую плоскость. Дѣйствительно, пусть Ω будетъ осевая плоскость (черт.14), O - центръ, A и A' - пара соотвѣтствующихъ точекъ. Пусть B будетъ новая точка въ системѣ A. Для полученія ей соотвѣтственной въ системѣ A' проводимъ линію AB до пересѣченія съ Ω въ точкѣ b, соединяемъ b съ A' и проводимъ лучъ BO до пересѣченія съ A'b въ точкѣ B', которая и будетъ искомой.

Предѣльныя плоскости при центральной коллинеаціи пространственныхъ системъ.

Раньше мы показали (черт.10), что при центральной коллинеаціи плоскихъ системъ предѣльныя линіи обѣихъ системъ параллельны оси коллинеаціи. Обращаясь къ пространственнымъ системамъ (черт.13), мы можемъ въ таковыхъ выдѣлить рядъ соотвѣтственныхъ плоскихъ системъ, напримѣръ, ABC и A'B'C', BCD и B'C'D' и т.д.

Въ каждой изъ этихъ плоскихъ системъ предѣльныя линіи будутъ параллельны другъ другу и параллельныя соотвѣтственной оси коллинеаціи, напримѣръ, для плоскостей ABC и A'B'C' предѣльныя линіи будутъ параллельны линіи abc и т.д. Но такъ какъ всѣ оси коллинеаціи abc, aef, bdf и т.д. лежатъ въ одной осевой плоскости, то и всѣ предѣльныя линіи каждой изъ пространственныхъ системъ будутъ параллельны осевой плоскости.



черт. 14

Кромѣ того, раньше мы приняли, что совокупность безконечно-удаленныхъ точекъ пространственной системы есть плоскость. Поэтому геометрическимъ мѣстомъ точекъ другого пространства, соотвѣтствующаго этой плоскости, также должна быть плоскость. Изъ этого слѣдуетъ, что всѣ предѣльныя линіи каждаго пространства лежатъ *въ одной плоскости*. Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема.

"Безконечно удаленнымъ точкамъ одного пространства соотвѣтствуетъ въ другомъ при центральной коллинеаціи плоскость, параллельная осевой плоскости". Эта плоскость называется *предѣльной плоскостью*.

Подобно тому, какъ при центральной коллинеаціи плоскихъ системъ мы имѣли двѣ предѣльныхъ линіи, по одной для каждой системы, такъ и въ центральной коллинеаціи пространственныхъ системъ мы будемъ имѣть *двѣ* предѣльныхъ плоскости, каждая изъ которыхъ будетъ параллельна осевой плоскости. Докажемъ теперь слѣдующую теорему:

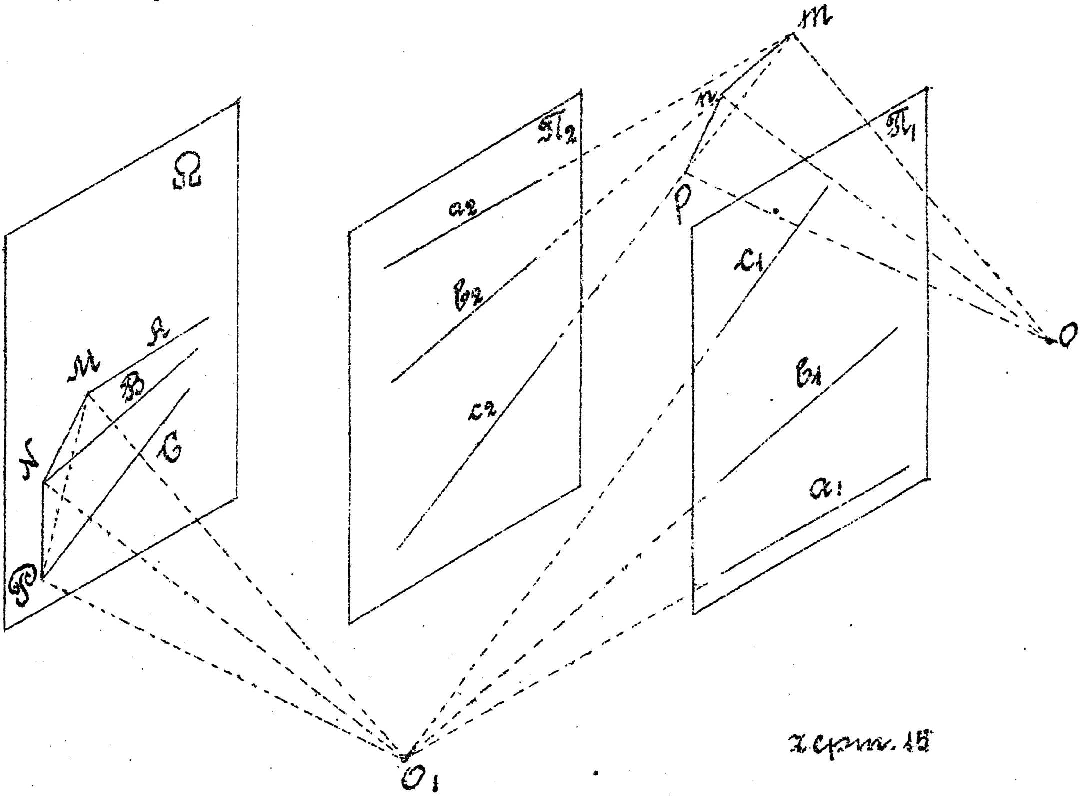
"Каждая изъ предѣльныхъ плоскостей отстоитъ отъ осевой плоскости на такомъ же разстояніи, на какомъ другая отстоитъ отъ центра; иными словами, середина разстоянія между предѣльными плоскостями является серединой разстоянія между центромъ и осевой плоскостью".

Дѣйствительно, пусть даны: (черт.15), центръ O, осевая плоскость Ω, и двѣ предѣльныя плоскости π_1 и π_2. Проведемъ въ плоскости π_2 черезъ какую нибудь точку O_1 три случайныхъ предѣльныхъ линіи a_1, b_1, c_1. Пусть соотвѣтствующія этимъ линіямъ предѣльныя линіи плоскости π_2 будутъ a_2, b_2 и c_2, а соотвѣтствующія оси коллинеацій на осевой плоскости - A, B и C. Очевидно, что a_1, a_2 и A должны быть параллельны между собой, равно какъ и $b_1 \parallel b_2 \parallel B$ и $c_1 \parallel c_2 \parallel C$. Опустимъ теперь изъ точки O перпендикуляры на a_2, b_2 и c_2 до пересѣченія въ точкахъ m, n и p и изъ точки O_1 -перпендикуляры на A, B и C до пересѣченія въ точкахъ M, N и P. На основаніи ранѣе доказаннаго положенія (черт.10) слѣдуетъ, что $Om = O_1M$; $On = O_1N$ и $Op = O_1P$. Разсматривая пирамиды Omnp и O_1MNP, у которыхъ по три ребра соотвѣтственно равныхъ другъ другу, а основанія параллельны, заключаемъ, что эти пирамиды равны между собою, а слѣдовательно, и высоты ихъ равны, т.е., что точка O настолько же отстаетъ отъ плоскости π_2, насколько точка O_1, т.е. плоскость π_1 отстоитъ отъ плоскости Ω, что и требовалось доказать.

Заканчивая этотъ параграфъ замѣтимъ, что если центръ O коллинеаціи удалится въ безконечность, то лучи будутъ параллельны другъ другу; коллинеація иногда называется параллельной и соотвѣтствіе также тогда будетъ параллельнымъ. Очевидно, параллельное соотвѣтствіе является частнымъ случаемъ центральнаго.

IV. *ИЗОБРАЖЕНIЕ, КАКЪ ПРОЕКТИВНАЯ ФОРМА.*

Разсмотримъ теперь, пользуясь методомъ коллинеацiи, какъ получаются, примѣняемыя въ практикѣ, изображенiя различныхъ геометрическихъ формъ, при чемъ попутно будемъ также разсматривать какъ опредѣленность изображенiя по заданной формѣ, такъ и опредѣленность формы по заданному ея изображенiю.

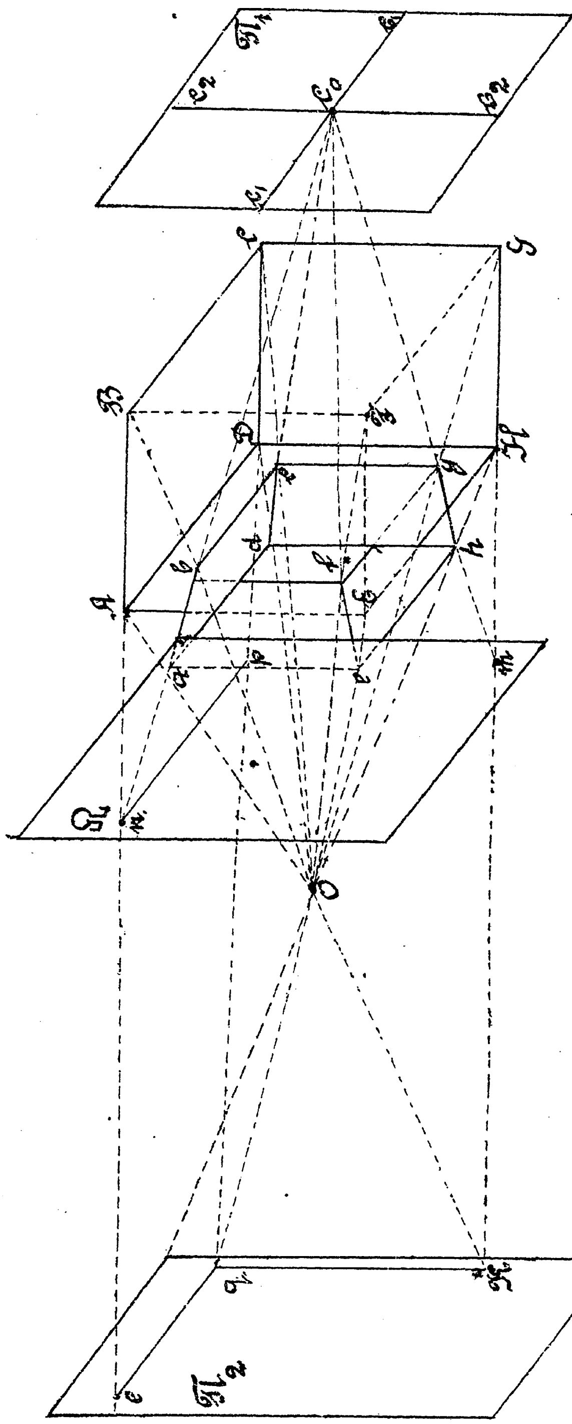


черт. 15

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ различать центральную коллинеацiю пространственныхъ системъ: a) *въ общемъ случаѣ* и b) *частные ея случаи.* Общимъ случаемъ центральной коллинеацiи мы будемъ называть такой, при которомъ центръ, осевая и предѣльныя плоскости занимаютъ случайныя положенiя. Частными же случаями ея будутъ тѣ, когда эти элементы занимаютъ особенныя положенiя.

a) *Изображенiя, получаемыя въ общемъ случаѣ центральной коллинеацiи пространственныхъ системъ.*

Предположимъ, что дана нѣкоторая форма, напримѣръ, комната ABCDEFGH (черт. 16) и требуется построить ей коллинеарную. Зададимся центромъ (O) коллинеацiи, выбравъ послѣднiй, напримѣръ, противъ середины стѣны ADEH. Проведемъ осевую плоскость Ω параллельно стѣнѣ ADEH и зададимся на лучѣ OA какой нибудь точкой a системы искомой системы, при чемъ a будетъ коллинеарна точкѣ A. При такихъ условiяхъ изображенiе будетъ вполнѣ опредѣлено. Для полученiя изображенiя точки D соединяемъ D съ O, а изъ a проводимъ линiю ad, параллельную AD до пересѣченiя съ Od въ искомой точкѣ d. Въ данномъ случаѣ ad будетъ

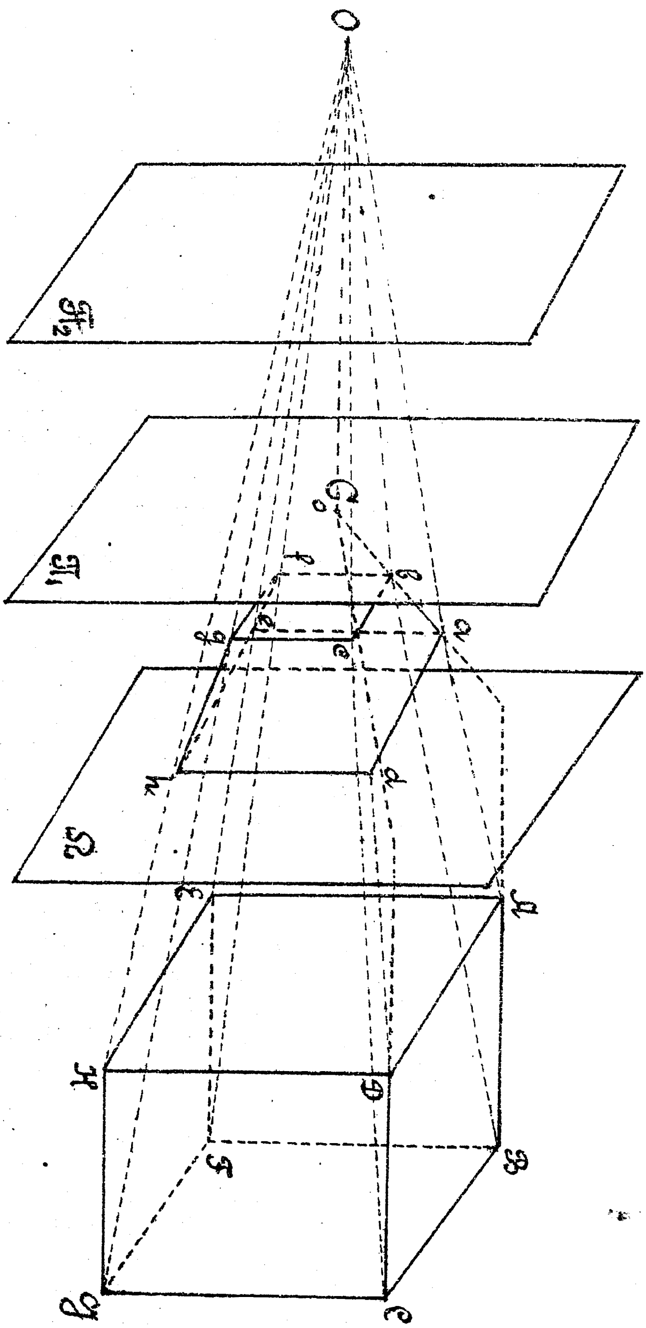


черт. 16

параллельно AD, такъ какъ AD параллельна осевой плоскости. Подобнымъ же образомъ получимъ точки h и e, изображенія точекъ H и E. Чтобы получить изображеніе точки B, продолжаемъ линію AB до пересѣченія съ осевой плоскостью въ точкѣ n и соединяемъ a съ n. Тогда линія an будетъ служить изображеніемъ линіи An и на ней должна лежать точка b - изображеніе точки B. Эта точка получится, очевидно, въ пересѣченіи лучей OB съ линіей an. Подобнымъ же образомъ получимъ точки c, g и f. Для полученія предѣльной плоскости изображенія мы должны черезъ центръ O провести плоскости, параллельныя плоскостямъ данной формы до пересѣченія съ соотвѣтствующими имъ плоскостями изображенія. Напримѣръ, проведя черезъ центръ O плоскость, параллельную плоскости ABCD, мы найдемъ въ пересѣченіи ея съ плоскостью abcd линію $c_1\ _1$, принадлежащую предѣльной плоскости изображенія. Проведя же черезъ O плоскость, параллельную плоскости ABFE, мы найдемъ въ пересѣченіи ея съ плоскостью abcd линію c_2c_2, также принадлежащую предѣльной плоскости. Линіи c_1c_1 и c_2c_2 взаимно пересѣкаясь и опредѣлятъ предѣльную плоскость π_1 изображенія abcdefgh. Такъ какъ, на основаніи ранѣе доказанной теоремы, середина разстоянія между центромъ и осевой плоскостью есть въ то же время и середина разстоянія между предѣльными плоскостями изображенія и данной формы, то для построенія предѣльной плоскости данной формы достаточно провести плоскость π_2, параллельную π_1 и на такомъ же разстояніи отъ осевой плоскости, на какомъ π_1 находится отъ центра O.

Ту же самую плоскость π_2 мы получили бы, если бы проводили черезъ O плоскости, параллельныя плоскостямъ изображенія и находили бы линіи ихъ сѣченія съ соотвѣтственными плоскостями данной формы. На чертежѣ показаны линіи lq и qk сѣченія плоскости ABCD и DCGH соотвѣтственно съ плоскостями, параллельными abcd и cdgh и проходящими черезъ центръ O.

Изображеніе abcdefgh называется *театральной декораціей, рельефнымъ изображеніемъ*, плоскостнымъ рельефомъ или, вообще, пространственнымъ изображеніемъ данной формы ABCDEFGH. При построеніи театральныхъ декорацій предполагаютъ обыкновенно, что осевая плоскость совпадаетъ съ переднею плоскостью изображаемой комнаты ACHE и въ этой плоскости помѣщаютъ занавѣсъ. Предѣльная плоскость декораціи совпадаетъ съ задней стѣной сцѣны, а центръ помѣщается обыкновенно посрединѣ зрительной залы на высотѣ *) двухъ метровъ отъ пола.



черт. 17.

Въ разсмотрѣнномъ случаѣ вмѣсто заданія точки a — изображенія точки A мы могли бы задаться предѣльной плоскостью π_1, тогда изображеніе также было бы вполнѣ опредѣлено. Дѣйствительно, для того, чтобы получить точку a, проводимъ лучъ OA, далѣе продолжаемъ AB до пересѣченія съ Ω въ точкѣ n. Проводимъ изъ O линію, параллельную AB до пересѣченія съ π_1 въ точкѣ C и соединяемъ C съ n. Искомая точка a будетъ пересѣченіемъ линіи AO и Cn.

Наоборотъ, по данному изображенію abcdefgh и при данныхъ: центра, осевой плоскости Ω и предѣльной плоскости, легко опредѣлить саму форму ABCDEFGH. Дѣйствительно, для полученія какой нибудь точки A проводимъ лучъ OA, затѣмъ продолжаемъ ab до пересѣченія съ Ω въ точкѣ n и съ π_1 въ точкѣ C; соединяемъ O съ C и проводимъ черезъ n линію nB, параллельную OC. Искомая точка A опредѣлится пересѣченіемъ линій nB и Oa.

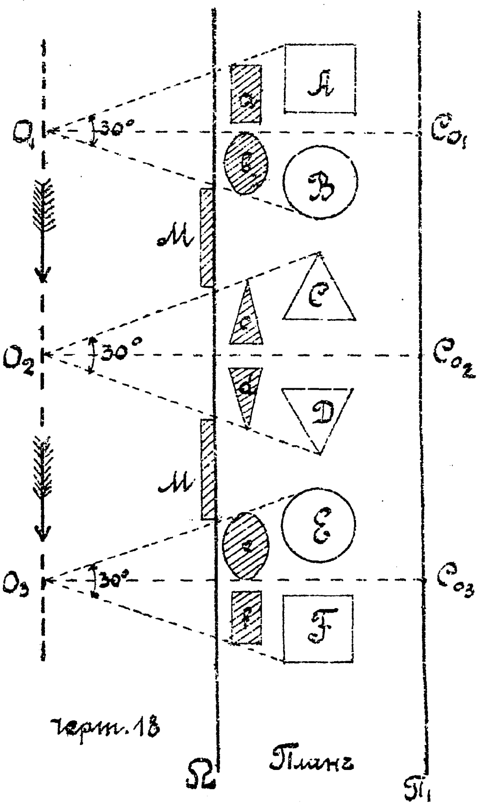
На черт.16 нами былъ показанъ примѣръ построенія изображенія abcdefgh, которое даетъ впечатлѣніе такое же, какъ и сама форма ABCDEFGH, если смотрѣть отъ точки O; при этомъ осевая плоскость была расположена между центромъ и предѣльной плоскостью π_1. Если же пре-

*) *Примѣръ построенія театральной декораціи можно найти въ соч. моемъ "Примѣры рѣшенія задачъ по Начертательной Геометріи". СПБ. Изд. 1911 года.*

дѣльная плоскость π_1 будетъ расположена между центромъ и осевой плоскостью, то получится изображеніе abcdefgh (черт.17) формы ABCDEFGH, какъ бы вывернутой на изнанку, т.е. наружныя грани изображенія будутъ соотвѣтствовать внутреннимъ гранямъ формы и наоборотъ.

При построеніи рельефовъ, декорацій, картинъ и вообще всякаго рода изображенія предполагается, что лучи зрѣнія, идущіе къ различнымъ точкамъ разсматриваемаго предмета, составляютъ между собой углы не болѣе 30°, только тогда зритель можетъ ясно различать всѣ точки изображенія. Такимъ образомъ, всѣ лучи должны находиться внутри *"конуса зрѣнія"* или "конуса видимости" предмета. Точки, находящіяся внѣ этого конуса, будутъ плохо различаться и для того, чтобы ихъ ясно видѣть, необходимо повернуть голову. При этомъ получается новый конусъ видимости.

Предположимъ, что изображаемый предметъ или группа ихъ имѣетъ высоту небольшую, такъ что лучи, идущіе отъ верхней и нижней плоскости предметовъ, составляютъ уголъ, меньше 30°. Ширина же группы предметовъ пусть будетъ весьма велика. Предположимъ, что всѣ предметы расположены по линіи AF и разсмотримъ ихъ въ планѣ (черт.18). Пусть изъ центра O_1 предметы A и B видны подъ предѣльнымъ угломъ 30° и пусть полученныя рельефныя изображенія въ планѣ будутъ a и b. Пусть Ω и π_1 – будутъ на планѣ слѣды осевой и предѣльной плоскостей, а Co_1 – точка схода на предѣльной плоскости линій, изображающихъ перпендикуляры къ осевой плоскости. Очевидно, Co_1 и O_1 лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ осевой плоскости. Чтобы получить изображенія предметовъ C, D, E и F при тѣхъ же осевой и предѣльной плоскостяхъ, и при условіи, чтобы углы зрѣнія были не больше 30°, необходимо выбрать новыя точки зрѣнія O_2 и O_3, которыя дадутъ новыя точки схода Co_2 и Co_3. Такимъ образомъ при построеніи рельефныхъ изображеній въ длинной и узкой комнатѣ слѣдуетъ выбрать рядъ точекъ зрѣнія O_1, O_2, O_3. При

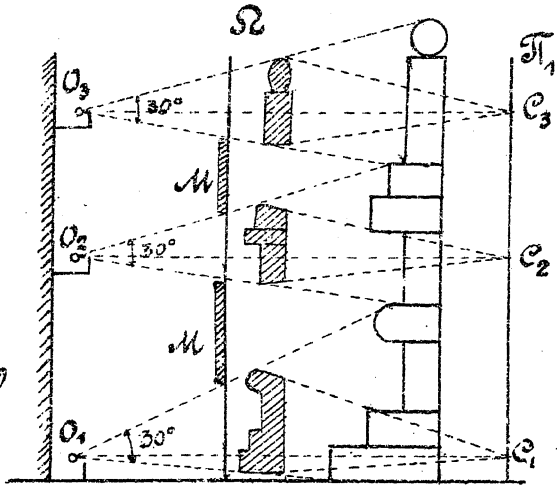


Черт.18

этомъ ближайшіе къ данной точкѣ зрѣнія изображенія будутъ давать наибольшую иллюзію предмета. Отъ искусства художника зависитъ наиболѣе удачный выборъ числа и положенія точекъ O. Если точки O_1, O_2, O_3 значительно удалены другъ отъ друга, то, чтобы не видѣть изъ центра O_1 рельефа, соотвѣтствующаго точкѣ O_2, полезно помѣщать перегородки M. Чѣмъ чаще будутъ выбраны точки O, тѣмъ лучше получится рельефъ, но тѣмъ сложнѣе будутъ построенія.

Линію O_1O_3 назовемъ линіей центровъ коллинеаціи или линіей точекъ зрѣнія. Въ данномъ случаѣ эта линія будетъ горизонтальной.

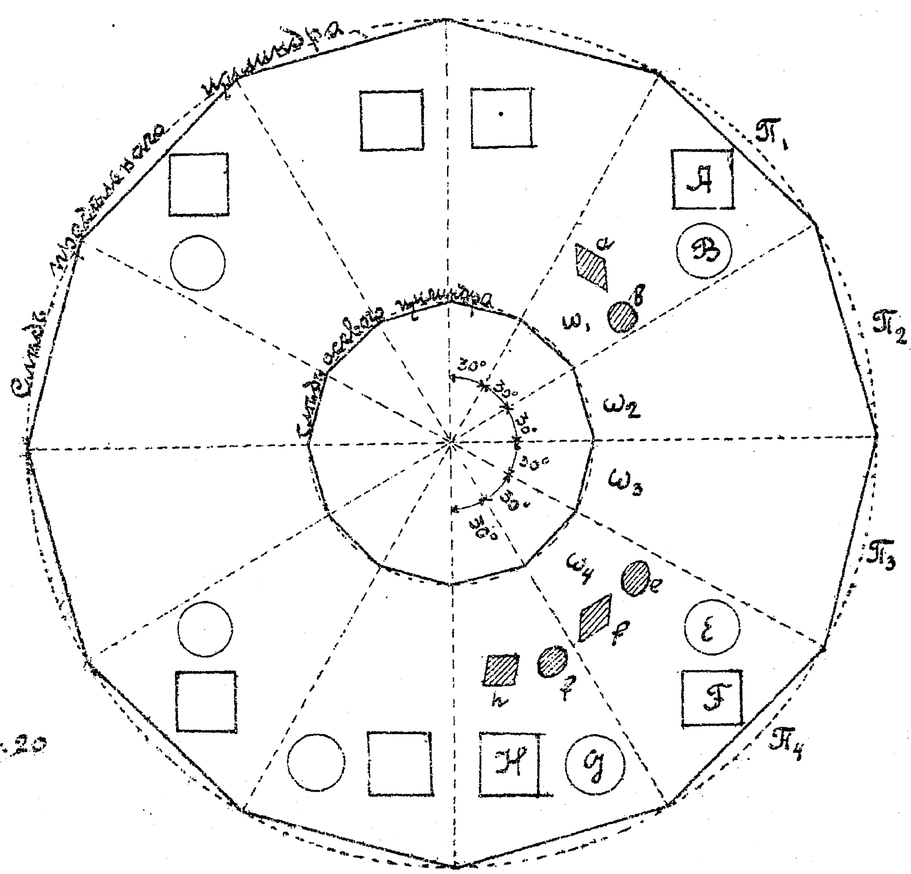
Если наибольшее измѣреніе предметовъ располагается въ вышину (черт.19), то подобнымъ же образомъ получимъ вертикальную линію O_1O_3 центровъ коллинеаціи. Наконецъ, если предметы располагаются на большое разстояніе и въ высоту и въ длину, то получимъ нѣкоторую плоскость, какъ геометрическое мѣсто центровъ коллинеаціи. Изъ вышеизложеннаго видно, что изображенія, построенныя для одного центра, будутъ казаться уродливыми при взглядѣ изъ другого центра, поэтому гораздо лучше пользоваться не постоянными предѣльными и осевыми плоскостями и мѣнять положеніе центровъ, а оставлять центръ неподвижнымъ и мѣнять положеніе осевой и предѣльной плоскости. Это будетъ соотвѣтствовать повороту зрителя вокругъ вертикальной оси, при сохраненіи имъ постояннаго мѣста.



черт. 19

фасадъ.

Если данъ рядъ предметовъ A, B...G, H - небольшой высоты и мы желаемъ построить ихъ рельефное изображеніе (черт. 20), то разбиваемъ все пространство въ горизонтальной плоскости на углы съ вершиною въ центрѣ О такъ, чтобы каждый уголъ былъ не болѣе 30°. Задаемся положеніемъ слѣдовъ осевыхъ плоскостей ω_1, ω_2... и предѣльныхъ плоскостей, напримѣръ, предполагая ихъ за хорды какого нибудь многоугольника, вписаннаго въ круги съ центромъ въ точкѣ О. По этимъ даннымъ можно построить рельефныя изображенія a, b, c, d...Чѣмъ больше взять осевыхъ плоскостей, т.е., чѣмъ меньше будутъ центральные углы, тѣмъ

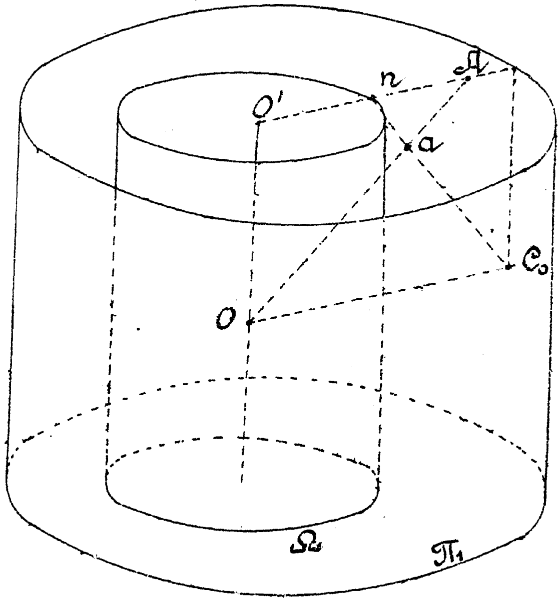


черт. 20

лучше получится изображенie. Въ предѣлѣ вмѣсто многогранника осевыхъ плоскостей получится осевой цилиндръ, а вмѣсто многогранника предѣльныхъ плоскостей получится предѣльный цилиндръ. Напримѣръ, такого рода рельефное изображенie для центральнаго угла около 120° имѣется въ Парижѣ на Монмартрѣ (Panorama Rome). Получаемое по такому способу изображенie можно назвать *цилиндрическимъ рельефомъ*.

На черт.21 показана схема построенiй въ пространствѣ для полученiя изображенiя точки A въ цилиндрическомъ рельефѣ. Проводимъ изъ точки A линiю An, перпендикулярную къ осевому цилиндру Ω до пересѣченiя съ нимъ въ точкѣ n. Очевидно, линiя An будетъ перпендикулярна къ оси цилиндра и будетъ ее пересѣкать. Изъ точки O проводимъ линiю OC_o, параллельную An до пересѣченiя съ предѣльнымъ цилиндромъ въ точкѣ C_o. Соединяемъ C_o съ n и находимъ искомую точку a, пересѣченiе прямыхъ C_on и AO.

черт.21



Если бы мы черезъ точку A провели линiю An, не пересѣкающую ось, то для нахожденiя точки a, необходимо сдѣлать слѣдующiя построенiя. Соединимъ точку A съ точкой O и проведемъ плоскость Ω', касательную къ осевому цилиндру и перпендикулярную къ плоскости AOO'. Проведемъ плоскость π'_1, касательную къ предѣльному цилиндру и параллельную плоскости Ω'. Принимая Ω' и π'_1 за осевую и предѣльныя плоскости, построимъ изображенiе a точки A также, какъ оно строится для плоскостного рельефа.

Если предметы имѣютъ значительную длину и высоту, то, для полученiя изображенiй, отвѣчающихъ дѣйствительности, слѣдуетъ примѣнять *шаровой рельефъ* (черт.22), задаваясь центромъ O, осевой (шаръ) и предѣльной поверхностью (шаръ). Изображенiя, получаемыя при помощи этого способа, будутъ наиболѣе совершенными, но въ то же время ихъ построенiе наиболѣе сложно.

Для полученiя точки a, соотвѣтствующей любой точкѣ A пространства, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Проводимъ лучъ AO до пересѣченiя съ осевой поверхностью въ точкѣ n и съ предѣльной поверхностью въ точкѣ Co.

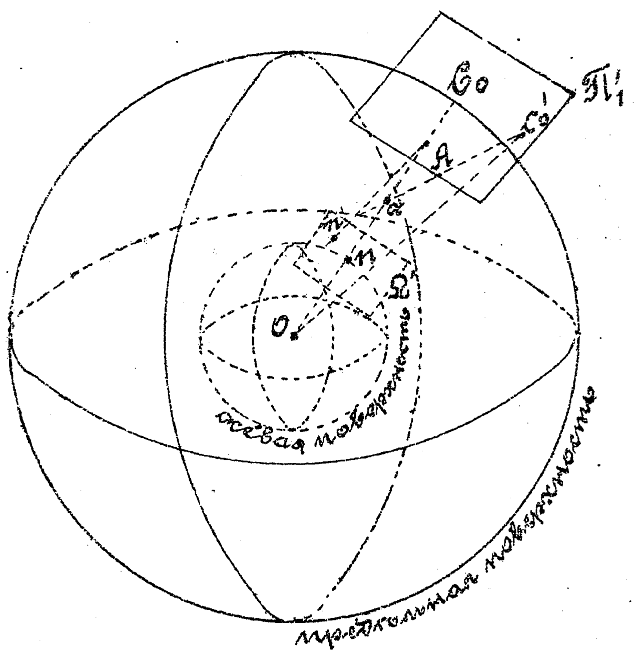
Проводимъ въ точкахъ n и Co плоскости Ω' и π'_1 соотвѣтственно касательныя поверхностямъ осевой и предѣльной. Принимая эти плоскости за осевую и предѣльную строимъ точку a, изображенiе точки A какъ и для плоскостного рельефа, напримѣръ, проведя черезъ A случайную линiю An' до пересѣченiя съ Ω' въ точкѣ n', и изъ O - линiю OCo' параллельную An до пересѣченiя съ π'_1 въ точкѣ Co'. Пересѣченiе линiй oA и n'Co' и дастъ искомую точку a.

Такъ какъ шаровой и цилиндрическiй рельефы являются развитiемъ плоскостного рельефа, то, очевидно, что для общаго случая центральной коллинеацiи пространственныхъ системъ при данныхъ: центрѣ, осевой и предѣльной поверхности форма опредѣляется изображенiемъ и неображеніе - формой.

Въ дальнѣйшемъ мы не будемъ касаться другихъ видовъ рельефа какъ рѣдко примѣняемыхъ въ практикѣ.

b) Изображенія, получаемыя въ частныхъ случаяхъ центральной коллинеаціи пространственныхъ системъ.

Наиболѣе характерными случаями центральной коллинеаціи пространственныхъ системъ мы будемъ называть такія, въ которыхъ основные элементы ея или совпадаютъ другъ съ другомъ, или удалены въ безконечность. При этомъ подъ предѣльной поверхностью мы будемъ понимать предѣльную поверхность изображенія и обозначать ее буквою κ_1. Если же будетъ идти рѣчь о предѣльной поверхности изображенія, то это будетъ особо оговорено.



черт. 22.

Имѣя въ виду, что расположеніе центра, осевой и предѣльной плоскостей должны удовлетворять теоремѣ, что середина разстоянія между центромъ и осевой плоскостью должна быть и серединой разстоянія между предѣльными плоскостями, получимъ слѣдующія возможныя комбинаціи: *)

1) Центръ совпадаетъ съ осевой поверхностью.
2) Центръ совпадаетъ съ предѣльной поверхностью.
3) Предѣльная поверхность совпадаетъ съ осевой.
4) Осевая поверхность находится въ безконечности.
5) Осевая и предѣльная поверхности находятся въ безконечности.
6) Предѣльная поверхность находится въ безконечности.
7) Центръ находится въ безконечности.
8) Центръ и предѣльная поверхность находятся въ безконечности.
9) Осевая поверхность и центръ находятся въ безконечности.
10) Предѣльныя поверхности совпадаютъ другъ съ другомъ и находятся посрединѣ разстоянія между центромъ и осевой поверхностью.

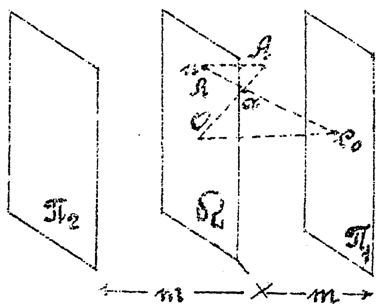
При этомъ подъ осевой и предѣльною поверхностями мы будемъ разумѣть плоскость, цилиндръ или шаръ.

1. *Центръ совпадаетъ съ осевой поверхностью.* - Для случая плоскостного рельефа (черт.16) изображеніе сохраняетъ почти тотъ же видъ когда центръ и не совпадаетъ съ осевой плоскостью, только при одинаковомъ расположеніи предѣльной плоскости размѣры рельефа будутъ меньше. Осевая поверхность будетъ плоскостью, проходящей черезъ центръ и параллельной предѣльной плоскости (черт.23).

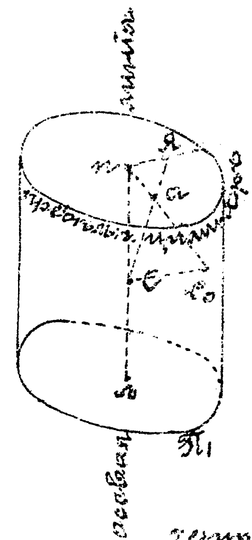
Для случая цилиндрическаго рельефа (черт.20), осевая поверхность

*) *Ващенко-Захарченко "Проективная Геометрія". стр.357.*

превращается въ линію, проходящую черезъ центръ и совпадающую съ осью предѣльнаго цилиндра (черт.24). Размѣры рельефа въ этомъ случаѣ также будутъ меньше, по сравненію съ общимъ случаемъ, при одинаковомъ расположеніи предѣльной плоскости.

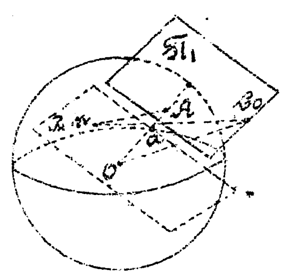


черт. 23



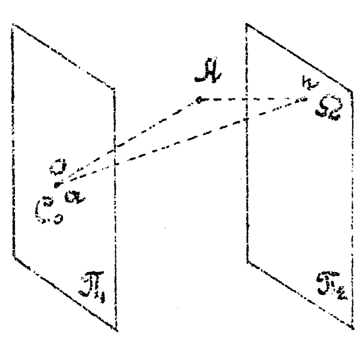
черт. 24

Для случая шарового рельефа поступаемъ слѣдующимъ образомъ (черт. 25). Пусть дана точка А и требуется построить ей соотвѣтствующую. Проводимъ радіусъ ОА и въ точкѣ пересѣченія его съ шаромъ проводимъ предѣльную плоскость π_1, касательную къ шару. Черезъ центръ О проводимъ осевую плоскость, параллельную π_1. Далѣе, черезъ А проводимъ случайную линію An_A до пересѣченія съ осевой плоскостью въ точкѣ An_A а изъ О - линію ОСо, параллельную An_A, до пересѣченія съ π_1 въ точкѣ Со. Соединяемъ Со съ n_A. Искомая точка а будетъ, очевидно, пересѣченіемъ линій ОА и n_AСо. Для всѣхъ трехъ случаевъ (черт.22, 24, 25), очевидно, что изображеніе опредѣляетъ форму и форма - изображеніе.



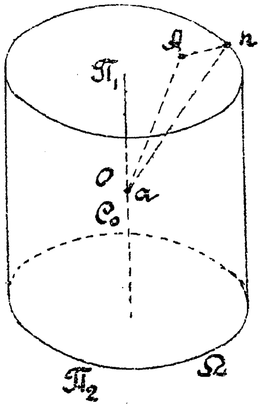
черт. 25

2. *Центръ совпадаетъ съ предѣльной поверхностью.* - При этомъ условіи для всѣхъ трехъ случаевъ пространственнаго рельефа изображенія получаются въ видѣ точки, совпадающей съ центромъ О (черт.26, 25). Напримѣръ, для полученія изображенія точки А для случая шарового рельефа (черт.27), проводимъ черезъ точку А линію АО до пересѣченія съ осевой поверхностью въ точкѣ n. Проводимъ черезъ точку n плоскость, касательную къ осевой поверхности. Черезъ точку А проводимъ случайную линію АСо до пересѣченія съ осевой плоскостью въ точкѣ n, а изъ точки О линію, параллельную An' до пересѣченія съ предѣльной плоскостью π_1 въ точкѣ Со, очевидно, совпадающей съ О. Пересѣченіе линій ОА и Con' дастъ, очевидно, точку а. совпадающую съ О.

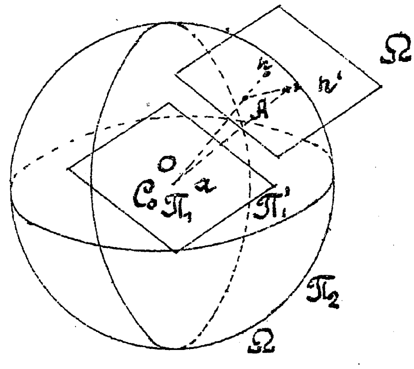


черт. 26

Для случая, когда предѣльная плоскость совпадаетъ съ центромъ, задача является неопредѣленною, такъ какъ для даннаго изображенія (точка), можно построить безчисленное множество формъ.

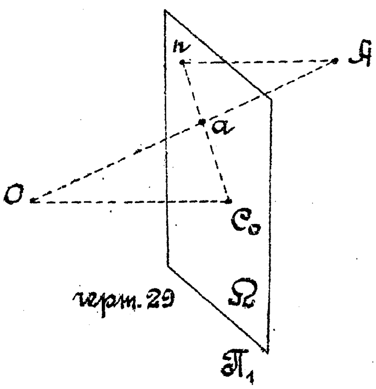


черт. 27

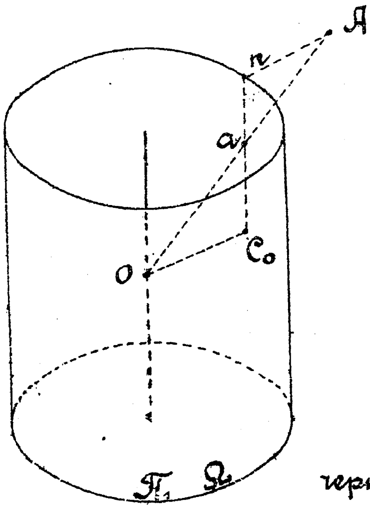


черт. 28

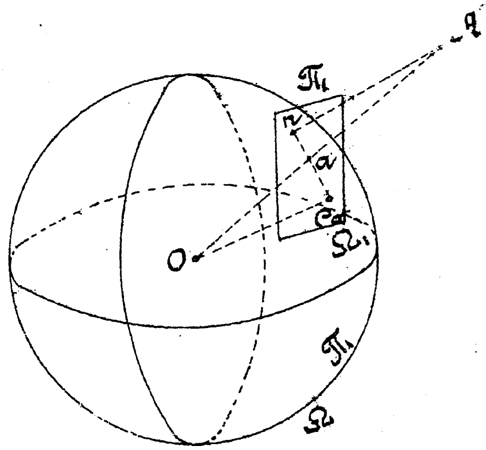
3. *Предѣльная поверхность совпадаетъ съ осевой.* - Въ этомъ случаѣ для данной формы, напримѣръ, для точки А, для всѣхъ трехъ случаевъ пространственнаго рельефа, можно построить вполнѣ опредѣленное изображеніе (черт. 29, 31). Остановимся при этомъ нѣсколько на разсмотрѣніи построенія изображенія шарового рельефа (черт.30). Для построенія точки а проводимъ изъ А линію АО до пересѣченія съ осевымъ шаромъ въ точкѣ а. Черезъ точку а проводимъ плоскость Ω', касательную къ шару. Далѣе, черезъ точку А проводимъ случайную линію An до пересѣченія съ плоскостью Ω' въ точкѣ n, а изъ точки О - линію ОСо, параллельную An, до пересѣченія съ той же плоскостью въ точ-



черт. 29



черт. 30



черт. 31

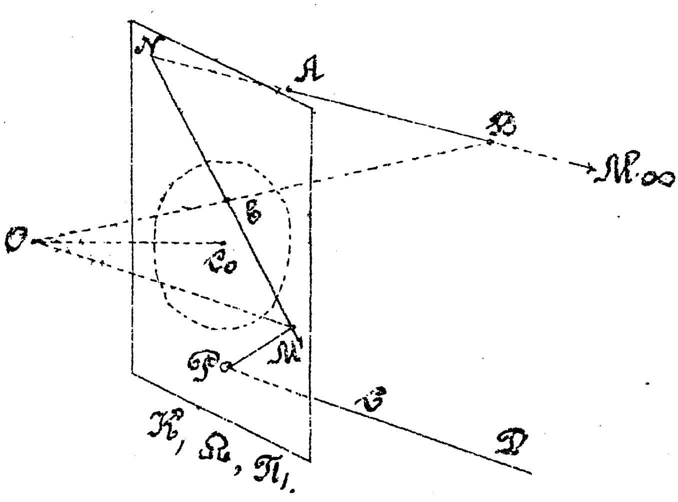
кѣ Со. Соединяемъ точку п съ Со и находимъ точку а пересѣченія линій пСо и ОА. Точка а и будетъ изображеніемъ точки А. Очевидно, эта точка является точкой пересѣченія линіи ОА съ осевой поверхностью для всѣхъ трехъ случаевъ пространственнаго рельефа. При этомъ нетрудно замѣтить, что изображеніе пространственнаго тѣла въ данномъ случаѣ будетъ расположено или въ одной плоскости (черт.29), или на поверхности цилиндра (черт.30), или на поверхности шара (черт.31).

Въ первомъ случаѣ изображеніе въ практикѣ носитъ названіе *перспективы* предмета на плоскости. Во второмъ случаѣ - изображеніе называется *панорамой* и въ третьемъ - сферическимъ или купольнымъ изображеніемъ. Во всѣхъ этихъ случаяхъ по данной формѣ легко построить ея изображенія. Для этого слѣдуетъ изъ различныхъ точекъ данной фигуры провести лучи въ центръ О и найти ихъ пересѣченіе съ осевой поверхностью, которую принято называть *картинною* поверхностью. Полученныя точки и дадутъ картину данной фигуры. Таковой способъ называется иногда способомъ *проекцій и сѣченій*, такъ какъ онъ, какъ будетъ показано далѣе, позволяетъ при помощи двухъ ортогональныхъ проекцій фигуры и при помощи сѣченія лучей съ картинной плоскостью построить перспективу фигуры. Иногда этотъ же способъ полученія перспективъ при помощи ортогональныхъ проекцій называютъ *ортогональной перспективою*.

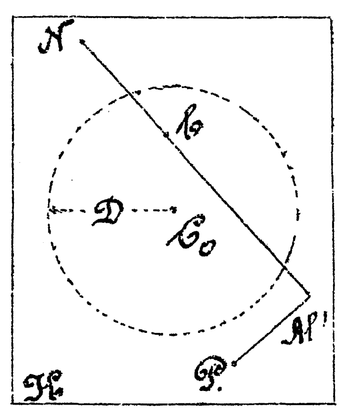
Задача, обратная вышеприведенной, т.е. опредѣленіе фигуры по данному ея изображенію, является неопредѣленной, такъ какъ, данному изображенію можетъ соотвѣтствовать безчисленное множество формъ. Для того, чтобы по данному перспективному изображенію можно было бы построить искомую форму или для того, чтобы рѣшать въ перспективѣ различныя задачи, нельзя уже примѣнить ортогональную перспективу, такъ какъ въ этомъ случаѣ пришлось бы предварительно рѣшить задачу въ ортогональныхъ проекціяхъ, и затѣмъ уже перенести результатъ въ перспективу. Во избѣжаніе этого примѣняютъ дополнительныя условія проектированія, которыя составляютъ предметъ изученія *перспективы*. Среди этихъ методовъ главнѣйшими являются слѣдующіе:

Методъ слѣда и схода.

Этотъ методъ заключается въ томъ, что данный геометрическій элементъ (прямая или плоскость) формы опредѣляется при помощи его *слѣда*,



черт. 32



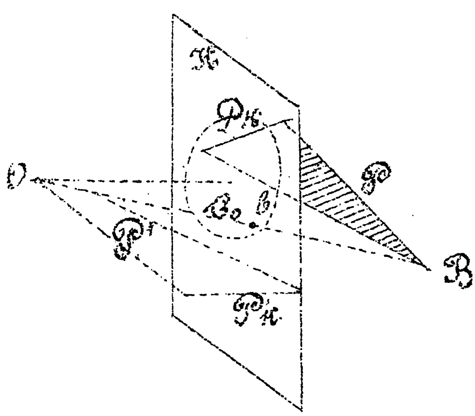
черт. 33

да, т.е. точки (для линіи) или линіи (для плоскости) на картинной плоскости и *сходомъ* его на той же плоскости, т.е. точкой или линіей сѣченія съ картинной плоскостью элемента, параллельнаго данному и проходящаго черезъ центръ. Точка же опредѣляется пересѣченіемъ двухъ линій.

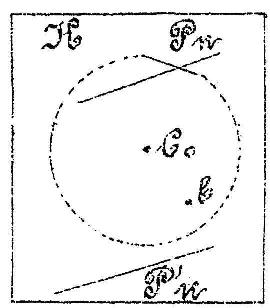
Разсмотримъ примѣненіе этого метода для опредѣленія положенія линіи, точки и плоскости.

Опредѣленіе положенія линіи. - Предположимъ, что предѣльная поверхность есть плоскость. Пусть дана въ пространствѣ линія AB (черт. 32) и даны центръ O, предѣльная плоскость π_1, совпадающая съ осевой Ω, и называемая (черт.33) картиной (K). Продолжимъ AB до пересѣченія съ картиной K въ точкѣ N. Эта точка называется *слѣдомъ* AB на K. Изъ точки O проведемъ линію OM', параллельную AB, до пересѣченія съ K въ точкѣ M'. Эта точка будетъ служить изображеніемъ какъ безконечно удаленной точки M_∞ прямой AB, такъ и безконечно удаленныхъ точекъ любыхъ прямыхъ CD, параллельныхъ AB. Изображеніемъ прямой AB на плоскости K будетъ служить, очевидно, линія NM', изображеніемъ прямой CD линія PM', гдѣ P - слѣдъ . K. Очевидно, что изображенія всякихъ прямыхъ, параллельныхъ AB пройдутъ черезъ точку M', которая называется *точкою схода* прямыхъ, параллельныхъ AB.

На черт.33 показана картинная плоскость, совпадающая съ плоскостью чертежа. Точка Co на немъ изображаетъ основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ O на K, а пунктирный кругъ описанный, - радіусомъ D - равнымъ разстоянію центра O отъ K, показываетъ на какомъ разстояніи находится центръ отъ картины. Кругъ этотъ называется *кругомъ разстояній*. При этихъ данныхъ положеніе прямой AB относительно картины въ пространствѣ вполнѣ опредѣлено. Дѣйствительно, возстановимъ въ Co перпендикуляръ K и отложимъ на немъ разстояніе D, равное радіусу круга разстояній. Конецъ этого перпендикуляра опредѣлитъ центръ O. Соединяемъ O съ M' и изъ N проводимъ параллельную OM' линію, которая и будетъ искомой.



черт. 34



черт. 35

Опредѣленіе положенія плоскости. - Плоскость будетъ вполнѣ опредѣлена, если будутъ даны ея *слѣдъ* (черт.34) Pк, на картинной плоскости, и *линія схода* P'k, которая получается, какъ сѣченіе картины съ плоскостью P', параллельной данной плоскости 4 и проходящей черезъ центръ. Очевидно, прямая P'k является геометрическимъ мѣстомъ точекъ схода изображеній системъ прямыхъ, параллельныхъ плоскости P.

На черт.35 показано заданіе плоскости на картинѣ, совпадающей съ плоскостью чертежа.

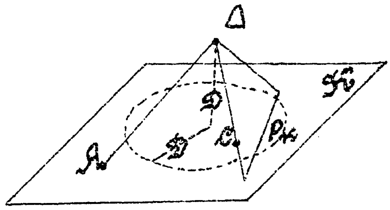
Опредѣленіе положенія точки. - Точка опредѣляется слѣдомъ на картинной плоскости луча, проходящаго черезъ нее и какой нибудь прямой или плоскостью, проходящей черезъ нее. Напримѣръ, (черт.32 и 33) точка B пространства будетъ вполнѣ опредѣлена, если будутъ даны точки: N, M', b, C_0, и кругъ разстояній. Равнымъ образомъ точка B (черт.34 и 35) будетъ вполнѣ опредѣлена, если будутъ даны линіи Pk, P'k, точки C_0 и b кругъ разстояній.

Методъ слѣда и схода весьма удобенъ для рѣшенія всевозможныхъ метрическихъ задачъ, т.е. для опредѣленія угловъ, длинъ, разстояній, формъ, по даннымъ ихъ изображеніямъ.

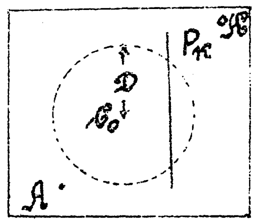
Совершенно аналогичнымъ образомъ можно для панорамной и купольной перспективы здать прямую и плоскость ихъ слѣдами и сходами на картинной поверхности. Однако, построенія здѣсь будутъ сложнѣе и составляютъ предметъ особаго курса.

Способъ опредѣленія положенія точки при помощи ея прямоугольной проекціи на плоскости и круга разстояній, а также методъ слѣдовъ и сходовъ развитъ Фидлеромъ въ его въ его сочиненіи "Darstellende Geometrie" и названъ имъ "Циклографіей".

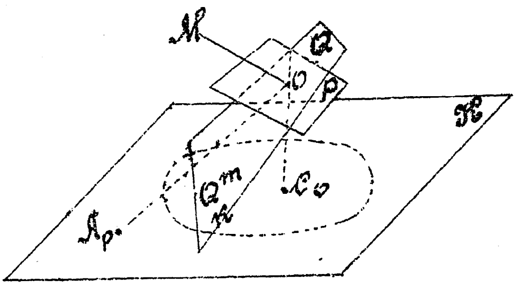
Въ кристаллографіи пользуются методомъ слѣда и схода для изображенія проекціи граней и реберъ кристалловъ, причемъ полученныя при помощи этого метода проекціи въ кристаллографіи называются *линейными*. Полюсъ принимается постояннымъ и проектируются лишь направленія линій и граней. При этомъ линія изображается точкой, слѣдомъ ея на плоскости проекцій, а грань - линіей - слѣдомъ грани на плоскости проекцій. На чертежѣ 36 и 37 показано изображеніе линіи AO и грани P въ линейной проекціи. Иногда, когда приходится изображать много граней и мало реберъ, вмѣсто граней изображаютъ линіи, перпендикулярныя къ нимъ и проходящія черезъ центръ, а вмѣсто реберъ - плоскости, перпендикулярныя къ нимъ и проходящія черезъ центръ. Тогда грани изобразятся точками, а ребра - линіями (черт. 38 и 39. Точка A_p изображаетъ грань P, а линія Q_k^m изображаетъ линію MO). Въ



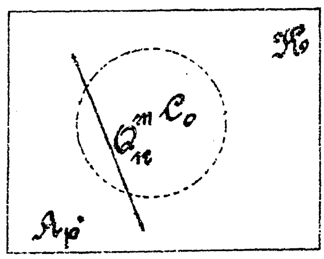
черт. 36



черт. 37



черт. 38



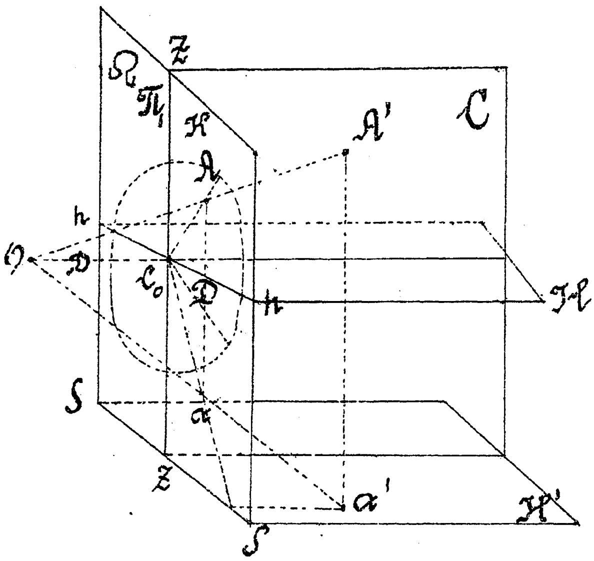
черт. 39

этомъ случаѣ проекціи называются *гномоническими*.

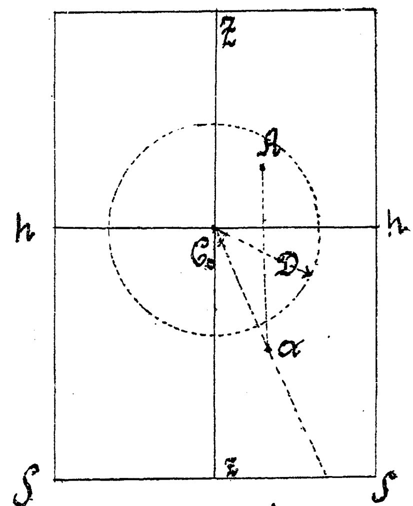
МЕТОДЪ ИЗОБРАЖЕНІЙ ФОРМЪ И ИХЪ ОСНОВАНІЙ

(аксонометрическая перспектива).

Второй способъ, который примѣняютъ для того, чтобы достичь опредѣленности заданія въ перспективѣ заключается въ слѣдующемъ: Пусть даны въ пространствѣ (черт. 40 и 41):



черт. 40



черт. 41

точка A', центръ O, картинная плоскость K (совпадающая съ предѣльной и осевой плоскостями) и, кромѣ того, задано основаніе (a') перпендикуляра, опущеннаго изъ точки A' на какую нибудь, напримѣръ, на горизонтальную плоскость H'. Эта послѣдняя плоскость называется плоскостью основаній предмета. Обозначимъ линію сѣченія ея съ плоскостью K черезъ SS. Такимъ образомъ, точка a' является прямоугольной проекціей точки A' на плоскость основаній. Проведемъ черезъ центръ O двѣ плоскости - одну вертикальную C, перпендикулярную къ картинѣ, а другую - горизонтальную H. Плоскость C называется центральной, а плоскость H - плоскостью горизонта. Обѣ эти плоскости пересѣкаютъ картину по линіямъ zz и hh, которыя называются *осями перспективы*. Соединимъ теперь точки A' и a' съ центромъ O и замѣтимъ точки A и a пересѣченія линій A'O и a'O съ картиной. Нетрудно видѣть, что точки A и a вполнѣ опредѣляютъ точку A' въ пространствѣ. Дѣйствительно, разъ даны точки A и a, то получить точку A' можно слѣдующимъ образомъ. Соединяемъ A и a съ центромъ O. линію Oa продолжаемъ до пересѣченія съ плоскостью H' въ точкѣ a'. Изъ a' возстановляемъ перпендикуляръ къ H'. Пересѣченіе его съ лучемъ OA и дастъ искомую точку A'.

Зная, какъ по перспективѣ точки опредѣлить саму точку, нетрудно опредѣлить и прямую, задаваемую перспективами двухъ точекъ, и плоскость, задаваемую перспективами трехъ точекъ. При рѣшеніи задачъ этимъ способъ весьма удобно пользоваться осями zz и hh, отъ которыхъ приходится откладывать различныя разстоянія. Этотъ методъ нѣсколько напоминаетъ методъ аксонометрическихъ проекцій, о которыхъ будетъ говориться позднѣе, а потому онъ иногда носитъ названіе *"аксонометрической перспективой"*. Методомъ этимъ удобно пользоваться для построенія очертаній предметовъ въ живописи, для составленія перспективныхъ эскизовъ и вообще тогда, когда требуется построить лишь изображеніе предмета, а не рѣшать на основаніи этого изображенія геометрическія задачи на измѣреніе угловъ и длинъ, иными словами, когда приходится рѣшать только проективныя, а не метрическія задачи. Въ послѣднемъ случаѣ цѣлесообразнѣе прибѣгать къ методу слѣда и схода, такъ какъ при этомъ рѣшенія метрическихъ задачъ являются болѣе простыми. Въ частномъ случаѣ, если картинная плоскость расположена горизонтально надъ головою зрителя, какъ это случается при разрисовкѣ потолковъ, то картина называется *плафоноперспективою*. Конечно, всѣ построенія для полученія плафоноперспективы остаются тѣ же, что и для вертикальной картины.

Ранѣе мы, говоря о пространственныхъ изображеніяхъ, вывели понятіе о линіи и о плоскости точекъ зрѣнія. Очевидно, это понятіе приложимо и къ плоскимъ перспективнымъ изображеніямъ, когда уголъ конуса зрѣнія болѣе 30°. Поэтому, при построеніи большихъ картинъ приходится иногда пользоваться нѣсколькими точками зрѣнія.

Таковы, напримѣръ, картины: "Афинская школа" Рафаэля, въ которой имѣется нѣсколько точекъ зрѣнія, расположенныхъ по одной вертикали, и "Битва французовъ съ арабами" Горація Вернэ, гдѣ имѣется тядъ точекъ зрѣнія, расположенныхъ по одной горизонтальной линіи.

Если въ случаяхъ, разсмотрѣнныхъ на чертежахъ 29, 30 и 31 предположить, что въ центрѣ О расположена свѣтящаяся точка, а данная точка А помѣщена передъ картиной, то точка а - изображеніе точки А, будетъ являться тѣнью отъ точки А на картинной поверхности. Такимъ образомъ, можно сказать, что "Тѣнь, отбрасываемая предметомъ на картинную поверхность, при освѣщеніи его источникомъ свѣта, помѣщеннымъ въ одной точкѣ, коллинеарна съ предметомъ.

СПЕЦІАЛЬНЫЯ ПРОЕКЦІИ.

Говоря о перспективныхъ проекціяхъ, опишемъ въ краткихъ чертахъ нѣкоторые виды ихъ, которыя имѣютъ спеціальное примѣненіе въ картографіи, астрономіи и кристаллографіи. Воспользуемся той классификаціей ихъ, которую даетъ профессоръ В.В.Витковскій въ своемъ сочиненіи "Картографія". Изъ этого же сочиненія мы заимствуемъ чертежи и опредѣленіе этихъ проекцій.

Кромѣ того, нѣкоторые чертежи и опредѣленія мы заимствовали изъ сочиненій "Handbook of geography" by E.Reich и "Кристаллографія" проф. Федорова.

Картографическія проекціи служатъ для изображенія на плоскости частей поверхности земли, и такъ какъ спроектировать земной сфероидъ на плоскость невозможно безъ искаженія натуральныхъ длинъ и площадей, то при проектированіи приходится примѣнять различныя искусственныя условія и примѣнять различные методы проекцій, частью перспективныхъ, почему эти проекціи и разсматриваются въ этомъ отдѣлѣ, частью параллельныя, которыя слѣдовало бы разсматривать ниже, частью совершенно условныя, но имѣя въ виду, что всѣ эти проекціи преслѣдуютъ главнымъ образомъ общую цѣль, начертаніе географическихъ картъ, мы ихъ отнесемъ къ отдѣлу перспективныхъ проекцій, озаглавивъ терминомъ *"спеціальныя проекціи"*.

По свойству изображенія проекціи раздѣляются на: а) *равноугольныя*, сохраняющія подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ. Въ этихъ проекціяхъ масштабъ остается неизмѣннымъ по всѣмъ направленіямъ изъ каждой точки, но на весьма маломъ отъ нея разстояніи. Величина угловъ въ точкахъ проекціи одинакова съ величиной угловъ въ соотвѣтствующихъ имъ точкахъ на сферѣ.

b) *Равновеликія.* Въ этихъ проекціяхъ масштабы въ каждой точкѣ по разнымъ направленіямъ различны, но средняя величина масштаба во всѣхъ точкахъ проекціи остается неизмѣнною. Каждая замкнутая фигура изображается равновеликою ей замкнутой фигурою.

c) *Произвольныя* не сохраняютъ ни подобія въ безконечно малыхъ частяхъ ни равенства поверхностей, но могутъ имѣть какія нибудь другія преимущества, напримѣръ, простоту построенія и т.п.

По способу построенія всѣ эти проекціи можно раздѣлить на:

1. *Перспективныя,* въ которыхъ земная поверхность проектируется изъ даннаго центра на плоскость.

2. *Зенитальныя,* въ которыхъ земная поверхность переносится по извѣстнымъ правиламъ на плоскость, касательную къ ней.

3. *Цилиндрическія,* въ которыхъ земная поверхность переносится на поверхность цилиндра, а затѣмъ послѣдняя развертывается на плоскость.

4. *Коническія,* въ которыхъ земная поверхность переносится сначала на коническую поверхность, а затѣмъ послѣдняя развертывается на плоскость.

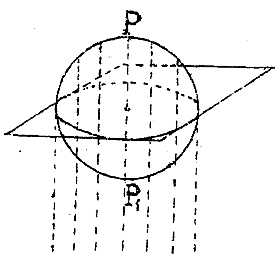
5. *Условныя,* заключающія въ себѣ проекціи, не подходящія къ вышеупомянутымъ четыремъ типамъ.

Переходимъ теперь къ частнымъ видамъ этихъ проекцій.

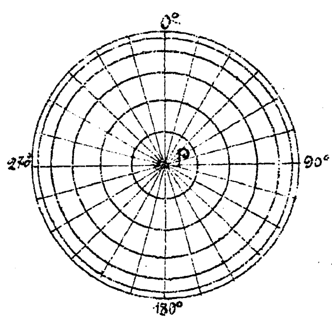
1) *Перспективныя* проекціи раздѣляются на:

a) *Ортографическія,* b) *стереографическія,* c) *центральныя* и d) *внѣшнія,* при чемъ въ зависимости отъ того, пересѣкаетъ ли перпендикуляръ, опущенный изъ точки зрѣнія на картинную плоскость, земную поверхность въ полюсѣ, экваторѣ или между ними, проекціи эти могутъ быть *полярными, экваторіальными и горизонтальными.*

Ортографической *) называется прямоугольная проекція поверхности земли на плоскость экватора. Въ этомъ случаѣ центръ находится въ безконечности. На черт.42 и 43 показана полярная ортографическая проекція земной поверхности съ параллелями и меридіанами. На черт.44 и 45 изображена земная поверхность въ экваторіальной ортографической проекціи и на черт.46 и 47 - въ горизонтальной.

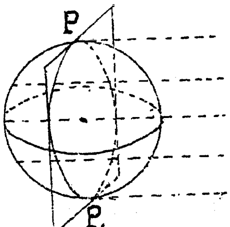


черт.42

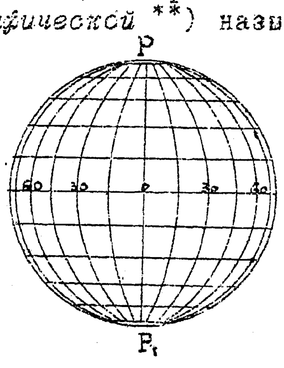


черт.43

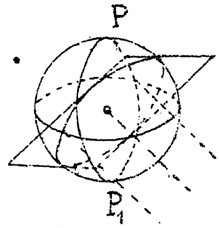
Стереографической **) называется проекція предмета на плоскости



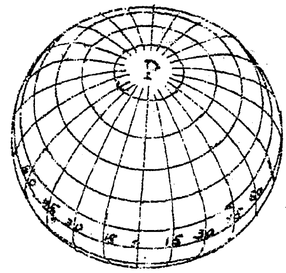
черт.44



черт.45



черт.46



черт.47

---

*) E.Reich. "Handbook of Geography" стр.89.
**) См. Федоровъ "Кристаллографія".

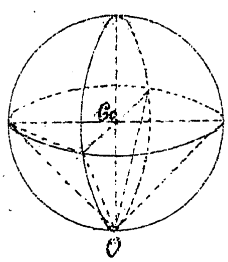
изъ центра, лежащаго на поверхности шара.

Если центръ находится въ южномъ полюсѣ шара, а картинная плоскость совпадаетъ съ экваторомъ, то стереографическая проекція называется *полярной*. Въ такомъ видѣ она примѣняется въ картографіи и въ кристаллографіи для опредѣленія угловъ между ребрами и гранями кристалловъ. Весьма удобно также примѣнять эту проекцію для рѣшенія задачъ механики въ пространствѣ, напримѣръ, при разсчетѣ пространственныхъ механическихъ сочлененій, когда приходится разлагать силы на три направленія не лежащихъ въ одной плоскости.

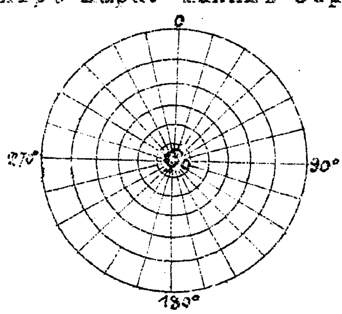
Въ этой проекціи изображаются всѣ линіи и плоскости, проходящія черезъ центръ шара, а сѣченіе ихъ съ шаровой поверхностью, т.-е. линія изображается точкой, а плоскость - линіей.

Основными свойствами стереографическихъ проекцій являются слѣдующія:

Дуги большихъ и малыхъ круговъ, начерченныхъ на шарѣ изображаются дугами же круга. Углы между дугами большого круга (т.е. углы между касательными въ точкѣ ихъ пересѣченія) въ проекціи равны дѣйствительнымъ угламъ между этими дугами на сферѣ (т.е. дѣйствительнымъ двуграннымъ угламъ между изображаемыми плоскостями). Если приходится изображать много граней и мало линій, то, чтобы изображать построенія большого числа дугъ, замѣняютъ плоскости, отвѣчающія этимъ дугамъ - линіями, проходящими черезъ центръ шара и перпендикулярными этимъ плоскостямъ, т.е. получаютъ изображенія уже въ видѣ точекъ, а не линій. Линіи же замѣняютъ плоскостями, нормальными къ нимъ и проходящими черезъ центръ шара. Такимъ образомъ, здѣсь уже изображеніе точкой замѣняется изображеніемъ линіей. Первый видъ проекцій называется *граммостереографической*, а второй *гномостереографической*. На чертежахъ 48 и 49 показано изображеніе меридіановъ и параллелей земной поверхности въ полярной граммостереографической проекціи. Здѣсь плоскости параллелей и меридіановъ изображаются въ видѣ

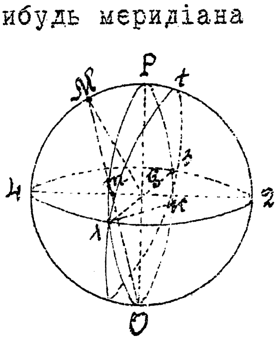


черт. 48

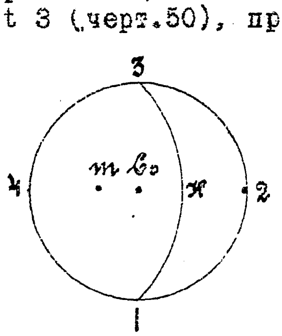


черт. 49

линіи - круговъ и прямыхъ. На черт.50 и 51 показаны гномостереограф. проекціи той же поверхности. Чтобы построить такую проекцію какого нибудь меридіана 1 t 3 (черт.50), проводимъ черезъ C_0 линію C_0M, перпендикулярную къ плоскости меридіана 1 t 3 и соединяемъ точку M съ O. Точка m пересѣченія линіи MO съ плоскостью экватора и есть гномостереографическая проекція меридіана 1 t 3. Граммостереографической же его проекціей будетъ дуга круга 1к3. Эта же дуга, очевидно, будетъ служить гномостереографической проекціей линіи C_0M. Равнымъ образомъ точки 1, 2



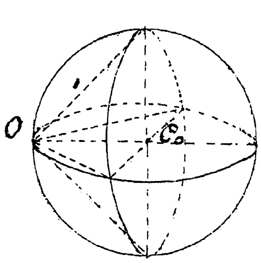
черт. 50



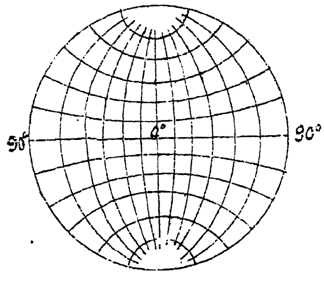
черт. 51

и C_0 являются гномостереографическими проекціями меридіановъ 3P4, 1P3 и экватора со всѣми параллельными кругами. Если картинная плоскость совпадаетъ съ плоскостью какого нибудь меридіана, а полюсъ лежитъ на экваторѣ и на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ центра шара къ плоскости упомянутаго меридіана, то стереографическая проекція называется экваторіальной. На черт.52 и 53 изображены экваторы и параллели шара въ этой проекціи. Если картинная плоскость проходитъ черезъ центръ и наклонна къ экватору, то проекція называется горизонтальной (черт.54 и (55)

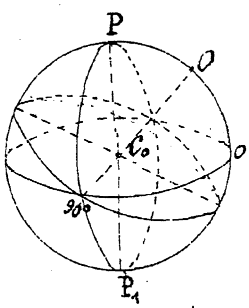
Центральныя проекціи представляютъ изъ себя тотъ случай перспективныхъ проекцій, когда центръ проектированія находится въ центрѣ шара. Картинную же плоскость проводятъ касательной къ шару. Въ центральныхъ проекціяхъ, очевидно, всѣ большіе круги, какъ проходящіе черезъ центръ проекцій, будутъ проектироваться въ видѣ прямыхъ линій. Если картинная плоскость касается шара въ полюсѣ, то проекція называется полярной (черт.56 и 57). Если картинная плоскость касается шара въ точкѣ, лежащей на экваторѣ, то проекція называется экваторіальной, и наконецъ, если она касается шара въ какой нибудь точкѣ, не лежащей на экваторѣ, ни въ полюсѣ, то проекція называется горизонтальной. Центральныя проекціи примѣняются въ астрономіи для составленія небесныхъ картъ.



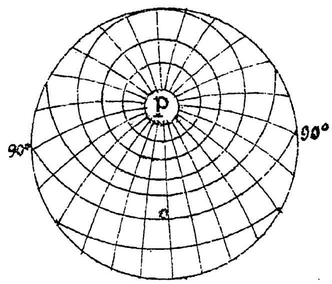
черт. 52



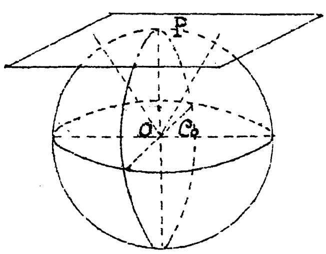
черт. 53



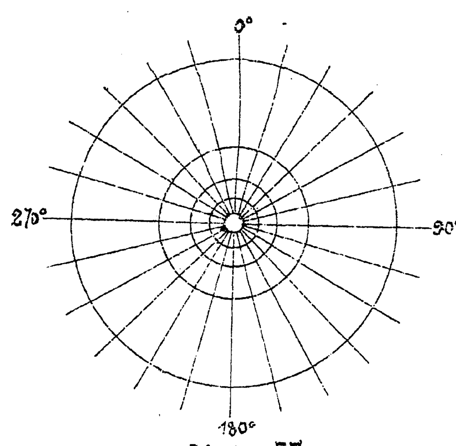
черт. 54



черт. 55



черт. 56



черт. 57

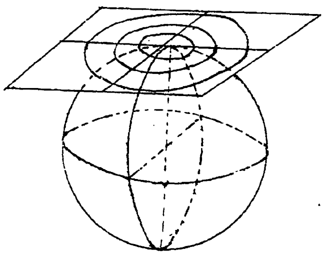
Четвертымъ видомъ перспективныхъ проекціи, примѣняемыхъ въ картографіи является такая, при которой центръ проектированія не на шарѣ и не въ безконечности, а въ извѣстномъ мѣстѣ *внѣ* шара. Проекціи, полученныя при такомъ расположеніи центра называются внѣшними. Въ зависимости отъ различнаго положенія центра проекцій и картинной плоскости различаютъ проекціи: Лаира, Парана, Фишера, Гаммера, Тиссо, Кларка, Лидмана. Изображенія шаровой поверхности съ меридіанами и параллелями въ этихъ проекціяхъ представляютъ нѣчто среднее между ранѣе полученными чертежами 42 и 57.

2. *Зенитальныя проекціи.*

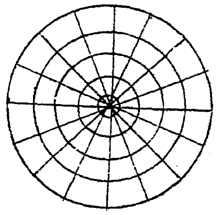
Для построенія зенитальныхъ проекцій проводятъ плоскость, касательную къ шару, чаще всего въ полюсѣ и затѣмъ, по особымъ правиламъ переносятъ точки съ поверхности шара на эту плоскость.

Разсмотримъ нѣсколько зенитальныхъ проекцій.

Проекція Постеля. Особенностью ея является то, что плоскость проводится касательной въ полюсѣ, меридіаны изображаются въ видѣ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку касанія, а параллели - въ видѣ концентрическихъ круговъ, съ центромъ въ упомянутой точкѣ. Радіусы этихъ круговъ принимаются равными соотвѣтственнымъ дугамъ меридіана отъ полюса до этой параллели (черт.58 и 59).



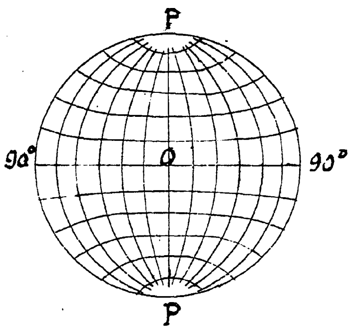
черт. 58



черт. 59

Проекція Ламберта имѣетъ то свойство, что площадь въ ней какого нибудь круга параллели должна равняться площади шарового сегмента, ограниченнаго той же параллелью на шарѣ. Видъ шара въ этой проекціи аналогиченъ виду на черт.59. Положеніе плоскости касанія то же, что и въ проекціи *Постеля.*

Проекція Лорнья. Въ этой проекціи плоскость проводится касательной къ шару въ какой нибудь точкѣ экватора. Свойства ея площадей такія же, какъ и въ проекціи Ламберта. На черт.60 показана проекція шара. Къ другимъ разновидностямъ зенитальныхъ проекцій относится также *проекція Брейзинга и проекціи Эри.*



черт. 60

3. *Цилиндрическія проекціи.*)*

Для построенія цилиндрическихъ проекцій воображаютъ цилиндръ, касающійся шара по какому нибудь большому кругу или пересѣкающій его по двумъ равноотстоящимъ отъ центра малымъ кругомъ; на поверхность такого цилиндра переносятъ точки съ поверхности шара и, разрѣзавъ цилиндръ по одной изъ образующихъ, развертываютъ его на плоскости. Въ простѣйшихъ и чаще примѣняемыхъ цилиндрическихъ проекціяхъ - ось цилиндра совпадаетъ съ осью вращенія земли; на нихъ меридіаны получаются пересѣченіемъ плоскостей меридіановъ земли съ поверхностью цилиндра, и потому изображаются на проекціи равноотстоящими параллельными прямыми; параллели же проводятся въ видѣ прямыхъ, перпендикулярныхъ къ меридіанамъ, причемъ разстояніе каждой параллели отъ экватора вычисляется различно, въ зависимости отъ впередъ поставленнаго условія. Если ось цилиндра лежитъ въ плоскости экватора, т.е. составляетъ съ осью вращенія земли прямой уголъ, то проекція называется *поперечною цилиндрическою,* если же ось цилиндра составляетъ съ осью вращенія земли произвольный уголъ (не 0° и не 90°), то - *косою цилиндрическою проекціей.* Въ обоихъ послѣднихъ случаяхъ меридіаны и параллели изображаются на проекціи кривыми, которыя строются по точкамъ.*)

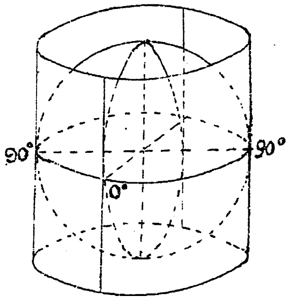
Разсмотримъ нѣсколько видовъ цилиндрическихъ проекцій.

---

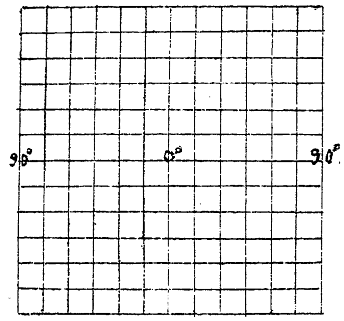
*) *По Витковскому "Картографическія проекціи", стр. 140.*

Квадратная или плоская проекція. Здѣсь цилиндръ касается шара по экватору. Меридіаны изображаются въ видѣ линій, перпендикулярныхъ къ разверткѣ экватора, а параллели изображаются въ видѣ прямыхъ, параллельныхъ экватору и находящихся отъ него въ разстояніяхъ, равныхъ выпрямленнымъ дугамъ меридіановъ между экваторомъ и соотвѣтственной параллелью (черт.61 и 62)

Прямоугольная проекція получается слѣдующимъ образомъ. Цилиндръ проводится не черезъ экваторъ, а черезъ двѣ равноотстоящихъ отъ экватора параллели. Части меридіановъ и экватора проектируются системою равныхъ прямоугольниковъ, большія стороны которыхъ равны выпрямленнымъ дугамъ меридіана, а малыя - выпрямленнымъ дугамъ параллелей сѣченія. Разстояніе проекціи параллелей отъ экватора получается такъ же, какъ и въ квадратной проекціи (черт.63 и 64).

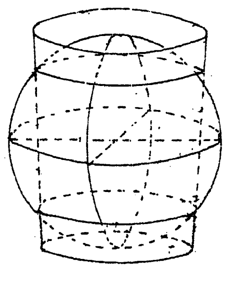


черт. 61

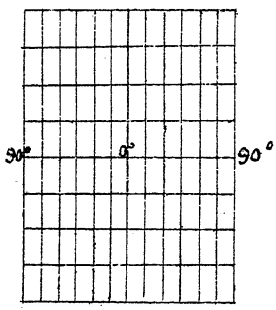


черт. 62

Изоцилиндрическая проекція получается проектированіемъ любой точки шара на цилиндръ, касательный шару по экватору. Направленіе проектированія принимается перпендикулярнымъ къ оси шара. При такихъ условіяхъ меридіаны и параллели спроектируются въ видѣ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ (чертежъ 65).

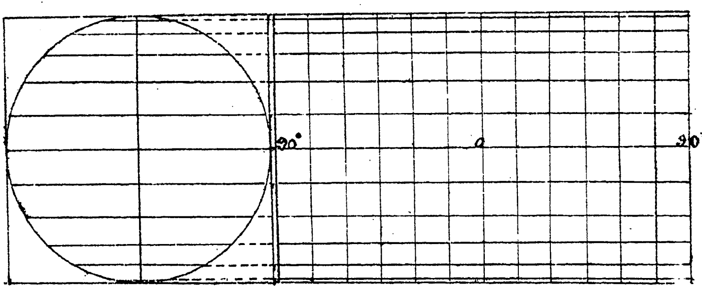


черт. 63



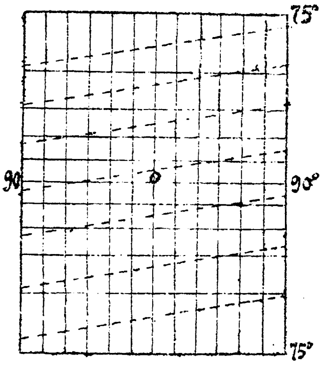
черт. 64

Проекція Меркатора. получается проектированіемъ шара на цилиндръ, касательный къ экватору, причемъ параллели переносятся съ такимъ разсчетомъ, чтобы сохранялось подобіе площадей проекціи съ площадью на земномъ шарѣ въ безконечно-малыхъ частяхъ. При этихъ условіяхъ меридіаны и параллели спроектируются въ виду взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ. Если на поверхности шара провести такую кривую, чтобы она пересѣкала всѣ меридіаны подъ одинаковыми углами (называемая локсодроміей), то такая кривая въ проекціи изображается прямою (черт.66).



черт. 65

Если судно будетъ плыть по локсодроміи, то на всемъ земномъ шарѣ оно будетъ имѣть одинъ и тотъ же курсъ, т.е. одинъ и тотъ же уголъ съ меридіаномъ. Карты, составленныя въ этой проекціи часто называются морскими. На черт.67 показана такая локсодтомія. Въ стереографической проекціи на плоскость экватора локсодромія изображается логарифмической спиралью.

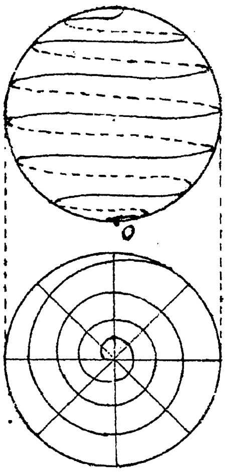


черт.66

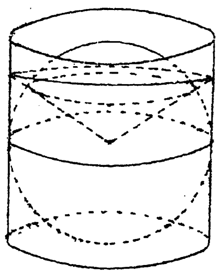
Проекція Уэтча заключается въ томъ, что точки поверхности шара проектируются изъ центра шара на цилиндръ, касательный шару по экватору. (Черт.68). По внѣшнему виду эта проекція сходна съ проекціей Меркатора (черт.66).

4. *Коническія проекціи.*

Въ этихъ проекціяхъ точкѣ земной поверхности переносятся по извѣстнымъ правиламъ на конусъ, касательный къ шару или его персѣкающій. Затѣмъ конусъ разрѣзаютъ по какой нибудь производящей и развертываютъ на плоскость. Обыкновенно ось конуса совпадаетъ съ осью вращенія земли. Въ этомъ случаѣ меридіаны изобразятся пучкомъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, а параллели - въ видѣ дугъ концентрическихъ кругвъ. При этомъ, если разность радіусовъ этихъ дугъ равна выпрямленнымъ дугамъ меридіановъ между послѣдовательными параллелями, то по равенству ихъ на шарѣ, коническія проекціи называются *равнопромежуточными.* Если въ проекціи сохраняются площади отдѣльныхъ проекцій на шарѣ, то коническія проекціи называюдся *равновеликими* и, наконецъ, если на проекціи сохраняется подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ съ площадями сферы, то коническія проекціи называются *равноугольными.*



черт.67



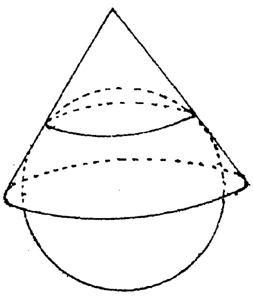
черт.68

Къ равнопромежуточнымъ проекціямъ относятся проекціи:

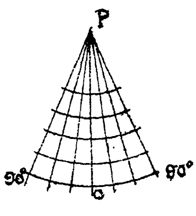
a) *Птоломея или простая коническая.* Она строится на конусѣ, касательномъ къ шару (черт.69 и 70).

b) *Проекція Делиля* строится на конусѣ, пересѣкающемъ шаръ по двумъ параллелямъ.

c) *Проекція Эйлера* отличается отъ проекціи Делиля лишь выборомъ параллелей для сѣченія ша-



черт.69

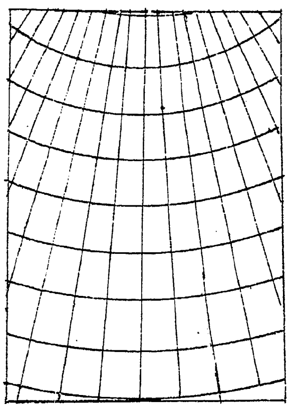


черт.70

ра съ конусомъ.

Въ равновеликихъ проекціяхъ различаютъ два типа: въ одномъ -площадь проекціи равняется поверхности соотвѣтственной части шаровой, но отдѣльныя трапеціи проекціи площадей не сохраняютъ, таковы *проекціи Мердока,* въ другомъ - каждая отдѣльная проекція на проекціи равновелика соотвѣтствующей трапеціи на шарѣ, таковы *проекціи Альберса.*

Равноугольныя проекціи примѣняются весьма часто для составленія географическихъ картъ и построеніе ихъ производится на основаніи разсчета, рѣшая задачу: изобразить одну поверхность на другой съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ. Въ зависимости отъ масштабовъ, въ которыхъ изображаютъ разныя части карты, различаютъ пять случаевъ равноугольной конической проекціи, на которыхъ мы останавливаться не будемъ.



черт, 71

На черт.71 показана часть сѣтки шара въ одной изъ такихъ проекцій.

Если ось конуса лежитъ въ плоскости экватора, то проекція называется *поперечной конической,* если же ось конуса занимаетъ случайное положеніе - то проекція называется *косой конической.*

Какъ развитіе коническихъ проекцій можно разсматривать:

Поликоническія проекціи. Сущность ихъ построеній заключается въ томъ, на прямой, изображающей средній меридіанъ страны, откладываютъ выпрямленныя дуги этого меридіана между послѣдовательными параллелями на земномъ шарѣ. Черезъ каждую послѣдовательную точку проводятъ дугу круга, радіусъ котораго равенъ длинѣ касательной, проведенной къ меридіану и соотвѣтствующей параллели отъ точки касанія до встрѣчи съ продолженной осью вращенія земли. Центры всѣхъ параллелей будутъ лежать на среднемъ меридіанѣ, и отдѣльныя параллели изображаются дугами эксцентрическихъ круговъ. Эти построенія соотвѣтствуютъ проектированію на рядъ конусовъ, касательныхъ къ шару съ вершинами на одной и той же оси шара. Меридіаны въ этихъ проекціяхъ будутъ изображаться въ видѣ кривыхъ. Въ зависимости отъ способа начертанія меридіановъ различаютъ поликоническія проекціи -*простую и прямоугольную.* Въ простой проекціи длины дугъ параллелей равны соотвѣтствующимъ длинамъ параллелей на шарѣ, меридіаны же пересѣкаютъ параллели подъ острыми и тупыми углами. Въ прямоугольной же проекціи меридіаны пересѣкаютъ параллели подъ прямыми углами. Но длины параллелей не равны длинамъ соотвѣтствующихъ параллелей на шарѣ.

5. *Условныя проекціи.*

Къ этимъ проекціямъ относятся тѣ, которыя не подходятъ къ разсмотрѣннымъ выше типамъ. Онѣ дѣлятся также на равноугольныя, равновеликія и произвольныя.

