修正課程標準適用

新編

初中幾何

第一冊

編者 陳修仁

校者 朱[illegible]

中華書局印行

修正課程標準適用

新編初中幾何編例

1. 本書遵照教育部最近頒布修正初中算學課程標準編輯，分四册，足供初中第二三年之用。

2. 本書分實驗幾何和理解幾何兩編，再附以數値三角法。其編制程序由實際而理論，由具體而抽象，適合學者心理。

3. 實驗幾何專用實測，觀察等方法，使學者自己去發見各種基本圖形的性質，既可引起學者對於幾何和作圖的興趣，且又養成其使用作圖器具的習慣。

4. 理解幾何對於直線形部份論證特詳。如關於三角形之特有性質（即共點線）部份，初學者每感困難，故爲之特闢專章，以引起學者注意而使其易於領悟。

5. 數値三角除略述三角的基本觀念與函數表用法外，兼及簡易測量問題，學者於此，當可感得實際應用之趣味。

6. 軌跡問題，初學者往往視爲畏途，在初中時詳細討論，殊多不便，故本書僅言其大要。

7. 極限法，初學者不易領悟，本書只加以簡易的說明；

但限於篇幅，仍不多用。

8 在面積章中，導入關於求積之事項，期與算術及代數發密切聯絡。

9 本書關於實用與理論兩方面兼籌並顧，一方養成學者解決實際問題之能力，他方又引起學者研究學問之興趣。

10 本書於每一定理或數定理之後，附以習題，供學生之練習。於每章或數章之後，附以雜題，予學生以復習之機會。最後復附以總習題，以資全部之總溫習。

11，本書係編者多年來教學之經驗及參酌國內外各種書籍而成。但以時間急迫，倉卒付印，疏略處自所不免。如承海內同志時加指正，不勝感激。

編者識。

參正課本試用學選用

新編初中幾何第一册

（本册供第二學年第一學期用）

目次

第一編　實驗幾何

修正課程標準適用

新　編

初中幾何第一册

第一編

實驗幾何

第一章　平面幾何學的圖形

§1. 幾何學的目的　幾何學的目的在研究物體的形狀、大小和位置。

(a)形狀　一切的物體，因其組成的物質不同，呈種種特異的性質。譬如有兩個球，一係金質，一係鐵質，那金質的，色黃，富有延性和展性；那鐵質的，色灰黑，甚硬，放在潮溼的空氣中就生銹。這兩種球，因為組成的物質不同，性質也因之而異。但同為一種特別確定的球形，卻顯是一種共同性質。由是我們就可以知道形狀是與構成物體的物質無關係的一種特別性質。

(b)大小　有兩個物體，為簡便計，就指

兩個球而言，說[illegible]大小未必一致。[illegible]我們[illegible]狀一樣，[illegible]。

§1 位置 [illegible]和各種物質，都是一樣。但[illegible]的，決不可視為一[illegible]。這是[illegible]因[illegible]在空間內占有[illegible]位置，所[illegible]。照這樣看來，位置[illegible]是一切物體[illegible]普遍性質之一種。

由以上的解釋，我們就可以曉得物體的形狀、大小和位置，[illegible]一切[illegible]組成的物質無關係的。幾何學[illegible]目的[illegible]研究這三種普遍性；其他各種性質，均不在幾何學的範圍之內。

§2. 立體 物體占有空間的部分，叫做立體。一切的立體，有位置、長、寬和厚。立體的種類很多，不勝枚舉，就尋常所見者，有立方體、長方體、平行六面體、直角[illegible]直角錐臺、直圓柱、直圓錐、直圓錐臺、球、半球等。

§3. 面 立體的境界叫做面，面有位置、長、寬而無厚。

§4 線 面和面的交界叫做線。線有位置和長而無寬和厚。

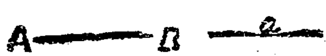
線又分為直線、曲線兩種。普通所用的條線，沒有一處彎曲的，就是直線。在紙面上畫一線，處處彎曲不平的，就是曲線。

§5 點 線和線的交界叫做點。點僅有位置而無寬、厚和長，如下圖，通常以點 A、點 B 等記之。

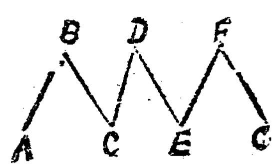
§6. 體、面、線的產生 點移動可生線，線移動可生面，面移動可生體。由是我們就可以說一切立體，都由點移動而生。

§7. <u>直線</u> 置一線的一部分於他部分上，沒有一處不相重的，這線叫做直線。

直線的雙方，可無窮延長，牠的有限部分叫做線段，如下圖，



通常記為線段 AB，或線段 a 等。牠的全部叫做無限直線。



§8. 折線　許多方向不同的線段聯結而成的叫做折線，如上圖 $ABCDEFG$ 是。

§9. 二點間的距離　以二點為兩端的線段，牠的長叫做這二點間的距離。

§10. 平面　通過面上任意兩點的直線，完全在這面上時，這個面叫做平面。

§11. 平面圖形　構成平面圖形的元素，不外點和線兩種。(一)各點配成一圖形，(二)各線配成一圖形，(三)諸線和諸點配成一圖形。牠的種類不勝枚舉，其中最簡單的，有三角形、正三角形、等腰三角形、四邊形、平行四邊形、正方形、矩形、菱形、梯形、五角形、正五角形、六角形、正六角形、星形、圓、橢圓、弓形、扇形、月形等。

習　題

1. 試就教室內舉幾個立體、面、線、點的實例。

2. 粉筆匣是何種立體？牠的底面是甚麼面？牠的側面是甚麼面？

3. 書和方磚的形狀是否相同？

第二章　直接度量

§12. 度量用器　度量用器，分直尺、圓規、三角板、量角器四種。

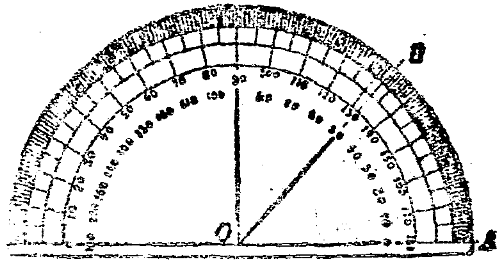
(a)直尺　是一根平直沒刻分度的尺，因牠的邊緣成直線，故用以畫線段或延長線段。但爲便利計，普通都用刻有分度的尺。例如日常所有的市尺、公尺等。

(b)圓規　或叫做兩脚規，一脚附有尖針，一脚裝以鉛條或鴨嘴筆，用以畫圓或移已知線段於他位置。

(c)三角板　共有兩個，一個的最長邊是最短邊的兩倍，牠的各角是 90°、60°、30°，另一個的兩邊相等，牠的角是 90°、45°、45°。牠們的主要用處是畫直線、平行線、特別角等。

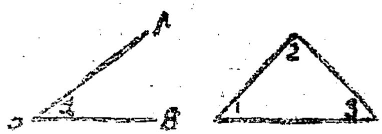
(d)量角器　是一個半圓形的器具，分成

一百八十等分，每一等分爲一度，用以量角的大小。



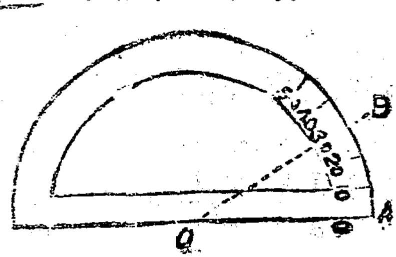
（注意）量角尺、這是量角度的用法，教師得臨時試給學生看；此處從略。

18. 角　從一點引兩條直線，牠的開口就叫做角，這點叫做角的頂點，這兩條直線叫做角的邊。如右圖所示的角，O是頂點，OA和OB是牠的邊。



記角的方法有數種，如這角可記爲∠AOB，也可簡記爲∠O，有時在角內書一文字或數字表示也可，例如∠a、∠1、∠2、∠3是。

19. 量角器的用法　把量角器底線的中心合在角頂上，使底線合在角的一邊上。看角的另一邊，合在量角器上那一



量數，就是該角的度數。例如 $\angle AOB=30°$。

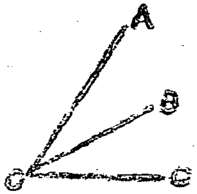
§15. 角的大小 要比較兩角的大小，用量角器去量，最易解決。也可用他法比較。法將一角的頂點，落在他角的頂點上，一角的一邊，落在他角的一邊上。如果第一角的第二邊落在他角內，那末第一角小於他角。如果第一角的第二邊剛剛落在他角的第二邊上，這兩角便相等。如果第一角的第二邊，落在他角外，那末第一角就大於他角了。

§16. 角的度量 把圓周分作三百六十等分，每一份叫做一度。把一度分作六十等分，每一份叫做分。再把一分分作六十等分，每一份叫做秒。通常用°、′、″作度、分、秒的記號，記在數字的右角上，例如五十三度四十二分三十九秒，可寫作 $53°42'39''$。

§17. 圓 我們用圓規畫圓時，針尖頂住的地方，叫做圓心。所畫成的曲線，叫做圓或圓周。圓周上任一點到圓心的距離，叫做半徑。圓內的一切半徑皆相等。圓周上兩點連成直線，叫做弦，通過圓心的弦叫做直徑。圓周的一部分叫做弧。

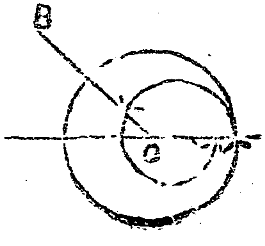
§18. 直角、銳角、鈍角　一角的度數等於90度的叫作直角，譬如將一張正方紙，摺疊各對摺一次，就可折成四個直角，普通用R.字表示直角的記號。小於直角的角叫做銳角。大於直角的叫做鈍角。

§19. 隣角　兩角有一邊共有而且頂點也是公有的，這兩角叫做隣角。如右圖，∠AOB、∠BOC叫做隣角。



§20. 平角　一角的二邊在頂點兩旁成一直線，這個角叫做平角。就是平角等於180°。也就是等於兩個直角。如圖，∠AOB叫做平角。

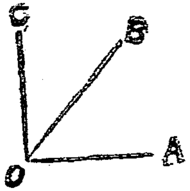
§21. 周角　等於360°的角，叫做周角。就是周角等於兩平角。

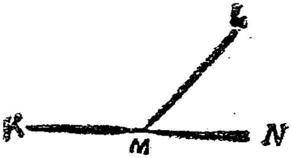


§22. 共軛角　兩角的和等於一周角，這兩角叫做互爲共軛角。如圖，小角 $\angle AOB+$ 大角 $\angle BOA=360^\circ$。

這小角 $\angle AOB$ 和大角 $\angle BOA$，叫做互爲共軛角。

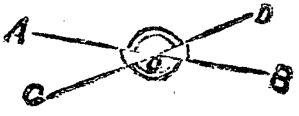
§23. 餘角和補角　兩角的和等於一直角，這兩角叫做互爲餘角。兩角的和等於一平角，這兩角叫做互爲補角。如下圖，$\angle AOB+\angle BOC=R\angle$，所以 $\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ 互爲餘角。$\angle NML+\angle LMK=2R\angle$，所以 $\angle NML$ 和 $\angle LMK$ 互爲補角。





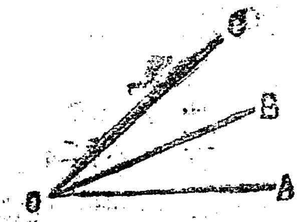
§24. 劣角和優角　兩角互成共軛角時，小角叫做劣角，大角就叫做優角。如 §22 圖，小角 AOB 是劣角，大角 BOA 就是優角。

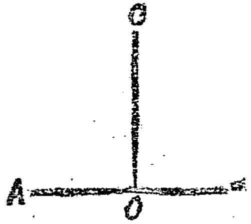
§25. 對頂角　兩條直線相交，不相鄰的兩個角，叫做對頂角。如右圖，$\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 是一組對頂角。$\angle AOD$ 和 $\angle BOC$



又是一組對頂角。

§26. 分角線和垂線　過某角的頂點引一直線，把這個角分作兩個相等的隣角，這條直線就叫做分角線。如圖 $\angle AOB$ 等於 $\angle BOC$，所

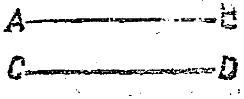




以 OB 叫做分角線。兩直線相交成直角時，這兩條直線，叫做互相垂直，同時叫一直線為他線的垂線。如圖，CO 為 AB 的垂線，或 AB 為 CO 的垂線。

兩線互相垂直時，通常用記號 $\perp$ 表示。例如 $CO \perp AB$，係表示 CO 垂直於 AB，或 CO 和 AB 垂直。

§27. 平行線　兩條直線，在同一個平面上，任意延長，總不相交的，這兩條線叫做平行線。如右圖的 AB、CD 兩直線。



§28. 角的單位　測角的大小，往往用直角做單位，但有時因直角太大，不便實用，故以一度作單位，以分、秒等作輔助單位，[illegible]。

習題

1. 53°、72°、23°50′、87°30′ 的餘角各是幾度?

2. 74°、98°52′、115°41′ 的補角各是幾度?

3. 45°、192°、208°55′ 的共軛角各是幾度?

4. 銳角的餘角是什麼角?銳角的補角是什麼角?

5. 劣角是否是銳角?優角和鈍角有什麼區別?

6. 鈍角的餘角是什麼角?鈍角的補角是什麼角?

7. 過一點引兩條直線,在這點周圍能成幾個角?將各個角的名字記出來。

8. 過一點引許多直線,把所成各角一一量出來,再求牠的總和,看共有幾度?

9. 過一直線上任一點,在這直線的一方,任引許多直線,把所成各角一一量出來,看牠共有幾度。

10. 兩點間能引幾條直線?

11. 任意三點,至多能引幾條直線?至少能引幾條直線?

12. 試於教室內舉一平行線的實例。

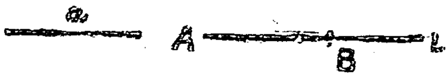
13. $\angle AOB$ 為平角,過 O 引 $\angle AOB$ 的平行線 OC,問 OC 和直線 AOB 有什麼關係?

