Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 6

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 6.1. Zeige, dass die Menge der „symmetrischen“ 2×2-Matrizen über einem Körper K, also Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ,$$

die die Bedingung

$$a_{12} = a_{21}$$

erfüllen, mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bilden.

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.2. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.3. Es sei K ein Körper und

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 6.4. Überprüfe, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume sind:

(1) $V_1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$,
(2) $V_2 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$,
(3) $V_3 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$,
(4) $V_4 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

Aufgabe 6.5. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

Aufgabe 6.6. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 6.7.*

Es sei D die Menge aller reellen 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

erfüllen. Zeige, dass D kein Untervektorraum im Raum aller 2×2-Matrizen ist.

Aufgabe 6.8. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I = \operatorname{Abb}(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.9. Es sei K ein Körper, und seien $J \subseteq I$ zwei Indexmengen. Zeige, dass dann $K^J = \operatorname{Abb}(J, K)$ in natürlicher Weise ein Untervektorraum von K^I ist.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein Körper, sei I eine Indexmenge, und $K^I = \operatorname{Abb}(I, K)$ der zugehörige Vektorraum. Zeige, dass

$$E = \left\{ f \in K^I \,|\, f(i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen} \right\}$$

ein Untervektorraum von K^I ist.

Zu jedem $i \in I$ sei $e_i \in K^I$ durch

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

gegeben. Man zeige, dass sich jedes Element $f \in E$ eindeutig als Linearkombination der Familie e_i, $i \in I$, darstellen lässt.

Aufgabe 6.11. Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$C = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, \text{Cauchyfolge in } K \right\}.$$

Zeige, dass C ein Untervektorraum des Folgenraums

$$F = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, \text{Folge in } K \right\}$$

ist.

Aufgabe 6.12. Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(2, -7)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(5, -3) \text{ und } (-11, 4)$$

aus.

Aufgabe 6.13. Drücke in $\mathbb{C}^2$ den Vektor

$$(1, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(3 + 5i, -3 + 2i) \text{ und } (1 - 6i, 4 - i)$$

aus.

Aufgabe 6.14.*

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(1, 0, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, -2, 5), (4, 0, 3) \text{ und } (2, 1, 1)$$

aus.

Aufgabe 6.15. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I ,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i, $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

Aufgabe 6.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

(1) Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist auch der Durchschnitt

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Untervektorraum.

(2) Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum.

(3) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn
$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$
ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.17. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten (dabei sei $\lambda \in K$ und $v \in V$).

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $\lambda 0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $\lambda v \neq 0$.

Aufgabe 6.18. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 6.19. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^3$ den Vektor
$$(2, 5, -3)$$
als Linearkombination der Vektoren
$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$
aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

Aufgabe 6.20. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine Menge mit zwei Verknüpfungen
$$+\colon\, M \times M \longrightarrow M$$
und
$$\cdot\colon\, K \times M \longrightarrow M.$$
Es sei
$$\varphi\colon\, V \longrightarrow M$$
eine surjektive Abbildung mit
$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$$
für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$. Zeige, dass M ein K-Vektorraum ist.