Къ равноугольнымъ проекціямъ относятся:

Проекціи Лагранжа, въ которыхъ меридіаны и параллели изображаются дугами круговъ или, въ частныхъ случаяхъ, прямыми. Построеніе ведется по точкамъ, опредѣляемымъ разсчетомъ. Частный случай ея - *циклоидальная проекція Августа.*

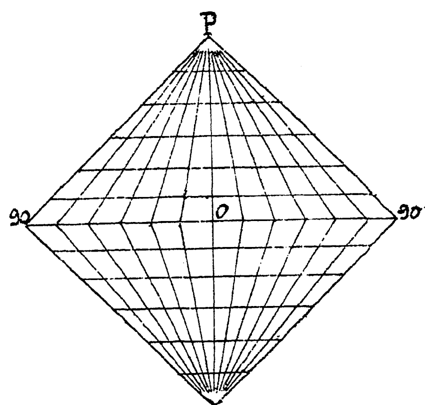
Къ равновеликимъ проекціямъ относятся:

а) *Проекція Вернера - Сильвануса,* въ которой параллели изображаются дугами концентрическихъ круговъ, радіусы которыхъ равны дугамъ меридіана отъ полюса до соотвѣтственныхъ параллелей на шарѣ. На каждой окружности отъ начальнаго меридіана P_1 откладываютъ длины дугъ параллелей и черезъ полученныя точки проводятъ кривыя, изображающія меридіаны.

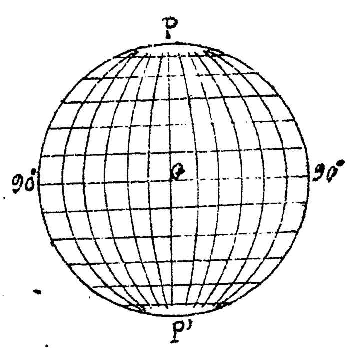
b) *Проекція Сансана.* На прямой, изображающей средній меридіанъ какой нибудь страны, откладываютъ части, равныя выпрямленнымъ дугамъ меридіановъ между послѣдовательными параллелями, и черезъ полученныя точки проводятъ прямыя, перпендикулярныя къ среднему меридіану. Эти прямыя являются изображеніемъ параллелей. На нихъ откладываютъ части, равновеликія частямъ ихъ на сферѣ между соотвѣтствующими меридіанами. Соединяя полученныя точки, получимъ изображеніе меридіановъ.

c) *Проекція Бонна.* Для построенія параллелей въ этой проекціи чертятъ систему дугъ концентрическихъ окружностей, принявъ за радіусы длины касательныхъ къ меридіану между точкой касанія на шарѣ и у соотвѣтственной параллели и точкой пересѣченія этой касательной съ осью шара. Затѣмъ на каждой параллели откладываютъ такія же части какъ и въ проекціи Вернера. Соединяя полученныя точки, получимъ проекціи меридіановъ.

d) *Проекція Коллиньона.* Въ этой проекціи всѣ меридіаны и параллели представляются прямыми, а полушаріе - квадратомъ. На черт. 72 показано въ этой проекціи одно полушаріе.



черт. 72



черт. 73

e) *Проекція Мольвейде.* Въ этой проекціи прямыми изображаются только параллели и средній меридіанъ (черт.73).

f) *Проекція Эккерта.* Одинъ изъ видовъ этихъ проекцій заключается въ слѣдующемъ. Поверхность шара переносится сначала на поверхность полутора,*) а затѣмъ уже эта поверхность переносится на плоскость, при условіи сохраненія равенства площадей.

g) *Проекція Гаммера* представляетъ изъ себя разновидность равновеликихъ проекцій и нѣчто среднее между изоцилиндрической проекціей и проекціей Сансана.

h) *Проекція Аитова* заключается въ слѣдующемъ. Берется любая картографическая сѣтка, составленная въ видѣ экваторіальной проекціи для полушарія съ меридіанами и параллелями, проведенными черезъ n° Далѣе, проводятъ изъ всѣхъ точекъ пересѣченія меридіановъ съ параллелями перпендикуляры на прямую, изображающую экваторъ. Перпендикуляры эти дѣлятся пополамъ и черезъ точки дѣленія проводятся кривыя, пропуская нечетныя параллели. Получается новая сѣтка съ параллелями $2n^{\circ}$

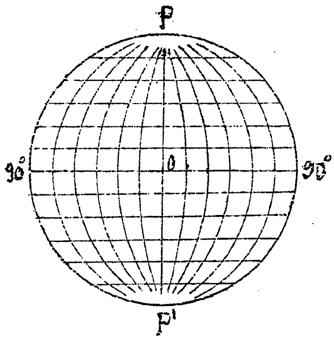
Къ произвольнымъ проекціямъ относятся:

---

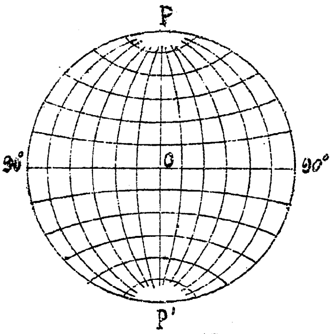
*) *Торомъ называется поверхность, образованная вращеніемъ круга около оси, лежащей въ его плоскости, но не проходящей черезъ центръ. Въ проекціи Эккерта окружность вращается около касательной.*

a) *Проекція Аппіана.* Строится она такимъ образомъ. Въ окружности проводятся два взаимно перпендикулярныхъ діаметра, изображающіе экваторъ и средній меридіанъ. Оба діаметра дѣлятся на равныя части. Меридіаны проводятся какъ дуги круговъ, черезъ полюса и точки дѣленія экватора, а параллели - черезъ точки дѣленія средняго меридіана, параллельно экватору (черт.74).

b) *Проекція Лориџа.* Меридіаны проводятся также, какъ и въ проекціи Аппіана. Параллели же, оставаясь параллельными экватору, проводятся въ разстояніяхъ также, какъ въ экваторіальной ортографической проекціи.



черт. 74.



черт. 75

c) *Шаровая проекція.* Меридіаны проводятся также, какъ и въ предыдущихъ двух проекціяхъ. Для построенія же параллелей дѣлятъ каждую полуокружность на такое же число равныхъ частей, какъ и діаметръ и параллели проводятъ въ видѣ дугъ круговъ черезъ соотвѣтственныя точки средняго меридіана и окружности (черт.75).

d) *Проекція Араго* строится слѣдующимъ образомъ. Дѣлятъ развертку средняго меридіана на равныя части и черезъ точки дѣленія проводятъ прямыя, параллельныя экватору, по длинѣ равныя разверткамъ ихъ. Далѣе эти параллели и экваторъ дѣлятъ на одинаковое число равныхъ частей и, соединяя соотвѣтственныя точки дѣленія плавными кривыми, получаютъ проекціи меридіановъ.

e) *Проекція Гринтена* изображаетъ меридіаны и экваторы дугами круговъ разныхъ радіусовъ.

f) *Проекція Менделѣева.* Меридіаны изображаются прямыми, пересѣкающимися въ полюсѣ, а параллели - дугами круговъ съ центромъ въ полюсѣ.

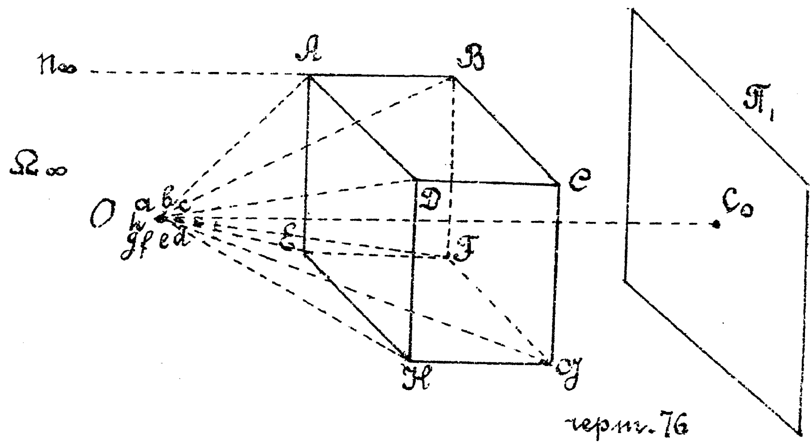
Заканчивая этотъ краткій перечень картографическихъ проекцій, составленный нами по "Картографіи" В.Витковскаго, мы отсылаемъ къ этому сочиненію желающихъ подробнѣе ознакомиться съ этимъ вопросомъ.

4. *Осевая поверхность находится въ безконечности.*

Пусть осевая плоскость Ω находится въ безконечности (черт.76). Зададимся центромъ O и предѣльной плоскостью π_1. (Черт.42). Для построенія изображенія какой нибудь точки A предмета проводимъ лучъ OA. Далѣе, изъ точки O опустимъ перпендикуляръ на предѣльную плоскость π_1 до пересѣченія съ нею въ точкѣ C_0. Изъ точки A проведемъ линію An_∞, перпендикулярную къ осевой плоскости Ω, а слѣдовательно, и къ предѣльной плоскости π_1, до пересѣченія съ Ω въ безконечно удаленной точкѣ n_∞. Соединяемъ точки n_∞ съ C_0 Очевидно, что линія $C_0 n_\infty$, совпадая съ линіей $C_0 O$, пересѣчетъ лучъ OA въ точкѣ a, совпадающей съ центромъ O. Такимъ образомъ, изображеніе точки A получается въ центрѣ O. Подобнымъ же образомъ получимъ, что *изображеніе* всѣхъ точекъ фигуры ABCDEFGH *получится въ видѣ одной точки, совпадающей съ центромъ O.* Очевидно, что это положеніе остается въ силѣ для всѣхъ случаевъ вида осевой поверхности: плоскаго цилиндрическаго и шарового. Этотъ случай является частнымъ болѣе общаго - слѣдующаго.

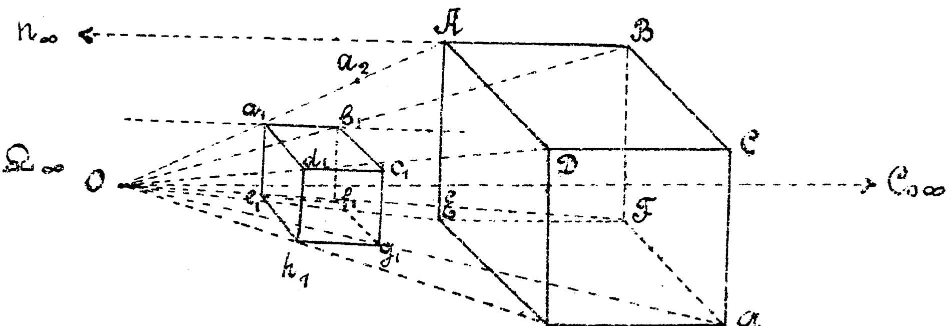
5. *Осевая и предильная поверхности находятся въ безконечности.*

Этотъ случай отличается отъ предидущаго тѣмъ, что точка C_0 будетъ находиться въ безконечности (черт.77). Въ этомъ случаѣ формѣ ABCDEFGH соотвѣтствуетъ (черт.43) безчисленное множество подобныхъ



черт. 76

ей изображеній, при чемъ соотвѣтственныя точки лежатъ на однихъ и тѣхъ же лучахъ, соотвѣтственныя линіи параллельны, а отношенія разстояній соотвѣтственныхъ элементовъ до центра постоянно для даннаго изображенія и основной формы.

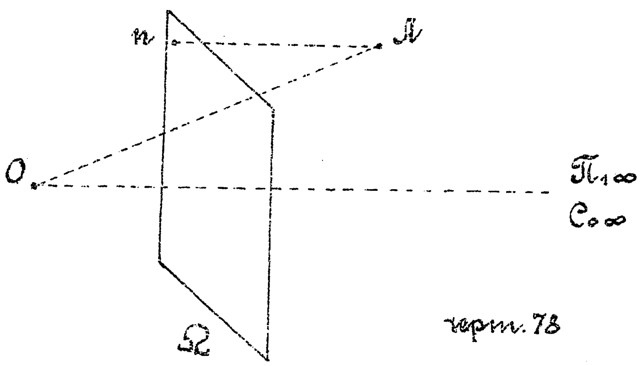


черт.77

Пусть, напримѣръ, точка a_1, лежащая на лучѣ OA будетъ изображеніемъ точки A. Что точка a_1 можетъ быть изображеніемъ точки A, это нетрудно доказать. Дѣйствительно, проводимъ изъ точки A линію An_∞, перпендикулярную къ осевой плоскости Ω_∞, до пересѣченія съ послѣдней въ точкѣ n_∞. Изъ центра O проводимъ линію $OC_{0\infty}$, перпендикулярную къ предѣльной плоскости $\pi_{1\infty}$ до пересѣченія съ послѣдней въ точкѣ $C_{0\infty}$. Если теперь черезъ точку a_1 провести линію a_1b_1, параллельную линіямъ An_∞ и $OC_{0\infty}$, то она пересѣчетъ ихъ въ безконечно удаленныхъ точкахъ n_∞ и $C_{0\infty}$, т.е. точка a_1 удовлетворяетъ правиламъ коллинеацiи. Линіи AB, DC, HG и EF - какъ параллельныя линіямъ An_∞ и $OC_{0\infty}$, изобразятся линіями a_1b_1, d_1c_1 и т.д. также имъ параллельными, и вообще все изображеніе $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1h_1$ будетъ подобно и подобно расположено относительно данной фигуры. Такъ какъ точкой a_1 мы задались произвольно, то, очевидно, мы могли бы построить новое изображеніе для любой точки a_2, лежащей на лучѣ OA. Такимъ образомъ, данной формѣ отвѣчаетъ безчисленное множество изображеній и нетрудно также убѣдиться, что данному изображенію можетъ соотвѣтствовать безчисленное множество подобныхъ ему формъ и въ частномъ случаѣ тождественная форма. Очевидно, этотъ случай заключаетъ въ себѣ случай 4-й, так как въ послѣднемъ вторая предѣльная плоскость также расположена въ безконечности.

6. *Предѣльная поверхность находится въ безконечности.*

Въ этомъ случаѣ для всѣхъ трехъ случаевъ рельефа (плоскостного, цилиндрическаго и шарового) изображеніе совпадаетъ съ самой формой (черт.78). Дѣйствительно, проведемъ (черт.78) черезъ данную точку A формы лучъ OA, далѣе проведемъ параллельныя другъ другу линіи An и $OC_{o\infty}$, перпендикулярныя къ осевой и предѣльной поверхностямъ. Соединяя точку n съ точкой $C_{o\infty}$, получимъ линію $nC_{o\infty}$, совпадающую съ линіей An. Очевидно, точка пересѣченія линій OA съ $nC_{o\infty}$ совпадаетъ съ точкою A. То же самое получимъ и для любой точки фигуры.



черт.78

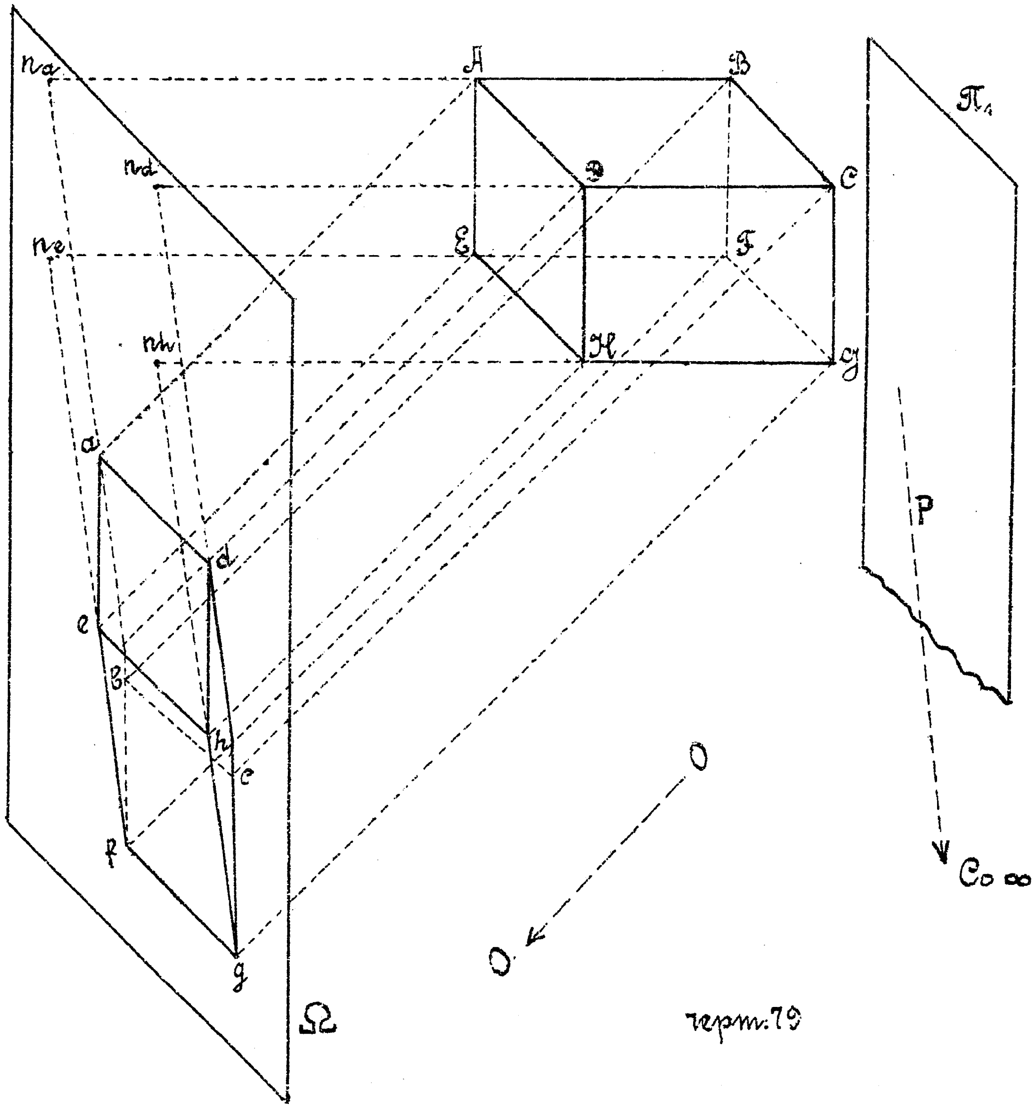
7. *Центръ находится въ безконечности.*

Зададимся положеніемъ центральной (Ω) и предѣльной (π_1) плоскостей (черт.79). Такъ какъ центръ лежитъ въ безконечности, то всѣ лучи будутъ параллельны другъ другу. Поэтому задаемся ихъ направленіемъ OO. Проведя черезъ эту линію плоскость, перпендикулярную къ π_1, получимъ направленіе $PC_{o\infty}$, въ которомъ будетъ лежать точка $C_{o\infty}$. Основаніе перпендикуляра, спущеннаго изъ безконечно удаленнаго центра на предѣльную плоскость. Для того, чтобы получить изображеніе какой нибудь точки A, проводимъ черезъ A перпендикуляръ къ Ω до пересѣченія съ послѣдней въ точкѣ n_a. Соединяемъ n_a съ $C_{o\infty}$. Линія $n_aC_{o\infty}$ очевидно будетъ параллельна $pC_{o\infty}$ и будетъ лежать въ плоскости Ω. Пересѣченіе линій $n_aC_{o\infty}$ съ лучемъ, проведеннымъ черезъ точку A, параллельно направленію OO и дастъ точку a - изображеніе точки A.

Подобнымъ же образомъ построимъ изображенія и остальныхъ точекъ фигуры. Очевидно, что всѣ точки изображенія будутъ лежать въ осевой плоскости Ω и изображеніе будетъ *плоскимъ*, причемъ параллельнымъ прямымъ данной формы будутъ соотвѣтствовать параллельныя между собою прямыя изображенія. Соотвѣтствіе при безконечно удаленномъ центрѣ называется *аффинитетнымъ*. Очевидно, что при данномъ направленіи проектированія данной формѣ соотвѣтствуетъ опредѣленное изображеніе. Данному же изображенію можетъ соотвѣтствовать безчисленное множество формъ въ пространствѣ.

Если предположить, что предметъ освѣщенъ лучами свѣта, параллельными направленію OO, то, очевидно, фигура adegfe - будетъ являться *контуромъ тѣни*, отбрасываемой данной фигурой на картинную плоскость. Такимъ образомъ, при параллельныхъ лучахъ свѣта тѣнь отъ фигуры на картинную поверхность и сама фигура находятся въ аффинитетномъ соотвѣтствіи.

Такъ какъ, при расположеніи центра въ безконечности, а осевой и предѣльной плоскостей въ конечномъ разстояніи отъ даннаго предмета, по данному изображенію нельзя опредѣлить самой фигуры, то, подобно



черт.79

тому, какъ и въ перспективѣ, примѣняютъ рядъ дополнительныхъ условій для опредѣленности заданія формы по ея изображенію. Эти условія положены въ основу двухъ главнѣйшихъ методовъ: *аксонометріи и проекціи съ числовыми отмѣтками.*

Разсмотримъ ихъ послѣдовательно.

*АКСОНОМЕТРІЯ.**)

Въ этомъ случаѣ для опредѣленности заданія формы по ея изображенію поступаютъ слѣдующимъ образомъ.

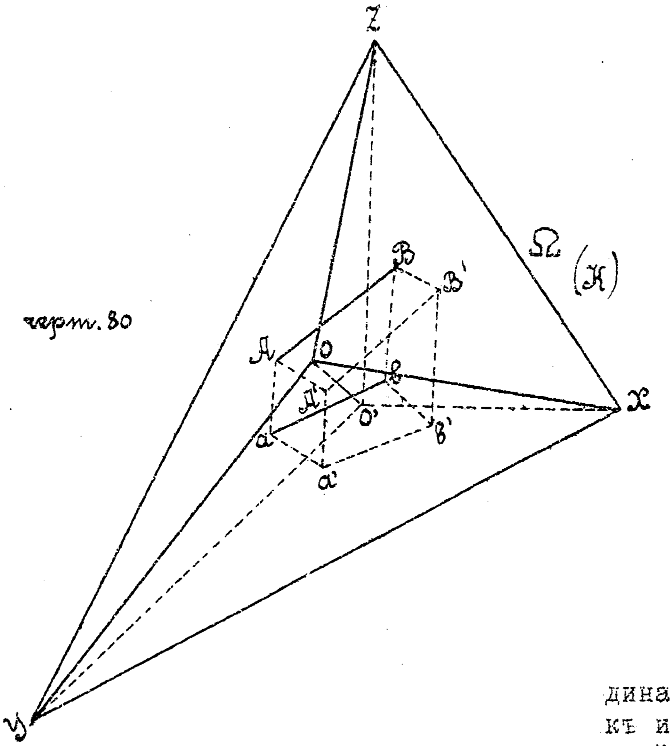
Данную форму, напримѣръ, A'B' (черт.80) относятъ къ произвольно выбранной системѣ взаимно перпендикулярныхъ координатныхъ плоскостей o'xy, o'xz, o'yz.

---

*) *Рекомендуемое пособіе по курсу Аксонометрическихъ проекцій: В.Курдюмовъ "Аксонометрическія проекціи" СПБ. 1905 г.*

Пусть прямоугольная проекція формы A'B' на плоскость o'xy будетъ a'b'. Задаемся случайной картинной плоскостью Ω (K) и направленіемъ проектированія o o и спроектируемъ на плоскость форму A'B', ея проекцію a'b' и оси координатъ. Тогда на картинѣ получится изображеніе, отдѣльно показанное на черт.81. Линіи xy, yz и zx являются линіями сѣченія картинной плоскости съ плоскостями координатъ. Изображеніе полученное на черт.81 уже вполнѣ опредѣляетъ форму и ея положеніе относительно координатныхъ плоскостей, при условіи, что направленіе проектированія o'o извѣстно.

черт. 80

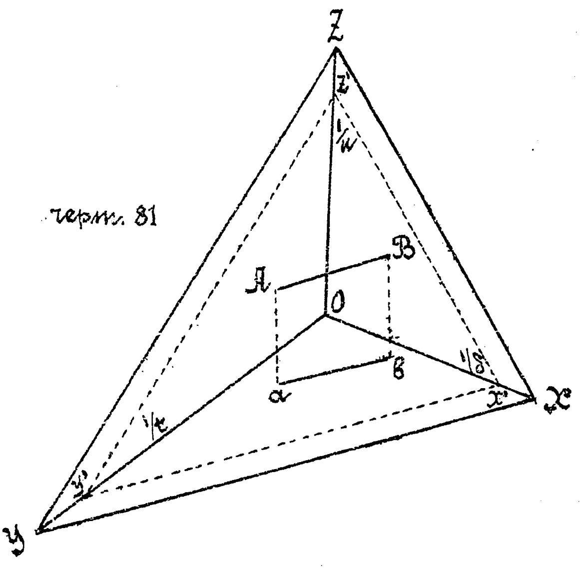


Направленіе проектированія обыкновенно задается показателями искаженія координатъ; такъ называется отношеніе проекцій осей координатъ на картинную плоскость къ истиннымъ длинамъ этихъ осей, т.е. отношенія

$$\frac{XO}{XO'} = \frac{1}{s}\ ; \quad \frac{YO}{YO'} = \frac{1}{t}\ ; \quad \frac{ZO}{ZO'} = \frac{1}{u}\ .$$

Отношенія эти надписываются на соотвѣтственныхъ осяхъ и между ними существуетъ извѣстная зависимость.

черт. 81

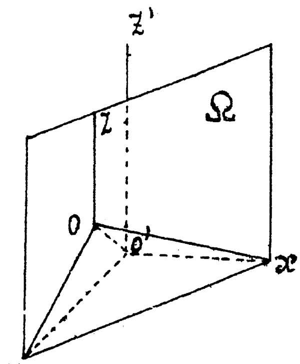


Для того, чтобы получить саму форму A'B' достаточно произвести слѣдующія построенія въ пространствѣ.

Черезъ точку O проводимъ линію, параллельную направленію проектированія, и находимъ, по даннымъ показателямъ искаженія, начало координатъ O' (черт.80), а слѣдовательно и положеніе плоскостей O'XY, O'XZ и O'ZY, соединяя точку O' съ точками X, Y и Z. Проводимъ черезъ точки a и b линіи, параллельныя OO' до пересѣченія съ плоскостью O'XY въ точкахъ a', и b'. Въ этихъ точкахъ возстанавляемъ перпендикуляры къ плоскости OXY, а изъ точекъ A и B проводимъ линіи, параллельныя OO' до пересѣченія съ соотвѣтствующими перпендикулярами въ точкахъ A' и B', которыя и опредѣлятъ искомую форму A'B'.

Если намъ важно знать лишь саму форму A'B' и не нужно опредѣлять точное ея разстояніе отъ координатныхъ плоскостей, то линіи XY, YZ и ZX въ изображеніи могутъ быть и не заданы, такъ какъ, по даннымъ показателямъ искаженія, легко построить любыя линіи X'Y',Y'Z', Z'X', параллельныя вышеупомянутымъ, задавшись произвольною точкою X'. Такое новое положеніе осей отвѣчаетъ большему или меньшему удаленію формы A'B' отъ начала O' координатъ. Фигура AB называется *аксонометрическою проекціей* A'B', фигура ab - называется *вторичною горизонтальною проекціей* фигуры A'B'. Плоскость XYZ называется плоскостью аксонометрическихъ проекцій. Такъ какъ въ аксонометрическихъ проекціяхъ основную роль играютъ показатели искаженія, т.е. числа, показывающія какъ слѣдуетъ *измѣрять* различныя линіи, параллельныя *осямъ* координатъ, то этимъ проекціямъ и дано названіе "аксонометрическихъ" (осе - мѣрныхъ). Если направленіе OO' проектированія перпендикулярно къ картинѣ, то проекціи называются *аксонометрическими прямоугольными* (или ортогональными). Если всѣ три показателя искаженія равны другъ другу, то проекціи называются *изометрическими*, если только два показателя равны другъ другу, то проекціи называются *диметрическими*, и, наконецъ, если всѣ показатели искаженія разныя, то проекціи называются *триметрическими*.

Плоскость Ω аксонометрическихъ проекцій (картина) также можетъ занимать различныя положенія относительно осей координатъ, давая начало разнымъ видамъ аксонометрическихъ проекцій. Она можетъ быть параллельна одной координатной оси (черт.82).



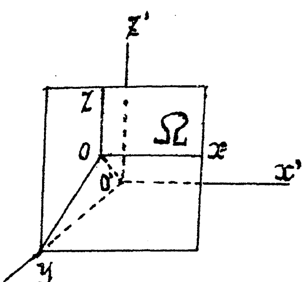
черт.82

Если плоскость Ω параллельна какой нибудь координатной плоскости, то проекція фигуры на такую плоскость называется *кавальерной перспективой* (черт.83) или *перспективною аксонометріей*.

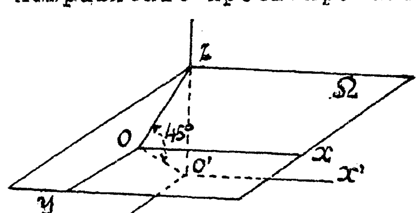
Въ частномъ случаѣ, когда плоскость Ω параллельна горизонтальной плоскости, а направленіе проектированія составляетъ съ нею уголъ 45°, проекція называется *военной перспективою* (черт.84), такъ какъ она примѣняется для изображенія военныхъ укрѣпленій.

Проекціи съ числовыми отмѣтками.)*

Второй способъ опредѣленія формы по заданному ея плоскому изображенію и при безконечно удаленномъ центрѣ заключается въ слѣдующемъ. Предположимъ, что направленіе проектированія перпендикулярно къ осевой (картинной) плоскости. Положеніе каждой точки пространства относительно плоскости проекцій будетъ вполнѣ опредѣлено, если будетъ дана проекція этой



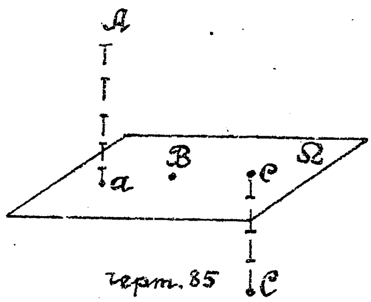
черт.83



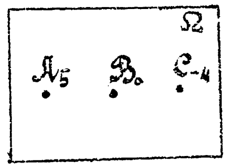
черт.84

*) *Рекомендуемое пособіе по курсу этихъ проекцій В.Курдюмовъ "Проекціи съ числовыми отмѣтками", СПБ. 1894 г.*

точки на картинную плоскость (черт.85 и 86) и около этой проекціи будетъ надписана отмѣтка точки, т.е. разстояніе точки отъ картинной плоскости, причемъ разстоянія по одну сторону плоскости считаютъ положительными, и отмѣтки этихъ точекъ имѣютъ знакъ (+), а по другую сторону - отрицательными и отмѣтки ихъ имѣютъ знакъ (-).



черт.85

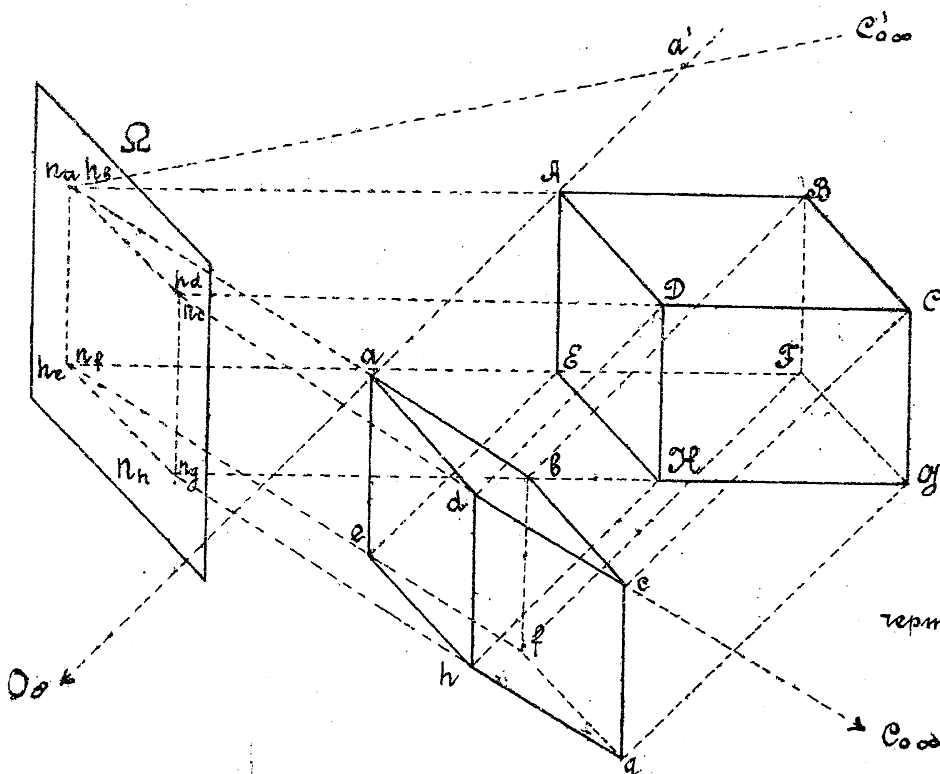


черт.86

На чертежахъ 85 и 86 показаны въ проекціяхъ съ числовыми отмѣтками изображенія трехъ точекъ, изъ которыхъ одна, A, отстоитъ въ разстояніи пяти единицъ длины отъ плоскости проекціи и находится надъ послѣдней, вторая точка, B, лежитъ на плоскости проекцій, и третья точка, C, лежитъ подъ плоскостью проекцій въ разстояніи четырехъ единицъ длины. Проекціи съ числовыми отмѣтками примѣняются въ инженерномъ дѣлѣ главнымъ образомъ для составленія плановъ и для геологическихъ разрѣзовъ мѣстности и для рѣшенія, на основаніи такихъ чертежей, различныхъ задачъ.

8. *Центръ и предѣльная плоскость находятся въ безконечности.*

Пусть дано: осевая плоскость Ω (черт.87), направленіе проектированія, фигура ABCDEFGH и одна изъ точекъ (a) искомаго изображенія. Построимъ остальныя точки изображенія. Продолжаемъ линію AB до пере-



черт. 87

сѣченія съ Ω въ точкѣ $n_a n_b$. Соединяя точки a и $n_a n_b$, получимъ направленіе, въ которомъ должна лежать на безконечно удаленной предѣльной плоскости точка $C_{o\infty}$ схода линій изображенія соотвѣтствующихъ линіямъ AB данной формы. Продолжаемъ линіи DC, GH и EF до пересѣченія съ плоскостью Ω въ точкахъ n_d, n_b, n_e и проводимъ черезъ полученныя точки линіи въ точку $C_{o\infty}$, т.е. линіи, параллельныя $n_a a$. Далѣе, проводимъ черезъ различныя точки формы ABCD... лучи, параллельные лучу Aa до пересѣченія съ соотвѣтствующими ранѣе проведенными линіями въ точкахъ b, c, d, e, ... Соединяя между собой полученныя точки получимъ рельефное изображеніе формы, причемъ нетрудно замѣтить, что если въ данной формѣ имѣется рядъ параллельныхъ линій, то и въ изображеніи ея соотвѣтствующія линіи будутъ параллельны между собою. Какъ видно изъ чертежа 87 линія и грани данной формы параллельныя осевой плоскости, получаются въ изображеніи безъ искаженія. Размѣры же формы перпендикулярные къ Ω измѣняются, уменьшаясь въ направленіи $C_{o\infty}$ и увеличиваясь въ направленіи $C'_{o\infty}$. Этимъ свойствомъ изображеній при одинаковомъ планѣ съ формой измѣнять свою высоту пользуются при составленіи рельефа поверхности земли при помощи рельефныхъ картъ, планъ и высота рельефа которыхъ используются въ разныхъ масштабахъ (масштабъ высотъ значительно крупнѣе масштаба плана). Очевидно, что въ данномъ случаѣ изображеніе не опредѣляетъ формы.

9. *Центръ и осевая поверхность находятся въ безконечности.*

Разсматривая чертежъ 87 мы видимъ, что чѣмъ дальше влѣво отодвинется плоскость Ω, тѣмъ ближе къ параллельности будутъ линіи ab и AB. Когда же Ω удалится на безконечно большое разстояніе, то линіи ab, de и т.д. будутъ параллельны AB, DE и т.д., т.е. изображеніе будетъ равно формѣ, иными словами получается *равенство* геометрическихъ тѣлъ.

10. *Предѣльныя поверхности совпадаютъ другъ съ другомъ (инволюція).*

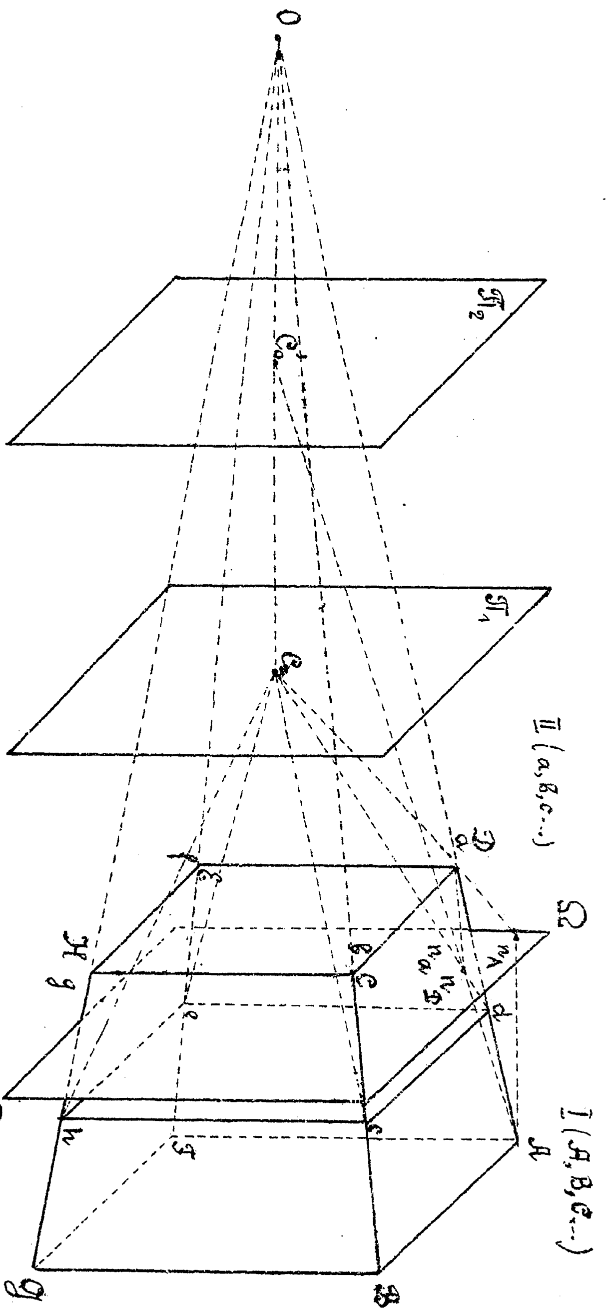
На черт.17 нами былъ разсмотрѣнъ случай, когда предѣльныя поверхности располагаются между центромъ и осевой поверхностью. При этомъ форма abcdefgh изображаетъ форму ABCDEFGH, какъ бы вывернутую на изнанку.

Разсмотримъ подробнѣе этотъ случай (черт.88).

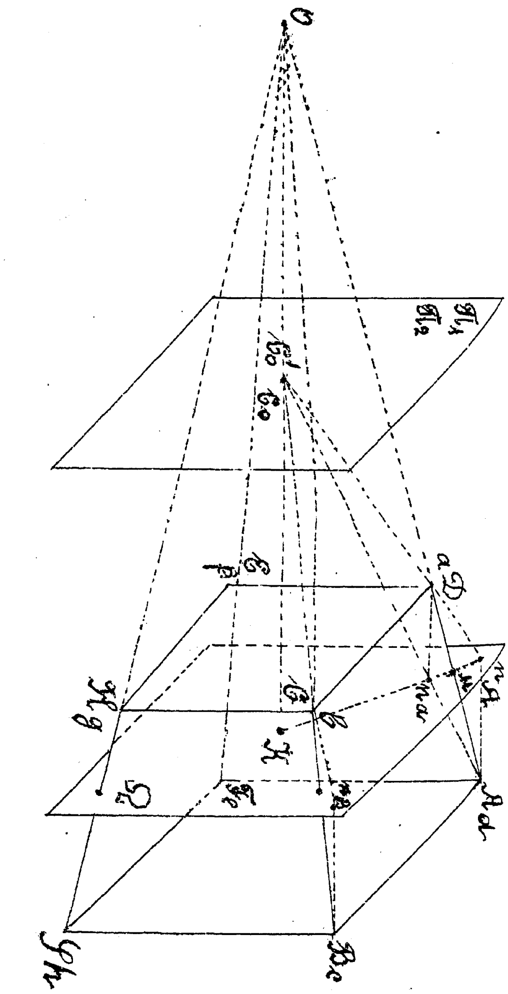
Пусть дана основная форма ABGF и даны: центръ O, осевая плоскость Ω, и предѣльныя плоскости π_1 и π_2, расположенныя между O и Ω, причемъ, согласно ранѣе выведенной теоремѣ, средина разстоянія между центромъ и осевою плоскостью должна совпадать съ серединой разстоянія между предѣльными плоскостями. По правиламъ, изложеннымъ ранѣе, (черт.16 и 17), построимъ форму abgh - изображеніе данной формы. Очевидно, если, обратно, построить для формы abgh, какъ основной, ея изображеніе, то получимъ форму ABGF. Дѣйствительно, чтобы получить, напримѣръ, точку A, изображеніе точки a, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: изъ a опускаемъ перпендикуляръ на Ω, пусть его основаніе будетъ n_a. Изъ центра O опускаемъ перпендикуляръ OC_o' на предѣльную плоскость π_2 формы abgf, соединяемъ точки C_o' и n_a и находимъ искомую точку A - пересѣченіе луча Oa и линіи $C_o n_a$.

Назовемъ систему точекъ ABGF - первой системой (I), а систему точекъ abgf - второй системой (II). Зададимся въ системѣ I еще рядомъ точекъ D, C, H, E и выберемъ ихъ такъ, чтобы онѣ совпадали съ точками abgf - II системы. Построимъ изображенія этихъ новыхъ точекъ. Для нихъ предѣльной плоскостью будетъ π_1. Чтобы построить, напримѣръ, точку d - изображеніе точки D, необходимо произвести слѣдующія построенія: опускаемъ изъ точки D перпендикуляръ на плоскости Ω и находимъ основаніе его n_D на этой плоскости. Соединяемъ n_D съ C_0 и находимъ пересѣченіе луча OD съ линіей $C_0 n_D$ въ точкѣ d - которая и будетъ искомой. Подобнымъ же образомъ можно построить и точки c, h, e - изображенія точекъ C, H, E.

Очевидно, что чѣмъ ближе будутъ другъ къ другу плоскости π_1 и π_2, тѣмъ болѣе будутъ приближаться точки d къ A, C къ B и т.д. и, наконецъ, когда π_1 совпадетъ съ π_2, т.е. предѣльныя плоскости будутъ находиться, какъ разъ между центромъ O и осевой плоскостью Ω, то изображеніе abcdefgh сольется съ формой ABCDefgh, занимая обратное относительно ея положенія. Въ этомъ случаѣ, какъ говорятъ, элементы соотвѣтствуютъ другъ другу вдвойнѣ (черт.39). Описанный случай совпаденія пре-



черт. 38

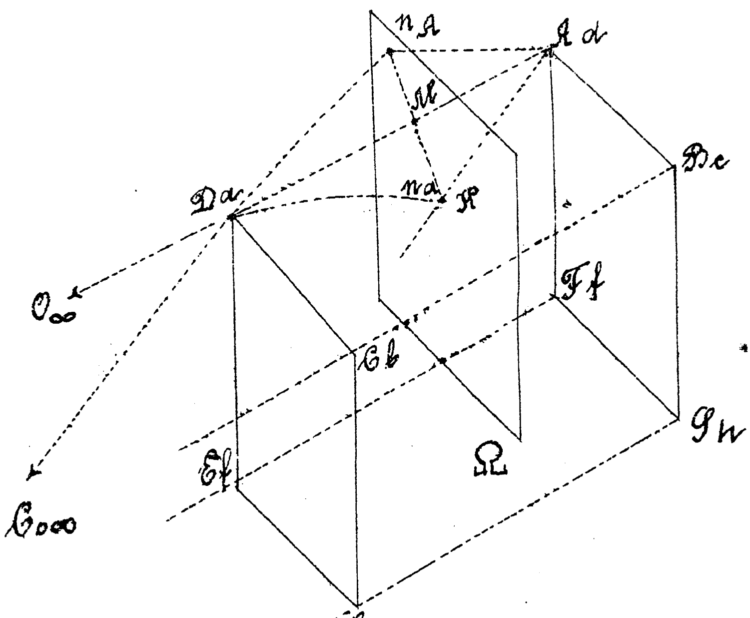


черт. 39

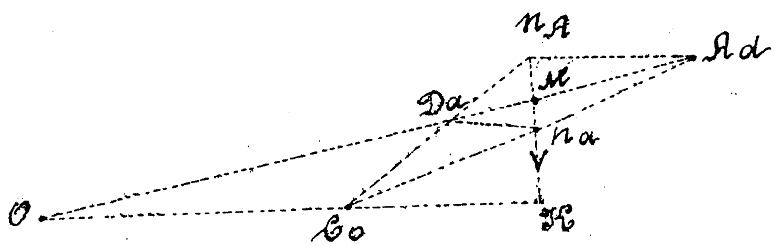
дѣльныхъ плоскостей носитъ названіе *инволюціи*.

Разсмотримъ частные случаи инволюціи.

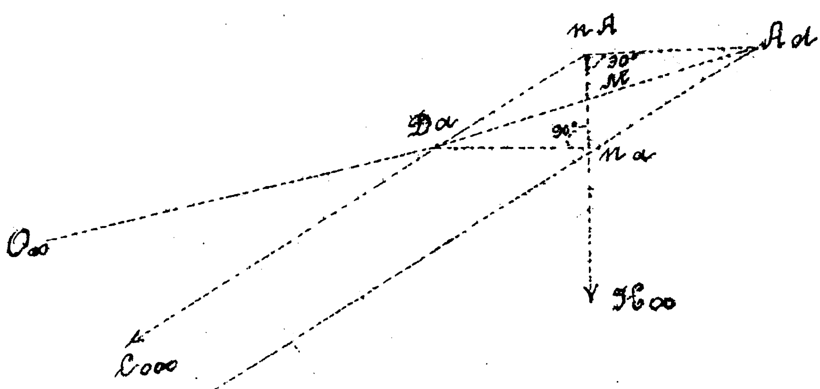
а) *Центръ лежитъ въ безконечности.*



черт. 90

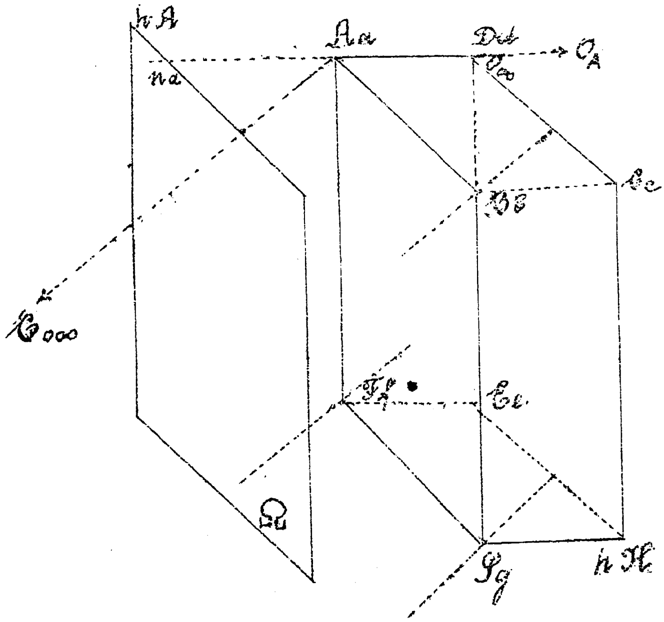


черт. 91



черт. 92

Въ этомъ случаѣ, очевидно, и предѣльныя плоскости лежатъ въ безконечности, но при этомъ совпадаютъ. Получается аналогія съ черт.87. Но при этомъ разстоянія точекъ A и a, B и b и т.д. должны быть одинаковыми отъ Ω. Дѣйствительно, выдѣлимъ изъ черт.89 плоскую фигуру $OC_oDn_AAdn_aK$ и совмѣстимъ ее съ плоскостью чертежа (черт.91). Когда точка $C_{o\infty}$ удалится въ безконечность, то трапеція $D_an_AAdn_a$ обратится въ параллелограммъ $D_an_AAdn_a$ (черт.92) и разстоянія D_an_a и n_AAd будучи равны другъ другу, или, переходя къ пространственному изображенію, получимъ, что разстоянія точекъ D, C, H, E отъ осевой плоскости будутъ равны соотвѣтственнымъ разстояніямъ отъ той же плоскости точекъ ABGF (чертежъ 90). Форма abcdefgh, полученная на черт. 90 будетъ *симметрична* относительно плоскости Ω съ формою ABCDEFGH. Такого рода симметрія называется *двухстороннею*. Если направленіе проектированія наклонно къ осевой плоскости (черт. 90), то симметрія называется *косой*. Если же направленіе проектированія перпендикулярно къ Ω, то симметрія называется *ортогональной*. На черт.90 былъ показанъ случай когда точки a b g f и A B G F расположились по разнымъ сторонамъ осевой плоскости. Но можно взять ихъ и по одной сторонѣ этой плоскости. Тогда, въ силу условія, что разстоянія основной точки (напримѣръ A) и изображающей (a) отъ Ω должны быть одинаковы, получимъ, что изображающая форма сольется съ изображаемой, т.е. получится *тождество* двухъ фигуръ (черт.93).

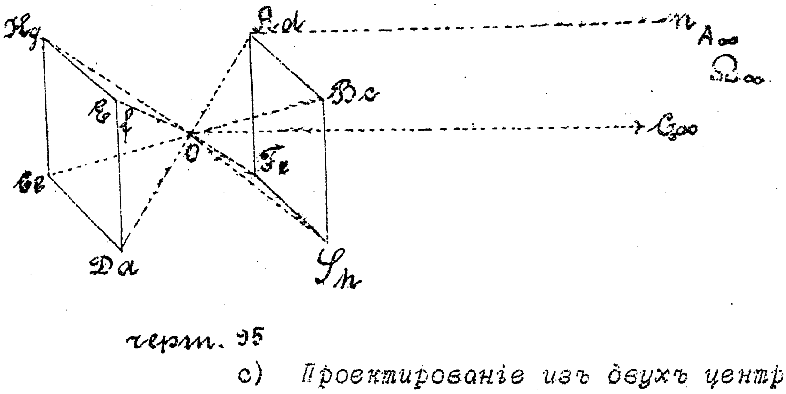


черт. 93

b) *Осевая плоскость лежитъ въ безконечности.*

Предположимъ, что (черт. 94) осевая плоскость удаляется вправо отъ формы ABGF и пусть одно изъ ея положеній указано на чертежѣ. Предѣльныя плоскости находиться посрединѣ разстоянія между центромъ O и Ω и изображеніе abgf построится также, какъ на черт.89.

По мѣрѣ удаленія плоскости Ω вправо фигура abgf приближается къ центру O и нетрудно видѣть, что когда Ω удалится въ безконечность фигура abgf расположится на такомъ же разстояніи отъ O, какъ и ABGF. Этотъ случай даетъ такъ называемую *центральную* симметрію формъ (черт.95).



Если одновременно съ осевой плоскостью и центр будетъ находиться въ безконечности, то получимъ случай, разсмотрѣнный ранѣе (черт.90 и 92), т.е. *тождество фигуръ*.

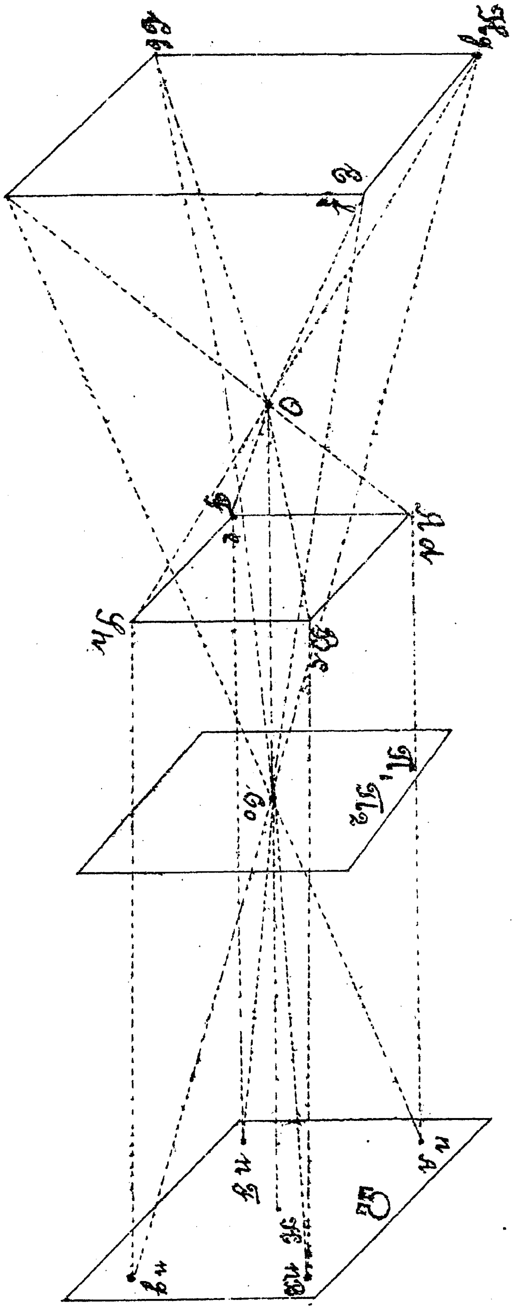
черт. 95

c) *Проектированіе изъ двухъ центровъ.*

Въ разобранныхъ ранѣе случаяхъ мы видѣли, что одно изображеніе часто не опредѣляетъ данной формы и для опредѣленности заданія приходится примѣнять различныя добавочныя условія. Среди такихъ условій между прочимъ примѣняютъ слѣдующія:

1) *Проектированіе на одну плоскость.*

Такъ какъ одна проекція данной формы на одну плоскость не опредѣляетъ формы, то вмѣсто одного центра проектированія берутъ два. Обозначимъ эти центры буквами O_1 и O_2 (черт.96 и 97). Продолжимъ линію центровъ до пересѣченія съ плоскостью проекціи Ω въ точкѣ S. Далѣе, вокругъ основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центровъ на плоскость Ω, опишемъ круги радіусами соотвѣтственно равныхъ разстояніямъ центровъ до Ω, т.е. d_1 и d_2. Опредѣлимъ теперь въ такой систе-



черт. 94

мѣ точку, линію и плоскость.

Для опредѣленія положенія какой нибудь точки Р проводимъ лучи O_1P и O_2P и продолжаемъ ихъ до пересѣченія съ плоскостью $P_1\Omega$ въ точкахъ P_1 и P_2. Очевидно, что точки S_1, P_1 и P_2 будутъ лежать на одной прямой. Черт. 97 вполнѣ опредѣляетъ положеніе точки Р въ пространствѣ. Если предположить, что въ точкѣ O_2 находится источникъ свѣта, то проекція P_2 будетъ тѣнью точки Р на плоскость Ω. Поэтому описанный способъ проектированія изъ двухъ центровъ называютъ или *бицентральной перспективой*, или *методомъ изображеній и тѣней*.

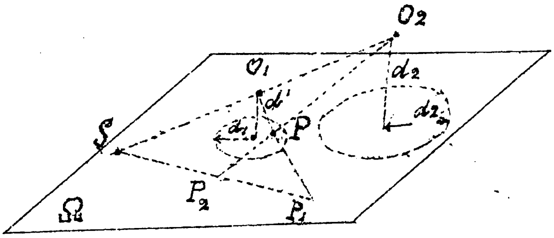
Для заданія какой нибудь прямой линіи PQ проводятъ черезъ нее и центры двѣ плоскости. Слѣды этихъ плоскостей на Ω и опредѣляютъ данную прямую. Очевидно, что оба слѣда этихъ плоскостей должны пересѣчься въ точкѣ, являющейся слѣдомъ данной линіи (черт. 98 и 99).

Для заданія плоскости достаточно задаться какими нибудь тремя точками P, Q, R этой плоскости, не лежащими на одной прямой (черт. 100 и 101).

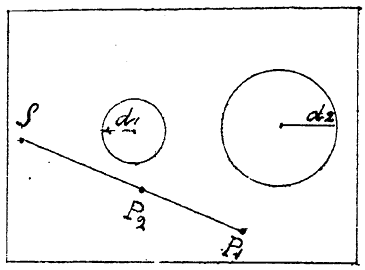
Если линія центровъ будетъ параллельна плоскости проекцій, то послѣднія называются *стереоскопическими*, такъ какъ онѣ находятъ большее примѣненіе при построеній стереоскопическихъ изображеній *) и въ стереофотограммометріи. Удаляя центры O_1 и O_2 въ безконечно большое разстояніе отъ плоскости Ω перейдемъ отъ центральнаго проектированія къ параллельному, для опредѣленности заданія формы при помощи котораго необходимо задать его направленіе. На черт. 102 и 103 показано заданіе точки, на черт. 104 и 105 заданіе прямой, и на черт. 106 - заданіе плоскости при двойномъ параллельномъ проектированіи.

---

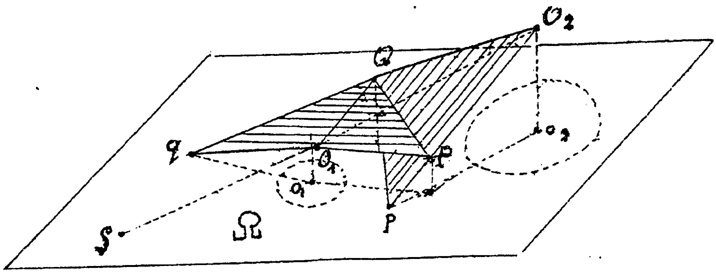
*) *Подробности см. соч. Н. Рынина "Значеніе Начертат. Геометріи".*



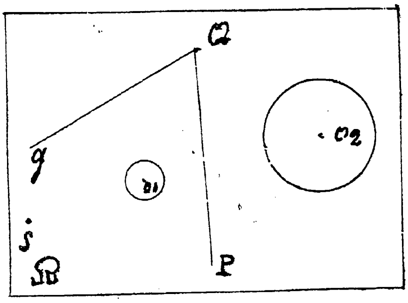
черт. 96



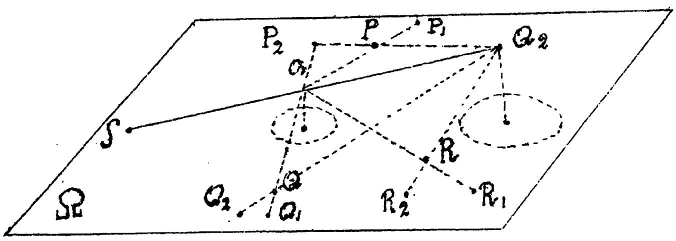
черт. 97



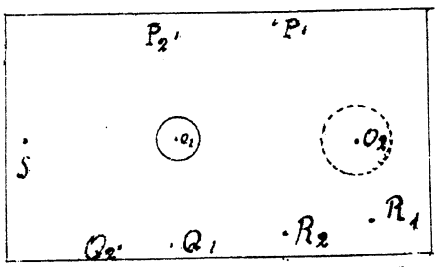
черт. 98



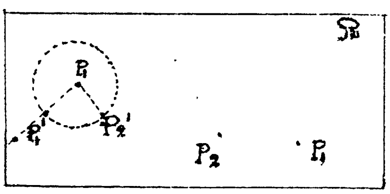
черт. 99



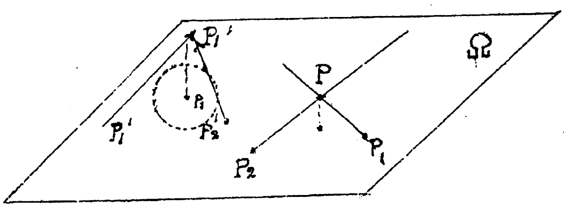
черт. 100



черт. 101



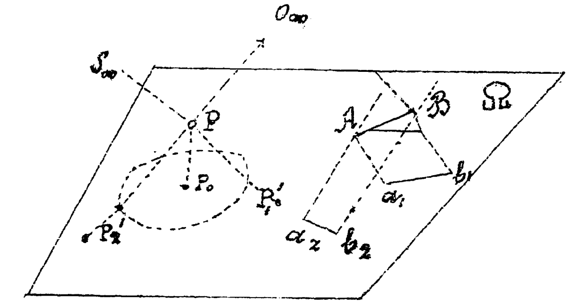
черт. 103



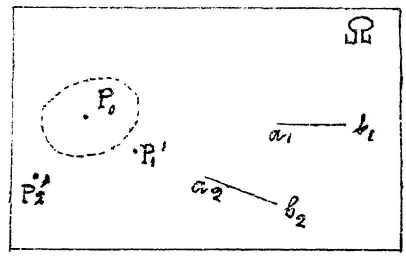
черт. 102

2) *Проектированіе на двѣ плоскости.*

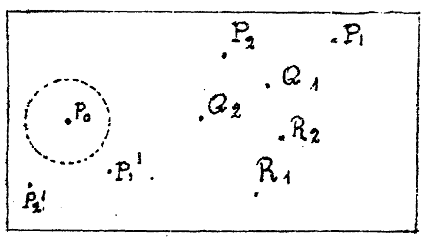
Пусть даны двѣ плоскости, Ω_1 и Ω_2, пересѣкающіяся надъ извѣстнымъ угломъ (черт.107). Далѣе, даны два центра O_1 и O_2. Чтобы опредѣлить какую нибудь точку P пространства при помощи ея проекціи, достаточно соединить ее съ центрами O_1 и O_2 и линій O_1P и O_2P продолжить до пересѣченія съ плоскостями проекцій въ точкахъ p и p', которыя и позволятъ легко возстановить точку P. Развертывая плоскости Ω_1 и Ω_2 около линій ихъ сѣченія OX до совмѣщенія одной плоскости съ другой, мы получимъ все изображеніе въ одной плоскости (черт.108). Подобнаго рода бицентральныя проекціи на двѣ плоскости примѣняютъ въ фотограммометріи, которая показываетъ, какъ при помощи двухъ фотографическихъ снимковъ Ω_1 и Ω_2 сдѣланныхъ съ одной и той же мѣстности P съ двухъ точекъ зрѣнія O_1 и O_2 получить планъ, фасадъ, профиля и другія данныя о мѣстности. На черт.109 всѣ линіи и плоскости изображены въ планѣ. Въ частномъ случаѣ, когда плоскости проекцій нормальны другъ къ другу ($\alpha = 90^\circ$), центры O_1 и O_2 удалены въ безконечность и направленія проектированія перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ плоскостямъ проекцій, послѣднія называются *ортогональными*. Эти проекціи являются наиболѣе распространенными въ техникѣ одну изъ плоскостей проекцій располагаютъ горизонтально и обозначаютъ буквою H, а другую - вертикальною и обозначаютъ буквою V. Напр., планъ и фасадъ дома есть ортогональныя проекціи двухъ его видовъ. На черт. 110 и 111 показаны такія проекціи точки въ пространствѣ и при совмѣщеніи V съ H.



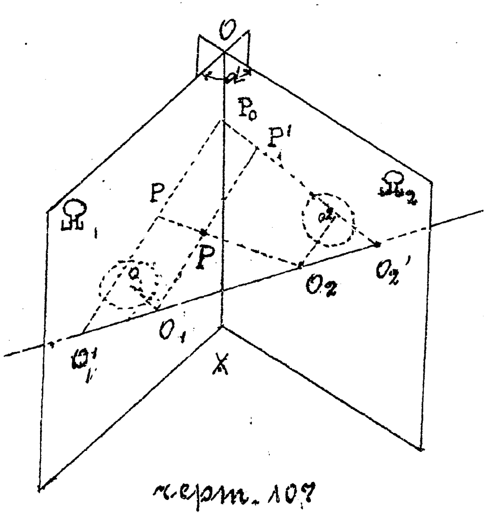
черт. 104



черт. 105



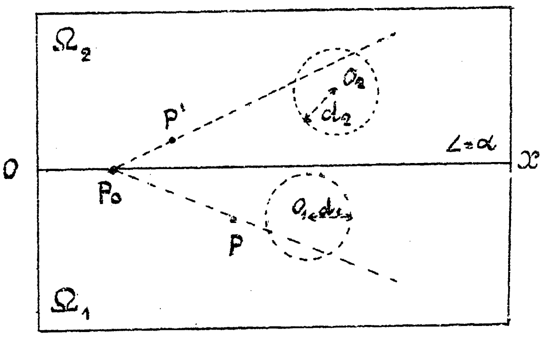
черт. 106



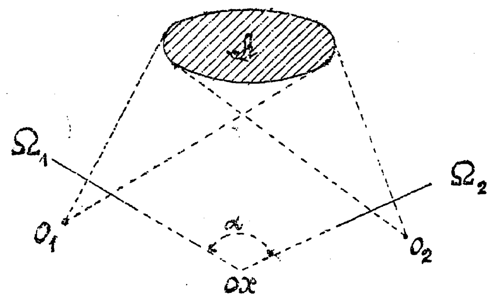
черт. 107

3. *Проектированіе на три и болѣе плоскости.*

Въ фотограммометріи часто приходится возстанавливать рельефъ поверхности земли на основаніи фотографическихъ снимковъ данной мѣстности съ трехъ и болѣе точекъ зрѣнія. Таковое возстановленіе дѣлается на основаніи правилъ, излагаемыхъ въ фотограммометріи. На черт. 112 показана схема проектированія точки P изъ трехъ центровъ O_1, O_2

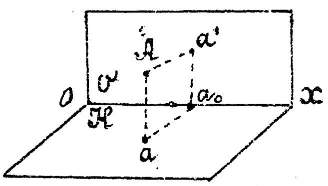


черт. 108

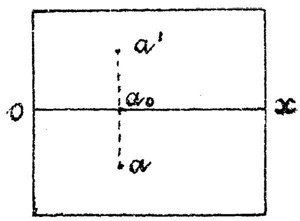


черт. 109

и O_3 на три плоскости Ω_1, Ω_2 и Ω_3. Получены три проекціи p_1, p_1', p'' Очевидно, что если извѣстны: взаимное расположеніе плоскостей проекцій, центровъ и даны проекціи точки, то послѣднюю нетрудно возстановить въ пространствѣ. Если плоскости проекцій взаимно перпендикулярны, центры удалены въ безконечность и направленія проектированія перпендикулярны къ плоскостямъ проекцій, то полученныя проекціи называются также ортогональными на трехъ плоскостяхъ. Напримѣръ, планъ, фасадъ главный и фасадъ боковой дома и будутъ такими проекціями (черт. 113).

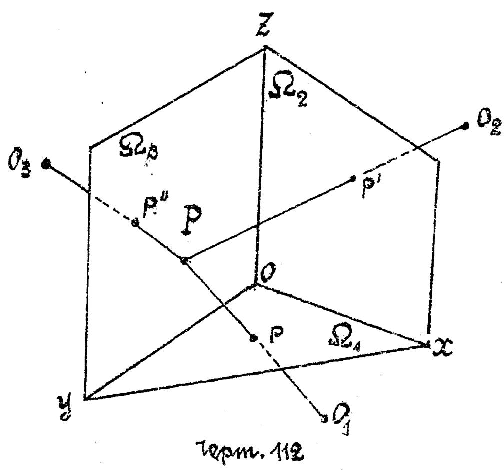


черт. 110



черт. 111

На черт. 113 эти проекціи изображены въ пространствѣ, а на черт. 114 - плоскости V и W совмѣщены съ H вращеніемъ соотвѣтственно вокругъ OX и OY.



черт. 112

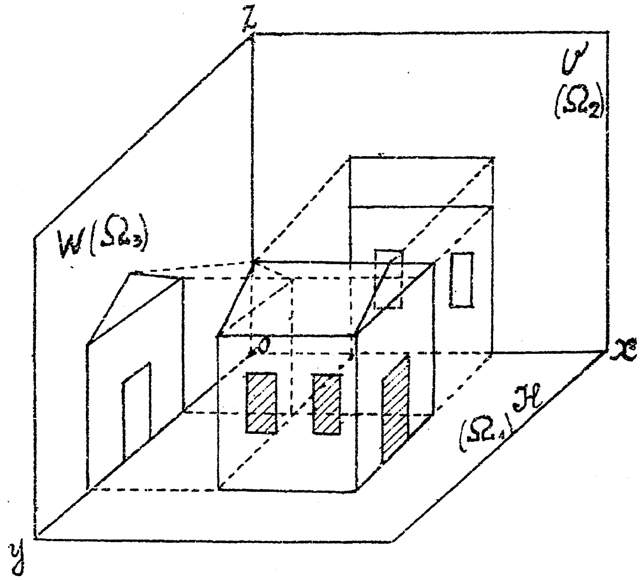
При фотографированіи какой нибудь мѣстности магазинной фотографической камерой, т.е. камерой, заключающей въ себѣ 5, 6 и болѣе фотографическихъ аппаратовъ и при составленіи затѣмъ, на основаніи полученныхъ снимковъ, рельефа мѣстности, приходится производить довольно сложныя построенія и имѣть дѣло, слѣдовательно, съ нѣсколькими (n) центральными проекціями*). Въ спеціальныхъ отдѣлахъ Начертательной Геометріи изучается, какимъ образомъ и при какихъ условіяхъ можно опредѣлить фигуру, если дано n ея центральныхъ проекцій и неизвѣстно

*) *Таковы, напримѣръ, снимки мѣстности, произведенныхъ съ воздухоплавательнаго аппарата при помощи магазинной камеры.*

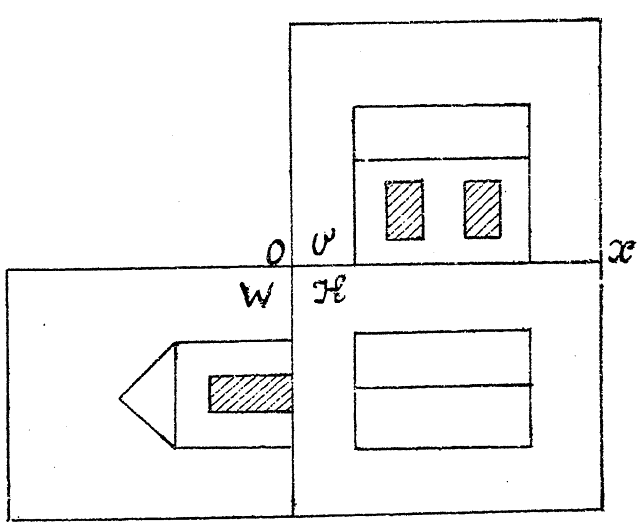
положеніе центровъ. Напримѣръ, тамъ выводится теорема, что "четыре центральныхъ проекціи изъ неизвѣстныхъ центровъ на 4 плоскости опредѣляютъ лишь видъ, но не величину фигуры *).

d) *Центральная коллинеація плоскихъ системъ.*

Дѣлая разрѣзъ плоскостью, проходящей черезъ центръ проекцій любую изъ пространственныхъ системъ, ранѣе описанныхъ, получимъ въ сѣченіи двѣ плоскихъ системы. Одна изъ нихъ будетъ принадлежать данной формѣ, а другая - изображенію ея. Очевидно, двѣ формы будутъ взаимно коллинеарны и осью соотвѣтствія будетъ служить линія сѣченія данной плоскости съ осевой плоскостью, предѣльными же линіями будутъ линіи сѣченія данной плоскости съ предѣльными плоскостями.



черт. 113



черт. 114

Разсмотримъ какъ отражается въ коллинеаціи плоскихъ системъ рядъ различныхъ относительныхъ положеній центра, осевой плоскости и предѣльныхъ плоскостей. Для этого будемъ проводить плоскости черезъ центръ проекціи въ пространственныхъ системахъ изображенныхъ ранѣе, начиная съ черт. 23 и при этомъ, для краткости, будемъ разсматривать лишь плоскости (осевыя и предѣльныя), а не поверхности, такъ какъ отъ послѣднихъ всегда приходится переходить къ первымъ.

1) Центръ лежитъ на оси (черт. 23 и 115).

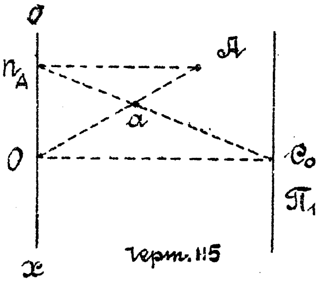
2) Центръ лежитъ на предѣльной линіи (черт. 26 и 113). Изображеніемъ формы будетъ точка (а).

3) Предѣльная линія совпадаетъ съ осевой (черт. 29 и 117). Въ этомъ случаѣ изображеніе плоской формы превращается въ линію, лежащую на оси OX.

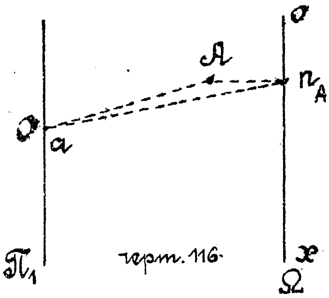
---

*) Loria "Vorlesungen über Darstellende Geimetrie" *1907 г. стр. 218.*

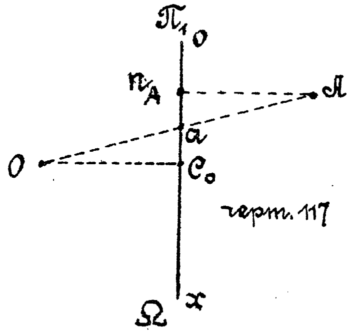
4 и 5) Осевая линія находится въ безконечности. (Черт.77 и 118). Въ этомъ случаѣ предѣльная линія также находится въ безконечности и получается центральное подобіе плоскихъ фигуръ.



черт. 115



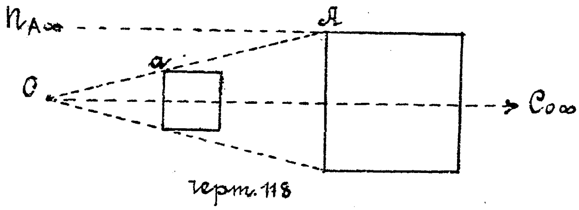
черт. 116



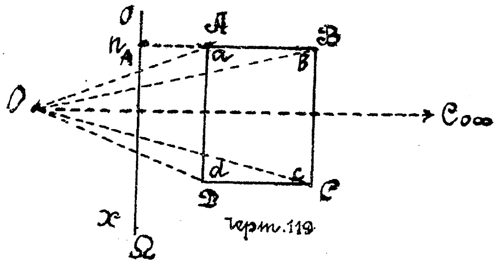
черт. 117

6) Предѣльная линія въ безконечности. Въ этомъ случаѣ получается равенство плоскихъ фигуръ (черт.78 и 119).

7) Центръ находится въ безконечности. Въ этомъ случаѣ изображеніемъ плоской фигуры будетъ прямая линія (черт.79 и 120). Здѣсь мы имѣемъ служай плоскаго аффинитетнаго средства.



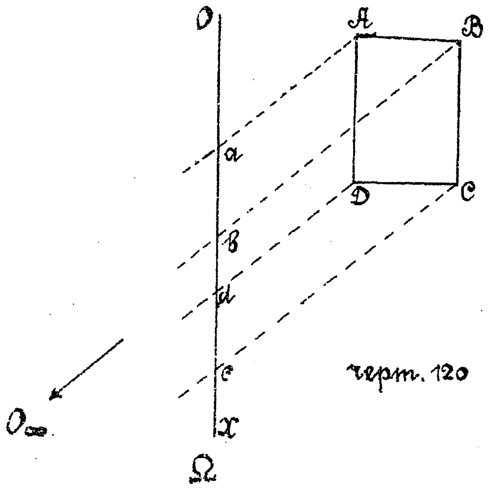
черт. 118



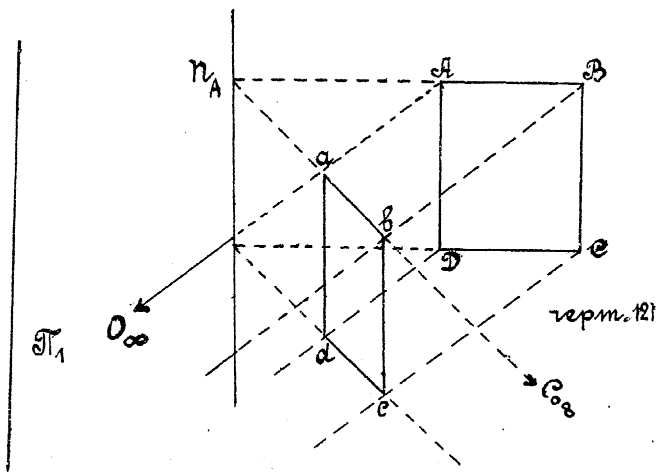
черт. 119

8) Центръ и предѣльная линія находятся въ безконечности (черт.87 и 121).

9) Центръ и осевая линія въ безконечности (черт.87 и 122). Въ этомъ случаѣ получается *равенство* плоскихъ фигуръ.



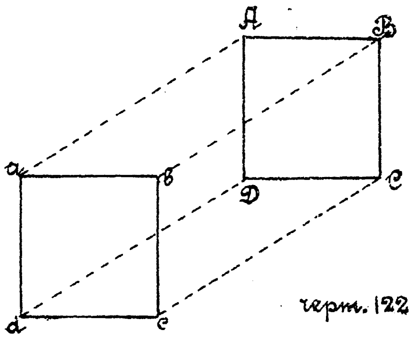
черт. 120



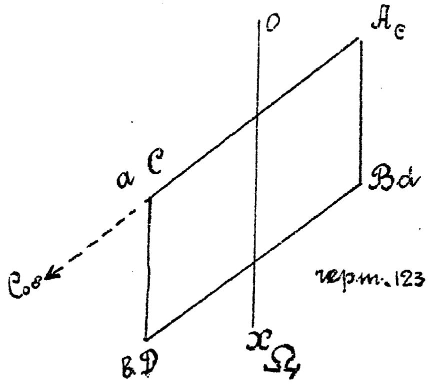
черт. 121

10) Предѣльныя линіи совпадаютъ другъ съ другомъ (инволюція плоскихъ фигуръ).

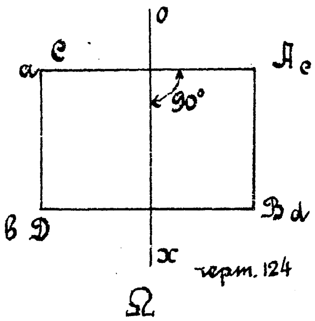
а) Центръ лежитъ въ безконечности. Въ этомъ случаѣ получается или косая осевая симметрія плоскихъ фигуръ (черт.90 и 123), или ортогональная осевая симметрія (черт.124), или тождество плоскихъ фигуръ (черт.93 и 125).



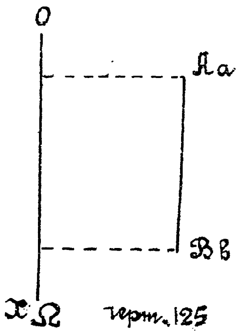
черт. 122



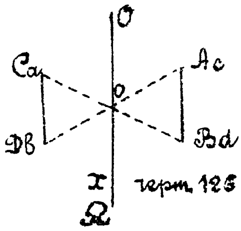
черт. 123



черт. 124



черт. 125



черт. 125

b) Ось лежитъ въ безконечности. Въ этомъ случаѣ получается центральное подобіе плоскихъ фигуръ (черт.95 и 126).

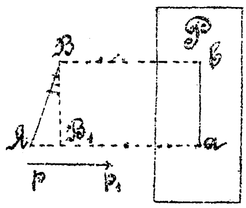
V. *ОБЩІЯ СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ ПРОЕКЦІЙ.*

Для простоты построеній будемъ предполагать, что поверхностью проекцій является плоскость. При проектированіи слѣдуетъ различать два направленія. Если направленіе проектированія перпендикулярно къ плоскости проекцій, то проекціи называются *прямоугольными*. Въ дальнѣйшемъ будемъ пока разсматривать проекціи косоугольныя.

а) *Проекціи прямой линіи.*

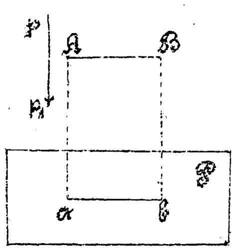
Пусть даны: прямая АВ въ пространствѣ, плоскость проекцій Р и направленіе проектированія pp' (черт.127). Чтобы получить проекцію отрѣзка АВ прямой линіи на плоскости Р, достаточно найти проекціи а и b точекъ А и В на плоскости Р. Проведя прямыя изъ точекъ А и В, параллельно данному направленію до пересѣченія съ плоскостью Р, найдемъ точки а и b - проекціи точекъ А и В. Соединяя затѣмъ прямой точки а и b, получимъ - проекцію ab прямой АВ. Въ большинствѣ случаевъ длина проекцій не равна длинѣ проектируемой линіи, или, какъ говорятъ, линія *искажается* въ своей проекціи.

Длина проекціи бываетъ равной длинѣ проектируемой линіи только въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ: когда проектируемая прямая параллельна плоскости проекцій P (черт.128) и когда прямая линія наклонна къ плоскости проекцій P, но направленіе проектированія выбрано слѣдующимъ образомъ (черт.129): возьмемъ прямую AB, пересѣкающуюся съ плоскостью P въ точкѣ A. Около точки A, принявъ ее за центръ, опишемъ окружность радіуса R = Ab = = AB. Окружность эта обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что, соединяя любую ея точку съ точкой B, получаемъ направленіе проектированія, при которомъ проекція равна самой проектируемой ли линіи AB.

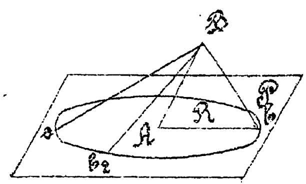


черт. 127

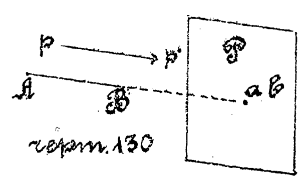
Если проектируемая линія параллельна направленію луча pp' (черт.130), то проекціей прямой линіи является только точка, именно, точка пересѣченія самой прямой (если ее продолжить) съ плоскостью P. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что линія *исчезаетъ* въ своей проекціи.



черт. 128



черт. 129



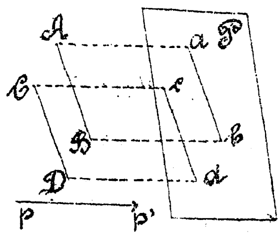
черт.130

b) *Проекціи двухъ прямыхъ линій.*

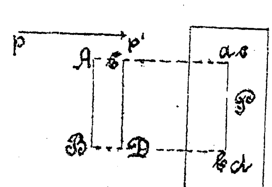
Разсмотримъ теперь, какое вліяніе имѣетъ относительное положеніе двухъ прямыхъ въ пространствѣ на относительное положеніе ихъ проекцій. Слѣдуетъ различать три случая: a) двѣ прямыя въ пространствѣ параллельны другъ другу; b) прямыя пересѣкаются другъ съ другомъ; c) не параллельны и не пересѣкаются.

Прямыя линіи параллельны другъ другу.

Если имѣемъ въ пространствѣ двѣ параллельныя прямыя AB и CD (черт. 131), то каково бы ни было направленіе проектированія, проекція ab будетъ параллельна проекціи cd, такъ какъ плоскость проекцій P пересѣкается двумя параллельными плоскостями AaBb и CcDd по линіямъ, параллельнымъ между собой. Слѣ-



черт. 131

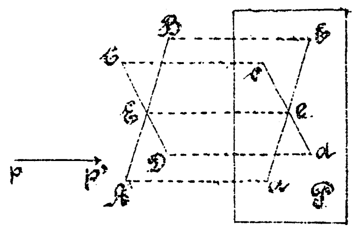


черт.132

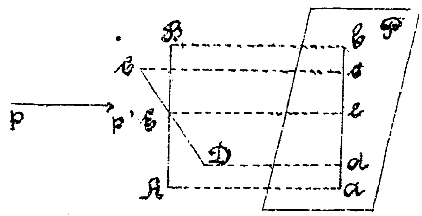
довательно, можно сказать, что *проекціи линій параллельныхъ - параллельны другъ другу*. Въ случаѣ, если линіи AB и CD находятся въ одной плоскости, параллельной pp' проекціи обѣихъ линій, совпадая, сливаются въ одну (черт.132).

Прямыя линіи пересѣкаются между собою въ пространствѣ.

Линія AB пересѣкается въ пространствѣ съ линіей CD въ точкѣ E (черт.133). Въ общемъ случаѣ проекціи ихъ ab и cd также пересѣкаются, причемъ точка e ихъ пересѣченія является проекціей точки E пересѣченія самихъ линій въ пространствѣ. Дѣйствительно, плоскости ABab и CDcd пересѣкаются по линіи Ee, параллельной pp', причемъ Ee пересѣчетъ плоскость P въ точкѣ e пересѣченія ab съ cd. Слѣдовательно, точка e будетъ проекціей E на плоскости P.



черт. 133



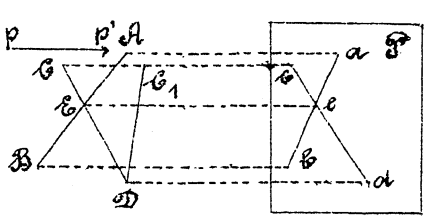
черт. 134

Итакъ, *если двѣ линіи въ пространствѣ пересѣкаютъ другъ друга, то ихъ проекціи пересѣкаются и точка пересѣченія проекцій линій является проекціей точки пересѣченія самихъ линій въ пространствѣ.*

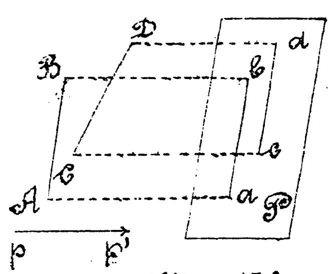
Въ частномъ случаѣ, когда плоскость линій AB и CD параллельна pp', проекціей обѣихъ линій является одна прямая (черт.134).

Прямыя линіи не параллельны и не пересѣкаются.

Разсматривая чертежъ 10, нетрудно видѣть, что проекціи линій могутъ пересѣчься, когда сами линіи въ пространствѣ не пересѣкаются. Дѣйствительно, если мы одну изъ линій (напримѣръ, CD, черт.135) передвинемъ въ направленіи проектированія такъ, чтобы она заняла положеніе C_1D, то при такомъ положеніи, т.е. когда одна линія AB проходитъ поверхъ другой не пересѣкая ее, положеніе проекцій не измѣнится



черт. 135



черт. 136

и проекціи будутъ пересѣкаться какъ и раньше. Слѣдовательно, *когда линіи не параллельны и не пересѣкаются, проекціи ихъ могутъ пересѣкаться другъ съ другомъ.* Въ частномъ случаѣ, если плоскость, параллельная обѣимъ линіямъ, параллельна направленію проектированія, проекціи линій будутъ параллельны другъ другу (черт.136).

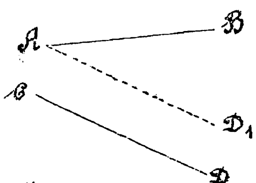
c) *Проекціи угловъ.*

Предварительно сдѣлаемъ опредѣленіе угла между двумя прямыми линіями, не пересѣкающимися между собою.

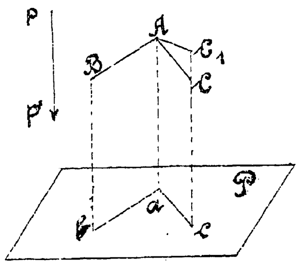
Пусть даны линіи AB и CD, не пересѣкающіяся другъ съ другомъ (черт.137). Угломъ между двумя такими прямыми называется уголъ, образуемый двумя прямыми, исходящими изъ одной общей точки и параллельными даннымъ, т.е. уголъ BAD_1.

Выведемъ далѣе нѣсколько положеній о проектированіи угловъ между двумя прямыми линіями.

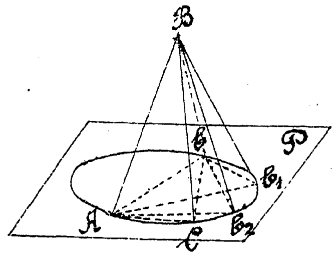
Пусть даны: плоскость проекцій P, уголъ BAC въ пространствѣ и направленіе проектированія pp' (черт.138). *Если плоскость угла BAC параллельна плоскости проекцій, то проекція* bac *угла = самому углу BAC* независимо отъ направленія проектированія, такъ какъ разсматриваются два угла, лежащіе въ параллельныхъ плоскостяхъ и съ параллельными сторонами, т.е. *уголъ BAC проектируется безъ искаженія.* Измѣняя положеніе стороны AC угла въ направленіи проектированія (AC_1, черт.138), находимъ, что самый уголъ въ общемъ измѣнится, а проекція его останется по величинѣ прежней, т.е. при *непараллельности угла BAC къ плоскости P онъ будетъ проектироваться съ искаженіемъ.*



черт. 137



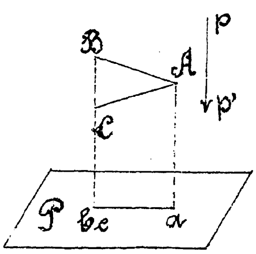
черт.138



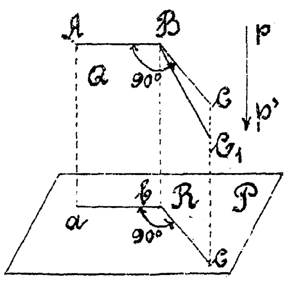
черт.139

Кромѣ случая, указаннаго на черт.138, можно указать на другой случай проектированія угла безъ искаженія, именно, когда плоскость его не параллельна плоскости проекцій.

Зададимся плоскостью проекцій P (черт.139) и какимъ нибудь угломъ ABC въ пространствѣ. Пусть точки A и C являются точками пересѣченія сторонъ угла съ плоскостью P. Соединяемъ точки A и C прямой и на ней строимъ въ плоскости P треугольникъ такъ, чтобы противолежащій уголъ AbC равнялся углу ABC. Около полученнаго треугольника описываемъ окружность. Очевидно, что соединяя любую точку этой окружности съ точками A и C, получаемъ углы, равные другъ другу и углу ABC (какъ измѣряемые одной и той же дугой), а слѣдовательно, соединивъ любую точку b, $b_1, b_2 \ldots$ этой дуги съ точкой B, получимъ направленія проектированія, при которыхъ уголъ въ проекціи не будетъ искажаться.