第三章 基本作圖題

§29. 作圖和作圖題的意義 畫一圖形和已知條件適合，這種手續，叫做作圖，要我們作圖的問題，叫做作圖題。

§30. 作圖題一 作一線段，和已知線段等長。

(i)已知線段



(ii) 求作等於 a 的線段。

(iii) 作法 畫適當長的直線 AL（用直尺或三角板）；以 A 做圓心，等於 a 的長做半徑，畫圓弧（用圓規），交 AL 於 B，這 AB 就是所求的線段。

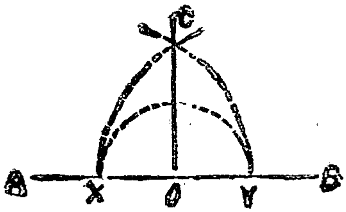
§31. 作圖時應採的步驟 由作圖題一，我們就可以知道在實驗幾何中作圖時應採的步驟有三種：(一)什麼是已知條件，(二)什麼是要作的圖形，(三)作一個和已知條件適合的圖形。這是作圖時不可少的三種步驟，希望學者時時記得。在理解幾何中，除這三種步驟外，本另有解析、證明、討論幾種，因不便在此處討論，暫不贅。

§32. 作圖題二 過已知直線上一點，作這

線的垂線。

(i) O 爲已知直線 AB 上已知點。

(ii) 求過 O 作 AB 的垂直線。

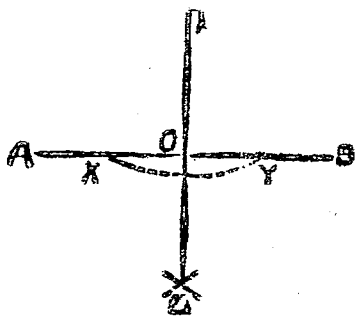


(iii) 作法　以 O 做圓心，任意長作半徑畫弧，交 AB 於 X、Y 兩點，再用 X、Y 各作圓心，大於 XY 的一半長做半徑，畫圓弧，得交點 C，連 CO，這 CO 就是所求的垂線。

§33. 作圖題三　從直線外一點，引這線的垂線。

(i) P 爲已知直線 AB 外一點。

(ii) 求過 P 作 AB 的垂線。



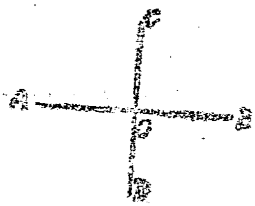
(iii) 於 AB 上任取 X 點，以 P 作圓心，PX 作半徑畫弧，得交點 Y，仿此得 Z，連 PZ，這 PZ 就是所求的垂線。

習題二

1. 已知兩線段，求作一線段等於這兩線段的和或差。

2. 試僅用三角板作作圖題二和作圖題三。

§34. <u>垂直平分線</u> 一直線過一線段的點，並和這線段垂直，這直線叫做這線段的垂直平分線。

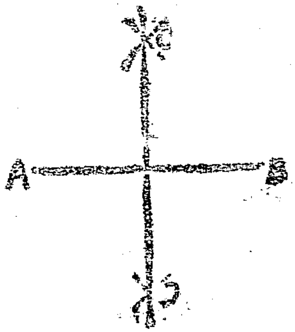


如右圖，O 為 AB 的中點，CD 和 AB 的垂直，這 CD 就叫做 AB 的垂直平分線。

§35. <u>作圖題四</u> 作已知線段的垂直平分線。

(i) AB 為已知線段。

(ii) 求作 AB 的垂直平分線。



(iii) 作法 以 A、B 各作圓心，大於 AB 的半長做半徑畫弧，得兩交點 C、D。連 CD，這 CD 就是所求的直線。

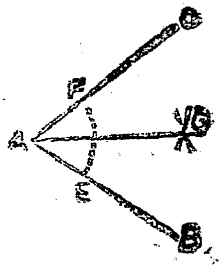
§36. <u>作圖題五</u> 作已知角的分角線。

(i) $\angle CAB$ 為已知角。

(ii) 求作 $\angle CAB$ 的分角線。

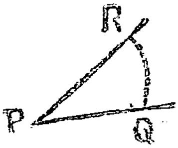
(iii) 作法 以 A 做圓心，任意長做半徑畫弧，交 AB、

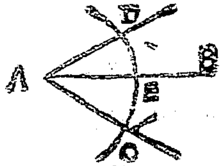
AC 於 E、F，再以 E、F 各作圓心，另一任意等長半徑畫弧，得交點 G，連 AG。∴ AG 就是所求的分角線。



§37. 作圖題六 過已知直線上一點作一直線，令與這直線所成的角等於定角。

(i) AB 是已知直線，RPQ 是定角。





(ii) 求過 A 作一直線，令與 AB 所成的角等於 ∠RPQ。

(iii) 作法 以 ∠RPQ 的頂點 P 作圓心，任意長作半徑畫弧，與二邊交於 R、Q，再以 A 作圓心，等於線段 PQ 的長做半徑畫弧，與 AB 交於 E，又以 E 做圓心，等於線段 RQ 的長做半徑畫弧，和前弧交於 C、D 兩點，連 AC、AD，這兩直線都是所求的直線。

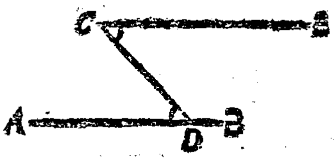
習題二

1. 不許延長線段，試過這線段的一端，作牠的垂直線。

2. 把任意角分做四等分。

3. 求作一角等於已知角的二倍、三倍。

§38. <u>作圖題七</u> 過已知點作一直線，和已知直線平行。

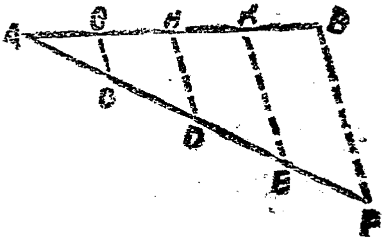


(i) AB 爲已知直線；C 爲已知點。

(ii) 求過 C 作一直線和 AB 平行。

(iii) 作法 過 C 引任意直線，交 AB 於 D；再應用作圖題六引 CE 直線，令 $\angle ECD$ 等於 $\angle CDA$，這 CE 就是所求的平行線。

§39. <u>作圖題八</u> 分已知線段爲若干等分。



(i) AB 爲已知線段。

(ii) 求分 AB 爲若干等分（例如四等分。）

(iii) 作法 過 A 任引一直線，在這直線上取等長線段 AC、CD、DE、EF，連 FB；從 E、D、C 各引 FB 的平行線，交 AB 於 K、H、G；這 K、H、G 就是所求的分點。

習題三

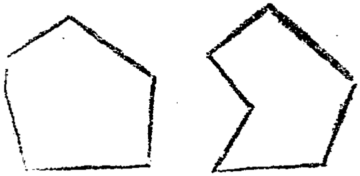
1 僅用三角板作作圖題七。

2.把已知線段分做十二等分。

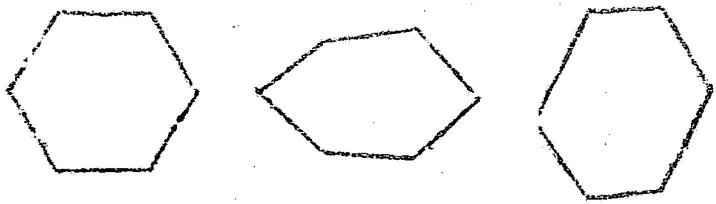
§40. 直線形 用線段圍成的圖形，叫做直線形，諸線段叫做邊，每兩邊的夾角叫做頂角。用三邊圍成的直線形，叫做三角形；用三邊以上圍成的直線形，叫做多角形，或多邊形。多邊形又看牠的邊數多少，分做四邊形、五邊形、六邊形等。多邊形的邊數和角數相等，所以五邊形、六邊形，也可叫做五角形六角形。

多角形的內角含有優角的叫做凹多角形，都是劣角的，叫做凸多角形。本書研究的限於凸多角形。

多角形各角都相等的，叫做等角多角形；牠的各邊都相等的，叫做等邊多角形；各邊各角都相等的，叫做正多角形。等邊多角形未必等角，等角多角形未必等邊，應加注意。



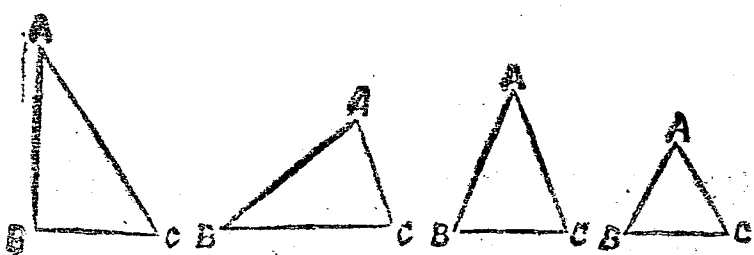
凸多角形　　凹多角形



正多角形　　等邊多角形　　等角多角形

§41. 三角形的分類和記法　三角形的各角或各邊都不相等的，叫做任意三角形，或單叫三角形；兩邊相等的，叫做等腰三角形；三邊相等的，叫做正三角形，或等邊三角形；有一角爲直角的，叫做直角三角形。三角用記形號△表示。

如圖，無論那一個三角形，都可記做△ABC

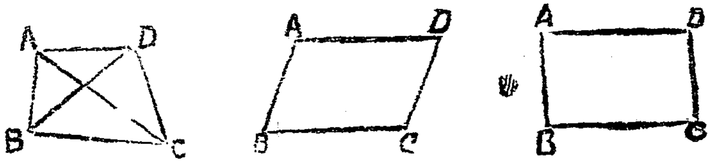


直角三角形　　任意三角形　　等腰三角形　　正三角形

§42. 四邊形的分類　用四線段圍成的直線形，叫做四邊形。牠的不相鄰兩組角，叫做相對角；不相鄰的兩組邊，叫做相對邊或對邊；

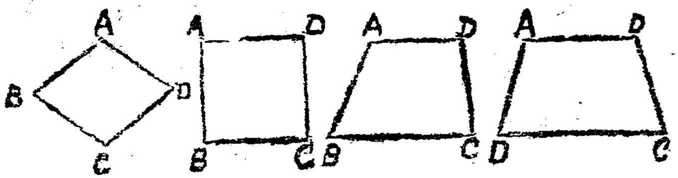
不相隣頂點連成的直線，叫做對角線。所以四邊形有兩組對角，兩組對邊，和兩條對角線。

(i) (ii) (iii)



任意四邊形　平行四邊形　矩　形

(iv) (v) (vi) (vii)



菱　形　正方形　梯　形　等腰梯形

如(i)圖 AB、CD 和 AD、BC 是兩組對邊；$\angle BAD$、$\angle BCD$、和 $\angle ABC$、$\angle ADC$ 是兩組對角；AC、BD 是兩條對角線。四邊形的兩組對邊平行的，叫做平行四邊形。如(ii)圖，AB 和 CD 平行，AD 和 BC 平行，所以 $ABCD$ 是平行四邊形，用記號 ▱$ABCD$ 表示。

兩直線平行時，普通用記號 $\parallel$ 表示，例如 AB 平行於 CD，可記做 $AB \parallel CD$。

四邊形各角都是直角的，叫做矩形或長方形，如第(iii)圖是。普通用記號 ▭$ABCD$ 表之。

平行四邊形的各邊都相等的，叫做菱形；如第(iv)圖是。

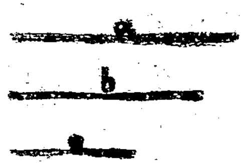
平行四邊形的各邊相等；各角都是直角的，叫做正方形。如第(v)圖是。

四邊形的一組對邊平行，他組對邊不平行的，叫做梯形，牠的平行兩邊，叫做底或底邊，不平行的兩邊，叫做腰，如第(vi)圖是。梯形的不平行兩邊相等的，叫做等腰梯形，如第(vii)圖是、梯形的兩底，分做上底和下底兩種如 AD 是上底，BC 是下底。

§43. 直角三角形的斜邊和腰　直角三角形直角所對的邊，叫做斜邊、夾直角的兩邊叫做腰。

§44. 作圖題九　作一三角形，使牠的三邊等於已知長。

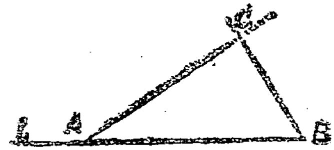
(i) a、b、c 為已知三線段。



(ii) 求作一三角形，牠的三邊等於 a、b、c。

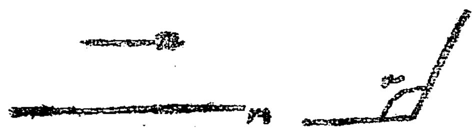
(iii) 作法　在任意直線 l 上，取 AB 等於 a。以 A 做圓心，b 做半徑畫弧，再以 B 做

心，a 做半徑畫弧、令這兩弧的交點爲 C，這 ABC 就是所求的三角形。



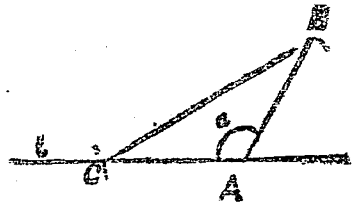
§45. 作圖題十 作一三角形，一角等於已知角，這個角的對邊和他一邊，各等於已知長。

(i) $\angle\alpha$ 爲已知角，m、n 爲已知長。



(ii) 求作一三角形，一角等於 $\angle\alpha$，這個角所對的邊等於 n，另一邊等於 m。

(iii) 作法 在任意直線 l 上取 A 點，過 A 引直線 AB，令與 l 所夾的角等於 $\angle\alpha$；在 AB 直線上，截取 AB 等於 m，以 B 做圓心，n 做半徑畫弧，交 l 於 C；連 BC；這 ABC 就是所求的三角形。在 l 線上取 $AC=m$，過 A 引 AB 直線，令 $\angle A=\angle\alpha$，以 C 做圓心，n 做半徑畫弧，和 AB 交於 B，這 ABC 又是所求的三角形。

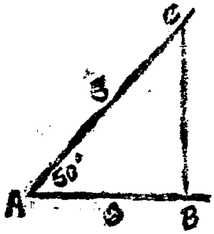


§46. 三角形的圖解法

(a) 已知三角形的兩邊爲 2 厘米和 3 厘

米，這兩邊的夾角爲50°，求其餘一邊的長，和其餘兩角的度數。

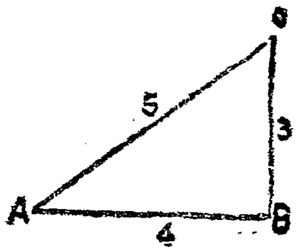
解　用量角器作 $\angle A=50°$，用刻度尺在角的一邊上截取 $AB=2$ 厘米，在另一邊上截取 $AC=3$ 厘米，連結 BC 成 $\triangle ABC$。



量得　$BC=?$　$\angle B=?$　$\angle C=?$

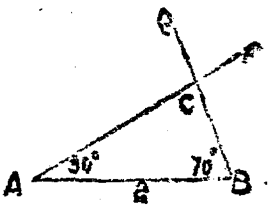
(b)已知三角形三邊爲 3 厘米、4 厘米、5 厘米，求這三角形三角的度數。

解　於任意直線上，截取 $AB=4$ 厘米；以 B 做圓心，3 厘米長做半徑畫弧；再以 A 做圓心，5 厘米長做半徑畫弧；令兩弧的交點爲 C，聯 AC、BC，成三角形 ABC。



量得　$\angle A=?$　$\angle B=?$　$\angle C=?$

(c)已知三角形的兩角爲 30°、70°，這兩角的夾邊爲 2 厘米，求其餘兩邊的長和其餘一角的度數。



解　於任意直線上，截取 $AB=2$ 厘米，用量角器在兩端作 $\angle PAB=30°$，$\angle QBA=70°$，令 AP、BQ 交於 C，成三角形 ABC。

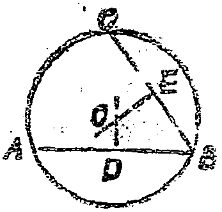
量得　$AC=?$　$BC=?$　$\angle ACB=?$

習題四

1. 已知二邊和夾角，求作三角形。
2. 已知二角和夾邊，求作三角形。
3. 作一三角形，二角爲 $90°$、$30°$，這兩角所夾的邊等於 2 厘米。
4. 作一三角形，三邊的長爲 3 厘米、4 厘米、5 厘米。
5. 作一三角形，兩邊的長是 8 厘米、7 厘米，牠的夾角是 $45°$。
6. 已知一邊的長，求作一正三角形。
7. 已知直角三角形的斜邊和一腰的長，求作此形。
8. 已知一邊的長，求作正方形。
9. 已知兩鄰邊的長，求作矩形。
10. 已知梯形的一腰和兩底，及這腰和一底的夾角，求作此梯形。

§47. 作圖題十一　求作一圓，過不在一直線上的已知三點。

(i) A、B、C 是不在一直線上的已知三點。

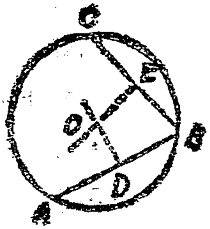


(ii)求作一圓,過 A、B、C 三點。

(iii)作法　聯 AB、BC 兩直線,再照作圖題四,作其垂直平分線 DO、EO,令其交點爲 O,以 O 做圓心;AO 的長爲半徑畫圓,這就是所求的圓。

§48. 作圖題十二　求定圓的圓心。

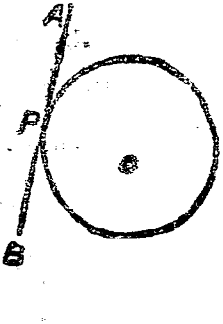
(i) ABC 是定圓。



(ii)求這圓的圓心。

(iii)作法　於定圓周上任取 A、B、C 三點,聯 AB、BC 兩直線,作其垂直平分線 DO、EO,令其交點爲 O;這 O 點就是定圓的圓心。

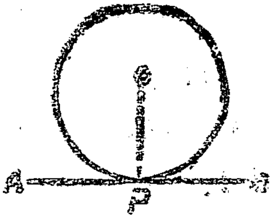
§49. 切線　圓和直線,普通有兩點共有;看上圖 AB BC 等便知。如果一直線和圓,只有一點共有,這直線叫做圓的切線,這共有點叫做切點,如右圖,APB 是 O 圓的切線,P 是切點。



§50. 作圖題十三　過定圓周上一定點,作這圓的切線。

(i) P 是定圓周上的定點。

(ii) 求過 P 點作定圓的切線。

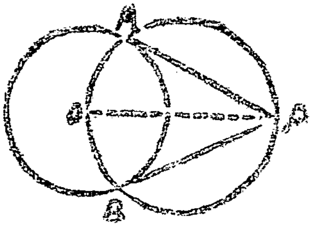


(iii) 作法 應用作圖題十二，求定圓的圓心 O，聯 OP，過 P 作 OP 的垂線 AB[作圖題二]，則 AB 就是所求的切線。

§51. 作圖題十四 過定圓外一定點，作這圓的切線。

(i) P 是定圓外的定點。

(ii) 求過 P 作定圓的切線。



(iii) 作法 求圓心 O，聯 PO，以 PO 做直徑畫圓，和定圓交於 A、B，聯 PA、PB 兩直線，這兩直線就是所求的切線。

習題五

1. 過三角形的三頂點，能不能畫圓？照§47的方法解答。
2. 從定圓外一定點，對這圓能引幾條切線？
3. 過圓內一點，能不能引圓的切線？照§51的方法解答。

4. 從圓周上一點，能引幾根切線。

5. 過不在一直線上的四點，能不能畫圓？照§47的方法試試看。

6. 過同直線上的三點，能不能畫圓？照§47的方法試試看。

第 四 章

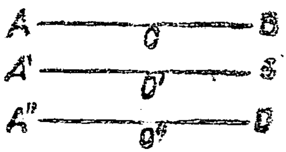
用量法發見幾何圖形的特性

(特別關於直線形和圓的特性)

§52. 畫許多直線 AB、$A'B'$、$A''B''$、……，於其上取 O、O'、O''、……各點，那麼 $\angle AOB$、$\angle A'O'B'$、$\angle A''O''B''$……都是平角。

用量角器量這些角，知道 $\angle AOB=\angle A'O'B'=\angle A''O''B''=\cdots\cdots$，由是得到下面的結論：

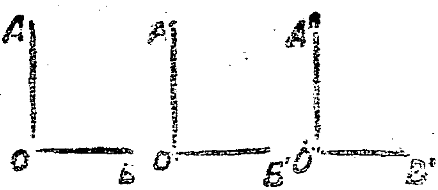
所有的平角都相等。



§53. 畫許多直角 $\angle AOB$、$\angle A'O'B'$、$\angle A''O''B''$、……，用量角器得

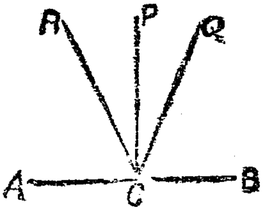
$\angle AOB=\angle A'O'B'=\angle A''O''B''=\cdots\cdots$；由是得到下面的結論：

所有的直角都相等。



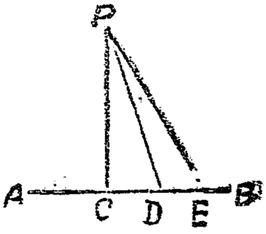
§54. 如下圖，在直線 AB 上任取一點 C，應用 §37 作圖題二：過 C 作 AB 的垂線。再過 C 作許多直線 CQ、CR

……，用量角器量得 $\angle QCB$、$\angle RCA$、………都不是直角，由是得到下面的結論：



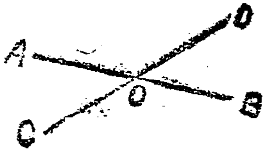
過直線上一點和這線垂直的直線，祇有一條。

§55. 如圖，P 爲直線 AB 外一點，應用 §33 作圖題過 P 作 AB 的垂線 PC，再過 P 作許多直線 PD、PE、……，用量角器量得 $\angle PDB$、$\angle PEB$，……都不是直角，由是得到下面的結論：



過直線外一點，和這線垂直的直線祇有一條。

§56. 如圖，兩直線 AB、CD 交於 O，用量角器量 $\angle AOC$、$\angle AOD$、$\angle DOB$、$\angle BOC$，知道 $\angle AOC=\angle DOB$，和 $\angle AOD=\angle BOC$，同時並知道 $\angle AOC+\angle AOD=2R\angle$，



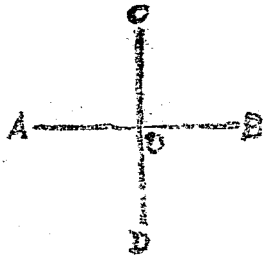
$\angle AOD+\angle DOB=2R\angle$；
$\angle DOB+\angle BOC=2R\angle$。

由是得到下面的兩種結論：

(i)兩直線相交，所成對頂角相等。

(ii)兩直線相交，所成兩隣角的和等於二直角。

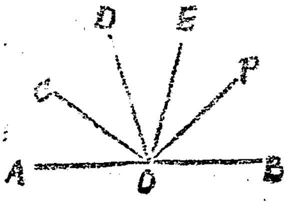
§57. 兩直線 AB 和 CD 相交於 O 點，且已知 $\angle COB=R\angle$。用量角器量得 $\angle AOC$、$\angle AOD$、$\angle BOD$ 都等於直角，由是得到下面的兩種結論：



(i)兩直線相交，所成的四角中，若有一角是直角，其餘的三角也都是直角。

(ii)一直線和他直線垂直，那末他直線也和這直線垂直。

§58. 在直線 AB 上任取 O 點，過 O，在 AB 的一旁引許多直線 OC、OD、OE、OF、……，用量角器量得 $\angle AOC$、$\angle COD$、$\angle DOE$、……的度數，而求其和，得

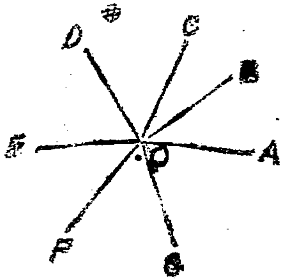


$$\angle AOC+\angle COD+\angle DOE+\cdots\cdots=2R\angle.$$

由是得到下面的結論：

過直線上一點，在這直線的一旁引許多直線所成鄰角的和等於兩直角。

§53. 過任意點O，引許多直線OA、OB、OC、OD、OE、OF、OG、……；用量角器量得$\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COD$、$\angle DOE$、$\angle EOF$、$\angle FOG$、……的度數，而求其和，得

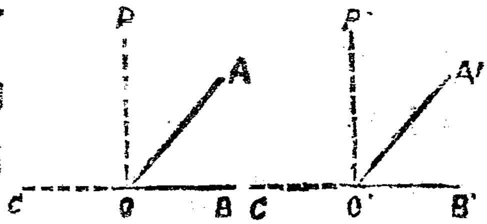


$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOF+\angle FOG+\cdots\cdots=4R\angle。$$

由是得到下面的結論：

過一點引許多直線，所成一切鄰角的和等於四直角。

§ 0. 畫兩個相等的角AOB和$A'O'B'$，把BO、$B'O'$分別延長到C和C'，那末$\angle AOC$就是$\angle AOB$的補角，$\angle A'O'C'$就是$\angle A'O'B'$的補角。再應用§32作圖題二，



過O和O'各引BC和$B'C'$的垂線OP和$O'P'$那

末 $\angle AOP$ 就是 $\angle AOB$ 的餘角；$\angle A'O'P'$ 就是 $\angle A'O'B'$ 的餘角.用量角器量得 $\angle AOC$、$\angle A'O'C'$、$\angle AOP$、$\angle A'O'P'$ 的度數，就可以發見 $\angle AOC=\angle A'O'C'$ 和 $\angle AOP=\angle A'O'P'$ 兩種關係，由是得到下面的結論：

相等角的補角或餘角也相等。

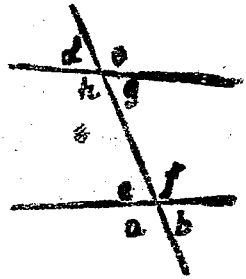
習　題　一

1. 一角的分角線，平分牠的對頂角和其輔角。
2. 二直線相交所成的兩隣角，其分角線互相垂直。
3. 兩隣角互爲餘角時，不公有的兩邊互相垂直。
4. 兩組對頂角的分角線互相垂直。
5. 在直線 AB 上取 O 點。在 AB 的一旁，順次引 OC、OD、OE、OF、OG 直線，已知各隣角 $\angle BOC=15°$；$\angle COD=22°$；$\angle DOE=31°$，$\angle EOF=3°$；$\angle FOG=46°50'$，問 $\angle GOA$ 等於幾度幾分？
6. 過 O 點引直線 OA、OB、OC、OD、OE、OF 和 OG，已知各隣角 $\angle AOB=27°$，$\angle BOC=18°2'$，$\angle COD=28°12'$，$\angle DOE=35°19'$，$\angle EOF=57°45'$，$\angle FOG=38°21'$，問 $\angle GOA$ 的度數。

§21. 外角、內角、同位角、錯角（內錯角和外錯角）、同旁內角和同旁外角。

一直線和兩直線相交，所成的八個角，由牠們的相互關係，分別命名如下：

如右圖，令八個角爲 a、b、c、d、e、f、g、h，這 a、b、c、d 四個角叫做外角，e、f、g、h 四個角叫做內角。f 和 h，e 和 g，b 和 d，a 和 c 都叫做錯角。錯角更分成兩種；f 和 h，e 和 g 叫做內錯角；b 和 d，a 和 c 叫做外錯角。又 a 和 h，b 和 g，e 和 d，f 和 c 叫做同位角；f 和 g，e 和 h 叫做同旁內角；b 和 c，a 和 d 叫做同旁外角。



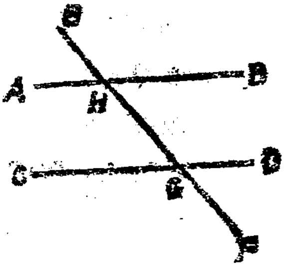
§32. 畫兩根平行線 AB、CD 另畫一直線 EF，交 AB、CD 於 H、G，用量角器量八角的度數，就可發見下列關係：

$\angle AHG=\angle HGD$；

$\angle BHG=\angle HGC$；

$\angle AHE=\angle DGF$；

$\angle EHB=\angle FGC$。



由是得到下面的結論：

一直線和兩平行線相交，錯角（包括內錯角和外錯角兩種）相等。

§63. 依§62方法，量八個角的大小，又可發見下列關係：

$$\angle AHG+\angle HGC=2R\angle,$$

$$\angle BHG+\angle HGD=2R\angle;$$

$$\angle EHA+\angle FGC=2R\angle,$$

$$\angle EHB+\angle FGD=2R\angle.$$

由是得到下面的結論：

(1) 一直線和兩平行線相交，同旁內角互為補角。

(2) 一直線和兩平行線相交，同旁外角互為補角。

§64. 依§62方法，量八個角的大小，更可發見下列各種關係：

$$\angle EHA=\angle EGC,\quad \angle EHB=\angle EGD;$$

$$\angle AHF=\angle CGF,\quad \angle BHF=\angle DGF.$$

由是得到下面的結論：

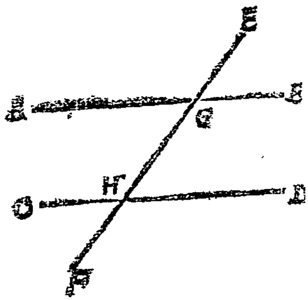
一直線和兩平行線相交，同位角相等。

§65. 畫一直線和兩直線相交，如下圖，用量角器量得，

$$\angle AGH=\angle GHD,\quad \angle BGH=\angle CHG.$$

$\angle EGA=\angle FHD$；

$\angle EGB=\angle FHC$。



用任何方法把 AB、CD 延長，無論延長到那裏這兩直線總不相交。由是得到下面的結論：

一直線和兩直線相交，如果錯角相等，這兩直線便是平行線。

§66. 依前節方法量得

$\angle AGH+\angle GHC=2R\angle$，

$\angle BGH+\angle GHD=2R\angle$；

$\angle EGA+\angle FHC=2R\angle$；

$\angle EGB+\angle FHD=2R\angle$。

把 AB、CD 無論怎樣延長，他們總不能相交。由是得到下面的結論：

一直線和兩直線相交，如果同旁內角或同旁外角互為補角，這兩直線便是平行線。

§67. 依§65方法，量得

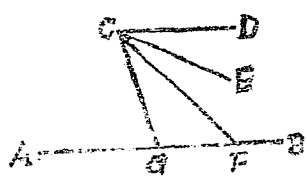
$\angle AGF=\angle CHF$，　$\angle BGF=\angle DHF$；

$\angle AGE=\angle CHE$，　$\angle EGB=\angle EHD$。

所把 AB、CD 無論怎樣延長，總不能相交。由是得到下面的結論：

一直線和兩直線相交，如果同位角相等，這兩直線一定是平行線。

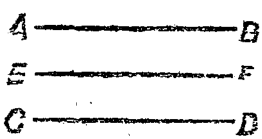
§68. 如圖，C 是直線 AB 外一點，應用 §38 作圖題七；過 C 引 AB 的平行線 CD，再過 C 引直線 CE、CF、CG……等，把這直些線和 AB 延長，總可以使每一直線和 AB 相交，由是得到下面的結論：