черт.140



черт.141

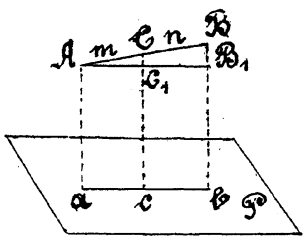
Если плоскость угла параллельна направленію проектированія, то уголъ проектируется въ прямую линію (черт.140). *Въ этомъ случаѣ уголъ исчезаетъ въ своей проекціи.*

Разсмотримъ теперь проектированіе *прямого* угла. Пусть даны: прямой уголъ ABC, причемъ плоскость его параллельна плоскости проекцій

Р, и направленіе проектированія pp' перпендикулярно къ плоскости Р (черт.141). Пусть одна изъ сторонъ его, напримѣръ, АВ параллельна плоскости Р. Проведемъ черезъ прямую АВ плоскость Q параллельную pp' до пересѣченія ея съ плоскостью Р по линіи ab, параллельной АВ. Черезъ ВС также проводимъ плоскость R, параллельную pp'. Обѣ эти плоскости пересѣкаются другъ съ другомъ по линіи Bb. Линія АВ перпендикулярна къ плоскости ВСcb, такъ какъ она перпендикулярна къ ВС по заданію и къ Bb потому, что Bb параллельна pp', а pp' перпендикулярно къ Р и, слѣдовательно, ко всякой линіи, параллельной Р, т.е. и къ АВ. Такъ какъ линія ab также перпендикулярна къ плоскости ВСcb, а потому и ко всякой прямой, находящейся на ней, т.е. и къ прямой bc. Иначе говоря, уголъ abc = 90°. Если мы вмѣсто стороны ВС прямого угла возьмемъ BC_1, перпендикулярную къ АВ и лежащую въ той же плоскости ВСcb, то и такой уголъ ABC_1, спроектируется въ прямой же abc. Слѣдовательно, *прямой уголъ проектируется безъ искаженія, если одна сторона его параллельна плоскости проекцій, а направленіе проектированія перпендикулярно къ плоскости проекцій.*

Дѣленіе линіи въ данномъ отношеніи.

Теорема. Если какой нибудь отрѣзокъ прямой АВ (черт.142) въ какой либо точкѣ С дѣлится въ данномъ отношеніи АС : СВ = m : n, то и проекція его ab въ проекціи с точки С дѣлится въ томъ же отношеніи.



черт.142

Доказательство. Проводимъ черезъ точку А линію AB_1, параллельно ab, слѣдовательно, въ плоскости ABba. Разсматривая треугольникъ ABB_1, находимъ, что параллельныя линіи CC_1, и BB_1, дѣлятъ его стороны АВ и AB_1 на части пропорціональныя въ отношеніи: $AC_1 : C_1B_1 = AC : CB = m : n$ (I).

Такъ какъ по условію AB_1 = ab, а прямыя Аа, Сс и Bb параллельны, какъ проектирующія линіи, то AC_1 = ac; C_1B_1 = cb, а въ такомъ случаѣ, подставивъ эти равныя величины въ равенство (I), получимъ:

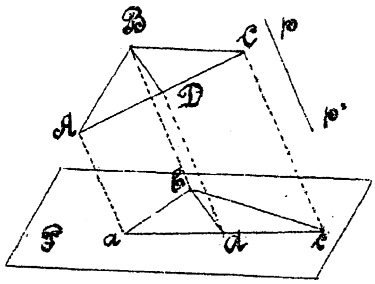
$$ac : cb = AC : CB = m : n$$

Очевидно, будетъ справедливо и обратное положеніе: если въ какой нибудь точкѣ с проекція ab дѣлится въ отношеніи m : n, то и всякая прямая АВ, для которой является проекціей, въ точкѣ С, соотвѣтствующей проекціи с, должна раздѣлиться въ томъ же самомъ отношеніи.

Дѣленіе угловъ.

Теорема. Проекція биссектрисы какого нибудь угла въ пространствѣ не является въ общемъ случаѣ биссектрисой проекцій этого угла.

Доказательство. Пусть данъ въ пространствѣ какой нибудь треугольникъ АВС, BD - его биссектриса, Р - плоскость проекцій, не параллельная плоскость угла АВС, и pp' - направленіе проектированія (чертежъ 143) Отложимъ АВ = ВС. Тогда AD будетъ равна DC. Въ общемъ случаѣ линіи АВ и ВС наклонны къ плоскости Р подъ равными углами, а потому при сохраненіи равенства АВ = ВС проекціи ихъ на плоскости Р ab и bc не будутъ равны между собою, но, такъ какъ AD = DC, то и ad будетъ равно dc.



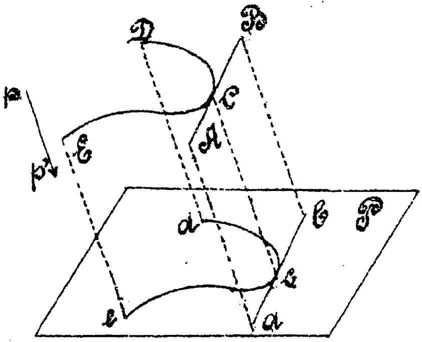
черт. 143

Разсматривая треугольникъ abd и bdc видимъ, что они не равны другъ другу, такъ какъ, хотя у нихъ по 2 равныхъ стороны, но третьи стороны не равны, слѣдовательно, и углы abd и dbc не равны другъ другу, т.е. bd не является биссектрисою угла abc, что и требовалось доказать.

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что, *если какой нибудь уголъ въ пространствѣ дѣлится прямою линіей въ извѣстномъ отношеніи, то проекція этой прямой въ общемъ случаѣ не раздѣлитъ проекцію этого угла въ томъ же отношеніи.*

Проектированіе прямой линіи, касательной къ плоскости кривой.

Пусть намъ даны (черт.144): плоскость проекціи P, произвольное направленіе проектированія pp' и плоская кривая линія DCE. Спроектируемъ эту кривую на плоскость P. Проектирующій пучекъ образуетъ цилиндрическую поверхность, которая пересѣчетъ плоскость P по плоской кривой dce; послѣдняя и будетъ проекціей DCE на P. Совокупность лучей, проектирующихъ AB на P, образуетъ плоскость, касательную къ цилиндрической поверхности по производящей Cc. Эта плоскость пересѣчется съ плоскостью P по линіи ab – проекціи AB на P. Линія ab, какъ лежащая въ плоскости, касательной къ цилиндру, будетъ касательна ко всякой начерченной на поверхности цилиндра кривой, проходящей черезъ точку c, слѣдовательно, и къ кривой dce. Отсюда слѣдуетъ, что *если прямая касается къ плоской кривой, то проекція этой прямой будетъ касаться проекціи кривой, при чемъ точка касанія проекцій этихъ линій является проекціей точки касанія самихъ линій въ пространствѣ.*



черт. 144

VI. ПРИБЛИЖЕННЫЯ ПОСТРОЕНІЯ.

При различнаго рода геометрическихъ построеніяхъ приходится рѣшать рядъ задачъ, которыя допускаютъ лишь извѣстную точность построеній, точность, зависящую отъ разныхъ условій: отъ совершенства чертежныхъ инструментовъ, отъ количества выбранныхъ точекъ, напримѣръ, при построеніи кривыхъ линій и отъ умѣнья обчерчивать ихъ по лекалу, и, наконецъ, отъ невозможности иногда имѣть математически рѣшеніе данной задачи, напримѣръ, спрямленіе дуги круга, трисекція угла и т. под. (удобоосуществляемомъ на чертежѣ).

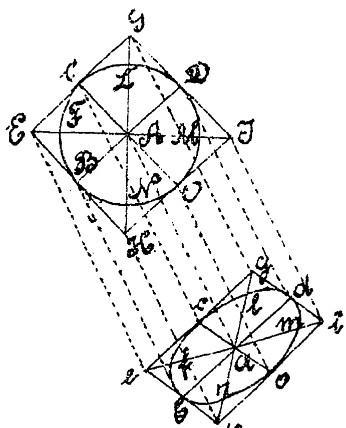
Поэтому въ этомъ параграфѣ мы приводимъ нѣсколько примѣровъ приближенныхъ построеній, позволяющихъ рѣшать съ извѣстной точностью такого рода задачи.

Въ числѣ такихъ задачъ мы выбираемъ тѣ, съ которыми чаще всего намъ придется встрѣчаться въ излагаемомъ нами курсѣ. Подробности же можно найти въ сочиненіи Th. Vanlen "Konstruktionen und approximationen" Leipzig. 1911 г.

а) *Вычерчиваніе еллипса.*

При вычерчиваніи эллипса пользуются различными способами. Укажемъ на три наиболѣе простыхъ изъ нихъ.

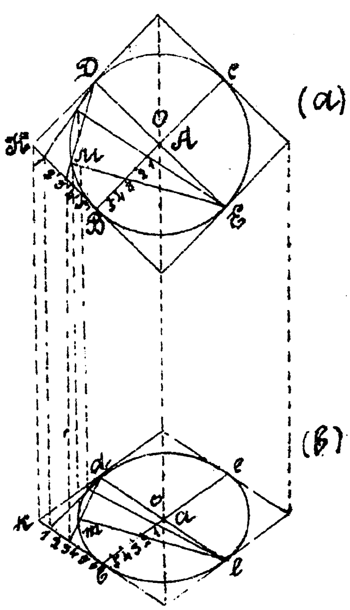
I-й способъ.



черт. 145

Пусть намъ данъ въ пространствѣ кругъ (черт.145) Проведемъ въ данномъ кругѣ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра и опишемъ вокругъ него квадратъ, стороны котораго параллельны этимъ діаметрамъ. Проведемъ въ квадратѣ діагонали EI и KG. Нетрудно доказать, что AF приблизительно равно 0,707 AE. Съ достаточною для практическихъ цѣлей точностью можно принять A = 0,7 AE. Зная, что если линія въ пространствѣ дѣлится въ какой нибудь точкѣ въ извѣстномъ отношеніи, то и проекція ея будетъ дѣлиться въ такомъ же отношеніи, и что AF = 0,7 AE, легко можно построить нѣсколько точекъ эллипса какъ проекціи круга. Для этого достаточно проекцію ae полудіагонали AE раздѣлить на 10 равныхъ частей и взять точку f, отстоящую отъ a - проекціи A на 7 дѣленій. Эта точка будетъ принадлежать дугѣ искомаго эллипса. (Эллипсъ строится по восьми точкамъ f, c, l, d и т.д.

2-й способъ.



черт. 146

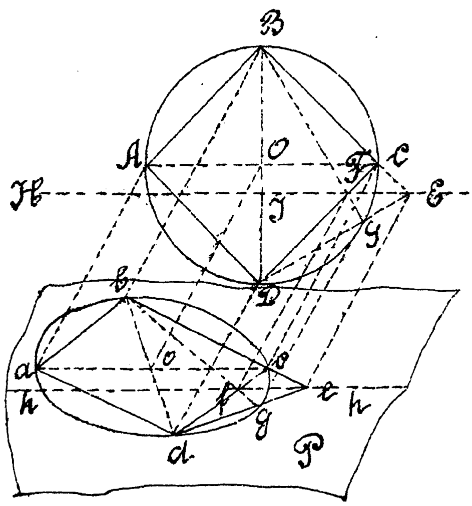
Проведемъ въ кругѣ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра и опишемъ квадратъ, стороны котораго параллельны этимъ діаметрамъ.

Раздѣлимъ сторону квадрата BK на нѣсколько частей, напримѣръ, на 6 и на такое же число равныхъ частей раздѣлимъ полудіаметръ AB такъ, какъ показано на чертежѣ 146.

Соединимъ далѣе точку D съ какою нибудь точкою 3' дѣленія стороны BK, а E - съ точкою 3 полудіаметра AB. Точка M пересѣченія линій D3' съ E3 и будетъ принадлежать кругу, такъ какъ треугольникъ DME прямоугольный, слѣдовательно, вершина прямого угла должна лежать на окружности. Соединяя съ одной стороны точки E и I, E и 2 и такъ далѣе, съ другой стороны D съ I', съ 2' и т.д., получаемъ въ пересѣченіи соотвѣтственныхъ линій, цѣлый рядъ точекъ, принадлежащихъ къ кругу. Для построенія проекціи круга проектируемъ квадратъ, дѣлимъ сторону проекціи kb и полудіаметръ ab (черт. 146 b) на одинаковое число равныхъ частей и соединяемъ соотвѣтственныя точки такъ, какъ соединяли ихъ на чертежѣ 146 (a). Получимъ рядъ точекъ, принадлежащихъ проекціи круга - эллипсу.

3-й способъ.

Впишемъ въ данный кругъ квадратъ ABCD (черт.147). Проведемъ случайную линію HH, параллельную діаметру AC и найдемъ точки F и E пересѣченія этой линіи со стороной DC и продолжимъ сторону BC квадрата.



черт.147

Соединимъ точки D съ E и B съ F и найдемъ точку G пересѣченія линій DE съ BG. Точка G будетъ принадлежать окружности круга, такъ какъ уголъ BGD будетъ прямымъ и будетъ опираться на діаметръ круга BD. (Доказательство слѣдуетъ изъ теоремы, что три перпендикуляра, опущенныя изъ вершинъ треугольника на противолежащія стороны пересѣкаются въ одной точкѣ. Въ нашемъ случаѣ треугольникъ BDE и перпендикуляръ DC, EI и BG).

Если мы имѣемъ параллельную проекцію (abcd) квадрата на какой нибудь плоскости P, и проекцію какой нибудь линіи hh параллельной AC, то вышеуказаннымъ способомъ нетрудно найти на этой линіи точку g, принадлежащую проекціи круга, описаннаго вокругъ abcd. Для этого находимъ точку e - пересѣченія hh съ bc, и точку f - пересѣченія hh съ dc. Точка g опредѣлится какъ точка пересѣченія линіи de съ bf.

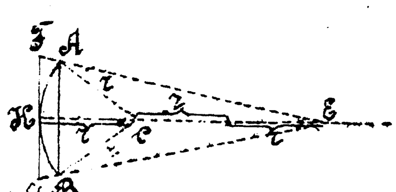
Построивъ рядъ точекъ, аналогичныхъ точкѣ g и соединивъ ихъ плавною кривою, получимъ эллипсъ - проекцію круга ABCD.

b) Спрямленіе дугъ круга.

Рѣшимъ теперь задачу, имѣющую большое примѣненіе при разверткѣ цилиндрическихъ поверхностей.

Требуется построить прямую, равновеликую данной дугѣ AB круга съ центромъ въ точкѣ C.

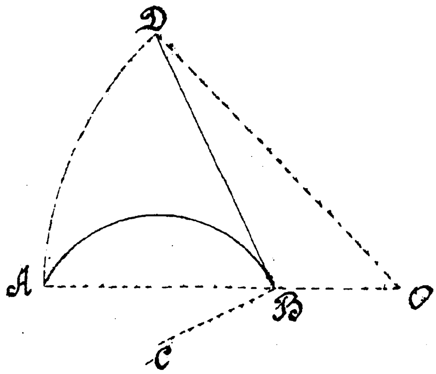
I-ый способъ (Николая Куза) (черт.148).



черт.148

Соединяемъ A съ B и проводимъ изъ C радіусъ CK, перпендикулярный къ хордѣ AB. Проводимъ въ точкѣ K пересѣченія радіуса съ окружностью линію FG, касательную къ дугѣ. Откладываемъ на продолженіи радіуса KC длину 3-хъ радіусовъ - KE - 3r. Соединяемъ точку E съ A и B прямыми EA и BE. Точки пересѣченія F и G линій AE и BE съ касательной FG и опредѣлятъ отрѣзокъ FG, равновеликій дугѣ AB. Когда дуга не болѣе 30°, то разница между FG и дѣйствительной величиной дуги AB менѣе 0,002, что даетъ достаточную для практики точность.

2-й способъ (Ранкина).



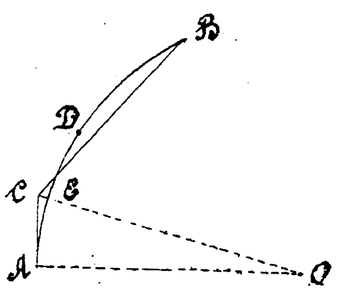
черт.149

Для опредѣленія отрѣзка прямой линіи равновеликаго дугѣ АВ круга съ центромъ С поступаемъ слѣдующимъ образомъ (черт.149).

Откладываемъ отъ точки В на продолженіи хорды АВ отрѣзокъ $BO = \frac{AB}{2}$

Проводимъ въ точкѣ В касательную ВD къ дугѣ АВ. Изъ центра О описываемъ дугу АD радіусомъ АО до пересѣченія ея съ касательной ВD въ точкѣ D. Тогда длина прямой ВD почти равна длинѣ дуги АВ. Ошибка отрицательная, т.е. ВD меньше АВ. (Отношеніе длины ВD къ длинѣ дуги АВ равно $-\frac{Q^4}{1010}-\frac{Q^6}{34432}$ ...., гдѣ Q - отношеніе дуги къ радіусу).

3-й способъ (Ранкина).

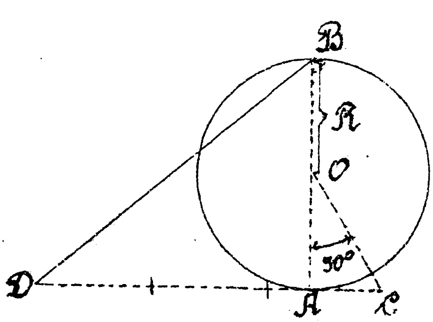


черт.150

Откладываемъ $AE = \frac{AB}{4}$. Проводимъ касательную АС къ дугѣ въ точкѣ А и продолжаемъ ее до пересѣченія съ продолженіемъ радіуса ОЕ въ точкѣ С. Соединяемъ С съ В. Тогда длина АС + СВ почти равна длинѣ дуги АВ (АС + СВ больше АВ). Ошибка равна $+\frac{Q^4}{4320}+\frac{Q^6}{3484648}$ ....

Такъ какъ 4320 - 4 × 1060, то если взять $^4/_5$ длины прямой, полученной при построеніи по чертежу 150 и приложить къ ней $^1/_5$ длины прямой ВD по чертежу 149 (предполагая, что дуги АВ на обоихъ чертежахъ одинаковы), то мы получимъ отрѣзокъ прямой отношеніе длины котораго къ длинѣ дуги АВ равно $+\frac{17.Q^6}{870912}$ (т.е. отрѣзокъ больше дуги на ничтожную величину).

4-й способъ (Черадини).



черт.151

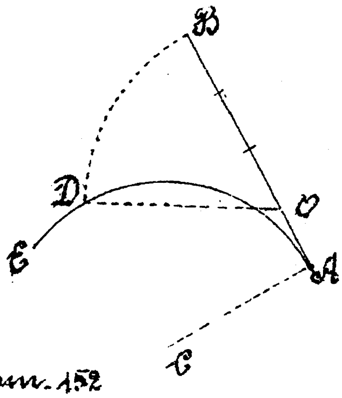
Профессоръ Черадини предложилъ слѣдующій способъ для выпрямленія дуги (черт.151). Проведемъ діаметръ АВ и линію ОС подъ угломъ 30° къ нему до пересѣченія въ точкѣ С съ касательной, проведенной къ кругу въ точкѣ А.

Если отложить СD равнымъ утроенному радіусу и соединить D съ В, то длина ВD будетъ равна 3,14153 R, что слѣдуетъ изъ формулы:

$$\overline{BD}^2 \quad \overline{BA}^2+(CS-CA)^2=[3+(3-tg30^\circ)]\ R$$

При помощи этого способа можно выпрямленіе дугъ большихъ 90°¹ сводить къ выпрямленію дополнительной дуги по способу 1 - 3, т.е. опредѣливъ по этимъ способамъ длину дуги меньшей 90°, вычесть ее изъ длины дуги полуокружности, опредѣленной по способу Черадини.

c) *Навертываніе прямой на дугу круга даннаго радіуса.*

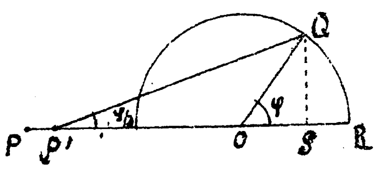


черт. 152

Если отрѣзокъ AB данной прямой требуется навернуть на дугу AE (черт.152), то поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Откладываемъ $AO = \frac{AB}{4}$. Принимаемъ, что AB касается дугѣ въ точкѣ A. Засѣкаемъ дугу изъ центра O радіусомъ OB въ точкѣ D. Тогда можно съ достаточной точностью принять, что AB = дугѣ AD.

Дѣленіе угла на три равныхъ части.



черт. 153

Пусть данъ уголъ φ = QOR. Описываемъ изъ вершины его O дугу радіусомъ, равнымъ единицѣ (черт.153). Продолжаемъ сторону OR угла и замѣчаемъ на ней точку P, причемъ OP = 2 OR. Отъ точки P къ O откладываемъ длину $PP' = \frac{2}{9}$ SR, гдѣ S - есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки Q на сторону OR. Соединяя P' съ Q, получимъ уголъ QP'R почти равный $\varphi/3$. (Построеніе принадлежитъ итальянцу Коминотто).

КРИВЫЯ ОШИБОКЪ.)*

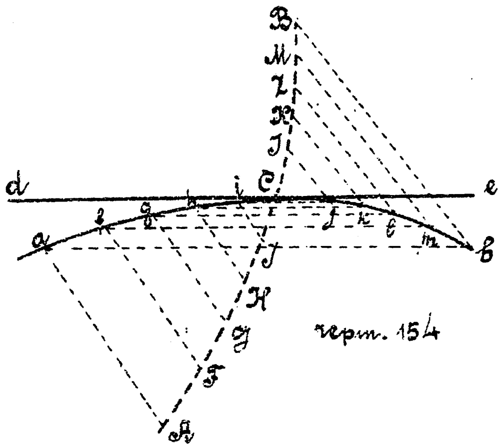
Подъ названіемъ *кривой ошибокъ* понимаютъ вспомогательную кривую, которая служитъ для опредѣленія такихъ точекъ или линій, непосредственно построить которыя трудно или невозможно. Разсмотримъ построеніе такихъ кривыхъ на слѣдующихъ примѣрахъ.

1. *Опредѣлить точку касанія прямой линіи къ кривой.*

Пусть ab и de будутъ данныя - кривая и касательная (черт. 154). Если мы проведемъ серію хордъ, параллельныхъ касательной, то точка касанія будетъ соотвѣтствовать хордѣ равной нулю. Чтобы получить эту точку, проводимъ черезъ точки a, f, g..... линіи, параллельныя другъ другу въ произвольномъ направленіи. Отложимъ на этихъ прямыхъ длины, пропорціональныя длинамъ хордъ, напримѣръ, пусть $aA = \frac{ab}{2}$; $fF = \frac{fm}{2}$; ...... $bB = \frac{ab}{2}$, и т.д. и соединимъ концы полученныхъ отрѣзковъ плав-

*) см. "Exercices de Geometrie Descriptive". Par F.J. Paris. 1893.

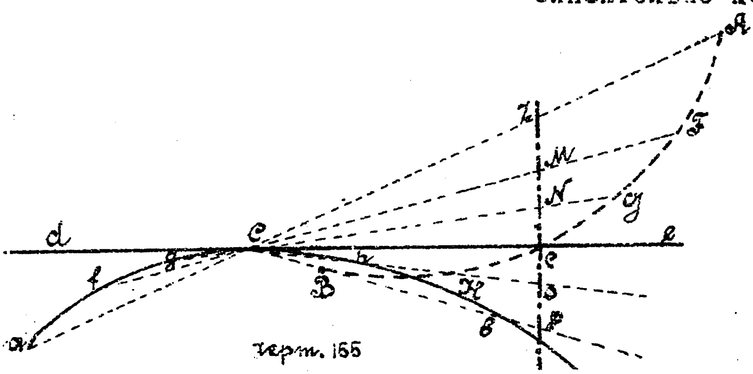
кривой, которая и называется кривой ошибокъ. Точка С - пересѣченія этой кривой съ данной и будетъ искомой точкой касанія.



черт. 154

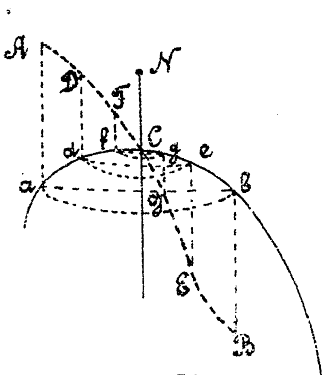
2. Провести черезъ точку данной на кривой, касательную къ послѣдней.

Пусть даны: кривая и точка С на ней (черт.155). Касательная къ кривой въ данной точкѣ С есть, очевидно, сѣкущая, хорда которой безконечно мала. Проведемъ какую нибудь линію LP, приблизительно перпендикулярно къ предполагаемому направленію касательной. Проведемъ рядъ сѣкущихъ aL, fM, gN, hO, bP и отложимъ LA = aC, MF = = fC; NG = gC; OH= = Ch; PB = Cb. Соединяя полученныя точки A, F, g..... плавной кривой, получимъ кривую ошибокъ, пересѣченіе которой съ прямою LP дастъ точку c, опредѣляющую съ точкой С искомую касательную, такъ какъ для этой точки (c) хорда равна нулю.



черт. 155

3. Провести изъ точки внѣ кривой нормаль къ послѣдней.



черт. 156

Предположимъ, что задача рѣшена и NC - есть искомая нормаль (черт.156). Очевидно, что окружность, описанная изъ центра N радіусомъ NC будетъ касаться кривой въ точкѣ пересѣченія послѣдней съ нормалью. Такимъ образомъ, для круга NC хорда сѣченія послѣдняго съ кривой ab будетъ безконечно мала. Чтобы построить кривую ошибокъ, проходящую черезъ С, достаточно описать около N, какъ центра, рядъ круговъ, которые дадутъ хорды ab, de, fg. Затѣмъ построимъ перпендикуляръ къ этимъ хордамъ въ концахъ ихъ и отложимъ на этихъ перпендикулярахъ отрѣзки aA = bB = ab; dD = eE = de; fF = gG = fg. Соединяя полученныя точки плавной кривой, получимъ кривую ошибокъ, пересѣченіе которой съ кривой ab дастъ точку С опредѣляющую нормаль NC.

Б. Отдѣлъ I.

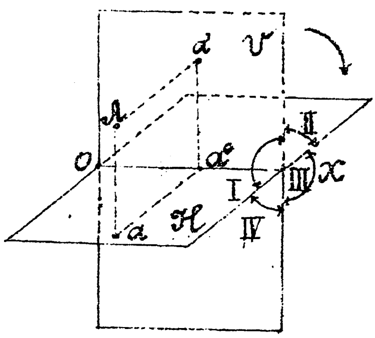
ОРТОГОНАЛЬНЫЯ ПРОЕКЦІИ.

ЧАСТЬ I.

ОРТОГОНАЛЬНЫЯ ПРОЕКЦІИ ТОЧЕКЪ, ПРЯМЫХЪ ЛИНІЙ И ПЛОСКОСТЕЙ.

1. *ОБЩІЯ ПОНЯТІЯ.**)

Методъ ортогональныхъ проекціи заключается въ томъ, что пользуются двумя прямоугольными проекціями предмета на двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, расположенныхъ - одна горизонтально, а другая вертикально. Первая изъ нихъ, лежащая горизонтально, называется *горизонтальною* плоскостью проекціи и обозначается буквою H; вторая, расположенная вертикально, - *вертикальною* и обозначается буквою V (черт.157). Линія пересѣченія плоскостей H и V - OX называется *осью проекцій;* она дѣлитъ каждую изъ плоскостей на части, которыя принято называть *полами.* Часть плоскости V, лежащая выше плоскости H, называется *верхнею полою,* а лежащая ниже H называется *нижнею полою.* Часть плоскости H, лежащая передъ плоскостью V, называется *переднею полою,* а часть, лежащая сзади V - *заднею полою.*



черт. 157

Прямоугольная проекція точки A (a) на горизонтальной плоскости H называется горизонтальной проекціей точки A, а прямоугольная проекція a' той же A на вертикальной плоскости V называется вертикальной ея проекціей. Линія Aa' называется горизонтально-проектирующей линіей; Aa - вертикально-проектирующей. Для устраненія запутанности въ чертежахъ принято проекціи точекъ, обозначаемыхъ большими буквами алфавита, обозначать соотвѣтствующими малыми, при чемъ для проекцій на плоскости V со значками вверху, а на плоскости H - безъ значковъ.

Плоскости V и H дѣлятъ все пространство на четыре угла: I-й между верхней полой плоскости V и передней H; II-й между верхней полой плоскости V и задней H, III-й между нижней V и задней H и IV-й между нижней V и передней H.

Для большаго удобства при геометрическихъ построеніяхъ плоскости H и V совмѣщаютъ другъ съ другомъ. Для этого вращаютъ плоскость V вокругъ оси OX въ направленіи, указанномъ на чертежѣ 157 стрѣлою, до тѣхъ поръ, пока верхняя пола V - не совпадетъ съ задней полой H, а нижняя пола V - съ переднею H. Такимъ образомъ, всѣ линіи, которыя были расположены въ 2-хъ плоскостяхъ - въ горизонтальной H и вертикальной V, послѣ такого совмѣщенія плоскостей будутъ лежать въ одной плоскости. Эту плоскость мы можемъ принять за плоскость чертежа.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что зритель находится въ предѣлахъ перваго угла пространства и можетъ видѣть только тѣ точки и линіи, которыя лежатъ въ предѣлахъ I-го угла. Условимся проекціи такихъ линіи чертить сплошной чертою. Проекціи же линій невидимыхъ, т.е. лежащихъ во II, III и IV углахъ, будемъ чертить прерывистою чертою.

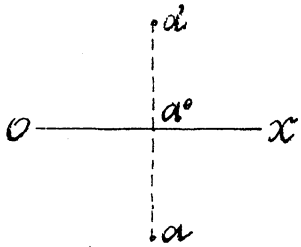
---

*) *Задачи по ортогональнымъ (и другимъ) проекціямъ, относящіяся къ каждому отдѣлу этой книги, можно найти въ сочиненіи Н. А. Рынина "Сборникъ задачъ по Начертательной Геометріи". СПБ. 1905 г.*

Примѣры рѣшенія основныхъ задачъ можно найти въ сочиненіи Н. А. Рынина "Примѣры рѣшенія задачъ по Начертательной Геометріи". С.-Петербургъ. 1908 г.

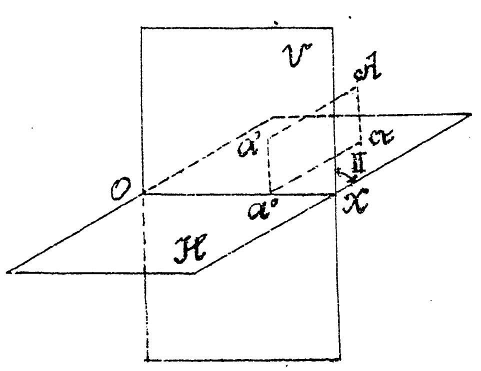
2. *ПРОЕКЦІИ ТОЧЕКЪ.*

Легко доказать, что при совмѣщеніи плоскостей H и V, въ указанномъ выше направленій, *горизонтальная и вертикальная проекціи данной точки A будутъ лежать на одномъ перпендикулярѣ къ оси проекцій.* Пусть намъ даны двѣ координатныя плоскости (черт. 157) H и V и проекціи точки A, лежащей въ I-мъ углѣ: вертикальная проекція a' и горизонтальная - a. Такъ какъ линія Aa перпендикулярна къ плоскости H, а Aa' перпендикулярна къ плоскости V, то, очевидно, что плоскость aAa' будетъ перпендикулярна къ оси проекцій OX. Слѣдовательно, линія aa° пересѣченія плоскости aAa' съ плоскостью H и линія a'a° пересѣченія той же плоскости съ плоскостью V будутъ перпендикулярны къ оси проекцій OX. Относительное положеніе линій и точекъ, лежащихъ на плоскости, не мѣняется отъ перемѣщенія этой плоскости. Такимъ образомъ, при совмѣщеніи V съ H вращеніемъ около OX, линіи aa° и a'a° останутся перпендикулярными къ OX. Линіи aa° и a'a° имѣютъ общую точку a°, при совмѣщеніи плоскостей V и H будутъ лежать въ одной плоскости и, наконецъ, обѣ перпендикулярны къ OX. Очевидно, онѣ должны расположиться на одной прямой aa', перпендикулярной къ OX (черт. 158). Замѣтимъ, что a'a° = Aa и a°a = Aa', т.е. *разстоянія проекцій a' и a точки A до оси OX, опредѣляютъ разстояніе самой точки A до плоскости проекцій.*

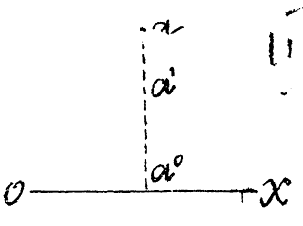


черт. 158

Сообразно съ тѣмъ, какъ будутъ расположены данныя точки - въ I, II, III, IV углахъ - будетъ мѣняться и расположеніе ихъ проекцій. Когда данная точка A расположена въ I-мъ углѣ, то, по совмѣщеніи плоскостей, ея вертикальная проекція будетъ лежать надъ осью OX, а горизонтальная подъ осью OX (черт. 157 и 158). Когда точка A во II-мъ углѣ (черт. 159 и 160), то ея вертикальная проекція будетъ расположена на верхней полѣ V, а горизонтальная на задней полѣ плоскости H и при совмѣщеніи V съ H вертикальная и горизонтальная проекціи будутъ лежать надъ осью OX.

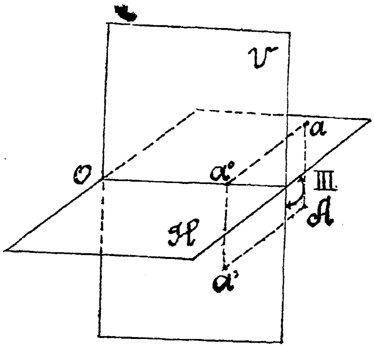


черт. 159

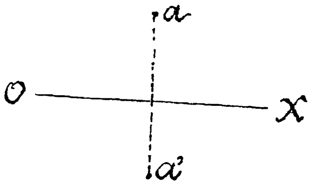


черт. 160

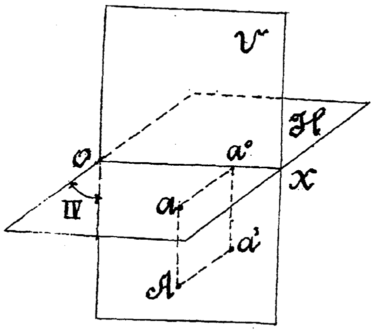
Когда точка A лежитъ въ III-емъ углѣ, то ея вертикальная проекція будетъ расположена на нижней полѣ V, а горизонтальная на задней полѣ H. При совмѣщеніи же плоскостей H и V, ея горизонтальная проекція займетъ мѣсто выше оси OX, а вертикальная ниже OX (черт. 161 и 162). Наконецъ, когда точка A лежитъ въ IV-мъ углѣ, ея вертикальная проекція будетъ расположена на нижней полѣ V, а горизонтальная на передней полѣ H. При совмѣщеніи же плоскостей H и V, вертикальная и горизонтальная проекціи будутъ лежать ниже оси OX (черт. 163 и 164).



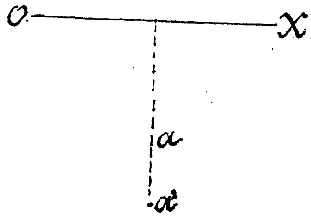
черт.161



черт.162



черт.163

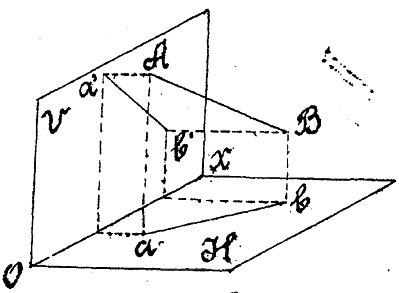


черт.164

3. ПРОЕКЦІИ ПРЯМОЙ ЛИНІИ.

а) Проекціи прямой линіи при разныхъ ея положеніяхъ относительно V и Н.

Прямая линія въ пространствѣ точно опредѣляется двумя точками; поэтому, если будутъ даны двѣ точки прямой, то тѣмъ самымъ будетъ дана и вся прямая. Очевидно, что если даны проекціи двухъ точекъ прямой, то положеніе проекцій прямой линіи вполнѣ будетъ опредѣлено. Въ общемъ случаѣ проекціей прямой будетъ прямая, за исключеніемъ того случая, когда прямая, параллельная направленію проектированія, исчезаетъ въ своей проекціи, проектируясь въ точку (чертежъ 130).

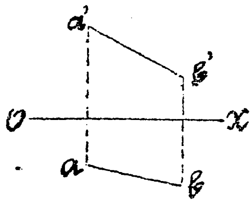


черт.165

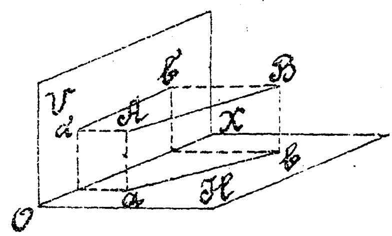
Возьмемъ прямую АВ (черт.165) и построимъ горизонтальныя и вертикальныя проекціи ея концовъ - a, b и a', b'. Для опредѣленія проекцій прямой АВ соединимъ точку a съ b, a a' съ b'. Полученныя прямыя ab и a'b' и будутъ проекціями данной прямой ab - горизонтальной проекціей, a'b' - вертикальной проекціей. При совмѣщеніи V съ Н проекціи ab и a'b' займутъ положеніе, указанное на чертежѣ 166. Разноименныя проекціи a и a' одной и той же точки А, равно какъ и b и b' будутъ лежать соотвѣтственно на одномъ перпендикулярѣ къ OX.

Плоскость ABa'b' перпендикулярная къ V называется *горизонтально проектирующей плоскостью;* плоскость ABab перпендикулярная къ H называется *вертикально проектирующей* плоскостью. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи положенія проектируемой линіи относительно плоскостей проекцій.

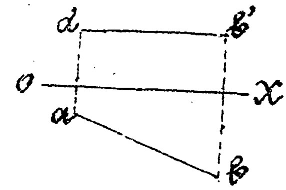
1) Прямая AB занимаетъ случайное положеніе въ пространствѣ (черт.165). Въ этомъ случаѣ обѣ ея проекціи также занимаютъ случайное положеніе относительно оси OX (черт.166).



черт. 166

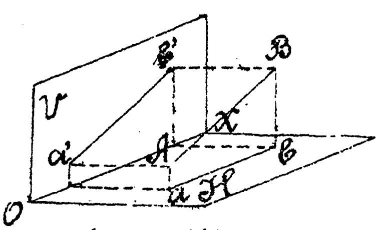


черт. 167

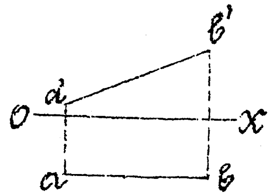


черт. 168

2) Линія AB параллельна плоскости H и не параллельна плоскости V (черт.167). Въ такомъ случаѣ вертикальная проекція a'b' будетъ расположена параллельно OX (черт.168), а горизонтальная займетъ случайное положеніе.

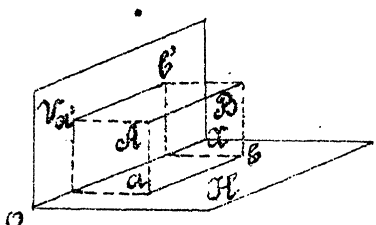


черт. 169

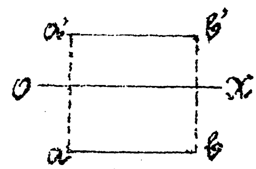


черт. 170

3) Прямая AB параллельна плоскости V и не параллельна плоскости H (черт. 169). Тогда ея горизонтальная проекція будетъ параллельна оси OX (черт.170), а вертикальная a'b' займетъ случайное положеніе.

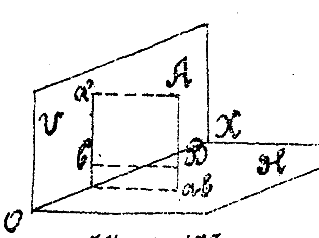


черт. 171

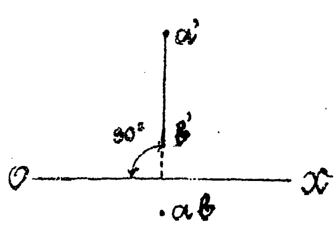


черт. 172

4) Прямая AB параллельна и плоскости H и плоскости V, т.е. AB параллельна оси OX (черт.171). Такъ какъ AB параллельна H, то ея вертикальная проекція a'b' (черт.172) будетъ параллельна OX, и такъ какъ AB параллельна V, то ея горизонтальная проекція ab будетъ параллельна OX. Итакъ, когда AB || OX, обѣ проекціи ab и a'b' будутъ параллельны OX.



черт. 173



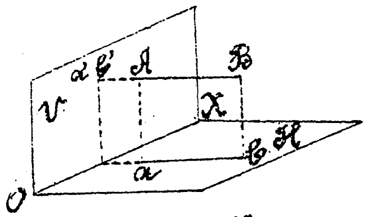
черт. 174

5) Положимъ, что прямая AB перпендикулярна къ плоскости H (черт.173). При такомъ положеніи AB, ея горизонтальная проекція будетъ сливаться въ точку a, а вертикальная проекція a'b' будетъ перпендикулярна къ OX (черт.174).

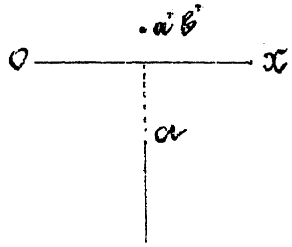
6) Если AB перпендикулярна къ плоскости V (черт.175), то ея горизонтальная проекція ab будетъ перпендикулярна къ OX, а верти -

кальная a'b' сольется въ одну точку (черт.176).

Итакъ, если прямая будетъ перпендикулярна къ какой нибудь изъ плоскостей проекцій, то одна изъ ея проекцій будетъ проектироваться



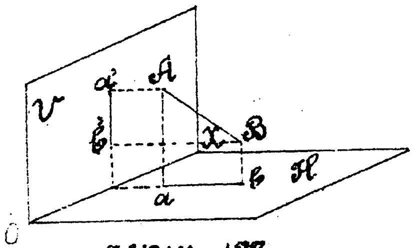
черт.175



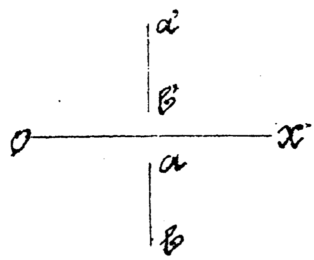
черт.176

въ точку, а другая будетъ перпендикулярна къ оси проекцій. Въ такихъ случаяхъ, когда прямая проектируется въ точку, необходимо эту точку обозначать двумя буквами: ab (черт. 174) или a'b' (черт. 176), такъ какъ въ этой точкѣ слились проекціи ея обоихъ концовъ.

7) Прямая AB лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ OX (черт.177). Такая прямая будетъ сама перпендикулярна къ оси проекцій OX. Плоскость, перпендикулярная къ оси проекцій, называется *профильной плоскостью*.

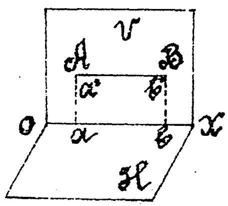


черт.177

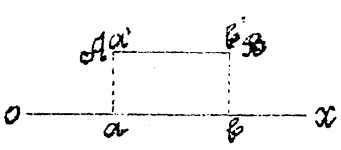


черт. 178

Всѣ линіи, лежащія въ этой плоскости, называются *профильными* линіями. Очевидно, что въ профильной плоскости лежатъ всѣ проектирующія линіи. Спроектируемъ AB на H и на V. Получимъ проекціи ab - горизонтальную и a'b' - вертикальную. Горизонтальная проекція ab совпадаетъ съ линіей сѣченія профильной плоскости A съ H, а вертикальная a'b' - съ линіей сѣченія плоскостей P и V, такъ какъ P является въ одно время и горизонтально и вертикально проектирующей плоскостью данной линіи AB. При совмѣщеніи плоскости V и H проекціи ab и a'b' расположатся какъ указано на чертежѣ 178. Слѣдовательно, профильная линія характеризуется тѣмъ, что ея разноименныя проекціи перпендукулярны къ оси проекцій.

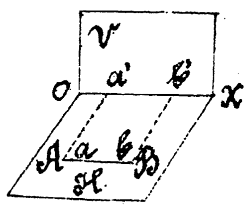


черт.179

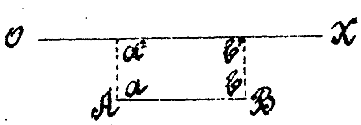


черт.180

8) Линія AB параллельна OX и лежитъ въ плоскости V(черт. 179). Тогда, какъ это видно изъ чертежа 180, горизонтальная проекція ab сольется съ OX, а вертикальная a'b' будетъ параллельна оси OX.

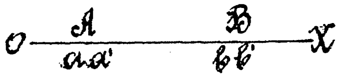


черт.181



черт.182

9) Линія AB параллельна OX и лежитъ въ плоскости H (черт.181). Вертикальная проекція a'b' сольется съ OX, а горизонтальная будетъ параллельна OX (черт. 182).

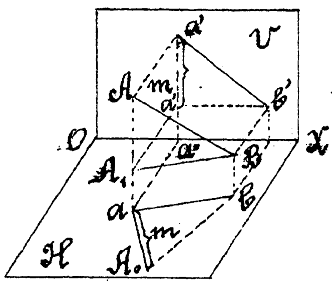


черт.183

10) Линія AB лежитъ на оси OX. Въ этомъ случаѣ обѣ ея проекціи сливаются съ осью OX (черт.183).

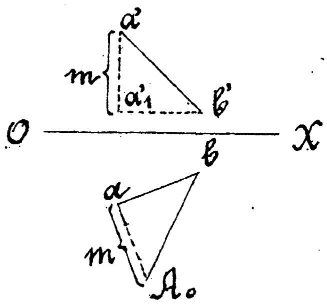
b) *Опредѣленіе длины прямой линіи по даннымъ ея проекціямъ.*

Пусть данъ отрѣзокъ прямой въ пространствѣ AB (черт.184). Построимъ его проекціи ab и a'b'.



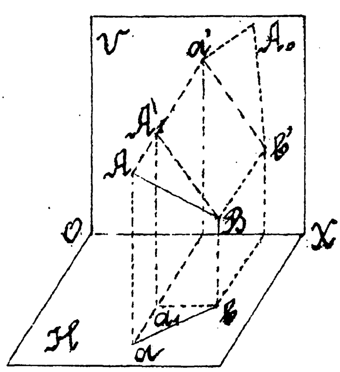
черт. 184

Проведемъ черезъ точку B прямую A_1B, параллельную ab, до пересѣченія съ линіей Aa въ точкѣ A_1, изъ точки b' проведемъ прямую $a_1'b'$, параллельную OX до пересѣченія въ точкѣ a_1' съ $a'a_0$, перпендикулярной къ OX. Зная, что $ab = A_1B$ и разность высотъ $Aa - Bb = AA_1 = a'a_1'$, мы легко можемъ построить на ab такой прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго выразитъ величину отрѣзка AB. Одинъ катетъ ab данъ, другой катетъ $A_0a = a'a_1'$, т.е. выражаетъ разность высотъ концовъ вертикальной проекціи отрѣзка надъ осью OX. На черт.185 всѣ эти построенія исполнены въ проекціяхъ. Итакъ, длина отрѣзка AB въ пространствѣ опредѣляется какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, одинъ изъ катетовъ котораго равенъ длинѣ горизонтальной проекціи отрѣзка, а другой - разности (m) разстояній концовъ вертикальной проекціи того же отрѣзка отъ оси OX.



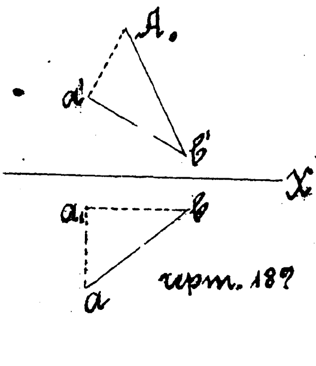
черт. 185

Ту же величину отрѣзка AB можно опредѣлить и инымъ способомъ (черт.186). Проведемъ изъ точки B линію, параллельную a'b' до встрѣчи съ Aa' въ точкѣ A'.... Получаемъ прямоугольный треугольникъ съ прямымъ угломъ при A_1. Два элемента этого треугольника извѣстны: одинъ катетъ $BA_1 = a'b'$, другой равенъ разности разстояній концовъ прямой AB до плоскости V, или концовъ ab до оси OX. Поэтому величина отрѣзка прямой AB въ пространствѣ опредѣляется, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, однимъ катетомъ котораго является величина вертикальной проекціи, а другимъ разность разстояній концовъ горизонтальной проекціи отъ оси. Для опредѣленія AB во второмъ случаѣ достаточно построить на a'b' прямоугольный треугольникъ, одинъ катетъ котораго a'b' (черт.187), а другой равенъ разности (m) разстояній концовъ горизонтальной проекціи отъ оси OX; гипотенуза A_0B и будетъ выражать истинную длину отрѣзка AB.



черт. 186

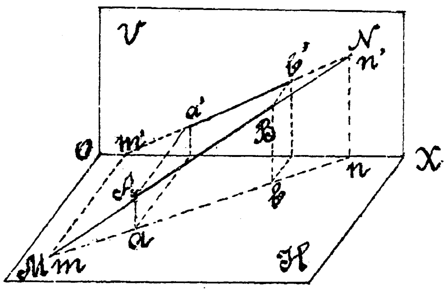
Комбинируя эти два случая, приходимъ къ заключенію что *величина отрѣзка прямой линіи въ пространствѣ выражается гипотенузой прямоугольнаго треугольника, однимъ катетомъ котораго служитъ одна изъ проекцій даннаго отрѣзка, а другимъ разность разстояній концовъ другой его проекціи до оси OX.*



черт. 187

с) *Опредѣленіе слѣдовъ прямой линіи.*

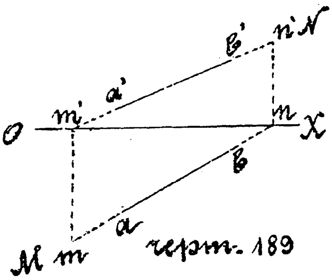
Слѣдами прямой линіи называются точки пересѣченія ея съ плоскостями проекцій. Въ общемъ случаѣ прямая линія имѣетъ два слѣда: горизонтальный M (черт.188), т.е. точку пересѣченія ея съ плоскостью H, и вертикальный N, точку пересѣченія ея съ плоскостью V. Разсматривая чертежъ 188, нетрудно видѣть, что точка M, совпадая со своей горизонтальной проекціей, будетъ имѣть вертикальную проекцію m' на оси; но въ то же время m' должно находиться и на продолженіи линіи a'b', такъ какъ сама точка M лежитъ на продолженіи AB.



черт. 188

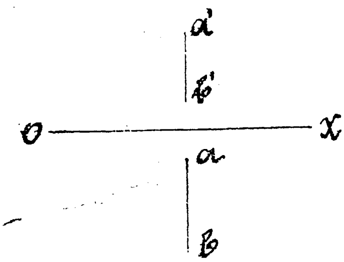
Слѣдовательно, *для нахожденія горизонтальнаго слѣда, слѣдуетъ продолжить вертикальную проекцію прямой до пересѣченія съ осью; въ полученной точкѣ возстановить въ плоскости H перпендикуляръ къ OX, продолживъ его до пересѣченія съ горизонтальной проекціей.*

Разсуждая подобнымъ же образомъ найдемъ, что *для нахожденія вертикальнаго слѣда слѣдуетъ продолжить горизонтальную проекцію прямой до пересѣченія съ осью; въ полученной точкѣ возстановить въ плоскости перпендикуляръ къ OX и продолжить его до пересѣченія съ вертикальною проекціей.* На чертежѣ 189 всѣ эти построенія исполнены въ ортогональныхъ проекціяхъ.

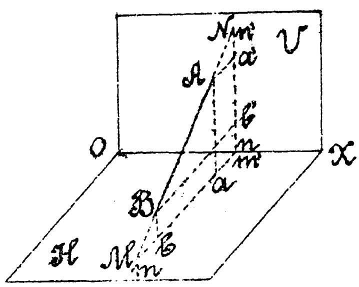


черт. 189

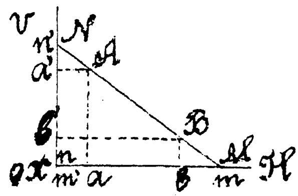
Слѣды *профильной* линіи на основаніи этого правила найти нельзя, такъ какъ перпендикуляры къ оси, опредѣляющіе собою искомые слѣды не будутъ пересѣкаться съ соотвѣтствующими проекціями прямой, а сольются съ ними. Для опредѣленія же слѣдовъ поступимъ слѣдующимъ образомъ:



черт. 190

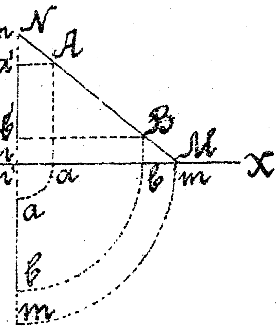


черт. 191

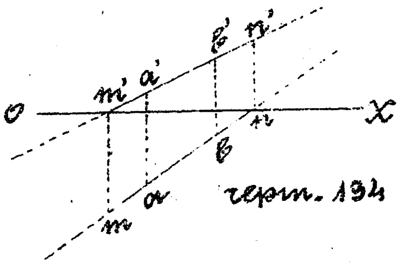


черт. 192

Пусть дана профильная линія AB (черт.190). Разсѣчемъ четыре угла пространства плоскостью, проходящею черезъ AB и перпендикулярною къ OX (черт.191). Пусть точки M и N будутъ искомыми слѣдами. Разсмотримъ отдѣльно полученную фигуру MNm' (черт.192). Такъ какъ положеніе точекъ a, b, a', b' намъ дано, то мы можемъ построить точки A и B. Соединяя ихъ прямой и продолжая ее до пересѣченія съ V и H въ точкахъ N и M, мы получимъ отрѣзки a'n' и bm, которые и слѣдуетъ перенести на черт.190. На чертежѣ 193 показаны всѣ необходимыя построенія для нахожденія слѣдовъ профильной линіи. Чертежъ 193 замѣняетъ чертежи 191 и 192. Условимся въ дальнѣйшемъ линіи, лежащія въ предѣлахъ I-го угла чертить сплошною чертою, а въ предѣлахъ другихъ угловъ - пунк-



черт. 193



черт. 194

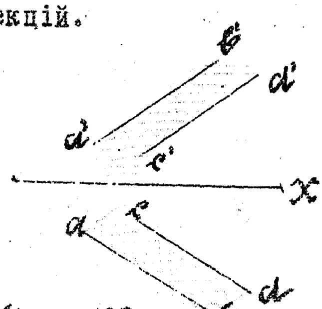
тиромъ, предполагая при этомъ, что зритель находится всегда въ предѣлахъ I-го угла. Слѣдовательно, границами видимости прямой являются ея слѣды. Поэтому прямая AB, изображенная на чертежахъ 188 и 189, приметъ такое обозначеніе (черт.194).

4. ПРОЕКЦІИ ДВУХЪ ПРЯМЫХЪ ЛИНІЙ.

При разсмотрѣніи общихъ свойствъ параллельныхъ проекцій прямыхъ указывалось на относительное расположеніе линій въ пространствѣ.

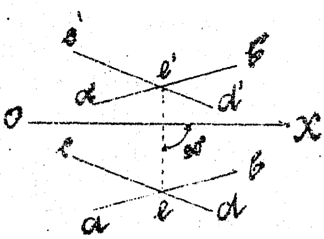
Двѣ прямыя въ пространствѣ могутъ занимать слѣдующія относительныя положенія: а) онѣ могутъ быть параллельны одна другой; б) онѣ могутъ взаимно пересѣкаться; с) онѣ могутъ не быть параллельными и не пересѣкаться между собою.

Посмотримъ теперь, какъ отражается относительное положеніе прямыхъ въ пространствѣ на относительномъ положеніи ихъ ортогональныхъ проекцій.



черт. 195

1) Если двѣ прямыя AB и CD параллельны въ пространствѣ, то и одноименныя ихъ проекціи, какъ мы уже знаемъ изъ общихъ свойствъ параллельныхъ проекцій, при всякомъ направленіи проектированія должны быть параллельны между собою. Слѣдовательно, (черт.195), и проекціи: горизонтальныя - ab и cd и вертикальныя - a'b' и c'd' при ортогональномъ проектированіи будутъ соотвѣтственно параллельны между собою; и обратно, если ab || cd и a'b' || c'd', то, очевидно, и прямыя AB и CD будутъ параллельны въ пространствѣ.



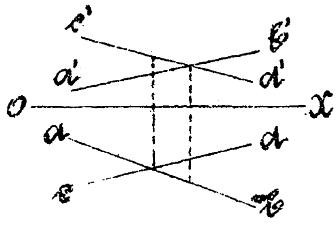
черт. 196

2) Если двѣ прямыя AB и CD взаимно пересѣкаются въ точкѣ E (черт.196), то, какъ мы уже знаемъ опять изъ свойствъ параллельныхъ проекцій, и проекціи ихъ пересѣкаются, причемъ точка пересѣченія проекцій служитъ проекціей точки пересѣченія линій.

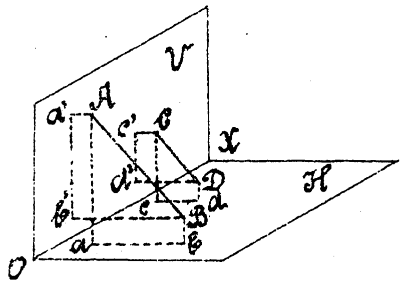
Слѣдовательно, и проекціи: горизонтальныя ab и cd и вертикальныя - a'b' и c'd' при прямоугольномъ проектированіи будутъ пересѣкаться, причемъ точки e и e', точки пересѣченія проекцій, будутъ служить проекціями точки пересѣченія E прямыхъ. При этомъ точки пересѣченія одноименныхъ проекцій лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси OX.

Обратно, если ab и cd пересѣкаются въ точкѣ e и a'b' и c'd' - въ точкѣ e', причемъ ee' перпендикулярно къ OX, то и сами линіи AB и CD въ пространствѣ пересѣкаются въ точкѣ E.

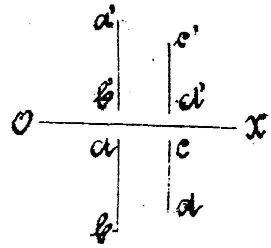
3) Расположеніе проекцій, указанное на чертежѣ 197, показываетъ, что двѣ прямыя въ пространствѣ не параллельны и не пересѣкаются. Посмотримъ теперь, справедливо ли будетъ все вывeденное относительно прямыхъ и ихъ проекцій *для профильныхъ линій.*



черт. 197

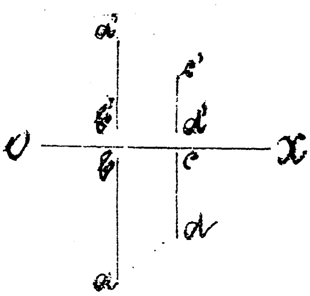


черт. 198



черт. 199

Для параллельныхъ двухъ прямыхъ, лежащихъ въ двухъ профильныхъ плоскостяхъ, требуется (черт. 198 и 199) во 1-хъ, чтобы ихъ проекціи были параллельны; во 2-хъ, чтобы проекціи были одинаково направлены относительно OX; если, напримѣръ, для отрѣзка AB, лежащаго въ первомъ углѣ, точки a' и b дальше отъ оси OX, чѣмъ точки b' и a, то и c'd должны быть дальше удалены отъ оси, чѣмъ d' и c; въ 3-хъ, чтобы разноименныя проекціи находились въ одинаковомъ отношеніи другъ другу, т.е. для параллельности линій, изображенныхъ на чертежѣ, должно существовать равенство $\frac{a'b'}{ab} = \frac{c'd'}{cd}$. Линіи AB и CD, изображенныя на чертежѣ 200, не параллельны другъ другу, хотя и имѣетъ мѣсто равенство $\frac{a'b'}{ab} = \frac{c'd'}{cd}$.



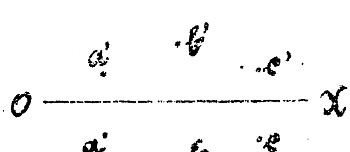
черт. 200

5. ПЛОСКОСТЬ.

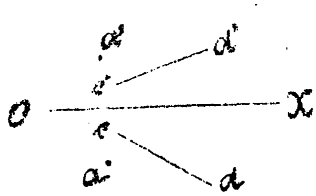
a) *Различныя положенія плоскости относительно плоскостей проекцій.*

Положеніе плоскости въ пространствѣ можно опредѣлить слѣдующимъ способами:

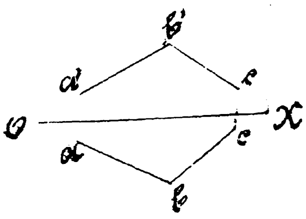
Можно дать положеніе или a) трехъ ея точекъ, не лежащихъ на одной прямой линіи (черт. 201), или b) прямой и точки, на прямой не лежащей



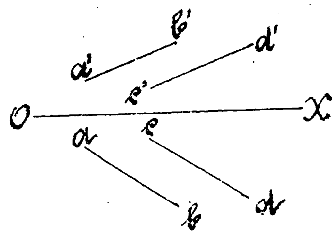
черт. 201



черт. 202

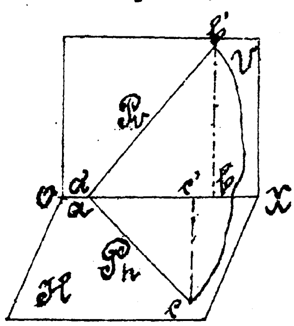


черт. 203

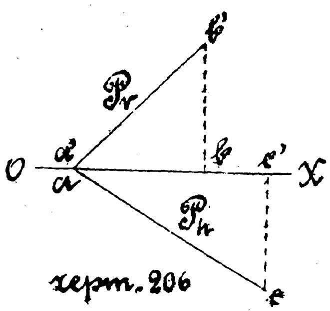


черт. 204

(черт.202), или с) двухъ пересѣкающихся прямыхъ (черт.203), или d) двухъ параллельныхъ прямыхъ (черт.204). Всякая плоскость въ общемъ случаѣ пересѣкаетъ плоскости проекцiй H и V линiи этого пересѣченiя являются очень удобными для заданiй плоскости, такъ какъ по расположенiю этихъ линiй легко можно судить о положенiи самой плоскости P относительно плоскостей проекцiй. Эти линiи называются *слѣдами* плоскости. Линiя сѣченiя плоскостей P и V называется *вертикальнымъ слѣдомъ* плоскости P и обозначается черезъ P_v, а линiя сѣченiя плоскостей P и H называется *горизонтальнымъ слѣдомъ* плоскости P и обозначается черезъ P_h (черт. 205). Слѣды плоскости, на ряду съ другими прямыми, лежащими въ ней, очевидно, могутъ служить для ея заданiя въ проекцiяхъ (черт. 206). Заданiе плоскости слѣдами представляетъ большое преимущество передъ другими способами заданiя, такъ какъ оно отличается большею наглядностью изображенiя положенiя плоскости относительно плоскостей проекцiй. Плоскость P можетъ занимать различныя положенiя въ пространствѣ. Разсмотримъ, какимъ образомъ расположенiе плоскости P относительно плоскостей H и V отзывается на расположенiи слѣдовъ плоскости между собою и относительно оси OX. Всѣ положенiя плоскости P относительно V и H можно подвести подъ слѣдующiе случаи:



черт. 205



черт. 206

1. *Плоскость P пересѣкается съ OX (черт.205 и 206).*

Въ этомъ случаѣ точка ихъ пересѣченiя должна бытѣ общею для трехъ плоскостей: P, V и H. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, общихъ для P и V, служитъ прямая P_v; геометрическимъ мѣстомъ точекъ, общихъ для P и H - прямая P_h Слѣдовательно, точкою, общею для P, V и H, можетъ быть только точка, общая для P_v и P_h, т.е. точка пересѣченiя послѣднихъ; а такъ какъ эта точка должна лежать одновременно на V и на H, т. е. на линiи ихъ сѣченiя, то точка пересѣченiя слѣдовъ будетъ лежать на оси OX. Точка пересѣченiя слѣдовъ (aa'), являющаяся общею для обоихъ слѣдовъ, называется точкою схода слѣдовъ.

2. *Плоскость P перпендикулярна къ H (черт.207).*

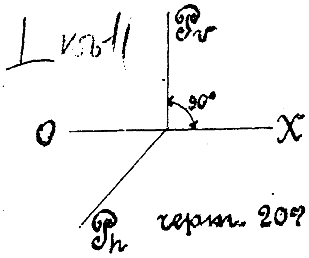
Въ этомъ случаѣ вертикальный слѣдъ P_v, какъ линiя сѣченiя двухъ плоскостей P и V, перпендикулярныхъ къ третьей H, будетъ перпендикуляренъ къ оси OX, а горизонтальный слѣдъ будетъ занимать случайное положенiе.

3. *Плоскость P перпендикулярна къ плоскости V (черт.208).*

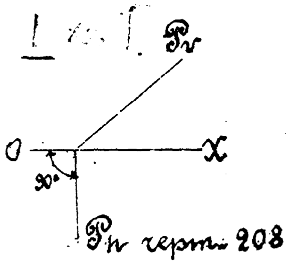
Тогда, очевидно, горизонтальный слѣдъ P_h будетъ перпендикуляренъ къ оси, а вертикальный займетъ случайное положеніе.

4. Плоскость P перпендикулярна и къ плоскости H и къ плоскости V (черт.209).

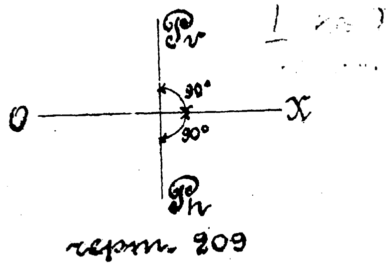
Слѣдовательно, P является профильною плоскостью. Линіи сѣченія - слѣды плоскости - перпендикулярны къ OX и проходятъ черезъ общую точку схода. Слѣдовательно, слѣды P_v и P_h сливаются въ одну прямую, перпендикулярную къ OX.



черт. 207

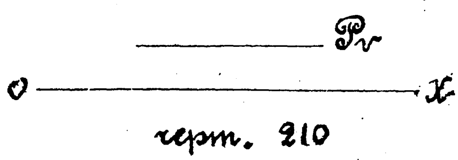


черт. 208



черт. 209

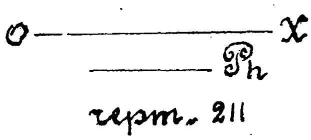
5. Плоскость P параллельна плоскости H (черт.210).



черт. 210

Очевидно, въ этомъ случаѣ слѣдъ P_h уйдетъ въ безконечность, и на чертежѣ останется лишь слѣдъ P_v, параллельной оси OX.

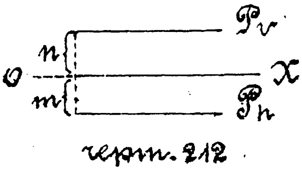
6. Плоскость P параллельна плоскости V (черт.211).



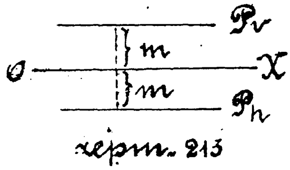
черт. 211

Горизонтальный слѣдъ P_h будетъ параллеленъ оси OX, а вертикальный уйдетъ въ безконечность.

7. Плоскость P параллельна оси OX (черт.212).



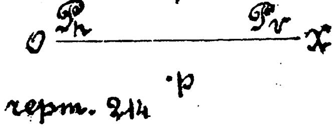
черт. 212



черт. 213

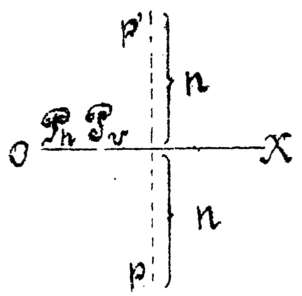
Въ этомъ случаѣ слѣды P_h и P_v будутъ параллельны оси OX и въ общемъ случаѣ отстоятъ отъ нея на неравныхъ разстояніяхъ; но если плоскость P (черт.213) наклонна къ плоскостямъ H и V подъ угломъ 45°', то слѣды P_h и P_v одинаково отстоятъ отъ оси.

8. Плоскость P проходитъ черезъ ось OX (черт.214).



черт. 214

Въ этомъ случаѣ P_h и P_v сливаются другъ съ другомъ и съ осью OX, и заданіе плоскости только слѣдами является неопредѣленнымъ, такъ какъ можно провести безчисленное множество плоскостей, которыя проходили бы черезъ ось OX. Чтобы сдѣлать заданіе опредѣленнымъ слѣдуетъ задаться еще какой нибудь точкой P, принадлежащей плоскости P.

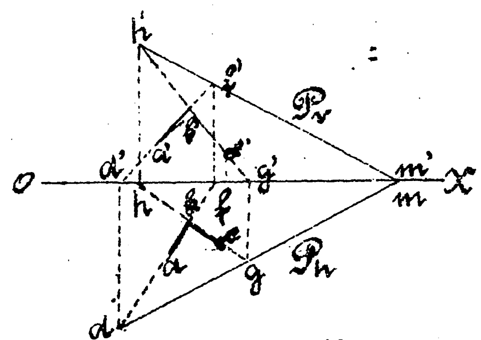


черт. 215

Если при этомъ плоскость P, проходя черезъ ось OX, совпадаетъ съ *биссекторной* плоскостью двуграннаго угла между H и V (черт.215), то всѣ точки плоскости P въ пространствѣ лежатъ въ равномъ разстояніи отъ V и H и, слѣдовательно, разноименныя проекціи любой точки P находятся въ равномъ разстояніи отъ оси OX.

b) *Построеніе слѣдовъ плоскости.*

Изъ всѣхъ способовъ опредѣленія плоскости въ пространствѣ (опредѣленіе тремя точками, точкой и прямой, двумя пересѣкающимися прямыми, двумя параллельными прямыми) наиболѣе общимъ является способъ опредѣленія плоскости двумя пересѣкающимися прямыми. Такъ какъ положеніе слѣдовъ плоскости относительно оси проекцій характеризуетъ положеніе самой плоскости относительно оси проекцій, то во многихъ случаяхъ заданіе плоскости ея слѣдами является болѣе цѣлесообразнымъ и, главное, болѣе нагляднымъ, чѣмъ заданіе не слѣдами. Поэтому, иногда приходится переходить отъ различныхъ заданій плоскости къ заданію ея слѣдами. Въ этихъ случаяхъ только что указанный способъ заданія плоскости двумя пересѣкающимися прямыми есть способъ самый простой относительно перехода къ заданію плоскости слѣдами. Возьмемъ, напримѣръ, такое заданіе: задана плоскость P двумя пересѣкающимися прямыми AB и BC (черт. 216).



черт. 216

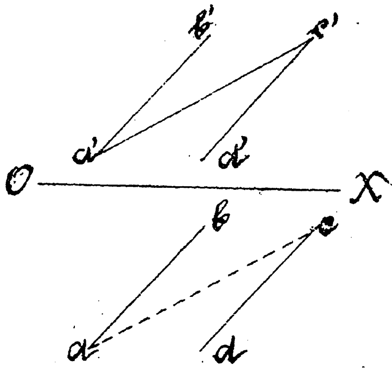
Перейдемъ теперь къ заданію этой же плоскости P ея слѣдами. Задача сводится къ нахожденію слѣдовъ данныхъ линій AB и BC. Находимъ f - горизонтальную проекцію вертикальнаго слѣда AB, f' - вертикальную проекцію вертикальнаго слѣда линіи AB. Съ f совпадаетъ и самый вертикальный слѣдъ F прямой AB. d и d' - горизонтальная и вертикальная проекціи горизонтальнаго слѣда линіи AB, h и h' - горизонтальная и вертикальная проекціи вертикальнаго слѣда BC, g и g' - горизонтальная и вертикальная проекціи горизонтальнаго слѣда прямой BC. Соединивъ f' и h' получимъ вертикальный слѣдъ P_v плоскости P, соединивъ d съ g, получимъ горизонтальный слѣдъ P_h плоскости P. Оба слѣда P_v и P_h должны пересѣчься въ точкѣ M - схода слѣдовъ, лежащей на оси OX. Если извѣстенъ одинъ слѣдъ (напримѣръ, горизонтальный P_h), то для построенія другого (вертикальнаго P_v) достаточно найти одну только точку искомаго слѣда (напримѣръ, точку F), чтобы опредѣлить его. Для этого достаточно соединить эту точку съ точкой схода слѣдовъ M.

Возьмемъ другія заданія плоскости въ пространствѣ и покажемъ, какъ отъ этихъ различныхъ заданій переходить къ предыдущему заданію, т.е. къ заданію плоскости двумя пересѣкающимися прямыми и, слѣдовательно, къ заданію плоскости ея слѣдами.

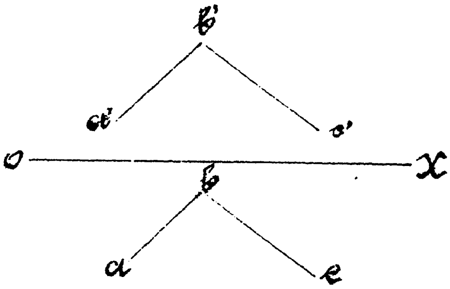
1) Плоскость задана двумя параллельными прямыми AB и CD (черт. 217). Соединивъ точки A и C, получаемъ заданіе плоскости двумя пересѣкающимися прямыми AB и AC, т.е. переходимъ къ предыдущему заданію.

2) Плоскость задана тремя точками A, B, C. Соединивъ (черт. 218) эти точки, получаемъ заданіе плоскости двумя пересѣкающимися прямыми AB и BC.

3) Плоскость задана прямой AB и точкой C (черт.219). Соединивъ A съ C, получаемъ заданіе плоскости двумя пересѣкающимися прямыми AB и AC.

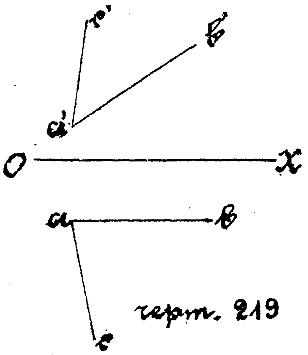


черт. 217

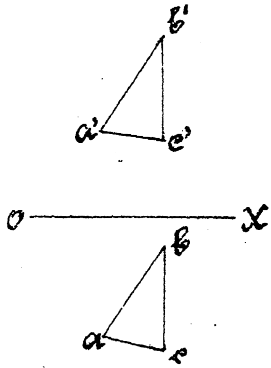


черт 218

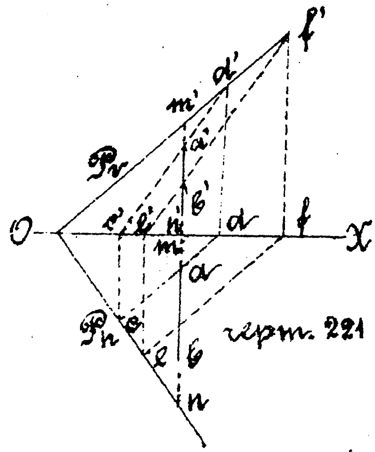
4) Плоскость задана двумя пересѣкающимися прямыми AB и BC, причемъ AB случайно расположена, а BC - линія профильная. Соединяемъ (черт.220) точки A и C. Мы можемъ теперь опредѣлять плоскость двумя пересѣкающимися прямыми AB и AC, расположенными случайно. Такимъ образомъ, построеніе слѣдовъ профильной линіи мы можемъ замѣнить болѣе удобной линіи AC.



черт. 219



черт. 220



черт. 221

Задача. Опредѣлить слѣды профильной линіи AB (черт.221).

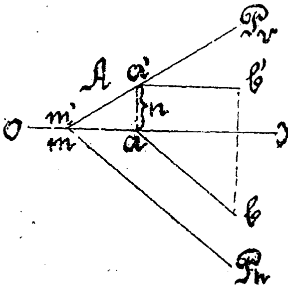
Рѣшеніе. Проводимъ черезъ точки A и B двѣ взаимно параллельныхъ линіи AC и BE. Строимъ слѣды плоскости опредѣляемой линіями AC и BE (и AB), находимъ слѣды C (c и c'), D (d и d'), E (e и e') и F (f и f') линій AC и BE и соединяемъ одноименные слѣды - C съ E и D съ F. Полученныя линіи P_h и P_v и будутъ являться слѣдами плоскости ABC. Такъ какъ линія AB лежитъ въ плоскости ABC, то слѣды ея должны лежать на соотвѣтственныхъ слѣдахъ плоскости P. Поэтому горизонтальный слѣдъ N линіи AB опредѣляется какъ точка пересѣченія ab съ P_h, а вертикальный слѣдъ M - опредѣлится какъ точка пересѣченія a'b' съ P_v.

c) *Построеніе горизонталей и фронталей плоскости.*

При рѣшеніи разнаго рода задачъ приходится пользоваться линіями, лежащими въ данной плоскости и параллельными той или другой плоскости проекцій, такъ называемыми горизонталями и фронталями. Прямыя, лежащія въ какой нибудь плоскости P и параллельныя плоскости H, называются *горизонталями* плоскости P, прямыя же, параллельныя плоскости

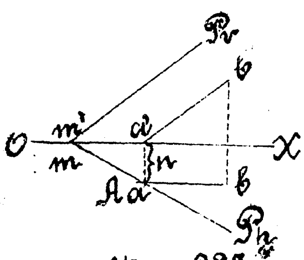
V - *фронталями* плоскости P. Разсмотримъ, какъ находить эти линіи.

Пусть намъ дана плоскость P, случайно расположенная, двумя ея слѣдами P_h и P_v; требуется построить какую нибудь горизонталь этой плоскости: Линій, параллельныхъ плоскости H, т.е. горизонталей, въ плоскости P можно найти сколько угодно, проведя черезъ любыя точки на плоскости P линіи, параллельныя плоскости H. Для рѣшенія нашей задачи возьмемъ на плоскости P (черт. 222) какую нибудь точку A и проведемъ черезъ нее въ плоскости P прямую, параллельную H. Пусть точка a' на слѣдѣ P_v будетъ вертикальный слѣдъ искомой линіи AB. Такъ какъ точка A является вертикальнымъ слѣдомъ искомой линіи, то ея горизонтальная проекція a лежитъ на оси. Искомая линія параллельна плоскости H, слѣдовательно, ея вертикальная проекція будетъ параллельна оси проекцій (см.черт.168). Чтобы найти вертикальную проекцію искомой линіи, проведемъ изъ точки a' прямую a'b', параллельную оси проекцій. Искомая линія (горизонталь) AB параллельна горизонтальному слѣду P_h, такъ какъ проекція параллельныхъ линій параллельны между собою. Слѣдовательно, для нахожденія горизонтальной проекціи искомой линіи надо провести черезъ точку a прямую ab, параллельную горизонтальному слѣду P_h плоскости P. Такимъ образомъ, мы нашли и вертикальную, и горизонтальную проекціи искомой линіи AB, т.е. горизонтали. Найдемъ теперь въ плоскости P линію, параллельную плоскости V, т.е. фронталь. Поступаемъ аналогично нахожденію горизонтали.



черт. 222

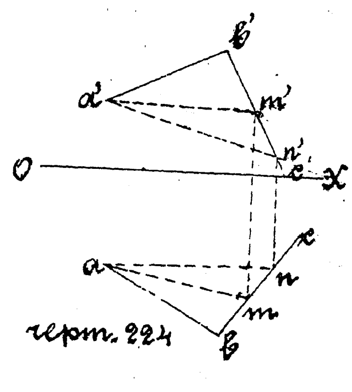
Возьмемъ какую нибудь точку A (черт. 223) на плоскости P и проведемъ черезъ нее линію, параллельную плоскости V и лежащую въ P. Пусть ея горизонтальный слѣдъ будетъ точка A на горизонтальномъ слѣдѣ P_h плоскости P. Такъ какъ искомая линія параллельна плоскости V, то ея горизонтальная проекція будетъ параллельна оси проекцій. Проведя изъ точки a линію, параллельную оси проекцій, получимъ горизонтальную проекцію ab искомой линіи AB. Фронталь параллельна P_v, слѣдовательно, вертикальная проекція a'b' будетъ параллельна P_v. Такимъ образомъ, мы нашли фронталь въ ея проекціяхъ ab и a'b'. Разстояніе n въ обоихъ случаяхъ показываетъ разстояніе фронтали или горизонтали отъ параллельныхъ имъ плоскостей проекцій. Изъ предыдущаго ясно, что горизонталь опредѣляетъ направленіе горизонтальнаго слѣда плоскости, а фронталь - направленіе вертикальнаго слѣда плоскости. Такимъ образомъ, если даны горизонталь и фронталь, то само собою опредѣляется направленіе слѣдовъ плоскости, въ которой лежатъ данныя линіи. Для примѣра возьмемъ слѣдующее заданіе.



черт. 223

Задана плоскость P двумя пересѣкающимися прямыми AB и BC (черт.224); найти направленіе слѣдовъ этой плоскости.

Пусть a'b' и b'c' будутъ вертикальныя проекціи данныхъ пересѣкающихся прямыхъ, а ab и bc - горизонтальныя. Проведемъ въ плоскости P какую нибудь горизонталь. Для этого изъ точки a' прове-



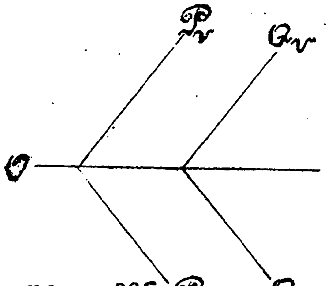
черт. 224

демъ прямую, параллельную OX до встрѣчи съ b'c' въ точкѣ m'. Найдемъ горизонтальную проекцію m точки M на bc и соединимъ ее съ точкой a. Такимъ образомъ, мы нашли горизонталь AM, такъ какъ прямая AM имѣетъ двѣ общія точки съ плоскостью P и параллельна плоскости H. Горизонтальная проекція am и укажетъ намъ направленіе горизонтальнаго слѣда, такъ какъ она ему параллельна.

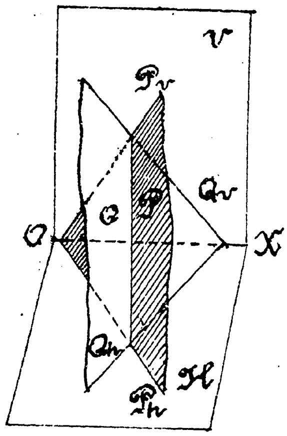
Найдемъ какую нибудь фронталь на плоскости P. Для этого изъ точки a проведемъ линію, параллельную OX до встрѣчи съ bc въ точкѣ n и построимъ вертикальную проекцію n' на линіи b'c'. Линія AN будетъ фронталью, такъ какъ имѣетъ двѣ общія точки съ плоскостью P и параллельна плоскости V. Соединивъ a' съ n' получимъ вертикальную проекцію фронтали, и, слѣдовательно, узнаемъ направленіе вертикальнаго слѣда плоскости P, такъ какъ вертикальная проекція фронтали параллельна ему. Во многихъ случаяхъ приходится находить не самые слѣды, а ихъ направленіе. Только что указанный способъ и даетъ намъ возможность наиболѣе просто опредѣлять направленіе слѣдовъ.

6. *ДВѢ ПЛОСКОСТИ.*

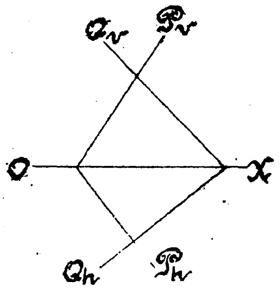
а) *Относительное положеніе двухъ плоскостей.*



черт. 225



черт. 226



черт. 227

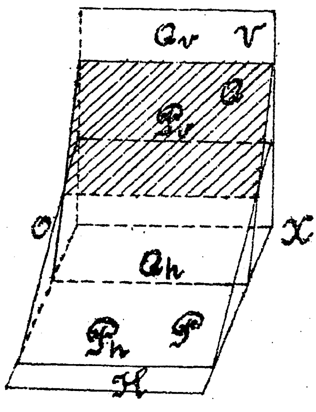
Двѣ плоскости въ пространствѣ могутъ быть или параллельны, въ частномъ случаѣ сливаться, или пересѣкаться. Если двѣ плоскости параллельны, то въ общемъ случаѣ и ихъ одноименные слѣды будутъ параллельны (черт. 225), такъ какъ данныя плоскости будутъ пересѣкать плоскости проекцій по линіямъ параллельнымъ.

Наоборотъ, если одноименные слѣды двухъ плоскостей параллельны, то и сами плоскости въ общемъ случаѣ параллельны. Если плоскости пересѣкаются, то слѣды ихъ занимаютъ случайное положеніе, т.-е. въ зависимости отъ положенія пересѣкающихся плоскостей могутъ или пересѣкаться, или быть параллельны. Въ общемъ случаѣ, разъ плоскости пересѣкаются, то и слѣды ихъ пересѣкаются (черт.226 и 227).

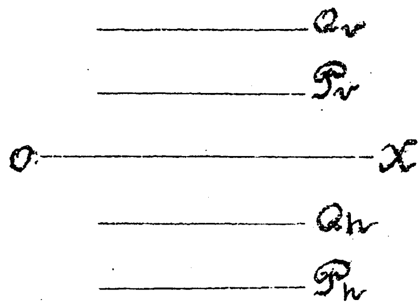
Возьмемъ такой случай. Плоскости не параллельны, а ихъ одноименные слѣды параллельны. Это возможно только въ томъ случаѣ, если данныя плоскости параллельны оси проекцій (черт.228 и 229).

b) *Построеніе линіи сѣченія двухъ плоскостей P и Q, заданныхъ ихъ слѣдами.*

Чтобы найти линію сѣченія двухъ плоскостей необходимо знать двѣ точки, общія обѣимъ плоскостямъ. Въ качествѣ такихъ точекъ выберемъ

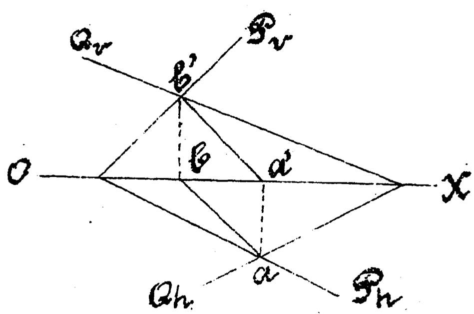


черт. 228

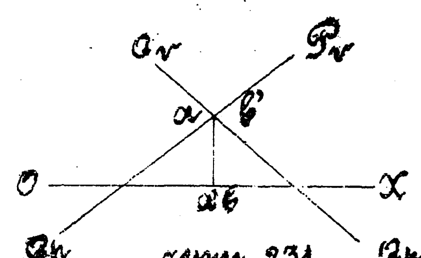


черт. 229

точки A и B пересѣченія одноименныхъ слѣдовъ плоскостей (черт.230). Горизонтальная проекція (a) точки A сольется съ самой точкой A, а вертикальная a' будетъ лежать на оси OX, такъ какъ сама точка A лежитъ на H. Вертикальная проекція (b') точки B - сольется съ самой точкой B, а горизонтальная будетъ лежать на оси OX, такъ какъ сама точка B лежитъ въ плоскости V. Остается соединить a съ b и a' съ b', чтобы получить въ проекціяхъ (ab и a'b') искомую линію AB сѣченія плоскостей P и Q.



черт. 230



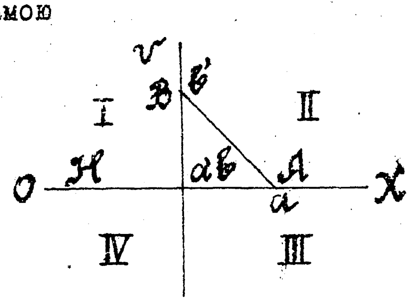
черт. 231

Такимъ образомъ, *чтобы найти линію сѣченія двухъ плоскостей, надо найти точки пересѣченія ихъ одноименныхъ слѣдовъ и соединить между собою одноименныя проекціи этихъ точекъ.*

Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи построенія линіи сѣченія двухъ плоскостей, заданныхъ ихъ слѣдами.

1) Заданы двѣ пересѣкающіяся плоскости P и Q ихъ слѣдами, причемъ плоскости расположены такъ, что слѣды каждой изъ нихъ (P_h, P_v и Q_h, Q_v) расположены на одной прямой. Требуется найти линію сѣченія плоскостей P и Q.

Производимъ построеніе по тому же способу, какъ и въ общемъ случаѣ: найдемъ двѣ точки , общія обѣимъ плоскостямъ и соединимъ ихъ одноименныя проекціи (черт.231). Точкой пересѣченія Q_v и P_v будетъ точка B; ея вертикальная проекція - b' совпадаетъ съ самою точкою B, а горизонтальная проекція - b расположится на оси OX. Точка пересѣченія P_h и Q_h будетъ A. Ея горизонтальная проекція a совпадаетъ съ самою



черт. 232

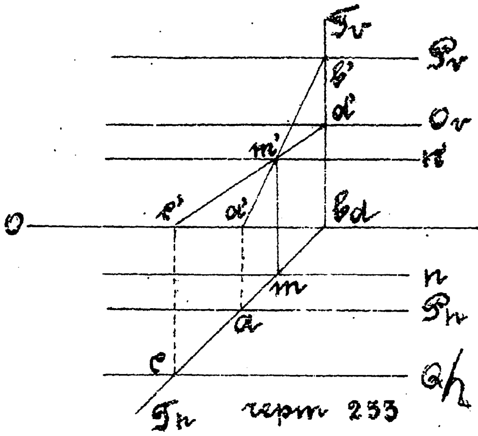
самою точкою A, а вертикальная a будетъ на ~~оси~~ OX. Соединивъ точки a съ b и a' съ b', получимъ проекціи искомой линіи сѣченія. Такъ какъ ab и a'b' перпендикулярны къ OX, то сама линія AB является линіей продольной.