過直線外一點，祇能引一直線和這線平行。

§69. 如圖，畫 AB 直線平行於 EF 直線，又畫 CD 直線平行於 EF 直線。再把 AB、CD 無論怎樣延長，總不能相交，由此得到下面的結論：

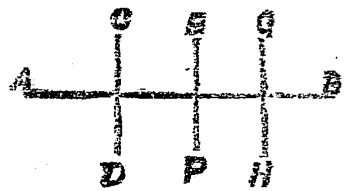
平行於同一直線的兩直線互相平行。



§70. 如上圖，畫 AB、EF 兩平行線，再畫 CD 直線，和 AB 平行。把 CD、EF 無論怎樣延長，總不能相交，由此得到下面的結論：

一直線平行於兩平行線中的一線，也必平行於另一線。

§71　如圖，畫一根直線 AB，更畫直線 CD、EF、GH、……，和 AB 垂直，把 CD、EF、HG、……無論怎樣延長總不能相交；由此得到下面的結論：

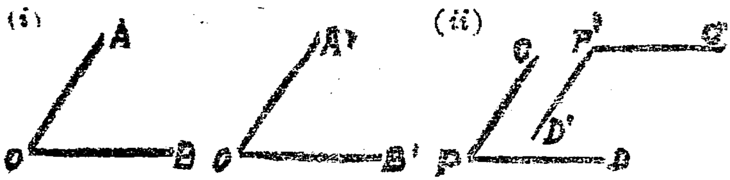


同一線的各垂直線必互相平行。

§72.　如圖(i)，畫 $\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$，令

$$AO \parallel A'O' \quad BO \parallel B'O';$$

用量角器量得　$\angle AOB = \angle A'O'B'$。



如圖(ii)，畫 $\angle CPD$ 和 $\angle C'P'D'$，令

$$CP \parallel D'P' \quad PD \parallel P'C';$$

用量角器量得　$\angle CPD + \angle C'P'D' = 2R\angle$。

由以上兩種關係得到下面的結論：

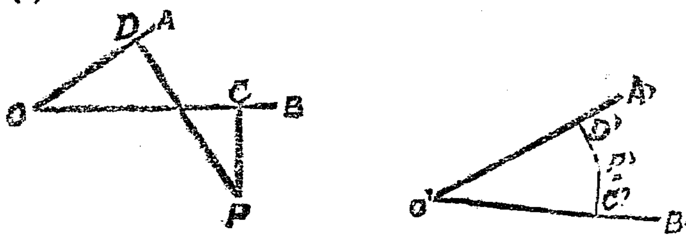
兩角的邊分別平行，這兩角相等，或互為補角。

§73.　如圖(i)，畫 $\angle AOB$ 和 $\angle CPD$，令

$AO \perp PD$,　$BO \perp PC$。

用量角器量得　$\angle AOB = \angle CPD$。

(i)　　　　　　　　(ii)



如圖(ii)，畫$\angle A'O'B'$和$\angle C'P'D'$，令

$A'O' \perp P'D'$,　$B'O' \perp P'C'$。

用量角器量得　$\angle A'O'B' + \angle C'P'D' = 2R\angle$。

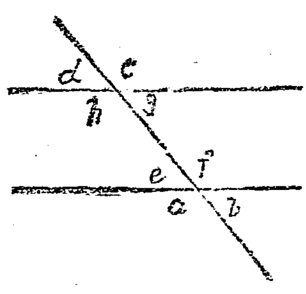
由以上兩種關係得到下面的結論：

兩角的邊分別垂直，這兩角相等或互為補角。

習　題　二

1. 如圖(i)，一直線和兩平行線相交，如果　$\angle b = 50°$，問其他各角的度數？

(i)

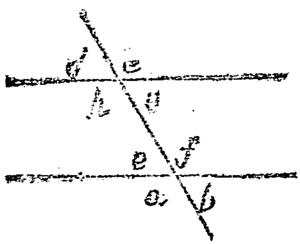


2. 如圖(ii)，一直線和兩直線相交，如果$\angle a = 120°$，$\angle d = 60°$，問這兩直線有什麼關係？

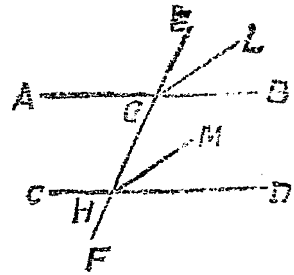
3. 在圖(i)中，試寫出那

幾組角是相等的。

(ii)



(iii)

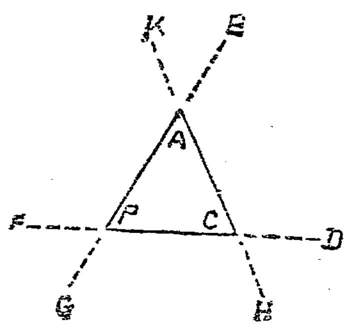


4. 在圖(iii)中，$AB \parallel CD$，GL是$\angle EGB$的分角線 HM是$\angle CHD$的分角線，問$\angle EGL$、$\angle LGB$、$\angle GHM$、$\angle MHD$間有什麼關係？

5. AB、CD和EF是平行線，已知第四直線GH平行於AB，問GH和CD、EF有什麼關係？

6. 一直線和許多平行線中的一直線垂直，問這直線和其他平行線有什麼關係？

§74. 三角形內角、外角、內對角、底邊、頂角和底角。



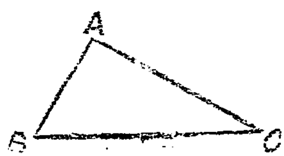
三角形二邊所夾的角叫做內角。

一邊和他邊延長線所成的角叫做外角。和外角不相鄰的

兩個角叫做這外角的內對角。

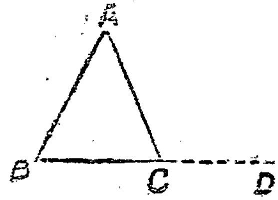
例如在圖中，∠ABC、∠BAC和∠ACB都叫做內角。∠ACD、∠CAE、∠ABF、∠BCH、∠BAK、∠CBG都叫做外角。∠ABC和∠ABC都是∠ACD或∠BCH的內對角。∠ACB和∠ABC都是∠CAE或∠BAK的內對角。∠ACB和∠BAC都是∠ABF或∠CBG的內對角。

以三角形的任一邊作底邊，這底邊所對的角叫做頂角，其他兩角叫做底角。例如以BC作底邊，∠A就叫做頂角，∠B和∠C都叫做底角。



§75. 如圖，畫一任意三角形ABC，用量角器量各角的度數，而求其和，就可發見 ∠A+∠B+∠C=2Rt∠。
由此得到下面的結論：

三角形三個內角的和等於二直角。

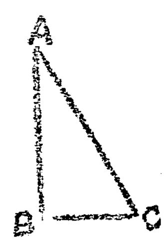


§76. 如圖，畫三角形ABC，把BC邊延長到D，用量角器量外角ACD和內對角∠ABC、∠BAC。知

道 $\angle ACD$ 大於 $\angle ABC$ 或 $\angle BAC$；且 $\angle ACD = ABC + \angle BAC$。把其他兩邊延長，用量角器量各外角和其內對角，都得同樣的結果，由此得到下面的結論：

三角形的外角比任一內對角大，而等於兩內對角的和。

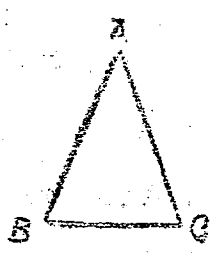
577. 如圖，畫一直角三角形 ABC，$\angle B$ 為直角。用量角器量 $\angle A$ 和 $\angle C$，而求其和，知道 $\angle A + \angle C = R\angle$。由此得到下面的結論：



直角三角形的兩個銳角互為餘角。

578. 鈍角三角形和銳角三角形　三角形的內角中有一是鈍角，就叫做鈍角三角形；三個角都是銳角，就叫做銳角三角形。

579. 如圖，畫 $\triangle ABC$，使牠的兩邊 AB 和 AC 相等；用量角器量各角，可發見 $\angle B = \angle C$。由此得到下面的結論：



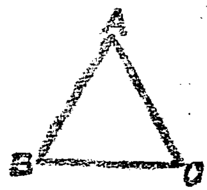
等腰三角形兩腰所對的

角相等。

§80. 如前圖，作$\triangle ABC$，使牠的兩底角$\angle B$和$\angle C$相等，用刻度尺量各邊的長，可發見$AB=AC$。由此得到下面的結論：

三角形有兩角相等：這兩角所對的邊也相等。

§81. 如圖，作三角形ABC，使牠的各邊$AB=BC=CA$，用量角器量牠的各角，就可以發見$\angle A=\angle B=\angle C$，由此得到下面的結論：



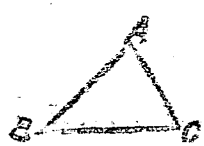
三角形的三邊相等，三個角也相等。

§82. 如前節的圖，作三角形ABC，使牠的各角等於$60°$，用刻度尺量各邊AB、BC和CA的長；就可知道$AB=BC=CA$。由此得到下面的結論：

三角形的各角相等；三邊也相等。

［注意！§81 和 §82 所述的三角形叫做正三角形。］

§83. 如圖，作三角形ABC，令$\angle C>\angle B$，用刻度尺量AB和AC的長，就可發見$AB>AC$由此得



到下面的結論：

三角形的三角不等，大角所對的邊大。

§84. 如前節的圖，作三角形ABC，令$AB > AC$。用量角器量得 $\angle C > \angle B$，由此得到下面的結論：

三角形兩邊不等，大邊所對的角大。

習　題　三

1. 三角形的三個角中，能不能有兩個角都是直角或鈍角？
2. 兩個三角形有兩個角分別相等，第三角是不是相等？
3. 三角形三個外角的和有幾度？
4. 三角形的一角等於 30°，一角等於 75°，第三角有幾度？
5. 三角形的一個外角是 135°，一個內對角是 65°，問其餘兩個內角各有幾度？
6. 三角形的一個內角是 105°，這三角形是什麼三角形？
7. 等腰三角形的一個角是 60°，這三角形是什麼三角形？
8. 三角形的三角是 50°、60°、70°，這三角形是什麼三角形？

9. 三角形的三邊是 7 厘米、5 厘米、9 厘米，試比較三角的大小。

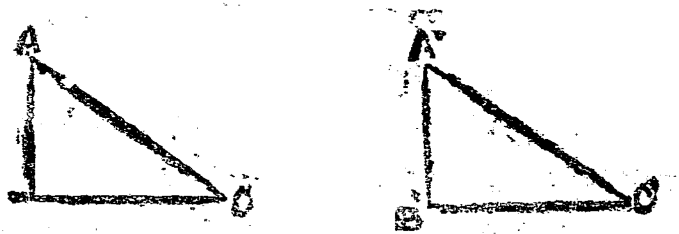
19. 三角形的三角是 54°、68°、58°，試比較三邊的大小。

§85. 全等形　兩個幾何圖形，除了位置以外；形狀和大小都是相同的；叫做全等形。要確定兩形是否全等；其最淺近而最易領悟的方法，叫做重疊法；就是把第一個圖形置在第二個圖形上如果有一部或全部都不重合，這兩形不是全等形。如果各部都完全重合，這兩形便是全等形。

全等形的相等部分叫做對應部。例如有兩個直線形全等時；相等邊也叫做對應邊，相等角叫做對應角。而相等邊和相等角都叫做對應部。

§86. 全等三角形　三角形的元素只有六種，就是三個角和三條邊。把第一個三角形置在第二個三角形上，如果兩形的三邊和三角分別相重合，這兩個三角形就叫做全等形。換句話說：第一個三角形的三邊和第二個三角形的三邊分別相等，第一個三角形的三角和第二個三角形的對應角分別相等，這兩個三角形叫做全等三角形。

在兩個全等三角形中，相等邊所對的角，就是對應角；相等所角對的邊就是對應邊。如圖，△ABC 和△$A'B'C'$的三邊：



$$AB=A'B',\quad AC=A'C',\quad BC=B'C';$$

並且　$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C'$。

這兩個三角形叫做全等三角形，寫成

$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C' \text{或} \triangle ABC\equiv A'B'C'。$$

這記號≌或≡就是表示全等的意思。$\angle A$和$\angle A'$，$\angle B$和$\angle B'$，$\angle C$和$\angle C'$，都叫做對應角；AB和$A'B'$，AC和$A'C'$，BC和$B'C'$都叫做對應邊。

§87. 作兩個三角形ABC和$A'B'C'$，令

$$AB=A'B',\quad AC=A'C',\quad \angle A=\angle A'$$

用量角器量得$\angle B$、$\angle C$、$\angle B'$、$\angle C'$的大小，再用刻度尺量 BC 和 $B'C'$ 的長，就可發見 $\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$BC=B'C'$ 那末，這兩個三角形的三邊分別相等，對應角也分別相等，由此得到下面的結論：

兩個三角形的二邊和所夾的角分別相等，這兩個三角形是全等形。

§88. 如前節的圖，作兩個三角形 ABC 和 $A'B'C'$，令

$$BC=B'C'，\quad \angle B=\angle B'，\quad \angle C=\angle C'。$$

用量角器量 $\angle A$ 和 $\angle A'$，並用刻度尺量 AB、AC、$A'B'$、$A'C'$ 各邊的長，就可以發見 $\angle A=\angle A'$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$。那末這兩個三角形的三邊分別相等；對應角也分別相等。由此得到下面的結論：

兩個三角形的二角和所夾的邊分別相等，這兩個三角形是全等形。

§89. 如§87 作兩個三角形 ABC 和 $A'B'C'$，令

$$AB=A'B'，\quad BC=B'C'，\quad AC=A'C'。$$

用量角器量兩個三角形各角的大小，就可發見

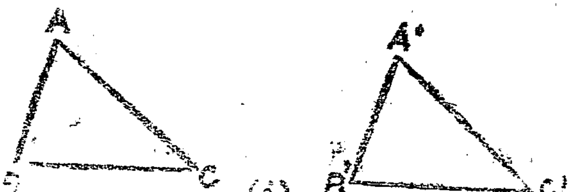
$$\angle A=\angle A'，\quad \angle B=\angle B'，\quad \angle C=\angle C'。$$

那末這兩個三角形的各邊和對應角分別相等，所以得到下面的結論：

兩個三角形的三邊分別相等，是全等形。

890 如圖(i)作兩個三角形 ABC 和 $A'B'C'$，令

$$AB=A'B',\quad AC=A'C'\quad \angle C=\angle C'。$$



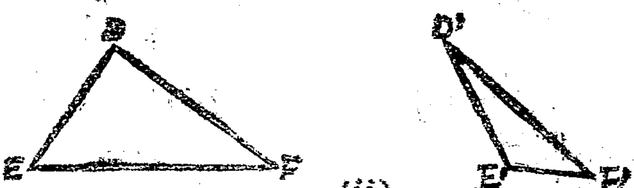
(i)

用量角器量 $\angle B$、$\angle A$、$\angle B'$、$\angle A'$ 各角的大小，再用刻度尺量 BC 和 $B'C'$ 的長，就可發見

$$\angle B=\angle B',\quad \angle A=\angle A',\quad BC=B'C'。$$

如圖(ii)作兩個三角形 DEF 和 $D'E'F'$，令

$$DE=D'E',\quad DF=D'F',\quad \angle F=\angle F'。$$



(ii)

用量角器量 $\angle D$ $\angle E$、$\angle D'$、$\angle E'$ 各角的大小，再用刻度尺量 EF 和 $E'F'$ 的長，就可發見 $\angle D\neq\angle D'$，$EF\neq E'F'$，$\angle E+\angle E'=2R\angle$。由此得到下面的結論：

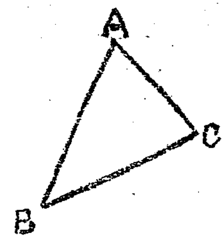
兩個三角形的二邊相等，而且一組相等邊所對的角也相等，那末其他一組相等邊所對的角，相等或互為補角。如果其他一組相等邊所對的角也相等，這兩個三角形就是全等形。