Разсмотримъ эту линію, сдѣлавъ разрѣзъ четырехъ угловъ профильною плоскостью (черт.232)

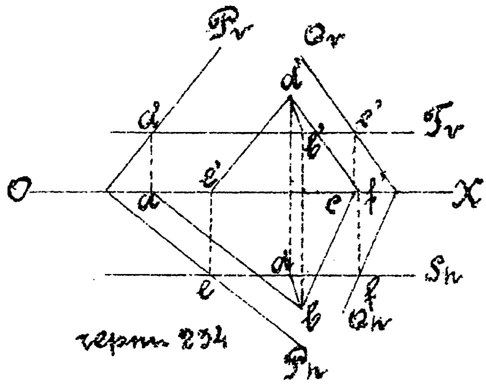
Такъ какъ a'b равно ab, то линія сѣченія двухъ плоскостей AB будетъ наклонена и къ плоскости H и къ плоскости V подъ угломъ въ 45° Такъ какъ плоскости P и Q заданы случайно, то отсюда выводимъ общее заключеніе, что всякая плоскость, слѣды которой расположены по одной прямой заключаетъ въ себѣ прямую, наклоненную къ V и къ H подъ угломъ въ 45°

2) Заданныя плоскости P и Q параллельны оси OX, слѣдовательно, ихъ слѣды тоже параллельны OX. Въ этомъ случаѣ примѣненіе общаго способа нахожденія линіи сѣченія невозможно, такъ какъ нѣтъ ни одной точки сѣченія слѣдовъ. Такъ какъ P и Q параллельны OX, то и линія ихъ сѣченія тоже будетъ параллельна OX. Слѣдовательно, достаточно найти какую нибудь одну точку, общую плоскостямъ P и Q, чтобы найти линію ихъ сѣченія. Для нахожденія этой точки воспользуемся какою нибудь вспомогательною плоскостью, линіи сѣченія которой съ данными плоскостями было бы легко найти, напримѣръ, проведемъ новую плоскость T (T_v, T_h) перпендикулярно къ H (черт.233).

Построимъ линіи сѣченія плоскости T съ P - AB и плоскости T съ Q - такъ, какъ указано ранѣе. Точка пересѣченія M линіи AB и CD принадлежитъ плоскостямъ P и Q, а слѣдовательно, и линіи ихъ сѣченія. Проводя черезъ эту точку линію, параллельную OX, получаемъ искомую линію MN сѣченія плоскостей P и Q.

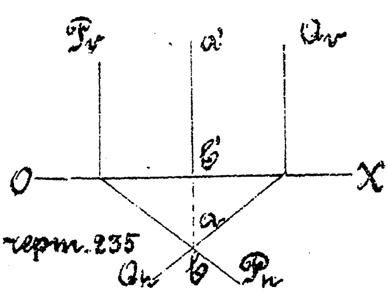


черт 233



черт. 234

3) Если слѣды заданныхъ плоскостей P и Q въ предѣлахъ чертежа не пересѣкаются и не параллельны оси OX, то пользуются двумя вспомогательными плоскостями. Одну изъ нихъ T проводимъ, напримѣръ, параллельно H, другую S параллельно V (черт.234), съ такимъ разсчетомъ, чтобы линіи ихъ сѣченія съ P и Q пересѣкались въ предѣлахъ чертежа. Находимъ линіи сѣченія T съ P (линія AB), T съ Q (линія CB), S съ P (линія ED) и S съ Q (линія FD). Точки пересѣченія линій: AB съ CB (точки B) и ED съ FD (точка D) и опредѣляютъ искомую линію сѣченія BD плоскостей P и Q.



черт. 235

4) Обѣ плоскости перпендикулярны къ одной изъ плоскостей проекцій. Пусть, напримѣръ, плоскости P и Q перпендикулярны къ H (черт.235). Очевидно, что линія AB сѣченія P съ Q также будетъ перпендикулярна къ H. Найдя одну изъ точекъ ея (B) пересѣченія слѣдовъ P съ , проведемъ черезъ нее AB, перпендикулярно къ H. Эта линія и будетъ искомой.

5) Если плоскости заданы каждая двумя пересѣкающимися линіями, то можно найти слѣды каждой изъ плоскостей и тогда задача на нахожденіе линій сѣченія сводится къ предыдущимъ. О построеніи линіи сѣченія плоскостей безъ нахожденія ихъ слѣдовъ будетъ указано позднѣе.

7. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНІЕ ПРЯМОЙ ЛИНІИ И ПЛОСКОСТИ.

Прямая линія относительно плоскости можетъ занимать слѣдующія положенія:

a) она можетъ лежать въ плоскости;
b) она можетъ быть ей параллельна;
c) она можетъ съ ней пересѣкаться и въ частномъ случаѣ;
d) она можетъ быть къ ней перпендикулярной и
e) она можетъ быть къ ней наклонена подъ даннымъ угломъ.

Не всегда то или иное относительное положеніе прямой и плоскости ясно характеризуется взаимнымъ положеніемъ ихъ проекцій; въ большинствѣ случаевъ, для выясненія истиннаго положенія прямой и плоскости бываетъ необходимо прибѣгать къ вспомогательнымъ построеніямъ.

Для рѣшенія вопроса о томъ, лежитъ ли прямая въ данной плоскости или нѣтъ, намъ достаточно убѣдиться, не имѣетъ ли эта прямая съ плоскостью двухъ общихъ точекъ; или, не имѣетъ ли она хоть одну тольк общую точку, но только при томъ условіи, если она параллельна ка либо другой прямой, лежащей въ данной плоскости.

Для того, чтобы судить о параллельности прямой съ плоскостью, статочно посмотрѣть, нельзя ли въ этой плоскости провести прямую, раллельную данной, или, нельзя ли черезъ прямую провести плоскос параллельную данной. Пересѣкаемость прямой съ плоскостью будем им на лицо въ томъ случаѣ, когда прямая не лежитъ въ данной плоскости не параллельна ей.

Если прямая перпендикулярна къ плоскости, то она должна быть перпендикулярна по крайней мѣрѣ къ двумъ не параллельнымъ между собою линіямъ, лежащимъ въ этой плоскости.

Если прямая должна быть наклонена къ плоскости подъ даннымъ угломъ, то это значитъ, что уголъ между самою прямою и ея прямоугольной проекціей на плоскости долженъ быть равенъ данной величинѣ.

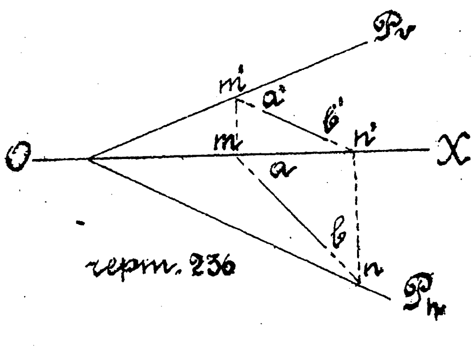
При заданіи плоскости, мы можемъ встрѣтиться чаще всего съ двоякаго рода опредѣленіями ея въ пространствѣ:

во 1-хъ, плоскость опредѣляется слѣдами и
во 2-хъ, " " двумя пересѣкающимися линіями.

Разберемъ порознь оба заданія, имѣя въ виду, что вмѣстѣ съ плоскостью дается и прямая линія.

a) *Плоскость задана слѣдами.*

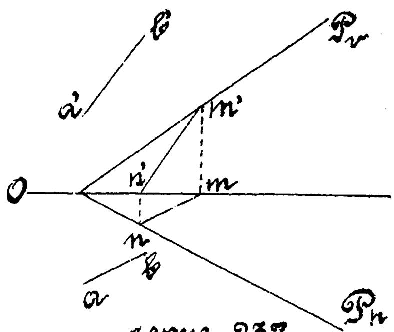
α) Лежитъ ли данная рямая AB въ плоскости P? - Продолжая линію AB (черт.236), мы находимъ ея слѣды M и N. Для того, чтобы наша прямая AB, не будучи параллельной ни одному изъ этихъ слѣдовъ, лежала въ плоскости P, необходимо, чтобы она имѣла съ этой плоскостью двѣ общія точки; такими точками могутъ быть только точки пересѣченія прямой со слѣдами. Поэтому, если окажется, что слѣды прямой AB лежатъ на соотвѣтственныхъ слѣдахъ плоскости P, то это является указаніемъ, что линія AB, какъ имѣющая съ плоскостью P двѣ общія точки, лежитъ въ ней. Если же слѣды линій AB не лежатъ на слѣдахъ плоскости, то это показываетъ, что AB не лежитъ въ плоскости P.



черт. 236

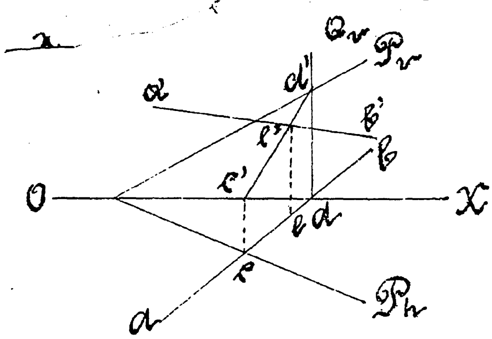
Въ частномъ случаѣ, когда плоскость P и AB параллельны OX, то достаточно показать, что прямая имѣетъ съ плоскостью одну какую нибудь общую точку, чтобы узнать, лежитъ AB въ плоскости P или нѣтъ. Если прямая параллельна одному изъ слѣдовъ (напримѣръ, P_v), то, чтобы узнать, лежитъ ли AB въ плоскости P, достаточно показать, что AB и P имѣютъ хотя бы одну общую точку (напримѣръ, пересѣченіе P_h съ AB).

β) *Узнать, параллельна ли плоскости P прямая AB, заданная внѣ этой плоскости (черт.237).* - Возьмемъ какую нибудь точку M на слѣдѣ P_v, изъ m' проведемъ m'n' параллельно a'b' и изъ m - mn параллельно ab. При такихъ условіяхъ линія MN будетъ параллельна AB, и если бы удалось показать, что MN лежитъ въ плоскости P, то это значило бы, что AB параллельна плоскости P. Найдя горизонтальный слѣдъ линіи MN, мы видимъ, что онъ лежитъ на слѣдѣ P_h, а потому сама MN лежитъ въ плоскости P и, слѣдовательно, линія AB этой послѣдней параллельна. Если бы слѣдъ N линіи MN не лежалъ на слѣдѣ P_h, то и AB не была бы параллельна P.



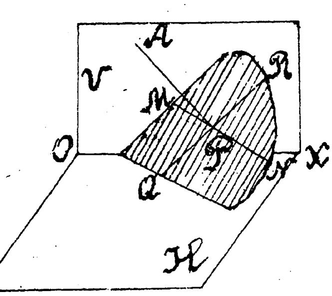
черт. 237

γ) *Найти точку пересѣченія линіи AB съ плоскостью P (черт.238).* Проведемъ черезъ линію AB вспомогательную плоскость , перпендикулярную къ H. Если эта плоскость будетъ перпендикулярна къ H и заключать въ себѣ линію AB, то горизонтальный слѣдъ ея Q_h совпадетъ съ горизонтальной проекціей линіи (ab), а вертикальный будетъ перпендикуляренъ къ оси OX. Найдемъ линію (cd, c'd') пересѣченія плоскостей P и Q; точка (e, e') ея пересѣченія съ данной линіей AB и будетъ искомой, такъ какъ она принадлежитъ и линіи AB и плоскости P, т.-е. является точкой пересѣченія AB съ P.

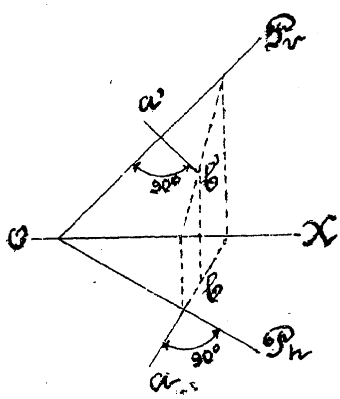


черт. 238

δ) *Опустить изъ точки A, лежащей внѣ плоскости P, перпендикуляръ къ этой послѣдней.* - Предположимъ, что задача рѣшена и перпендикуляръ найденъ; проведемъ черезъ его основаніе (чертежи 239 и 240) въ плоскости P горизонталь MN и фронталь QR. Припомнимъ теперь, что фронталь параллельна плоскости V и что прямой уголъ, одна сторона котораго параллельна плоскости проекцій, проектируется на эту плоскость безъ искаженія; изъ этого слѣдуетъ, что



черт. 239



черт. 240

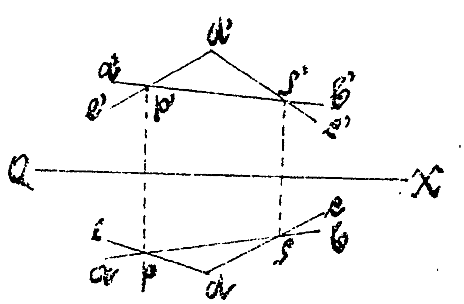
вертикальная проекція (a'b') перпендикуляра, опущеннаго изъ точки A на плоскость P, перпендикулярна къ слѣду P_v. Такъ какъ горизонталь плоскости P параллельна H и P_h, то прямой уголъ между искомымъ перпендикуляромъ и горизонталью долженъ проектироваться на H безъ искаженія, иными словами, ab должно быть перпендикуляромъ къ P_h. Точка B пересѣченія перпендикуляра съ плоскостью P находится при помощи пріема, описаннаго передъ этимъ. Итакъ: *проекціи перпендикуляра къ плоскости перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ слѣдамъ плоскости.*

Вопросъ о проведеніи линіи подъ даннымъ угломъ къ данной плоскости будетъ рѣшенъ позднѣе, въ части IV.

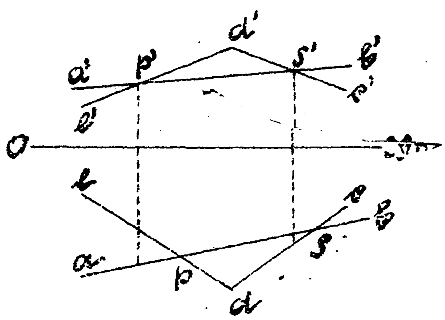
b) *Плоскость задана двумя пересѣкающимися линіями.*

Разсмотримъ теперь, какъ рѣшаются четыре вышеупомянутые вопроса въ предположеніи, что плоскость задана не слѣдами, а двумя пересѣкающимися въ точкѣ D линіями ED и DC.

α) *Линія AB будетъ совпадать съ плоскостью* тогда, когда она имѣетъ съ нею хотя бы двѣ общія точки. Замѣтимъ точки p и s пересѣченія (черт.241) горизонтальной проекціи ab данной линіи съ горизонтальными проекціями линій, опредѣляющихъ плоскость, cd и de. Если эти точки будутъ лежать на однихъ и тѣхъ же перпендикулярахъ къ оси OX съ соотвѣтственными точками p' и s' пересѣченія соотвѣтственныхъ вертикальныхъ проекцій a'b' съ e'd' и d'c', то, очевидно, линія AB будетъ



черт. 241



черт. 242

лежать въ плоскости EDC, такъ какъ она будетъ имѣть съ нею двѣ общія точки P и S, если же p' и s' не лежатъ на перпендикулярахъ къ OX, проходящихъ соотвѣтственно черезъ p и s, то и линія AB не будетъ лежать въ плоскости EDC (черт.242).

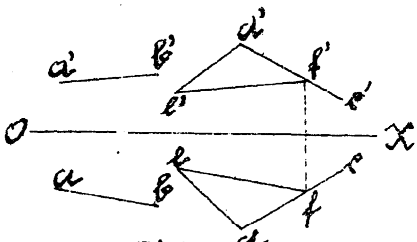
β) Если дана линія AB и плоскость EDC пересѣкающимися линіями CD и DE (черт.243) и требуется узнать, параллельна ли AB плоскости EDC, то поступаемъ слѣдующимъ образомъ: изъ точки E, принадлежащей плоскости EDC, проводимъ линію, параллельную данной линіи AB; если она пересѣкаетъ линію CD въ какой нибудь точкѣ F (т.е. если точка f' пересѣченія вертикальныхъ проекцій e'f' и c'd' лежитъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси OX съ точкой f - пересѣченія горизонтальныхъ проекцій ef и cd), то линія EF, какъ имѣющая съ плоскостью EDC двѣ общихъ точки E и F, совпадаетъ съ нею, а потому и линія AB, какъ параллельная линіи EF, параллельна плоскости.

Если же линіи EF и CD не пересѣкаются, то это показываетъ, что EF не лежитъ въ плоскости DEC и что AB этой плоскости не параллельна (черт.244).

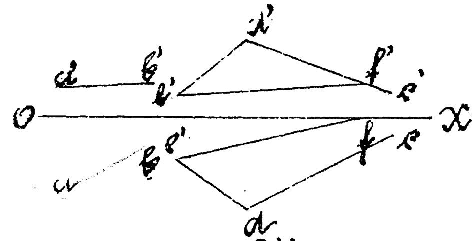
γ) Разсмотримъ, какъ находится *точка пересѣченія какой нибудь ли-*

ніи AB съ плоскостью, заданной пересѣкающимися линіями ED *и* CD (черт. 245). Разсмотримъ три случая:

γ_1) Общій случай, когда положеніе и плоскости и прямой задано случайнымъ.

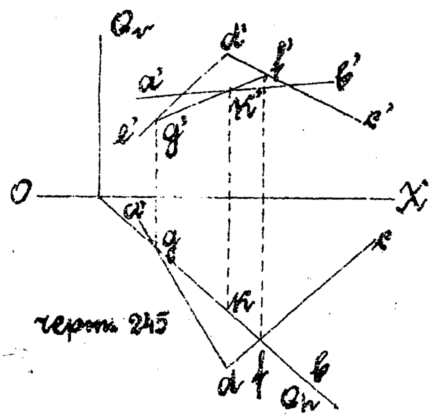


черт. 243



черт. 244

Заключаемъ данную линію AB въ вспомогательную плоскость Q, перпендикулярную къ плоскости H и находимъ линію gf сѣченія послѣдней съ плоскостью P; въ силу перпендикулярности плоскости Q къ плоскости H, проекціи ab и gf сольются со слѣдомъ Q_h, но вертикальныя проекціи a'b' и g'f' пересѣкутся въ точкѣ k', которая и опредѣляетъ искомую точку K, какъ точку общую для линіи AB и плоскости P.

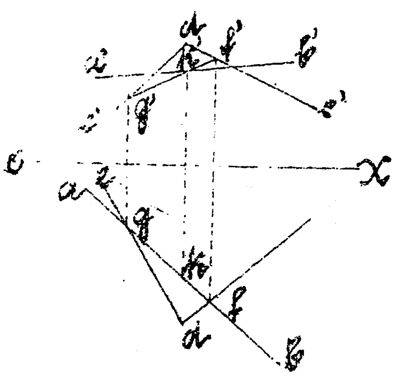


черт. 245

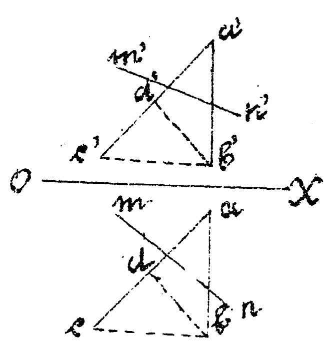
Изъ разсмотрѣннаго сейчасъ вытекаетъ простой практическій пріемъ отысканія точки K (черт.246).

Замѣчаемъ точки g и f пересѣченія ab съ ed и dc. Находимъ вертикальныя проекціи g' и f' и соединяемъ ихъ прямой, которая пересѣкая a'b', опредѣляетъ K. Горизонтальная проекція k лежитъ на горизонтальной проекціи ab.

γ_2) Частный случай, когда плоскость задана такими двумя прямыми, изъ которыхъ одна профильная (черт.247). Здѣсь предыдущій способъ (γ_1) не примѣнимъ, такъ какъ мы не можемъ найти линію пересѣченія AB съ вспомогательною плоскостью Q. Поэтому, для рѣшенія задачи соединимъ точки C и B прямою CB. При этомъ мы переходимъ къ заданію плоскости линіями BC и AC. А это — предыдущій способъ (γ_1).



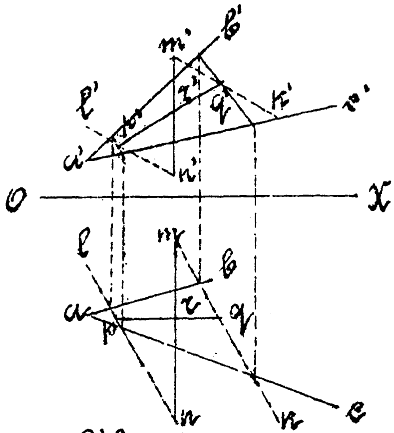
черт. 246



черт. 247

Если почему либо линія CB пересѣкаетъ MN за предѣлами чертежа, или совсѣмъ ее не пересѣкаетъ, то слѣдуетъ выбрать на AC вмѣсто C другую какую нибудь точку, напримѣръ, D такъ, чтобы линія DB пересѣкла MN.

γ_3) Частный случай, когда положеніе плоскости случайное, а пересѣкающая ее прямая mn — профильная (черт.248).

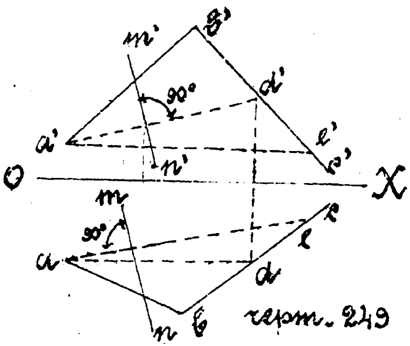


черт. 248

Проводимъ черезъ точки M и N двѣ линіи MK и ML, параллельныя другъ другу, такъ, чтобы точки пересѣченія ихъ P и Q съ ABC легко было найти по способу γ_1. Линія PQ будетъ линіей сѣченія плоскости ABC съ плоскостью опредѣляемой линіями MN и MK. На этой линіи (PQ), очевидно, должна находиться искомая точка, которая и опредѣлится, какъ точка пересѣченія PQ съ MN.

б) Проекціи перпендикуляра, опущеннаго на плоскость изъ какой нибудь точки, лежащей внѣ плоскости, заданной двумя пересѣкающимися линіями, находится слѣдующимъ образомъ.

Пусть намъ дана плоскость (черт.249), опредѣляющаяся пересѣкающимися линіями AB и BC и точка M, лежащая внѣ ея. Требуется опустить изъ этой точки на плоскость перпендикуляръ. Для рѣшенія этой задачи, т.е. для построенія проекцій перпендикуляра, намъ достаточно знать только одно направленіе слѣдовъ плоскости (положеніе ихъ намъ излишне), такъ какъ извѣстно, что проекціи перпендикуляра должны быть перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ слѣдамъ плоскости. Поэтому, мы можемъ довольствоваться проекціями какихъ либо линій, лежащихъ въ ABC и завѣдомо параллельныхъ слѣдамъ плоскости, т.е. одной горизонтальной, а другой параллельной плоскости V, а такими линіями, какъ намъ извѣстно, являются горизонталь и фронталь.



черт. 249

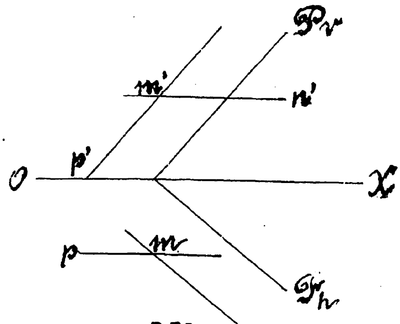
Находимъ въ плоскости ABC горизонталь (AE) и фронталь (AD). Такъ какъ уже доказано было раньше, что вертикальная проекція перпендикуляра перпендикулярна къ вертикальному слѣду плоскости, а горизонтальная - къ горизонтальному, и, кромѣ того, мы знаемъ, что вертикальная проекція фронтали параллельна вертикальному слѣду плоскости, а горизонтальная проекція горизонтали параллельна горизонтальному слѣду плоскости, то, очевидно, горизонтальной проекціей искомаго перпендикуляра будетъ служить линія mn, перпендикулярная къ ae, а вертикальной его проекціей будетъ линія m'n', перпендикулярная къ a'd'

Примѣчаніе. На основаніи правилъ, изложенныхъ въ пунктѣ γ_1, рѣшается легко задача на построеніе линіи сѣченія двухъ плоскостей, заданныхъ каждая двумя пересѣкающимися линіями.

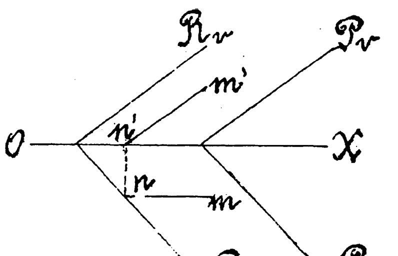
Если двѣ плоскости заданы каждая двумя пересѣкающимися линіями, то для построенія линіи ихъ сѣченія слѣдуетъ найти точки пересѣченія каждой изъ двухъ линій одной плоскости другою плоскостью. Линія, соединяющая найденныя эти точки, и будетъ искомой.

8. *ПРОВЕДЕНІЕ ПЛОСКОСТЕЙ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХЪ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ.*

Пусть дана плоскость P и точка M внѣ ея (черт.250). Требуется черезъ M провести плоскость, параллельную P. Для этого достаточно



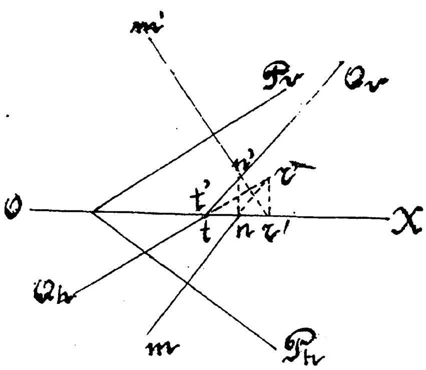
черт. 250



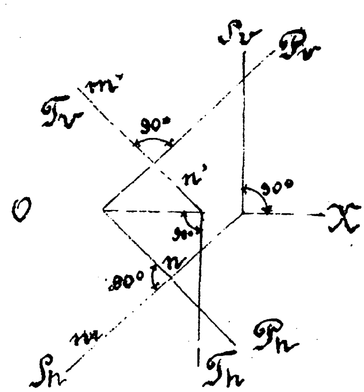
черт. 251

черезъ М провести двѣ линіи MN и MP, параллельныя какимъ нибудь двумъ линіямъ, лежащимъ въ плоскости P, напримѣръ, параллельныя слѣдамъ P_v и P_h.

Или же можно провести черезъ М одну только линію MN (черт.251), параллельную какой нибудь линіи, лежащей въ плоскости P, напримѣръ, слѣду P_v, найти слѣдъ (N) этой линіи и черезъ эту точку провести слѣдъ (R_h) плоскости, параллельный соотвѣтственному слѣду (P_h) плоскости P, найти точку схода слѣдовъ и черезъ нее провести другой слѣдъ R_v, параллельный другому слѣду P_v плоскости P. Если изъ точки М, лежащей внѣ плоскости, требуется провести плоскость, перпендикулярную къ P, то для этого достаточно провести изъ М перпендикуляръ къ P и черезъ него провести любую плоскость, которая и будетъ перпендикулярна къ P. На чертежѣ 252 MN – перпендикуляръ къ P, точка N – его вертикальный слѣдъ, точка R – его горизонтальный слѣдъ. Проведя въ плоскости V черезъ точку N случайную линію Q_v, мы можемъ принять ее за вертикальный слѣдъ искомой плоскости. Точка T пересѣченія Q_v съ OX будетъ точкою схода слѣдовъ. Q_h пройдетъ черезъ точки T и R.



черт. 252



черт. 253

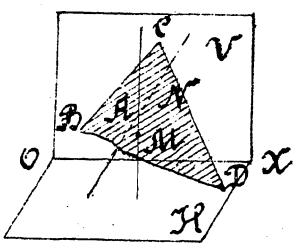
Въ качествѣ наиболѣе простой искомой плоскости можно взять плоскости, проектирующія MN на H или на V. На чертежѣ 253 показаны двѣ такихъ плоскости: S, перпендикулярная къ H и P, и T, перпендикулярная къ V и къ P.

9. *ОПРЕДѢЛЕНІЕ ВИДИМЫХЪ ЧАСТЕЙ ЛИНІИ.*

Въ цѣляхъ ясности и наглядности чертежа принято невидимыя линіи, т.е. линіи, закрываемыя отъ зрителя какою нибудь плоскостью, проводить пунктиромъ. Такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ двумя проекціями каждой точки (на H и на V), то приходится опредѣлять видимость по двумъ направленіямъ лучей зрѣнія – одного, перпендикулярнаго къ H и другого,

---

перпендикулярнаго къ V. Если, напримѣръ, въ пространствѣ имѣется какая нибудь точка A и плоскій треугольникъ BCD (черт.254), то точка можетъ закрываться плоскостью BCD, если смотрѣть на H и можетъ быть видимой, если смотрѣть на V или обратно. Далѣе, - она можетъ быть видима при обоихъ направленіяхъ лучей зрѣнія, можетъ быть также и совсѣмъ невидимой, зритель же всегда предполагается находящимся въ I-омъ углѣ пространства.



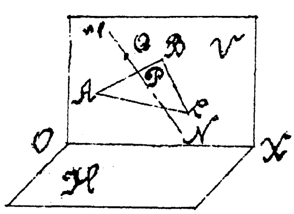
черт. 254

Опредѣлимъ видимость какой нибудь точки A относительнаго плоскаго треугольника BCD.

Разсмотримъ видимость точки A при направленіи лучей зрѣнія, перпендикулярномъ къ H. Для этого достаточно опустить изъ данной точки A перпендикуляръ на плоскость H и разсмотрѣть точку M его пересѣченія съ плоскостью BCD. Если точка A лежитъ выше точки M пересѣченія перпендикуляра съ BCD, то точка A видима, если ниже - невидима.

Разсмотримъ теперь видимость точки A при направленіи лучей зрѣнія, перпендикулярномъ къ V. Поступаемъ точно такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Опустимъ изъ точки A перпендикуляръ къ плоскости V и опредѣлимъ точку N пересѣченія этого перпендикуляра съ плоскостью BCD. Если лучъ зрѣнія встрѣчаетъ по направленію къ V раньше точку A, а потомъ точку N, то точка A видима, если встрѣчаемъ раньше точку N, а потомъ точку A, то точка A невидима.

Опредѣлимъ видимость какой нибудь линіи MN относительнаго плоскаго треугольника ABC (черт.255). Опредѣлимъ видимость MN при направленіи лучей зрѣнія, перпендикулярномъ къ H.

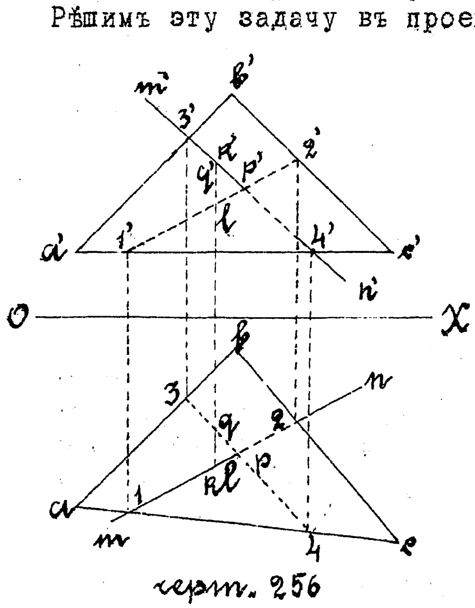


черт. 255

Планъ рѣшенія задачи въ пространствѣ. Найдемъ точку P пересѣченія MN съ ABC. Затѣмъ взявъ какую нибудь точку Q, принадлежащую MN и лежащую выше или ниже точки P пересѣченія, опредѣляемъ, будетъ ли эта точка Q видима или нѣтъ. Въ зависимости отъ этого и соотвѣтствующая ей часть линіи PQ будетъ видима или невидима. Точка P пересѣченія прямой съ плоскостью будетъ служить границею между видимой и невидимой частями прямой.

Если точка Q видима, то весь отрѣзокъ MP видимъ, если точка Q невидима, весь отрѣзокъ будетъ невидимъ.

Рѣшимъ эту задачу въ проекціяхъ. Данъ треугольникъ abc и a'b'c' mn, m'n'. Требуется опредѣлить видимость прямой относительно плоскости треугольника. Проведемъ черезъ mn (черт.256) вспомогательную плоскость, перпендикулярную къ плоскости H и найдемъ линію ея пересѣченія 1, 2, (1', 2') съ плоскостью (ABC). пересѣченіе линій MN и 1, 2 опредѣлитъ точку P пересѣченія самой прямой MN съ плоскостью ABC. Эта точка будетъ опредѣлять видимую часть прямой отъ невидимой. Возьмемъ теперь на линіи MN какую нибудь точку K, ея вертикальная проекція расположена выше относительно оси, чѣмъ точка пересѣченія вертикальнаго луча съ плоскостью треугольника ABC; слѣдовательно, если смотрѣть на H, то точка

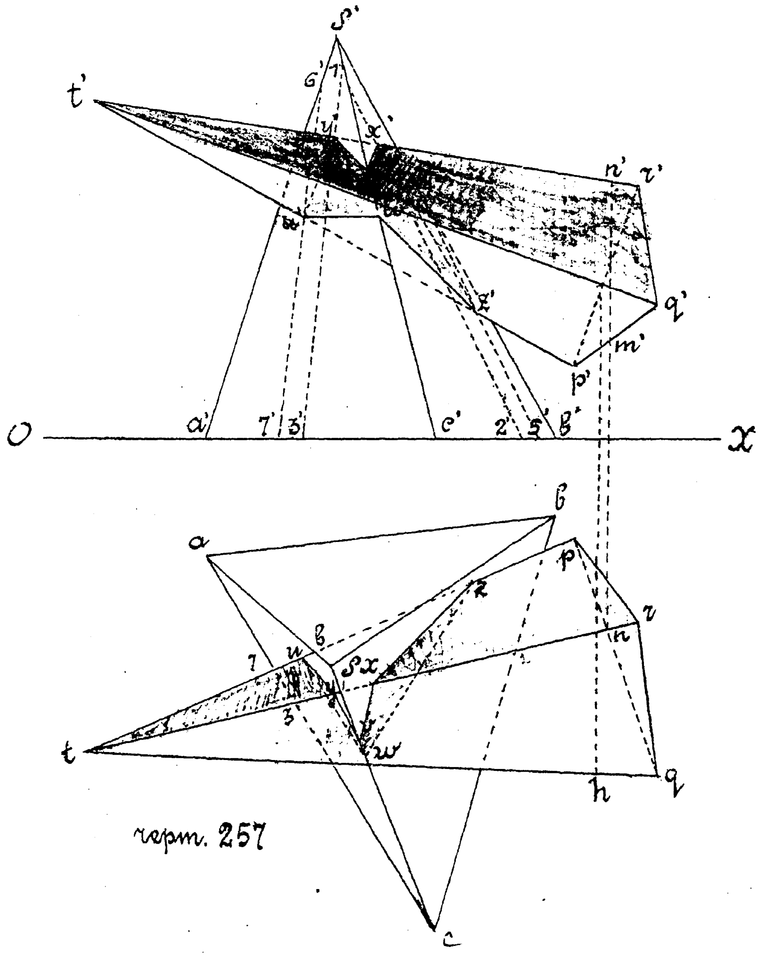


черт. 256

К, а потому и вся часть прямой отъ точки Р въ сторону точки К будетъ видимой, а другая часть прямой будетъ закрываться треугольникомъ до предѣловъ его очертанія.

Аналогичнымъ путемъ рѣшается вопросъ о томъ, какая часть прямой MN отъ точки Р будетъ видима, если смотрѣть на V. Проведемъ черезъ MN перпендикулярно къ плоскости V вспомогательную плоскость и найдемъ ея линію сѣченія (3, 4) съ плоскостью треугольника; съ какой нибудь точки на линіи MN, напримѣръ, изъ той же точки К проведемъ лучъ KQ, перпендикулярный къ плоскости V. Какъ видно, на горизонтальной проекціи этого луча точка К лежитъ дальше отъ оси ОХ, чѣмъ точка Q пересѣченія луча плоскостью треугольника, а потому точка К, а слѣдовательно, и весь отрѣзокъ ПК отъ Р до контура треугольника будетъ видимъ, если смотрѣть на V.

10. *ПОСТРОЕНІЕ ЛИНІЙ СѢЧЕНІЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВЪ*).*



черт. 257

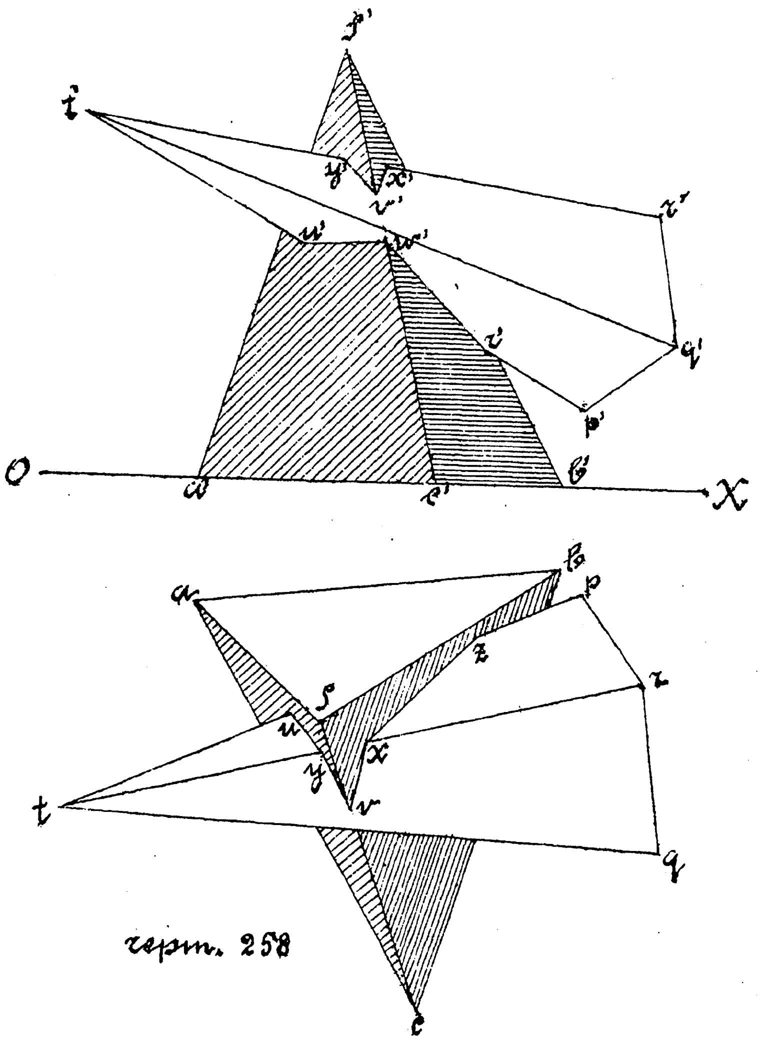
При построеніи линій сѣченія двухъ многогранниковъ слѣдуетъ сначала опредѣлить видимыя части каждаго тѣла въ отдѣльности (видимость на V и на H); при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что контурныя линіи для каждой проекціи всегда будутъ проекціями линій видимыхъ. Далѣе слѣдуетъ опредѣлить ребра каждаго тѣла, которыя завѣдомо не пересѣкаютъ граней другого тѣла. Потомъ находятъ точки пересѣченія реберъ одного тѣла съ гранями другого и реберъ второго съ гранями перваго. Наконецъ, остается послѣдовательно соединить точки пересѣченія. Линіи сѣченія граней, изъ которыхъ хотя бы одна была невидима, будутъ невидимы.

Въ качествѣ примѣра разсмотримъ построенія линій сѣченія двухъ пирамидъ SABC и TPQR (черт.257 и 258). Разсматривая горизонтальную

---

*) *Болѣе подробное рѣшеніе этой задачи см. въ соч. Н. А. Рынина: "Примѣры рѣшенія задачъ по Начертательной Геометріи".*

проекцію (sabc) пирамиды SABC, видимъ, что всѣ ребра пирамиды будутъ видимы (пока предполагаютъ, что другой пирамиды нѣтъ), такъ какъ лучи зрѣнія, перпендикулярные къ H, встрѣчаютъ ребра, не пересѣкая передъ этимъ никакихъ граней пирамиды. То же самое можно сказать относительно горизонтальной проекціи реберъ пирамиды TPQR, за исключеніемъ ребра PQ, которое будетъ невидимымъ, если смотрѣть на плоскость H, такъ какъ лучъ зрѣнія, проведенный перпендикулярно къ H черезъ точку N линіи TR, встрѣтитъ линію PQ въ точкѣ M, которая ниже точки N. Слѣдовательно, линія TR проходитъ надъ PQ. Если смотрѣть на плоскость V, то будутъ видимы ребра SA, SC, SB, AC и CB, такъ какъ лучи зрѣнія, перпендикулярные къ V, встрѣчаютъ эти ребра, не пересѣкая никакихъ граней пирамиды SABC. Ребро AB будетъ невидимымъ, такъ какъ закрывается ребрами AC и CB. Изъ реберъ пирамиды TPQR будутъ видимы TR, TQ, TP, PQ и Ребро PR будетъ невидимымъ, такъ какъ лучъ зрѣнія, проведенный черезъ точку H ребра TQ встрѣчаетъ PR въ точкѣ G, которая лежитъ ближе къ V нежели точка H. Поэтому точка H закроетъ точку G и ребро TQ будетъ видимымъ, а PR - невидимымъ.



черт. 258

Прежде, чѣмъ строить искомыя линіи сѣченія, слѣдуетъ опредѣлить ребра каждой пирамиды, которыя завѣдомо не пересѣкаютъ грани второй. Къ такимъ, во-первыхъ, относятся тѣ, проекціи которыхъ на H и на V лежатъ внѣ предѣловъ очертанія проекціи другой пирамиды. Напримѣръ, ребра PQ, QR и RP не будутъ пересѣкать граней пирамиды TPQR. Кромѣ того, слѣдуетъ имѣть въ виду, что если проекція какого нибудь ребра одной пирамиды не пересѣкаетъ соотвѣтственной проекціи какой либо грани другой пирамиды, то и само ребро въ пространствѣ не пересѣкаетъ этой грани. Напримѣръ, какъ это видно изъ горизонтальной проекціи, ребра TR и TQ не пересѣкутъ грани SAB.

Для опредѣленія линіи сѣченія слѣдуетъ построить точки пересѣченія реберъ каждой пирамиды съ гранями другой. Соединяя соотвѣтственно полученныя точки, получимъ искомую линію сѣченія.

Опредѣлимъ, напримѣръ, точки пересѣченія ребра TR съ гранями пирамиды SABC. Заключаемъ прямую TR въ горизонтально проектирующую плоскость T (перпендикулярную къ H). Горизонтальный слѣдъ этой плоскости совпадаетъ съ горизонтальной проекціей tr прямой TR. Вертикальный же слѣдъ плоскости будетъ перпендикуляренъ къ V, но чертить его нѣтъ необходимости. Находимъ линію сѣченія плоскости T съ гранью SBC Какъ видно изъ чертежа, горизонтальныя проекціи bc и bs реберъ BC и BS, принадлежащихъ грани SBC, пересѣкаютъ tr (или T_h) въ точкахъ 1 и 2. Эти послѣднія должны служить горизонтальными проекціями точекъ 1 и 2, общихъ плоскости T и грани SABC. Вертикальныя проекціи 1' и 2' должны соотвѣтственно лежать на вертикальныхъ проекціяхъ s'b' и b'c' реберъ SB и BC. Соединяя точки 1' и 2' получимъ вертикальную проекцію линіи 1, 2 сѣченія плоскости T съ гранью SBC.

Замѣчаемъ точку X' пересѣченія 1', 2' съ t'r' и находимъ соотвѣтствующую ей горизонтальную проекцію X. Точка X и будетъ точкою пересѣченія ребра TR съ гранью SBC.

Совершенно подобнымъ же образомъ находимъ точку У пересѣченія ребра TR съ гранью SAC, для чего въ качествѣ вспомогательной линіи строимъ прямую 1, 3 сѣченія плоскости T съ гранью SAC. Точка У пересѣченія TR съ 1, 3 и будетъ искомой точкой пересѣченія ребра TR съ гранью SAC. Продолжая подобныя же построенія для ребра TP, получимъ точку Z пересѣченія его съ гранью SBC (вспомогательная линія 4, 5) и точку U пересѣченія его съ гранью SAC (вспомогательная линія 6, 7). Если бы мы стали опредѣлять пересѣченіе ребра TQ съ гранями пирамиды SABC, то нашли бы, что оно не пересѣкаетъ ни одной грани послѣдней, такъ какъ линіи сѣченія плоскости горизонтально проектирующей это ребро, съ каждой изъ граней пирамиды не пересѣклись бы въ предѣлахъ очертанія граней съ линіей TQ. Разсматривая ребро SC пирамиды, находимъ по вышеуказанному способу точки V и W пересѣченія его съ гранями TQR и TPQ пирамиды TPQR. Соединяя соотвѣтственно точки, лежащія въ однѣхъ и тѣхъ же граняхъ, получимъ искомую линію сѣченія, причемъ видимыми частями линіи сѣченія будутъ тѣ, которыя служатъ линіями сѣченія видимыхъ граней обѣихъ пирамидъ.

11. *ПОСТРОЕНІЕ ТѢНЕЙ.*

Построеніе тѣней имѣетъ значеніе главнымъ образомъ для приданія чертежу наглядности изображенія.

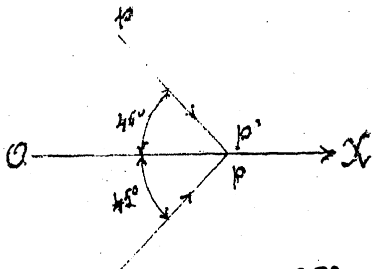
Извѣстно, что сила освѣщенія какой нибудь поверхности зависитъ отъ угла наклона свѣтовыхъ лучей къ освѣщаемой поверхности. Кромѣ того, она зависитъ еще отъ свойства окружающей атмосферы. Чѣмъ дальше источникъ свѣта отъ освѣщаемой поверхности, тѣмъ слабѣе послѣдняя освѣщается, и эта зависимость между силой свѣта и разстояніемъ источника свѣта отъ освѣщаемой точки выражается такимъ закономъ: сила свѣта у какой нибудь точки обратно пропорціональна квадратамъ разстояній источника свѣта отъ этой освѣщаемой точки. Мы будемъ пока разсматривать вопросъ исключительно съ геометрической точки зрѣнія, независимо отъ угла наклона лучей свѣта къ освѣщаемой поверхности, предполагая вообще, что на какую бы грань предмета свѣтъ ни падалъ, онъ освѣщаетъ ее равномѣрно, иными словами, мы будемъ разсматривать построеніе тѣней, не касаясь физической стороны явленія.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ различать *тѣни собственныя* и *тѣни падающія*. Собственной тѣнью называется такая, которая получается на неосвѣщенной части поверхности предмета. Падающей тѣнью называется та, которая падаетъ отъ предмета на поверхность тѣла.

При построеніи тѣней мы будемъ предполагать, что лучи свѣта параллельны другъ другу. Обыкновенно предполагаютъ, что уголъ наклоненія проекцій луча къ оси OX равенъ 45° (черт.259). При такомъ направленіи наиболѣе рельефно выдѣляются всѣ части предмета. Въ нашихъ задачахъ будетъ предполагаться, именно, направленіе, указанное на на чертежѣ 259.

Вопросъ о томъ, какъ строятся тѣни, въ большинствѣ случаевъ рѣшается просто: онъ сводится къ задачѣ на нахожденіе точекъ пересѣченія призмы съ поверхностью, на которую должна упасть тѣнь.

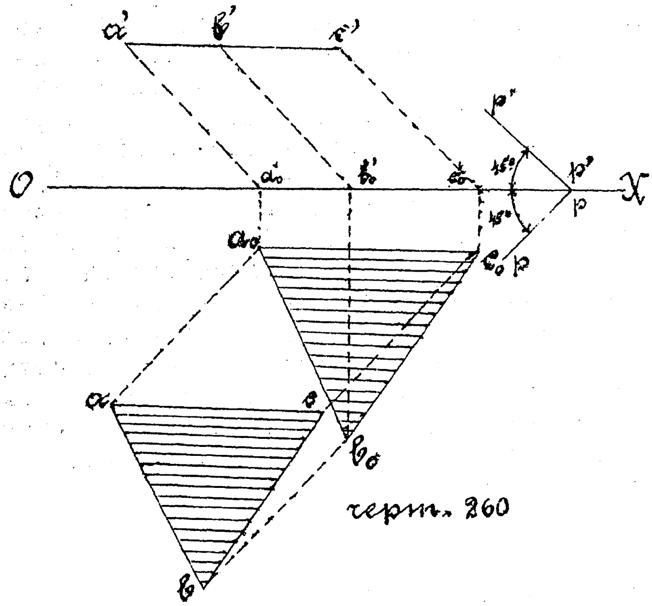
Построимъ въ видѣ примѣра тѣнь отъ треугольника ABC (черт.260). Предполагая его непрозрачнымъ, требуется опредѣлить тѣнь, падающую отъ него на H и V



черт. 259

Проведемъ черезъ вершины треугольника A, B и C лучи, параллельно лучамъ свѣта pp.

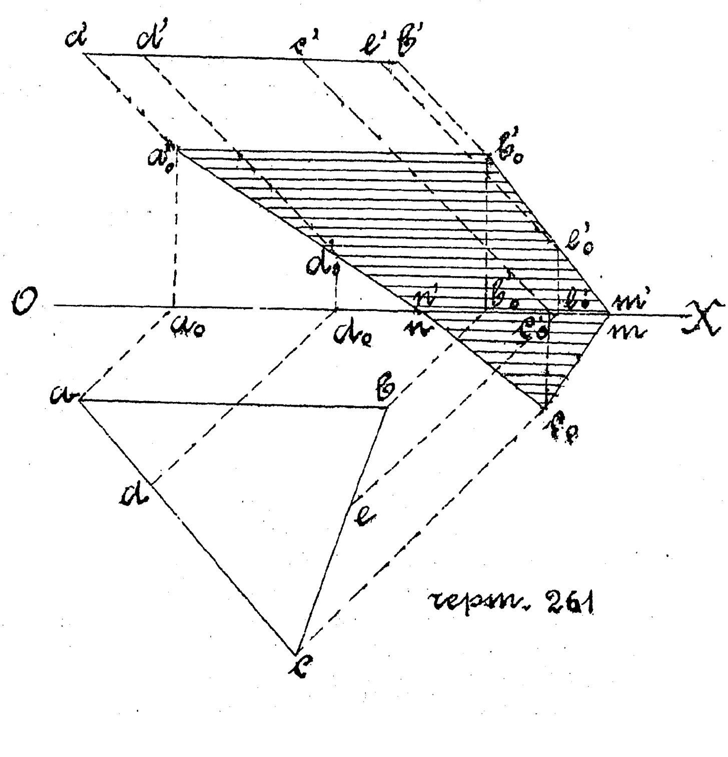
Теперь остается только найти точки A_0, B_0 и C_0 пересѣченія этихъ лучей съ плоскостями H и V, послѣ чего и опредѣлится тѣнь $A_0 B_0 C_0$ треугольника на H. Въ данномъ случаѣ собственная тѣнь a_0 b_0 c_0 ложится на плоскости H. Слѣдовательно, задача на построеніе тѣни свелась къ задачѣ на построеніе линіи сѣченія съ плоскостью H призмы, обертывающей треугольникъ, причемъ ребра призмы параллельны лучамъ свѣта pp.



черт. 260

На чертежѣ 261 дано такое расположеніе треугольника, при которомъ часть тѣни отъ него падаетъ на V, а часть на H. Строимъ тѣни, падающія отъ него на H и на V.

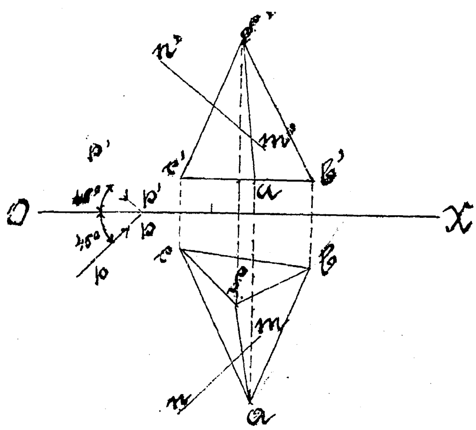
Для этого изъ точекъ A, B, C проводимъ линіи, параллельныя направленію свѣта до пересѣченія съ H или V. Изъ чертежа видно что лучи, проведенные изъ A и B встрѣчаютъ V раньше, чѣмъ H, лучъ изъ C встрѣчаетъ H раньше, чѣмъ V. Слѣдовательно, отъ A и B падаютъ тѣни на V, а отъ C на H. Для построенія на V тѣни, отбрасываемой линіей AC, беремъ на ней точку D; находимъ тѣнь отъ нея въ



черт. 261

точкѣ d_0'. Линія $a_0'd_0'$ даетъ направленіе тѣни на V отъ AC. Продлжаемъ линію $a_0'd_0'$ до оси OX, полученную точку соединяемъ съ точкою c_0. Линія $a_0'\,d_0'\,n_0'\,c_0'$ и дастъ тѣнь отъ AC на V и H. Подобнымъ же образомъ строимъ тѣнь $b_0'e_0'm'c_0'$, тѣнь на V и H отъ BC. Ломаная линія $a_0'b_0'm'c_0'n'a_0'$ и дастъ контуръ тѣни отъ треугольника ABC на V и H.

Если бы намъ былъ данъ многоугольникъ, или иное тѣло, и требовалось бы найти его тѣнь на V и H, то мы должны были бы сперва построить цѣлый рядъ точекъ пересѣченія съ V и H лучей, идущихъ отъ всѣхъ вершинъ тѣла, а затѣмъ полученныя точки соединить непрерывной замкнутой ломаной линіей, тогда и будемъ имѣть контуръ падающей тѣни многогранника на V и H.



черт. 262

Что касается до собственныхъ тѣней, то ихъ можно опредѣлить такъ же, какъ мы опредѣляли видимость граней, т.е. тѣ грани, которыя намъ видимы - освѣщены, невидимыя же - неосвѣщены, предполагая только, что лучи зрѣнія теперь не перпендикулярны къ V или къ H, а параллельны лучамъ свѣта. Напримѣръ, для опредѣленія, будетъ ли какая нибудь грань SAB (черт.262) въ тѣни или освѣщена, слѣдуетъ взять на ней какую нибудь точку M и провести черезъ нее линію MN, параллельную лучу свѣта. Если по направленію отъ точки M къ источнику свѣта, т.е. по направленію отъ M къ N, эта прямая не встрѣтитъ никакихъ граней пирамиды, то точка M, а слѣдовательно, и грань SAB будетъ освѣщена, если же MN пересѣчетъ какую нибудь грань пирамиды (по направленію отъ M къ N), то грань SAB будетъ въ тѣни.*)

12. *РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ ТѢЛЪ, ОГРАНИЧЕННЫХЪ ПЛОСКОСТЯМИ.*

Разверткой поверхности тѣла, ограниченнаго плоскими гранями, называется фигура, которая получается, если съ плоскостью одной грани послѣдовательно совмѣстить всѣ остальныя грани, вращая ихъ около соотвѣтственныхъ реберъ.

Построимъ въ видѣ примѣра развертку поверхности пирамиды SABC съ показаніемъ на разверткѣ линіи DEFG, начерченной на поверхности пирамиды (черт.263).

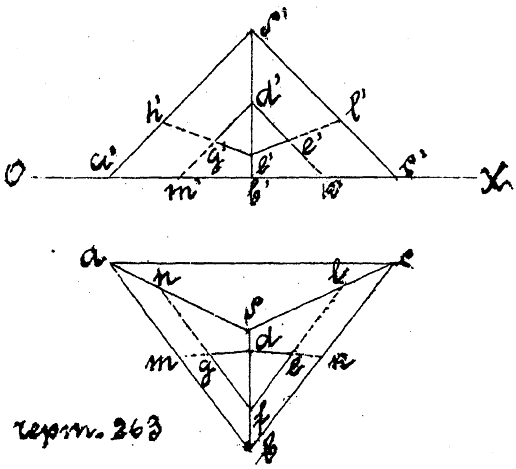
Найдя извѣстнымъ пріемомъ истинную величину реберъ SB, SC и SA, мы можемъ построить по тремъ извѣстнымъ сторонамъ истинную фигуру каждой грани пирамиды. Основаніе пирамиды ABC, которое предполагаютъ совпадающимъ съ плоскостью чертежа, примемъ за начальную грань, съ которой будемъ совмѣщать всѣ остальныя грани. Предположимъ, что пирамида разрѣзана по ребрамъ AS, BS и CS (черт.264) и грани SAB, SBC, SAC совмѣщены съ плоскостью грани ABC и занимаютъ положеніе S_0AB, S_0BC, S_0AC. Отсюда видно, что для построенія развертки слѣду-

---

**) Болѣе подробныя данныя о построеніи тѣней можно найти въ книгѣ: Н.А.Рынинъ "Дневной свѣтъ и разсчеты освѣщенности помѣщеній". С.-Петербургъ. 1907 г. Въ концѣ этой книги приведенъ рядъ задачъ на построеніе тѣней. Кромѣ того, построенія тѣней отъ различныхъ геометрическихъ тѣлъ показаны въ соч. Н.Рынина "Примѣры рѣшенія задачъ по Начертательной Геометріи".*

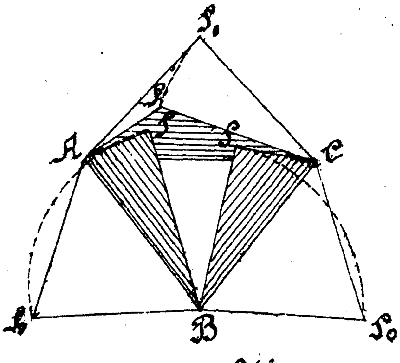
етъ: рядомъ съ ABC построить истинныя фигуры граней SBC, SAB и SAC.

Такого рода развертку мы можемъ, напримѣръ, получить, сдѣлавъ пирамиду изъ картона и разрѣзавъ ее по ребрамъ SA, SB, SC. При этомъ, грань SAC придется вращать до совпаденія съ плоскостью грани ABC вокругъ ребра AC, грань SBC придется вращать около BC и грань SAB - около AB.

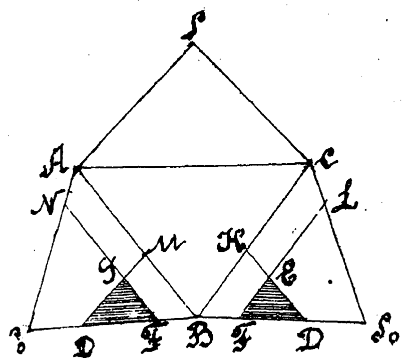


черт. 263

Чтобы перенести на развертку линіи DE, EF, FG, GD, начерченныя на поверхности пирамиды, продолжимъ на граняхъ пирамиды (черт.263) въ проекціяхъ линію DE до пересѣченія съ ребромъ bc въ точкѣ k, линію fe до пересѣченія съ ребромъ sc въ точкѣ l, линію fg до пересѣченія съ ребромъ as въ точкѣ h и линію dg до пересѣченія съ ab въ точкѣ m. Тогда эти четыре точки K, L, N и M раздѣлятъ соотвѣтствующія проекціи bc, sc, ab и as въ извѣстномъ отношеніи. Теперь, для полученія вырѣзка DEFG на разверткѣ намъ остается сдѣлать слѣдующее: отложить на BS точки D и F, дѣлящія ребро BS въ такомъ же отношеніи, какъ точки d и f дѣлятъ проекцію bs, а на ребрахъ BC, CS, AB и AS такимъ же образомъ соотвѣтствующія точки K, L, M и N, затѣмъ соединивъ точки D и K, F и L (на грани BCS) и и точки D и M, F и N (на грани ABS) прямыми, мы и получимъ на разверткѣ двѣ точки G и E пересѣченія полученныхъ прямыхъ. Соединяя ихъ съ точками D и F, получимъ истинный видъ фигуры, которую мы ранѣе имѣли лишь въ проекціяхъ (черт.265).



черт. 264



черт. 265

Развертки имѣютъ большое практическое значеніе. Если бы, напримѣръ, понадобилось вытесать камень въ видѣ пирамиды, то слѣдовало бы перечертить разверку ея поверхности въ натуральную величину и сдѣлать на основаніи ея шаблоны, пользуясь которыми каменьщикъ могъ бы вытесать грани.

На основаніи правилъ, изложенныхъ въ предыдущей части курса, можно рѣшать огромное большинство задачъ; однако, существуетъ два метода, которые значительно упрощаютъ рѣшеніе задачъ и, кромѣ того, позволяютъ рѣшать задачи, рѣшеніе которыхъ безъ знаній этихъ методовъ не только гораздо сложнѣе, но и обладаетъ меньшею степенью точности. Это методъ вращенія и методъ перемѣны плоскостей проекцій.

13. *МЕТОДЪ ВРАЩЕНІЯ.*

a) *Общія понятія.*

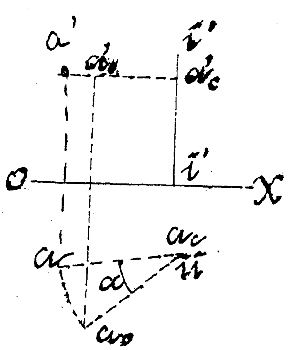
Методъ вращенія состоитъ въ томъ, что данную фигуру вращаютъ вокругъ какой нибудь произвольно выбранной оси для приведенія этой фигуры въ наиболѣе выгодное положеніе для проектированія. Фигура проектируется безъ искаженія на одну изъ плоскостей проекцій въ томъ случаѣ, если она параллельна этой плоскости проекцій. Напримѣръ, если намъ дана произвольно расположенная прямая, то повернувъ ее около какой нибудь оси въ положеніе, параллельное одной изъ плоскостей проекцій, мы получимъ въ проекціи ея истинную величину. При пользованіи методомъ вращенія оси могутъ быть выбраны такъ, что круги вращенія будутъ проектироваться или безъ искаженія въ круги же, или съ искаженіемъ въ эллипсы. Такъ какъ построеніе эллипса довольно сложна, то удобнѣе выбирать такія оси вращенія, при которыхъ круги вращенія проектируются безъ искаженія. Такими осями вращенія и служатъ линіи, перпендикулярныя къ H или къ V. Въ этомъ случаѣ плоскость круга вращенія будетъ параллельна той или другой плоскости проекцій, слѣдовательно, одной проекціей круга будетъ кругъ, а другой - прямая линія. Въ дальнѣйшемъ условимся оси вращенія въ пространствѣ обозначать буквами II, а ихъ проекціи i'i', ii.

b) *Вращеніе около одной оси, перпендикулярной къ H или V.*

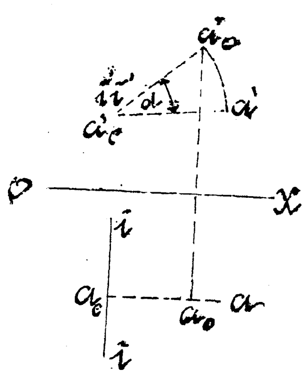
α) *Вращеніе точки.*

Пусть намъ дана точка A ея проекціями a и a'; требуется повернуть ее вокругъ оси II, перпендикулярной къ H на уголъ α (черт.266).

Изъ точки A проведемъ линію AA_c, перпендикулярную къ оси вращенія, до пересѣченія съ нею въ точкѣ A_c. Отрѣзокъ этой линіи AA_c будетъ служить радіусомъ вращенія точки A, проектируясь на H безъ искаженія въ линію aa_c. Плоскость круга вращенія будетъ параллельна H и кругъ этотъ будетъ проектироваться на нее безъ искаженія. Центръ вращенія будетъ находиться въ точкѣ A_c. Описавъ около центра a_c радіусомъ aa_c дугу,



черт. 266



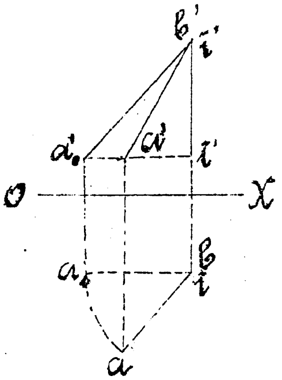
черт. 267

вмѣщающую уголъ α, получимъ новое положеніе a_o горизонтальной проекціи точки A; новая вертикальная проекція a_o будетъ лежать на перпендикулярѣ къ OX, возстановленномъ изъ a_o, и въ то же время на $a_c'a' \perp i'i'$, на которой расположится новая вертикальная проекція радіуса вращенія.

Повернемъ теперь точку A на уголъ α, вокругъ оси II, перпендикулярной къ V (черт.267). Теперь дуга вращенія точки A будетъ проектироваться на V безъ искаженія, имѣя центръ вращенія въ точкѣ a_i'. Изъ точки a проведемъ линію aa_i, параллельную OX - до пересѣченія съ ii въ точкѣ a_c. Эта линія будетъ служить горизонтальной проекціей радiуса вращенія. Описавъ изъ центра a_c' дугу, вмѣщающую уголъ α, получимъ новую вертикальную проекцію a_0' точки А. Опустивъ изъ точки a_0' перпендикуляръ на ОХ до пересѣченія съ a_c a, получимъ новую горизонтальную проекцію a_0 точки А. Въ виду полной аналогичности построеній при вращеніи вокругъ осей, перпендикулярныхъ къ Н или къ V въ послѣдующемъ, при разсмотрѣніи пріемовъ вращенія линій и плоскостей, будутъ производиться построенія только для одной оси, перпендикулярной къ Н.

β) *Вращеніе прямой линіи.*

Разсмотримъ вращеніе прямой линіи въ слѣдующей задачѣ. Дана прямая АВ; требуется привести ее въ положеніе, параллельное V (чертежъ 268). Возьмемъ за ось вращенія линію, проходящую черезъ точку В и перпендикулярную къ плоскости Н. При вращеніи точка В остается на мѣстѣ, такъ какъ она служитъ центромъ вращенія. Описавъ изъ центра b дугу радіусомъ ab и проведя изъ точки b линію ba_0, параллельную ОХ до пересѣченія съ дугой, получимъ a_0b - горизонтальную проекцію прямой АВ въ новомъ положеніи. Изъ точки a' проведемъ линію, перпендикулярную къ i'i' и найдемъ точку a_0' пересѣченія этой линіи съ перпендикуляромъ къ ОХ, возстановленномъ изъ точки a_0. Соединяя a_0' съ b', получимъ истинную величину отрѣзка АВ и истинную величину угла наклона АВ къ плоскости Н, который будетъ проектироваться на плоскость V безъ искаженія. Если требуется повернуть прямую въ положеніе, параллельное Н, то надо брать ось вращенія, перпендикулярную къ V. Построеніе въ этомъ случаѣ совершенно аналогично построенію при оси, перпендикулярной къ Н.



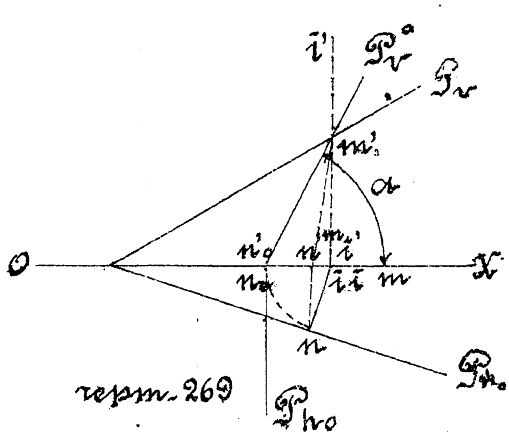
черт. 268

γ) *Вращеніе плоскости.*

Такъ какъ мы имѣемъ два рода характерныхъ заданій плоскости (слѣдами или двумя случайными пересѣкающимися линіями), то и прослѣдимъ примѣненіе метода вращенія для каждаго заданія порознь въ слѣдующихъ задачахъ.

Пусть плоскость задана двумя ея слѣдами P_v и P_h (черт. 269), требуется опредѣлить уголъ ея наклоненія къ плоскости Н.

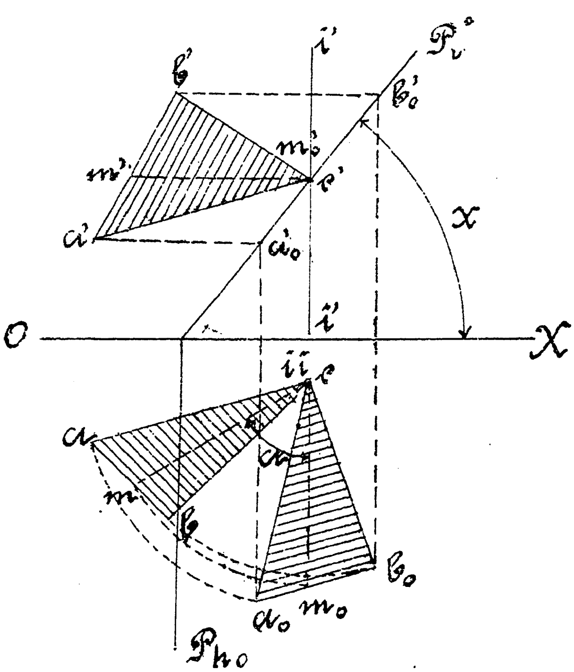
Если намъ удастся, не мѣняя угла наклона Р къ Н повернуть ее въ положеніе перпендикулярное къ V, то тогда искомый уголъ будетъ на V проектироваться безъ искаженія.



черт. 269

Проведемъ въ плоскости Р изъ точки М, лежащей на P_v, перпендикуляръ MN къ слѣду P_h; горизонтальная проекція этого перпендикуляра будетъ перпендикулярна къ слѣду P_h.

Возьмемъ за ось линію II, перпендикулярную къ плоскости Н и проходящую черезъ точку М. При такихъ условіяхъ горизонтальная проекція ii оси II будетъ лежать на оси ОХ. Вращаемъ плоскость Р вмѣстѣ съ линіей MN вокругъ оси II до тѣхъ поръ, пока MN не сольется съ плоскостью V. При вращеніи точка M, какъ лежащая на оси II, будетъ оставаться безъ измѣненія; а такъ какъ она лежитъ въ плоскости V, то новый вертикальный слѣдъ P_V плоскости P пойдетъ черезъ нее. Посмотримъ, какъ пойдетъ слѣдъ плоскости P на плоскости H. Будемъ вращать слѣдъ P_h такъ, какъ вращали MN; послѣ поворота слѣдъ P_h займетъ новое положеніе P_{h_o}, перпендикулярное къ оси OX. Точка n_o' будетъ новой точкой схода слѣдовъ. Соединяя точку n_o' съ m_o', получимъ направленіе новаго вертикальнаго слѣда плоскости P - P_V^o. При вращеніи плоскости мы будемъ примѣнять слѣдующее обозначеніе: новое положеніе стараго слѣда P_h будемъ обозначать черезъ P_{h_o} (o внизу), и направленіе новаго слѣда черезъ P_V^o (o вверху). Послѣ поворота искомый уголъ наклона плоскости P къ плоскости H будетъ на V проектироваться безъ искаженія, такъ какъ теперь P перпендикулярна къ V. Уголъ наклона плоскости P къ плоскости V находится совершенно аналогичнымъ путемъ. Разсмотримъ теперь примѣненіе метода вращенія къ вращенію плоскости, заданной двумя случайными пересѣкающимися линіями въ рѣшеніи слѣдующей задачи: найти уголъ наклона къ плоскости проекціи H плоскости, заданной двумя пересѣкающимися линіями AC и BC. Для этого нужно путемъ вращенія привести плоскость ABC въ положеніе, перпендикулярное къ плоскости V. Проведемъ (черт.270) черезъ точку C ось вращенія II, перпендикулярную къ плоскости H. Разсматриваемую задачу можно было бы свести къ предыдущей задачѣ, если бы былъ найденъ горизонтальный слѣдъ плоскости ABC. Для опредѣленія угла поворота достаточно горизонтальный слѣдъ привести въ положеніе, перпендикулярное къ OX. Но, очевидно, вмѣсто самого горизонтальнаго слѣда достаточно знать только его направленіе. Чтобы найти это направленіе воспользуемся горизонталью, которая, какъ извѣстно, параллельна горизонтальному слѣду. Пусть



черт. 270

эта горизонталь будетъ MC (mc, m'c'). Будемъ вращать горизонталь вокругъ оси II, перпендикулярной къ H и проходящей черезъ точку C, до приведенія ея въ положеніе, перпендикулярное къ плоскости V. Для этого приводимъ mc въ положеніе m_oC, перпендикулярное къ OX. Уголъ поворота горизонтали α и опредѣлитъ тотъ уголъ, на который надо повернуть всѣ точки плоскости ABC, чтобы она стала перпендикулярной къ плоскости V. Поворачивая точка a и c на этотъ уголъ α, соединяя ихъ прямыми, опредѣлимъ искомое положеніе плоскости ABC. Дѣйствительно, вертикальныя проекціи a_o' и b_o' этихъ точекъ должны лежать съ одной стороны на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ a_o и b_o къ OX, а съ другой стороны на перпендикулярахъ $a'a_o'$, $b'b_o'$, опущенныхъ изъ точекъ a' и b' на ось i'i'. Въ пересѣченіи соотвѣтственныхъ перпендикуляровъ и найдемъ точки a_o' и b_o'.

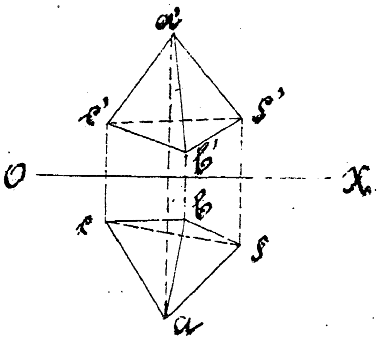
Такъ какъ послѣ поворота плоскость ABC будетъ перпендикулярна къ V, то вертикальныя проекціи всѣхъ точекъ, лежащихъ въ ABC, должны находиться на новомъ вертикальномъ слѣдѣ P_V^o, т.е. P_V^o пройдетъ черезъ точки a_0', b_0', c_0', m_0'. Уголъ между P_V^0 и OX и будетъ искомымъ.

δ) Вращенiе пространственныхъ тѣлъ.

Вращенiе тѣлъ сводится къ вращенiю точекъ, линiй и плоскостей, ограничивающихъ эти тѣла и разсматривается ниже.

c) Послѣдовательное вращенiе вокругъ двухъ осей, перпендикулярныхъ къ плоскостямъ проекцiй.

Часто приходится примѣнять методъ вращенiя вокругъ не одной оси, а послѣдовательно вокругъ двухъ осей, изъ которыхъ одна перпендикулярна къ H, а другая перпендикулярна къ V.

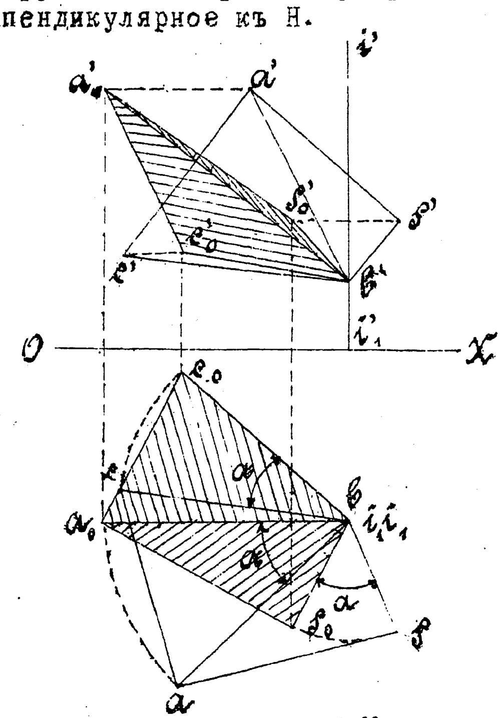


черт. 271.

Прослѣдимъ примѣненiе метода вращенiя въ такой задачѣ, гдѣ требуется именно такое послѣдовательное вращенiе вокругъ двухъ осей, одной - перпендикулярной къ H и другой - перпендикулярной къ V.

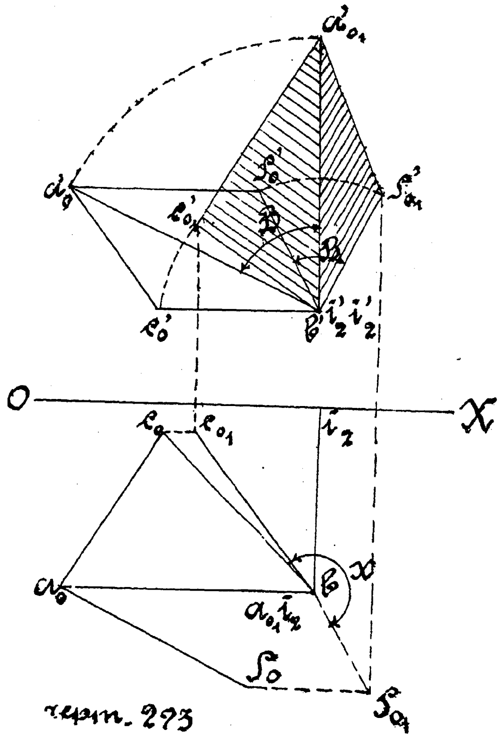
Для примѣра возьмемъ слѣдующее условiе задачи. Въ пирамидѣ ABCS (черт.271) опредѣлить величину двуграннаго угла при ребрѣ AB.

Двугранный уголъ, очевидно, будетъ проектироваться безъ искаженiя тогда, когда его грани ABC и ABS (или ребро AB) будутъ перпендикулярны къ H или къ V. Чтобы достигнуть этого, сдѣлаемъ два послѣдовательныхъ поворота системы плоскостей ABC и ABS: I-й вокругъ оси, перпендикулярной къ H до приведенiя ребра AB въ положенiе, параллельное V, и 2-й поворотъ вокругъ оси, перпендикулярной къ V до приведенiя AB въ положенiе, перпендикулярное къ H.


черт. 272

Первый поворотъ. Поворачиваемъ плоскости, образующiя данный двугранный уголъ (черт.272) вокругъ оси I'I', проходящей черезъ какую нибудь точку линiи AB, напримѣръ, B и перпендикулярной къ H такъ, чтобы ребро AB стало параллельно плоскости V. Горизонтальная проекцiя ab займетъ тогда положенiе, параллельное оси OX; между прежнимъ положенiемъ ab и новымъ положенiемъ a_0b будетъ уголъ α. Точки c и s опишутъ на плоскости H дуги радiусами, равными горизонтальнымъ проекцiямъ линiй CB и SB и повернутся на тотъ же уголъ α въ томъ же направленiи, въ какомъ повернулась ab. Вертикальныя проекцiи этихъ точекъ найдемъ на перпендикулярахъ къ OX, возставленныхъ изъ новыхъ горизонтальныхъ проекцiй, въ мѣстѣ пересѣченiя этихъ перпендикуляровъ съ линiями, проходящими черезъ вертикальныя проекцiи a', b', s', и параллельными оси OX (такъ какъ точки A, C и S, вращаясь, будутъ находиться въ плоскостяхъ, параллельныхъ H). Возьмемъ теперь ось I_2I_2 перпендикулярную V и проходящую черезъ B и будемъ вращать точки A, C и S до тѣхъ поръ, пока AB не станетъ перпендикулярно къ H (черт.273).

Тогда ея горизонтальная проекція обратится въ точку и сольется съ b; вертикальная проекція ($a_o'b'$) будетъ перпендикулярна къ OX и



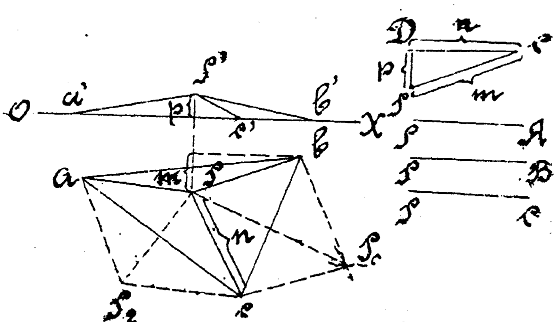
черт. 273

равна $a_o'b'$; уголъ поворота β составится между прежнимъ положеніемъ вертикальной проекціи и новымъ. По предыдущему поворачиваемъ точки C и S на тотъ же уголъ β и получаемъ вертикальныя ихъ проекціи c_o' и s_o'. Горизонтальныя проекціи C и S будутъ лежать на перпендикулярахъ изъ этихъ точекъ къ OX и въ то же время на линіяхъ, параллельныхъ OX, перпендикулярныхъ къ $i_2 i_2$ и проходящихъ черезъ ихъ полученныя ранѣе горизонтальныя проекціи, слѣдовательно, въ мѣстѣ ихъ пересѣченія. Соединяя точки c_{o1} и s_{o1} съ b, получаемъ уголъ X, который и будетъ искомымъ линейнымъ угломъ двуграннаго угла при AB, такъ какъ ребро AB, а слѣдовательно и грани послѣдняго, теперь перпендикулярны къ H. (На черт.273 этотъ уголъ почти равенъ 180°).

Примѣненіе метода вращенія тѣлъ въ пространствѣ очень полезно при построеніи многогранниковъ по разнымъ заданнымъ условіямъ.

Пусть, напримѣръ, требуется построить на плоскости P какую нибудь пирамиду. Положимъ, что даны размѣры основанія пирамиды и истинная длина реберъ.

Ясно, что легче всего построить пирамиду, основаніе которой



черт. 274

лежало бы въ плоскости H или V; тогда основаніе проектировалось бы безъ искаженія (основаніе само лежитъ въ плоскости проекціи). Покажемъ теперь, какъ построить многогранникъ въ этомъ случаѣ, а затѣмъ, какъ свести къ этому случаю построеніе многогранника, основаніе котораго лежитъ въ другой какой нибудь плоскости P.

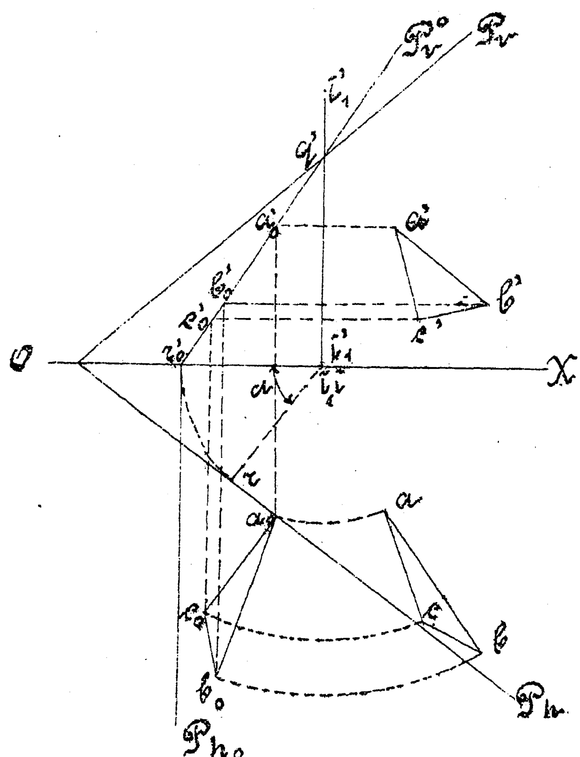
Произведемъ построеніе пирамиды, основаніе которой ABC лежитъ въ плоскости H. Даны горизонтальныя проекціи ab, bc и ac сторонъ основанія (черт.274), равныя истинной длинѣ сторонъ основанія и даны истинныя величины реберъ SA, SB и SC. Послѣднія для простоты примемъ равными другъ другу.

Чтобы найти горизонтальную проекцію вершины пирамиды S, строимъ развертки двухъ граней BSC и ASC, что мы можемъ сдѣлать, зная истинныя величины реберъ.

Будемъ теперь свертывать грани пирамиды. Для этого вращаемъ грань S_1BC около ребра BC. Точка S (вершина пирамиды), очевидно, будетъ проектироваться на перпендикулярѣ S_1S, опущенномъ изъ точки S_1 на ребро BC. Вращая грань S_2AC вокругъ ребра AC, мы получимъ перпендикуляръ

S_2S, на которомъ по предыдущему будетъ лежать проекція вершины S. Отсюда слѣдуетъ, что горизонтальная проекція вершины S будетъ лежать на пересѣченіи линій SS_2 и SS_1. Соединяя S съ точками a, b, c, получаемъ горизонтальныя проекціи реберъ SA, SB и SC. Находимъ теперь вертикальную проекцію вершины S, пользуясь теоремой: "истинная величина отрѣзка прямой линіи опредѣляется построеніемъ гипотенузы такого прямоугольнаго треугольника, у котораго однимъ изъ катетовъ служитъ одна изъ проекцій даннаго отрѣзка, а другимъ - разность разстояній концовъ другой проекціи до оси OX". Однимъ катетомъ треугольника можетъ, напримѣръ, служить длина sc = n, гипотенуза этого треугольника должна равняться длинѣ SC = m; построивъ по этимъ даннымъ прямоугольный треугольникъ, получаемъ длину другого катета SD= = p, каковую и откладываемъ на перпендикулярѣ SS', отъ оси вверхъ до точки S', которая и будетъ служить вертикальной проекціей конца ребра SC. Соединивъ S' съ точками a', b', c', мы получимъ вертикальныя проекціи реберъ пирамиды.

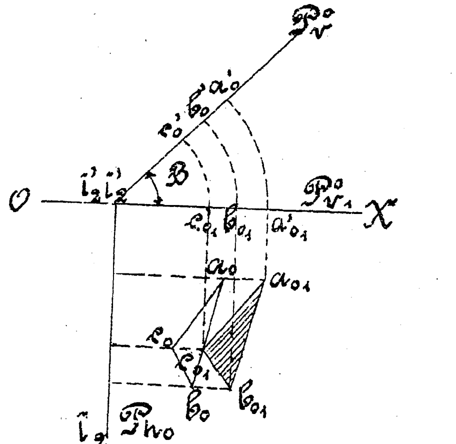
Умѣя теперь строить пирамиду съ основаніемъ, лежащимъ въ плоскости H или V (для V построеніе будетъ аналогичнымъ построенію на H), мы можемъ, примѣняя методъ вращенія, свести задачу построенія многогранника съ основаніемъ въ плоскости P къ этому разсмотрѣнному нами случаю. Пусть дана плоскость P, въ которой должно лежать основаніе ABC пирамиды SABC, заданное проекціями его сторонъ AB, BC и AC; даны истинныя величины реберъ SA, SB и SC. Дѣлаемъ два послѣдовательныхъ поворота: 1) вокругъ оси, перпендикулярной къ H приводимъ плоскость P въ положеніе, перпендикулярное къ V; 2) вокругъ оси, перпендикулярной къ V до совпаденія P съ H. Вращаемъ плоскость P вокругъ оси II, лежащей въ плоскости V и перпендикулярной къ H (чертежъ 275). Строимъ перпендикуляръ ri къ слѣду P_h и описываемъ дугу rr_o; точка r_o будетъ точкой схода слѣдовъ; P_{h_o} расположится перпендикулярно къ OX, а P_V, очевидно, будетъ проходить черезъ точку q' пересѣченія II съ P_V, которая останется неподвижной.



черт. 275

Поворачиваемъ теперь вокругъ той же оси I_1I_1 на тотъ же уголъ α и въ томъ же направленіи основаніе пирамиды ABC; вертикальныя проекціи a_o', b_o', и c_o', вершинъ основанія расположатся на слѣдѣ P_V^o (такъ какъ плоскость P станетъ перпендикулярно къ V) на такихъ же разстояніяхъ отъ оси OX, какъ и прежде, потому что точки A, B и C при поворотѣ опишутъ окружности, плоскости которыхъ параллельны H. Горизонтальныя проекціи вершинъ основанія найдемъ, повернувъ точки a, b и c на уголъ α въ сторону вращенія плоскости P. Очевидно, что a_o' и a_o, b_o', и b_o, и c_o', и c_o должны соотвѣтственно очутиться на линіяхъ, перпендикулярныхъ къ OX.

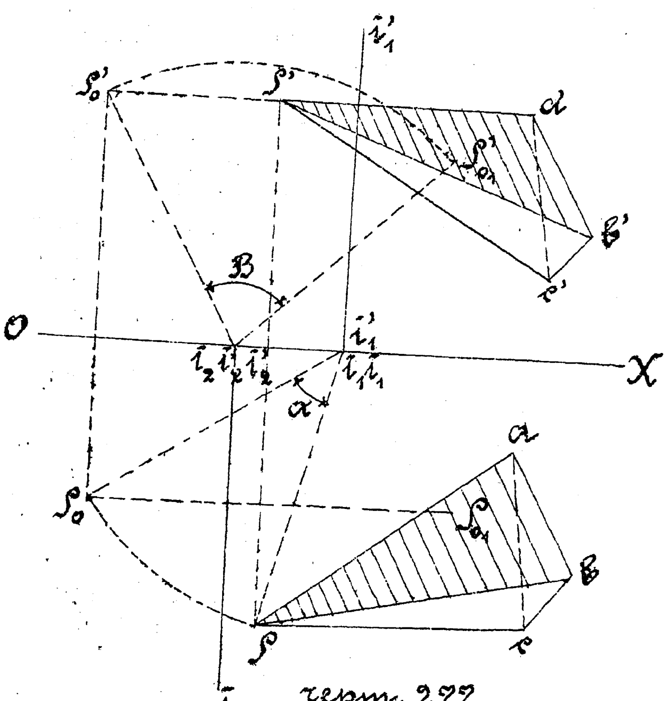
Перенесемъ полученныя фигуры на новый чертежъ и будемъ вращать плоскость P вокругъ слѣда P_{h_0} до совпаденія плоскости P съ плоскостью H (черт. 276). Вертикальныя проекціи точекъ A, B, C будутъ лежать тогда на оси OX, такъ какъ P совпадаетъ съ H и мы ихъ получимъ, описавъ изъ точки $i'_2 i'_2$ дуги радіусами $i'_2 c'_0$, $i'_2 b'_0$ и $i'_2 a'_0$.



черт. 276

Точки пересѣченія дугъ съ OX и дадутъ вертикальныя проекціи a'_{01}, b'_{01}, c'_{01} точекъ A, B и C; горизонтальныя же проекціи будутъ лежать на пересѣченіи перпендикуляровъ къ OX изъ c'_{01}, b'_{01} и a'_{01} съ линіями, перпендикулярными къ P_{h_0} и проходящими черезъ точки a_0, b_0 и c_0. Соединяя полученныя точки a_{01}, b_{01} и c_{01}, получимъ основаніе пирамиды въ плоскости H.

Строимъ теперь пирамиду SABC такъ, какъ это было указано ранѣе (черт. 275)(на чертежѣ 277 показана лишь точка S_0, построенная такъ, какъ показано на чертежѣ 274). Теперь остается повернуть плоскость P и полученную вершину пирамиды S въ прежнее положеніе, вращая P вокругъ тѣхъ же осей и на тѣ же углы, но въ обратномъ направленіи. Слѣдовательно, необходимо вращать точку S сначала вокругъ оси P_{h_0} $(I_2 I_2)$ на уголъ β, а потомъ вокругъ оси $I_1 I_1$ на уголъ α. На чертежѣ 277 произведены эти построенія и показаны искомыя проекціи пирамиды.