習題四

1. 兩個直角三角形的斜邊和一銳角相等，這兩形有什麼關係？
2. 兩個直角三角形的斜邊及他一邊相等，這兩形有甚麼關係？
3. 兩個三角形有兩角相等，而且一組相等角所對的邊也相等，這兩形有什麼關係？
4. 兩個直角三角形有一邊和這邊所對的銳角相等，這兩形是不是全等形？
5. 兩個三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 內，已知 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，和 $\angle B=\angle B'$，問 $\angle A$ 是不是常等於 $\angle A'$？
6. 兩個鈍角三角形的鈍角相等，鈍角所對的邊和他一邊也相等，這兩形是不是全等形？
7. 兩個三角形的兩角都是 95° 和 45°，那最大角所對的邊都是 3 厘米長，問這兩形有甚麼關係？

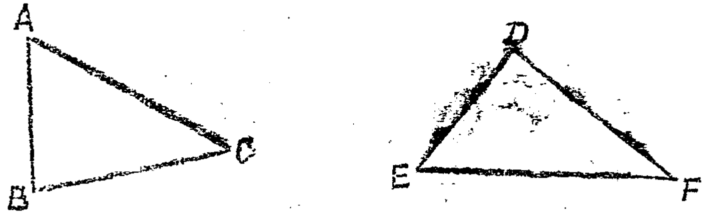
§91. 如下圖，作一任意三角形 ABC，用刻

度尺量三邊 AB、AC、BC 的長，就可以發見 $AB+AC>BC$，$AB+BC>AC$，$AC+BC>AB$。用代數的方法把這三個不等式移項，得 $BC-AB<AC$ 等關係式；由此得到下面的結論：



三角形兩邊的和，大於第三邊；兩邊的差，小於第三邊。

§92. 如圖，作兩個三角形 ABC 和 DEF，令 $AB=DE$，$AC=DF$，$\angle D>\angle A$。



用量角器量 $\angle B$、$\angle C$、$\angle E$、$\angle F$，並不發生特別關係。但是用刻度尺量 BC 和 EF 的長，便知道 $EF>BC$，由此得到下面的結論：

兩個三角形的二邊相等，如果所夾的角不相等，那末夾角大的所對的邊也大，夾角小的所對的邊也小。

§93. 如前節的圖，作兩個三角形 ABC 和

DEF，令　　$AB=DE$，　$AC=DF$，　$EF>BC$。

用量角器量兩形的各角，便知 $\angle D>\angle A$，由此得到下面的結論：

兩個三角形的二邊相等，如果第三邊不等；那末第三邊大的，所對的角也大；第三邊小的，所對的邊也小。

習題五

1. 以 6 厘米、7 厘米、8 厘米做三邊，能否成一三角形?

2. 以 1 厘米、5 厘米、6 厘米做三邊，能否成一三角形?

3. 兩個三角形的兩邊各為 3 厘米、5 厘米。兩邊所夾的角一為 30°，一為 50°，問那個角的對邊大?

4. 兩個三角形的兩邊各為 7 厘米及 9 厘米，第三邊一長 5 厘米，一長 8 厘米，問這兩邊所對的角孰大?

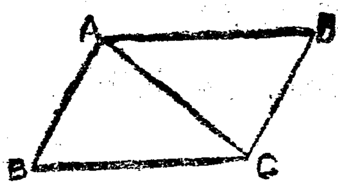
5. 任意三角形一邊的中點和這邊所對的頂點聯成直線，把原三角形分做兩個三角形，問這兩形是否都為鈍角三角形?

6. 三角形底邊的中點，和頂點聯成直線，如果這直線不

垂直於底邊，問其他兩邊能不能相等？

7. 等腰三角形底邊的中點和頂點聯成直線，把原三角形分做兩個三角形，問這兩形有什麼關係？

§94. 如圖，$ABCD$ 是平行四邊形，用刻度尺量 AB、BC、CD、DA 各邊的長；再用量角器量 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 各角的度數，就可發見三種關係：



(i) $AB=CD$，　$BC=DA$。

(ii) $\angle A=\angle C$；　$\angle B=\angle D$。

(iii) $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D=\angle A+\angle D$

$=\angle B+\angle C=2R\angle$。

由此得到下面三種的結論：

(a) 平行四邊形的兩組對邊相等。

(b) 平行四邊形的兩組對角相等。

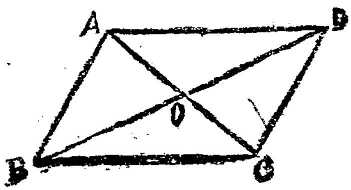
(c) 平行四邊形　各組相鄰角互爲補角。

§95. 如前節的圖，AC 爲平行四邊形 $ABCD$ 的對角線，前節已量得 $AB=CD$，$BC=DA$，$\angle B=\angle D$ 再用量角器量得 $\angle BAC=\angle DCA$，$\angle ACB=\angle C$

AD，而且 AC 爲 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的公共邊，所以這兩個三角形的三邊和對應角分別相等，是全等形。聯對角線 BD，也得同樣的關係。由此得到下面的結論：

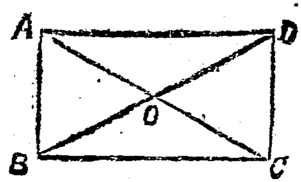
平行四邊形的對角線，把這個平行四邊形分做兩個全等三角形。

§96. 如圖，作平行四邊形 $ABCD$，聯對角線 AC、BD，令其交點爲 O，用刻度尺量 AO、BO、CO、DO 各線段的長，就可發見 $AO=CO$，$BO=DO$。由此得到下面的結論：



平行四邊形的兩對角線互相平分。

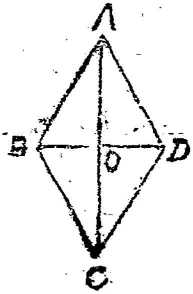
§97. 如圖，作矩形 $ABCD$，聯對角線 AC、BD；令其交點爲 O，用刻度尺量 AO、BO、CO、DO 各線段的長，就可發見 $AO=BO=CO=DO$，即 $AC=BD$。由此得到下面的結論：



矩形的對角線相等，且互相平分。

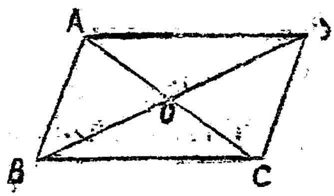
§98. 如圖，作菱形 $ABCD$，聯對角線 AC、BD；

令其交點爲 O, 用刻度尺量 AO、BO、CO、DO 各線段的長，再用量角器量 $\angle AOD$、$\angle AOB$、$\angle COB$、$\angle COD$ 各角的度數，就可發見 $AO=CO$, $BO=DO$; $\angle AOD=\angle AOB=\angle COB=\angle COD=R\angle$ 諸種關係。由此得到下面的結論：



菱形的對角線互相垂直，且互相平分。

§99. 作四邊形 $ABCD$, 令對邊 $AB=CD$, $AD=BC$。把 AB、CD 無論怎樣延長，總不相交；同時把 AD、BC 無論怎樣延長，總不相交。由此得到下面的結論：



四邊形的兩組對邊分別相等，這四邊形便是平行四邊形。

§100. 如§99的圖，作四邊形 $ABCD$, 令對角 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$。把兩組對邊無論怎樣延長，總不能相交。由此得到下面的結論：

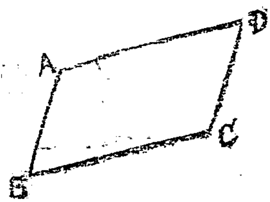
四邊形的兩組對角分別相等，這四邊形便

是平行四邊形。

§101. 如§99的圖，作兩線段 AC、BD，令 $AO=CO$，$BO=DO$，聯 AB、BC、CD、DA 成一四邊形 $ABCD$，把兩組對邊無論怎樣延長，總不能相交，因此得到下面的結論：

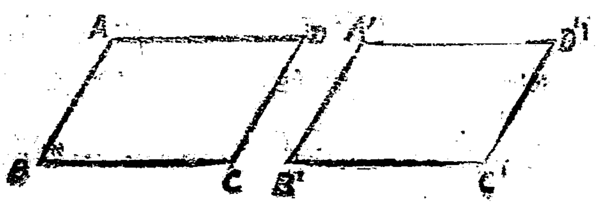
四邊形的兩對角線互相平分，這四邊形便是平行四邊形。

§102. 如圖，作 AB 平行且相等於 CD，聯 AD、BC，成一四邊形 $ABCD$，把兩組對邊無論怎樣延長，總不能相交，因此得到下面的結論：



四邊形的一組對邊相等且平行，這四邊形便是平行四邊形。

§103. 如圖，作兩個平行四邊形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$，令 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$\angle B=\angle B'$，用刻度尺量其餘各邊 AD、DC、$A'D'$、$D'C'$ 的長，再用量角



器量其餘各角 $\angle A$、$\angle C$、$\angle D$、$\angle A'$、$\angle C'$ $\angle D'$ 的度數，就可發見

$$AD=A'D',\quad DC=D'C';$$
$$\angle A=\angle A';\quad \angle C=\angle C';\quad \angle D=\angle D';$$

這兩個平行四邊形的各邊和對應角分別相等。因此得到下面的結論：

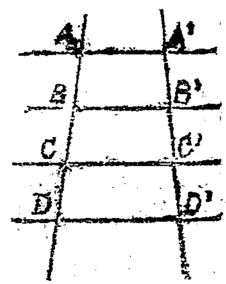
兩個平行四邊形的一組隣邊和這兩邊所夾的角分別相等，這兩個平行四邊形是全等形。

習 題 六

1. 試述平行四邊形的性質和種類。
2. 含什麽條件的四邊形是平行四邊形。
3. 平行四邊形的一角爲 $45°$，問其他各角的度數?
4. 平行四邊形兩隣邊的長爲 5 厘米和 8 厘米，問其他兩邊長多少厘米?
5. 兩平行四邊形的兩隣邊和一對角線分別相等，這兩個平行四邊形是不是全等形。

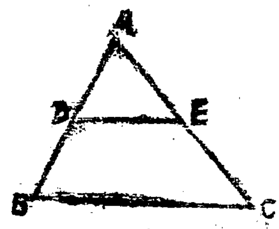
§104. 如下圖，作 AA'、BB'、CC'、DD'、…… 許多平行線，和直線 AD 交於 A、B、C、D、… 各點，已知 $AB=BC=CD=\cdots\cdots$。另作一直線 $A'D'$，令和這些平行線相交於 A、B、C、D…… 各點。用刻度尺

量 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$……諸線段的長，就可發見 $A'B'=B'C'=C'D'=$……。因此可以得到下面的結論：



一直線和許多平行線相交，如果在相鄰兩平行線間的部分彼此相等，那末這許多平行線和任一直線相交，其所截的部分也彼此相等。

§105. 作三角形 ABC，過 AB 的中點 D，引 BC 的平行線 DE，和 AC 相交於 E。用刻度尺量 AE、EC 諸線段的長，就可發見 $AE=EC$。



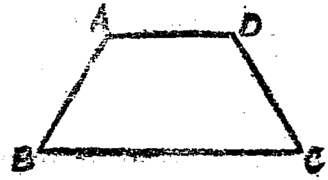
由此得到下面的結論：

過三角形一邊的中點，引他一邊的平行線，必過第三邊的中點。

§106. 如上圖，作三角形 ABC，取 AB、AC 的中點 D、E。聯 DE，把 DE、BC 無論怎樣延長，總不能相交。再用刻度尺量 DE、BC 兩線段的長，便知道 $DE=\frac{1}{2}BC$。由此得到下面的結論：

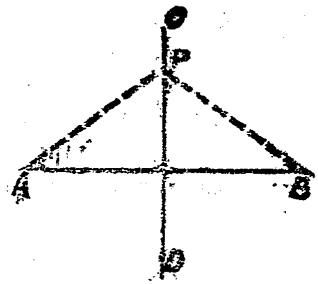
聯三角形兩邊中點的線，其長等於第三邊的一半。

§107. 如圖，作等腰梯形 $ABCD$，用量角器量 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的度數，就可發見 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$。由此得到下面的結論：



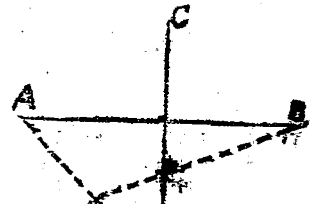
等腰梯形的底角相等。

§108. 如圖，作線段 AB 的垂直平分線 CD。在 CD 上任取一點 P，聯 PA、PB；用刻度尺量這兩線段的長，便知道 $PA=PB$。因此得到下面的結論：



一線段的垂直平分線上任一點，和這線段的兩端等距離。

§109. 如圖，P 為線段 AB 的垂直平分線外一點，聯 PA、PB。用刻度尺量這兩線段的長，便知道 $PB>PA$，或 $PB<PA$。由此得到下面的結論：

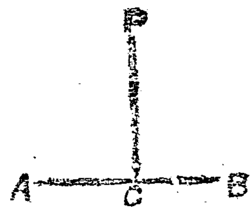


一線段的垂直平分線外任一點，和這線

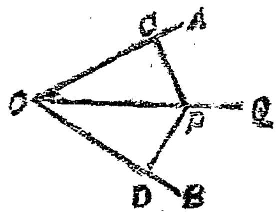
段兩端的距離不等。

§110. 點和直線的距離　從一點到直線引垂線,這垂線的長,叫做這點和這直線的距離。

如圖,AB 爲一直線,PC 爲自 P 點到 AB 所引的垂線。PC 的長,就叫做 P 點和直線 AB 的距離。



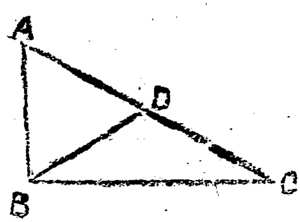
§111. 如圖,作任意角 AOB,引分角線 OQ,在 OQ 上任取一點 P;從 P 到兩邊 OA、OB 各引垂線 PC、PD。



用刻度尺量這兩線段的長,便知道 $PC=PD$,由此得到下面的結論:

一角的分角線上任一點和這角的兩邊等距離。

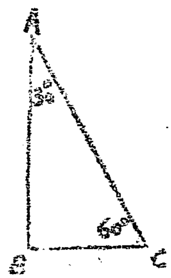
§112. 如圖,作直角三角形 ABC;$\angle B$ 是直角。取 AC 的中點 D,聯 BD。用刻度尺量得 $BD=AD=DC$。由



此得到下面的結論：

直角三角形斜邊的中點和三頂點等距離。

§113. 如圖，作直角三角形 ABC，$\angle B$ 是直角，$\angle A=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$。用刻度尺量 AB、AC、BC 三邊的長，就可以發見 $AC=2BC$。因此得到下面的結論：



若直角三角形的銳角爲 30°、60°，那末最小角所對的邊，等於斜邊的一半。

習題七

1. 三角形 ABC 的底邊 BC 長 [illegible] 厘米，AB、AC 兩邊的中點爲 D 和 E，問線段 DE 長多少厘米？
2. 許多平行線和一直線交於 A、B、C、D、E、……，和另一直線交於 A'、B'、C'、D'、E'、……，如果 $AB=BC=CD=DE=\cdots\cdots$，而且 $A'B'=5$ 厘米，問 $B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、……諸線段各長若干厘米？
3. 兩點和一線段的兩端各爲等距離，問連這兩點所成的直線和原線段有什麼關係？
4. 從一角的平分線上一點到這角的一邊引垂線，其長爲 8 厘米，問從這一點到他邊所引的垂線有多少長？
5. 等腰梯形 $ABCD$ 的兩底爲 AB 和 CD，已知 $\angle B=70$