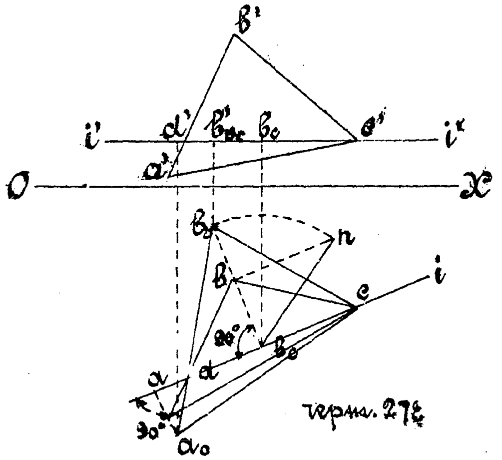
черт. 277

d) *Вращеніе около осей, параллельныхъ H или V, но не перпендикулярныхъ ни къ H, ни къ V.*

Когда какую нибудь плоскость нужно привести въ положеніе, параллельное H или V, чтобы она проектировалась безъ искаженія на H или на V, очень удобно пользоваться осями вращенія, параллельными H или V но не перпендикулярными ни къ V, ни къ H. Разсмотримъ примѣненіе этого метода на слѣдующей задачѣ. Данъ

Данъ плоскій треугольникъ ABC; требуется найти его истинную величину. Выберемъ ось вращенія II такъ (черт. 278), чтобы она была параллельна H и лежала въ плоскости ABC, т.е. являлась горизонталью плоскости ABC. Для удобства построенія проведемъ ось II черезъ точку C. Приведемъ треугольникъ ABC вращеніемъ вокругъ II въ положеніе, параллельное H и построимъ его новую горизонтальную проекцію. Проведемъ въ пространствѣ линію $BB_c \perp$ II до пересѣченія съ II въ точкѣ B_c.

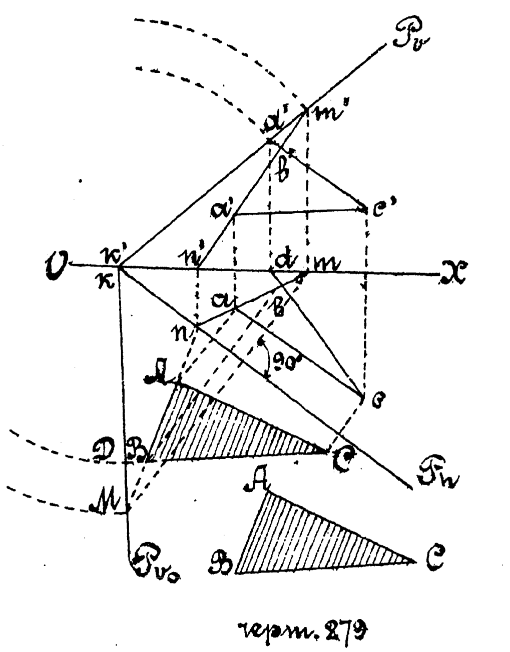
Эта линія будетъ служить радіусомъ вращенія точки B. Опредѣляемъ



извѣстнымъ намъ способомъ истинную длину этого радіуса. Послѣ поворота радіусъ BB_c вращенія будетъ перпендикуляренъ къ II въ точкѣ B_c и будетъ проектироваться на H безъ искаженія, т.е. займетъ положеніе B_0B_c (b_0b_c, $b_0'b_c$), причемъ b_0b_c равно истинной длинѣ радіуса BB_c. Точка D, какъ лежащая на оси вращенія, останется безъ измѣненія. Соединяя D съ b_0, получимъ направленіе горизонтальной проекціи повернутой линіи AB. Точка a_0 опредѣлится на линіи b_0d слѣдующимъ образомъ. Съ одной стороны она должна лежать на линіи b_0d, а съ другой - на перпендикулярѣ къ оси II, опущенномъ изъ A. Этотъ перпендикуляръ въ проекціи на H будетъ проектироваться въ видѣ перпендикуляра aa_0 къ ii. Поэтому точка A_0 и опредѣлится пересѣченіемъ db_0 съ aa ii.

Какъ частный случаи вращенія около осей, параллельныхъ, но не перпендикулярныхъ плоскостямъ проекціи, можно разсматривать методъ совмѣщенія плоскостей.

Иногда при рѣшеніи задачъ бываетъ полезно производить вращеніе плоскостей не около перпендикулярныхъ къ или H осей, а около ихъ слѣда - горизонтальнаго или вертикальнаго до совпаденія съ соотвѣтственною плоскостью проекцій.



Этотъ методъ вращенія носитъ названіе *совмѣщеніе съ плоскостью проекцій*.

Прослѣдимъ примѣненіе его на слѣдующей задачѣ:

Въ плоскости P, заданной слѣдами, требуется построить треугольникъ ABC, истинная фигура котораго показана на чертежѣ 279 отдѣльно.

Зададимся въ плоскости P какой нибудь линіей MN, концы которой лежатъ на слѣдахъ P_h и P_v (горизонтальная проекція ея mn, а вертикальная m'n'). Предположимъ, что вершина B треугольника по задачѣ должна лежать на этой прямой MN; требуется пристроить къ этой точкѣ треугольникъ такъ, чтобы сторона AB пошла по MN. Примемъ за ось вращенія слѣдъ P_h и будемъ вращать плоскость P до тѣхъ поръ, пока она не совмѣстится съ плоскостью H. Чтобы не затемнить чертежа, вращеніе будемъ производить налѣво. При вращеніи точка M будетъ двигаться въ плоскости, перпендикулярной къ P_h, поэтому горизонтальная проекція m точки M будетъ двигаться по линіи mM, перпендикулярной къ слѣду P_h, точка же N будетъ оставаться безъ измѣненія, такъ какъ она лежитъ на оси вращенія P_h. Послѣ совмѣщенія плоскостей P и H точка M займетъ мѣсто на томъ же перпендикулярѣ Mm; съ другой стороны она находится въ разстояніи k'm' отъ неподвижной точки схода слѣдовъ K, лежащей на P_h, поэтому мы найдемъ положеніе M въ мѣстѣ засѣчки перпендикуляра mM дугой радіуса Km', описанной изъ точки схода слѣдовъ К; а такъ какъ М лежитъ на слѣдѣ P_V, то точка пересѣченія перпендикуляра mM съ дугою опредѣлитъ вмѣстѣ съ точкой схода К положеніе вертикальнаго слѣда P_V въ его повернутомъ положеніи. Построимъ теперь въ плоскости Р, совмѣщенной съ плоскостью Н, заданный треугольникъ, послѣ чего плоскость Р повернемъ въ прежнее положеніе, или, какъ говорятъ, *поднимемъ въ пространство* и опредѣлимъ потомъ положеніе треугольника АВС въ его проекціяхъ на Н и V.

Продолжимъ сторону ВС до пересѣченія со слѣдомъ P_{V_0} въ точкѣ D. Послѣднюю (D) перенесемъ на слѣдъ P_V, получивъ такимъ образомъ проекцію d'. Опустивъ изъ точки d' перпендикуляръ на ось ОХ, получаемъ горизонтальную проекцію d. Проведя изъ точки А перпендикуляръ къ P_h до пересѣченія съ mn въ точкѣ a, получимъ горизонтальную проекцію a вершины А треугольника АВС; вертикальная проекція a' будетъ находиться на n'm'. Проекціи b и b' другой вершины В намъ заданы. Горизонтальная проекція вершины С будетъ двигаться по линіи C_e, перпендикулярной къ оси вращенія, и мы найдемъ ее, если соединимъ d съ b и продолжимъ линію db до пересѣченія съ перпендикуляромъ C_c, опущеннымъ изъ точки С къ P_h; точка пересѣченія ихъ и дастъ горизонтальную проекцію c. Возстановивъ изъ послѣдней (c) перпендикуляръ къ ОХ до пересѣченія съ отрѣзкомъ d'b', будемъ имѣть вертикальную проекцію c' вершины С.

Соединивъ точки a, b и c (на Н) и a', b' и c' (на V), мы получимъ въ проекціяхъ треугольникъ АВС, построенный по заданнымъ условіямъ.

14. *МЕТОДЪ ПЕРЕМѢНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦІЙ.*

a) *Общія понятія.*

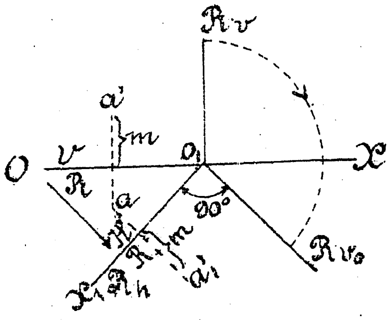
При пользованіи методомъ вращенія фигуръ мы предполагали, что лучи зрѣнія находятся въ одномъ неизмѣнномъ положеніи относительно плоскостей проекцій, для того же, чтобы фигура проектировалась безъ искаженія, вращали самую фигуру. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ бываетъ весьма выгодно перемѣщать не самую фигуру, а мѣнять направленіе лучей зрѣнія. Методъ перемѣны плоскостей проекцій и даетъ намъ возможность мѣнять направленіе лучей зрѣнія. Этотъ методъ состоитъ въ томъ, что замѣняютъ одну изъ плоскостей проекцій V или Н, или обѣ вмѣстѣ новыми плоскостями проекцій, расположенными такъ, что данная фигура проектируется на нихъ безъ искаженія. Но такъ какъ при ортогональныхъ проекціяхъ плоскости проекцій должны быть перпендикулярны между собой, то необходимо выбирать новыя плоскости проекцій такъ, чтобы одна изъ нихъ была перпендикулярна къ одной изъ старыхъ плоскостей проекцій (V или Н) и чтобы новыя плоскости проекцій были перпендикулярны между собой.

b) *Перемѣна одной плоскости проекцій.*

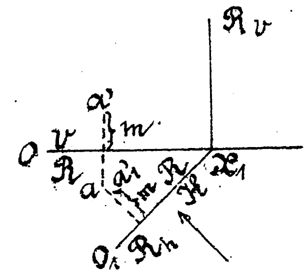
Разсмотримъ въ началѣ перемѣну одной изъ плоскостей проекцій.

Пусть намъ дана точка А въ системѣ $\frac{V}{H}$ (символъ обозначаетъ систему, причемъ числитель - верхняя пола плоскости проекцій, знаменатель - передняя); требуется построить проекціи этой точки относительно новой системы $\frac{R}{H}$, причемъ новая плоскость R перпендикулярна къ H. Назовемъ плоскость R новой вертикальной плоскостью проекцій.

При этомъ старая ось проекцій OX замѣнится новой, которой, очевидно, будетъ служить слѣдъ R_h, какъ линія сѣченія данныхъ плоскостей R и H (черт. 280). Условимся обозначать новыя оси проекцій черезъ O_1X_1, причемъ O_1 будетъ находиться слѣва, а X_1 - справа отъ зрителя, стоящаго въ новомъ I -мъ углѣ и смотрящаго на верхнюю полу новой вертикальной плоскости. Отбросивъ плоскость V, совмѣстимъ R съ H, вращая R около оси O_1X_1 такъ, чтобы верхняя пола плоскости R совпала съ задней H и нижняя пола R совпала съ передней H, и найдемъ новыя проекціи точки A. (Стрѣлка на чертежѣ показываетъ направленіе лучей зрѣнія, зритель и точка A въ новомъ I-мъ углу пространства). Очевидно, что горизонтальная проекція a будетъ одна и та же, какъ при старой системѣ $\frac{V}{H}$, такъ и при новой $\frac{R}{H}$. Новая вертикальная проекція a' должна расположиться на одномъ перпендикулярѣ къ оси проекцій O_1X_1 съ a и при томъ въ такомъ же разстояніи (m) отъ O_1X_1, въ какомъ находится a' отъ OX, такъ какъ разстояніе точки A отъ H, опредѣляемое разстояніемъ a' отъ OX не измѣнилось. При совмѣщеніи плоскости проекцій R съ H, производимомъ въ обратномъ направленіи, какъ это указано на чертежѣ 281, для нахожденія a_1', новой вертикальной проекціи точки A, откладываютъ то же разстояніе отъ OX на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ a на O_1X_1, но въ другую сторону, какъ это и показано на чертежѣ.

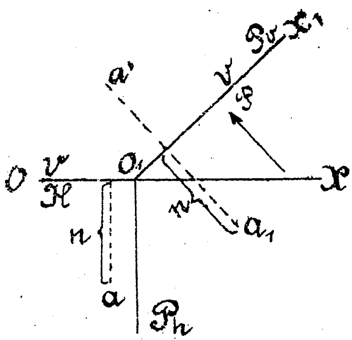


черт. 280

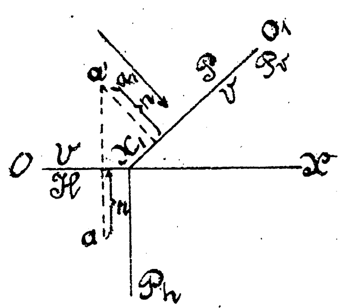


черт. 281

Соотвѣтственно съ этимъ измѣняется и расположеніе буквъ O, X, и $\frac{R}{H}$, такъ какъ точка A въ системѣ $\frac{R}{H}$ будетъ лежать во второмъ углѣ пространства.



черт. 282



черт. 283

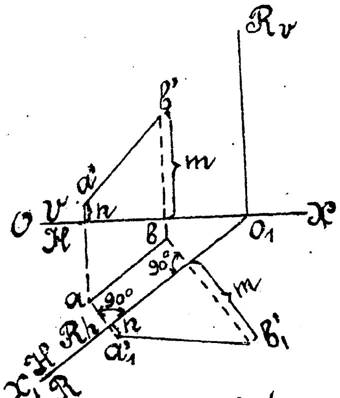
При переходѣ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V}{P}$, гдѣ P - новая горизонтальная плоскость проекцій, разсуждаемъ аналогичнымъ образомъ (черт. 282).

Отбросивъ H, совмѣщаемъ V съ P такъ, чтобы задняя пола P совмѣстилась съ верхней полой V и передняя пола P съ нижней полой V. На перпендикулярѣ, опущенномъ изъ a' на P_V, откладываемъ отъ O_1X_1 разстояніе (n), равное разстоянію a отъ OX. Получаемъ новую проекцію a_1 точки A.

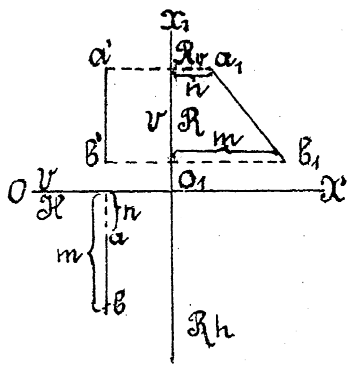
При совмѣщеніи плоскостей H и P въ обратномъ направленіи (черт. 283), надо откладывать a на перпендикулярѣ къ O X , опущенномъ изъ точки a въ другую сторону.

Въ дальнѣйшемъ новыя вертикальныя проекціи точекъ A, B, C.....мы будемъ обозначать малыми буквами съ двумя значками, однимъ внизу, другимъ вверху, a_1', b_1', c_1'... и т.д., а новыя горизонтальныя проекціи - малыми буквами со значкомъ только внизу a_1, b_1, c_1,.... и т.д.

Разсмотримъ приложеніе метода перемѣны плоскостей проекцій, когда даны прямыя линіи. Пусть намъ данъ отрѣзокъ прямой AB, случайно расположенный (черт.284); требуется опредѣлить величину отрѣзка при помощи метода перемѣны плоскостей проекцій. Перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{R}{H}$, причемъ R - перпендикулярна къ H и параллельна AB. При такой системѣ плоскостей проекцій отрѣзокъ прямой AB будетъ проектироваться на R безъ искаженія. Построивъ новыя вертикальныя проекціи точекъ A и B - a_1' и b_1', и соединивъ ихъ, найдемъ новую вертикальную проекцію AB - $a_1'b_1'$, которая и будетъ выражать истинную величину отрѣзка AB.

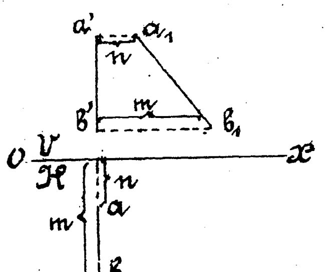


черт. 284



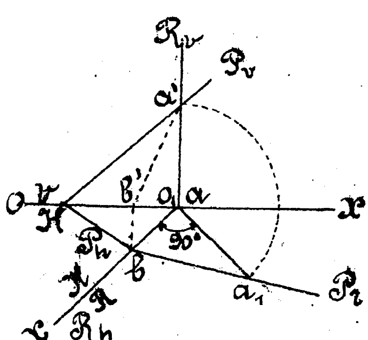
черт. 285

Особенно удобенъ этотъ методъ для опредѣленія истинной величины профильной линіи. Пусть намъ дана профильная линія AB (черт.285), требуется опредѣлить ея истинную величину. Перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V}{R}$, причемъ R перпендикулярна къ V и параллельна AB, т.е. R - профильная плоскость. Построивъ новыя горизонтальныя проекціи точекъ A и B на плоскости R и соединивъ ихъ, получимъ линію a'b' - истинную величину отрѣзка AB. Для простоты чертежа можно плоскость R провести черезъ самую линію AB. Тогда построеніе приметъ видъ, указанный на чертежѣ 286.



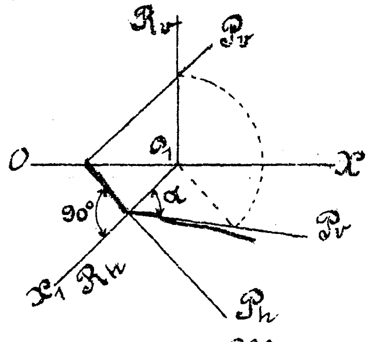
черт. 286

Посмотримъ, какъ находятся слѣды какой нибудь случайной плоскости P при перемѣнѣ плоскостей проекцій. Пусть въ системѣ $\frac{V}{H}$ дана плоскость P ея слѣдами P_v и P_h (черт.287); требуется найти въ новой системѣ $\frac{R}{H}$ слѣды данной плоскости P. Горизонтальный слѣдъ P_h останется одинъ и тотъ же, такъ какъ плоскость H не мѣняется, а новымъ вертикальнымъ слѣдомъ P_v должна быть линія сѣченія плоскости P съ плоскостью R.



черт. 287

Для нахожденія этой линіи строимъ слѣды новой вертикальной плоскости R - R_h и R_v при системѣ $\frac{V}{H}$ и находимъ линію



черт. 288

сѣченія AB плоскости P съ плоскостью R.

Одною такою точкою будетъ служить точка B - пересѣченія слѣда P_h со слѣдомъ R_h. Такъ какъ точка B лежитъ на новой оси O_1X_1, то, очевидно, она служитъ новою точкою схода слѣдовъ. Второю точкою сѣченія P съ R служитъ точка A. Построивъ новую вертикальную проекцію точки A - a_1' и, соединивъ съ ней точку схода слѣдовъ, получимъ линію сѣченія AB плоскости P съ плоскостью R, т.е. слѣдъ плоскости P на R. Воспользуемся вышеописаннымъ способомъ для рѣшенія такой задачи: дана плоскость P (черт.288). Требуется опредѣлить уголъ наклона P къ H.

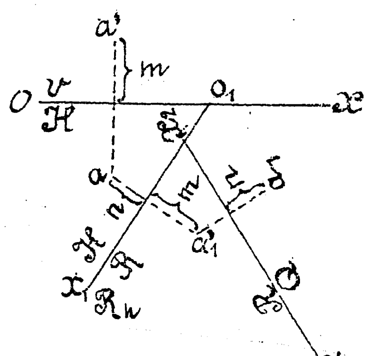
Для рѣшенія этой задачи проводимъ новую вертикальную плоскость R, перпендикулярную къ P_h. Тогда на R искомый уголъ будетъ проектироваться безъ искаженія и будетъ равенъ углу α между O_1X_1 и P_r.

c) Перемѣна двухъ плоскостей проекцій.

Пусть мы имѣемъ систему двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскосекей проекцій - V и H (будемъ обозначать эту систему $\frac{H}{V}$) и точку A въ пространствѣ (черт.289).

Посмотримъ, какимъ образомъ отразится на проекціяхъ послѣдней перемѣна одной изъ плоскостей проекцій.

Перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ новой системѣ $\frac{R}{H}$, взявъ вмѣстѣ V плоскость R, перпендикулярную къ H. (Горизонтальный слѣдъ ея R_h займетъ случайное положеніе, а вертикальный - перпендикулярное къ OX; въ построеніи послѣдняго надобности не встрѣчается). Чтобы опредѣлить направленіе оси проекцій новой системы, нужно представить зрителя стоящимъ на плоскости H, тогда конецъ O_1 оси O_1X_1 будетъ находиться слѣва отъ зрителя, а X - справа.



черт. 289

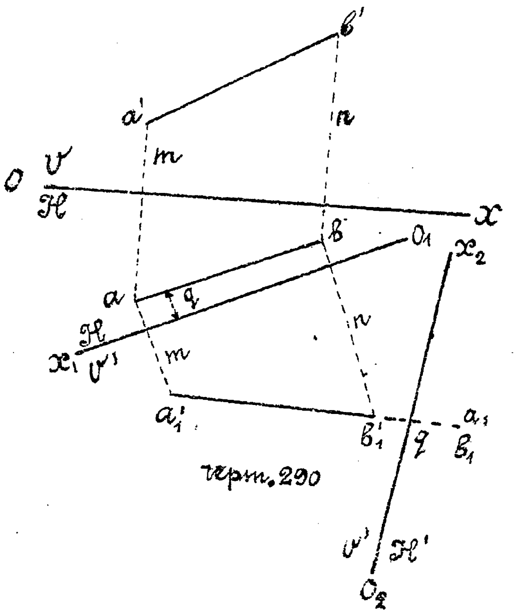
Совмѣстимъ теперь R съ H такъ, чтобы верхняя пола R совпала съ заднею (для новаго положенія зрителя) полою H. Такъ какъ R у насъ замѣнила собою V, то вертикальная проекція (a') точки A должна теперь расположиться на этой новой плоскости R и она будетъ лежать на перпендикулярѣ изъ точки a (которая останется на H безъ измѣненія) къ новой оси O_1X_1, проектируясь на верхней полѣ плоскости R. Отложивъ на этомъ перпендикулярѣ отъ оси O_1X_1 разстояніе (m) точки a' до оси OX, мы и опредѣлимъ положеніе новой вертикальной проекціи a_1'.

Отбросивъ теперь старую систему $\frac{H}{V}$, мы можемъ имѣть дѣло только съ новой системой $\frac{R}{H}$, гдѣ проекціями точки A являются точки a и a_1'.

Отъ этой же системы мы можемъ въ свою очередь перейти къ новой системѣ $\frac{R}{Q}$, если вмѣсто H взять новую горизонтальную плоскость Q, перпендикулярную къ плоскости R. (На чертежѣ обозначенъ опять только горизонтальный слѣдъ Q_r; Q_h будетъ перпендикуляренъ къ O_1X_1, но вычерчивать его нѣтъ надобности). Совмѣщая по предыдущему переднюю полу (для новаго положенія зрителя) плоскости Q вправо и представляя зрителя расположившимся на ней и смотрящаго на верхнюю полу R, мы слѣва отъ него будемъ имѣть конецъ оси O_2, а справа - X_2. Здѣсь разсуждаемъ такъ же, какъ и прежде: такъ какъ R осталась безъ перемѣны, то вертикальная проекція a_1' остается на своемъ мѣстѣ, горизонтальная же a_1 должна лежать на перпендикулярѣ къ оси O_2X_2 и будетъ проектироваться на переднюю полу Q, такъ какъ въ системѣ $\frac{R}{H}$ точка A была передъ R. Отложивъ отъ оси O_2X_2, разстояніе (n) - отъ a - до оси OX, получимъ горизонтальную проекцію (a_1) точки A въ системѣ $\frac{R}{Q}$. Зная методъ перемѣны плоскостей проекцій, мы можемъ рѣшать всевозможныя задачи на опредѣленіе различныхъ разстояній и угловъ, которые проектируются на V и H съ искаженіемъ.

Для этого надо съумѣть перейти отъ заданной системы $\frac{V}{H}$ къ новой, въ которой заданныя величины проектировались бы безъ искаженія.

Разсмотримъ построеніе проекцій прямой линіи при перемѣнѣ обѣихъ плоскостей проекцій. Пусть дана прямая линія AB, (черт.290); требуется перемѣнить плоскости проекцій такъ, чтобы одна изъ новыхъ плоскостей была перпендикулярна къ прямой. Переходимъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{H}{V'}$, причемъ выбираемъ V' такъ, чтобы она была перпендикулярной H и параллельной AB. Для удовлетворенія послѣдняго условія необходимо, чтобы O_1X_1 - слѣдъ V' на H было параллельно ab. Совмѣщаемъ V' съ H, откидывая верхнюю полу V' направо внизъ. Опускаемъ перпендикуляры изъ a и b на O_1X_1 и откладываемъ на нихъ отъ оси O_1X_1 отрѣзки m и n по другую сторону отъ O_1X_1. Получимъ точки a_1' и b_1', которыя дадутъ линію $a_1'b_1'$ - проекцію AB на V'. Новую плоскость проекцій H' выбираемъ перпендикулярной къ AB и къ V'. При такихъ условіяхъ новая ось O_2X_2 - слѣдъ H' на V', должна быть перпендикулярна къ $a_1'b_1'$. Совмѣщаемъ H' съ V', откидывая переднюю полу H' вправо. Такъ какъ вся линія AB лежитъ въ системѣ $\frac{H}{V'}$, передъ плоскостью V', то въ системѣ $\frac{V'}{H'}$ она будетъ проектироваться на переднюю полу H', т.е. вправо отъ оси O_2X_2. Откладывая на перпендикулярѣ $a_1'b_1'$ къ O_2X_2 вправо отъ послѣдней отрѣзокъ q - равный разстоянію AB до V' - получимъ точку a_1b_1 - проекцію AB на H'.



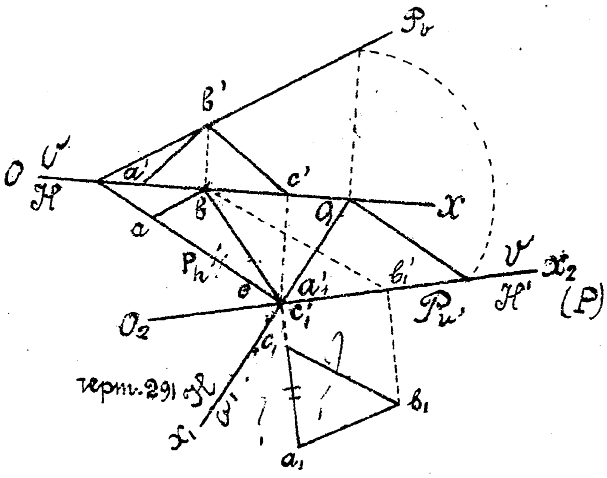
черт.290

Разсмотримъ теперь построеніе проекцій плоскости при перемѣнѣ обѣихъ плоскостей проекцій.

Рѣшимъ слѣдующую задачу.

"Опредѣлить при помощи метода перемѣны плоскостей проекцій истинную фигуру треугольника ABC, лежащаго въ плоскости P" (черт.291).

Для того, чтобы треугольникъ ABC спроектировался безъ искаженія на какую нибудь плоскость, необходимо, чтобы послѣдняя была парал-



Черт. 29

лельна плоскости ABC. Въ качествѣ промежуточной плоскости проекцій выбираемъ плоскость V', перпендикулярную H и P. Строимъ въ системѣ $\frac{H}{V'}$ слѣды плоскости P и проекціи точекъ A, B и C, какъ объяснено раньше. За новую горизонтальную плоскость проекцій примемъ саму плоскость P. Тогда второй новою осью будетъ линія Pv' сѣченія P съ V'. Совмѣщаемъ P съ V', вращая P вокругъ O_2X_2 (Pv') направо внизъ и строимъ: въ системѣ $\frac{V'}{H'(P)}$ проекціи точекъ A, B и C. Соединяя между собой эти проекціи получимъ истинную фигуру треугольника ABC.

Въ отдѣльной книгѣ "Примѣры рѣшенія задачъ по Начертательной Геометріи" Н.А.Рынина можно найти различные случаи примѣненія этого метода.

------ " ------

ЧАСТЬ II.

ОРТОГОНАЛЬНЫЯ ПРОЕКЦІИ КРИВЫХЪ ЛИНІЙ И КРИВЫХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

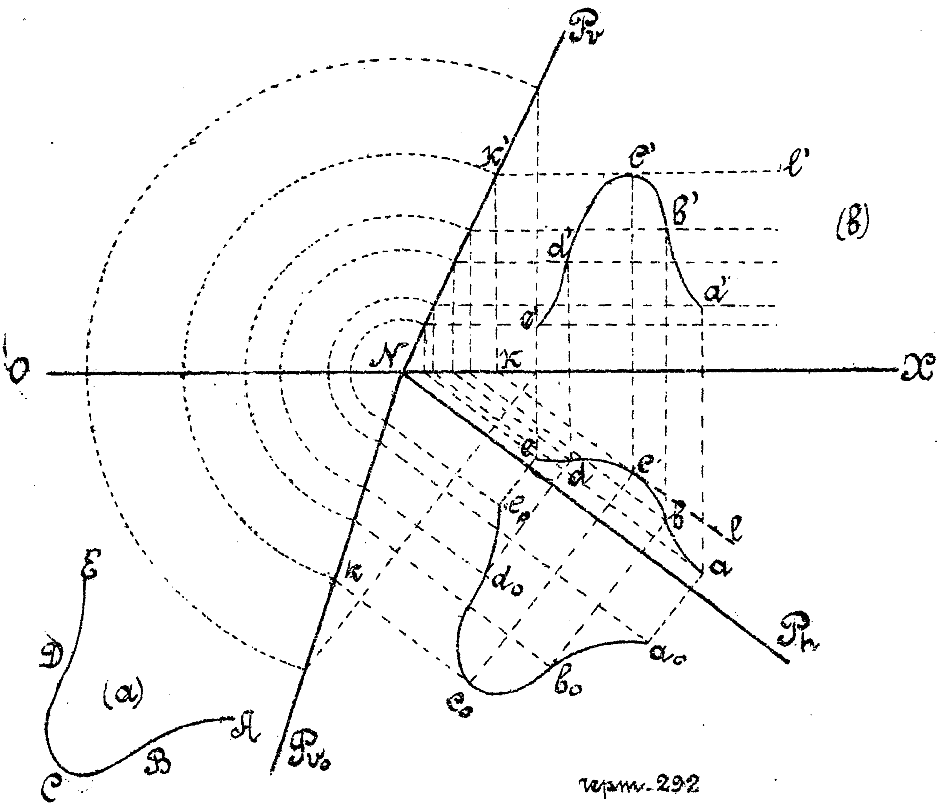
15. *КРИВЫЯ ЛИНІИ.* *)

Всѣ кривыя линіи могутъ быть раздѣлены на два класса: 1) Линіи, укладывающіяся въ плоскости, или кривыя плоскія (напримѣръ, эллипсъ, кругъ и т.д.). 2) Кривыя, неукладывающіяся въ плоскости (напримѣръ, винтовыя линіи), или кривыя двоякой кривизны.

а) *Кривыя плоскія.*

α. *Построеніе на данной плоскости данной кривой.*

Пусть дана плоскость P. Требуется построить на ней кривую ABCDE (черт.165), истинная фигура которой показана на чертежѣ 292 (а). Вращаемъ P около слѣда P до совмѣщенія съ H. Теперь мы можемъ на плоскости P, совмѣщенной съ H, построить линію ABCDE (a_0, b_0, c_0, d_0, e_0). Повернемъ P въ прежнее положеніе и покажемъ какъ найти проекціи на V и H нашей кривой линіи.



черт. 292

Проведемъ горизонталь CK черезъ какую нибудь точку C_0 кривой. и

*) *Рекомендуемое пособіе по ортогональнымъ проекціямъ кривыхъ линій и кривыхъ поверхностей: В.Курдюмовъ. "Ортогональныя проекціи кривыхъ линій и кривыхъ поверхностей" С.-Петербургъ, 1894 годъ.*

замѣтимъ точку K пересѣченія ея со слѣдомъ P_V. Описавъ теперь изъ точки N схода слѣдовъ радіусомъ NK дугу до пересѣченія съ P_V въ точкѣ k', получимъ на слѣдѣ P_V вертикальную проекцію (k') точки K въ системѣ $\frac{V}{H}$; горизонтальная же ея проекція (k) будетъ лежать на оси OX.

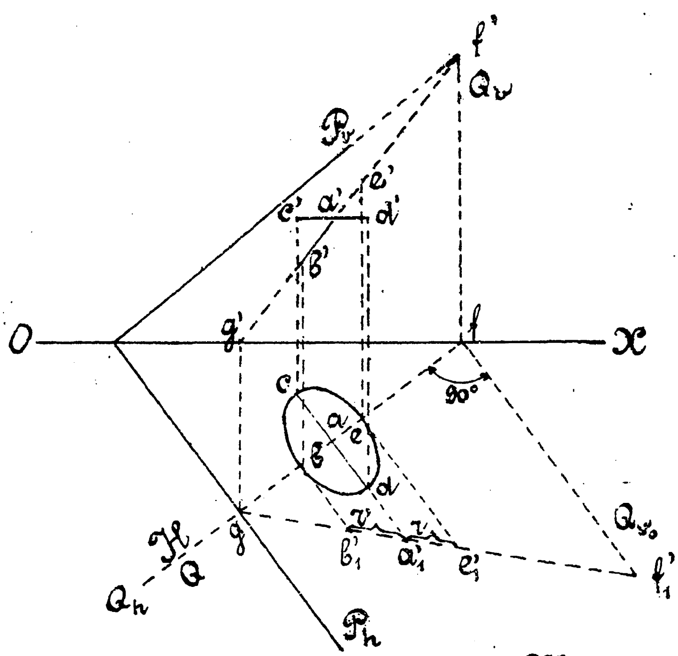
Проводимъ черезъ точку K горизонталь KL (k'l', kl) плоскости P. На этой горизонтали должна находиться искомая точка C. Съ другой стороны точка C_0 при обратномъ вращеніи плоскости P около слѣда P_h должна двигаться въ плоскости, перпендикулярной къ P_h. Слѣдовательно, ея горизонтальная проекція должна лежать на горизонтальномъ слѣдѣ этой плоскости, т.е. на линіи C_0C, перпендикулярной къ P_h и проходящей черезъ точку C_0. Въ точкѣ C пересѣченіи линій C_0C и kl, очевидно, должна находиться горизонтальная проекція c искомой точки, а вертикальная ея проекція c' найдется на линіи k'l', возставивъ изъ точки c перпендикуляръ къ OX до пересѣченія съ k'l'.

Подобнымъ же образомъ мы можемъ найти проекціи и ряда другихъ точекъ (A, B, D, E....) кривой, проведя черезъ нихъ горизонтали плоскости P, или иныя линіи (въ совмѣщенномъ положеніи P), найдя эти линіи въ заданномъ положеніи плоскости P. Соединяя одноименныя проекціи полученныхъ точекъ плавною кривою, получимъ проекціи искомой кривой.

Къ числу наиболѣе простыхъ, примѣняемыхъ въ техникѣ кривыхъ, принадлежатъ: кругъ, эллипсъ, парабола, гипербола и др. Такъ какъ при различныхъ построеніяхъ чаще всего приходится пользоваться кругомъ, то остановимся нѣсколько подробнѣе на разсмотрѣніи того, какъ проектируется кругъ при различныхъ его положеніяхъ относительно H и V.

β. построеніе проекцій круга.

Предположимъ, что въ данной плоскости P требуется построить круг даннаго радіуса r съ центромъ въ точкѣ A (черт.293). Такъ какъ плоскость P не параллельна ни V, ни H, то кругъ будетъ проектироваться на V и на H съ искаженіемъ въ видѣ эллипса. Для построенія эллипса надо найти его главныя оси или рядъ точекъ, которыя опредѣляютъ кривую эллипса. Найдемъ оси эллипса - проекціи круга на H. Выберемъ изъ различныхъ діаметровъ круга такой, который былъ бы параллеленъ плоскости H; такимъ діаметромъ будетъ, очевидно, часть горизонтали плоскости P, проходящая черезъ центръ A круга. Для построенія горизонтальной проекціи этого діаметра проведемъ изъ точки a линію, параллельную P_h, и отложи.. въ обѣ стороны отъ a отрѣзки - ac, ad, равныя порознь r. Ясно, что cd будетъ служить большою осью эллипса. Малою осью будетъ служить проекція діаметра круга, наиболѣе

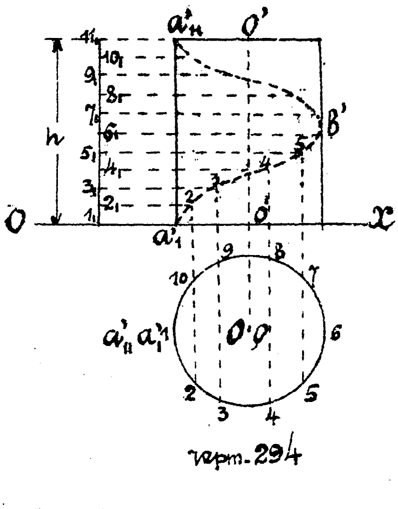


черт. 293

искажающагося въ проекціи на H. Такимъ діаметромъ будетъ часть линіи наибольшаго уклона плоскости P. Эта линія должна быть перпендикулярна къ P_h, а слѣдовательно, и будетъ перпендикулярна къ $CD \parallel P_h$. Направленіе горизонтальной проекціи малой оси эллипса мы опредѣлимъ, возставивъ изъ точки a перпендикуляръ къ cd. Теперь найдемъ точки эллипса на малой оси. Проведемъ черезъ точку A плоскость Q, перпендикулярную къ H; найдемъ линію GF сѣченія Q съ P и совмѣстимъ Q съ H, вращая Q вокругъ Q_h. Линія сѣченія GF послѣ совмѣщенія займетъ положеніе $gf_1^{\prime}$, точка же a займетъ положеніе $a_1^{\prime}$. Отложивъ на $gf_1^{\prime}$ отрѣзки $a_1^{\prime} b_1^{\prime}$, $a_1^{\prime} e_1^{\prime}$, равные r и проведя черезъ нихъ линіи, перпендикулярныя къ Q_h, найдемъ точки e и b пересѣченія этихъ линій съ gf, которыя ограничатъ малую ось be. Вертикальныя ихъ проекціи b' и e' найдутся на линіи g'f. Теперь остается только построить на найденныхъ осяхъ cd и be эллипсъ, чтобы опредѣлить горизонтальную проекцію круга, лежащаго въ плоскости P и описаннаго вокругъ центра A радіусомъ r. Для построенія эллипса на V разсуждаемъ аналогичнымъ путемъ. Беремъ въ плоскости P фронталь, проходящую черезъ центръ, и линію, перпендикулярную къ фронтали, повторяемъ предыдущія разсужденія и тѣмъ же путемъ находимъ оси эллипса.

b) *Кривыя двоякой кривизны.*

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію линій двоякой кривизны. Къ числу таковыхъ прежде всего относятся цилиндрическія и коническія винтовыя линіи. Цилиндрическою винтовою линіею называется линія, начертанная на поверхности цилиндра, причемъ такимъ образомъ, что она пересѣкаетъ его образующія подъ одинаковыми углами. Представимъ себѣ цилиндръ стоящій на плоскости H и точку A (черт. 294), которая двигается по поверхности цилиндра параллельно оси и въ то же время вокругъ этой оси. Разстояніе между точками пересѣченія винтовой линіи съ одной и той же производящей цилиндра называется шагомъ винтовой линіи.

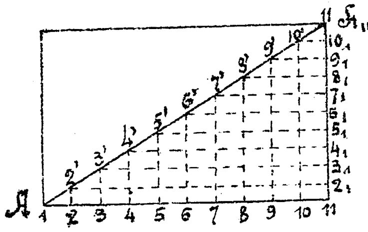


черт. 294

Движеніе происходитъ равномѣрно и углы поворота точки вокругъ оси пропорціональны разстояніямъ, проходимымъ точкою параллельно оси. Въ техникѣ болѣе всего пользуются винтовыми линіями, начерченными на поверхности цилиндра круглаго нормальнаго сѣченія. Разсмотримъ нѣкоторыя свойства такой винтовой линіи.

Раздѣлимъ кругъ нормальнаго сѣченія цилиндра и его высоту h на нѣсколько равныхъ частей, напримѣръ на 10, и предположимъ, что точка движется въ направленіи обратномъ движенію часовой стрѣлки. Горизонтальныя проекціи точки будутъ лежать на кругѣ, а вертикальныя на линіяхъ, параллельныхъ оси OO, O'O' цилиндра. Пройдя разстояніе, равное $\frac{1}{10}$ высоты, точка въ то же время повернется вокругъ оси на уголъ, равный $\frac{360^\circ}{10} = 36$ и горизонтальная ея проекція займетъ положеніе 2. Проведя изъ точки 2 перпендикуляръ къ OX и изъ точки 2, перпендикуляръ къ оси цилиндра, найдемъ точку ихъ пересѣченія 2' - вертикальную проекцію точки винтовой линіи. Когда горизонтальная проекція будетъ лежать въ точкѣ 3, то вертикальная подымется на 0,2 h надъ H и т.д. Соединивъ точки пересѣченія 1', 2', 3, 4' и т.д. кривой линіей, найдемъ вертикальную проекцію винтовой линіи (синусоида).

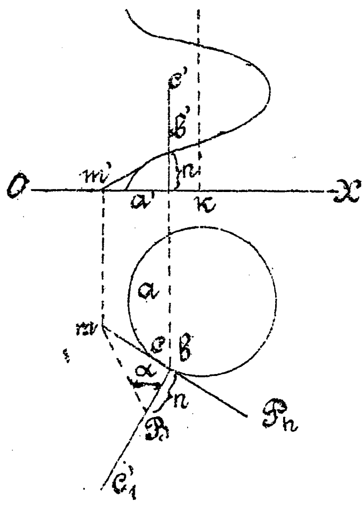
Развернемъ теперь поверхность цилиндра, на которомъ начерчена винтовая линія и построимъ на разверткѣ ту линію, въ которую преобразуется винтовая (черт.295). Раздѣлимъ основаніе и высоту полученнаго въ разверткѣ прямоугольника на столько же равныхъ частей, на сколько мы дѣлили кругъ и высоту цилиндра (на 10). Построимъ на этой разверткѣ цилиндра винтовую линію. Для этого возстановимъ из точекъ 1, 2, 3, 4, 5.... перпендикуляры къ основанію, а изъ точекъ 1_1, 2_1, 3_1, 4_1.... перпендикуляры къ высотѣ, найдемъ точки сѣченія этихъ перпендикуляровъ $1_1'$, $2_1'$, $3_1'$, $4_1'$ и т.д. и соединивъ эти точки пересѣченія линій получимъ преобразованіе винтовой линіи на разверткѣ цилиндра. Изъ чертежа 295 нетрудно видѣть, что цилиндрическая винтовая линія при разверткѣ цилиндра будетъ прямой линіей АВ, такъ какъ треугольники 1 2'2, 1 3'3, 1 4'4 и т.д. подобны другъ другу.



черт. 295

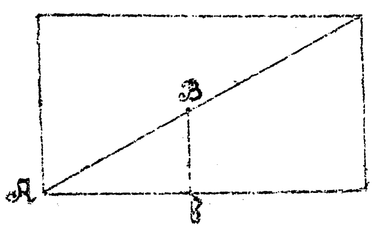
Разсмотримъ построеніе линій, касательныхъ къ цилиндрической винтовой линіи.

Пусть дана на винтовой линіи точка В (черт.296). Требуется построить въ этой точкѣ линію, касательную къ винтовой линіи. Искомая касательная, очевидно, должна касаться въ точкѣ В съ цилиндромъ, на которомъ начерчена винтовая. Слѣдовательно, горизонтальная проекція mb касательной должна касаться съ кругомъ, въ который проектируется винтовая на плоскости Н. Найдемъ теперь слѣдъ этой касательной на плоскости Н.



черт. 296

Въ точкѣ В касательная, какъ заключающая въ себѣ общій съ винтовою линіею безконечно малый прямолинейный элементъ послѣдней, должна съ производящей ВС цилиндра составлять тотъ же уголъ α, который составляетъ съ нею сама винтовая. Уголъ α мы можемъ опредѣлить, построивъ развертку цилиндра и показавъ на ней преобразованіе винтовой. Зная уголъ α, мы можемъ теперь построить касательную. Для этого проведемъ черезъ нее плоскость Р, перпендикулярную къ Н и совмѣстимъ Р съ Н, вращая ее около слѣда P_h. Найдемъ на ней теперь линію bC_1 - совмѣщенное положеніе производящей ВС цилиндра. Проводимъ черезъ точку В прямую линію подъ угломъ α къ P_h до пересѣченія съ P_h въ точкѣ m. Эта послѣдняя и будетъ служить горизонтальнымъ слѣдомъ искомой касательной; вертикальная проекція m' ея будетъ лежать на оси ОХ. Замѣтимъ еще слѣдующее: если мы имѣемъ развертку цилиндра съ начерченною же на ней разверткою винтовой (черт.296), то изъ сравненія чертежей 296 и 297 мы видимъ, что МВ, Вb и bМ чертежа 296 соотвѣтственно равны АВ, Вb, Аb чертежа 297.



черт. 297

Иными словами, длина касательной къ винтовой между ея горизонтальнымъ слѣдомъ М и точкой касанія В равна спрямленной дугѣ винтовой между ея слѣдомъ А и точкой касанія В. Длина горизонтальной проекціи Mb касательной равна спрямленной дугѣ ab - круга проекціи винтовой между ея горизонтальнымъ слѣдомъ A и точкою касанія B.

Винтовою линіей *коническаго* образованія называется линія, начертанная по поверхности прямого кругового конуса и при томъ такъ, что она является слѣдомъ движущейся точки, которая при своемъ движеніи вращается около оси конуса и одновременно съ вращеніемъ приближается къ вершинѣ конуса.

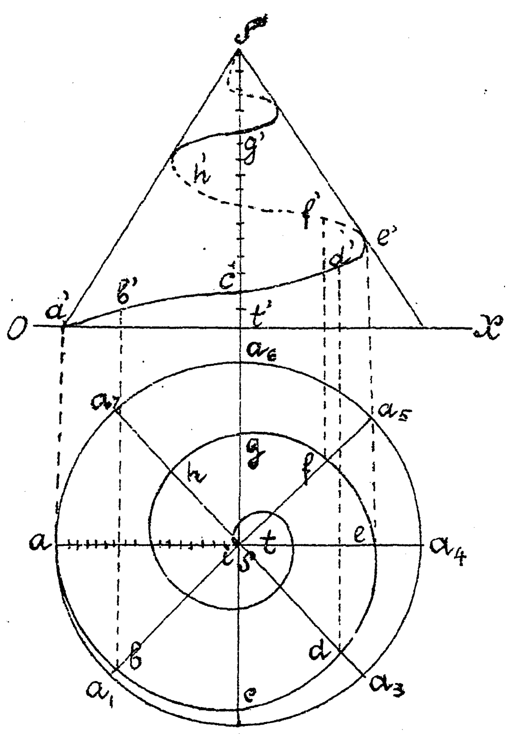
При этомъ между поступательнымъ и угловымъ перемѣщеніями точки сохраняется пропорціональность. Понятно, что коническая спираль имѣетъ неодинаковую кривизну въ различныхъ своихъ точкахъ, такъ что при расположеніи ея на поверхности конуса, отдѣльные участки спирали не могутъ быть совмѣстимы.

Ось конуса, на которомъ идетъ винтовая спираль, называется осью спирали, а вершина его центромъ или полюсомъ спирали. Разность разстояній до H между точками пересѣченія винтовой линіи съ одной и той же производящей конуса носитъ названіе шага или хода, а отрѣзокъ винтовой линіи, заключенный между точками пересѣченія ея съ одной и той же производящей называется ея оборотомъ.

Посмотримъ теперь, какъ строятся проекціи винтовой линіи коническаго образованія, или конической спирали (черт.298).

Эта кривая, какъ мы уже замѣтили, является результатомъ трехъ видовъ перемѣщеній точки: a) вращательнаго ея движенія около оси SI; b) поступательнаго перемѣщенія вдоль оси по направленію къ нѣкоторой точкѣ S и c) поступательнаго перемѣщенія по направленію, перпендикулярному къ оси.

Всѣ эти перемѣщенія, какъ мы знаемъ, будутъ равномѣрными, почему и углы поворота образующей точки должны быть пропорціональными путямъ, проходимымъ точкою вдоль оси и перпендикулярно къ ней.



черт. 298

Самое выгодное положеніе плоскостей проекцій будетъ такое, при которомъ H, положимъ, перпендикулярна къ SI, а V параллельна SI.

Положимъ, что въ начальномъ своемъ положеніи точка A винтовой линіи лежитъ на плоскости H, на разстояніи отъ оси SI, равномъ r, и точка S удалена отъ H на такое разстояніе 2h, что образующая точка въ своемъ перемѣщеніи вдоль оси можетъ придти въ него только при двухъ полныхъ ея оборотахъ около оси. При такихъ условіяхъ ходъ винтовой будетъ равенъ h.

Построимъ проекціи: оси SI, точки S и начальнаго положенія движущейся точки A, каковыми соотвѣтственно и будутъ si, s'i'; s, s' и a, a'.

Проекціями конической спирали должны служить пути, проходимые проекціями образующей точки. Такъ какъ мы H взяли перпендикулярной къ оси SI, то поступательное перемѣщеніе образующей точки вдоль оси на положеніи горизонтальныхъ ея проекцій вліянія имѣть не будетъ; поступательныя же движенія точки по направленію, перпендикулярному къ SI, а также угловыя перемѣщенія около SI должны проектироваться на H безъ искаженія.

Слѣдовательно, горизонтальною проекціей конической спирали должна являться кривая, которую опишетъ точка a, вращаясь около i (проекціи SI) и непрерывно приближаясь къ точкѣ i, съ которой совпадетъ и проекція s.

По заданію образующая точка въ пространствѣ изъ начальнаго своего положенія A можетъ притти въ положеніе S только послѣ двухъ полныхъ оборотовъ около оси SI потому и проекція ея изъ положенія (a) въ положеніе (s) перейдетъ только тогда, когда сдѣлаетъ два полныхъ оборота около точки i.

Въ виду того, что угловыя перемѣщенія точки находятся въ пропорціональной зависимости съ поступательными перемѣщеніями, видъ горизонтальной проекціи конической спирали можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ (черт.298)

Опишемъ изъ точки i, какъ центра, окружность, раздѣлимъ ее на нѣсколько равныхъ частей, напримѣръ, на 8, обозначивъ точки дѣленія буквами a, a_1, a_2, a_3, ... a_7 и проведемъ 8 радіусовъ. Каждая пара смежныхъ радіусовъ опредѣлитъ тогда уголъ въ $^1/_8$ часть одного полнаго оборота.

Раздѣлимъ теперь радіусъ ai на 16 равныхъ частей (въ виду того, что точка a достигаетъ положенія s въ два оборота) и по радіусу a_1i отложимъ отъ a_1 отрѣзокъ $a_1b = {}^1/_{16}$ ai; по радіусу a_2i отложимъ часть $a_2c = {}^2/_{16}$; по радіусу a_3i отложимъ отрѣзокъ $a_3d = {}^3/_{16}$ и т.д. Тогда точки a, b, c, d.... будутъ принадлежать горизонтальной проекціи конической спирали. Если мы теперь соединимъ ихъ плавною кривою, то и получи горизонтальную проекцію спирали (Архимедову спираль, уравненіе которой $\frac{3}{S} = \frac{\alpha}{\alpha'}$).

Вертикальныя проекціи соотвѣтственныхъ точекъ конической спирали расположатся на перпендикулярахъ, опущенныхъ на OX изъ точекъ a, b, c, d.... Разстояніе же точекъ b', c', d', отъ OX мы опредѣлимъ слѣдующимъ образомъ: такъ какъ перемѣщеніе образующей точки вдоль оси SI пропорціональны угловымъ перемѣщеніямъ и SI || V, почему перемѣщенія, параллельныя оси SI должны проектироваться на V безъ искаженія, то дѣлимъ s'i' на 16 равныхъ частей и откладываемъ по b b' вверхъ отъ OX одну часть (т.е. $^1/_{16}$ s'i'), по cc' – двѣ части (т.е. $^2/_{16}$) по d d' – $^3/_{16}$ и т.д. Соединивъ точки a', b', c'...... плавною кривою, мы и получимъ искомую вертикальную проекцію конической спирали.

16. *КРИВЫЯ ПОВЕРХНОСТИ.*

а) *Классификація кривыхъ поверхностей.*

Кривую поверхность мы будемъ разсматривать, какъ совокупность послѣдовательныхъ положеній линіи, движущейся въ пространствѣ по опредѣленному закону.

Линія, образующая своимъ движеніемъ поверхность, называется *образующею или производящею.*

Всѣ кривыя поверхности раздѣляются на два класса, причемъ въ основу классификаціи поверхностей полагается видъ ихъ линейныхъ производящихъ:

I. *Поверхности съ прямыми производящими,* т.е. образованныя движеніемъ прямыхъ линій.

II. *Поверхности съ кривыми производящими,* т.е. образованныя движеніемъ кривыхъ линій.

Иногда поверхности съ прямыми производящими носятъ названіе *линейчатыхъ* (т.е. образованныхъ линіями, которыя можно пеоводить по линейкѣ).

Въ зависимости отъ того, можно ли разсматривать всѣ элементы поверхности въ предѣлѣ, какъ плоскіе - т.е. можно ли поверхность развертывать въ плоскость, вращая плоскіе элементы ея вокругъ послѣдовательныхъ производящихъ, поверхности съ прямыми производящими или линейчатыя дѣлятся въ свою очередь на два класса, а именно:

1) Поверхности развертаемыя и 2) поверхности неразвертаемыя.

Послѣднія иначе называются *косыми.*

Поверхности линейчатыя развертаемыя могутъ быть слѣдующихъ видовъ:

a) *Поверхности цилиндрическія* или просто *цилиндры,* когда поверхности образуются движеніемъ прямой, во всѣхъ своихъ положеніяхъ остающейся параллельною нѣкоторому данному направленію.

b) *Поверхности съ ребромъ возврата;* это такія поверхности, которыя образуются движеніемъ пряемой, перекатывающейся по нѣкоторой кривой линіи двоякой кривизны, причемъ прямая остается всегда касательной къ кривой; кривая эта называется "ребромъ возврата" поверхности.

c) *Коническія* - (частный случай поверхностей съ ребромъ возврата). Въ этомъ случаѣ всѣ послѣдовательныя положенія производящей прямой пересѣкаются въ одной точкѣ, причемъ эти поверхности въ зависимости отъ нормальнаго (перпендикулярнаго къ оси) сѣченія могутъ быть раздѣляемы на: эллиптическія, параболическія и др.

d) *Поверхности одинаковаго ската.* Такую поверхность можно образовать движеніемъ прямого кругового конуса такимъ образомъ, что вершина его перемѣщается по какой либо кривой, а его ось остается параллельною самой себѣ.

Поверхностями одинаковаго ската являются поверхности откосовъ, насыпей и выемокъ дорожнаго полотна. Всѣ же виды линейчатыхъ развертаемыхъ поверхностей, перечисленные выше, имѣютъ примѣненіе къ постройкѣ машинъ, зданій и т.д.

Поверхности линейчатыя неразвертаемыя встрѣчаются двухъ родовъ: 1) *Поверхности, имѣющія плоскость параллелизма;* 2) *поверхности, не имѣющія плоскости параллелизма.*

Плоскостью параллелизма называется плоскость, которой параллельны всѣ послѣдовательныя положенія производящихъ поверхности.

Поверхности съ плоскостью параллелизма, въ зависимости отъ рода направляющихъ, раздѣляются на три вида.

a) *Косыя плоскости или гиперболическіе параболоиды,* направляющими которыхъ служатъ двѣ прямыя линіи, не лежащія въ одной плоскости. Поверхность образуется движеніемъ прямой, параллельной плоскости параллелизма и всегда пересѣкающей данныя прямолинейныя направляющія.

b) *Цилиндроиды,* образующіеся движеніемъ прямой параллельно плоскости параллелизма. Направляющими служатъ двѣ кривыя линіи.

c) *Коноиды,* которые образуются движеніемъ прямой такъ, что она всегда пересѣкаетъ одну прямую и одну кривую и движется параллельно плоскости параллелизма.

Поверхности, не имѣющія плоскости параллелизма, въ зависимости отъ рода направляющихъ, могутъ быть слѣдующихъ видовъ: а) *однополые гиперболоиды,* образуемые движеніемъ прямой по тремъ не пересѣкающимся линіямъ (и не параллельнымъ другъ другу).

b) *Косые цилиндры о трехъ направляющихъ,* образуемые движеніемъ прямой, пересѣкающей три направляющихъ, изъ которыхъ хотя одна не прямая линія.

Поверхности съ кривыми производящими дѣлятся на два класса:

1) *Поверхности съ кривыми производящими постояннаго вида* и 2) *поверхности съ кривыми производящими перемѣннаго вида.*

Поверхности съ кривыми производящими постояннаго вида дѣлятся въ свою очередь на слѣдующіе виды:

a) *Поверхности вращенія,* образующіяся вращеніемъ какой либо кривой (плоской или двоякой кривизны около неподвижной оси).

b) *Кривые цилиндры,* образующіеся вращеніемъ кривой около неподвижной оси и поступательнымъ движеніемъ ея вдоль оси, причемъ поступательныя ея перемѣщенія вдоль оси пропорціональны угловымъ перемѣщеніямъ вокругъ оси.

Поверхности съ кривыми производящими перемѣннаго вида образуются вращеніемъ около неподвижной оси какой нибудь кривой, причемъ кривая можетъ передвигаться и вдоль оси. При этомъ кривая мѣняетъ свою форму по какому нибудь закону.

Въ слѣдующей таблицѣ выписаны наиболѣе примѣняемые въ техникѣ виды кривыхъ поверхностей.

ТАБЛИЦА КРИВЫХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

№ 1.

Поверхности съ прямыми производящими.

Поверхности линейчатыя развертываемыя.	Поверхности линейчатыя неразвертываемыя. Имѣющія плоскость паралелизма.	Неимѣющія плоскости параллелизма.
a) Цилиндрическія (цилиндры круговые, эллиптическіе и др.). b) Коническія (конусы круговые, эллипт. и др.) c) Съ ребромъ возврата (развертываемый гелисоидъ, кольцевой гелисоидъ). d) Одинаковаго ската.	a) Гиперболическіе параболоиды (косыя плоскости). b) Цилиндроиды (винтовой цилиндроидъ и др.) c) Коноиды (винтовой коноидъ или неразвертываемый гелисоидъ, шаровой наклонный коноидъ и др.).	a) Однополые гиперболоиды. b) Косые цилиндры о 3-хъ направляющихъ (косой кольцевой гелисоидъ и др.).

ТАБЛИЦА КРИВЫХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

№ 2.

Поверхности съ кривыми производящими.

Кривыя производящія постояннаго вида.	Кривыя производящія перемѣннаго вида.
a) Поверхности вращенія (шаръ, эллипсоидъ, гиперболоидъ). b) Кривые цилиндры (круглыя и эллиптическія кольца, гелисоидальные цилиндры и др.).	

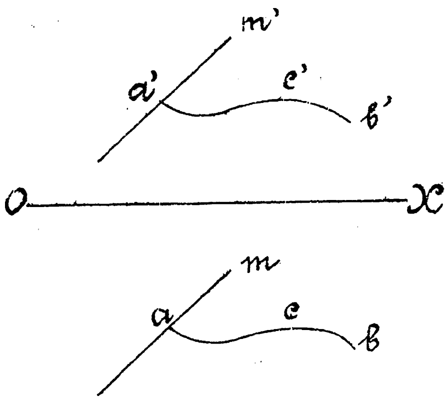
b) *Заданіе кривыхъ поверхностей въ проекціяхъ.*

Въ зависимости отъ закона, которому подчиняется образованіе кривой поверхности, они могутъ быть заданы различными образами.

Разсмотримъ на примѣрахъ рядъ заданій различныхъ кривыхъ поверхностей.

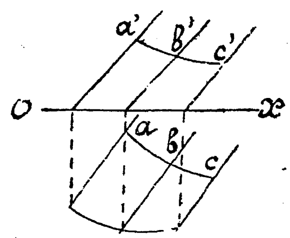
α. *Цилиндрическія поверхности.*

Цилиндрическая поверхность образуется движеніемъ прямой линія по направляющей кривой такъ, что движущаяся прямая всегда остается параллельной данному направленію. Пусть, напримѣръ, задана направляющая АВ и направленіе производящей АМ (черт.299). Проводя рядъ производящихъ черезъ любыя точки АВ, параллельно АМ, получимъ изображеніе цилиндрической поверхности.

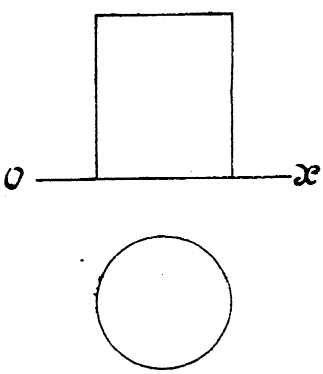


черт.299

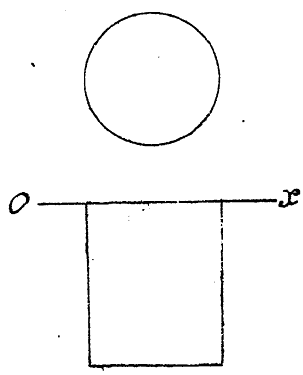
Въ техникѣ пользуются, главнымъ образомъ, такими цилиндрическими поверхностями, у которыхъ направляющими кривыми являются кругъ или эллипсъ. При рѣшеніи задачъ, часто весьма бываетъ выгодно пользоваться заданіемъ цилиндра слѣдами его на V и на Н. Опредѣлимъ, как находить эти слѣды случайно расположеннаго цилиндра. Для построенія слѣдовъ цилиндра на плоскостяхъ проекцій проведемъ рядъ производящихъ цилиндра и построимъ ихъ слѣды на V и на Н; (черт.300). Эти слѣды производящихъ и опредѣлятъ искомые слѣды цилиндра. При заданіи цилиндра слѣдами наиболѣе выгоднымъ является положеніе цилиндра, при которомъ его ось перпендикулярна къ Н (черт.301) или къ V (черт.302).



черт.300



черт.301

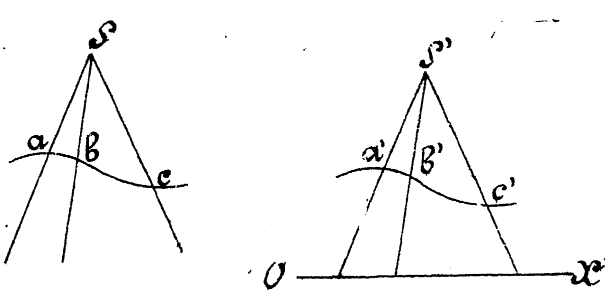


черт.302

Когда нормальное сѣченіе цилиндра будетъ кругомъ, то цилиндръ называется круговымъ; когда эллипсъ - эллиптическимъ.

β. *Коническія поверхности.*

Конической поверхностью называется такая, которая образуется движеніемъ прямой линіи, причемъ прямая проходитъ черезъ нѣкоторую постоянную точку, двигаясь въ то же время по нѣкоторой кривой. Чтобы построить производящія конуса, достаточно соединить вершину конуса съ любыми



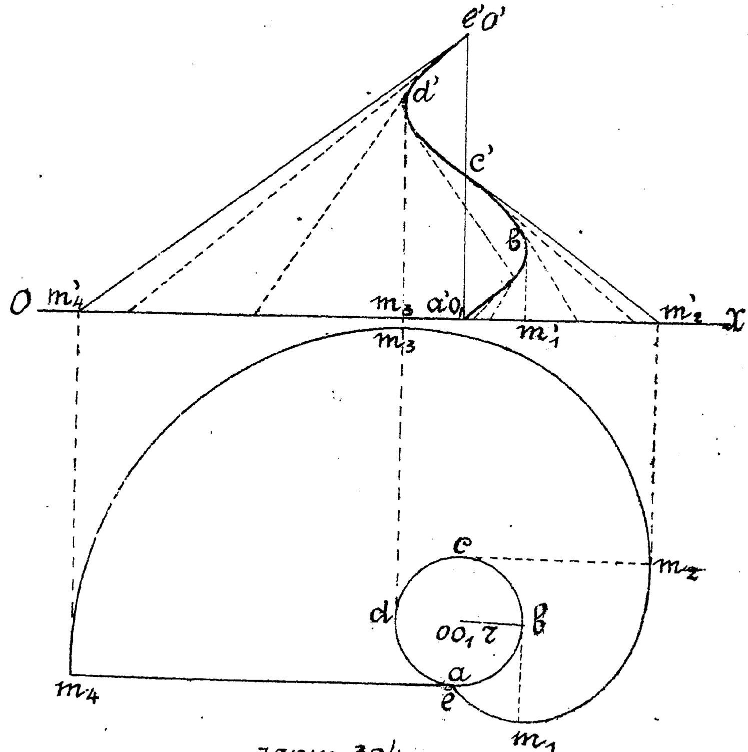
черт.303

точками его направляющей (Sa, S'a', Sb, S'b' и т.д. черт.303).

Изъ всевозможныхъ заданій конуса наиболѣе нагляднымъ, какъ и при заданіи цилиндра, является заданіе слѣдами конуса на H или на V. Нахожденіе слѣдовъ конуса вполнѣ аналогично нахожденію слѣдовъ цилиндра. При нахожденіи слѣдовъ цилиндра мы проводили рядъ производящихъ, строили ихъ слѣды, которые и опредѣляли искомые слѣды цилиндра. Для нахожденія добъ конуса поступаемъ точно такъ же: проводимъ рядъ производящихъ, строимъ ихъ слѣды, и эти слѣды опредѣлятъ слѣды конуса.

γ. *Развертываемые гелисоиды.*

Поверхность такого рода образуется вращеніемъ прямой, остающейся касательной къ цилиндрической винтовой линіи, вокругъ оси винтовой. Такимъ образомъ прямая перекашивается по винтовой линіи. Положимъ, намъ дана цилиндрическая винтовая линія ABCDE, ось которой OO_1 (черт.304). Опредѣлимъ рядъ производящихъ этой поверхности. Для этого проведемъ рядъ касательныхъ: BM_1, CM_2, DM_3, EM_4 къ винтовой линіи. Горизонтальныя проекціи ихъ должны касаться горизонтальной проекціи заданной винтовой линіи. Извѣстно, что длина горизонтальной проекціи отрѣзка касательной между горизонтальнымъ слѣдомъ и точкою касанія равна спрямленной дугѣ круга - проекціи винтовой отъ начала ея до проекціи точки касанія, т.е. длина bm' = длинѣ дуги ab, cm_2 - длинѣ дуги abc и т.д.

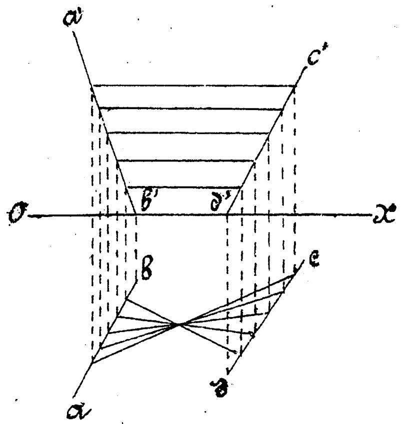


черт.304

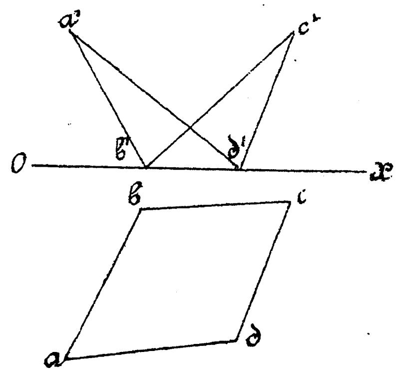
Зная положеніе горизонтальныхъ слѣдовъ касательныхъ (M_1, M_2, M_3 и т.д.), нетрудно построить и вертикальныя ихъ проекціи $b'm_1'c'm_2'$ и т.д. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что вертикальныя проекціи производящихъ должны быть касательны къ вертикальной проекціи винтовой линіи.

δ. *Гиперболическіе параболоиды.*

Изъ аналитической геометріи мы знаемъ, что гиперболическимъ параболоидомъ называется такая поверхность, которая удовлетворяетъ извѣстному уравненію. Въ Начертательной Геометріи эта поверхность разсматривается какъ образованная прямой, движущейся параллельно нѣко-



черт.305



черт.306

торой плоскости и пересѣкающей двѣ заданныя линіи - направляющія.

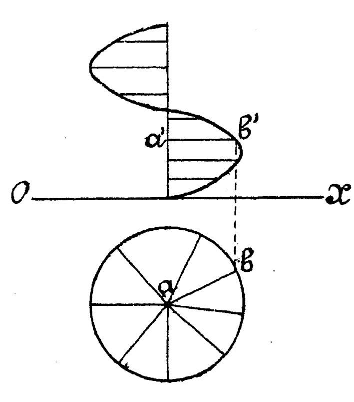
Въ качествѣ заданія такой поверхности нужно имѣть на лицо двѣ направляющія линіи и плоскость (параллелизма).

Пусть плоскостью параллелизма будетъ Н, а направляющими АВ и CD (черт.305). Строимъ производящія параллельныя Н. Полученный рядъ такихъ производящихъ и опредѣлитъ поверхность. Но мы можемъ имѣть заданіе для такого рода поверхности и иное, а именно - могутъ быть даны двѣ направляющія линіи АВ и CD и двѣ производящія - AD и ВС (черт. 306). Въ этомъ случаѣ плоскость параллелизма опредѣлилась, какъ плоскость, параллельная двумъ даннымъ линіямъ AD и ВС. Можно разсматривать линіи AD и ВС какъ направляющія. Тогда линіи АВ и DC будутъ производящими со своею плоскостью параллелизма, параллельной АВ и CD.

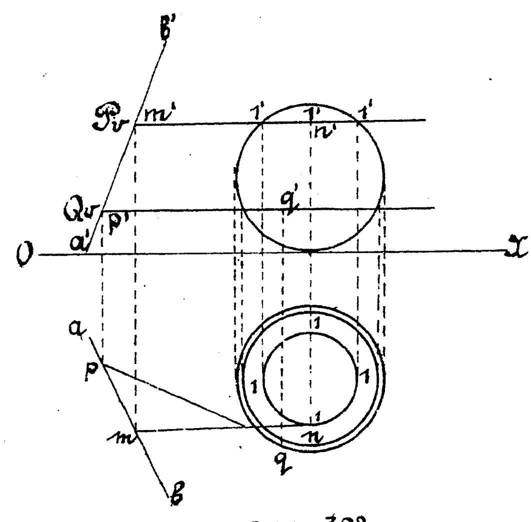
Однимъ словомъ, косая плоскость можетъ быть образована или направляющей, движущейся по двумъ производящимъ, или производящей, движущейся по направляющей, причемъ такъ, что производящая остается параллельною своей плоскости, а направляющая - своей.

е. *Цилиндроиды и коноиды.*

Цилиндроидъ есть поверхность, образованная движеніемъ прямой, параллельной нѣкоторой плоскости, причемъ такъ, что она пересѣкаетъ двѣ кривыхъ направляющихъ линій. Если одна изъ направляющихъ прямая, то такая поверхность называется *коноидомъ*. На чертежѣ 307 изображенъ



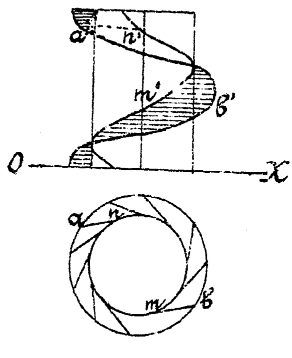
черт.307



черт.308

винтовой коноидъ; направляющими его служатъ: цилиндрическая винтовая линія и ея ось. Плоскость параллелизма Н. Шаровымъ наклоннымъ коноидомъ называется поверхность, образованная движеніемъ прямой: а) параллельной нѣкоторой плоскости; b) пересѣкающей прямую и с) касательной постоянно къ шару (черт.308). Для построенія какой нибудь производящей дѣлаемъ сѣченіе шара случайной плоскостью P, параллельной плоскости параллелизма (въ данномъ случаѣ плоскостью параллелизма является плоскость H).

Плоскость P пересѣчетъ направляющую AB въ точкѣ M и направляющій шаръ по кругу I I I I. Искомая производящая должна, очевидно, проходить черезъ точку M и касаться круга I I I I. Такъ какъ плоскость P параллельна H, то проводимъ черезъ (m) линію mn, касательную къ горизонтальной проекціи круга и находимъ точку (n) касанія. Вертикальной проекціей этой производящей будетъ служить линія m'n'. Проведя другую плоскость Q, параллельную плоскости параллелизма, мы построимъ новую, лежащую въ ней, производящую PQ и т.д.



черт.309

Изъ цилиндроидовъ остановимся на одномъ слѣдующемъ случаѣ.

Поверхность цилиндроида образована движеніемъ прямой: a) параллельной плоскости H; b) пересѣкающей цилиндрическую винтовую линію и c) касательной къ круговому цилиндру, одноосному съ винтовой линіей.

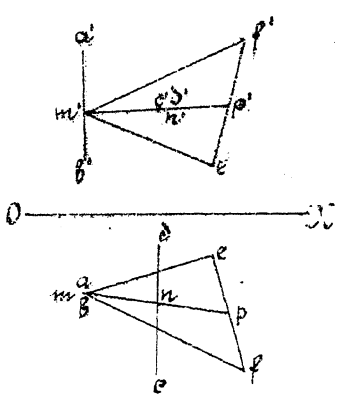
Для построенія какой нибудь производящей беремъ, напримѣръ, точку A на винтовой (черт. 309) и проведемъ изъ нея линію AN, параллельную H и касательную къ цилиндру. Тогда a'n' будетъ параллельна OX. Такъ какъ AN должна касаться цилиндра, то an должна касаться круга основанія его въ точкѣ n. Вертикальная проекція n' точки касанія N производящей съ цилиндромъ находится на вертикальной проекціи этой производящей. Подобнымъ же образомъ можно построить рядъ другихъ производящихъ.

Однополые гиперболоиды.

Однополый гиперболоидъ есть поверхность, образованная движеніемъ прямой линіи по тремъ прямымъ направляющимъ, которыя не параллельны другъ другу и не пересѣкаются.

Разсмотримъ, какъ построить производящія однополаго гиперболоида.

Данъ гиперболоидъ тремя прямыми направляющими - ab, a'b', cd, c'd', ef и e'f' (черт.310). Требуется построить производящую даннаго гиперболоида.

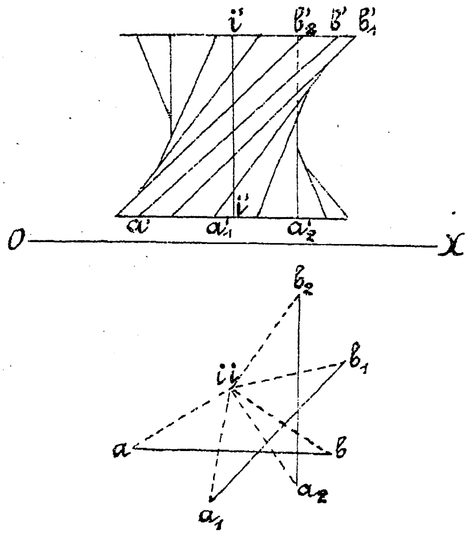


черт.310

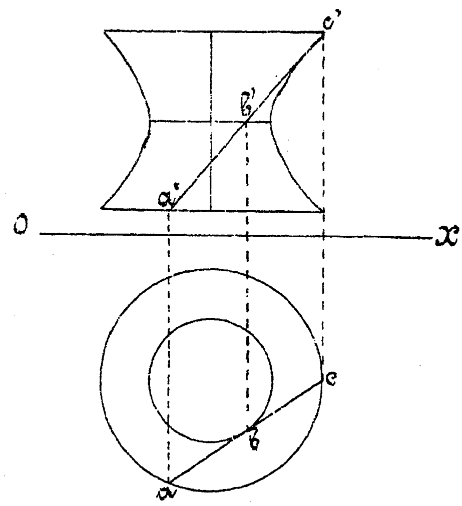
Возьмемъ какую нибудь точку M на одной изъ направляющихъ AB и проведемъ черезъ эту точку и вторую направляющую EF - плоскость. Находимъ точку N пересѣченія этой плоскости съ третьей направляющей. Линія MNP и будетъ искомой производящей, такъ какъ она пересѣкаетъ всѣ три направляющія. Какъ частный случай гиперболоида разсмотримъ гиперболоидъ вращенія, который образуется при вращеніи прямой линіи вокругъ другой прямой, какъ вокругъ оси. Для заданія гиперболоида вращенія достаточно задать его ось и производящую прямую.

Пусть даны намъ двѣ прямыя II и AB, причемъ AB не параллельна II и не пересѣкаетъ II. Вращеніемъ AB вокругъ II, какъ вокругъ оси, образуется поверхность однополаго гиперболоида вращенія (черт.311 и 312).

На чертежѣ 311 ось II расположена перпендикулярно къ Н. Строимъ изображенiе гиперболоида. Поворачиваемъ АВ на какой нибудь уголъ. Пусть она займетъ положенiе A_1B_1. Послѣдовательно поворачивая АВ на опредѣленный уголъ, построимъ рядъ производящихъ и такимъ образомъ

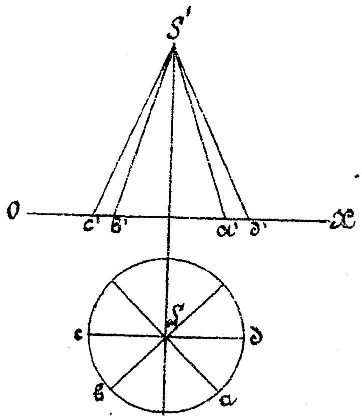


черт. 311



черт. 312

получимъ изображенiе поверхности гиперболоида. Такъ какъ всѣ круги вращенiя точекъ прямой АВ лежатъ въ плоскости, параллельной Н, то кругъ основанiя и кругъ самаго узкаго мѣста гиперболоида, т.е. *горла* или *линiи сжатiя*, спроектируется безъ искаженiя на Н.



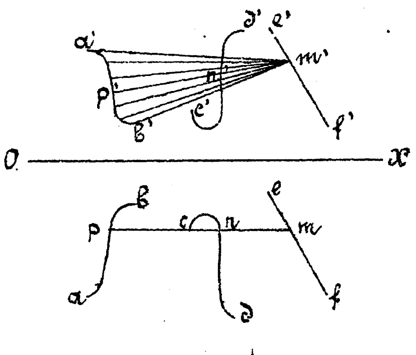
черт. 313

При заданiи гиперболоида можно давать ось и его производящую, или же горло и кругъ основанiя (черт.312). При второмъ заданiи для построенiя производящей проводимъ изъ какой нибудь точки а круга основанiя линiю ас, касательную къ горлу въ какой нибудь точкѣ b и строимъ ея вертикальную проекцiю. Если изъ какой нибудь точки S пространства мы будемъ проводить линiи, параллельныя производящимъ гиперболоида (черт.313), то совокупность ихъ даст поверхность прямого кругового конуса, называемаго *направляющимъ* конусомъ для даннаго гиперболоида вращенiя. (Для всякаго другого гиперболоида - не вращенiя направляющiй конусъ не будетъ круговымъ).

η. *Косые цилиндры с трехъ направляющихъ.*

Косыми цилиндрами называются поверхности, образуемыя движенiемъ прямой линiи по тремъ направляющимъ, изъ которыхъ одна должна быть кривой, двѣ другiя могутъ быть и прямыми и кривыми. Для заданiя косаго цилиндра необходимо задать кривую и двѣ прямыхъ или кривыхъ линiи.

Поверхность косаго цилиндра образуется прямой, которая пересѣкаетъ всѣ три направляющiя. Для построенiя производящей беремъ какую нибудь точку М (черт.314) на одной изъ направляющихъ EF и проводимъ коническую поверхность черезъ эту точку и вторую направляющую АВ.

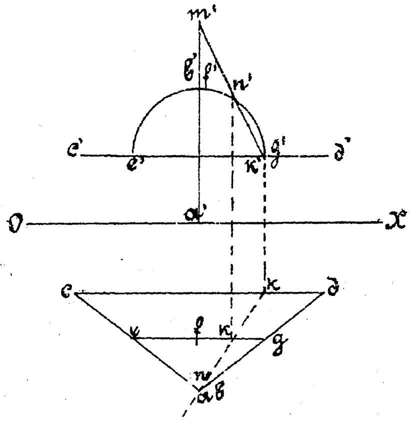


черт. 314

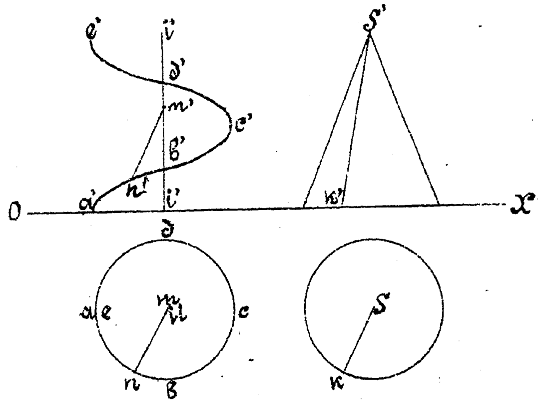
Найдемъ точку N пересѣченія этой поверхности съ третьей производящей cd, c'd'. Прямая MNP и будетъ пересѣкать всѣ три направляющія, т.е. будетъ искомой производящей. Косыхъ цилиндрическихъ поверхностей можетъ быть безчисленное множество. Въ качествѣ примѣра разсмотримъ слѣдующія поверхности.

1-й примѣръ. Даны три направляющія косого цилиндра: прямая AB, перпендикулярная къ H, CD, параллельная OX, и полукругъ EFG, параллельный V (черт.315); требуется построить производящую косого цилиндра, проходящую черезъ точку K.

Въ данномъ случаѣ вспомогательная вышеупомянутая поверхность можетъ быть замѣнена плоскостью P, опредѣляемой точкою K и прямою AB. Эта плоскость перпендикулярна къ H, такъ какъ AB перпендикулярна къ H. Находимъ точку N (n, n') пересѣченія плоскости P съ полукругомъ EFG. Соединяемъ точки K и N и продолжаемъ линію KN до пересѣченія съ AB въ точкѣ M. Линія MNK и будетъ искомой производящей.



черт. 315



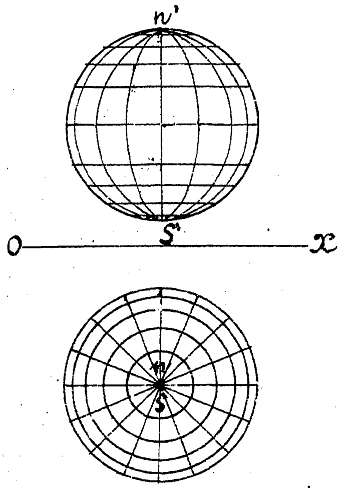
черт. 316

2-й примѣръ. Даны направляющія косого цилиндра: винтовая цилиндрическая линія ABCD цилиндрическаго винтового образованія, ея ось II и нѣкоторый направляющій конусъ (черт.316), котораго производящія должны быть параллельны производящимъ косового цилиндра; требуется построить какую нибудь производящую косого цилиндра.

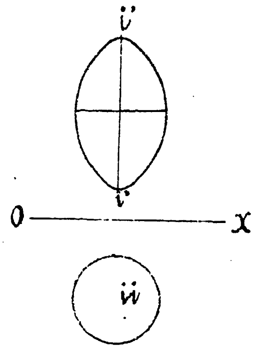
Возьмемъ какую нибудь производящую конуса ks, k's'. Изъ точки m проводимъ линію mn, параллельную ks до пересѣченія съ проекціей винтовой въ точкѣ n; находимъ вертикальную проекцію n' этой точки винтовой и изъ n' проводимъ линію n'm', параллельную k's' до пересѣченія съ осью II въ точкѣ m'. Линія MN (m'n', mn) и будетъ искомой производящей

Поверхности вращенія и кривые цилиндры.

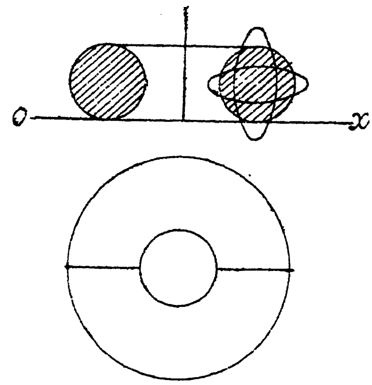
Поверхностями вращенія называются такія поверхности, которыя образуются вращеніемъ какой нибудь линіи вокругъ неподвижной оси. Сюда относятся шаръ, эллипсоидъ вращенія, кольца и т.п. Шаровая поверхность можетъ быть образована вращеніемъ круга вокругъ какого нибудь его діаметра. Линіи сѣченія шара плоскостью, проходящей черезъ ось, называются меридіанами, линія сѣченія шара плоскостью, перпендикулярной къ оси его и проходящей черезъ центръ, называется экваторомъ, линіи сѣченія шара плоскостями, параллельными плоскости экватора, называются параллелями (черт.317). Элли-



черт. 317



черт. 318

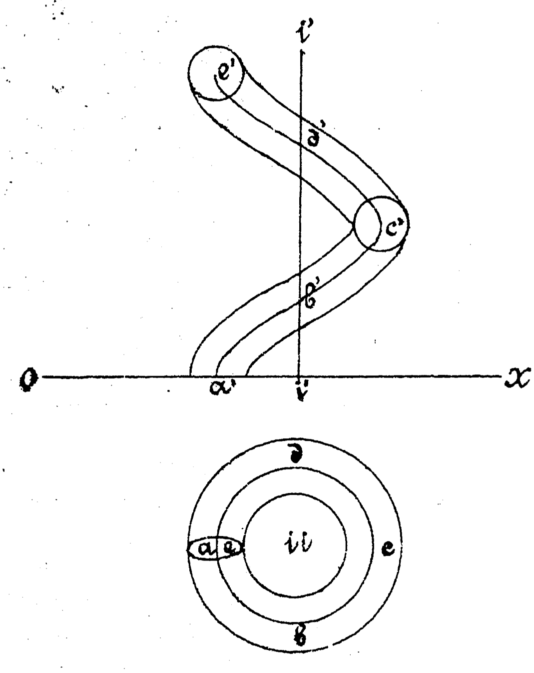


черт. 319

псоидъ вращенія задается такъ же, какъ и шаръ, т.е. дается ось вращенія и эллипсъ, вращеніемъ котораго образуется эллипсоидъ (чертежъ 318).

Кольца вращенія задаются осью вращенія и кривой, которая вращается около этой оси (черт.319).

Если кольцо имѣетъ въ нормальномъ сѣченіи кругъ, то оно называется круговымъ кольцомъ круглаго нормальнаго сѣченія. Если нормальное сѣченіе - эллипсъ, то кольцо называется кольцомъ эллиптическаго нормальнаго сѣченія. Эллиптическія кольца могутъ быть высокими и низкими въ зависимости отъ того, какъ расположена большая ось эллипса.



черт. 320

Поверхность кривого цилиндра образуется движеніемъ кривой линіи при извѣстныхъ условіяхъ. Напримѣръ, пусть кругъ движется такъ, что центръ его скользитъ вдоль по винтовой цилиндрической линіи ABCD (черт.320). При этомъ, если плоскость круга во все время вращенія проходитъ черезъ ось вращенія, то такой кривой цилиндръ называется *гелисоидальнымъ цилиндромъ круглаго меридіональнаго сѣченія*. Если плоскость круга во все время остается нормальною къ винтовой линіи, то цилиндръ называется *гелисоидальнымъ цилиндромъ круглаго нормальнаго сѣченія*. Если плоскость круга остается все время горизонтальною, то цилиндръ называется *гелисоидальнымъ цилиндромъ круглаго горизонтальнаго сѣченія*. Если же по винтовой линіи движется не круг, а эллипсъ, то получаются гелисоидальные *эллиптическіе цилиндры*.

Если при движеніи кривой линіи она мѣняетъ свою форму по извѣстному закону, то получаются *поверхности съ кривыми производящими перемѣннаго вида*.

C_1. *Пересѣченіе кривыхъ поверхностей съ плоскостью.*

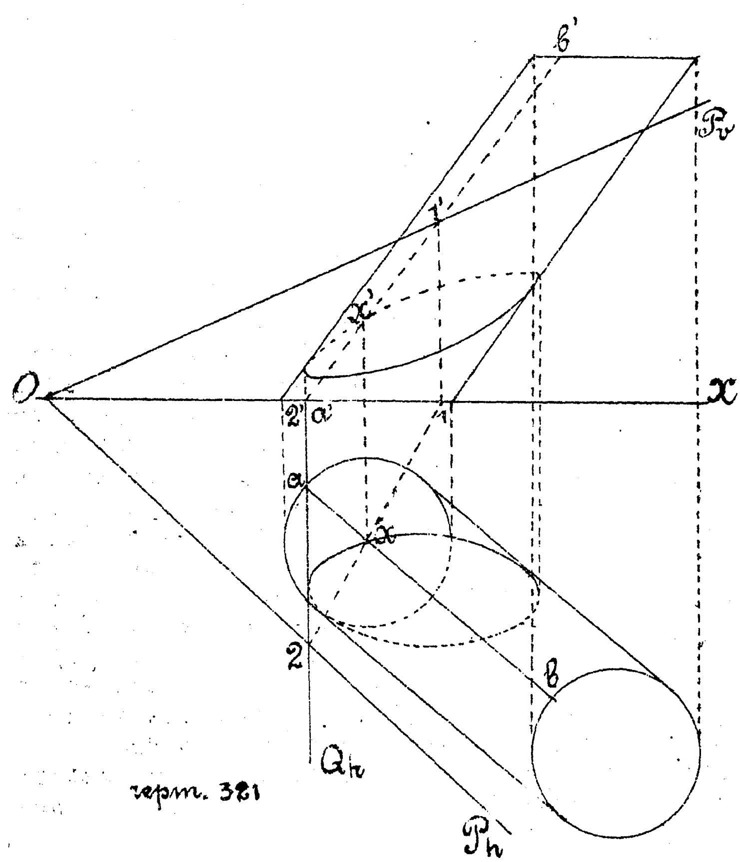
Среди различныхъ способовъ построенія линій сѣченія кривыхъ поверхностей съ плосқости можно указать на слѣдующіе главнѣйшіе:

I-й способъ заключается въ томъ, что мы выбиравмъ наиболѣе простыя линіи на данной кривой поверхности и находимъ точки пересѣченія ихъ съ данной плоскостью. Соединяя полученныя точки непрерывной кривой, мы получимъ искомую линію. Въ качествѣ упомянутыхъ линій на поверхности слѣдуетъ брать по возможности прямыя линіи или круги, такъ какъ построеніе ихъ наиболѣе просто.

2-й способъ заключается въ томъ, что данную кривую поверхность и даниую плоскость пересѣкаютъ нѣкоторою вспомогательною плоскостью, которая пересѣчетъ кривую поверхность по нѣкоторой прямой или кривой линіи, а данную плоскость - по прямой линіи. Точка пересѣченія найденныхъ двухъ линій и будетъ, очевидно, принадлежать искомой линіи.

Опредѣливъ рядъ такихъ точекъ и соединивъ ихъ между собою, мы опредѣлимъ искомую линію. Вспомогательную плоскость слѣдуетъ выбирать такъ, чтобы она данную кривую поверхность пересѣкла по возможности по наиболѣе простой линіи, напримѣръ, по прямой или по кругу.

3-й способъ заключается въ томъ, что при помощи вращенія или перемѣны плоскостей проекціи приходятъ къ такому расположенію заданныхъ поверхностей относительно плоскостей проекцій, при которомъ данная плоскость была бы перпендикулярна къ какой нибудь плоскости проекцій. Тогда на эту плоскость искомая линія сѣченія спроектируется въ видѣ прямой линіи. Зная это, нетрудно на другой проекціи данной поверхности построить другую проекцію искомой кривой и затѣмъ перейти и къ данной системѣ плоскостей проекцій.

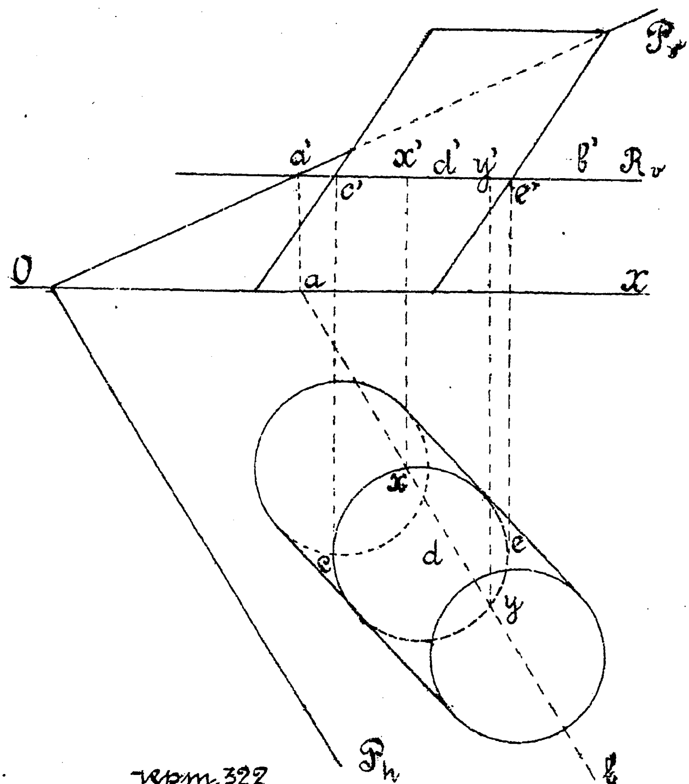


черт. 321

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ примѣненія вышеуказанныхъ трехъ способовъ.

Примѣръ 1-й. Опредѣленіе линіи сѣченія цилиндра съ плоскостью.

Первый способъ. Данъ цилиндръ круглаго горизонтальнаго сѣченія и дана случайно расположенная плоскость P (черт. 321); требуется построить линіи ихъ сѣченія. При построеніи линій сѣченія цилиндра съ плоскостью будемъ пользоваться тѣмъ же методомъ, какъ и при построеніи линій сѣченія пи-

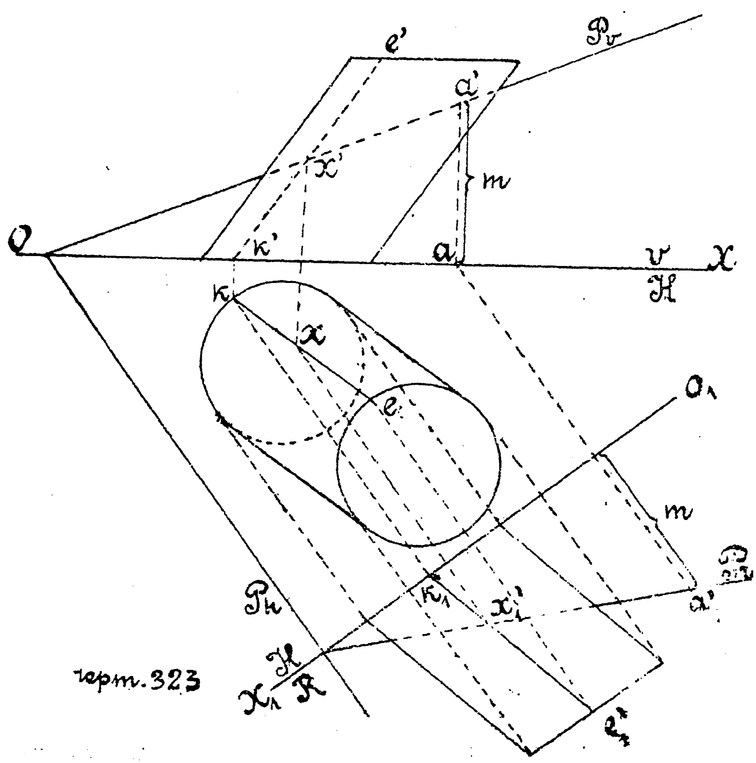


черт.322

рамиды или призмы съ плоскостью, т.е. будемъ брать рядъ производящихъ цилиндра и строить точки ихъ сѣченія съ плоскостью.

Возьмемъ какую нибудь производящую AB и найдемъ точку сѣченія ея съ плоскостью. Заключаемъ AB въ плоскость Q, перпендикулярную къ V и найдемъ линію 1, 2 сѣченія Q съ P. Точка X пересѣченія линій 1, 2 съ AB и будетъ искомой точкой сѣченія производящей AB съ плоскостью P. Взявъ рядъ производящихъ цилиндра и найдя точки ихъ пересѣченія съ плоскостью P, соединимъ всѣ эти точки плавной кривой. Эта кривая и будетъ искомой линіей сѣченія плоскости P съ цилиндромъ.

Второй способъ. Данъ цилиндръ круглаго горизонтальнаго сѣченія и случайно расположенная плоскость P, найти линію ихъ сѣченія.



черт.323

Проведемъ какую нибудь плоскость R, параллельно H (черт.322). Она пересѣчетъ плоскость P по горизонтали AB, а цилиндръ по кругу CDE. Точки X и У пересѣченія круга CDE съ прямой AB и дадутъ двѣ точки искомой линіи сѣченія. Проведя рядъ плоскостей подобныхъ R, т.е. параллельныхъ H, мы получимъ рядъ точекъ искомой линіи сѣченія, соединивъ которыя плавной кривой мы и получимъ послѣднюю.

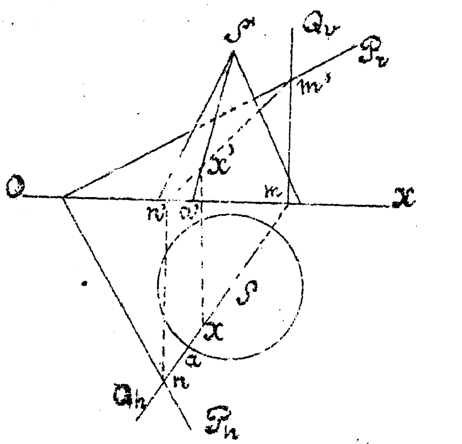
Третій способъ построенія линіи сѣченія цилиндра съ плоскостью состоитъ въ примѣненіи одного изъ извѣстныхъ намъ методовъ: перемѣны плоскостей проекцій или вращенія. Разсмотримъ примѣненіе метода перемѣны плоскостей проекцій.

Положимъ, что намъ данъ какой нибудь цилиндръ и дана случайно расположенная плоскость P (черт.323).

Требуется построить линію сѣченія.

Приступимъ къ рѣшенію этой задачи, перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ плоскостей проекцій къ новой системѣ $\frac{H}{R}$, гдѣ R должна быть перпендикулярна и къ H, и къ слѣду P_h плоскости P и построимъ затѣмъ проекціи даннаго тѣла и плоскости въ новой системѣ. Новою вертикальною проекціею линіи сѣченія плоскости P съ даннымъ цилиндромъ, очевидно, должна служить прямая, сливающаяся съ вертикальнымъ слѣдомъ P_r плоскости P на плоскости R, а потому для нахожденія ея (или все равно слѣда P_r), возьмемъ какую нибудь точку (a_1a') на слѣдѣ P_v и построимъ ея вертикальную проекцію a_1' въ новой системѣ. Эта точка (a_1') и опредѣляетъ положеніе новаго слѣда P_r. Теперь строимъ вертикальную проекцію цилиндра, для чего беремъ производящую (kl, k'l') и откладываемъ на продолженіи перпендикуляровъ изъ концовъ ея къ оси O_1X_1 разстоянія точекъ k' и l' отъ оси OX: получимъ точки k_1' (~~на оси~~ O_1X_1) и l_1', по соединеніи которыхъ будемъ имѣть новую вертикальную проекцію k'l' производящей KL. Строимъ теперь въ системѣ $\frac{H}{R}$ точку x сѣченія производящей KL съ плоскостью P и переносимъ эту точку въ систему $\frac{V}{H}$.

Взявъ рядъ другихъ производящихъ цилиндра и найдя точки ихъ пересѣченія съ цилиндромъ подобнымъ же образомъ, соединимъ ихъ плавною кривою, которая и будетъ служить проекціею искомой кривой.



черт. 324

Примѣръ 2-й. Даны плоскость P (черт.324) и конусъ; требуется построить линію ихъ сѣченія.

1-й способъ. Возьмемъ какую нибудь производящую SA конуса и построимъ точки ея сѣченія съ плоскостью.

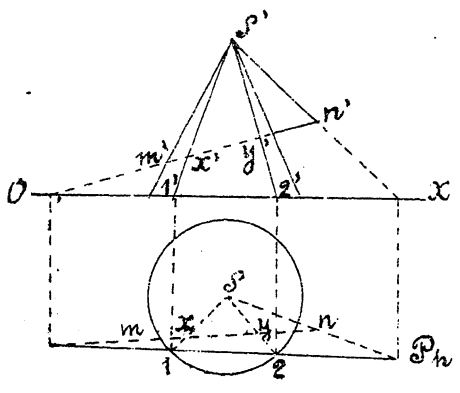
Для этого заключаемъ SA въ вертикально проектирующую плоскость Q. Найдемъ линію сѣченія MN, Q съ P. Пересѣченіе этой линіи съ данной производящей и опредѣлитъ точку X сѣченія SA съ плоскостью P. Взявъ рядъ производящихъ и поступая по предыдущему мы получимъ рядъ точекъ, соединивъ которыя кривой, получимъ искомую линію сѣченія.

C_2. Пересѣченіе кривыхъ поверхностей съ прямою линіею.

Общій способъ построенія точекъ пересѣченія кривой поверхности съ прямой линіей заключается въ томъ, что сначала строимъ линію сѣченія данной поверхности съ какой нибудь плоскостью, проходящей черезъ данную прямую линію. Тогда искомая точка опредѣлится какъ точка пересѣченія полученной кривой линіи съ данной прямой. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что вспомогательную плоскость черезъ данную прямую линію слѣдуетъ проводить такъ, чтобы она пересѣкала данную кривую поверхность по линіи, по возможности, наиболѣе простой; напримѣръ, по прямой или по кругу.

Разсмотримъ примѣръ примѣненія этого способа.

Примѣръ 1-й. Пусть намъ данъ конусъ и прямая MN (черт.325); требуется построить точки сѣченія MN съ поверхностью конуса. Проводимъ черезъ MN вспомогательную плоскость (напримѣръ, проходящую черезъ вершину S конуса) и находимъ линію сѣченія S1 и S2 этой плоскости съ конусомъ. Точки пересѣченія MN съ линіями сѣченія S1 и S2 вспомогательной плоскости съ конусомъ опредѣлятъ точки X и Y пересѣченія прямой MN съ конусомъ.



черт. 325

Одна изъ нихъ называется точкою входа, другая - точкою выхода. Отрѣзокъ внутри конуса будетъ невидимъ и его надо чертить пунктиромъ.*)

Примѣръ 2-й. Задача на нахожденіе линіи пересѣченія цилиндра съ прямой рѣшается такъ: черезъ заданную прямую AB проводятъ плоскость параллельно оси цилиндра и находятъ линіи KE и GH сѣченія ея съ цилиндромъ. Точки пересѣченія AB съ KE и GH и будутъ искомыми (черт. 326). При пересѣченіи цилиндра съ плоскою кривою производятъ черезъ послѣднюю плоскость и находятъ линію сѣченія ея съ цилиндромъ. Точки пересѣченія заданной кривой съ полученной и будутъ искомыми.

C_3. *Пересѣченіе кривыхъ поверхностей между собою.*

Для построенія линій сѣченія кривыхъ поверхностей между собою можно пользоваться слѣдующими способами:

Способъ 1-й заключается въ томъ, что мы выбираемъ рядъ прямолинейныхъ производящихъ (если таковыя имѣются) одной поверхности и находимъ точки пересѣченія ихъ съ другой поверхностью, какъ было раньше указано въ пунктѣ C_2 (стр.138). Соединяя полученныя точки непрерывною кривою, мы получимъ искомую линію сѣченія.

Способъ 2-й заключается въ томъ, что мы обѣ данныя поверхности пересѣкаемъ рядомъ вспомогательныхъ плоскостей и находимъ линіи сѣченія каждой такой плоскости съ обѣими данными поверхностями. Точки пересѣченія найденныхъ линій сѣченія будутъ, очевидно, принадлежать искомой линіи сѣченія. Соединяя полученныя точки плавной кривой, получимъ искомую кривую линію.

Способъ 3-й заключается въ томъ, что обѣ данныя поверхности пересѣкаются третьею кривою поверхностью, но такою, что линіями сѣченія ея съ первыми двумя являются по возможности простыми для построеній, напримѣръ, прямыми линіями или кругами. Очевидно, что если соединить между собою точки пересѣченія соотвѣтственныхъ линій сѣченія, то и получится искомая линія сѣченій данныхъ поверхностей.

Разсмотримъ примѣненіе этихъ способовъ на примѣрахъ.

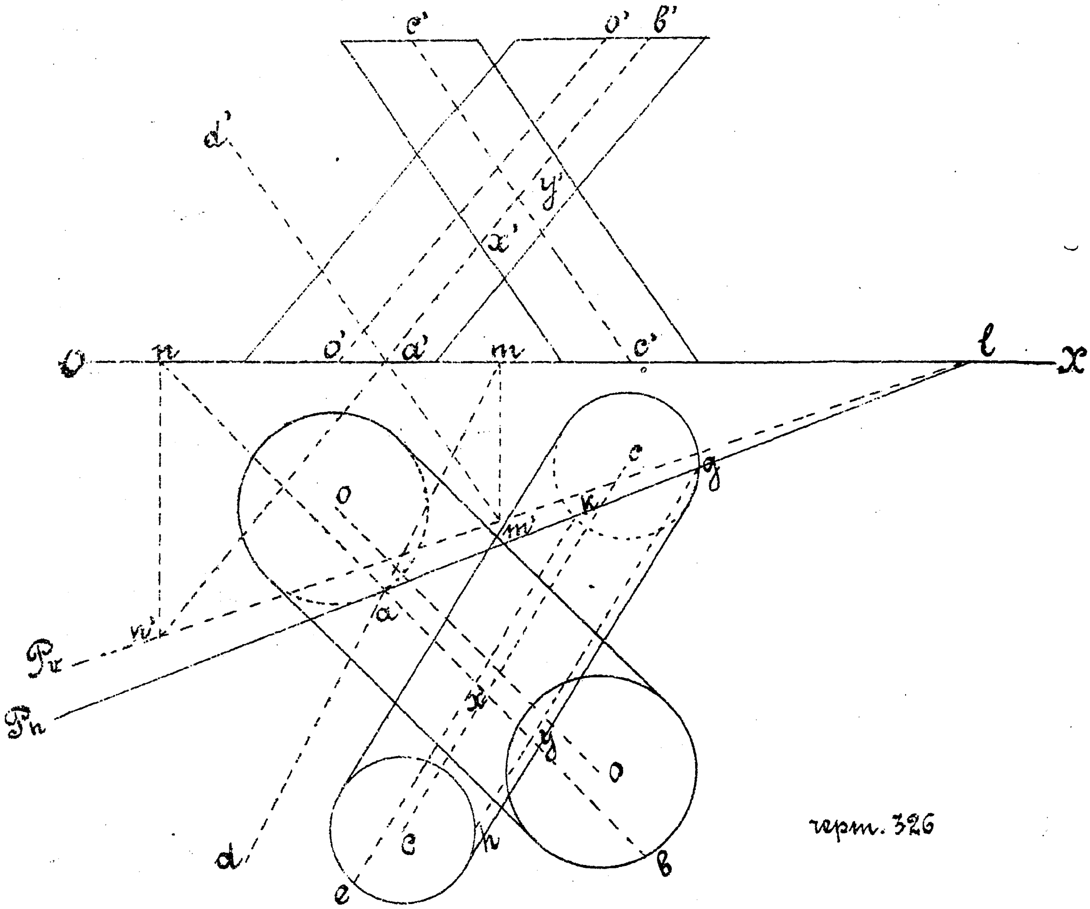
Примѣръ 1-й. Построеніе линій сѣченія поверхностей цилиндровъ. Пріемы построенія линій сѣченія двухъ цилиндровъ представляютъ полную аналогію съ построеніемъ такой же линіи относительно двухъ призмъ.

---

*) *Рѣшеніе этой задачи въ случаѣ, если вершина конуса лежитъ внѣ предѣловъ чертежа, безъ построенія эллипса, можно найти въ брошюрѣ: Н. А. Рынинъ. "Построеніе точекъ пересѣченія прямой линіи съ поверхностью прямого кругового конуса". С.-Петербургъ 1905 г.*

Рѣшимъ такую задачу.

Даны два цилиндра - одинъ съ осью OO, другой съ осью CC_1. Требуется построить линію сѣченія поверхностей этихъ цилиндровъ (чертежъ 326).



черт. 326

Для нахожденія линіи сѣченія призмъ мы находили точки пересѣченія реберъ каждой призмы съ гранями другой и затѣмъ полученныя точки соединяли непрерывными линіями.

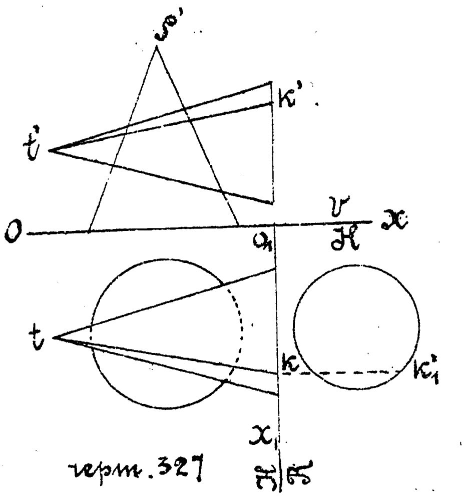
Точно такъ же поступимъ и здѣсь. Вопросъ возникаетъ только относительно выбора вспомогательной плоскости.

Возьмемъ производящую AB цилиндра OO_1, вспомогательную же плоскость проведемъ параллельно производящей цилиндра CC_1. Съ этою цѣлью проведемъ черезъ точку (aa') линію $(ad,\ a'd')$ параллельно оси цилиндра CC_1. Находимъ вертикальный слѣдъ прямой AB (n_1n') и вертикальный слѣдъ прямой MD (m_1m'). Эти два вертикальныхъ слѣда линій и опредѣлятъ положеніе вертикальнаго слѣда P_v плоскости P, горизонтальный слѣдъ P_h, который пройдетъ черезъ точку a и точку l схода слѣдовъ. Эта плоскость пересѣчетъ цилиндръ CC_1 по двумъ производящимъ EK и GH; точки k и g которыхъ опредѣляются, какъ точки пересѣченія P_h съ кругомъ основанія цилиндра CC_1.

Точки пересѣченія производящихъ EK и GH съ AB и опредѣлятъ искомыя точки X и $У$ пересѣченія производящей AB съ поверхностью цилиндра CC_1.

Взявъ другія производящія цилиндра OO_1, найдемъ подобнымъ же образомъ точки ихъ пересѣченія съ поверхностью цилиндра CC_1. Соединяя полученныя точки плавною кривою, опредѣлимъ такимъ образомъ искомую линію сѣченія двухъ цилиндровъ.

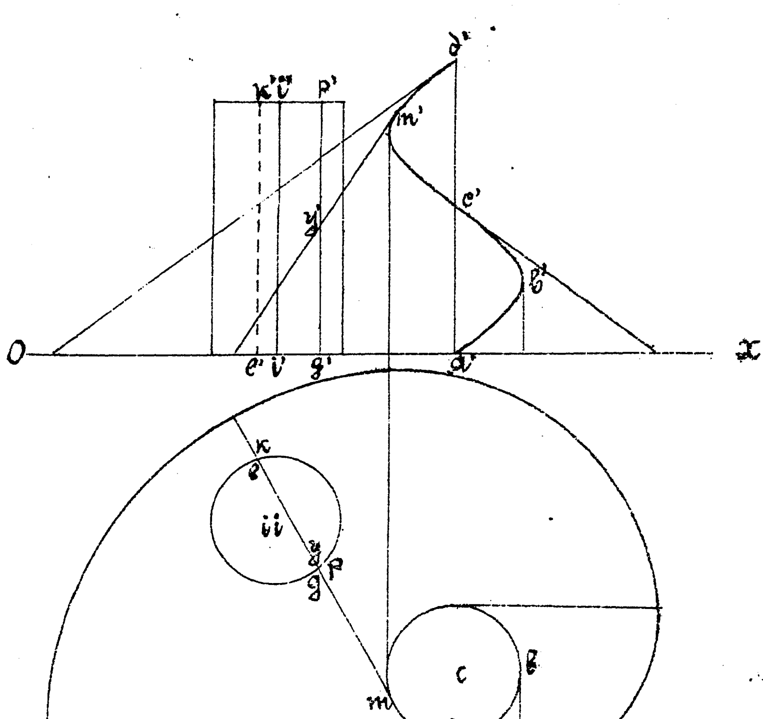
Примѣръ 2-й. Построимъ линіи сѣченія конуса съ конусомъ. Даны два конуса, причемъ одинъ стоитъ на Н, другой расположенъ такъ, что его ось параллельна ОХ и пересѣкаетъ ось перваго (черт. 327); требуется построить линію ихъ сѣченія.



черт. 327

Задача рѣшается аналогично задачѣ на построеніе линій сѣченія двухъ пирамидъ. Возьмемъ какую нибудь производящую ТК второго конуса. Для построенія ея вертикальной проекціи прибѣгнемъ къ методу перемѣны плоскостей проекцій. Перейдемъ отъ системы $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{H}{R}$ (R перпендикулярна къ оси второго конуса) и найдемъ точку K_1 на кругѣ основанія второго конуса на плоскости R. Откладываемъ отъ оси ОХ разстояніе, равное разстоянію $K - k_1^{'}$, на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ на ОХ; получаемъ точку $k^{'}$. Возьмемъ нѣсколько такихъ производящихъ и найдемъ точки ихъ пересѣченія съ конусомъ такъ, какъ указано на чертежѣ 325. Соединивъ эти точки кривой, получимъ линію сѣченія данныхъ конусовъ.

Примѣръ 3-й. Возьмемъ развертываемый гелисоидъ (черт. 328) и найдемъ линію сѣченія его съ прямымъ круговымъ цилиндромъ, ось котораго перпендикулярна къ Н. Гелисоидъ образованъ движеніемъ прямой, остающейся все время касательной къ цилиндрической винтовой линіи. Проведемъ рядъ производящихъ гелисоида. Будемъ брать производящія одного тѣла и находить ихъ пересѣченія съ другимъ тѣломъ. Но здѣсь заключается вопросъ въ томъ, производящія какого тѣла брать?

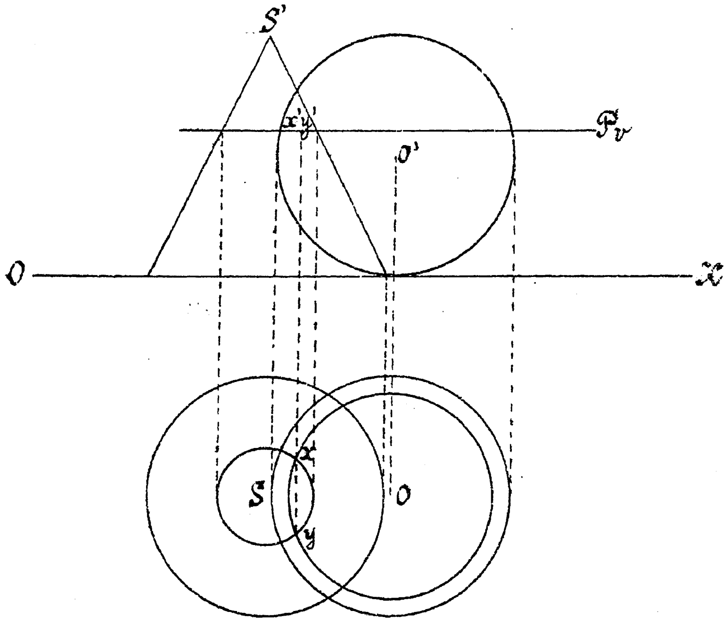


черт. 328

Если мы возьмемъ производящія цилиндра, то какія бы вспомогательныя плоскости мы черезъ нихъ не проводили въ сѣченіи этихъ плоскостей съ гелисоидомъ мы всегда получимъ кривыя линіи, построеніе которыхъ затруднительно.

Если же мы возьмемъ производящія гелисоида, то черезъ каждую изъ нихъ можно всегда провести вспомогательную плоскость, параллельную производящимъ цилиндра. Взявъ рядъ производящихъ гелисоида и построивъ такимъ образомъ точки пересѣченія ихъ съ поверхностью цилиндра, соединимъ ихъ плавною кривою, которая и будетъ искомою.

Примѣръ 4-й. Построимъ линію пересѣченія шара съ конусомъ. Данъ шаръ съ центромъ въ точкѣ O и прямой круговой конусъ съ вершиною S (чертежъ 329); требуется построить линію ихъ сѣченія.



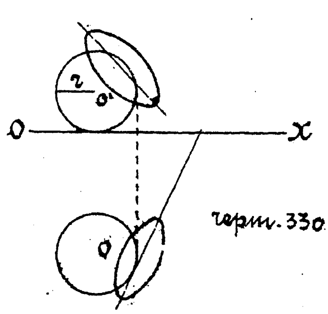
черт. 329

Производящими конуса, какъ мы знаемъ, являются прямыя, а производящими шара - круги. Какія же производящія брать для отысканія искомыхъ точекъ?

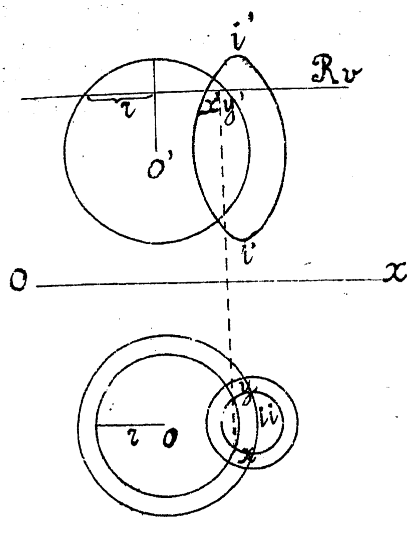
Если мы возьмемъ какую нибудь производящую конуса и проведемъ черезъ нее плоскость, то въ сѣченіи получимъ кругъ. Если же брать производящую шара (кругъ), то плоскость этого круга пересѣчетъ конусъ по кривой.

Проще всего проводить плоскости, перпендикулярныя къ оси конуса. Такія плоскости (P) пересѣкутъ конусъ по кругу и шаръ по кругу. Пересѣченіе этихъ круговъ дастъ двѣ точки x и y, принадлежащія искомой линіи сѣченія. Проведя рядъ такихъ плоскостей P, мы получимъ рядъ точекъ, совокупность которыхъ и опредѣлитъ искомую линію сѣченія шара съ конусомъ.

Примѣръ 5-й. Даны два тѣла вращенія: шаръ даннаго радіуса r и эллипроидъ вращенія, заданный положеніемъ и формой производящей эллипсомъ и осью вращенія. Требуется построить линію ихъ сѣченія (черт. 330). Для удобства рѣшенія задачи перейдемъ отъ нашего заданія къ новому заданію, такъ какъ расположеніе эллипса у насъ таково, что почти всѣ радіусы эллипсоида проектируются съ искаженіемъ. Вращаемъ эллипсоидъ, а вмѣстѣ съ нимъ, разумѣется, и всю систему (т.е. шаръ и ось вращенія эллипсоида) вокругъ осей, проходящихъ черезъ ось шара, до тѣхъ поръ, пока ось эллипсоида не приметъ положеніе, перпендикулярное къ плоскости H (черт. 331). Для этого слѣдуетъ сдѣлать два поворота, одинъ вокругъ оси перпендикулярной къ H, для приведенія оси эллипсоида въ положеніе, параллельное V и другой вокругъ оси перпендикулярной къ V до приведенія оси эллипроида въ положеніе перпендикулярное къ H. Послѣ этихъ поворотовъ одинъ изъ меридіановъ эллипсоида будетъ проектироваться на V безъ искаженія. При такихъ условіяхъ для построенія линіи сѣченія очень выгодно проводить плоскости P параллельно плоскости H, потому что такія плоскости будутъ пересѣкать шаръ и эллипсоидъ по кругамъ, которые на H будутъ проектироваться безъ искаженія и въ пересѣченіи другъ съ другомъ давать точки x и y, принадлежащія искомой линіи сѣченія. Построимъ рядъ такихъ точекъ и соединимъ ихъ плавною кривою. Чтобы



черт. 330

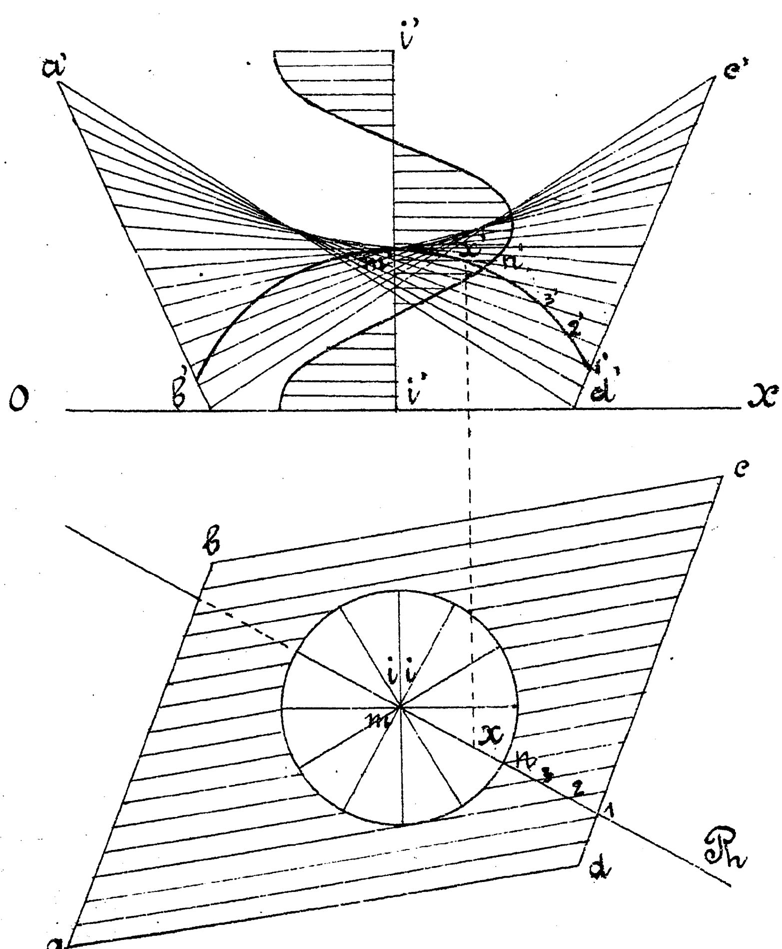


черт. 331

перейти теперь къ прежнему заданію, достаточно повернуть всю систему на тѣ же углы и вокругъ тѣхъ же осей въ обратномъ направленіи.

Примѣръ 6-й. Даны косая плоскость двумя направляющими АВ и CD и плоскостью параллелизма производящихъ Q, перпендикулярной къ Н и винтовой коноидъ (заданъ цилиндрической винтовою линіею, осью ея II и плоскость параллелизма Н). Требуется построить линію сѣченія коноида съ косою плоскостью (черт. 332).

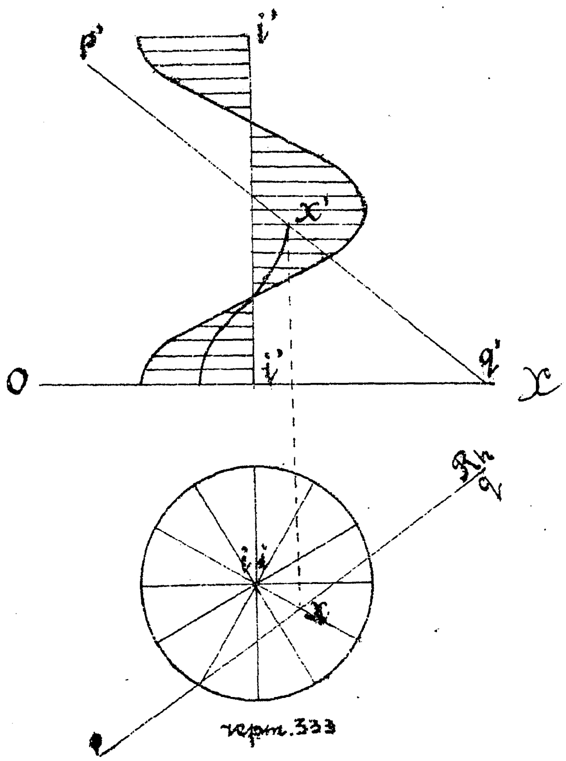
Возьмемъ какую нибудь производящую коноида, например̆ъ, MN и найдемъ ея пересѣченіе съ косой плоскостью. Проведемъ плоскость Р, перпендикулярную къ Н черезъ линію MN и найдемъ линію сѣченія этой плоскости съ косой плоскостью. Для полученія этой линіи слѣдуетъ соединить между собою точки 1, 2, 3 .... пересѣченія производящихъ косой плоскости съ плоскостью Р. Точки пересѣченія кривой 1, 2, 3 .... съ производящей коноида MN и дастъ намъ точку x пересѣченія MN съ косою плоскостью.



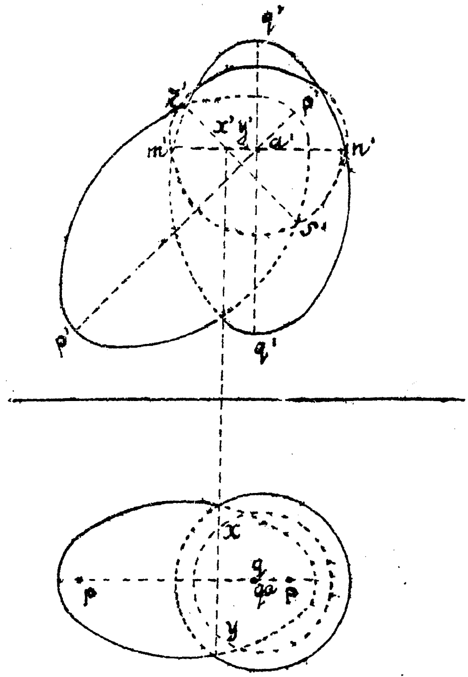
черт. 332

Взявъ рядъ производящихъ коноида и построивъ рядъ точекъ, подобныхъ x, соединимъ ихъ и получимъ, такимъ образомъ, искомую линію сѣченія. Возьмемъ теперь производящую косой плоскости, например̆ъ, производящую PQ и найдемъ точку пересѣченія ея съ коноидомъ. Чтобы не затемнять чертежа 332, сдѣлаемъ это построеніе на новомъ чертежѣ 333.

Теперь задача сводится къ построенію точки сѣченія линіи PQ съ поверхностью коноида. Проведемъ черезъ PQ вспомогательную плоскость. Самой простой вспомогательной плоскостью явилась бы плоскость, перпендикулярная къ V и параллельная Н, ибо тогда линіей сѣченія такой плоскости съ коноидомъ получилась бы прямая; но такой плоскости провести черезъ PQ нельзя, потому что PQ не горизонтальна. Возьмемъ плоскость R, перпендикулярную къ H. Найдемъ рядъ точекъ пересѣченія производящихъ коноида съ плоскостью R; соединимъ ихъ плавною кривою. Точка (x, x') пересѣченія этой кривой съ производящей PQ и будетъ искомой точкой пересѣченія PQ съ коноидомъ.



черт. 333



черт. 334

Разсмотримъ примѣненіе вспомогательныхъ шаровъ къ построенію линіи сѣченія двухъ поверхностей. Пусть даны два эллипсоида вращенія (черт. 334), оси которыхъ пересѣкаются въ точкѣ A. Опишемъ изъ точки A, какъ изъ центра, шаръ такого радіуса, чтобы онъ пересѣкалъ обѣ данныя поверхности. Линіями сѣченія шара съ эллипсоидами будутъ, очевидно, круги MN и RS, точки пересѣченія которыхъ x и y будутъ принадлежать искомой линіи сѣченія. Проводя рядъ такихъ шаровъ, мы опредѣлимъ рядъ точекъ, соединяя которыя плавной кривой мы и получимъ искомую линію сѣченія.

C_4. *Пересѣченіе кривыхъ поверхностей съ кривыми линіями.*

Общій способъ построенія точекъ пересѣченія кривой поверхности съ кривой линіей заключается въ слѣдующемъ: заключаемъ данную кривую линію въ какую нибудь вспомогательную поверхность и находимъ линію сѣченія этой поверхности съ данною. Тогда искомая точка опредѣлится какъ точка пересѣченія заданной кривой линіи съ вновь полученной. Наиболѣе простыми вспомогательными поверхностями могутъ служить поверхности цилиндрическія, коническія и плоскость; причемъ послѣдняя примѣнима тогда, когда заданная кривая плоская; тогда за вспомогательную поверхность принимаемъ плоскость этой кривой.

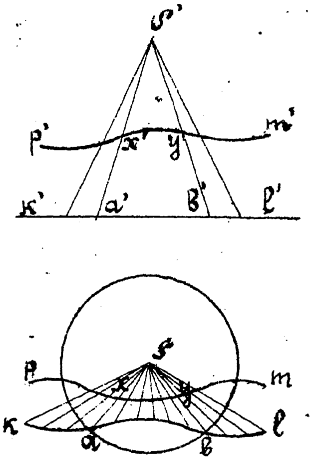
Разсмотримъ на примѣрахъ примѣненіе этого способа.

Примѣръ 1-й. Найдемъ точки пересѣченія поверхности цилиндра съ винтовою линіею.

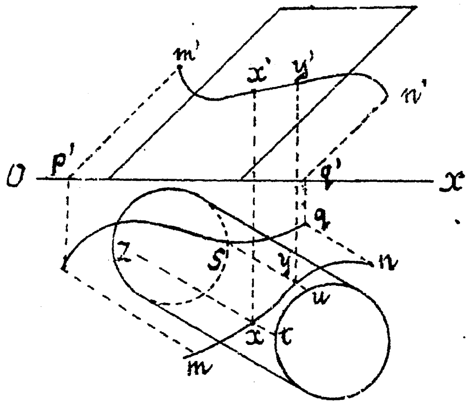
Эта задача сводится къ построенію линіи сѣченія двухъ цилиндровъ.

Беремъ рядъ точекъ винтовой линіи и проводимъ рядъ линій, параллельныхъ производящимъ даннаго цилиндра; получимъ такимъ образомъ новую цилиндрическую поверхность. Строимъ теперь линію сѣченія (прямыя) двухъ цилиндровъ - заданнаго и вновь полученнаго. Точки пересѣченія заданной кривой съ вновь полученными прямыми линіями и будутъ искомыми.

Примѣръ 2-й. При опредѣленіи точекъ сѣченія плоской кривой съ конусомъ проводимъ черезъ данную кривую плоскость и строимъ линіи сѣченія ея съ поверхностью конуса, какъ это было указано раньше (черт.335). Пересѣченіе данной кривой съ вспомогательною и дастъ искомыя точки.



черт.335



черт.336

Примѣръ 3-й. Данъ прямой круговой конусъ и дана кривая двоякой кривизны (черт.335); требуется построить линію ихъ сѣченія.

Проводимъ черезъ вершину конуса S и черезъ точки кривой линіи PM рядъ прямыхъ линій. Совокупность ихъ образуетъ новую коническую поверхность, направляющей которой является данная кривая линія. Находимъ слѣдъ KL новой конической поверхности на H. Замѣчаемъ точки A и B пересѣченія этого слѣда съ кругомъ основанія даннаго конуса на H и соединяемъ ихъ съ вершиною S даннаго конуса прямыми SA и SB.

Точки пересѣченія линій SA и SB съ кривой PM и будутъ искомыми.

Если бы требовалось найти пересѣченіе кривой линіи съ цилиндромъ, (черт.336), то слѣдовало бы черезъ данную кривую линію провести цилиндръ, параллельный данному и найти его слѣдъ PQ на H. Линіями сѣченія даннаго и вспомогательнаго цилиндровъ будутъ служить, очевидно, прямыя RT и SU, параллельныя оси даннаго цилиндра и опредѣляемыя точками R и S - сѣченія горизонтальныхъ слѣдовъ обоихъ цилиндровъ. Точки X и У пересѣченія найденныхъ производящихъ съ данною кривой линіей и будутъ искомыми.

d) *Построеніе плоскостей, касательныхъ къ кривымъ поверхностямъ.*

Здѣсь мы будемъ разсматривать 6 характерныхъ случаевъ.

α. Дана точка на поверхности; провести плоскость, касательную къ поверхности въ этой точкѣ.

β. Дана производящая на линейчатой поверхности; требуется провести черезъ нее плоскость, касательную къ поверхности.

γ. Дана точка внѣ поверхности; требуется провести черезъ эту точку плоскость, касательную къ данной поверхности.

δ. Даная прямая внѣ поверхности; провести касательную плоскость параллельно данной прямой.

ε. Дана прямая линія внѣ поверхности. Требуется провести пло -

скость касательную къ поверхности черезъ данную линію.

ζ. Дана плоскость P. Требуется провести плоскость, касательную къ поверхности и параллельную плоскости P.

α. Плоскость, касательная къ поверхности въ данной точкѣ ея.

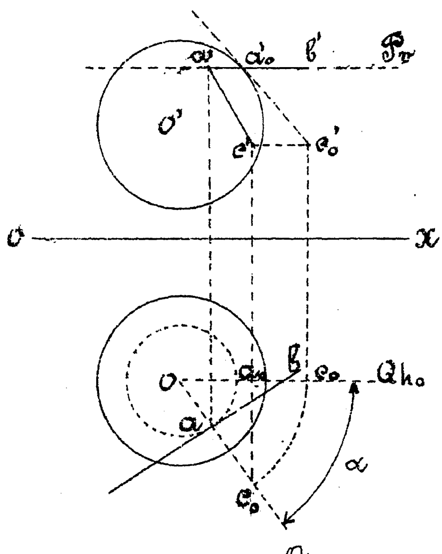
Общій способъ рѣшенія заключается въ слѣдующемъ:

Проводимъ черезъ данную точку на поверхности двѣ какихъ нибудь плоскости и находимъ линію ихъ сѣченія съ поверхностью. Въ данной точкѣ проводимъ двѣ прямыя, соотвѣтственно касательныя къ полученнымъ кривымъ. Эти двѣ прямыя и опредѣлятъ искомую касательную плоскость.

Разсмотримъ примѣненіе этого способа на нѣсколькихъ примѣрахъ.

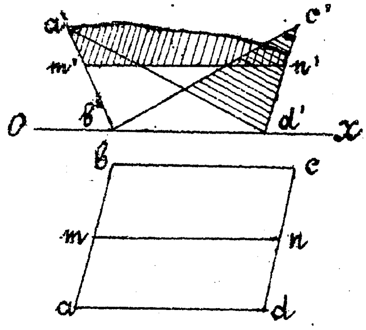
Примѣръ 1-й. Провести въ точкѣ A данной на поверхности шара, плоскость касательную къ послѣднему (черт.337).

Въ качествѣ первой вспомогательной плоскости выбираемъ плоскость P, проходящую черезъ точку A и параллельную плоскости H. Плоскость P пересѣчетъ шаръ по кругу, который, очевидно, на H будетъ проектироваться въ видѣ круга же радіуса oa. Проводимъ къ этому кругу касательную ab, a'b'. Эта линія (AB) будетъ принадлежать искомой касательной плоскости. Вторую вспомогательную плоскость Q проводимъ черезъ точку A и центръ шара O перпендикулярно къ H. Такая плоскость пересѣчетъ шаръ по большому кругу, который на H будетъ проектироваться въ видѣ прямой линіи (Qh), а на V - въ видѣ эллипса.



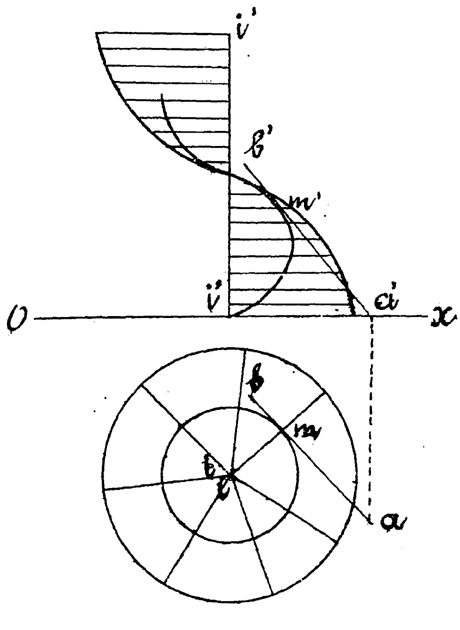
черт. 337

Для того, чтобы провести касательную къ этому кругу въ точкѣ A повернемъ плоскость Q вокругъ оси, проходящей черезъ центръ шара и перпендикулярной къ H такъ, чтобы Q сдѣлалась параллельной V (уголъ поворота α). Тогда слѣдъ ея Qh займетъ положеніе Qho, параллельное OX и точка A придетъ въ положеніе Ao (a'_{o_1}, a'_o). Теперь нетрудно провести линію A_oC_o (a_oc_o, $a'_oc'_o$), касательную къ повернутому кругу въ точкѣ Ao. Поворачивая теперь точку C_o обратно вокругъ той же оси на тотъ же уголъ α, опредѣлимъ точку C (c_1c'). Точки A, B и C или линіи AB и AC и опредѣляютъ плоскость, касательную къ шару въ точкѣ A.



черт. 338

Примѣръ 2-й. Пусть имѣется гиперболическій параболоидъ, заданный двумя производящими и двумя направляющими (черт. 338). Требуется построить касательную къ нему плоскость, положимъ, въ точкѣ C. Черезъ эту точку C проходятъ двѣ прямыя BC и DC. Линіи BC и DC опредѣлятъ искомую касательную плоскость, такъ какъ каждую изъ нихъ можно разсматривать, какъ линію сѣченія косой плоскости съ вспомогательной проходящей черезъ точку C.



черт. 339

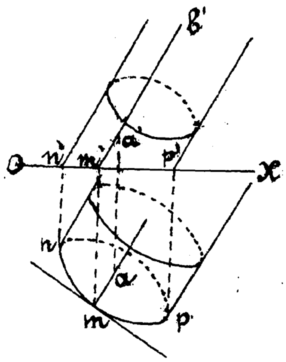
Но эта линія сѣченія является не кривой, а прямой и, слѣдовательно, совпадаетъ съ касательной къ ней въ точкѣ С.

Примѣръ 3-й. Пусть намъ дана на поверхности коноида точка М (чертежъ 339); требуется провести плоскость, касательную къ коноиду въ данной точкѣ М (m_1m'). Коноидъ данъ винтовою линіей, ея осью II и плоскостью параллелизма Н.

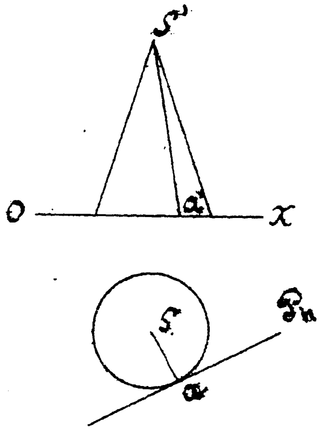
Разсѣкаемъ коноидъ круговымъ цилиндромъ, одноосньмъ съ винтовою линіей и проходящимъ черезъ точку mm'. Находимъ линію сѣченія коноида съ цилиндромъ. Это будетъ винтовая линія того же шага, что и заданная. Проводимъ ab, a'b' - касательную къ этой винтовой. Эта линія ab a'b' и производящая коноида, проходящая черезъ m, m' и опредѣлятъ искомую плоскость.

β. *Плоскость касательная къ поверхности по данной на ней прямолинейной производящей.*

Эта задача относится только къ линейчатымъ поверхностямъ и является частнымъ случаемъ предыдущей, именно, здѣсь одна изъ кривыхъ линій сѣченія, о которыхъ говорилось въ пунктѣ α, обращается въ прямую линію, которая и служитъ одною изъ прямыхъ, опредѣляющихъ искомую плоскость. Остается найти вторую прямую. Иногда задача является опредѣленною, иногда же неопредѣленною, т.е. иногда можно провести черезъ данную производящую только одну плоскость касательную къ кривой поверхности, иногда же безчисленное множество.



черт. 340



черт. 341

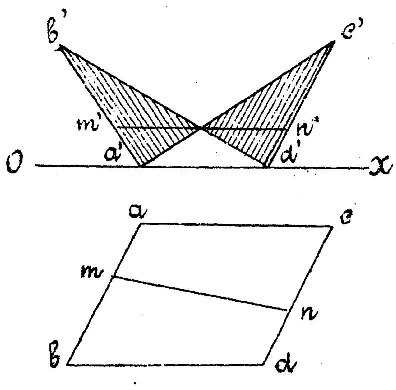
Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1-й. Дана производящая цилиндра АВ; требуется провести плоскость, касательную поверхности цилиндра по данной производящей (чертежъ 340). Найдемъ слѣды цилиндра (MNP) на Н и роведемъ прямую P_h, касательную къ этому слѣду въ точкѣ М - слѣдѣ данной производящей АВ. Искомая плоскость будетъ вполнѣ опредѣлена двумя пересѣкающимися прямыми - производящей АВ и прямой P_h.

Примѣръ 2-й. Данъ прямой круговой конусъ и его производящая SA (черт.341); требуется провести плоскость, касательную конусу по данной производящей.

Искомая плоскость заключаетъ въ себѣ рядъ линій, касательныхъ къ конусу. Всѣ эти линіи касаются конуса по различнымъ точкамъ производящей SA. Проведемъ P_h - линію, касательную къ слѣду конуса въ точкѣ а. P_h и SA и опредѣлятъ намъ положеніе искомой плоскости.

Примѣръ 3-й. Разсмотримъ какъ проводятся плоскости, касательныя къ линейчатой поверхности по данной производящей. Напримѣръ, пусть задана косая плоскость, двумя производящими и двумя направляющими (черт.342); требуется провести плоскость, касательную къ данной поверхности по данной производящей mn, m'n'. Задача является неопредѣленной. Черезъ всякую производящую косой плоскости можно провести безчисленное множество плоскостей, касательныхъ къ ней. Проводя черезъ любыя точки линіи mn, m'n' производящія другого направленія, получимъ рядъ линій, опредѣляющихъ вмѣстѣ съ mn, m'n' плоскости, касательныя къ косой плоскости. Вообще, въ развертаемыхъ гелисоидахъ, коноидахъ, цилиндроидахъ, однополыхъ гиперболоидахъ, косыхъ плоскостяхъ, въ поверхностяхъ вращенія и т.д. для каждой точки данной производящей можно построить плоскость, касательную къ поверхности и, слѣдовательно, для данной производящей можно построить столько плоскостей касательныхъ къ поверхности, сколько на ней имѣется точекъ, т.е. безчисленное множество.

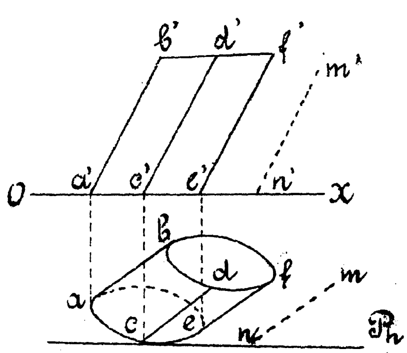


черт. 342

γ. *Плоскость, касательная къ поверхности и проходящая черезъ данную внѣшнюю точку.*

Общій способъ рѣшенія такой задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ: принимаемъ данную точку за вершину нѣкоторой конической поверхности, обертывающей данную поверхность. Тогда всякая плоскость, касательная къ этой обертывающей поверхности, будетъ касаться данной поверхности и проходить черезъ заданную точку. Такъ какъ обертывающая поверхность иногда можетъ обратиться въ плоскости касательныя къ данной поверхности, то задача можетъ имѣть или безчисленное множество рѣшеній, или нѣсколько и въ частности одно. Въ виду разнообразія способовъ рѣшенія этой задачи въ частныхъ случаяхъ, разсмотримъ нѣсколько примѣровъ ея рѣшенія.

Примѣръ 1-й. Дана цилиндрическая поверхность и дана точка М внѣ ея (черт.343); требуется провести черезъ точку М плоскость, касательную къ цилиндру. Искомая плоскость должна проходить черезъ какую нибудь производящую цилиндра, т.е. должна заключать въ себѣ прямыя, параллельныя производящимъ цилиндра. Проведемъ черезъ точку М прямую MN, параллельную производящимъ цилиндра. Искомая плоскость должна проходить черезъ эту прямую и въ то же время должна касаться цилиндра, слѣдовательно, и горизонтальный слѣдъ ея P_h долженъ касаться къ слѣду цилиндра.

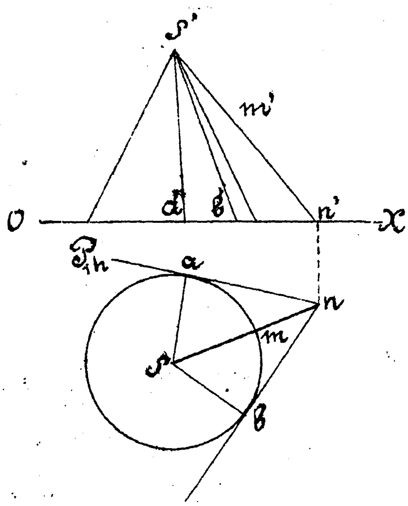


черт. 343

Построивъ горизонтальный слѣдъ цилиндра и горизонтальный слѣдъ N прямой MN и проведя черезъ точку N линію, касательную къ слѣду цилиндра въ точкѣ С, найдемъ горизонтальный слѣдъ искомой плоскости P_h. Положеніе плоскости вполнѣ опредѣляется двумя линіями P_h и MN. Линія CD будетъ служить производящей касанія.

Такъ какъ изъ точки N можно провести двѣ линіи, касательныя къ слѣду цилиндра, то задача, очевидно, имѣетъ два рѣшенія.

Примѣръ 2-й. Данъ конусъ и дана точка M внѣ его (черт.344); требуется черезъ данную точку M провести плоскость, касательную къ конусу.

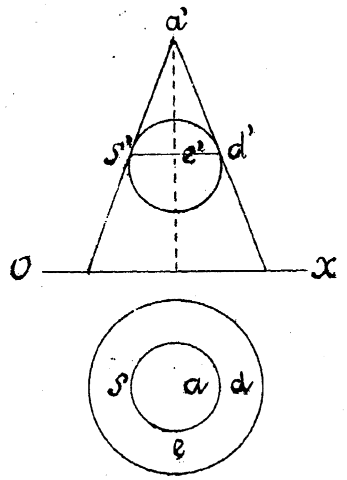


черт.344

Искомая плоскость должна касаться конуса по какой нибудь производящей, слѣдовательно, должна проходить черезъ его вершину. Соединимъ точку M съ вершиной S и найдемъ горизонтальный слѣдъ N ($n_1 n'$) прямой MS.

Изъ n проводимъ линію, касательную къ горизонтальному слѣду цилиндра P_h. Линія P_h и SN опредѣляютъ искомую плоскость. Такъ какъ изъ точки n можно провести двѣ касательныхъ P_h и P_{1h} къ слѣду конуса, то, очевидно, задача имѣетъ два рѣшенія, т.е. черезъ точку M можно провести двѣ плоскости - P и P_1, касательныя къ конусу. Производящими касанія будутъ служить линіи SA и SB.

Примѣръ 3-й. Данъ шаръ и точка a, a' внѣ его (черт.345); требуется провести черезъ точку a, a' плоскость, касательную къ шару. Примемъ a, a' за вершину нѣкотораго конуса. Коническая поверхность будетъ проходить черезъ эту точку и касаться шара по нѣкоторому кругу BCD. Всякая плоскость, касательная къ конусу, будетъ касательной и къ шару. Ясно, что такихъ плоскостей безчисленное множество, слѣдовательно, задача является неопредѣленною.



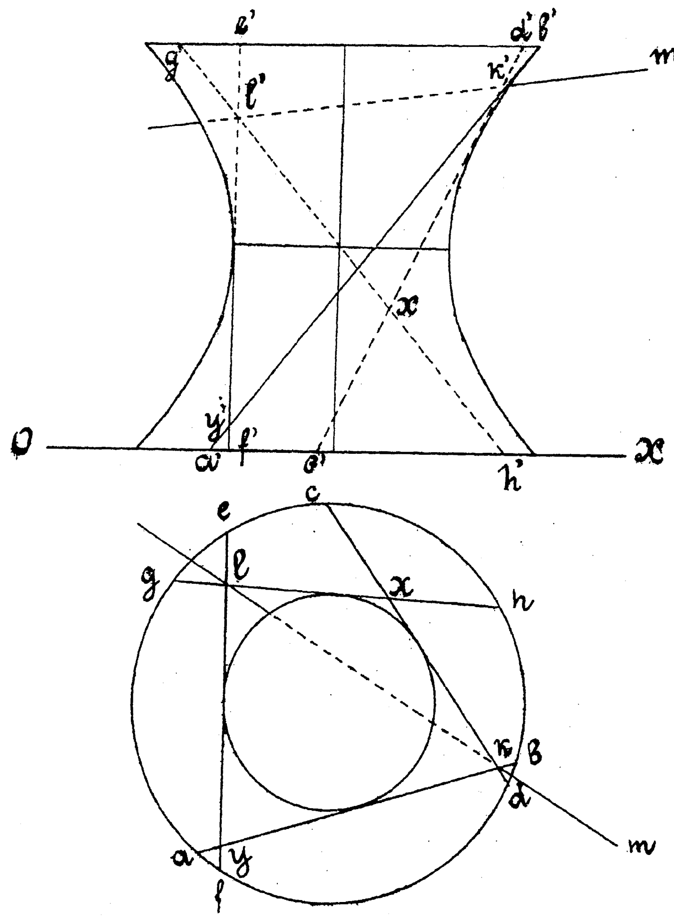
черт.345

Примѣръ 4-й. Данъ однополый гиперболоидъ вращенія его осью и рядомъ его производящихъ и дана точка m, m' внѣ его (черт.346); требуется провести черезъ эту точку плоскость, касательную къ гиперболоиду.

Изъ точки m, m' проводимъ рядъ касательныхъ къ данной поверхности. Получается нѣкоторая коническая поверхность, обертывающая данную поверхность. Всякая плоскость, касательная къ этому конусу, будетъ касательной и къ гиперболоиду. Напримѣръ, можно взять плоскость, проходящую производящую AB и точку M и сказать, что эта плоскость будетъ касаться гиперболоида. Для нахожденія точки касанія проведемъ какую нибудь линію MK въ плоскости ABM и найдемъ точки K и L ея пересѣченія съ поверхностью. Черезъ каждую изъ точекъ K и L проведемъ по двѣ производящихъ разныхъ направленій, черезъ K - AB и CD и черезъ L - EF и GH. Такъ какъ каждая производящая одного направленія пересѣкаетъ всѣ производящія другого направленія, то производящія GH и CD пересѣкутся въ точкѣ X, а AB и EF въ точкѣ У. Эти точки будутъ точками касанія плоскостей, заключающихъ AB и M, съ гиперболоидомъ.

Точно такъ же рѣшается задача относительно проведенія плоскостей, касательныхъ косой плоскости и проходящихъ черезъ данную точку внѣ ея.

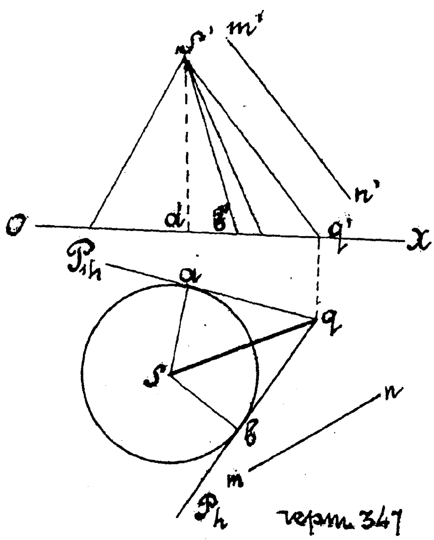
б. *Плоскость, касательная къ поверхности и параллельная данной прямой линіи.*



черт. 346

Общій способъ рѣшенія такой задачи въ пространствѣ заключается въ слѣдующемъ: проводимъ рядъ линій, касательныхъ къ данной поверхности параллельно данной линіи. Совокупность этихъ линій образуетъ нѣкоторый цилиндръ, обертывающій данную поверхность. Всякая плоскость, касательная къ этому цилиндру, будетъ касательна и къ данной поверхности. Поэтому задача въ общемъ случаѣ допускаетъ безчисленное множество рѣшеній.

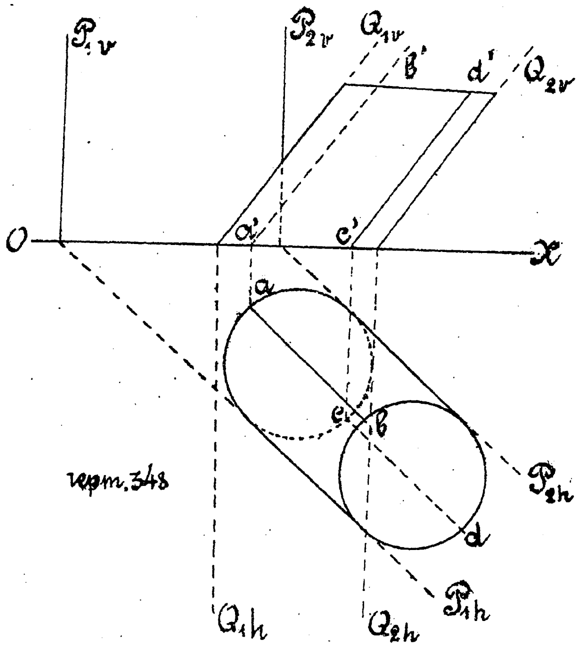
Если обертывающій цилиндръ обращается въ плоскости, то рѣшеній можетъ получиться два или одно.



черт. 347

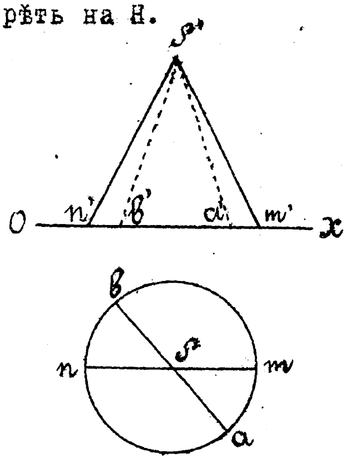
Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ рѣшенія этой задачи.

Данъ конусъ, дана прямая MN (черт.347); требуется провести плоскость, касательную къ конусу и параллельную данной прямой. Искомая плоскость должна заключать въ себѣ рядъ прямыхъ, параллельныхъ MN. Проводимъ черезъ вершину S прямую SQ, параллельную MN и находимъ ея слѣдъ Q. Проводимъ изъ Q линію, касательную къ слѣду конуса P_h. Искомая плоскость опредѣляется двумя пересѣкающимися прямыми P_h и SQ. Здѣсь возможны двѣ плоскости P и P_1, касательныя къ конусу и параллельныя данной прямой MN. Задачи этого отдѣла имѣютъ примѣненіе въ опредѣленіи контурныхъ линій, или линій отдѣла видимыхъ частей поверхностей отъ невидимыхъ.



черт.348

Опредѣлимъ линіи отдѣла для цилиндра (черт. 348). Линіями отдѣла видимыхъ частей поверхности отъ невидимыхъ должны служить производящія, по которымъ касаются цилиндра плоскости, перпендикулярныя къ H и V. Если смотрѣть на H, то касательная плоскость, отдѣляющая по линіи касанія видимыя части отъ невидимыхъ, перпендикулярна къ H, если смотрѣть на V, плоскость перпендикулярна къ V. Построимъ слѣды этихъ плоскостей P_{1v}, P_{2v}, P_{1h}, P_{2h} и Q_{1h}, Q_{2h}, Q_{1v}, Q_{2v}. Такъ какъ плоскости P_1 и P_2 касательны къ цилиндру, то и слѣды ихъ касательны къ слѣду цилиндра. Если смотрѣть на H, то видима будетъ часть поверхности цилиндра, обращенная къ зрителю и ограниченная слѣдами P_{1h} и P_{2h}. Если же смотрѣть на V, то видимою частью цилиндра будетъ та, которая обращена къ зрителю и ограничена слѣдами Q_{1v} и Q_{2v}. Что касается до видимости производящихъ, то, напримѣръ, производящая цилиндра AB будетъ видима, если смотрѣть на H и невидима, если смотрѣть на V; производящая же CD будетъ видима, если смотрѣть на V и невидима, если смотрѣть на H.



черт.349

Видимость частей конуса опредѣляется слѣдующимъ образомъ (черт.349).

Прежде всего видимы всѣ контурныя линіи. Для опредѣленія видимости другихъ частей пользуются тѣми же пріемами, какъ и при опредѣленіи видимости частей цилиндра.

При расположеніи, указанномъ на чертежѣ 349, нетрудно видѣть, что всѣ производящія видимы, если смотрѣть на H. Если же смотрѣть на V, то отдѣломъ видимыхъ производящихъ отъ невидимыхъ будутъ служить производящія SN и SM конуса, параллельныя V.

ε. Плоскость, касательная къ данной поверхности и проходящая черезъ данную линію.

Для поверхностей линейчатыхъ эта задача рѣшается такъ, какъ было указано на чертежѣ 346, гдѣ заданной линіей можно считать линію
Для тѣлъ вращенія эта задача возможна тогда, когда заданная линія не пересѣкаетъ ихъ. Рѣшеніе задачи въ этомъ случаѣ будетъ заключаться въ томъ, что слѣдуетъ вокругъ даннаго тѣла описать обертывающій его цилиндръ, производящія котораго были бы параллельны данной прямой линіи. Тогда искомая плоскость будетъ проходить черезъ данную прямую и будетъ касаться обертывающаго цилиндра по нѣкоторой его производящей.

Точка касанія послѣдней съ данной поверхностью будетъ служить точкою касанія найденной плоскости съ данной поверхностью. Для поверхностей коническихъ эта задача возможна только тогда, когда заданная прямая или проходитъ черезъ вершину конуса или пересѣкаетъ только одну изъ его производящихъ (или продолженіе ея).

Для поверхностей цилиндрическихъ эта задача возможна тогда, когда заданная прямая или параллельна оси цилиндра, или пересѣкаетъ только одну изъ его производящихъ.

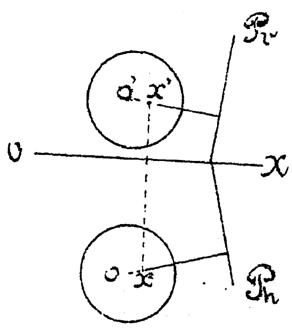
Плоскость, касательная къ данной поверхности и параллельная данной плоскости.

Рѣшеніе этой задачи возможно не всегда.

Для цилиндрическихъ поверхностей она рѣшается тогда, когда данная плоскость параллельна оси цилиндра. Для коническихъ поверхностей рѣшеніе задачи возможно, если плоскость заключаетъ въ себѣ линіи, параллельныя только одной какой нибудь производящей конуса. Для поверхностей вращенія и для линейчатыхъ поверхностей рѣшеніе этой задачи возможно въ общемъ случаѣ.

Разсмотримъ два примѣра рѣшенія этой задачи.

Примѣръ 1-й. Пусть данъ шаръ и плоскость P (черт.350); требуется провести плоскость, касательную къ шару параллельно данной плоскости P.



черт. 350

Проведемъ изъ центра O шара перпендикулярную къ P линію. Точка X сѣченія этой линіи съ шаромъ, очевидно, и будетъ служить точкою касанія искомой плоскости съ шаромъ.

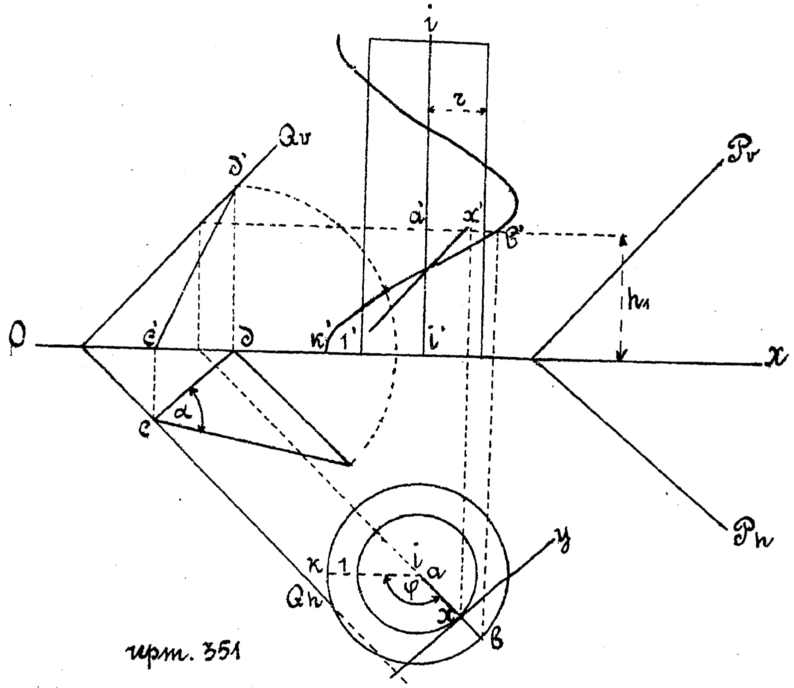
Плоскость, проходящая черезъ X и параллельная P и будетъ искомой. Если же затруднительно провести нормаль къ поверхности, перпендикулярную къ данной плоскости, то тогда слѣдуетъ найти производящую поверхности, параллельную данной плоскости P и найти точку касанія по способу указанному ранѣе (черт.346).

Примѣръ 2-й. Пусть заданъ винтовой коноидъ (плоскость параллелизма H, направляющія - винтовая линія и ея ось). Требуется провести плоскость, касательную къ нему, параллельную плоскости P и найти точку касанія (черт.351).

Находимъ производящую AB, параллельную P (ab || P_h) и черезъ AB проводимъ плоскость Q, параллельную P. Плоскость Q и будетъ искомой. Остается найти точку ея касанія. Для нахожденія ея поступимъ слѣдующимъ образомъ. Предположимъ, что точка X есть искомая точка, лежащая на производящей AB. Черезъ эту точку на поверхности коноида должна проходить винтовая линія того же шага, что и данная, но другого радіуса r. Касательная къ этой винтовой вмѣстѣ съ производящей AB и опредѣляютъ плоскость Q. Поэтому, если намъ удастся опредѣлить радіусъ r этой новой винтовой линіи, то мы можемъ найти точку X пересѣченія винтовой съ производящей AB.

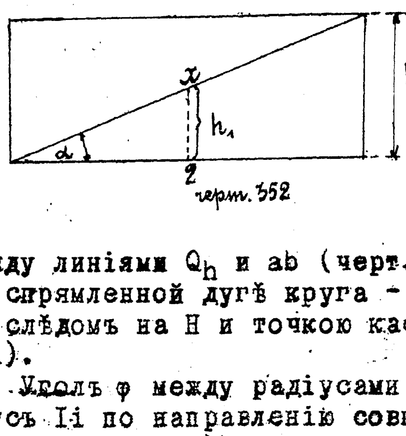
Горизонтальная проекція x y искомой касательной должна быть касательной къ кругу - горизонтальной проекціи вспомогательной винтовой, т.е. линія x y должна быть перпендикулярна къ ab.

Нетрудно построить въ плоскости Q прямую, параллельную искомой касательной къ винтовой, такъ какъ извѣстно направленіе горизонтальной проекціи этой прямой (xy). Прямая CD и будетъ одной изъ прямыхъ, лежащихъ въ Q и параллельныхъ XY (cd || xy или cd $\perp$ къ ab). Зная направленіе CD, можно опредѣлить и уголъ α наклоненія ея къ H. Такъ



черт. 351

какъ этотъ уголъ является угломъ наклона вспомомогательной винтовой къ Н, или уголъ наклона къ Н прямой, въ которую преобразуется эта винтовая на разверткѣ цилиндра (радіусъ = r), на которомъ она начертана, то мы можемъ построить эту развертку по даннымъ: шагу винтовой (h) и углу α (черт.352). Такъ какъ точка Х лежитъ на извѣстной намъ высотѣ h_1 надъ плоскостью Н, то нетрудно найти ее на разверткѣ на высотѣ h_1 надъ линіей Н. Линія 1 - 2 равна длинѣ горизонтальной проекціи отрѣзка искомой касательной между точкою касанія и горизонтальнымъ слѣдомъ. Очевидно, эта линія равна разстоянію между линіями Q_h и ab (черт.351). Наконецъ, эта же линія 1 - 2 равна спрямленной дугѣ круга - проекціи вспомогательной винтовой между ея слѣдомъ на Н и точкою касанія, т.е. между точками I и x (чертежъ 351).



черт. 352

Уголъ φ между радіусами iI и ix можно измѣрить по чертежу (радіусъ Ii по направленію совпадаетъ съ линіей ik, гдѣ слѣдъ k -слѣдъ данной винтовой), иными словами iIk есть производящая коноида, лежащая въ плоскости Н. Зная φ нетрудно написать слѣдующее уравненіе:

$$\frac{2\pi r}{360} = \frac{\text{длина 1-2 (по черт.352)}}{4};$$

откуда опредѣляемъ:

$$r = \frac{(1-2).360}{2\pi.\varphi}.$$

Зная же r, опредѣляемъ и точку X, какъ пересѣченіе линіи ab съ кругомъ радіуса r съ центромъ въ i. Строимъ далѣе и x'. Точка X и будетъ искомой точкою касанія.

e. *Построеніе нормалей къ кривымъ поверхностямъ.*

Такъ какъ нормаль въ какой нибудь точкѣ поверхности перпендикулярна къ плоскости касательной къ поверхности въ этой точкѣ, то различныя задачи на проведеніе нормалей сводятся къ задачамъ на проведеніе плоскостей, касательныхъ къ кривымъ поверхностямъ.

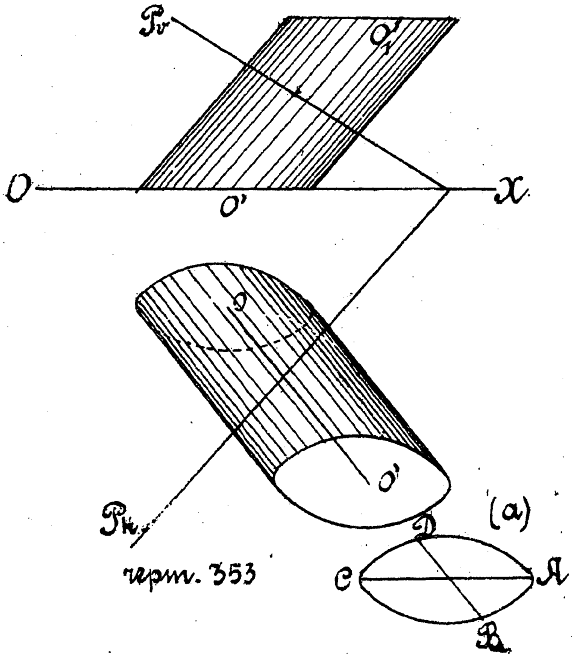
f. *Развертка кривыхъ поверхностей.*

Ранѣе (стр.127), было указано раздѣленіе различныхъ линейчатыхъ поверхностей на два класса: поверхности разверзаемыя и поверхности неразверзаемыя, причемъ было упомянуто, что развертываться на плоскость могутъ только тѣ поверхности, прямолинейныя послѣдовательныя производящія которыхъ или параллельны другъ другу (поверхности цилиндрическія) или пересѣкаютъ другъ друга (поверхности коническія, разверзаемые гелисоиды и поверхности одинаковаго ската).

Разсмотримъ способы развертки поверхностей на примѣрахъ.

Развертка поверхностей цилиндровъ.

Примѣръ 1-й. Пусть имѣется такая задача: построить развертку поверхности цилиндра. Развертки цилиндровъ строятся почти такъ же, какъ и развертки призмъ (черт.353).

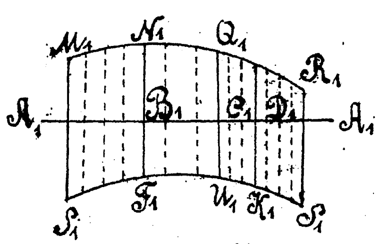


черт. 353

Проводимъ плоскость P, перпендикулярную къ оси цилиндра; слѣды этой плоскости будутъ, какъ извѣстно, перпендикулярны къ проекціямъ оси цилиндра.

Построимъ линію сѣченія этой плоскости съ поверхностью цилиндра. Затѣмъ совмѣщаемъ P съ H; тогда на H мы будемъ имѣть неискаженный видъ кривой (a) нормальнаго сѣченія цилиндра.

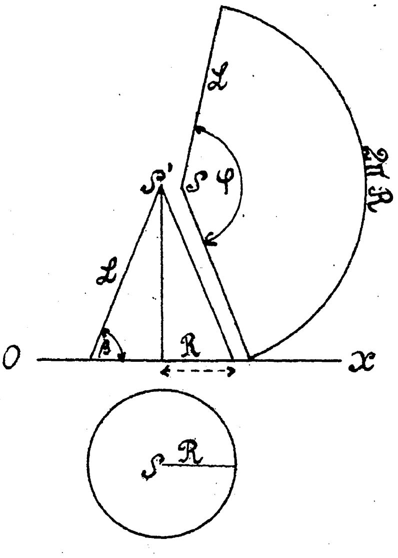
Развернемъ теперь нашъ цилиндръ. Тогда кривая сѣченія превратится въ прямую линію (черт.354) $A_1B_1C_1D_1A$, длина которой равна длинѣ дуги ABCDA (черт.353). Чтобы отложить на прямой длину, равную дугѣ ABCD, слѣдуетъ послѣднюю замѣнить вписаннымъ въ нее многоугольникомъ. Чѣмъ больше сторонъ будетъ имѣть послѣдній, тѣмъ менѣе периметръ его будетъ отличаться отъ длины дуги кривой. Если же плоскость P пересѣкаетъ цилиндръ по кругу, то для спрямленія его дуги слѣдуетъ примѣнить одинъ изъ способовъ, указанныхъ на чертежахъ 148 - 152. Затѣмъ слѣдуетъ по чертежу 353 измѣрить длины отрѣзковъ производящихъ, проведенныхъ черезъ различныя точки кривой нормальнаго сѣченія отъ этой послѣдней до концовъ ихъ и отложить эти длины на чертежѣ 354 отъ A_1D_1 въ обѣ стороны по перпендикулярамъ къ ней, проведеннымъ черезъ соотвѣтственныя точки дѣленія. Соединяя концы отложенныхъ отрѣзковъ, получимъ кривыя верхняго и нижняго основанія цилиндра на разверткѣ. Фигура $M_1R_1S_1V_1$ будетъ изображать развертку по-



черт. 354

верхности цилиндра.

Примѣръ 2-й. Построимъ развертку прямого кругового конуса.



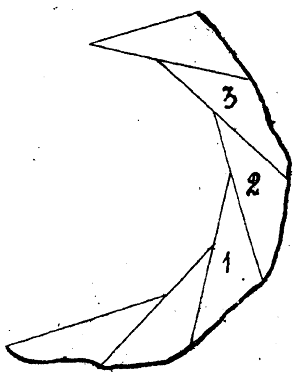
черт. 355

Данъ прямой круговой конусъ, радіусъ основанія котораго равенъ R, длина производящей - L и уголъ наклона производящихъ къ - β (черт.355); требуется построить его развертку. Разрѣжемъ конусъ по одной изъ его производящихъ и развернемъ его поверхность; въ разверткѣ получимъ секторъ. Опредѣлимъ уголъ φ - уголъ между крайними производящими развертки. Длина дуги основанія конуса = 2πR, длина дуги сектора на разверткѣ = Lφ, слѣдовательно, Lφ = = 2πR; а такъ какъ R = L Cos β, то φ = = 2π Cos β.

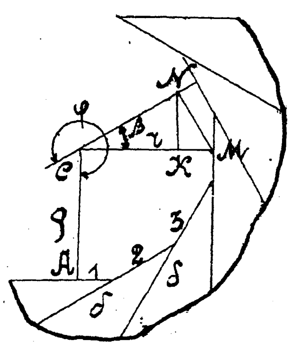
Уголъ φ можно опредѣлить и иначе - графически, по способу указанному на чертежахъ 148 и 152. Разобьемъ горизонтальный слѣдъ конуса (кругъ) на нѣсколько равныхъ частей. Изъ точки S на разверткѣ опишемъ дугу радіусомъ = L и отложимъ на этой дугѣ послѣдовательно части, равныя частямъ круга основанія конуса. Соединивъ конечныя точки, получимъ искомый уголъ.

Примѣръ 3-й. Построимъ развертку поверхности развертаемаго гелисоида.

Произвести развертку этой поверхностей легко, если ме будемъ разсматривать ее, какъ нѣкоторый многогранникъ, вписанный въ эту поверхность, т.е. если замѣнимъ кривыя поверхности ея плоскими элементами (черт.356).

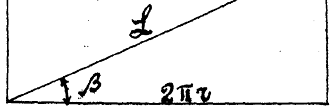


черт. 356



черт. 357

Итакъ, предположимъ, что вмѣсто винтовой линіи имѣется многоугольная ломаная линія съ большимъ количествомъ равныхъ между собою сторонъ. Тогда касательныя къ винтовой превратятся въ продолженныя стороны многоугольника (черт.356). Плоскіе элементы поверхности мы можемъ совмѣстить другъ съ другомъ, вращая ихъ вокругъ линіи ихъ сѣченія.



черт. 358

Для развертки фигуры будемъ брать послѣдовательно всѣ стороны многоугольника, замѣняющаго винтовую. Возьмемъ рядъ плоскихъ элементовъ, совмѣщенныхъ другъ съ другомъ. Углы на разверткѣ между положеніемъ касательныхъ будутъ всѣ одинаковы. Беря всѣ элементы, мы постепенно развертываемъ поверхность (черт.357).

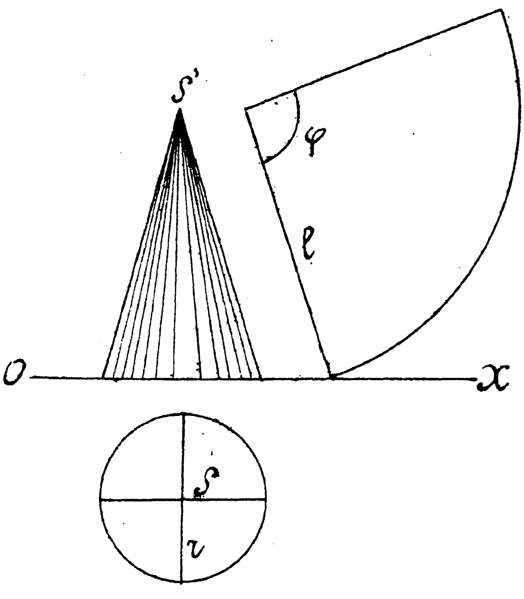
Въ такой совершенно правильный многоугольникъ можетъ быть вписанъ кругъ.

Длина одного оборота винтовой линіи, которая при разверткѣ поверхности гелисоида превратится въ дугу кру-

га будетъ равна $L = \dfrac{2\pi r}{\operatorname{Cos}\beta}$, гдѣ β есть уголъ между касательной къ винтовой и плоскостью H, а - радіусъ винтовой (черт.358). Во то же время изъ чертежа 357 длина дуги на разверткѣ $L = \rho\varphi$, отсюда
$\rho\varphi = \dfrac{2\pi r}{\operatorname{Cos}\beta}$ (1).

Опредѣляемъ уголъ φ. Проводимъ изъ какой нибудь точки (S3') линіи, послѣдовательно параллельныя производящимъ нашего гелисоида (черт.359).

Всѣ эти производящія одинаково наклонны къ H и совокупность ихъ даетъ поверхность кругового конуса. Слѣдовательно, если мы развернемъ поверхность конуса и опредѣлимъ уголъ φ, то этотъ уголъ долженъ равняться углу φ на разверткѣ поверхности гелисоида. А извѣстно, что для развертки конуса $\varphi = 2\pi \operatorname{Cos}\beta$.



черт.359

Подставивъ это значеніе φ въ уравненіе (1) мы опредѣляемъ радіусъ ρ, который уже можемъ построить:

$$\rho = \frac{2\pi r}{2\pi \operatorname{Cos}^2\beta} = \frac{r}{\operatorname{Cos}^2\beta} \quad \ldots(2)$$

Для построенія возстановляемъ изъ конца r, т.е. изъ точки K (черт.357) перпендикуляръ KN съ CK и проводимъ CN подъ угломъ β къ CK. Тогда имѣемъ: $CN = \dfrac{r}{\operatorname{Cos}\beta}$; продолжимъ CK и изъ N проводимъ MN - перпендикуляръ къ CM, тогда:

$$CM = \frac{CN}{\operatorname{Cos}\beta} = \frac{r}{\operatorname{Cos}^2\beta} = \rho.$$

Слѣдовательно, если даны намъ: r - радіусъ винтовой и шагъ ея, то легко опредѣлить β и построить ρ.

Чтобы построить φ, поступаемъ такъ, какъ поступали при разверткѣ конуса, считая длину его производящей равной ρ. Развернемъ такую поверхность конуса, отложимъ длину дуги на разверткѣ, послѣ чего получимъ поверхность въ развернутомъ положеніи. Для полученія развертки поверхности гелисоида, слѣдуетъ проводить касательныя къ дугѣ круга (разверткѣ винтовой) и откладывать на ней истинныя длины производящихъ гелисоида отъ точки касанія до конца ихъ.

------ н ------

ЧАСТЬ III.

ПРОСТѢЙШІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ МѢСТА.

Е. *ПРОСТѢЙШІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ МѢСТА.*

17. *ОПРЕДѢЛЕНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ МѢСТЪ.*

Геометрическимъ мѣстомъ называется рядъ геометрическихъ элементовъ, удовлетворяющихъ одному и тому же какому нибудь геометрическому условію.

Разсмотримъ простѣйшія геометрическія мѣста въ различныхъ примѣрахъ.

Прямая линія.

Прямая линія есть геометрическое мѣсто точекъ, которыя могутъ удовлетворять извѣстнымъ условіямъ. Напримѣръ, биссектриса угла есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ его сторонъ. Перпендикуляръ, возстановленный въ серединѣ прямолинейнаго отрѣзка къ послѣднему, есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ концовъ этого отрѣзка и т.д.

Плоскость.

Плоскость можно разсматривать какъ геометрическое мѣсто или точекъ, или прямыхъ линій, удовлетворяющихъ цѣлому ряду условій. Напримѣръ, плоскость P параллельная плоскости Q й, удаленная отъ последней на разстояніи (a), есть: 1) геометрическое мѣсто точекъ, удаленныхъ отъ плоскости Q на разстояніе (a), 2) геометрическое мѣсто прямыхъ линій, параллельныхъ Q и удаленныхъ отъ Q на разстояніе (a).

Плоскость, перпендикулярная къ нѣкоторому отрѣзку прямой линіи AB и проведенная черезъ середину AB, есть геометрическое a) точекъ, равноудаленныхъ отъ концовъ A и B отрѣзка или b) линій, перпендикулярныхъ къ данному отрѣзку и т.д.

Шаръ.

Шаръ есть геометрическое мѣсто точекъ, равно-удаленныхъ отъ данной точки - центра шара.

Прямой круговой цилиндръ.

Прямой круговой цилиндръ есть геометрическое мѣсто: 1) или точекъ, удаленныхъ отъ данной прямой - оси цилиндра, на данное разстояніе, 2) или прямыхъ линій, параллельныхъ данной - оси цилиндра и удаленныхъ отъ нея на данное разстояніе.

Прямой круговой конусъ.

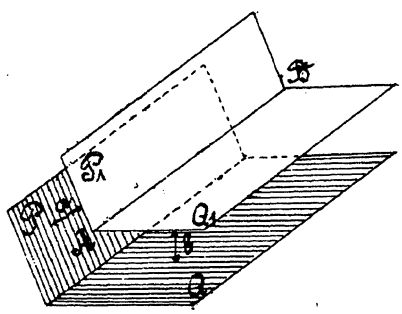
Прямой круговой конусъ есть геометрическое мѣсто прямыхъ линій, наклоненныхъ къ данной линіи - оси конуса подъ даннымъ угломъ (α). Въ частности, если мы проведемъ плоскость, перпендикулярную къ оси конуса, то его поверхность будетъ служить геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ линій, наклоненныхъ подъ даннымъ угломъ $(90^\circ - \alpha)$ къ данной плоскости.