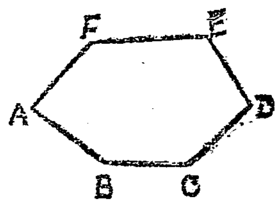
問其他各角的度數？

6. 任意梯形 $ABCD$ 的兩腰爲 AB、CD，已知 $\angle B=75^\circ$；$\angle D=120^\circ$，問 $\angle A$ 和 $\angle C$ 的度數？

7. 以直角三角形斜邊的中點作圓心，這點和任一角頂的距離做半徑畫圓；問這圓是否通過三角形的三個頂點？

8. 直角三角形的兩銳角爲 30°、60°；如果最小邊的長是 7 厘米，問最大邊的長？

§114. 如圖，作任意多角形 $ABCDE\cdots\cdots$，用量角器量 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$、$\angle E$、$\cdots\cdots$ 的度數而求其和，就可以發見

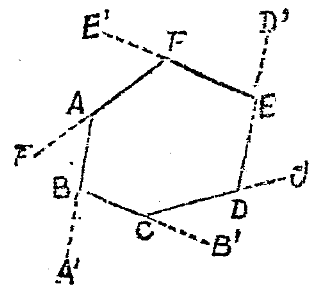


$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\cdots\cdots=(2n-4)R\angle,$$

n 表多角形的邊數。例如三角形諸內角的和是 $(2\times3-4)R\angle=(6-4)R\angle=2R\angle$。四邊形諸內角的和是 $(2\times4-4)R\angle=(8-4)R\angle=4R\angle$。五角形諸內角的和是 $(2\times5-4)R\angle=(10-4)R\angle=6R\angle$。……因此得到下面的結論：

多角形各內角的和等於牠的邊數二倍減四，再乘以直角。

§115. 如圖,作任何多角形$ABCDE$……,延長AB、BC、CD、DE、EF、……各邊,用量角器量$\angle A'BC$、$\angle B'CD$、$\angle C'DE$、$\angle D'EF$、$\angle E'FA$、……諸外角的度數而求其和,便知道



$\angle A'BC+\angle B'CD+\angle C'DE+D'EF+\angle E'FA+\cdots\cdots=4R\angle$。由此得到下面的結論:

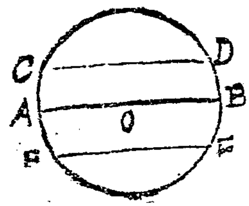
多角形諸外角的和等於四直角。

習 題 八

1. 正六角形的一角有幾度?
2. 正八角形的一角有幾度?
3. 求正五角形和正七角形諸內角的和?
4. 正五角形和正七角形的一角各有幾度?
5. 一多角形諸內角的和,是 16 直角,問這多角形有幾邊?
6. 正多角形的一角為 140°,問這正多角形有幾邊?
7. 四邊形的三個外角為 50°,70°、95°、問另一外角是鈍角還是銳角?

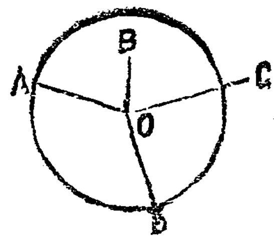
§116. 如下圖,O為圓心,AOB為直徑,CD

EF、……爲任意弦。用刻度尺量 AB、CD、EF、……諸弦的長，就可發見 CD、EF、……中任一弦都小於 AB。因此得到下面的結論：



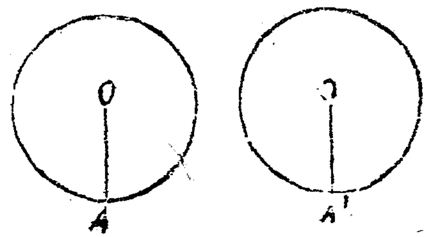
直徑是最大的弦。

§117. 如圖，O 爲圓心，B 爲圓內任一點，A 爲圓周上任一點，C 爲圓外任一點，OD 爲半徑，聯 OA、OB、OC、諸線段，用刻度尺量 OA、OB、OC、OD 的長，就可發見 $OB<OD$，$OA=OD$，$OC>OD$。由此得到下面的結論：



圓內一點和圓心的距離小於半徑，圓周上一點和圓心的距離等於半徑，圓外一點和圓心的距離大於半徑。

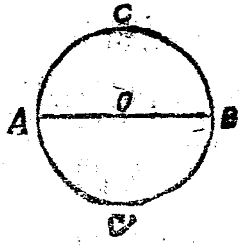
§118. 如圖，O 爲一圓的圓心，OA 爲半徑；O' 爲另一圓的圓心，



$O'A'$為其半徑。已知 $OA=O'A'$。把 O 圓重在 O' 圓上，令 O 和 O' 重合，OA 和 $O'A'$ 重合，便可發見兩圓完全重合。由此得到下面的結論：

半徑相等的兩圓相等。

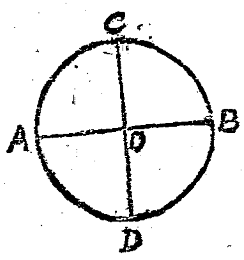
§119. 如圖，O 為圓心，AOB 為直徑，以 AOB 作摺痕，把 ACB 部分重合在 $AC'B$ 部分上，便知道這兩部分完全重合。由此得到下面的結論：



圓的直徑把圓和圓周分成兩個全等的部分。

§120. 半圓和半圓周　如上節所述，這兩個全等的部分都叫做半圓，弧 ACB 或 $AC'B$ 都叫做半圓周。

§121. 如圖，O 為圓心，AOB 和 COD 是互相垂直的兩直徑，以 AB 作摺痕，把 ADB 部分重在 ACB 部分上，便知道這兩部分完全重合，而且 D 點合於 C 點。再以 CO 作摺痕，把 OBC 部分重在 AOC 部分上，這兩部分也完全重合，而且 B 點重 A 在點。



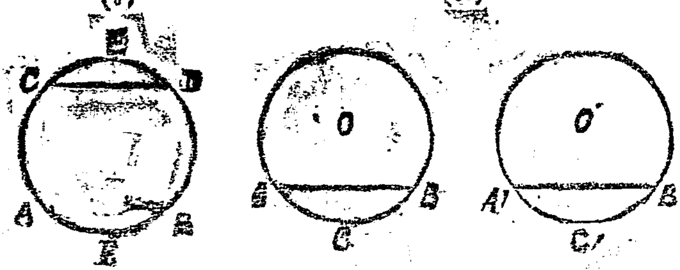
由此知道四部分 AOC、BOC、AOD、BOD 完全相等，因得下面的結論：

互相垂直的兩直徑，把圓和圓周分成四等分。

§122. 四分圓或象限　如前節所述，這四個全等的部分，都叫做四分圓或象限。

§123. 如圖(i)在圓內取兩相等弦 AB、CD，把 DEC 部分剪下，合在 AFB 部分上，令 C 點落

(i)　(ii)



在 A 點上，CD 落在 AB 上，便知道這兩部分完全重合，所以弧 DEC 等於弧 AFB。

如圖(ii)，O、O' 爲兩等圓的圓心，在 O 圓內取 AB 弦；在 O' 圓內取 $A'B'$ 弦，令 $AB \simeq A'B'$。把 O' 圓重在 O 圓上；使 O' 點合於 O 點，A' 點合於 A 點 $A'B'$ 合於 AB，便知道 $A'C'B'$ 部分和 ACB 部分完全重合；所以弧 ACB 等於弧 $A'C'B'$。

由以上兩種關係，得到下面的結論：

在同圓或等圓內，等弦所對的弧相等。

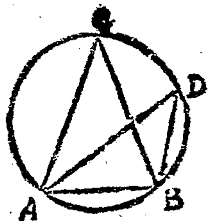
§124. 優弧和劣弧 大於半圓周的弧叫做優弧，小於半圓周的弧叫做劣弧。

［注意］本書所稱的弧都是指劣弧。

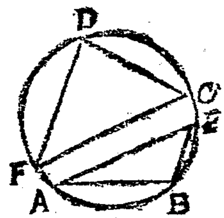
§125. 圓周角和圓心角 圓周上一點和任意弦或弧的兩端聯成直線；這兩直線所夾的角叫做這弦或弧所對的圓周角。圓心和弦或弧的兩端聯成兩半徑，這兩半徑所夾的角叫做這弦或弧所對的圓心角。

§126. 如圖(i)，在圓周上任取 AB 弧，做許多圓周角 $\angle ACB$、$\angle ADB$、……，用量角器量各角的度數，便知 $\angle ACB=\angle ADB=\cdots\cdots$。

(i)



(ii)



如圖(ii)，在圓內取許多相等弦 AB、CD、…，作許多圓周角 $\angle AFB$、$\angle CED$、……，用量角器量

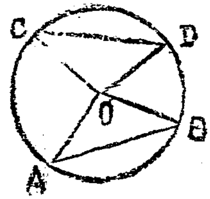
各角的度數，便知道

$\angle AEB=\angle CFD=\cdots\cdots$。

由以上兩種關係得到下面的結論：

一圓內同弧或等弧所對的圓周角相等。

§127. 如圖，O 為圓心；已知弧 AB 等於弧 CD，聯 OA、OB、OC、OD。用量角器量 $\angle AOB$、$\angle COD$ 兩角的度數，便知道 $\angle AOB=COD$。



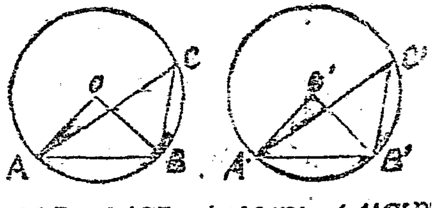
由此得到下面的結論：

一圓內等弧所對的圓心角相等。

習　題　九

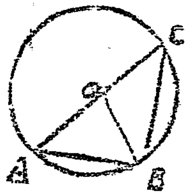
1. 一圓的半徑長 5 厘米，有 A、B、C 三點，離圓心的距離分別為 3 厘米、5 厘米、9 厘米，問這些點的位置怎樣？
2. 四分圓弧所對的圓心角有幾度？
3. 四分圓弧的中點和圓心聯成直線，把四分圓弧所對的圓心角分成兩個角，問這兩角有什麼關係，各有若干度？
4. 已知圓周的長為 15 厘米，如果這圓周 8 厘米，問這弧叫做甚麼弧？

§128. 如圖，O、O' 為兩等圓的圓心；已知弧 AB 等於弧 $A'B'$，聯 OA、OB、$O'A'$、$O'B'$；再作圓周角 $\angle ACB$ 和 $\angle A'C'B'$ 用量角器量 $\angle AOB$、$\angle ACB$、$\angle A'O'B'$、$\angle A'C'B'$ 的度數，就可發見 $\angle AOB = A'O'B'$；$\angle ACB = A'C'B'$。由此得到下面的結論：



兩等圓內的等弧所對的圓周角或圓心角相等。

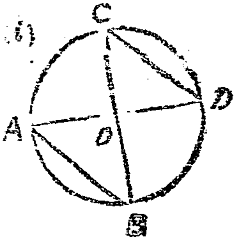
§129. 如圖，O 為圓心，弧 AB 所對的圓心角為 $\angle AOB$，其所對的圓周角為 $\angle ACB$，用量角器量這兩角的度數，就可發見 $\angle AOB = 2\angle ACB$，由此得到下面的結論：



同弧或等弧所對的圓心角為圓周角的二倍。

§130. 如圖(i)，作 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 兩個相等的圓心角，把 COD 部分剪下，疊在 AOB 部分上，O 點落在 O 點，OC 落在 OA，那末 OD 也落在 O

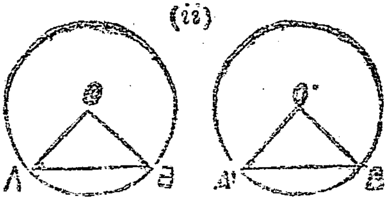
(i)



上，因 OA、OB OC、OD 都是半徑，所以 C 點落在 A 點，D 點落在 B 點上。由此可以知道 COD 部分和 AOB 部分完全重合，同時 CD 弧必重合於 AB 弧。

如圖(ii)，O、O' 爲兩等圓的圓心；作圓心角 $\angle AOB$ 等於圓心角 $\angle A'O'B'$，把 O' 圓置在 O 圓上，令 O' 點落在 O 點；$O'A'$ 落在 OA 上；那末 $O'B'$ 必落在 OB 上。因 OA、OB、$O'A'$、$O'B'$ 是兩等圓的半徑，彼此相等，所以 A' 點落在 A 點，B' 點落在 B 點上。由此可知 $A'O'B'$ 部分和 AOB 部分完全重合；同時 $A'B'$ 弧必重合於 AB 弧。

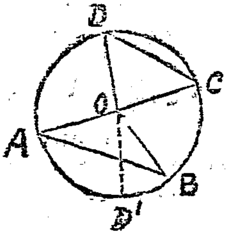
(ii)



從以上的兩種關係，得到下面的結論：

在同圓或等圓內，相等圓心角所對的弧相等。

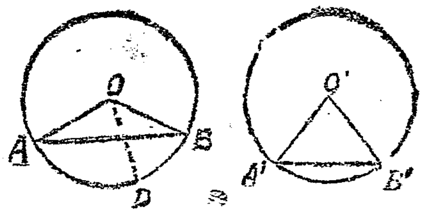
(i)



§131. 如圖(i)，已知弧 AB 大於弧 CD，聯 OA、OB、OC、OD，用量角器量 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 的度數，就可發見 $\angle AOB > \angle COD$。

如圖(ii)，O、O'為兩等圓的圓心，已知弧$\overset{\frown}{AB}$大於弧$\overset{\frown}{A'B'}$，聯OA、OB、$O'A'$、$O'A'$。用量角器量$\angle AOB$和$\angle A'O'B'$的度數，就可知道$\angle AOB>\angle A'O'B'$。

(ii)



由以上兩種關係得到下面的結論：

在同圓或等圓中，大弧所對的圓心角大於小弧所對的圓心角。

§143. 如前節圖(i)，已知$\angle AOB>\angle COD$，把COD部分剪下重在AOB部分上，令O點落在O點，OC落在OA上。因爲$\angle AOB>\angle COD$，所以OD必落在OD'的位置。由此可以看到弧$\overset{\frown}{AB}$大於弧$\overset{\frown}{CD}$。

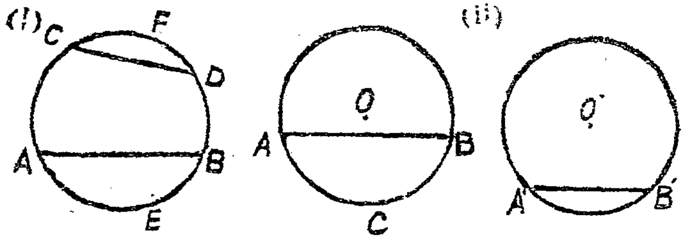
如前節圖(ii)，已知$\angle AOB>\angle A'O'B'$，把O'圓重在O圓上，令O'點落在O點，$O'A'$落在OA上。因爲$\angle AOB>\angle A'O'B'$，所以$O'B'$必落在OD的位置。由此可以看到弧$\overset{\frown}{AB}$大於弧$\overset{\frown}{A'B'}$。