18. *СОВОКУПНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ МѢСТЪ.*

Въ зависимости отъ числа и характера условій, опредѣляющихъ различные геометрическіе элементы, послѣдніе можно разсматривать, какъ результаты сочетанія различныхъ геометрическихъ мѣстъ, каждое изъ которыхъ удовлетворяетъ одному изъ заданныхъ условій.

Въ виду разнообразія и многочисленности комбинацій геометрическихъ мѣстъ, разсмотримъ лишь нѣкоторыя изъ нихъ, на примѣрахъ рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ, причемъ послѣднія будемъ рѣшать сначала въ пространствѣ, а потомъ укажемъ планъ рѣшенія ихъ въ проекціяхъ.

Примѣръ 1-й. Даны двѣ плоскости P и Q. Требуется провести линію, параллельную имъ и въ разстояніи (a) отъ P и (b) отъ Q (черт.360).



черт. 360

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ.

Проводимъ плоскость P_1, параллельную P въ разстояніи (a) отъ нея. Эта плоскость будетъ служить геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ линій, удовлетворяющихъ одному изъ заданныхъ условій.

Подобнымъ же образомъ проводимъ плоскость Q_1, параллельную Q на разстояніи (b) отъ нея. Всякая прямая, лежащая въ этой плоскости, будетъ удовлетворять второму изъ заданныхъ условій. Очевидно, линія AB пересѣченія плоскостей P_1 и Q_1 будетъ искомой линіей, удовлетворяющей обоимъ заданнымъ условіямъ.

Планъ рѣшенія задачи въ проекціяхъ будетъ заключаться въ слѣдующемъ:

1) Проводимъ плоскость P_1, параллельную P на разстояніи (a) отъ нея. Для этого:

a. Задаемся въ плоскости P какой нибудь точкою M.

b. Возстановляемъ въ точкѣ M перпендикуляръ къ плоскости P.

c. Откладываемъ на этомъ перпендикулярѣ отъ точки M отрѣзокъ MN= = (a).

d. Проводимъ черезъ точку N двѣ какихъ нибудь линіи NK и NL, параллельныя плоскости P, напримѣръ, параллельныя слѣдамъ P_v и P_h плоскости P. Эти линіи (NK и NL) и опредѣлятъ искомую плоскость P_1.

2) Подобнымъ же образомъ проводимъ плоскость Q_1, параллельную плоскости Q въ разстояніи (b) отъ нея.

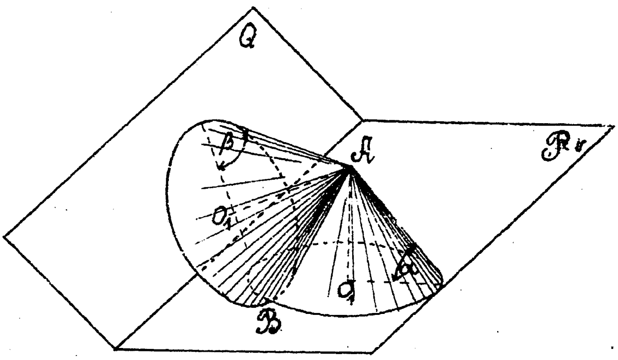
3) Находимъ линіи сѣченія плоскостей P_1 и Q_1.

Изслѣдованіе задачи будетъ заключаться въ опредѣленіи числа рѣшеній. Въ данномъ случаѣ, очевидно, будетъ четыре рѣшенія, въ зависимости отъ того, съ какой стороны данныхъ плоскостей мы будемъ проводить плоскости P_1 и Q_1.

Примѣръ 2-й. Провести черезъ данную точку А прямую линію подъ угломъ α къ данной плоскости Р и подъ угломъ β къ данной плоскости Q (черт.361).

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ.

Изъ точки А опускаемъ перпендикуляры AO_1 и AO_2 на плоскости Р и Q.

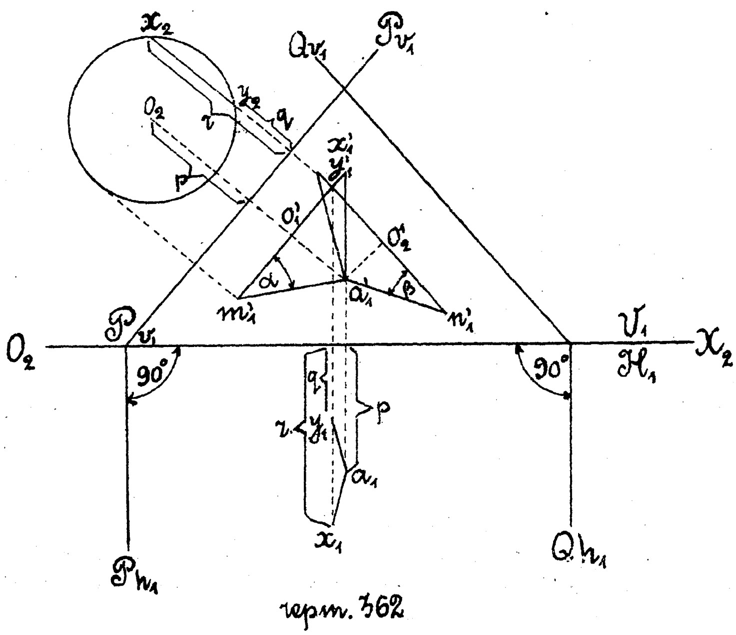


черт. 361

Принимая эти перпендикуляры за оси конусовъ съ вершиною въ А, описываемъ вокругъ нихъ эти конуса, одинъ - вокругъ оси AO_1 съ угломъ между осью и производящими $(90° - \alpha)$ и другой - вокругъ оси АО съ угломъ $(90° - \alpha)$. Очевидно, линія АВ сѣченія поверхностей этихъ конусовъ будетъ удовлетворять обоимъ заданнымъ условіямъ.

Планъ рѣшенія задачи въ проекціяхъ.

Если плоскости Р и Q заданы случайно, то прежде всего при помощи методовъ вращенія или перемѣны плоскостей проекцій переходимъ къ наиболѣе выгодному ихъ заданію, напримѣръ, такому, при которомъ линія ихъ сѣченія перпендикулярна къ новой плоскости проекцій (черт.362) и находимъ въ этой системѣ $\frac{V_1}{H_1}$ проекціи точки А $(a_1 a_1')$. Строимъ проекціи на V_1 двухъ вышепомянутыхъ конусовъ, имѣя въ виду, что углы ихъ производящихъ отдѣла къ плоскостямъ Р и Q спроектируются на V_1 безъ искаженія. Выбираемъ высоты AO_1 и AO_2 этихъ конусовъ такъ, чтобы длины производящихъ обоихъ конусовъ были равны



черт.362

между собою, т.е. чтобы $a_1'm_1' = a_1'n_1'$.

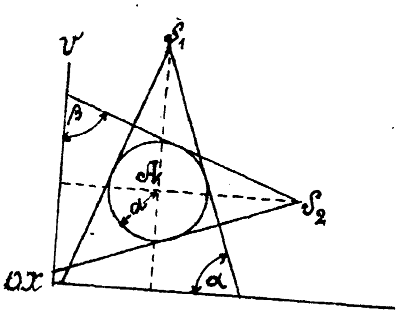
Основанія этихъ конусовъ спроектируются на V_1 въ видѣ линій, перпендикулярныхъ соотвѣтственно къ $a_1'o_2'$ и a_1o_1'.

Линія пересѣченія этихъ основаній спроектируется на V_1, въ видѣ точки. Обозначимъ точки пересѣченія этой линіи съ поверхностью конусовъ черезъ X и У. Проекціи этихъ точекъ на V_1 будутъ точки $x_1'y_1'$. Найдемъ проекціи ихъ на H_1. Перейдемъ отъ системы $\frac{V_1}{H_1}$ къ системѣ $\frac{V_1}{P}$ и найдемъ проекціи круга основанія конуса съ осью AO_1 на P. Проводя изъ точки x_1' перпендикуляръ $x_1'x_2$ къ P_{V1}, найдемъ точки x_2 и y_2 пересѣченія его съ новой проекціей круга. Эти точки опредѣлятъ намъ разстояніе искомыхъ горизонтальныхъ проекцій точекъ X и У до оси O_2X_2. Опускаемъ теперь изъ точки x_1' $_1'$ перпендикуляръ на O_2X_2 и откладываемъ внизъ отъ оси O_2X_2 полученныя разстоянія g и r. Находимъ точки x_1 и y_1. Линія AX (a_1x_1, $a_1'x_1'$) и AУ (a_1y_1, $a_1'y_1$) и будутъ искомыми линіями. Теперь остается перейти отъ системы плоскостей проекціи $\frac{V_1}{H_1}$ къ заданной системѣ $\frac{V}{H}$.

Примѣръ 3-й. Провести плоскость на данномъ разстояніи (а) отъ данной точки A подъ угломъ α къ H и подъ угломъ β къ V.

Рѣшеніе задачи въ пространствѣ.

Всякая плоскость, касательная къ шару радіуса (а) съ центромъ въ точкѣ A будетъ удовлетворять первому условію.



черт. 363

Проведемъ черезъ центръ шара профильную плоскость и примемъ ее за плоскость чертежа (черт. 363). Опустимъ изъ центра шара перпендикуляръ S_1A на плоскость H и примемъ его за ось конуса, производящія котораго были бы наклонены къ H подъ угломъ α, и который касался бы шара.

Подобнымъ же образомъ опишемъ конусъ вокругъ шара, но съ осью перпендикулярной къ V и съ производящими, наклоненными къ V подъ угломъ β. Всякая плоскость, касательная къ первому конусу, будетъ удовлетворять двумъ условіямъ.

1) Она будетъ удалена отъ точки A на разстояніе (а).

2) Она будетъ наклонена къ H подъ угломъ (α).

Всякая плоскость, касательная ко второму конусу, будетъ удовлетворять также двумъ условіямъ.

1) Она будетъ удалена отъ точки A на разстояніе (а).

2) Она будетъ наклонена къ V подъ угломъ β.

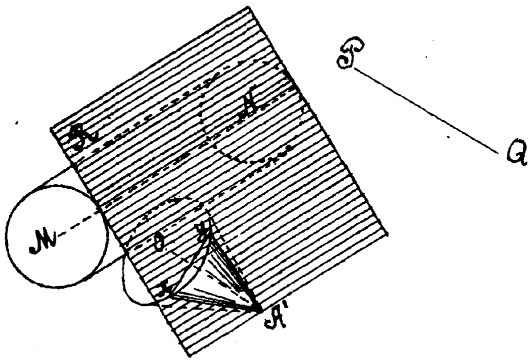
Очевидно, плоскость, касающаяся двухъ конусовъ одновременно, будетъ удовлетворять всѣмъ заданнымъ условіямъ.

Опредѣлимъ эту плоскость.

Она должна заключать въ себѣ вершины обоихъ конусовъ, т.е. проходить черезъ линію S_1S_2. Слѣдъ плоскости на H долженъ проходить черезъ горизонтальный слѣдъ линіи S_1S_2; а такъ какъ эта плоскость должна касаться конуса, стоящаго на H, то горизонтальный слѣдъ искомой плоскости долженъ касаться горизонтальнаго слѣда этого конуса. Двѣ линіи: S_1S_2 и найденный горизонтальный слѣдъ плоскости вполнѣ опредѣляютъ искомую плоскость. Иначе ее можно было бы опредѣлить слѣдующимъ образомъ:

Найдемъ круги касанія обоихъ конусовъ съ шаромъ и опредѣлимъ точки x и y пересѣченія этихъ круговъ. Каждая изъ этихъ точекъ съ линіей S_1S_2 опредѣлитъ по плоскости, удовлетворяющей заданнымъ условіямъ.

Примѣръ 4-й. Провести черезъ данную точку А прямую линію на даннομъ разстояніи (r_1) отъ данной прямой линіи MN и подъ даннымъ угломъ къ другой прямой PQ.



черт. 364

Рѣшеніе задачи заключается въ слѣдующемъ (черт. 364). Описываемъ вокругъ линіи MN цилиндръ радіуса (r). Черезъ точку А проводимъ плоскость R, касательную къ этому цилиндру. Всякая линія, проходящая черезъ точку А въ этой плоскости удовлетворяетъ двум условіямъ.

1) Она проходитъ черезъ точку А.

2) Она проходитъ на данномъ разстояніи отъ линіи MN.

Проводимъ теперь черезъ точку А линію АО, параллельную линіи PQ и описываемъ вокругъ нея, какъ вокругъ оси, конусъ съ вершиною въ точкѣ А и съ угломъ между производящими и осью АО равнымъ α.

Находимъ линіи сѣченія АХ и АУ этого конуса съ плоскостью

Эти линіи, очевидно, будутъ удовлетворять всѣмъ заданнымъ условіямъ, т.е.:

1) онѣ проходятъ черезъ точку А;

2) онѣ проходятъ на данномъ разстояніи (r) отъ линіи MN, такъ какъ лежатъ въ плоскости, касательной къ цилиндру съ осью MN;

3) онѣ наклонены подъ даннымъ угломъ α къ линіи ОА, а, слѣдовательно, и къ линіи PQ, такъ какъ лежатъ на поверхности конуса, всѣ производящія котораго наклонены къ линіи АО подъ угломъ α.

Примѣръ 5-й. Провести черезъ точку А плоскости подъ угломъ α къ H и подъ угломъ β къ V.

Задача рѣшается такъ же, какъ и для примѣра 3-го. Сначала провести плоскость на какомъ нибудь разстояніи (а) отъ точки А, а потомъ провести черезъ точку А плоскость ей параллельную.

------ " ------

ЧАСТЬ IV.

ПОСТРОЕНІЕ МНОГОГРАННИКОВЪ ПО ДАННЫМЪ УСЛОВІЯМЪ.

F. ПОСТРОЕНІЕ МНОГОГРАННИКОВЪ ПО ДАННЫМЪ УСЛОВІЯМЪ.

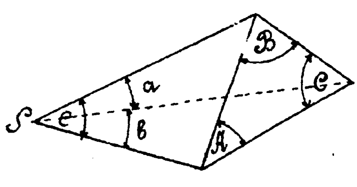
При построеніи изображеній многогранниковъ необходимо имѣть данными величины, опредѣляющія его форму и размѣры. Если многогранникъ правильный, то достаточно имѣть форму и размѣры одной его грани. Если же онъ неправильный, то, помимо длинъ его сторонъ и формы граней, необходимо знать элементы его пространственныхъ угловъ, т.е. величины плоскихъ и двугранныхъ угловъ.

Такъ какъ всякій многогранный пространственный уголъ можно разбить на рядъ трегранныхъ угловъ и, такимъ образомъ, свести задачу построенія многограннаго угла на рядъ построеній трегранныхъ угловъ, то разсмотримъ сначала способы построенія триграннаго угла по разнымъ даннымъ его элементамъ.

19. *ПОСТРОЕНІЕ ТРЕГРАННЫХЪ УГЛОВЪ.*

Каждый трегранный уголъ S заключаетъ въ себѣ 6 элементовъ:

1) три плоскихъ угла a, b и c;
2) три двугранныхъ угла A, B, C (черт.365).



черт.365

Условимся обозначать плоскіе углы, противолежащіе двуграннымъ, малыми буквами алфавита того же наименованія.

Каждые три элемента вполнѣ опредѣляютъ трегранный уголъ. Поэтому возможно столько комбинацій заданій триграннаго угла, сколько можно составить сочетаній изъ 6 элементовъ по три.

Сочетанія эти будутъ таковы (отбрасывая повторенія).

Даны:

1) a, b, c.
2) a, B, C.
3) a, b, A.
4) B, C, c.
5) A, b, c.
6) A, B, C.

Случаи 2-й и 3-й отличаются другъ отъ друга тѣмъ, что во 2-мъ случаѣ данный двугранный уголъ A противолежитъ плоскому углу (a), а въ 3-мъ случаѣ двугранный уголъ C лежитъ между данными плоскими углами a и b.

Точно также, въ случаѣ 4-мъ, плоскій уголъ c лежитъ между двугранными углами A и B, а въ 5-мъ случаѣ плоскій уголъ противолежитъ двугранному.

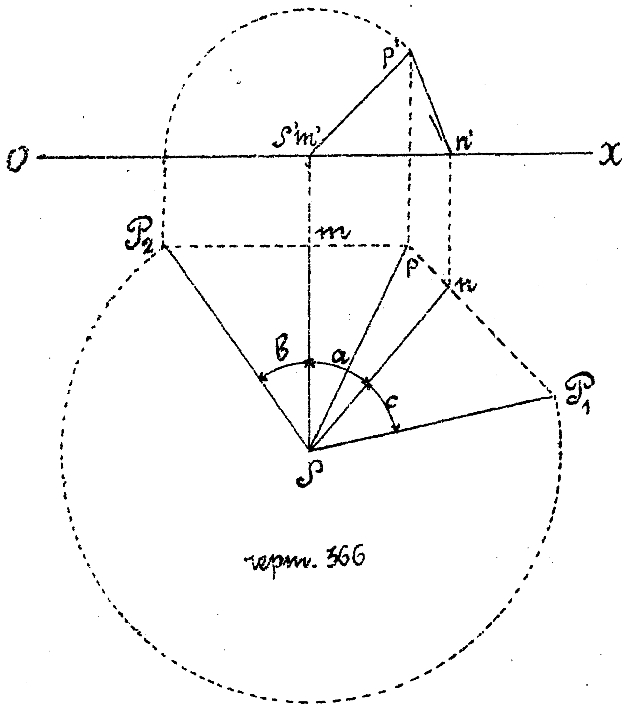
Разсмотримъ рѣшеніе этихъ задачъ.

1) *Даны три плоскихъ угла a, b, c. Построить трегранный уголъ* (черт.366).

Рѣшеніе.

Предположимъ, что трегранный уголъ MNPS разрѣзанъ по одному ребру, напримѣръ, по SP и грани его совмѣщены одна съ другою и съ плоскостью H.

Тогда углы a, b и c будутъ изображены на плоскости H безъ искаженія. Расположимъ ребро SM перпендикулярно къ V. Далѣе отмѣтимъ на ребрѣ SP въ двухъ его положеніяхъ SP_1 и SP_2 одну и ту же точку P и будемъ поворачивать грани SNP и SMP соотвѣтственно вокругъ реберъ SN и SM до тѣхъ поръ, пока обѣ точки P_1 и P_2 не совпадутъ. Такъ какъ движеніе точекъ p_1 и p_2 будетъ совершаться въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ соотвѣтственно къ SM и SN то горизонтальныя проекціи этихъ точекъ будутъ двигаться по линіямъ P_1p и P_2p соотвѣтственно перпендикулярнымъ къ SM и SN. Точка p - пересѣченія линій P_1p и P_2p и будетъ горизонтальной проекціей искомой точки.



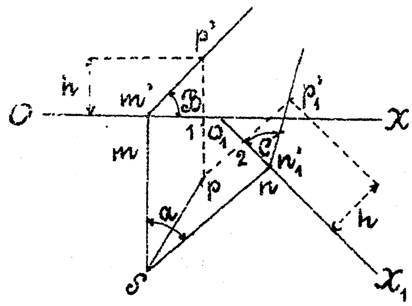
черт. 366

Вертикальная ея проекція должна лежать на перпендикулярѣ къ OX, опущенномъ изъ точки P. Такъ какъ ребро SM выбрано перпендикулярнымъ къ OX, то разстояніе точки p до этого ребра будетъ практиковаться на V безъ искаженія; поэтому засѣкаемъ перпендикуляръ pp' изъ точки m', какъ изъ центра, дугою радіуса равнаго длинѣ mP_2 перпендикуляра, опущеннаго изъ точки P_2 на ребро sm.

Точка p' и будетъ искомой вертикальной проекціи точки P.

2) Даны два двугранныхъ угла B и C и плоскій уголъ a между ними. Построить трегранный уголъ

Рѣшеніе.



черт. 367

Предположимъ, что грань SMN, заключающая въ себѣ плоскій уголъ (a), совмѣщена съ плоскостью H такъ, что ребро SN стало перпендикулярнымъ къ V. Если обозначимъ двугранный уголъ при ребрѣ SM черезъ B, то этотъ уголъ на V спроектируется безъ искаженія.

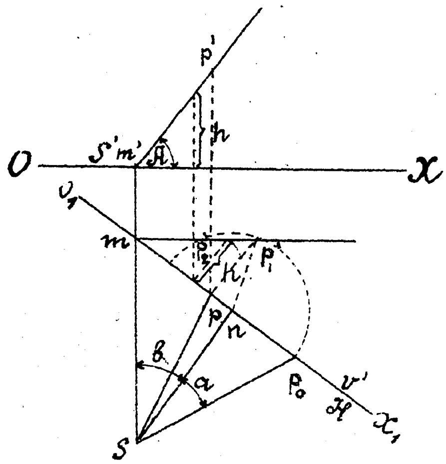
Поэтому проводимъ линію m'p' слѣдъ на V грани SMP, подъ угломъ B къ OX. Переходимъ теперь отъ системы плоскостей проекцій $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V_1}{H}$ съ новой осью O_1X_1, причемъ V' выбираемъ перпендикулярной къ ребру SN. Строимъ въ этой системѣ слѣдъ $p_1'n'$ грани SPN на V' такъ же, какъ и раньше это дѣлали для грани SMP въ системѣ $\frac{V}{H}$. Линія $p_1'n'$ пойдетъ подъ угломъ C къ O_1X_1.

Теперь остается въ системѣ $\frac{V}{H}$ найти линію сѣченія граней SPM и SPN. Для этого пересѣкаемъ обѣ грани горизонтальною плоскостью, отстоящею отъ H на какомъ нибудь разстояніи h и находимъ линіи 1p и 2p сѣченія этой плоскости съ плоскостями граней. Точка p - пересѣченія этихъ линій и будетъ горизонтальной проекціей искомой точки, опредѣляющей положеніе ребра SP. Вертикальная же проекція p' этой точки будетъ лежать на линіи p

3) *Даны два плоскихъ угла* a *и* b *и одинъ двугранный, противолежащій плоскому углу* *Построить трегранный уголъ* (черт.368).

Рѣшеніе.

Строимъ грань SMN, заключающую уголъ b на плоскости H, такъ, чтобы ребро SM было перпендикулярно къ OX.

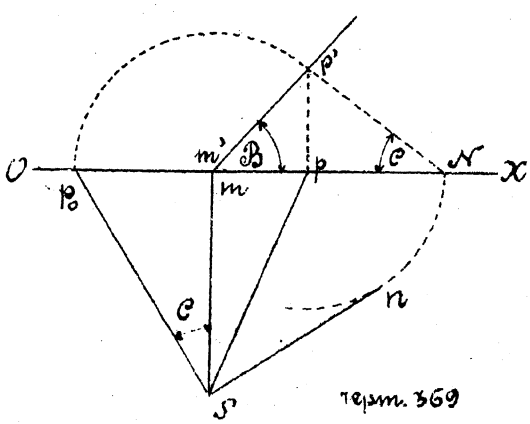


черт. 368

Тогда уголъ A при ребрѣ SM будетъ на V проектироваться безъ искаженія и слѣдъ грани SMP на V пойдетъ по линіи s'p' подъ угломъ A къ OX. Искомое ребро SP опредѣлится, очевидно, какъ линія сѣченія грани SMP съ поверхностью конуса, вершина котораго находится въ точкѣ S, осью служитъ ребро SN, а производящія наклонены къ этой оси подъ угломъ a.

Для построенія этой линіи переходимъ отъ системы плоскостей проекцій $\frac{V}{H}$ къ системѣ $\frac{V'}{H}$, причемъ V' выбираемъ перпендикулярной къ SN. Строимъ въ системѣ $\frac{V'}{H}$ слѣдъ mp_1' грани SMP на V' и слѣдъ конуса и находимъ точки p_1' и p_2' пересѣченія этихъ слѣдовъ. Задача, очевидно, допускаетъ (въ общемъ случаѣ) два рѣшенія. Найдя, напримѣръ, точку p въ системѣ $\frac{V}{H}$ и соединивъ ее съ точкою S, мы такимъ образомъ опредѣлимъ искомое ребро SP.

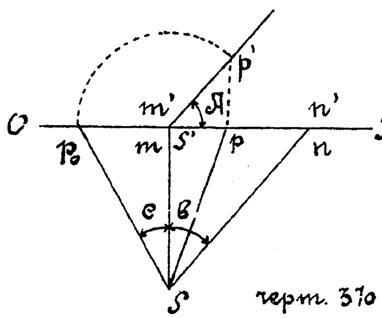
4) *Даны два двугранныхъ угла* B *и* C *и одинъ плоскій* c, *противолежащій одному изъ данныхъ двугранныхъ угловъ. Требуется построить трегранный уголъ* (чертежъ 369).



черт. 369

Рѣшеніе.

Проводимъ въ плоскости H ребро SM перпендикулярно къ оси OX. Черезъ это ребро пусть проходитъ грань SMP, составляющая уголъ B съ плоскостью грани SMN, причемъ послѣднюю предполагаемъ совмѣщенной съ H. Уголъ B будетъ проектироваться на V безъ искаженія. Проводимъ слѣдъ m'p' грани SMP на V подъ угломъ B къ OX. Далѣе совмѣщаемъ эту грань съ H, вращая ее около ребра SM. Послѣ совмѣщенія уголъ c будетъ проектироваться на H безъ искаженія. Проводимъ изъ случайной точки p_0 выбранной на оси OX, линію p_0S подъ угломъ c къ ms. Точку S пересѣченія линіи p_0S и mS принимаемъ за вершину трегранного угла. Возвращаемъ теперь грань SMP въ прежнее положеніе. Пусть повернутое обратно положеніе точки p_0 будетъ p'. Теперь задача сводится къ слѣдующей: черезъ данную прямую SP провести плоскости подъ угломъ C къ H.



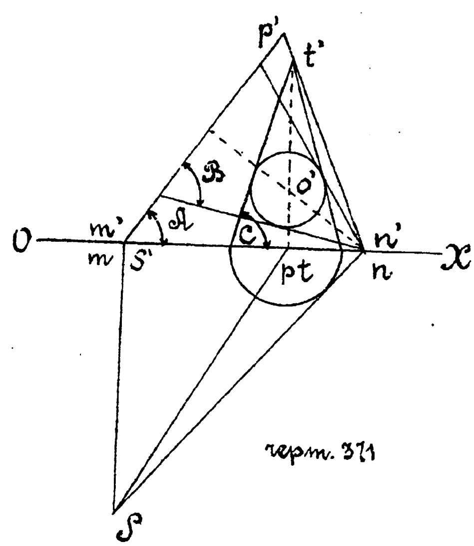
черт. 370

Для рѣшенія этой задачи поступаемъ слѣдующимъ образомъ: принимаемъ точку P за вершину конуса, производящія котораго наклонены къ H подъ угломъ C. Находимъ горизонтальный слѣдъ Nn этого конуса и изъ точки S проводимъ линію Sn, касательную къ этому слѣду. Линія Sn, будучи слѣдомъ на H плоскости, касательной къ конусу и и будетъ искомымъ ребромъ SN треграннаго угла.-

5) *Даны два плоскихъ угла b и c и одинъ двугранный A, заключенный между ними. Требуется построить трегранный уголъ* (черт.370).

Рѣшеніе.

Предполагаемъ грань SMN, заключающую уголъ b, совмѣщенной съ H такъ, что ребро SM перпендикулярно къ OX. Строимъ въ совмѣщеніи съ H другую грань SMP, заключающую уголъ C. Поворачиваемъ далѣе эту грань вокругъ ребра SM до тѣхъ поръ, пока она не будетъ наклонена къ H (а слѣдовательно и къ грани SMN) подъ угломъ A. Тогда точка P - слѣдъ ребра SP на V и опредѣлитъ совмѣстно съ точкою S положеніе искомаго ребра SP.



черт. 371

6) *Даны три двугранныхъ угла A, B и C. Построить трегранный уголъ* (черт.371).

Рѣшеніе.

Проводимъ плоскость грани SMP перпендикулярно къ V подъ угломъ A къ H. Далѣе выбираемъ на оси OX какую нибудь точку N и проводимъ черезъ нее плоскость SNP подъ угломъ B къ грани SMP и подъ угломъ C къ грани SMN. Задача эта была уже рѣшена раньше (см. черт.363).

20. *ПОСТРОЕНІЕ МНОГОГРАННИКОВЪ.*

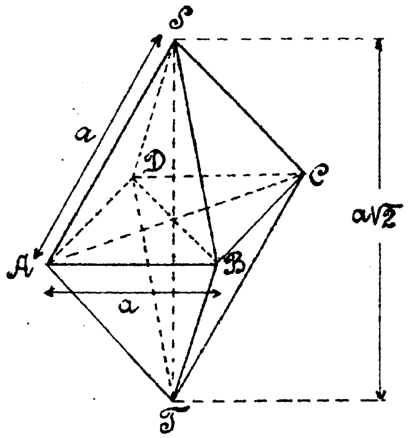
Разсмотримъ построеніе многогранниковъ на примѣрахъ, причемъ укажемъ рѣшеніе задачи въ двухъ случаяхъ:

a) когда многогранникъ правильный;

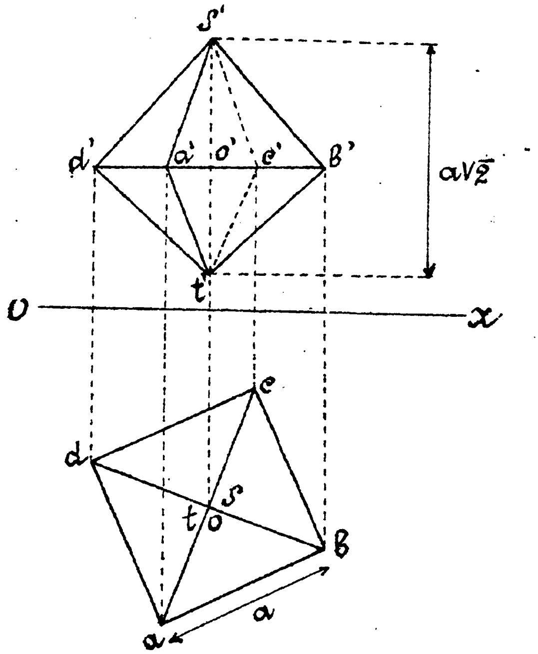
b) когда многогранникъ неправильный.

a) *Построеніе правильнаго октаэдра (черт.372 и 373).*

Поверхность правильнаго октаедра состоитъ изъ восьми равносторонниxъ треугольниковъ, образующихъ двѣ пирамиды SABCD и TABCD (черт. 372), соединенныхъ основаніями ABCD, причемъ это основаніе образуетъ квадратъ со стороною α - равною длинѣ ребра пирамиды. Замѣтимъ, что всякая діагональная плоскость пересѣкаетъ октаедръ по квадрату со стороною α. Всякая діагональ ST, AC или DB равна $\alpha.\sqrt{2}$. Для построенія изображенія октаедра въ ортогональныхъ проекціяхъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ (черт.373).



черт. 372

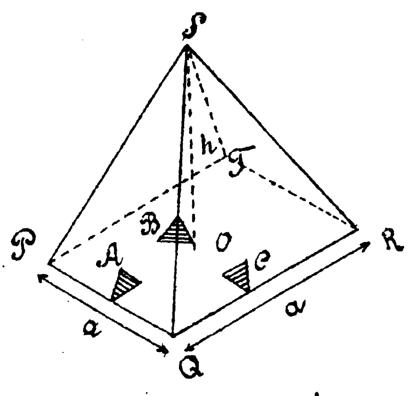


черт. 373

Строимъ квадратъ ABCD (abcd, a'b'c'd'), принимая плоскость его параллельной H. Черезъ центръ его oo' проводимъ перпендикуляръ oo' и продолжаемъ его по обѣ стороны квадрата на длину $o's' = o't' = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$. Далѣе остается только соединить полученныя вершины октаедра S и T съ вершинами A, B, C и D.

b) *Построеніе неправильнаго многогранника.*

Пусть требуется построить пирамиду по слѣдующимъ даннымъ: (черт.374). Пирамида стоитъ на плоскости H. Основаніе ея - квадратъ PQRT со стороною a. Высота пирамиды SO = h. Двугранные углы при ребрахъ PQ, SQ и QR соотвѣтственно равны A, B и C.



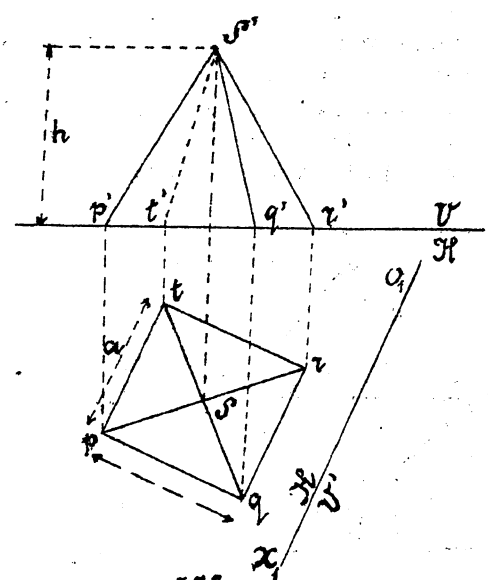
черт. 374

Рѣшеніе.

Строимъ на плоскости H квадратъ PQRT со стороною (a) (черт.375).

Затѣмъ при вершинѣ Q строимъ трегранный уголъ по даннымъ его тремъ двуграннымъ угламъ, какъ было уже указано на чертежѣ 371.

Построеніе ребра QS удобнѣе производить въ системѣ плоскостей проек-



черт. 375

ціи $\frac{V'}{H}$, гдѣ V' перпендикулярна къ PQ. Зная направленіе ребра SQ , нетрудно найти на немъ точку S, отстоящую на разстояніи h отъ плоскости H и затѣмъ соединить эту точку съ точками P, Q, R и T.

------ " ------

ЧАСТЬ V.

ЗАДАЧИ.

З А Д А Ч И. *)

ПРОЕКЦІИ ТОЧЕКЪ.

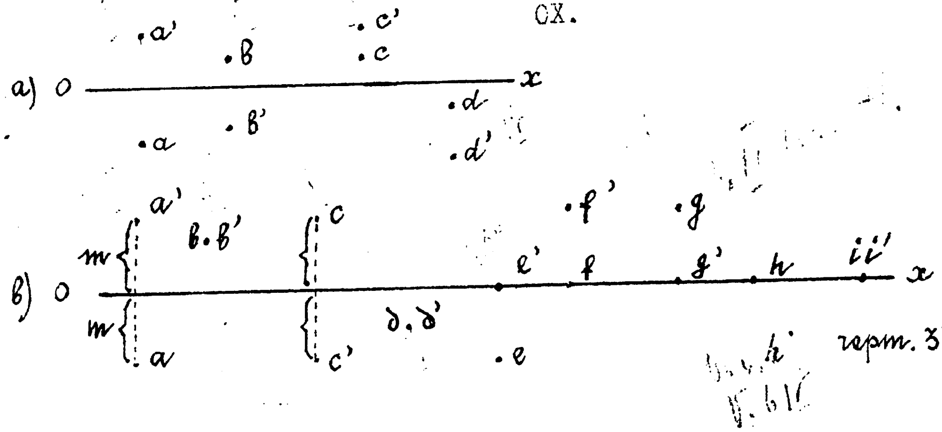
1) Найти точку,**) отстоящую отъ плоскости H на разстояніи a и отъ плоскости V на разстояніи b и лежащую a) въ I углѣ, b) во II углѣ и c) въ III углѣ и d) въ IV углѣ пространства.

2) Найти точку, отстоящую отъ плоскости H и V на одинаковыхъ разстояніяхъ и лежащую a) въ I углѣ, b) во II углѣ, c) въ III углѣ и d) въ IV углѣ пространства.

3) Въ какомъ углѣ лежатъ точки A, B, C и D?

4) Какое особенное положеніе занимаютъ точки A, B, C...I?

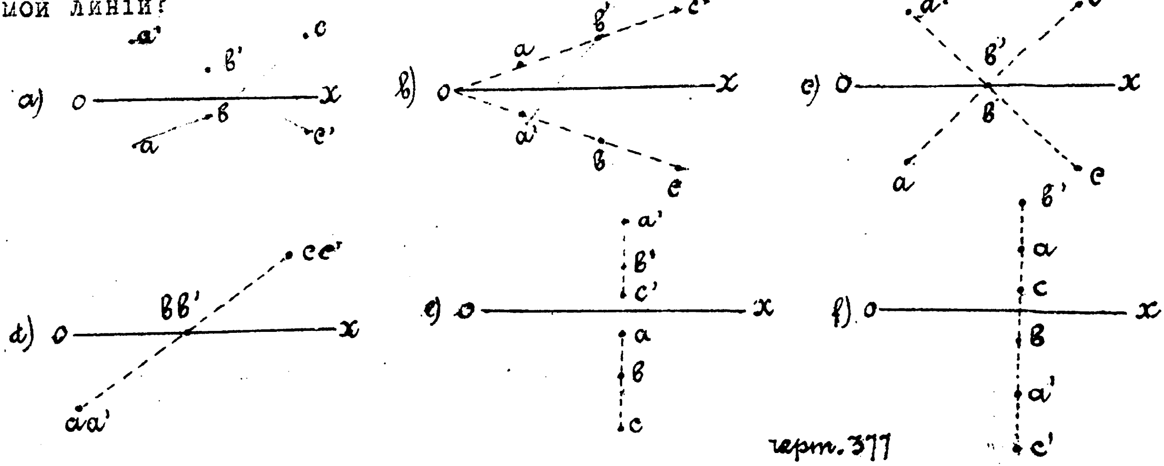
5) Дана точка (чертежъ задачи N 3). Найти ей симметричную относительно a) H, b) V, c) оси OX.



черт. 376

Прямая линія.

6) Опредѣлить, лежатъ ли три данныхъ точки A, B и C на одной прямой линіи?



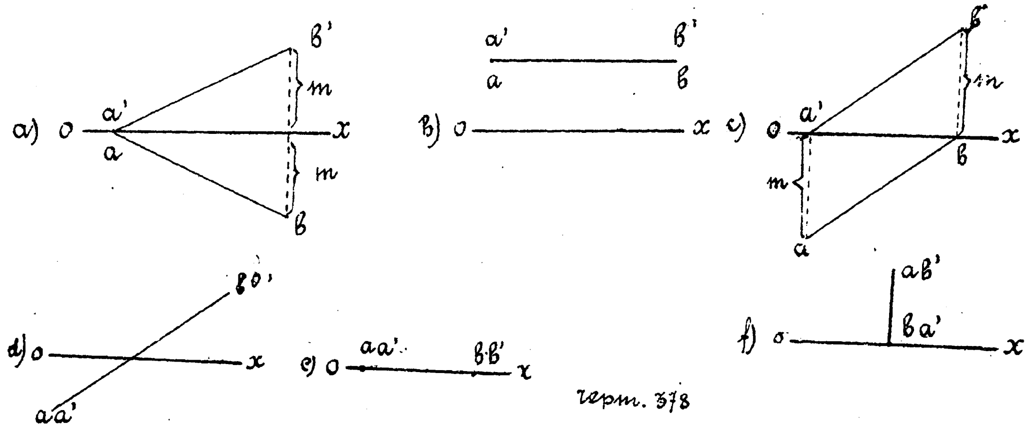
черт. 377

---

*) См. Сборникъ задачъ по Начерт. Геометріи Н. Рынина. При рѣшеніи задачъ слѣдуетъ всѣ построенія производить въ плоскости чертежа, т.е. предполагать V совмѣщенною съ H.

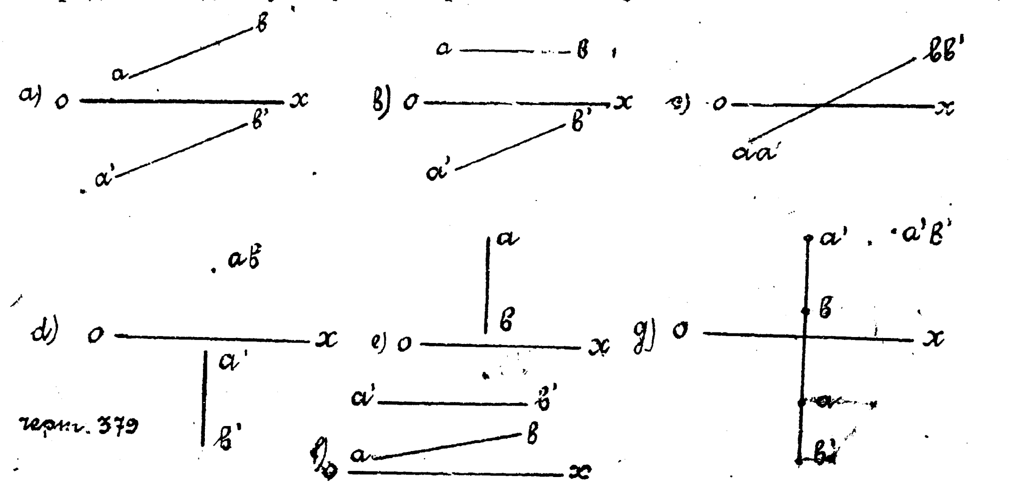
**) Выраженія "найти точку" или "построить точку" значитъ - найти ея проекціи.

7) Какое положеніе относительно H и V занимаетъ линія AB?



черт. 378

8) Опредѣлить длину отрѣзка прямой AB и углы наклона ея къ V и H.



черт. 379

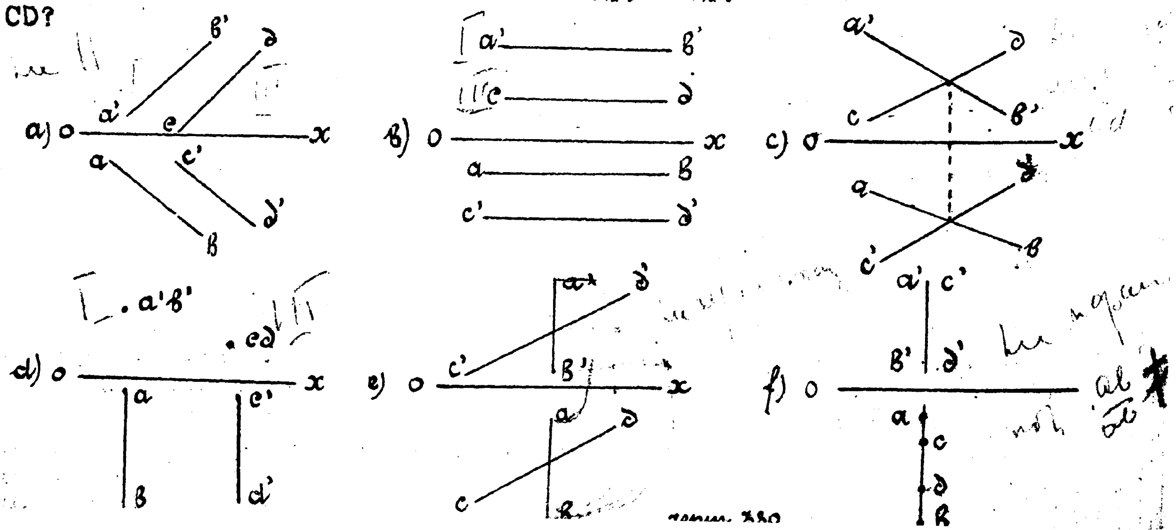
9) Найти слѣды прямой AB (чертежи задачи N 8).

10) Найти на прямой AB точку C, удаленную на разстояніе m отъ H и точку D удаленную на разстояніе n отъ V (чертежи задачи N 8).

11) Провести прямую, которая проходила бы изъ I-го угла въ III черезъ II-й уголъ.

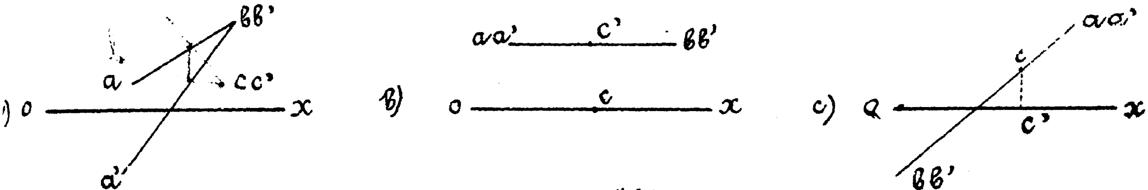
Двѣ прямыя линіи.

12) Какое положеніе относительно другъ друга занимаютъ линіи AB и CD?



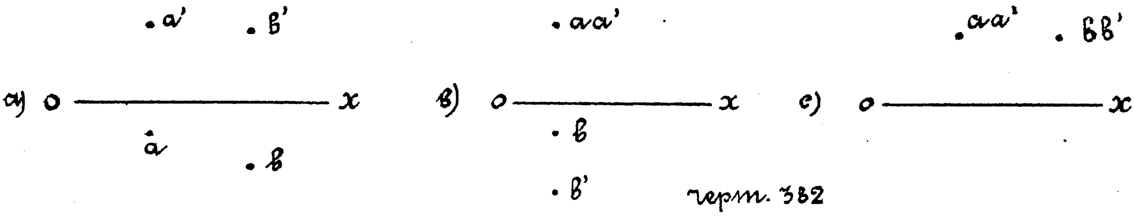
черт. 380

13) Провести черезъ точку С прямую, пересѣкающую АВ.



черт. 381

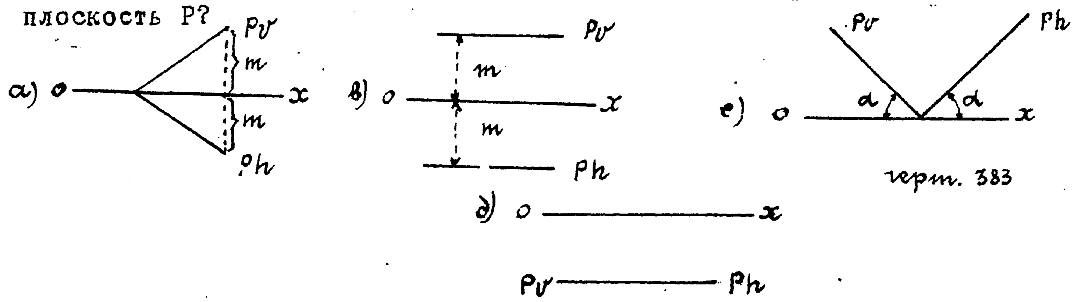
14) Провести черезъ точки А и В двѣ взаимно параллельныхъ линій а) случайныхъ, b) профильныхъ.



черт. 382

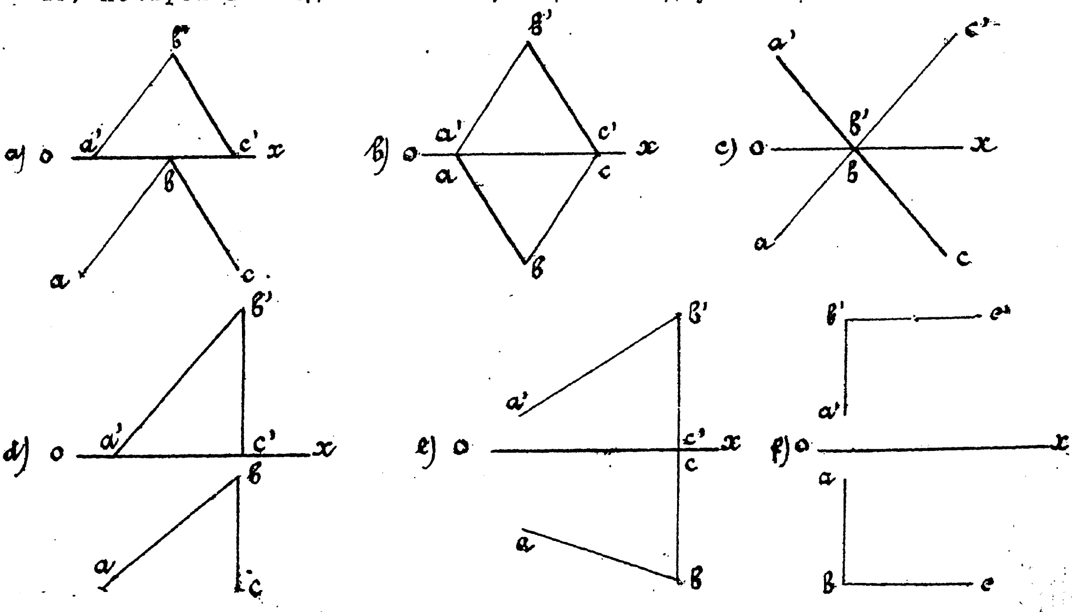
Плоскость:

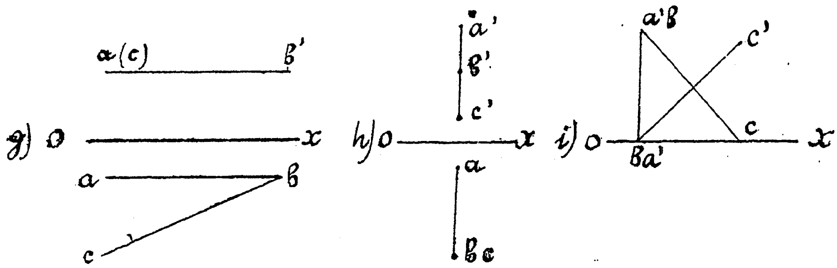
15) Какое положеніе относительно плоскостей проекцій занимаетъ плоскость Р?



черт. 383

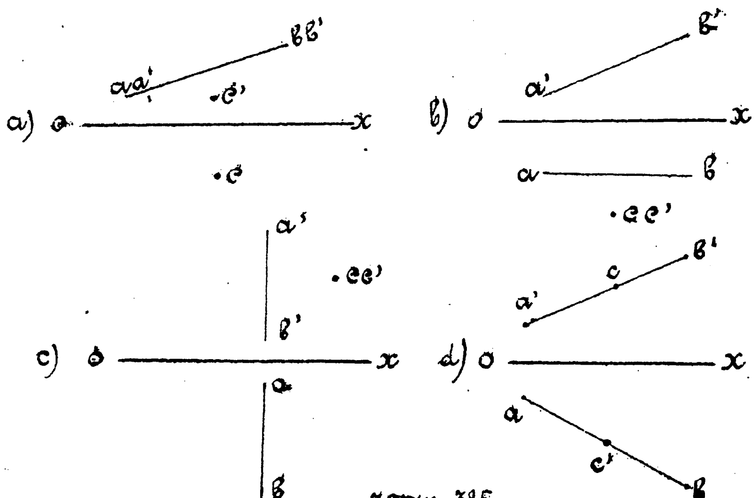
16) Построить слѣды плоскости, заданной двумя линіями АВ и ВС.





черт. 384

17) Построить слѣды плоскости, заданной прямою линіей AB и точкою C.

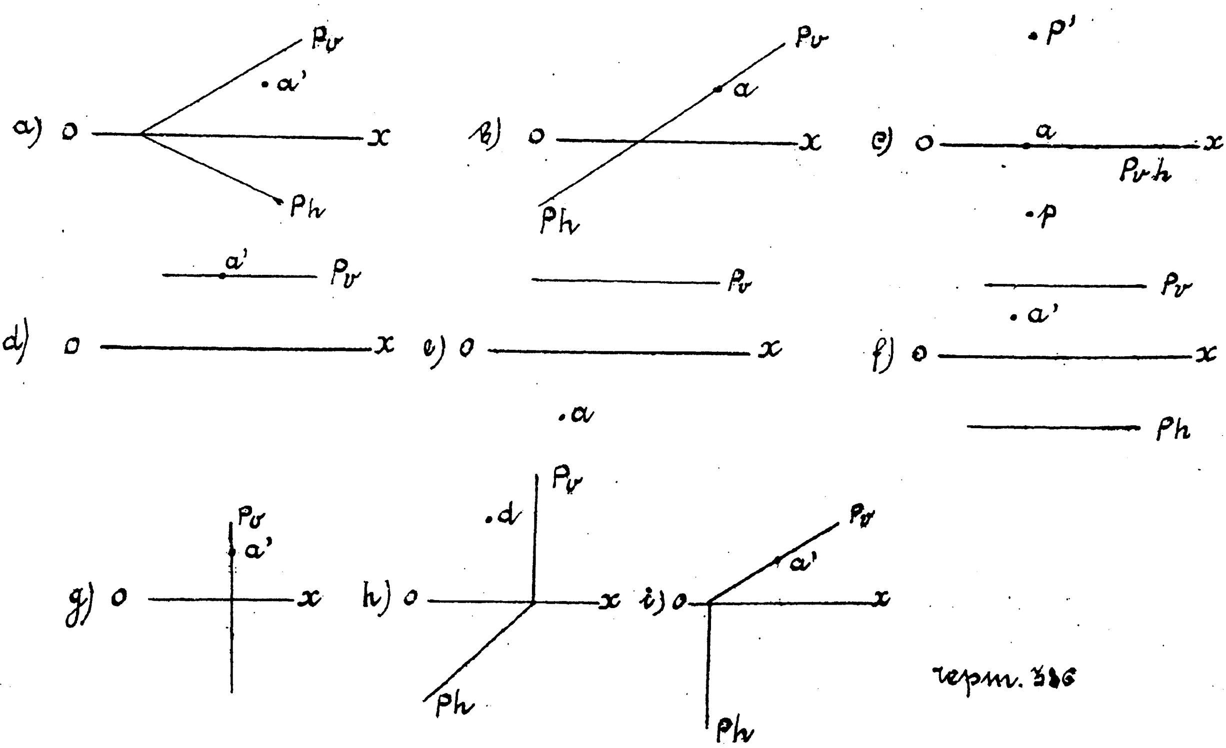


черт. 385

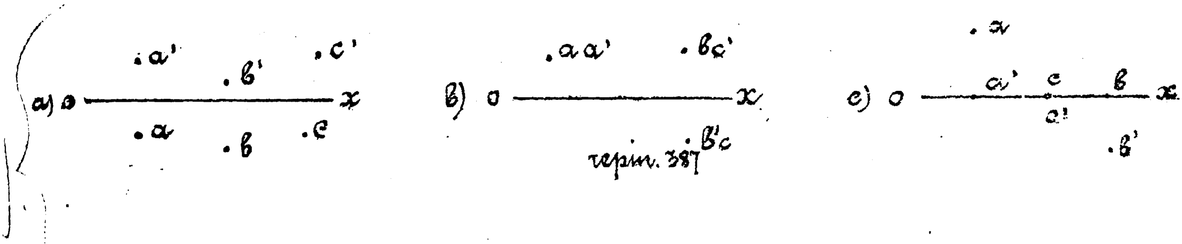
18) Провести въ плоскости P черезъ точку A горизонталь и фронталь.

19) Въ плоскости опредѣляемой точками A, B и C провести двѣ прямыя - одну черезъ точку A параллельно H другую черезъ точку B параллельно V.

20) Найти въ плоскости P точку a) удаленную отъ H на разстояніе m и отъ V на разстояніе n b) равноудаленную отъ V и H (чертежи задачъ 16, 17, 18, 19).



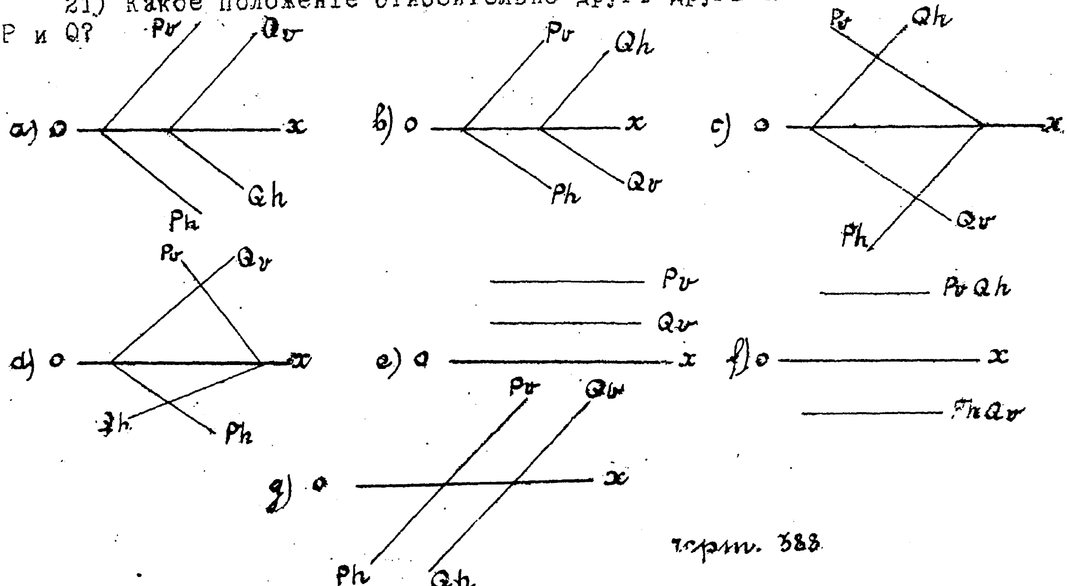
черт. 386



черт. 387

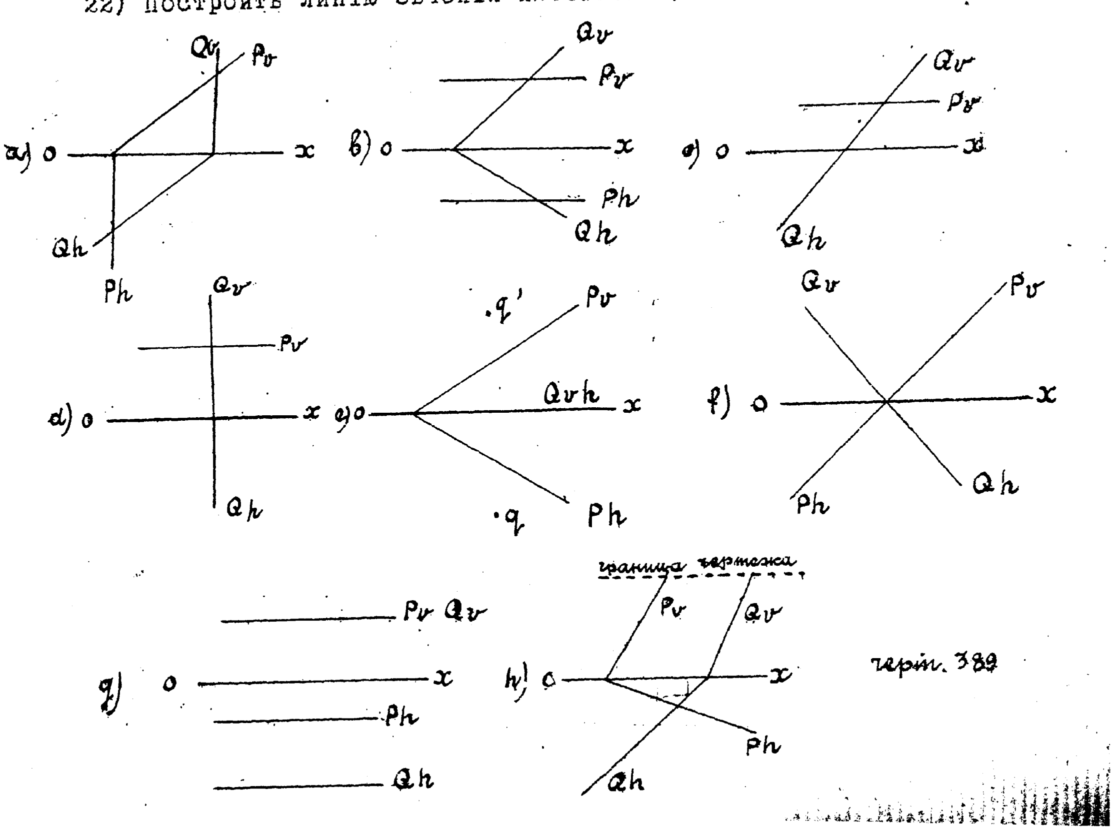
Двѣ плоскости.

21) Какое положеніе относительно другъ друга занимаютъ плоскости P и Q?



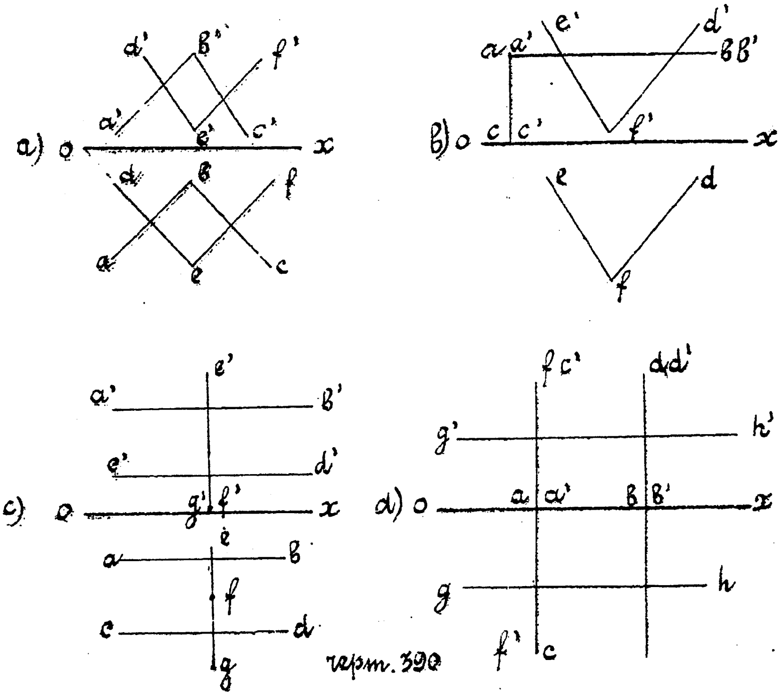
черт. 388

22) Построить линію сѣченія плоскостей, заданныхъ слѣдами.



черт. 389

23) Построить линію сѣченія плоскостей, заданныхъ каждая двумя пересѣкающимися или параллельными линіями (для рѣшенія задачи найти сначала слѣды этихъ плоскостей).

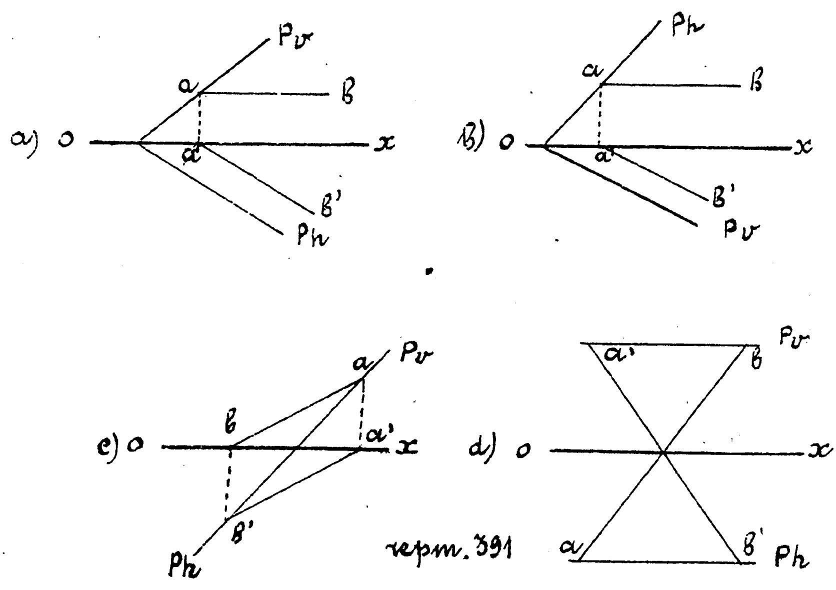


черт. 390

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ.

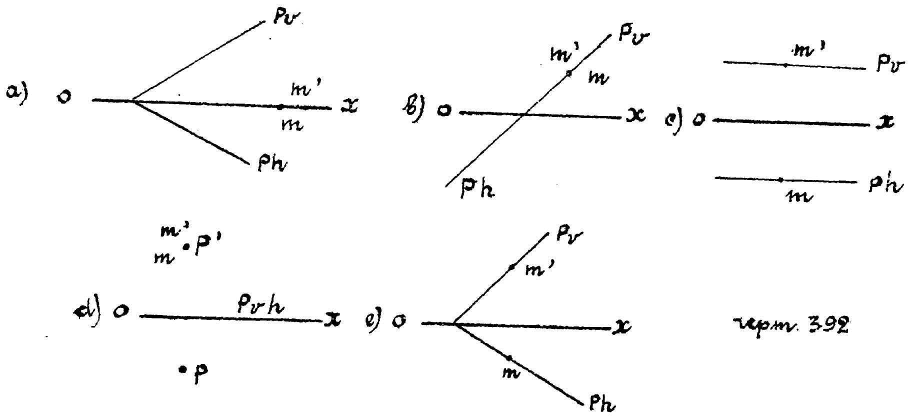
а) *Плоскость задана слѣдами.*

24) Лежитъ ли прямая АВ въ плоскости Р?



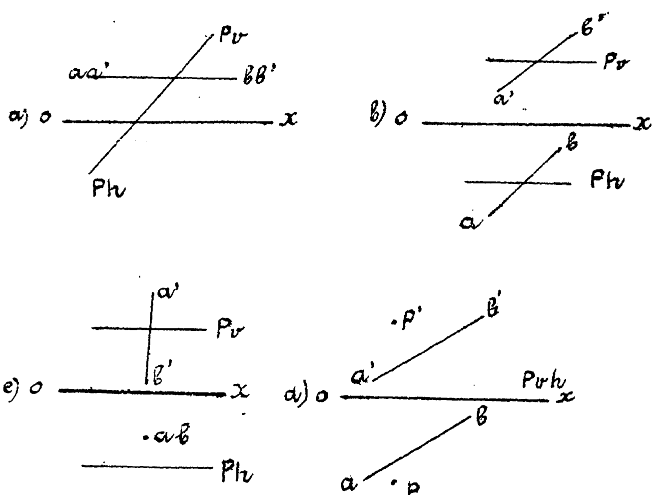
черт. 391

25) Провести черезъ точку М, лежащую внѣ плоскости Р, прямую, параллельную Р.



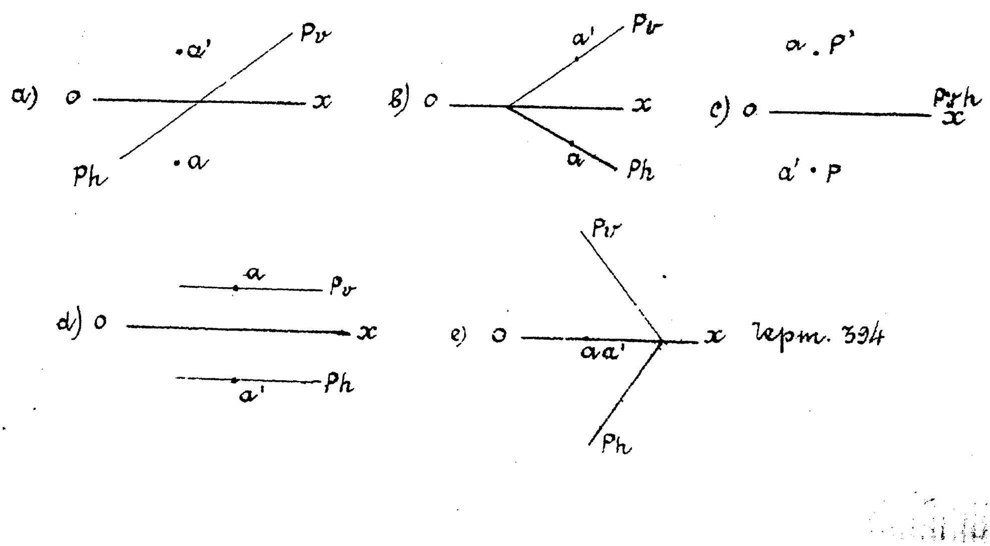
черт. 392

26) Найти точку пересѣченія прямой AB съ плоскостью P.



черт. 393

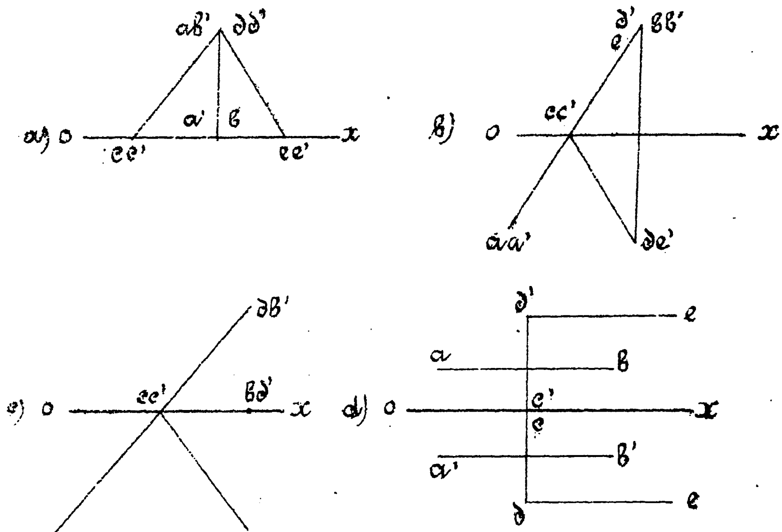
27) Опустить изъ точки A, лежащей внѣ плоскости P перпендикуляръ на эту плоскость.



черт. 394

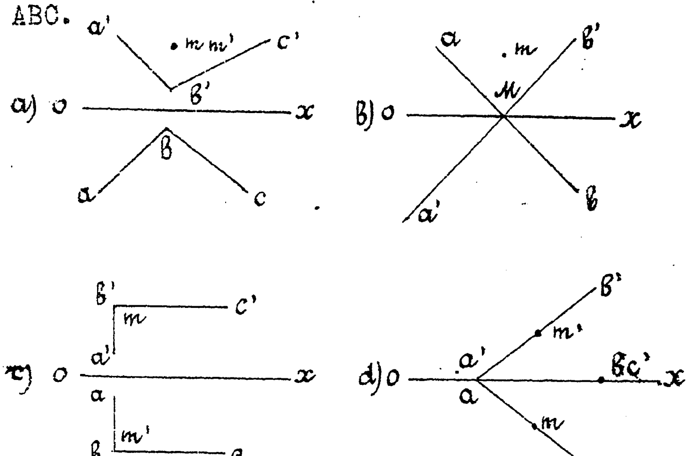
b) Плоскость задана двумя линіями.

28) Лежитъ ли прямая AB въ плоскости DEC?



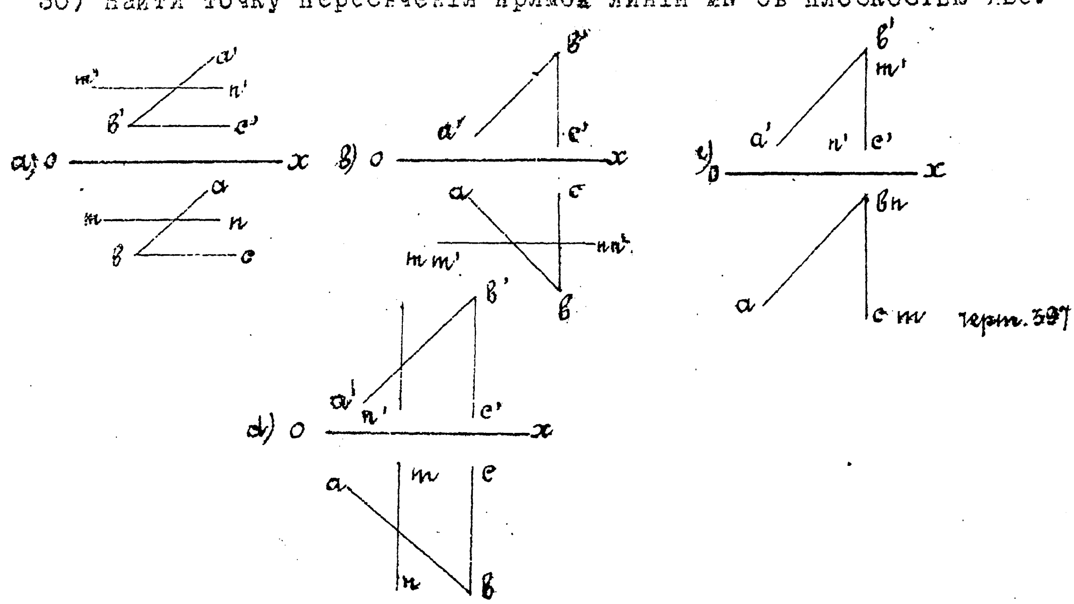
черт. 395

29) Провести черезъ точку М, лежащую внѣ плоскости ABC, прямую, параллельную ABC.



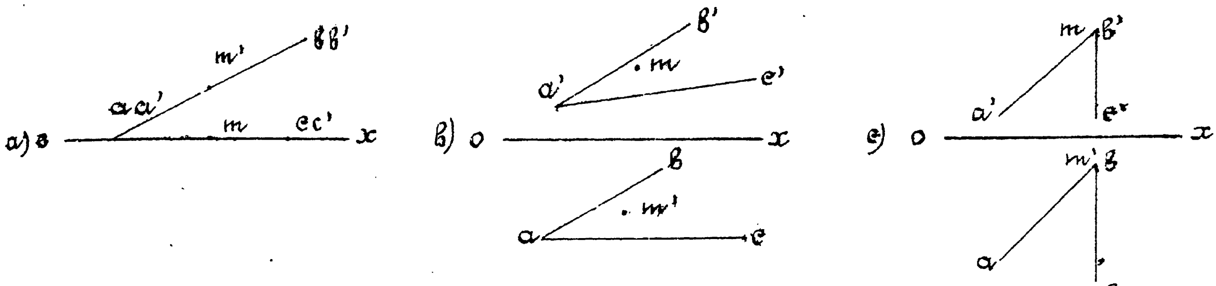
черт. 396

30) Найти точку пересѣченія прямой линіи MN съ плоскостью ABC.



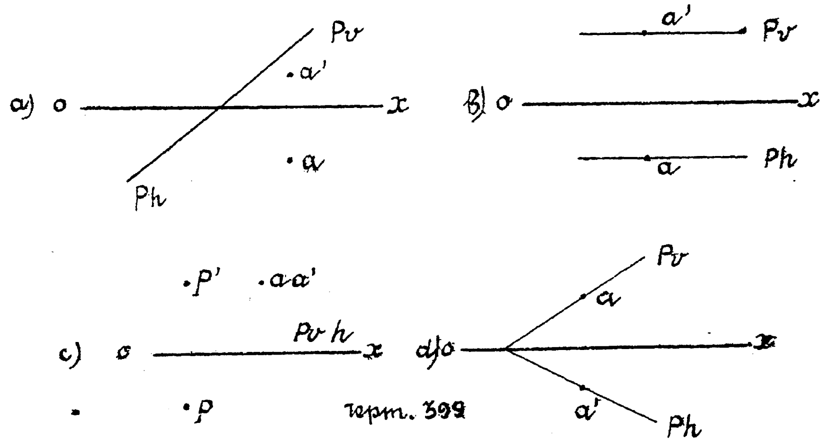
черт. 397

31) Опустить изъ точки M, лежащей внѣ плоскости ABC, перпендикуляръ на эту плоскость.



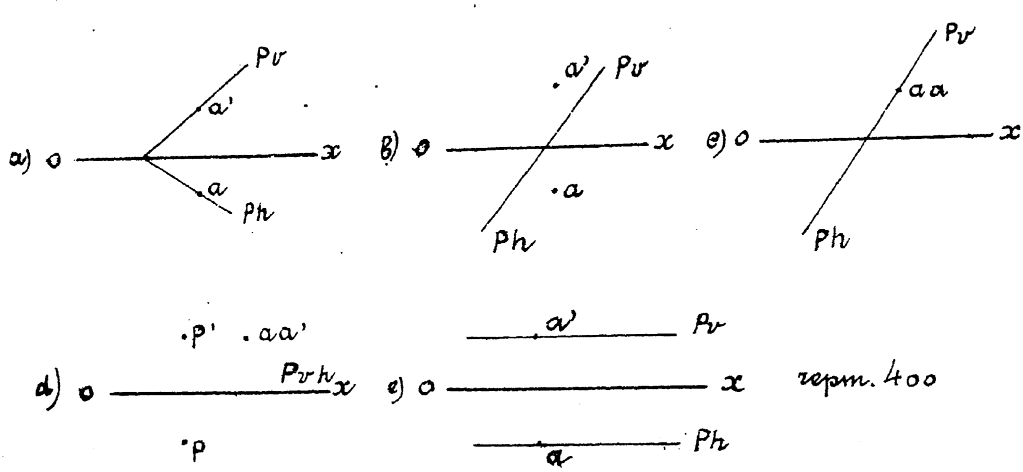
черт. 398

32) Черезъ точку A, лежащую внѣ плоскости P, провести плоскость, ей параллельную.



черт. 399

33) Черезъ точку A, лежащую внѣ плоскости P провести плоскость, перпендикулярную къ P.

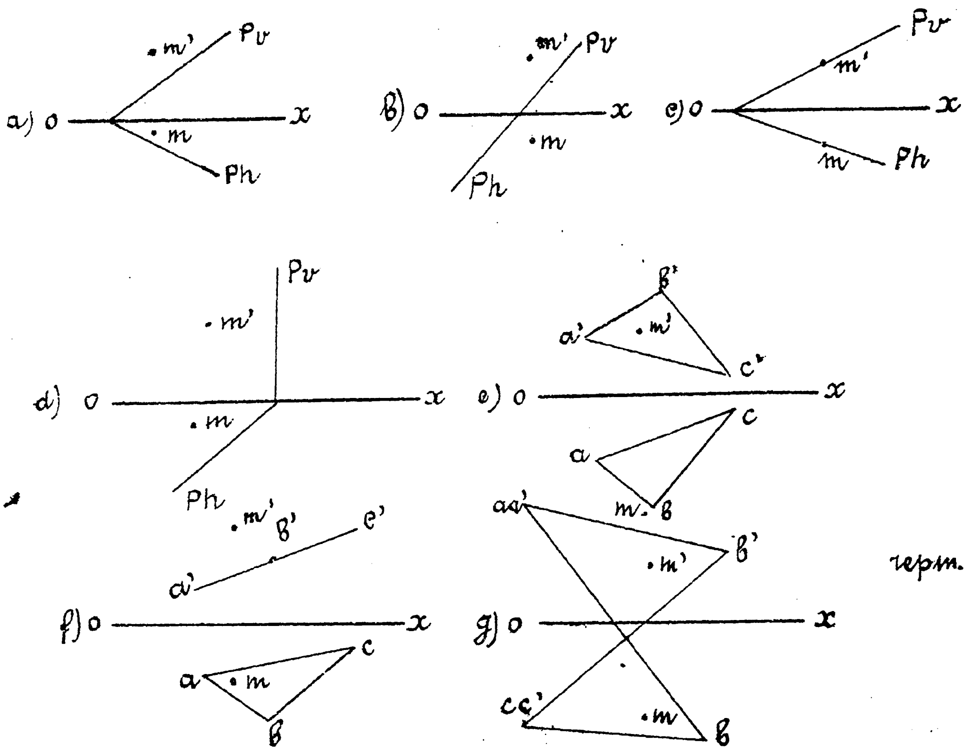


черт. 400

34) Рѣшить задачу N 23 не находя слѣдовъ плоскостей

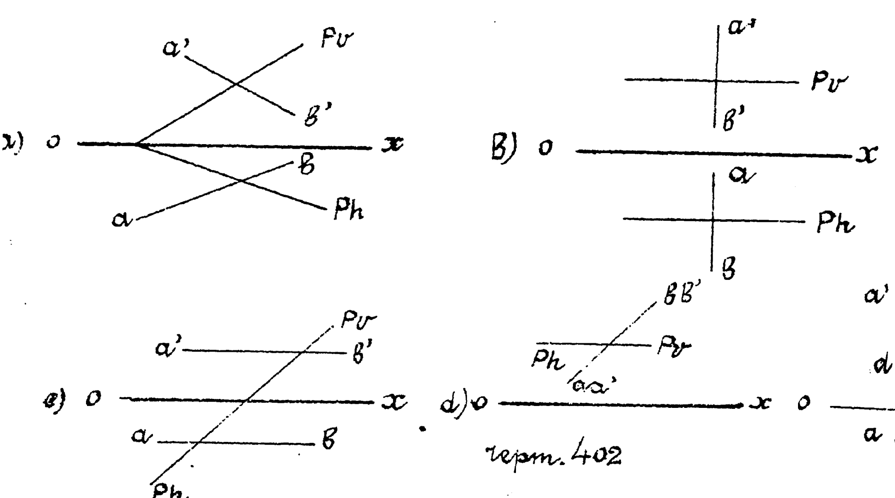
Опредѣленіе видимыхъ частей.

35) Видима ли точка М относительно плоскостей, заданныхъ слѣдами (случаи a – d) или двумя линіями (случаи e – g).

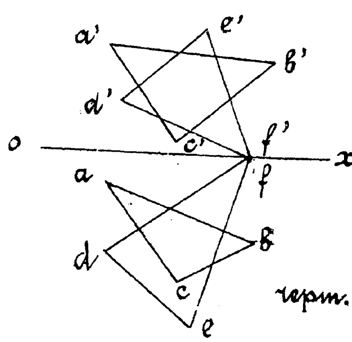


черт. 401

36) Опредѣлить видимыя части линій АВ.



черт. 402

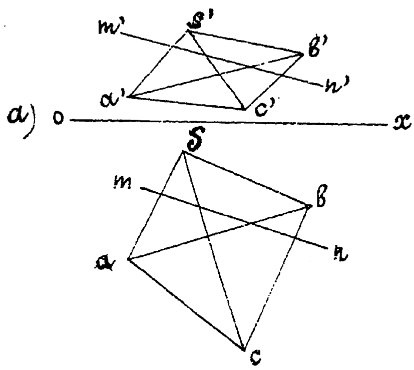


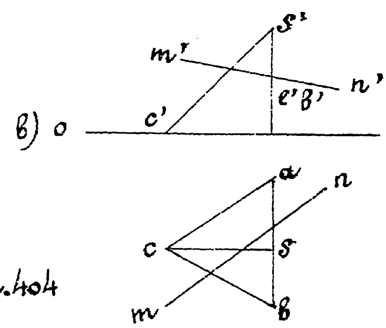
черт. 403

37) Опредѣлить видимыя части пересѣкающихся треугольниковъ АВС и DEF.

Пересѣченіе многогранниковъ и тѣни и развертки поверхностей.

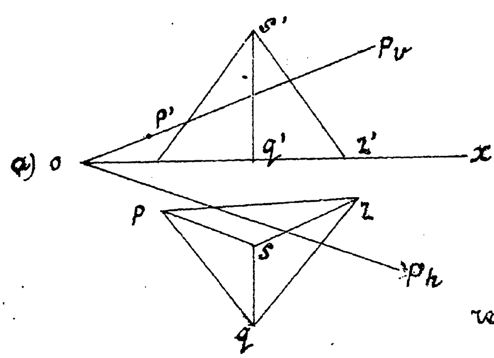
38) Построить точки пересѣченія прямой MN съ гранями пирамиды SABC и опредѣлить видимыя части пирамиды и линіи MN.

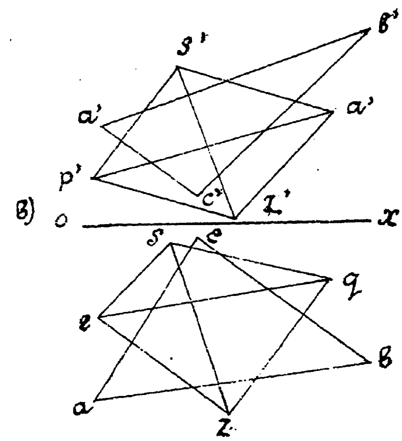




черт. 404

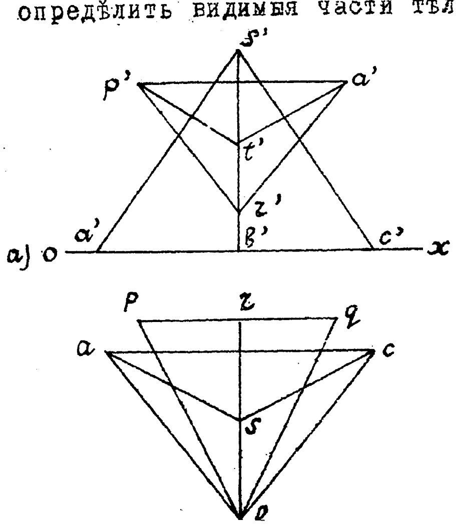
39) Построить линіи сѣченія плоскости P (случай a) или плоскости ABC (случай b) съ прямыми пирамиды SPQR и опредѣлить видимыя части пересѣкающихся фигуръ.

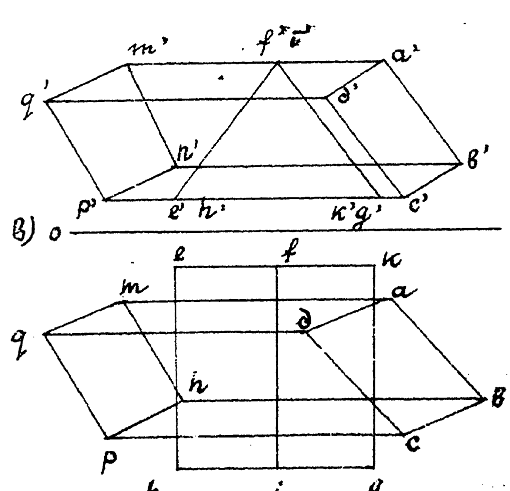


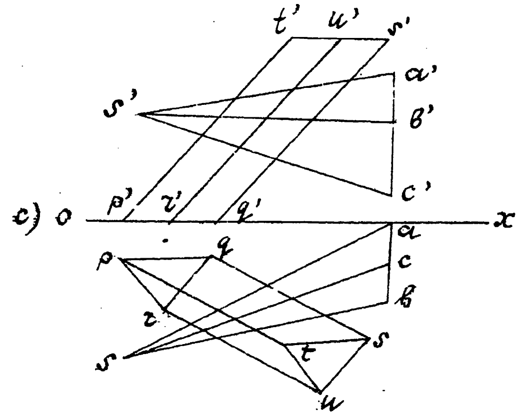


черт. 405

40) Построить линіи сѣченія пирамиды съ пирамидою (случай a), призмы съ призмою (случай b) и пирамиды съ призмою (случай c), и опредѣлить видимыя части тѣлъ.

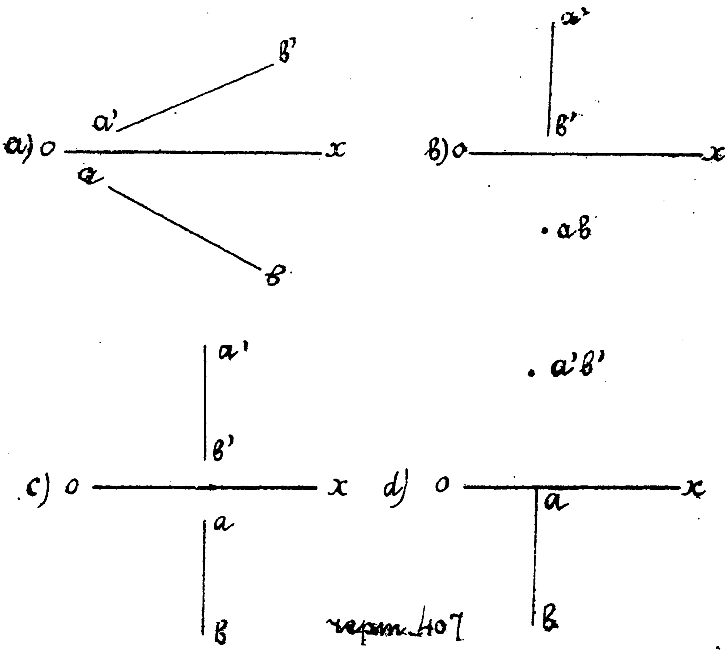






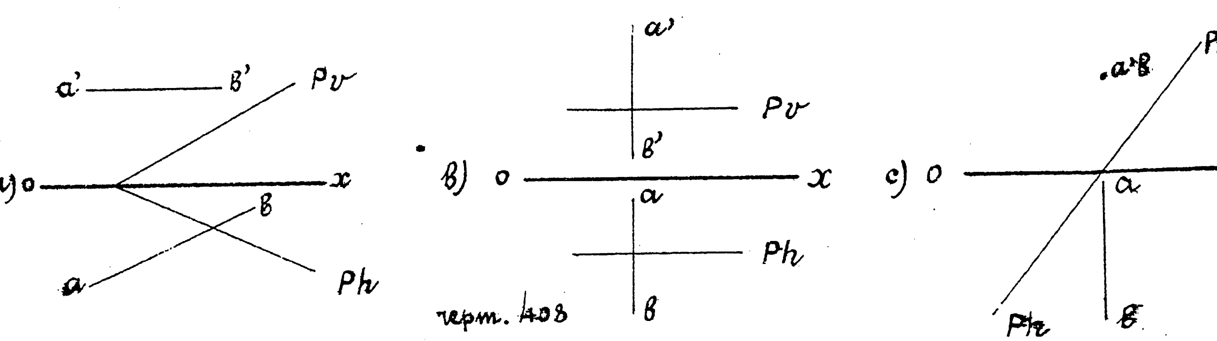
черт. 406

41) Построить тёнь отъ прямой линіи АВ на V и Н.



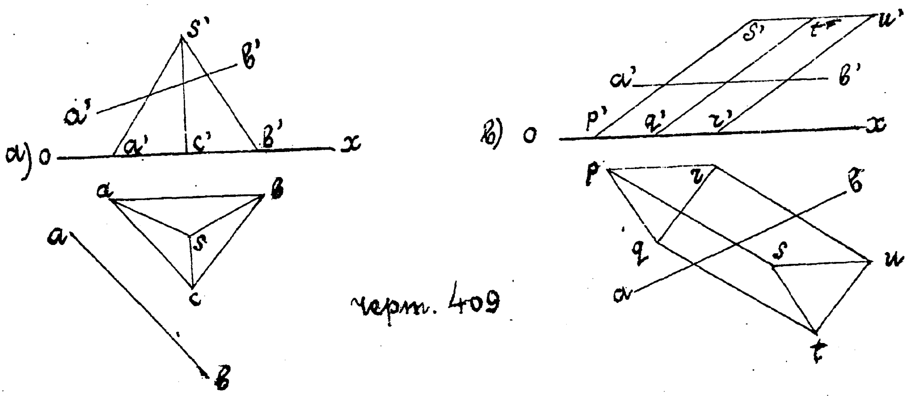
черт. 407

42) Построить тёнь отъ прямой АВ на плоскости V, Н и Р.



черт. 408

43) Построить тёнь отъ прямой АВ на плоскости V и Н и на поверхность пирамиды (случай а) и призмы (случай b).



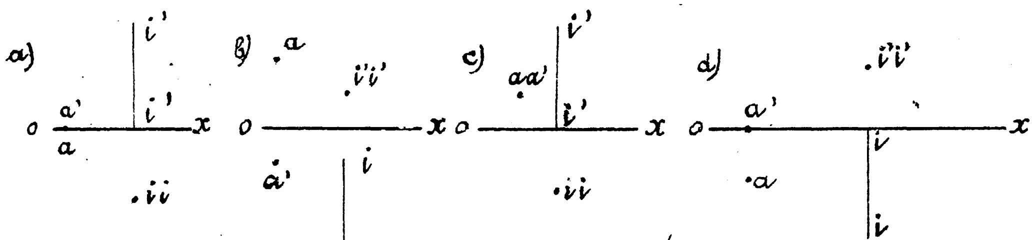
черт. 409

44) Построить собственныя и падающія тѣни для примѣровъ задачи NN 38 - 40.

45) Построить развертки поверхностей тѣлъ заданныхъ въ задачахъ NN 38 - 40 и показать на разверткахъ линій сѣченія.

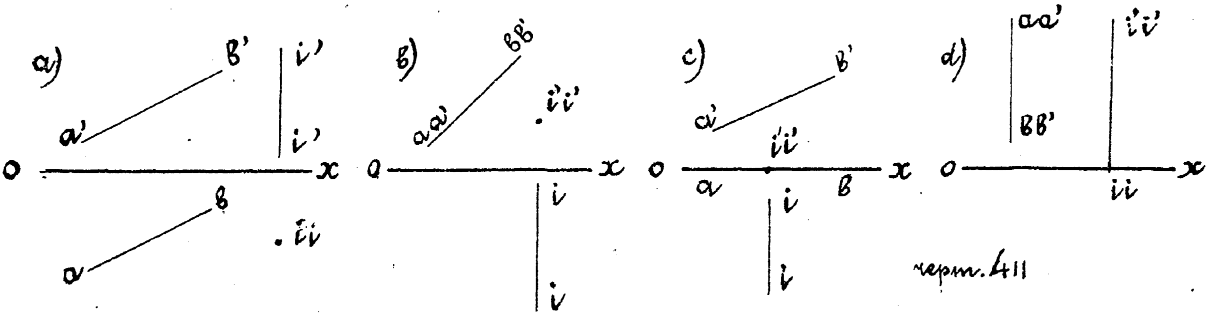
Вращеніе вокругъ одной оси перпендикулярной къ H или къ V.

46) Повернуть точку A вокругъ оси II на уголъ α.



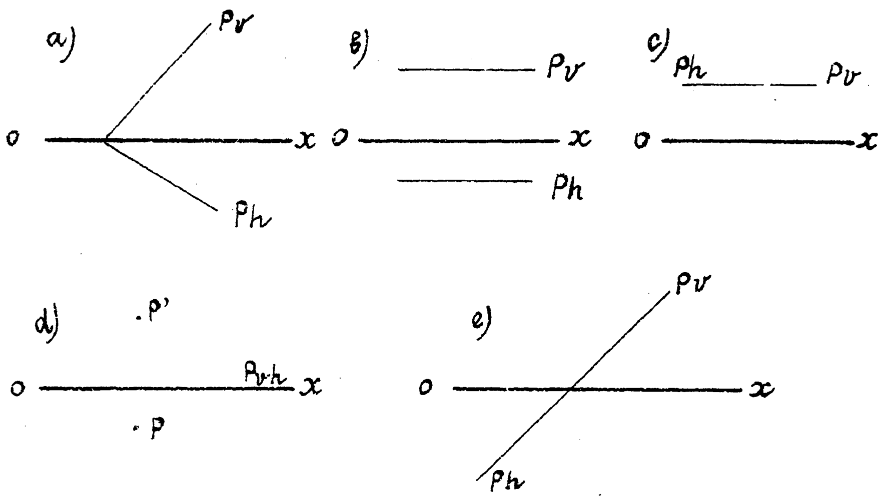
черт. 410

47) Повернуть прямую AB вокругъ оси II такъ, чтобы она стала параллельной H (или V въ зависимости отъ положенія оси II).



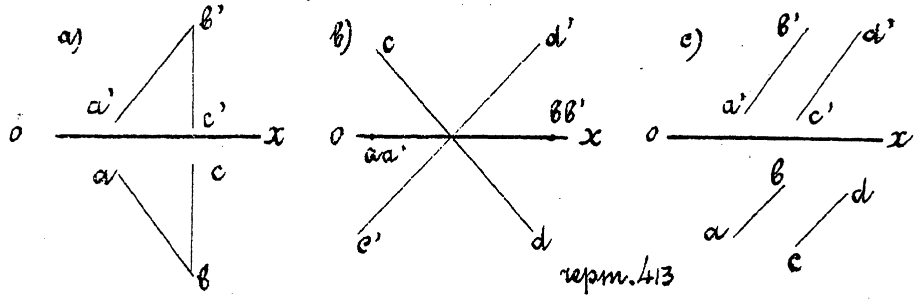
черт. 411

48) Повернуть плоскость P, заданную слѣдами, такъ, чтобы она стала перпендикулярной къ H или къ V.



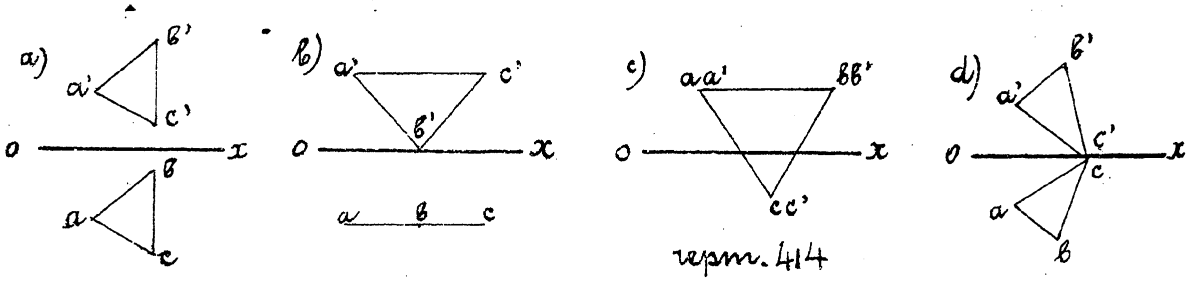
черт. 412

49) Повернуть плоскость, заданную двумя линіями (пересѣкающимися или параллельными) въ положеніе, перпендикулярное къ V или къ H.



черт. 413

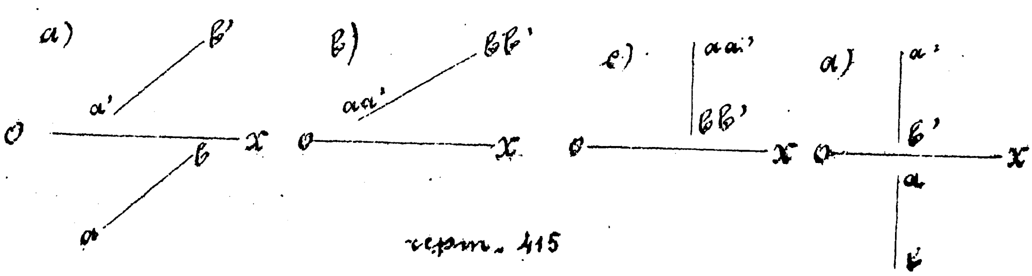
50) Повернуть треугольникъ ABC такъ, чтобы онъ спроектировался на V въ прямую линію.



черт. 414

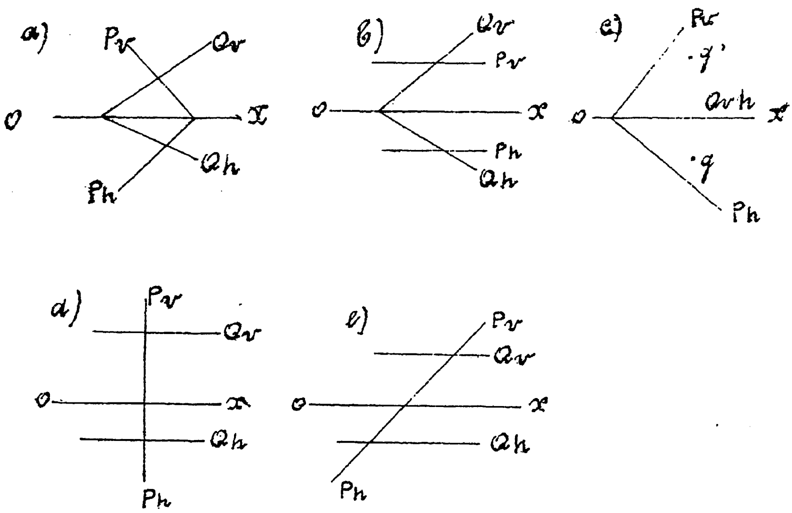
Послѣдовательное вращеніе вокругъ двухъ осей, перпендикулярныхъ къ H и къ V.

51) Повернуть прямую AB такъ, чтобы она стала перпендикулярной a) къ H в) къ V.



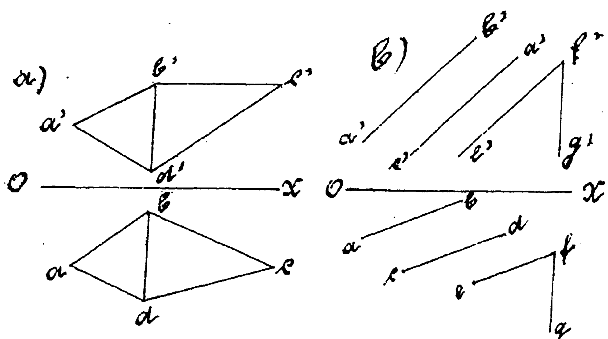
черт. 415

52) Опредѣлить уголъ между двумя плоскостями, заданными слѣдами.



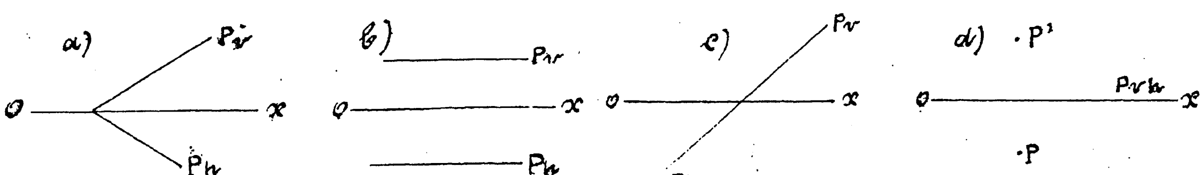
черт. 416

53) Опредѣлить уголъ между двумя плоскостями заданными каждая двумя пересѣкающимися или параллельными прямыми.



черт. 417

54) Построить: α) кубъ, β) правильную трехгранную пирамиду γ) правильный октаедръ стоящіе на плоскости P. (Беличины реберъ тѣлъ даны).



черт. 418

55) Опредѣлить въ треугольникѣ ABC a) центръ круга вписаннаго b) центръ круга описаннаго (чертежи заданы N 50).

Вращеніе около осей, параллельныхъ H или V, но не перпендикулярныхъ ни къ H, ни къ V.

56) Повернуть треугольникъ ABC въ положеніе α) параллельное H

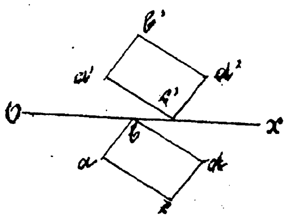
или β) параллельное V (чертежи задачи N 50).

57). Рѣшить задачу N 55.

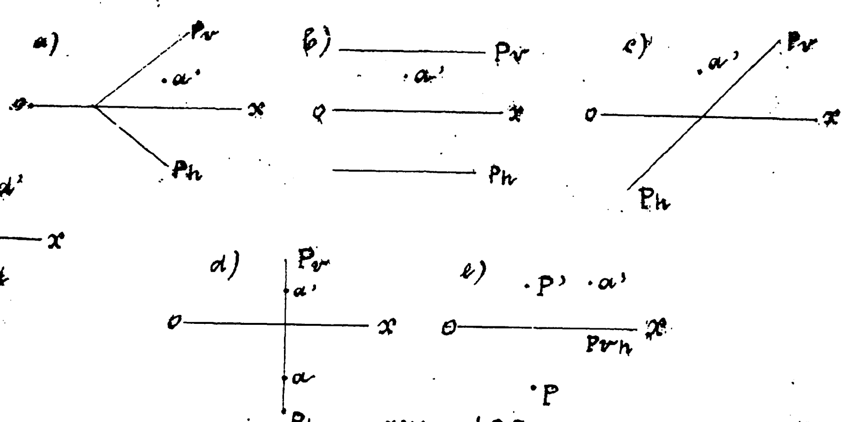
58) Опредѣлить истинную фигуру параллелограмма ABCD (черт. 419).

59) Совмѣстить плоскость P съ плоскостью α) H или β) V (чертежи задачи N 54).

60) Построить въ плоскости P правильный α) треугольникъ, β) квадратъ γ) пятиугольникъ δ) шестиугольникъ, предполагая, что центромъ фигуры должна быть точка A.



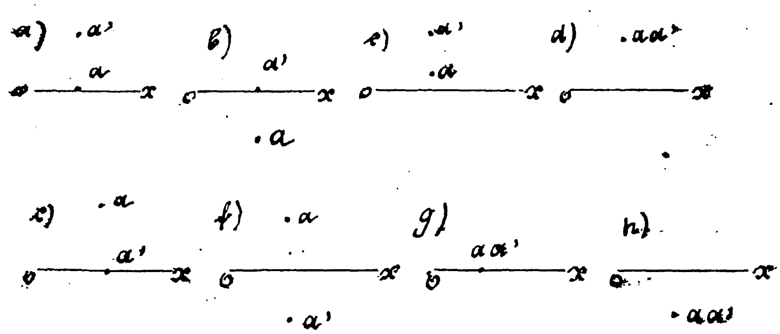
черт. 419



черт. 420

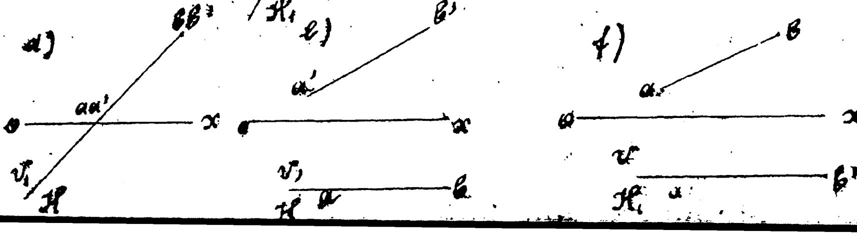
Перемѣна одной плоскости проекцій.

61) Построить проекціи точки A, перемѣнивъ α) вертикальную плоскость проекцій V или β) горизонтальную плоскость проекцій H.

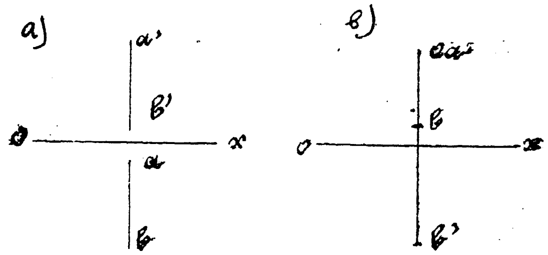


черт. 421

62) Построить проекціи прямой линіи AB въ новой системѣ проекцій $\frac{V}{H_1}$ (или $\frac{H}{V}$)

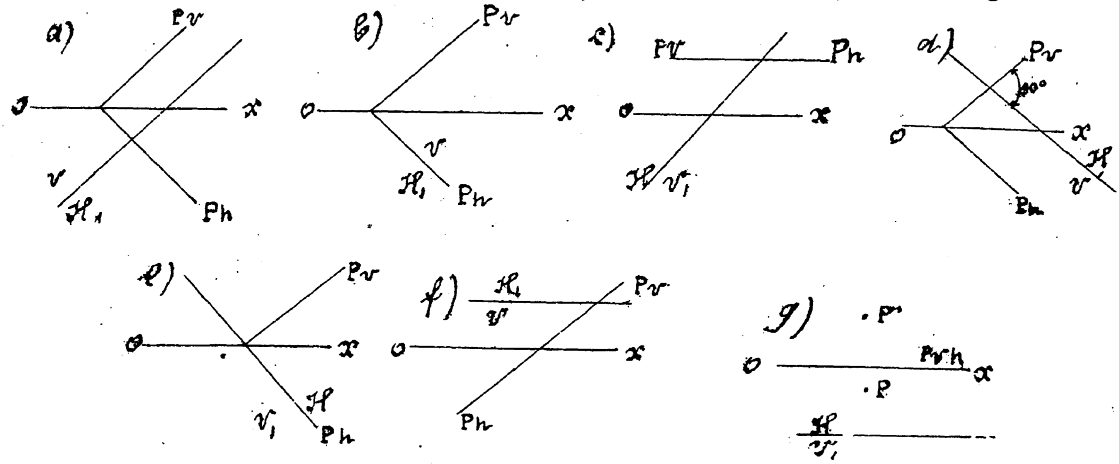


63) Опредѣлить слѣды профильной линіи.



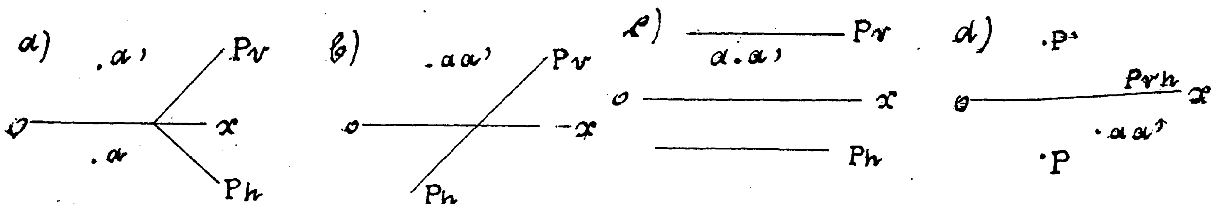
черт. 423

64) Построить слѣды плоскости P въ системѣ $\frac{V}{H_1}$ (или $\frac{H}{V_1}$)



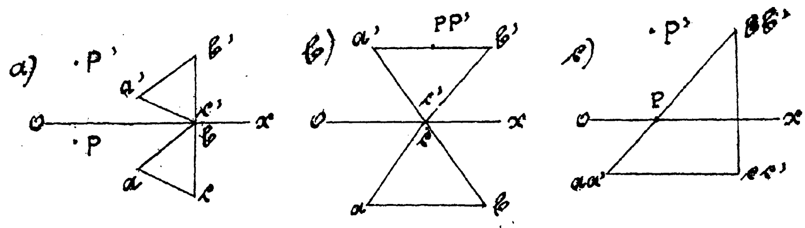
черт. 424

65) Опредѣлить разстояніе точки A до плоскости P.



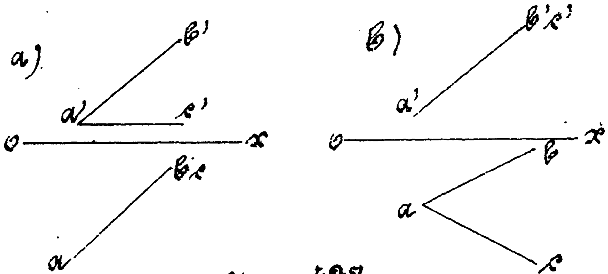
черт. 425

66) Опредѣлить разстояніе точки P до плоскости треугольника ABC.

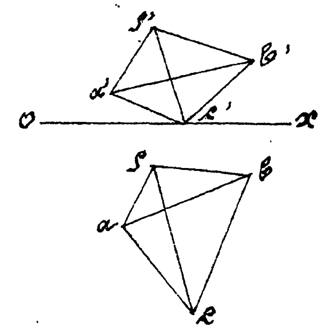


черт. 426

67) Опредѣлить уголъ между двумя пересѣкающимися линіями AB и AC.



черт. 427.

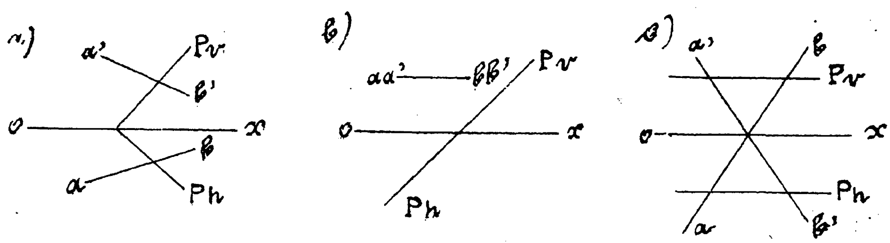


черт. 428

68) Перемѣнить плоскость проекцій такъ, чтобы высота пирамиды SABC спроектировалась безъ искаженія (черт. 428).

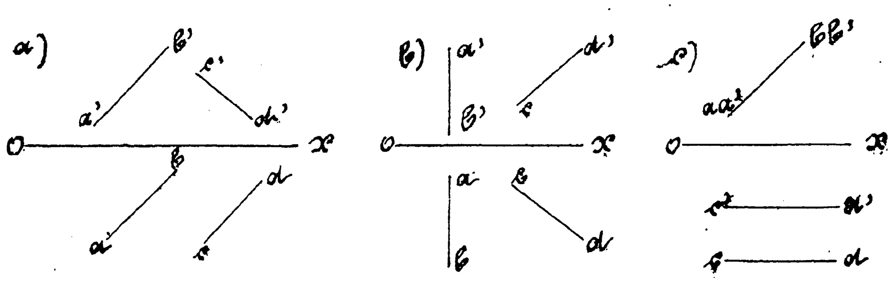
Перемѣна двухъ и болѣе плоскостей проекцій.

69) Опредѣлить уголъ между прямою AB и плоскостью P.



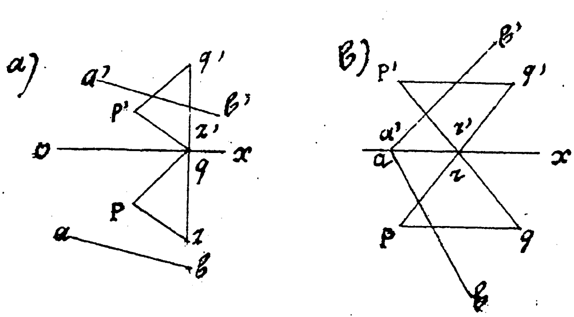
черт. 429

70) Опредѣлить уголъ между двумя линіями AB и CD



черт. 430

71) Опредѣлить уголъ между прямою AB и плоскостью треугольника PQR.

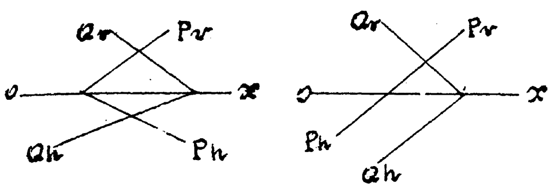


черт. 431

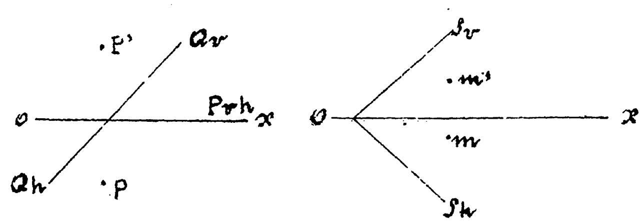
72) Опредѣлить уголъ между двумя плоскостями, заданными ихъ слѣдами. (Черт. 432).

73) Опредѣлить уголъ между двумя плоскостями, заданными каждая двумя пересѣкающимися или параллельными линіями (чертежи задачи N 23).

74) Провести черезъ точку A плоскость P, перпендикулярную къ плоскости Q и, принявъ P и Q за новыя плоскости проекцій построить въ этой системѣ a) проекціи точки M, b) слѣды плоскости S, c) слѣды старыхъ плоскостей проекцій V и H.



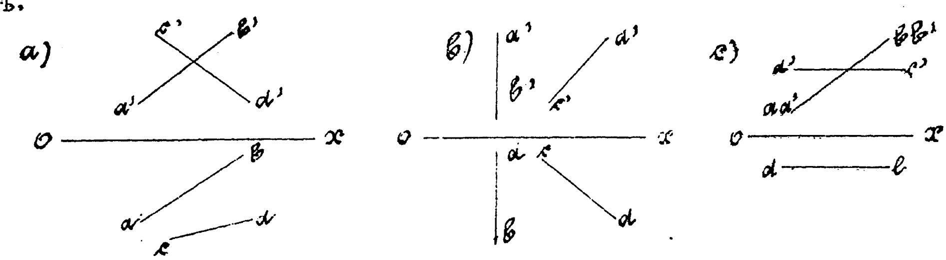
черт. 432



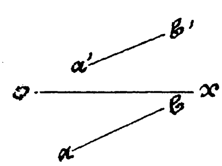
черт. 433

Задачи на всп предыдущіе отдѣлы.

75)Опредѣлить кратчайшее разстояніе между двумя не параллельными и не пересѣкающимися прямыми и найти на нихъ положеніе ближайшихъ точекъ.



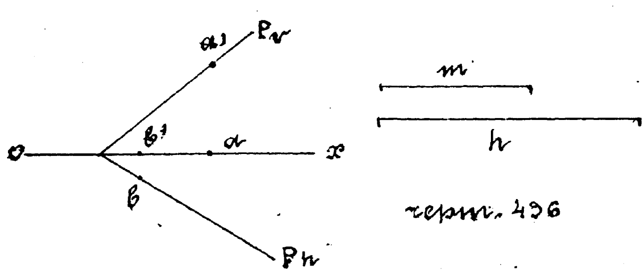
черт. 434



черт. 435

76) Построить ромбъ, діагональю котораго служилъ бы отрѣзокъ AB, плоскость ромба должна быть наклонена къ H подъ угломъ 45° и длина стороны его должна равняться удвоенной длинѣ AB (черт.435).

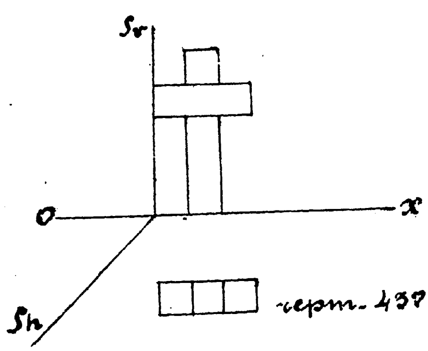
77) Построить пирамиду, которая стояла бы на плоскости P. Основаніемъ пирамиды долженъ быть правильный треугольникъ, длина сторонъ котораго равнялась бы данной величинѣ (m). Одна изъ сторонъ основанія должна проходить черезъ точку A, а другая - черезъ точку B. Высота пирамиды должна равняться величинѣ n (черт. 436).



черт. 436

78) Построить тѣни собственныя и падающія для данной фигуры, и отраженія ея и тѣней въ зеркалѣ S (чертежъ 437).

79) Даны три точки A, B и C... Опредѣлить ось послѣ поворота вокругъ которой, хотя бы и на разные углы точки расположились бы на одной вертикальной линіи.



черт. 437

---

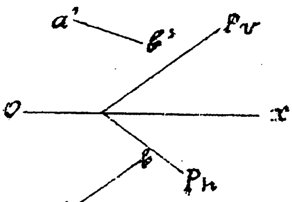
80) Опредѣлить ось, послѣ поворота вокругъ которой три данныя линіи очутились бы въ одной плоскости.

81) Опредѣлить ось, послѣ поворота вокругъ которой при данныхъ плоскости пересѣклись бы по горизонтальной линіи, расположенной на высотѣ h отъ H.

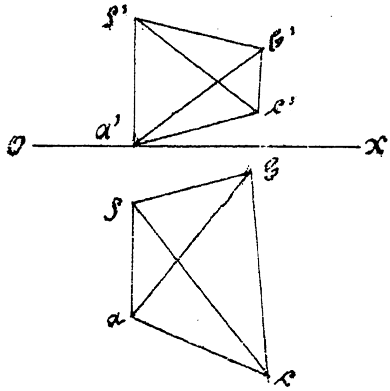
82) Опредѣлить оси, перпендикулярныя къ H или V, вращая вокругъ которыхъ прямую AB можно было бы совмѣстить съ плоскостью P. (Черт. 438).

83) Провести черезъ ребро AB пирамиды плоскость биссекторную угла при этомъ ребрѣ найти линію сѣченія поверхности пирамиды съ этой плоскостью и построить развертку части пирамиды между основаніемъ ея и линіей сѣченія.

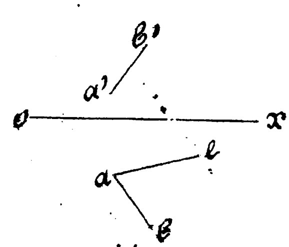
84) Построить проекціи квадрата, зная проекціи одной его стороны и направленіе горизонтальной проекціи другой, прилежащей его стороны.



черт. 438



черт. 439



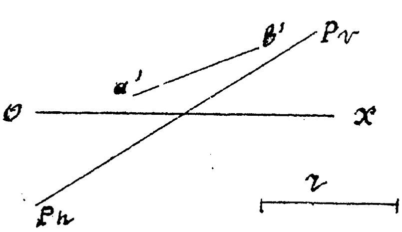
черт. 440

85) Черезъ четыре точки, не лежащія въ одной плоскости, провести четыре такихъ параллельныхъ прямыхъ, чтобы сѣченіе образованной ими призмы плоскостью было бы параллелограммомъ.

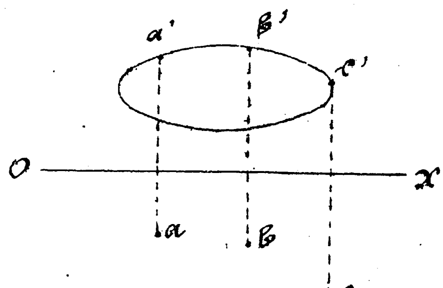
Кривыя линіи.

86) Даны: плоскость P, отрѣзокъ AB прямой, лежащей на этой плоскости и отрѣзокъ r. (Черт. 441).

Требуется построить на плоскости P эллипсъ, большая ось котораго совпадала бы съ AB, а малая ось - равнялась бы данному отрѣзку r.

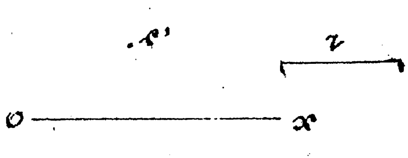


черт. 441



черт. 442

87) Дана вертикальная проекція плоской кривой и горизонтальныя проекціи трехъ ея точекъ. Построить горизонтальную проекцію кривой. (Черт. 442).



черт. 443

88) Даны: центръ C и радіусъ r круга. Построить проекціи круга при условіи, что плоскость его должна быть перпендикулярна къ линіи, прямоугольно проектирующей центръ C на ось OX (чертежъ 443).

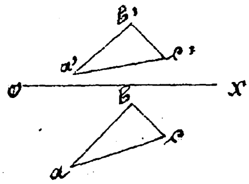
89) Построить проекціи круга данна-

го радіуса r. Плоскость круга должна быть параллельна OX, а кругъ долженъ касаться V и H.

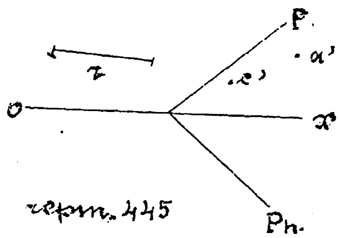
90) Данъ радіусъ круга и точка M его. Построить проекціи круга при условіи, что онъ долженъ касаться оси OX.

91) Описать окружность вокругъ треугольника ABC (черт. 444).

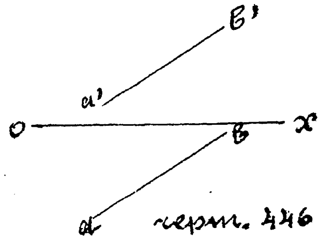
92) Дана плоскость P, въ которой лежитъ кругъ съ центромъ C и радіусомъ r. Въ плоскости P дана точка A. Провести черезъ точку A прямую, касательную къ кругу и найти точку касанія. (Черт. 445).



черт. 444



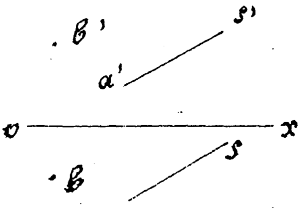
черт. 445



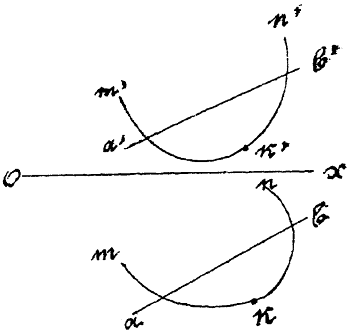
черт. 446

93) Даны: ось AB цилиндрической винтовой линіи, шагъ ея h = 5 см. и радіусъ ея r = 2 см. Требуется построить два оборота этой винтовой линіи, начавъ ее съ плоскости H. (Черт. 446).

94) Даны: ось AS конической винтовой линіи, вершина S этой линіи и начальная точка B ея. Требуется построить эту линію при условіи, что отъ B до S она дѣлаетъ два полныхъ оборота (чертежъ 447).



черт. 447



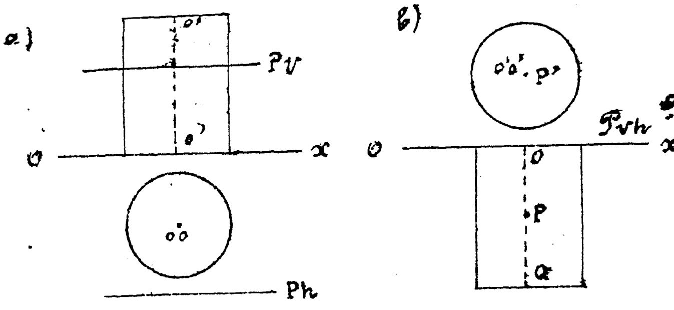
черт. 448

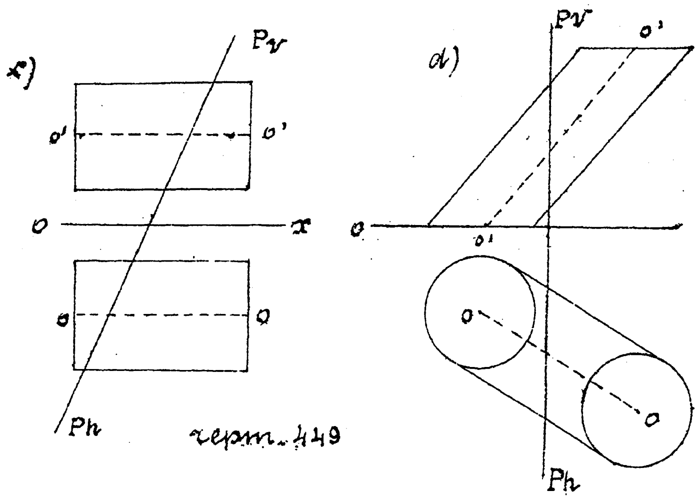
95) Построить между точками M и N одинъ оборотъ цилиндрической винтовой линіи и провести въ серединѣ K ея касательную и опредѣлить длину отрѣзка этой касательной между горизонтальнымъ слѣдомъ ея и точкою касанія. (Черт. 448).

Пересѣченіе кривыхъ поверхностей съ плоскостью.

96) Построить линію сѣченія плоскости P съ цилиндромъ и, совмѣстивъ P съ H, показать неискаженный видъ этой кривой. (Черт. 449).

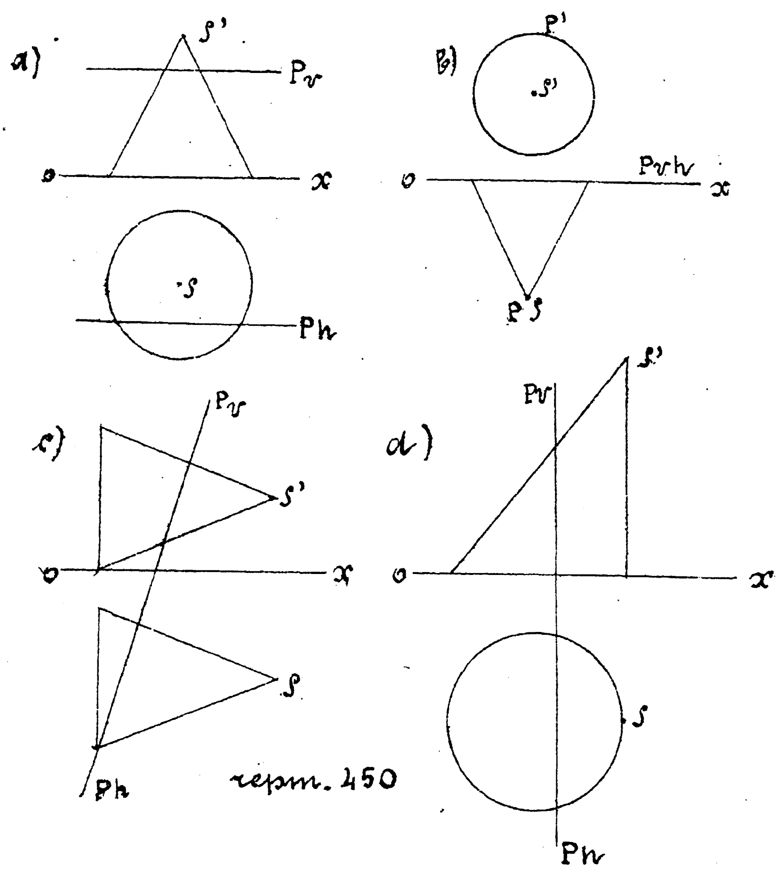
97) Построить линію сѣченія плоскости P съ конусомъ, и совмѣстив P съ V, показать неискаженный видъ этой кривой. (Черт. 450).





черт.449

98) Построить линію сѣченія плоскости Р съ разверзаемымъ гелисоидомъ и, совмѣстивъ Р съ Н, показать неискаженный видъ этой кривой. (Черт.451).

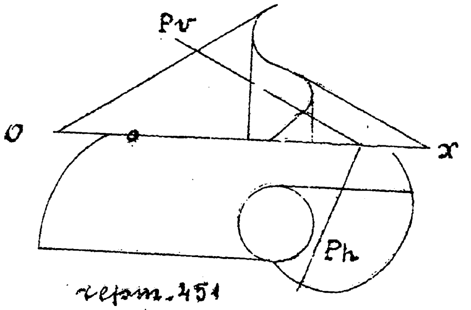


черт.450

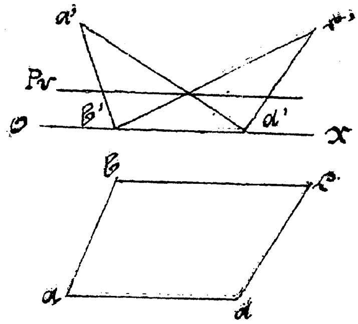
99) Построить линію сѣченія косой плоскости съ обыкновенной Р. (Черт.452).

100) Построить линію сѣченія цилиндроида съ плоскостью. Цилиндроидъ заданъ двумя направляющими кругами и плоскостью параллелизма Н. (Черт.453).

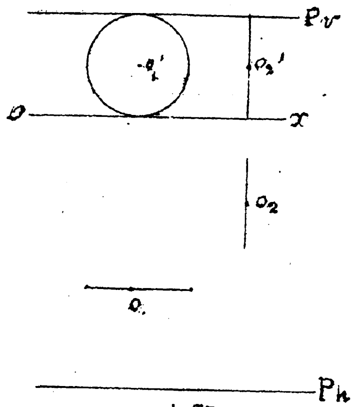
101) Построить линію сѣченія коноида съ плоскостью. Коноидъ заданъ цилиндрической винтовой линіей, ея осью и плоскостью параллелизма V. (Черт.454).



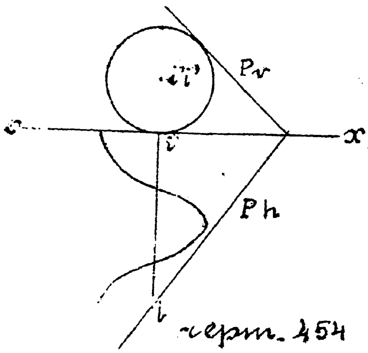
черт.451



черт.452



черт. 453

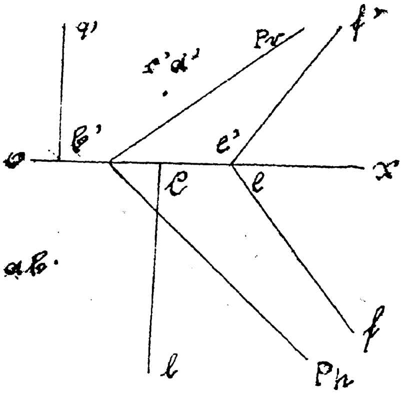


черт. 454

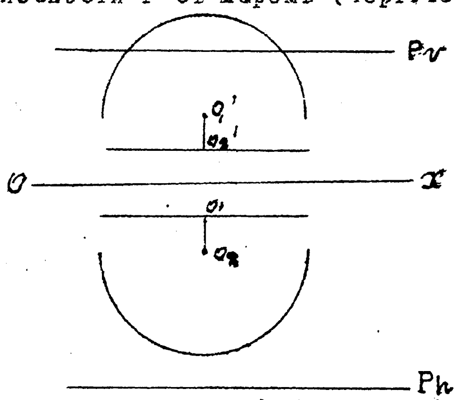
102) Построить линію сѣченія однополаго гиперболоида съ плоскость. (Чертежъ 455).

103) Построить линіе сѣченія косого цилиндра съ плоскостью. Косой цилиндръ заданъ направляющими: полукругомъ O_1, прямой линіей O_1O_2 и полукругомъ O_2 (черт.456).

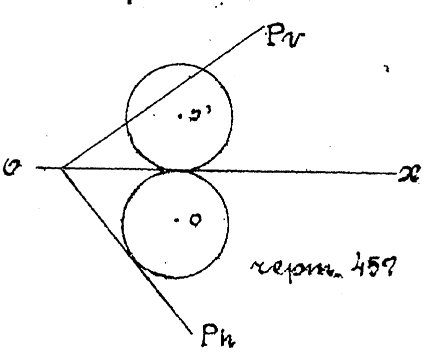
104) Построить линію сѣченія плоскости P съ шаромъ (черт.457).



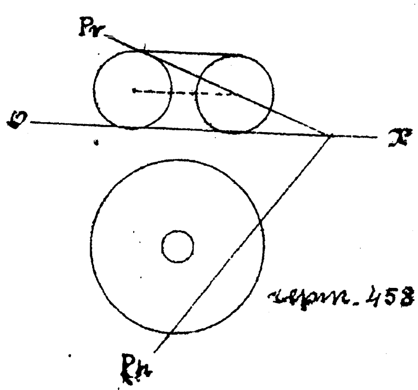
черт. 455



черт. 456



черт. 457

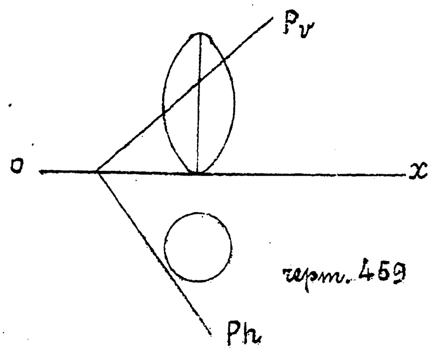


черт. 458

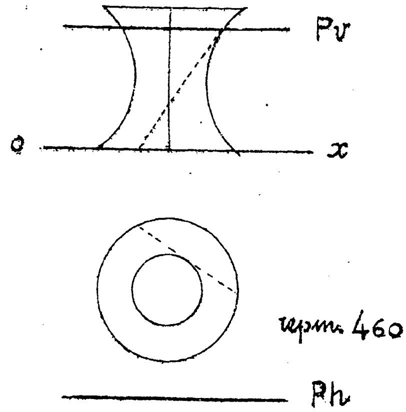
105) Построить линію сѣченія кольца съ плоскостью (черт.458).

106) Построить линію сѣченія эллипсоида вращенія съ плоскостью P. (Черт.459).

107) Построить линію сѣченія гиперболоида вращенія съ плоскостью P. (Черт.460).



черт.459



черт.460

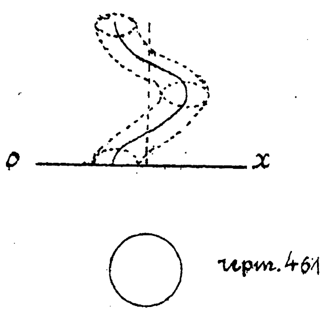
108) Построить линію сѣченія кривого цилиндра съ плоскостью P. Кривой цилиндръ образованъ движеніемъ центра круга по цилиндрической винтовой линіи, причемъ плоскость круга остается все время нормальной къ винтовой. (Черт.461).

Пересѣченіе кривыхъ плоскостей съ прямою линіей.

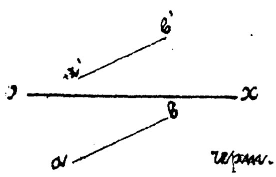
109) Найти точки пересѣченія прямой линіи съ поверхностями, заданными въ задачахъ NN 96 - 108. Прямая задача въ общемъ ея расположеніи на черт.462.

Пересѣченіе кривыхъ поверхностей между собою.

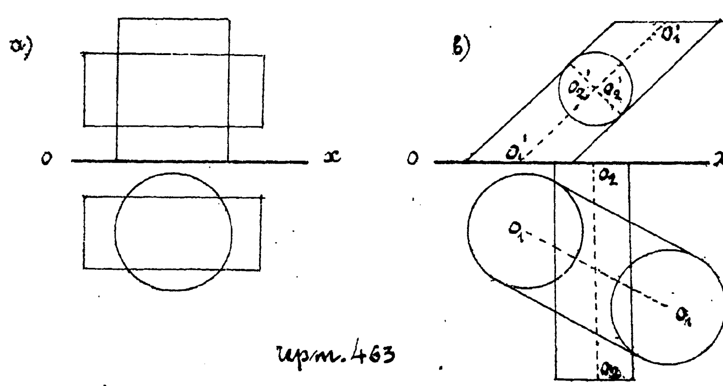
110) Построить линіи сѣченія двухъ цилиндровъ. (Черт.463).



черт.461



черт.462



черт.463

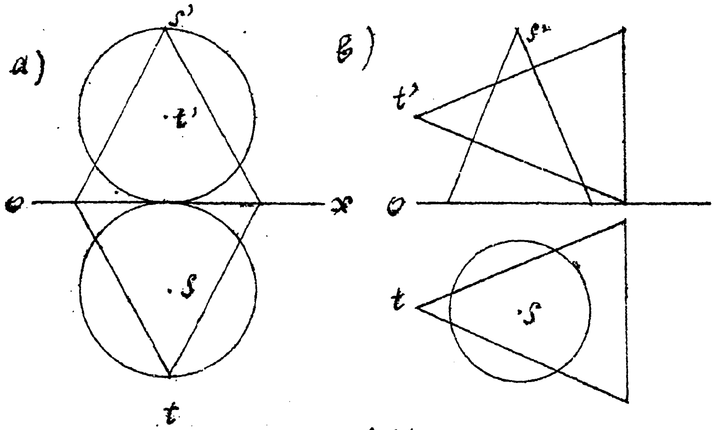
111) Построить линіи сѣченія двухъ конусовъ S и T. (Черт.464).

112) Построить линіи сѣченія конуса и цилиндра. (Черт.465).

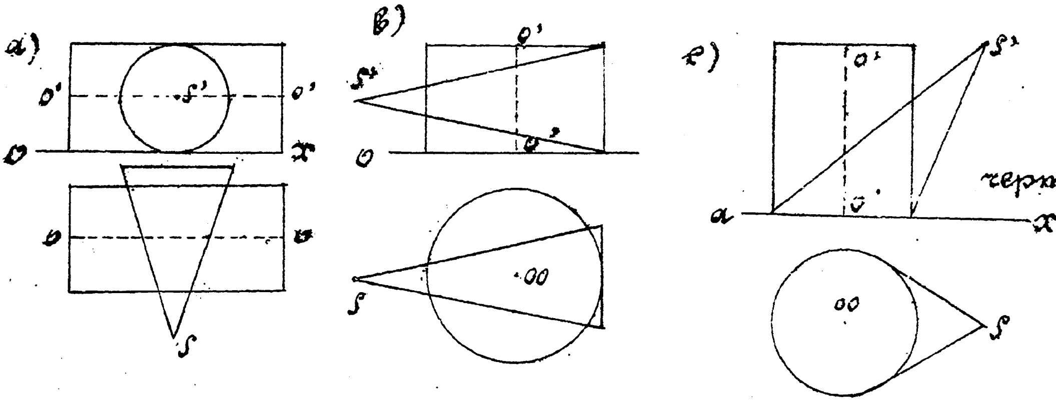
113) Построить линіи сѣченія a) шара съ цилиндромъ, b) шара съ конусомъ, c) шара съ шаромъ, d) шара съ эллипсоидомъ вращенія (чертежъ 466).

Пересѣченіе кривыхъ поверхностей съ кривою линіей.

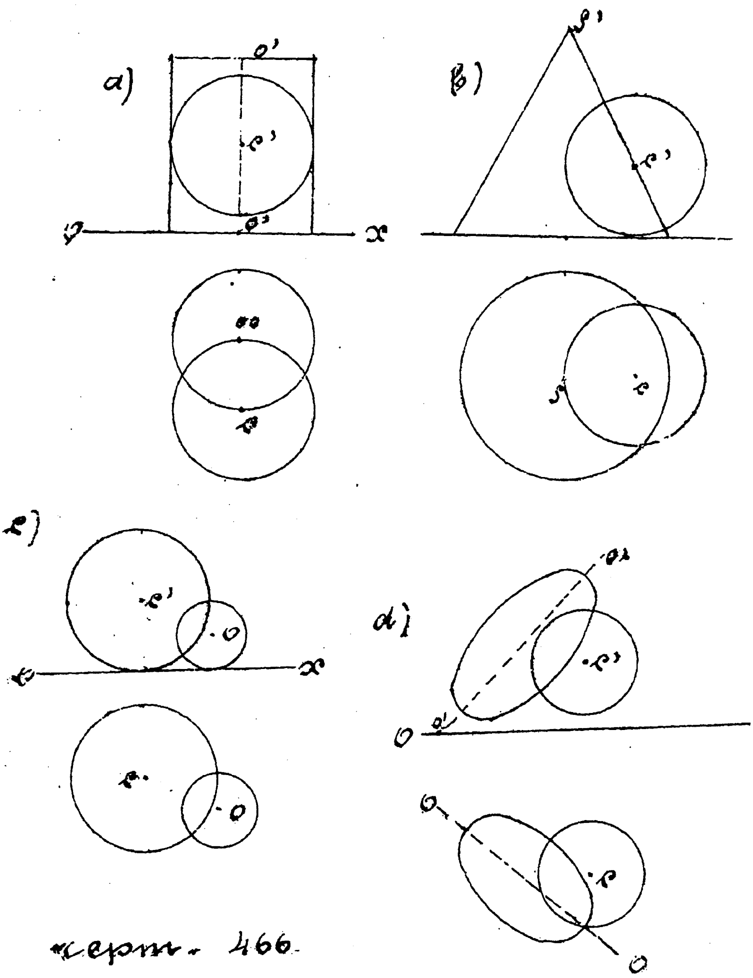
114) Постройть точки пересѣченія поверхностей, заданныхъ въ за-



черт. 464

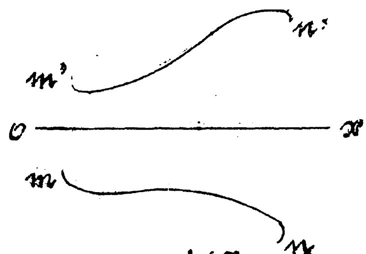


черт. 465



черт. 466

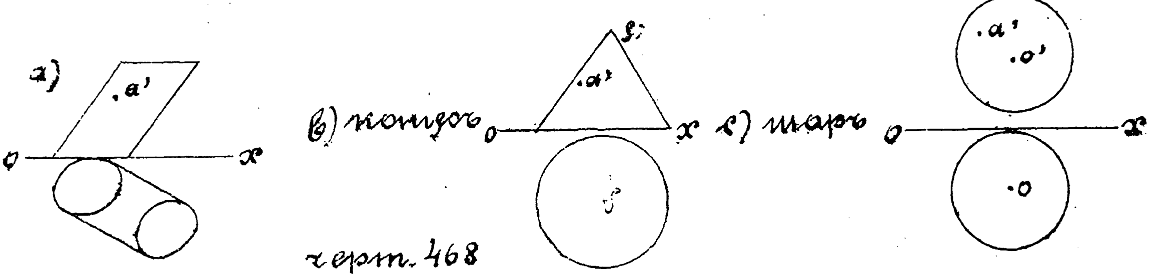
дачахъ NN 96 - 108 съ кривою линiей MN (черт.467).



черт. 467

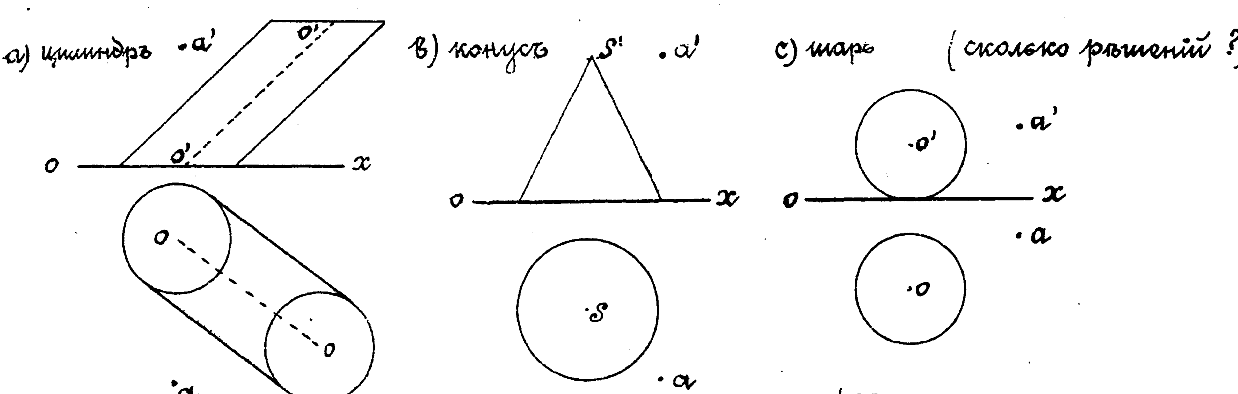
Построенiе плоскостей, касательныхъ къ кривымъ поверхностямъ и построенiе нормалей.

115) Черезъ точку A, данную на поверхности, провести плоскость, касательную къ этой поверхности. (Черт.468).



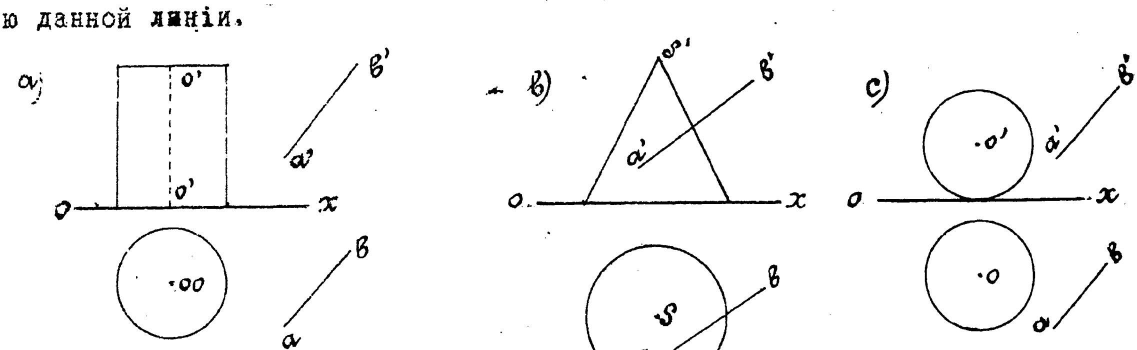
черт. 468

116) Черезъ точку A, данную внѣ поверхности провести плоскость, касательную къ этой поверхности.



черт. 469

117) ПРовести плоскость, касательную къ поверхности и параллельную данной линiи.

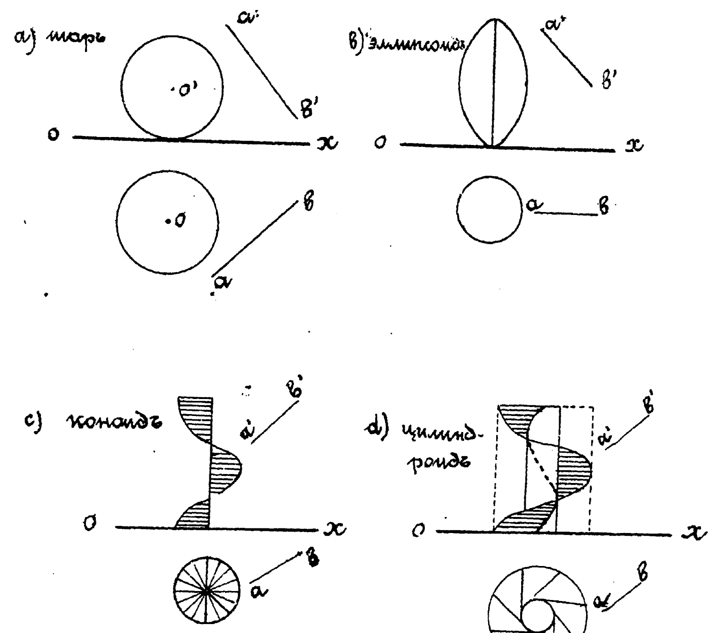


черт. 470

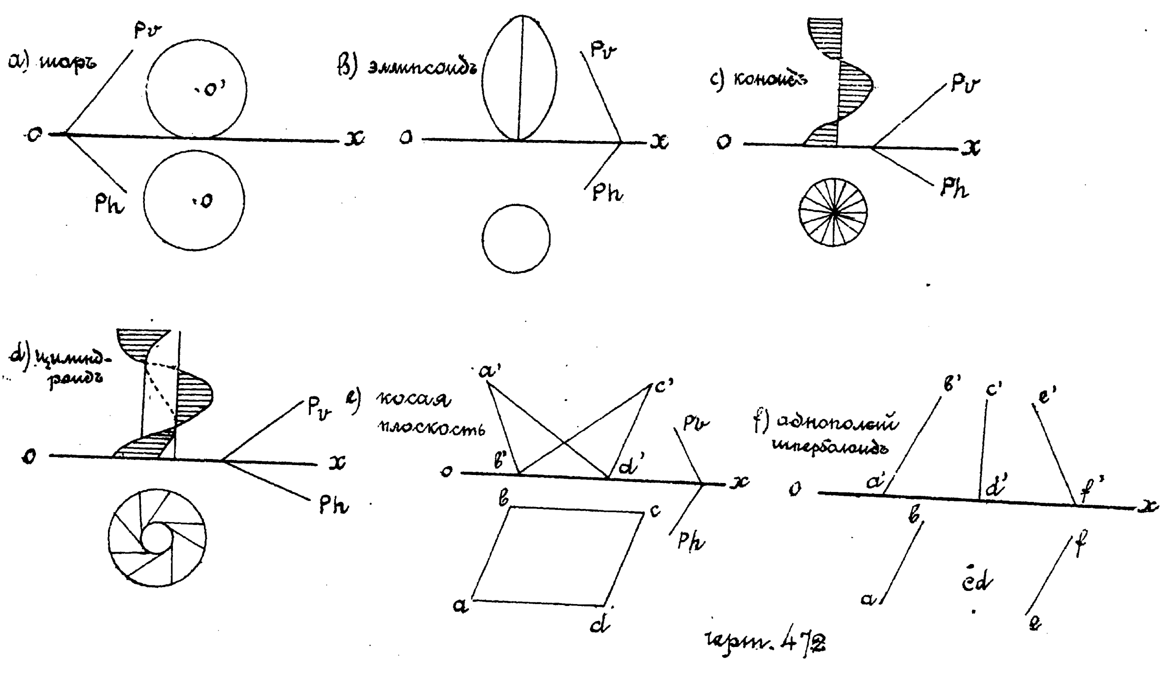
118) Провести плоскость, касательную къ поверхности и проходящую черезъ данную внѣшнюю линiю (черт.471).

119) Провести плоскость, касательную къ поверхности и параллельную плоскости (черт.472).

120) Найдя въ задачахъ NN 115 - 119 точку касанiя, провести нор-



черт. 471

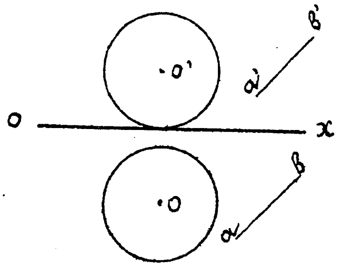


черт. 472

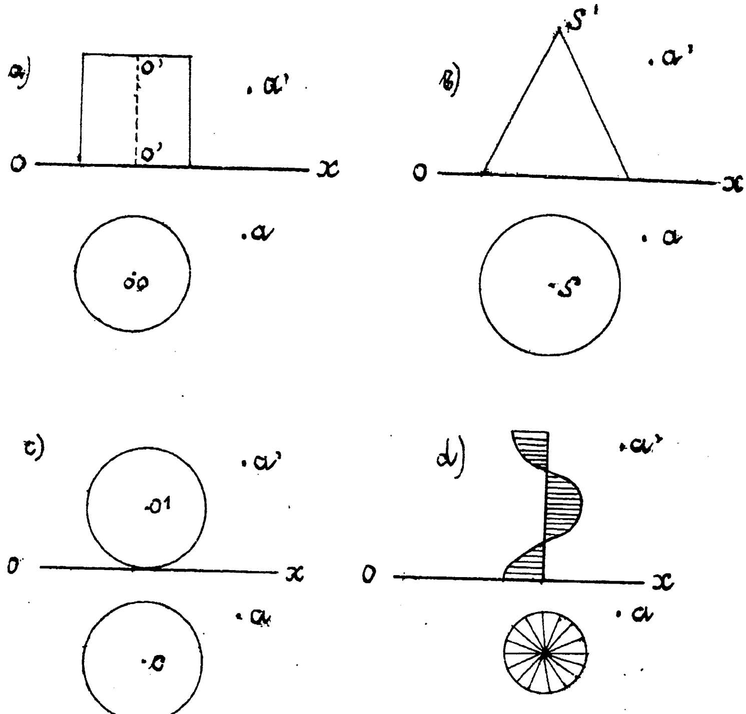
маль къ поверхности въ этой точкѣ.

121) Провести къ поверхности шара нормаль, параллельную данной прямой АВ (черт 473).

122) Черезъ данную точку А провести нормаль къ поверхности (чертежъ 474).



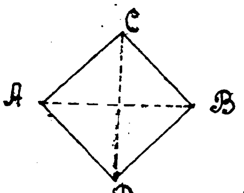
черт. 473



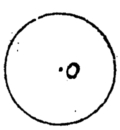
черт. 474

Развертка кривыхъ поверхностей.

123) Развернуть поверхности, заданныя въ задачахъ NN 96 - 98, 110 - 112 и показать на разверткахъ линiи сѣченiя.



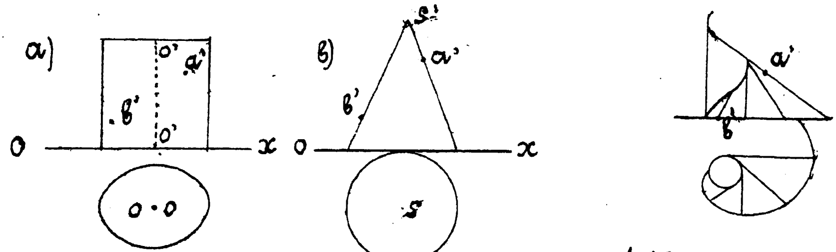
черт. 475



черт. 476

124) Данъ квадратъ. Свернуть его въ цилиндрическую поверхность такъ, чтобы дiагональ AB превратилась бы въ окружность горизонтальнаго сѣченiя цилиндра. Построить проекцiи этой поверхности, принимая CD $\perp$ H. (Черт. 475).

125) На вертикальный прямой круговой цилиндръ навернуть круговой вырѣзокъ, подобравъ радiусъ цилиндра такъ, чтобы вѣтви вырѣзка каснулись другъ друга. Построить проекцiи этого вырѣзка въ его навернутомъ положенiи. (Черт. 476).

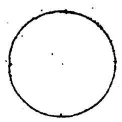


черт. 477

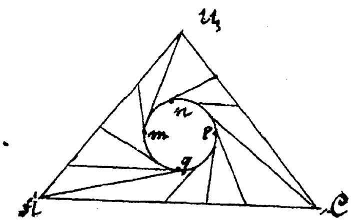
126) Построить между точками A и B поверхности геодезическую линiю.*) (Черт. 477).

---

*) *Геодезической называется такая линiя, которая на разверткѣ поверхности обращается въ прямую.*



черт. 478



черт. 479

127) Навернуть круговой вырѣзокъ на поверхность прямого кругового конуса такъ, чтобы обѣ вѣтви вырѣзка коснулись другъ другъ (черт. 478).

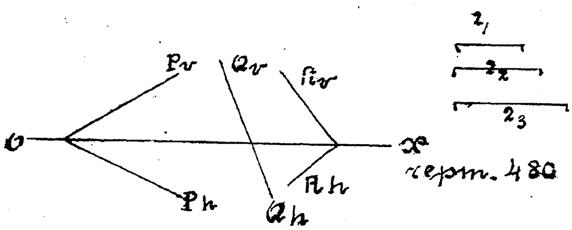
128) Предполагая, что треугольникъ ABC съ вырѣзаннымъ въ немъ кругомъ является разверткой части поверхности развертываемаго гелисоида между винтовой линіей и тремя линіями AB, BC и AC, начерченными на его поверхности, построивъ проекціи этой части, принимая во вниманіе, что кругъ mnpq - соотвѣтствуетъ $1^1/_2$ оборотамъ винтовой. (Черт. 479).

129) Построить приближенныя развертки a) шара, b) эллипсоида вращенія.

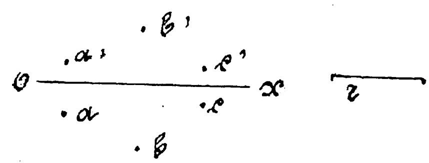
Геометрическія мѣста.

130) Даны три плоскости P, Q, R и три отрѣзка r_1, r_2, r_3. Опредѣлить точку, удаленную отъ данныхъ плоскостей на данныя разстоянія r_1, r_2, r_3. (Черт. 480).

131) Даны три точки A, B и C и отрѣзокъ r. Опредѣлить точку, удаленную отъ данныхъ точекъ на одинаковое разстояніе r. (Черт. 480 bis).

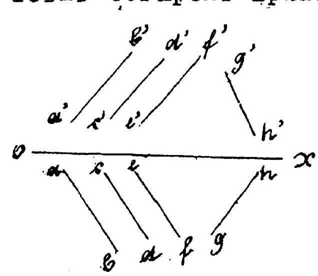


черт. 480

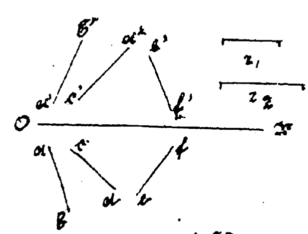


черт. 480 bis

132) Даны три параллельныя прямыя AB, CD и EF и четвертая GH, имъ не параллельная и ихъ не пересѣкающая. Опредѣлить точку, равноудаленную отъ всѣхъ четырехъ прямыхъ. (Черт. 481).



черт. 481



черт. 482

133) Даны три прямыя AB, CD и EF и два отрѣзка r_1 и r_2. Провести прямую, параллельную AB и удаленную отъ CD на разстояніе r_1 и отъ EF на разстояніе r_2. (Черт. 482).

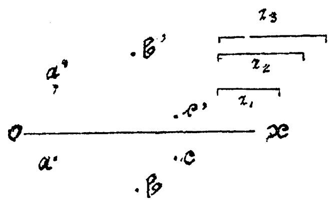
134) Даны точки A, B и C и отрѣзки r_1, r_2 и r_3. Провести прямую въ разстояніяхъ r_1, r_2, r_3 отъ точекъ A, B и C. (Черт. 483).

135) Даны: четыре прямыя линіи AB, CD, EF и GH. Провести пятую прямую, параллельную AB и равноудаленную отъ трехъ остальныхъ (черт. 484).

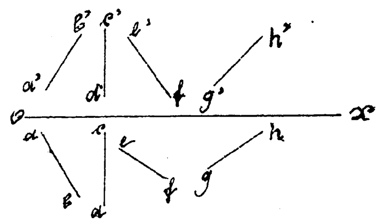
136) Даны: точка A, прямая BC, плоскость P и углы α и β. Провести черезъ точку A прямую, наклоненную къ P подъ угломъ α и къ BC подъ угломъ β. (Черт. 485).

137) Даны: точка A, прямая BC, отрѣзокъ r и уголъ α. Провести

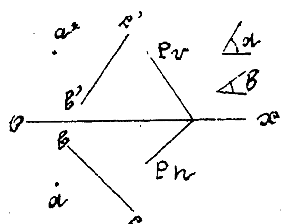
черезъ точку A прямую, удаленную отъ BC на разстояніе r и наклоненную къ BC подъ угломъ α. (Черт.486).



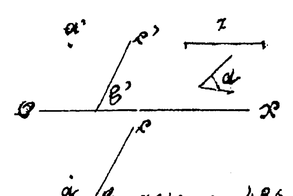
черт. 483



черт. 484



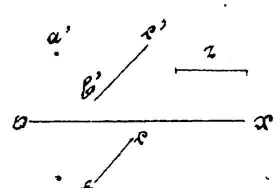
черт. 485



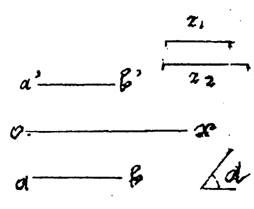
черт. 486

138) Даны: точка A, прямая BC и отрѣзокъ r. Провести черезъ прямую BC плоскость, удаленную отъ точки A на разстояніи r. (Черт.487).

139) Даны: прямая AB, два отрѣзка r_1 и r_2 и уголъ α. Провести двѣ плоскости, удаленныя отъ AB на разстояніяхъ r_1 и r_2 и наклоненныя другъ къ другу подъ угломъ α. (Черт.488).

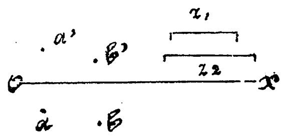


черт. 487

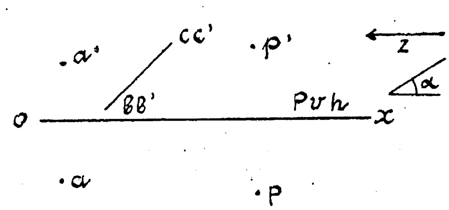


черт. 488

140) Даны: точки A и B и два отрѣзка r_1 и r_2. Провести плоскость, слѣды которой сливались бы въ одну прямую линію и которая находилась бы въ разстояніяхъ r_1 и r_2 отъ точекъ A и B. (Черт.489).



черт. 489



черт. 490

141) Даны: точка A, прямая BC, плоскость P, отрѣзокъ r и уголъ α. Провести плоскость, параллельную BC, удаленную отъ A на ~~на~~ разстояніе r и наклоненную къ P подъ угломъ α. (Черт.490).

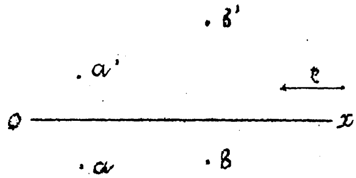
142) Провести прямую на равныхъ разстояніяхъ отъ 4-хъ точекъ.

Построеніе трегранныхъ угловъ и многогранниковъ.

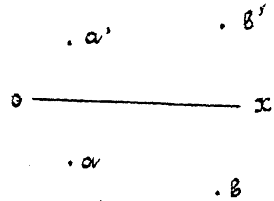
143) Даны: шаръ съ центромъ A радіуса r и точка B. Провести че-

резъ точку В плоскость, касательную къ шару и наклоненную къ Н подъ угломъ α, и рѣшить образующійся при этомъ трегранный уголъ между Р, V и Н, т.е. опредѣлить его плоскіе и двугранные углы. (Черт.491).

144) Даны: шаръ съ центромъ А радіуса r. Построить проекціи правильнаго трегран-наго угла, т.е. такого, у котораго всѣ плоскостные и двугранные углы равны соотвѣтственно между собою, а вершина трегран-наго угла лежала бы въ точкѣ В. (Черт.492).



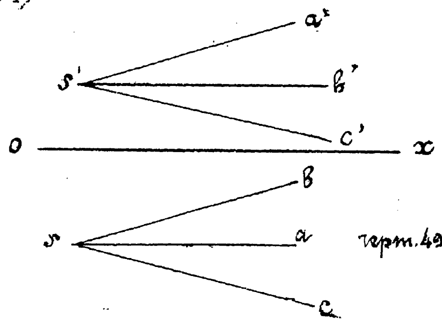
черт. 491



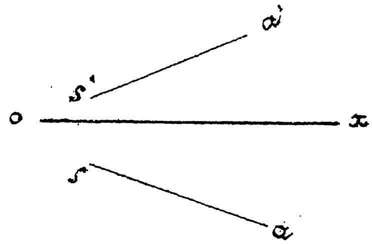
черт. 492

145) Даны: трегранный уголъ SABC Построить къ нему дополнительный *) трегранный уголъ съ вершиною въ точкѣ S. (Черт.493).

146) Построить проекціи правильнаго осьмигранника или октаедра по данному одному ребру его SA и по условію, чтобы SA и центръ тяжести октаедра находились бы въ одной вертикальной плоскости. (Черт. 494)



черт. 493



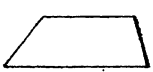
черт. 494

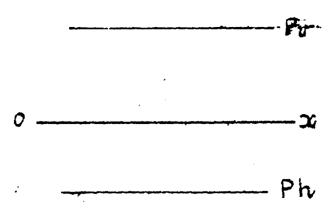
147) Построить правильный двѣнадцатигранникъ или дадекаедръ по данной величинѣ его ребра и по условію, что одна изъ граней его совпадаетъ съ плоскостью Н.

148) Построить ромбоидальный дадекаедръ, ограниченный 12 равными ромбами со стороной а и съ острымъ угломъ 30° при условіи, чтобы одна изъ граней дадекаедра совпадала съ плоскостью Н.

149) Построить трапецоедръ, котораго 24 стороны равныя трапеціи.(Черт.495).

150) Построить призмотоидъ по данной высотѣ его h, по условію, что его основанія параллельны плоскости Р, одно изъ основаній правильный пятиугольникъ, другое - правильный восьмиугольникъ со сторонами (a) у того и у другого. Основанія оріентированы произвольно одно относительно другого. (Черт.496).


черт. 495



черт. 496

151) Построить проекціи куба, діагональ котораго перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, а четыре ребра параллельны вертикальной плоскости.

152) Построить проекція куба по данной его вершинѣ А, длинѣ сто-

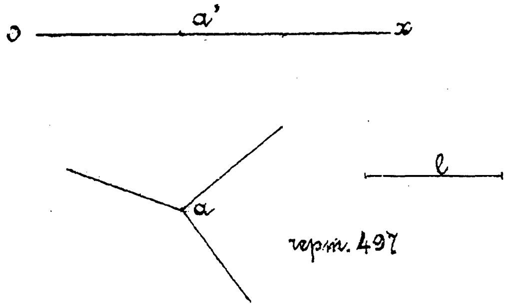
---

*) *Дополнительнымъ къ данному трегранному углу называется такой, грани котораго перпендикулярны къ ребрамъ, а ребра перпендикулярны къ гранямъ даннаго угла.*

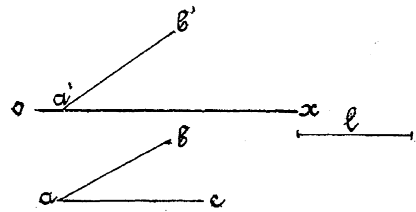
роны l и по направленіямъ горизонтальныхъ проекцій трехъ реберъ, прилегающихъ къ данной вершинѣ. (Черт. 497).

153) Построить проекціи правильнаго двадцатигранника.

154) Построить проекціи прямоугольнаго параллелепипеда, зная: его ребра AB, горизонтальную проекцію ребра AC, прилегающаго къ AB и длину третьяго ребра. (Черт. 498).



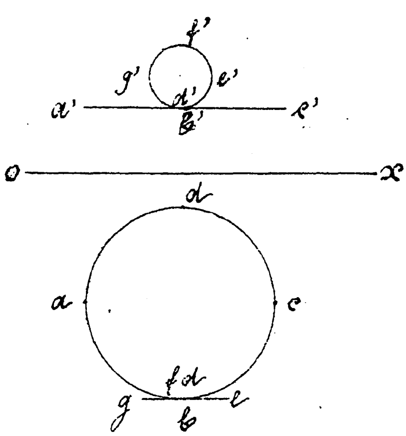
черт. 497



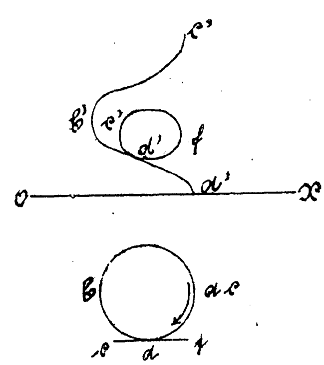
черт. 498

ЗАДАЧИ НА ВСѢ ОТДѢЛЫ.

155) По кругу ABCD, плоскость котораго параллельна H, а діаметръ равенъ 12 сант., катится кругъ GEF діаметра 4 сант. Плоскость малаго круга остается все время перпендикулярной къ H. Построить проекціи траекторіи точки F катящагося круга. (Черт. 499).

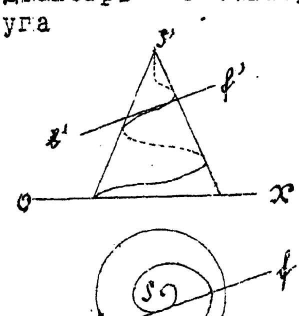


черт. 499



черт. 500

156) По цилиндрической винтовой линіи ABC, шагъ которой 16 сант., а діаметръ - 8 сант., катится кругъ DEF діаметра 4 сант. Плоскость круга круга все время остается вертикальной. Построить траекторіи точки D круга DEF. (Черт. 500).



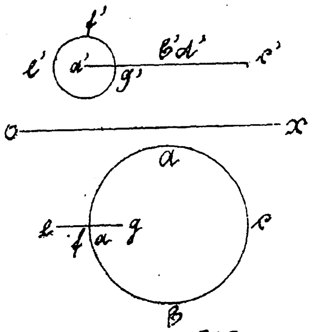
черт. 501

157) На поверхности прямого кругового конуса начерчена винтовая линія ABC, дѣлающая два полныхъ оборота. По этой линіи перекатывается прямая линія, остающаяся все время касательной къ винтовой. Требуется построить проекціи траекторіи точки D этой прямой. (Чертежъ 501).

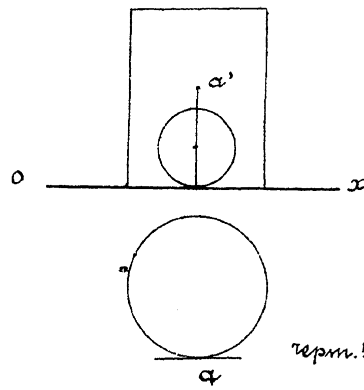
158) Данъ кругъ ABCD параллельный H. Другой кругъ EFG движется такъ, что центръ его O скользитъ по окружности ABCD, плоскость EFG

остается все время перпендикулярной H и перпендикулярной дугѣ ABCD въ мѣстѣ положенія центра O. Кругъ EFG вращается вокругъ центра O, при чемъ вращательное движеніе пропорціонально поступательному по ABCD. Всего малый кругъ дѣлаетъ 4 оборота въ то время, когда центръ O совершитъ полный путь ABCD. Построить траекціи лучи точки E малаго круга. (Черт.502).

159) Требуется построить проекцію кривой линіи описываемой точкою A, связанной съ кругомъ, катящимся по основанію цилиндра, и остающимся всегда къ нему касательнымъ. (Черт.503).



черт. 502

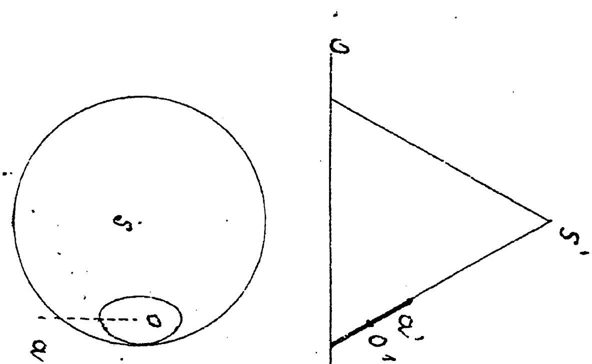


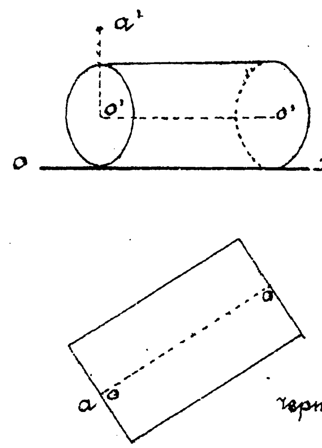
черт. 503

160) Построить проекціи кривой линіи, описываемой точкою A, связанной съ кругомъ, карящимся по основанію прямого кругового конуса и во все время катанія остающимся въ плоскостяхъ касательныхъ къ конусу. (Черт.504).

161) Построить проекціи кривой, описываемой точкой A, связанной съ основаніемъ прямого кругового цилиндра при катаніи этого цилиндра по плоскости H. (Черт.505).

черт. 504





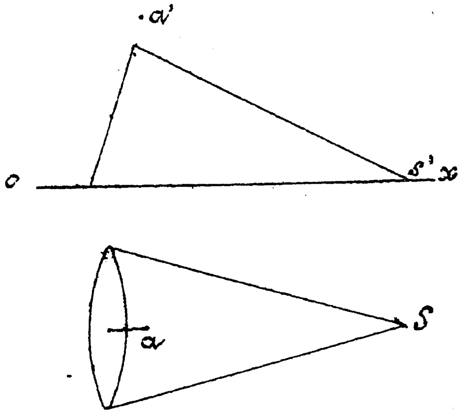
черт. 505

162) Построить проекціи кривой, описываемой точкою A, связанной съ основаніемъ прямого кругового конуса, при катаніи послѣдняго по плоскости H. (Черт.506).

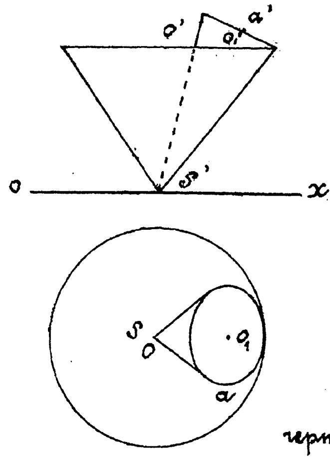
163) Построить проекціи кривой, описываемой точкою A - основанія малаго конуса, катящагося по внутренней поверхности большого конуса. (Черт.507).

164) Два параллельныхъ цилиндра вращаются, нажимая одинъ на другой. На маломъ цилиндрѣ проведена жирною краскою линія ABCD (сѣченіе цилиндра плоскостью). Построить на другомъ цилиндрѣ ту кривую, которая послужитъ отпечаткомъ первой. (Черт.508).

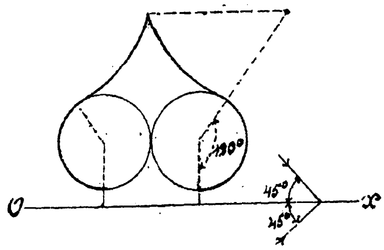
165) Построить собственныя и падающія на V и H тѣни отъ купола, представляющаго собою поверхность вращенія даннаго вида. (Черт.509).



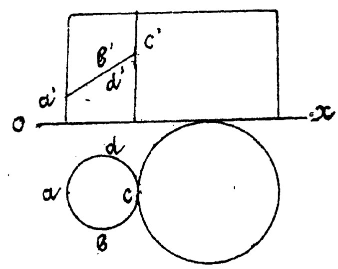
черт. 506



черт. 507



черт. 509



черт. 508

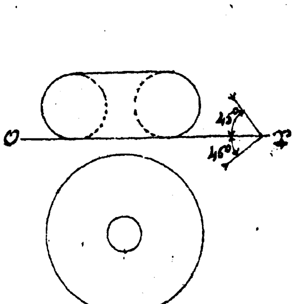
166) Построить собственныя и падающія тѣни для кольца. (Черт. 510).

167) Провести черезъ данную точку А плоскость, которая пересѣкала бы три данныя прямыя подъ одинаковыми углами.

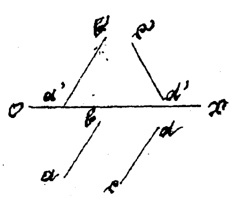
168) Провести между двумя данными прямыми горизонталь данной длины (черт. 511).

169) Даны двѣ точки А и В и зеркало S. Построить лучъ, который пройдя черезъ А и отразившись отъ зеркала, попалъ бы въ точку В (чертежъ 512).

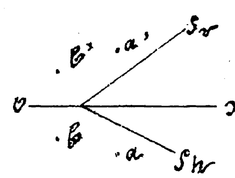
170) Даны два вертикальныхъ зеркала S и R, наклоненныхъ другъ къ другу подъ угломъ 45°. Между зеркалами находятся точки А (лежитъ на Н) и О. Начертить проекціи луча, который изъ точки А попалъ бы въ точку О, отразившись два раза отъ каждаго зеркала. (Черт. 513).



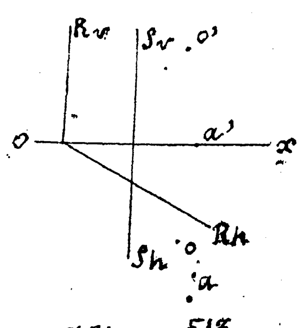
черт. 510



черт. 511



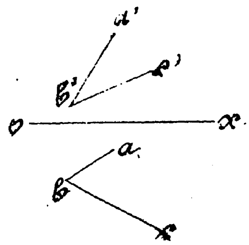
черт. 512



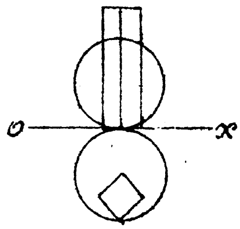
черт. 513

171) Даны проекціи двухъ силъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ. Опредѣлить величину ихъ равнодѣйствующей и углы наклона ея къ соотвѣтствующимъ. (Черт.514).

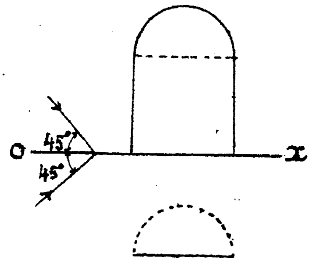
172) Построить линію сѣченія шара съ квадратной призмой.(Черт. 515).



черт. 514



черт. 515



черт. 516

173) Построить собственныя и падающія тѣни для цилиндрической ниши, оканчивающей сверху сферической поверхностью. (Черт.516).

174) Провести на поверхности прямого кругового конуса линію (не кругъ), которая встрѣчала бы всѣ его производящія подъ одинаковыми углами.

175) Построить проекціи шаровой локсодроміи, т.е. линіи, которая на поверхности шара встрѣчаетъ меридіаны подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

176) Вписать шаръ въ данный тетраедръ.

------ooOoo------

"НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ". Н.А.РЫНИНЪ.
Типо-литографія Н.Трофимова. СПБ. Можайская,3.

Источники, на основаніи которыхъ составленъ курсъ:

А. Введеніе: 1) Ващенко-Захарченко "Проективная Геометрія".

2) Miener "Darstellende Geometrie".

3) Loria "Vorlesungen über Darstellende Geometrie".

4) Fiedler "Darstellende Geometrie".

5) Schoenflies "Ein führung in die Hauptgesetze der Zeichnerischen Darstellungsmethoden".

6) Aschieri "Geometria projettiva e descrittiva".

7) Sayno "Lezioni di Geometria descrittiva".

8) Burmester "Grandzüge der Reliefperspective".

9) Кулферъ "Начертательная Геометрія".

10) Th. Vahlen "Konstruktionen und approximationen".

11) I. Pillet "La perspective linaiere".

12) В. Витковскій "Картографическія проекціи".

13) Е. Федоровъ "Курсъ кристаллографіи".

Б. Ортогональныя проекціи.

1) G. Monge "La geometrie descriptive".

2) Fiedler "Darstellende geometrie".

3) В. Курдюмовъ "Курсъ Начертательной Геометріи".

З а д а ч и :

"Exercices de Geometrie descriptive" par F. T.

Пособія по курсу Начертательной Геометріи*).

1. Курдюмовъ "Аксонометрія".
2. Его же "Проекціи съ числовыми отмѣтками".
3. Его же "Ортогональныя проекціи кривыхъ линій и крив. поверхн."
4. Н. Рынинъ "Сборникъ задачъ по Начертательной Геометріи."
5. Его же "Дневной Свѣтъ"(пособіе къ построенію тѣней).
6. Его же "Значеніе Начертательной Геометріи".
7. Его же "Примѣры рѣшенія задачъ по Начертательной Геометріи".
8. Его же "Примѣненіе метода аксонометрическихъ проекцій къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ механики".
9. Его же "Построеніе точекъ пересѣченія прямой линіи съ конусомъ."
10. Его же "Перспектива".

---

*) *Складъ изданій и продажа въ Институтѣ Инж. П. С. (Забалканскій просп. № 9. СПБ. Въ учсоное время отъ 10 до 2 час. дня).*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

А. ВВЕДЕНІЕ.

ОРТОГОНАЛЬНЫЯ ПРОЕКЦІИ.

------ " ------