從以上兩種關係，得到下面的結論，

在同圓或等圓內，圓心角大的所對的弧也

大。

§133. 如圖(i),已知弧 AB 大於弧 CD,用刻度尺量弦 AB、CD 的長;便知道 $AB>CD$。



如圖(ii),O、O' 為兩等圓的圓心,已知弧 AB 大於弧 $A'B'$,用刻度尺量弦 AB、$A'B'$ 的長,也可以知道 $AB>A'B'$　由以上兩種關係,得到下面的結論:

在同圓或等圓內,大弧所對的弦,比小弧所對的弦大

§134. 如前節圖(i),已知弦 AB 大於弦 CD;把 CFD 部分剪下,重在 AEB 部分上,令 C 點落於 A 點,則 D 點必落在 AB 弧上的 E 點,這就是弧 AB 大於弧 CD。

如前節圖(ii),O、O' 為兩等圓的圓心,把 O' 圓重在 O 圓上,令 O' 點落在 O 點,A' 點落在 A 點上;便知道 B' 必落在弧 AB 上的 C 點,這就是弧 AB 大於弧 $A'B'$。

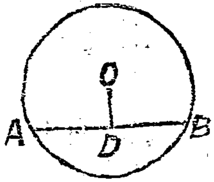
由以上兩種關係，得到下面的結論：

在同圓或等圓內：大弦所對的弧比小弦所對的弧大。

習題十

1. 把圓周分成十六等分。
2. 一圓的圓心角爲 70°、85°；問這兩角所對的弧或弦是否相等？
3. 在不等圓的圓周上截取兩相等弧；這兩弧所對的圓心角相等麼？那一個大？
4. 60° 的圓心角所對的弧長 3 厘米，問圓周長多少？
5. 2 厘米長的弧所對的圓心角是 45°，問圓周長多少？
6. 弦和弧有什麼關係？
7. 若半徑把弧分成三等分，能否把這弧所對的弦分成三等分？

§139. 如圖，O 爲圓心，AB 爲任意弦，自 O 到 AB 引垂線 OD，用刻度尺量 AD 和 BD 兩線段的長，知道 $AD=BD$。因此得到下面的結論：



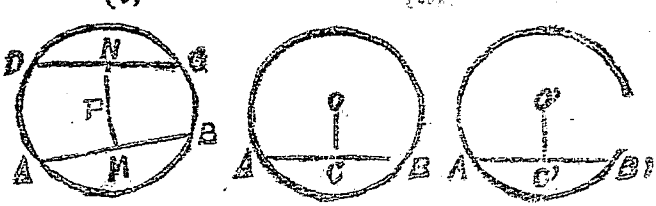
自圓心引垂直於弦的直線必通過弦的中點。

§136. 如上圖，取任意弦 AB 的中點 D，聯 OD，用量角器量 $\angle ADO$、$\angle BDO$ 的大小，就可發見 $\angle ADO=\angle BDO=R\angle$。由此得到下面的結論：

圓心和弦的中點聯結的直線必垂直於弦。

§137. 如圖(i)，P 為圓心，作兩等弦 AB 和 CD；自 P 到 AB、CD 各引垂線 PM、PN。用刻度尺量 PM、PN 兩線段的長，就可發見 $PM=PN$。

(i)　　　　(ii)



如圖(ii)，O、O' 為兩等圓的圓心，AB、$A'B'$ 為兩等弦，從 O、O' 到 AB、$A'B'$ 分別引垂線 OC、$O'C'$。用刻度尺量 OC、$O'C'$ 兩線段的長，就可發見 $OC=O'C'$。

由以上兩種關係得到下面的結論：

在同圓或等圓內，等弦和圓心的距離相等。

§138. 如前節圖(i)，P 為圓心，AB、CD 為兩

弦；自 P 到 AB、CD 各引垂線 PM、PN，如果 $PM=PN$，用刻度尺量 AB、CD 兩線段的長，就可發見 $AB=CD$。

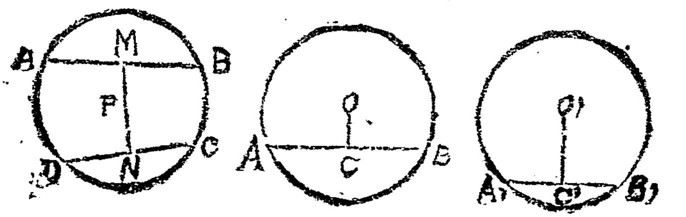
如前節圖(ii)，O、O' 為兩等圓的圓心，於 O 圓內作 AB 弦，再於 O' 圓內作 $A'B'$ 弦，從 O、O' 到 AB、$A'B'$ 分別引垂線 OC、$O'C'$，如果 $OC=O'C'$，用刻度尺量 AB、$A'B'$ 兩線段的長，就可發見 $AB=A'B'$。

由以上兩種關係，得到下面的結論：

在同圓或等圓內，和圓心等距離的弦相等。

§139. 如圖(i)，P 為圓心，弦 AB 大於弦 CD，從 O 引 AB、CD 的垂線 PM、PN，用刻度尺量 PM、PN 兩線段的長就可發見 $PM<PN$。

(i)　　　　　　　　(ii)



如圖(ii)，O、O' 為兩等圓的圓心，弦 AB 大於弦 $A'B'$，從 O、O' 各引垂線 OC、$O'C'$，用刻度尺量 OC、$O'C'$ 兩線段的長，就可發見 $OC<O'C'$。

由以上兩種關係，得到下面的關係：

在同圓或等圓內，如果兩弦不等，小弦到

圓心的距離等於小弦到圓心的距離。

§40 如前節圖一(i),P 爲圓心,AB、CD 爲兩弦,從 P 引 AB、CD 的垂線 PM、PN,如果 $PM<PN$,用刻度尺量 AB、CD 兩弦的長,就可發見 $AB>CD$。

如前節圖一(ii),O、O' 爲兩等圓的圓心,AB、$A'B'$ 爲兩弦,從 O、O' 到 AB、$A'B'$ 分別引垂線 OC、$O'C'$,如果 $OC<O'C'$,用刻度尺量 AB、$A'B'$ 兩線段的長,就可發見 $AB>A'B'$。

由以上兩種關係,得到下面的結論:

在同圓或等圓內,距圓心遠的弦,比距圓心近的弦小。

習題十一

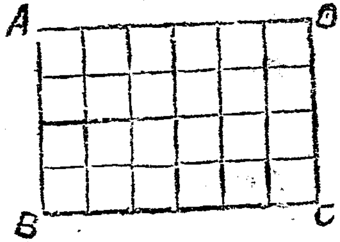
1. 圓心和弦的兩端及中點各聯成直線,所成的兩三角形有甚麼關係?
2. AB、CD 爲圓內的兩弦,AB 距圓心 5 釐米,CD 距圓心 3 釐米,問 AB、CD 兩弦孰大?
3. AB、CD 爲同圓的兩弦,AB 長 8 釐米,CD 長 [illegible] 釐米,問 AB、CD 和圓心的距離孰大?
4. 圓心和弦的中點及一端各聯成直線,所成三角形的三邊中那一邊大?
5. 弦 AB 長 7 厘米,從圓心 O 到 AB 引垂線 OC,問 AC、BC 有多少長?

第五章 平面形的度量

§141. 直接度量和間接度量 用度量單位直接去量某個量，讀出這量是單位的幾倍或幾分之幾，這種量法叫做直接度量。前章中，用刻度尺量線段的長短或量角器量角的大小，都屬於直接度量。可是幾何圖形種類很多，僅用一種直接度量法，往往不易求得所度的量；故必另設別種單位去量牠。例如平面形內所含大小的量叫做面積。要計算這面積，僅用長和角的單位當然不能計算；所以要設一種單位，叫做面積單位。這種單位是從長的單位導出的。如果平面形用長闊各 1 厘米的小正方形做面積的單位，這單位叫做 1 平方厘米。如果平面形用長闊各 1 寸的小正方形做面積的單位，這單位叫做 1 平方寸。用這些單位去量平形面，看牠含有幾個單位面積或含這單位的幾分之幾，就可知道平面形的面積是幾平方厘米或 1 平方厘米的幾分之幾。

這種量法因爲是間接的，而不是直接的；所以叫做間接度量。立體的體積和球面積等都用這度量法求出。

§142. 長方形或矩形的面積　如圖，$ABCD$ 是長方形，假定 AB 是某單位的四倍，CD 是某單位的六倍。先把 AB 分成四等分，過各分點



引 AB 的垂線，把長方形 $ABCD$ 分做四個小長方形；再把 BC 分成六等分，過各分點引 BC 的垂線，把長方形 $ABCD$ 分做二十四個小正方形每個正方形的邊都等於單位長，所以這些正方形就是單位面積。如果單位是長一厘米，這單位面積就等於一平方厘米。那末這長方形的面積等於 24 平方厘米。實際上計算長方形的面積，並不要像上面一樣計算單位面積的個數。如上圖 BC（長）是單位長的六倍，AB（闊）是單位長的四倍，所以長方形 $ABCD$ 的面積等於 $6\times4=24$ 個單位面積。由此得到求長方形面積的公式如下：

長方形的面積＝長×闊

若用 A 表長方形的面積，L 表長，H 表闊；上面的公式可寫成

$$A=L\times H$$

[注意]如果長方形的兩邊(長和闊)含有單位的小數,可用十進低級單位量度兩邊的長,依同法求得長方形的面積,但這時的面積單位也須用低級的。例如長方形的兩邊長5·8厘米和4·3厘米先將厘米化成毫米,用上法求得長方形的面積爲

$$58\times43=2494 \text{ 平方毫米。}$$

§143. 正方形的面積 長和闊相等的長方形叫做正方形,所以正方形是特殊的長方形,牠的面積等於長或闊的自乘。如用 A 表正方形的面積,a 表正方形的一邊(長或闊),那末,求正方形面積的公式如下:

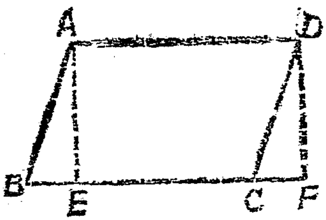
$$A=a^2$$

§144. 平行四邊形的底和高 平行四邊形的任一組對邊都可作爲底,兩底間的距離叫做高。

§145. 割補法 把圖形的一部分割下,移到這圖形的他部分上,補成另一圖形,這種方法叫做割補法。平行四邊形的面積可用這方法求得,茲說明如下.

§146. 平行四邊形的面積 平行四邊形的

隣邊不互相垂直，所以不能用§142的方法，把平行四邊形分成許多正方形，以計算牠的面積。祇能用割補法把平行四邊形的一部分割去，補在他部分上，使成一長方形，然後計算其面積。



如圖，$ABCD$ 爲平行四邊形，從 A 引 BC 的垂線 AE，把直角三角形 ABE 割下，補在 DCF 的位置上，便成長方形 $AEFD$。所以平行四邊形 $ABCD$ 的面積和長方形 $AEFD$ 的面積相等。但長方形 $AEFD$ 的面積等於 $EF\times AE$。因 $EF=BC$，所以平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 $BC\times AE$。由此得求平行四邊形面積的公式如下：

平行四邊形的面積＝底×高

用 A 表平行四邊形的面積，B 表底，H 表高，上面的公式可寫成

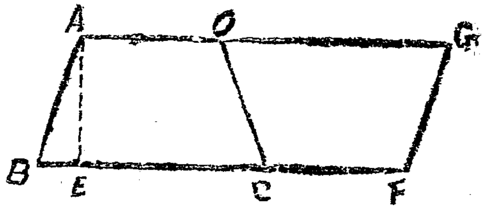
$$A=B\times H$$

§147. 梯形的面積　梯形兩底間的距離叫做高。

如圖 $ABCD$ 是梯形，AE 爲高。另取一個相

$ABCD$ 全等的梯形,令其兩底上下倒置,配在梯形 $ABCD$ 旁,成一平行四邊形 $ABFG$。因平行四邊形的面積等於底乘高,卽 $BF\times AE$。所以

$$2ABCD=BF\times AE, \quad \therefore ABCD=\frac{1}{2}BF\times AE。$$

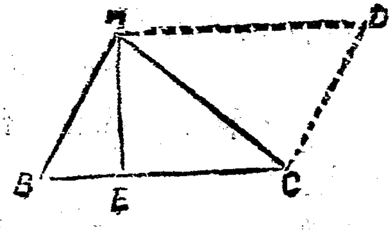


但
$$BF=BC+CF=BC+AD$$
$$\therefore ABCD=\frac{1}{2}(BC+AD)AE$$

卽梯形的面積等於兩底的半和乘高。用 A 表梯形的面積, h 表高, a 和 b 表上下兩底,卽得求梯形的面積公式如下:

$$A=\frac{1}{2}(a+b)h$$

§148. 三角形的面積　從三角形一頂點到對邊所引垂線的長叫做高,所以三角形有三個高。



如圖; ABC 爲三角形,另取一個和 ABC 全等的三角形;

把牠上下顚倒，配在原三角形 ABC 旁，成一平行四邊形 $ABCD$。因平行四邊形的面積等於底乘高，所以

$$2\triangle ABC=BC\times AE;\quad \therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}BC\times AE$$

卽三角形的面積等於底乘高的一半。用 A 表三角形的面積，H 表高，B 表底，卽得求三角形面積的公式如下：

$$A=\frac{1}{2}B\times H_{\circ}$$

習　題　一

1. 正方形一邊的長爲 5.4 厘米，求牠的面積。
2. 正方形面積爲 15129 平方厘米，問邊長多少？
3. 長方形兩隣邊的長爲 3·7 和 8·2 厘米，求牠的面積。
4. 長方形一邊的長爲 27·3 厘米，面積爲 458·64 平方厘米，問其他三邊長多少？
5. 平行四邊形的底爲 12 厘米，高爲 5·7 厘米，求牠的面積。
6. 平行四邊形的底爲 7.4 厘米，面積爲 63·64 平方厘米，求牠的高。
7. 平行四邊形的高爲 6·3 厘米，面積爲 25·83 平方厘米，求牠的底。
8. 梯形的兩底爲 14 厘米和 136 厘米，高爲 12 厘

米求牠的面積。

9. 梯形的兩底爲 3 厘米和 8 厘米，面積爲 66 平方厘米，求牠的高。

10. 梯形的一底爲 5 寸，高爲 1·2 寸，面積爲 11·9 平方寸，求另一底的長。

11. 三角形的底邊爲 98 厘米，面積爲 18·13 平方厘米，求牠的高。

12. 三角形的高爲 5·3 厘米，面積爲 19·11 平方厘米，求牠的底。

13. 三角形的底爲 7·5 厘米，高爲 7·6 厘米，求牠的面積。

14. 面積單位和長的單位有何區別？

15. 有兩個面積相等的長方形，一長方形的兩邊爲 3·4 和 6·3 厘米；另一長方形的一邊爲 3·57 厘米，問他一邊長多少？

16. 有一長方形地面，牠的面積是 576 平方尺，如果長邊是闊邊的四倍，問長闊各若干？

17. 有一長方形地面，牠的面積是 228 平方尺，如果長比闊多 7 尺，問長闊各多少？

18. 長方形的周長爲 5 尺 8 寸，如果長邊比闊邊多寸，問長闊各多少？

19. 有長方形地面，長爲 180 尺，闊爲 1̒0，尺現在要把長方形的周圍舖一等寬的道路，令牠的面積等於 24'4平方尺，問這道路的寬有幾尺？

20. 長方形的一邊長 9 尺，另一邊長 7 尺，現在要把長邊加長，另作一長方形，令牠的面積等於原長方形的二倍半，問這長邊須加長多少？

21. 有一長方形高 12·5 厘米，底長 24·6 厘米；現在要做一面積相等的三角形，已知三角形的高爲 7·5 厘米、求牠的底。

22. 有兩個面積相等的三角形，一個的高爲 15 寸，底爲 27 寸；另一個的底爲 225 寸，求牠的高。

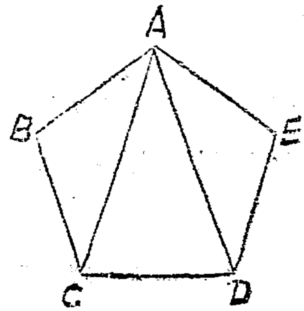
§149. 多角形的面積　求多角形的面積，沒有一定的方法，普通分做三種：

(a)多角形任一頂點和不相隣各頂點聯成的直線，叫做對角線。這些對角線，把 n 邊的多角形分做 $(n-2)$ 個三角形。求這些三角形的面積，一一加合起來，就是多角形的面積。

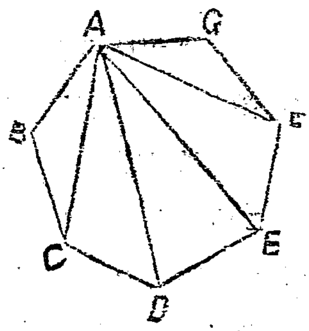
如 (i) 圖，$ABCDE$ 是五角形，聯對角線 AC、AD，因爲 $n-2=5-2=3$，所以把牠分做三個三角形，由是可知這五角形的面積 $=\triangle ABC+\triangle ACD$

$+\triangle ADE$,

(i)



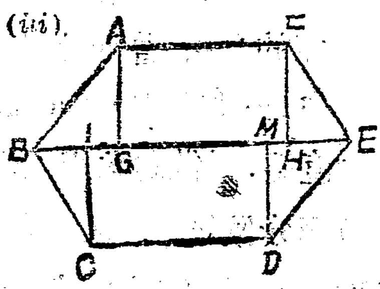
(ii)



如(ii)圖，$ABCDEFG$ 是七角形，聯對角線 AC、AD、AE、AF，因為 $n-2=7-2=5$，所以把牠分做五個三角形。由是可知這七角形的面積 $=\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE+\triangle AEF+\triangle AFG$。

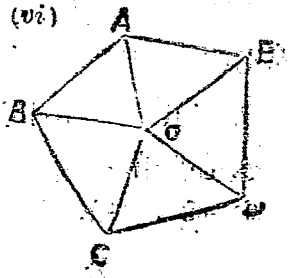
(b)如(iii)圖，$ABCDEF$ 是六角形，聯對角線 BE，自 A、C、D、F 諸點到 BE 各引垂線，把原形分做許多直角三角形和許多梯形，求這些三角形和梯形的面積，一一加合起來，就是原多角形的面積，所以六角形

(iii)



$ABCDEF=\triangle ABG+\triangle CBL+\triangle MED+\triangle FEH+$ 梯形 $AGHF+$ 梯形 $CDML$。

(c) 在多角形內取一點，這點和各頂點聯成直線，把 n 邊的多角形分做 n 個三角形，求這 n 個三角形的面積，一一加合起來，就是多角形的面積 如(iv)圖，$ABCDE$ 爲五角形，在形內任取 O 點，聯 OA、OB、OC、OD、OE，因爲 n 等於5；

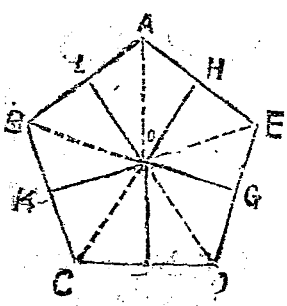


所以把牠分做五個三角形，由是可知這五角形的面積＝

$$\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODE+\triangle OEA,$$

§150. 正多角形的中心、頂心距和邊心距

正多角形內一點，和各頂點等距離的，叫做正多角形的中心。這點和各頂點的距離，叫做頂心距。這點和各邊的距離都相等，這距離叫做邊心距。如圖，$ADCDE$ 爲正五角形，$OA=OB=OC=OD=OE$，$OF=OG=OH=OL=OK$。這 O 點叫做正五角形 $ABCDE$ 的中心，OA 等叫做頂心距，OF 等叫做邊心距。



§151. 正多角形的面積　聯結正多角形各項心距，把 n 邊正多角形分做 n 個全等的等腰三角形；牠的底是正角多的形的邊，牠的高是邊心距。因爲三角形的面積等於底乘高的一半所以正多角形的面積，等於正多角形的一邊乘邊心距的一半，再乘以 n 倍；即等於邊數的一半，乘一邊的長，再乘以邊心距，由是得正多角形的面積公式於下：

$$正多角形的面積=\frac{n}{2}\times 邊長\times 邊心距=\frac{1}{2}\times 正多角形的周\times 邊心距.$$

如果以 A 表正多角形的面積，以 a 表邊長，以 l 表邊心距，以 P 表周長；上式可簡記爲

$$A=\frac{n}{2}\times a\times l=\frac{p}{2}\times l.$$

如前節的圖，$ABCDE$ 是正五角形；AB 是一邊的長，OL 是邊心距，所以牠的面積等於

$$\frac{5}{2}AB\times OL.$$

習　題　二

1. 各邊都相等的多角形，是不是各角都相等？各角都相等的多角形，是不是各邊都相等？試畫許多圖形去解決這兩個問題。

2. 正五角形的每邊長 5 厘米，邊心距長 3·6 厘米，求牠的面積。

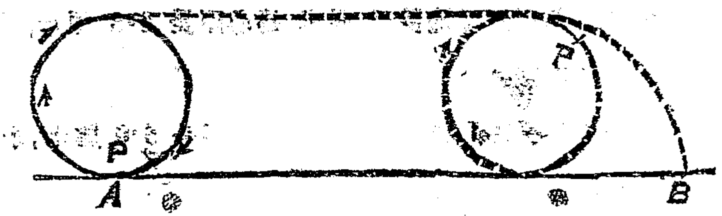
3. 正八角形的每邊長 7 厘米，邊心距是 5·6 厘米，求牠的面積。

4. 正六角形的每邊長 8 厘米，面積爲 1032 平方厘米求牠的邊心距。

5. 正十角形的邊心距爲 6·5 厘米，面積爲 126·25 平方厘米，求牠的邊。

9. 正多角形的邊心距爲 3·5 厘米，面積爲 182·3 平方厘米，求牠的邊數。

516. 圓周率　取一圓形的物（鎳幣、銅幣、車輪等）在牠的周上做一記號，令沿一直線迴轉在未迴轉以前，這記號和直線接觸，迴轉後，這記號又新和直線接觸，中間轉過的距離，就是圓周的長，所以這圓周的長，就可在直線上量得。或用細絲繞這物的周圍使絲的兩端剛剛相合，放開後量絲的長，就曉得這圓周的長。再量出直徑的長，把圓周的長和直徑的長相比較，求牠的比值。用同樣的方法，把其他的圓形物多量幾種，一一求出圓周和直徑的比值，雖不



能說個個都是相等，但是近似的數值，差不多總是$3\frac{1}{7}$光景。如果用高深的理論去計算，曉得這比值是一常數，約等於3.14159265……。普通用希臘文字π表示這比值，叫做圓周率。如果用算式記出來，就是

$$\frac{\text{圓周的長}}{\text{直徑}}=\pi。$$

§153. <u>圓周的長</u>　由前節的關係，就可以曉得

圓周的長$=\pi\times$直徑$=\pi\times2$半徑

如果以 b 代表直徑，以 r 代表半徑，以 c 代表圓周的長，可簡記為

$$c=\pi\times d=2\pi r$$

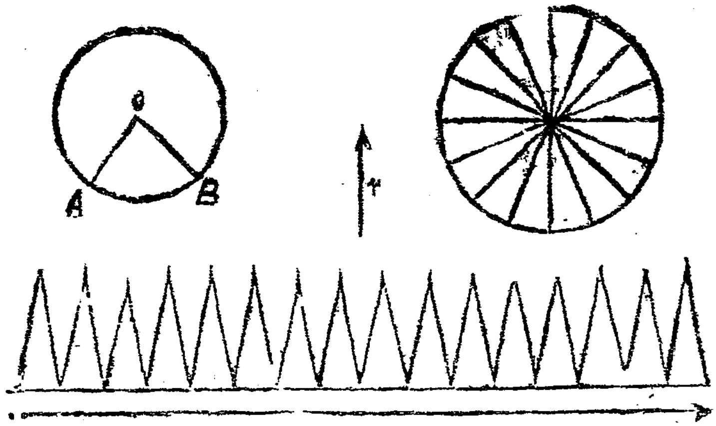
§154. <u>弧長</u>　圓周上一段弧的長度，用§152的迴轉法或用細絲可以量得。把這一段弧長和圓周比較，求其比值，再把這弧所對的圓心角和圓周角(即$360°$)相比較，就可以發見

弧長：圓周＝這弧所對的圓心角：$360°$

即　$弧長=\frac{這弧所對的圓心角}{360°}\times 圓周$

或　$弧長=\frac{這弧所對的圓心角}{360°}\times 2\pi r$

§155. 扇形　圓內兩半徑和其所截弧圍成的圖形，叫做扇形。如下圖的圓內 OAB 部分。

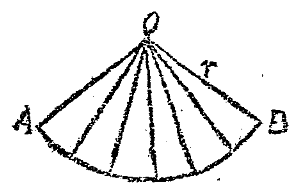


§156. 圓的面積　如上圖，將圓分做許多微細的扇形。求出這些扇形的面積，一一加合起來，就是圓的面積。扇形的形狀，兩邊是直線，一邊是弧，和三角形不同，所以牠的面積，也不能和三角形一樣計算。但是極小的扇形，這弧差不多可以看牠是直線；所以扇形的面積可以看牠是三角形的面積。那末這圓的面積，就可以看做是這許多三角形的面積一一加合起

來的。但是這些三角形的高，可以看做半徑，所有底邊的和，可以看牠是圓周，由是可知圓的面積，等於圓周的半長乘以半徑。如果把這許多扇形剪下，一一排列起來，很容易看到這許多扇形底邊的和是圓周；所有牠們的高都等於r；所以圓的面積可以從這許多扇形求出來。今以C表圓周，r表半徑，A表圓的面積，就得

$$A=\frac{1}{2}Cr=\frac{1}{2}2\pi r\cdot r=\pi r^2$$

§157. 扇形的面積　如圖，OAB為扇形。把牠分做許多微細的扇形，這些扇形，就可以看牠是三角形。因為這些三角形



的高，都可以看做半徑，所有底邊的和，可以看做是AB弧，所以扇形OAB的面積等於$\frac{1}{2}AB\times r$。由是得一般扇形的面積公式於下：

$$\text{扇形的面積}=\frac{1}{2}\times\text{半徑}\times\text{弧長。}$$

利用§154的結果，得

$$\text{扇形的面積}=\frac{1}{2}\times\text{半徑}\times\frac{\text{圓心角}}{360^\circ}\times 2\pi r$$

$$=\pi r^2\times\frac{\text{圓心角}}{360^\circ}\text{。}$$

所以又得平面的公式 $\dfrac{\text{扇形的面積}}{\text{圓的面積}}=\dfrac{\text{圓心角}}{360}$。

習　題　三

1. 圓的半徑長 3 尺 5 寸，問圓周長多少？

2. 圓的半徑長 5 尺 8 寸，求牠的面積。

3. 30° 的圓心角，其所對的弧長爲 1 尺，問半徑長多少？

4. 在半徑等於 2 尺的圓周上，取 3 尺長的弧，問這弧所對的圓心角有幾度？

5. 扇形的半徑爲 1·5 厘米，圓心角爲 22°30′，求其弧長和面積。

6. 有一個圓形，其周圍長一百丈，問直徑長多少？

7. 以一點做圓心，同時畫兩個圓，一圓的半徑長 3 尺 5 寸，另一圓的半徑長 5 尺 8 寸，問這兩圓間所生環狀部分的面積有多少？ 并問這兩圓周的差有多少長？

8. 有一圓形地面，牠的面積爲 625 平方尺，問直徑長多少？

9. 圓的面積爲 125 平方尺，牠的圓周多少？

10. 圓周等於 c 的圓，其面積有多少？ 利用這個結果，試求周長爲 10 尺的圓面積。

11. 扇形的面積爲 5·6 平方寸 半徑爲 4 寸,求弧長、

12. 兩圓半徑的比等於 7 比 9, 求 兩圓周長及面積的比。

13. 兩圓的半徑爲 3 寸及 4 寸。如果作一個正方形等於這兩圓面積的和,問這正方形的邊有多少長?

14. 畫一圓,和周圍長 60 厘米的正方形面積相等,問這圓的半徑長多少?

15. 兩圓的半徑爲 5 寸及 12 寸,另做一圓,令牠的面積等於這兩圓面積的和,問這圓的半徑長多少?

第六章　空間幾何學圖形

§158. 平面幾何學和空間幾何學　討論平面圖形性質的科學，叫做平面幾何學。討論平面圖形以外各種圖形性質的科學，叫做空間幾何學或叫做立體幾何學。

§159. 確定平面的條件　一平面含幾根直線或幾點，除這平面外，再沒有別個平面含這幾根直線或這幾點，那末這根直線或這幾點就確定這個平面。因爲這平面只有一個，沒有第二個，所以確定平面的條件，普通有四種。

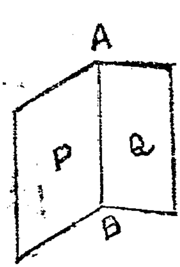
(a)相交兩直線確定一平面。

(b)一直線和不在這直線上的一點，確定一平面。

(c)不在同直線上的三點，確定一平面。

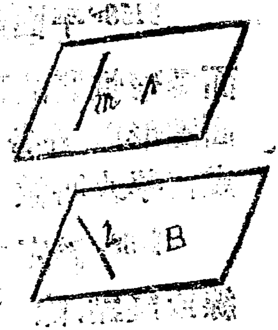
(d)平行二直線，確定一平面。

§160. 平面的交線　含兩平面公共點的線，叫做交線。平面和平面以直線相交，如圖，直線 AB，是 P、Q 兩平面的交線。

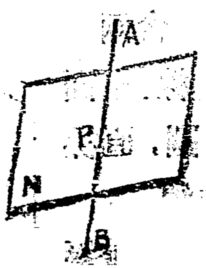


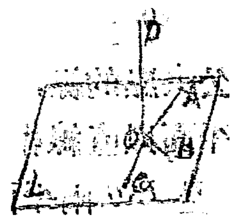
§161. 平行平面　兩平面無

論如何延展總不會相交的，叫做平行平面。因爲兩平面不能相交，所以兩平面上的一切直線也不能相交，但是這等直線，并不見得一定是平行的。如這種既不相交又不平行的直線，另外取一個名字，叫做不相交不平行的直線。如圖，A、B是平行平面，l、m是不相交不平行的兩直線

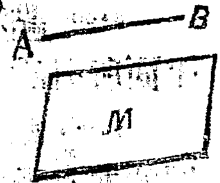


§162. 直線和平面 直線和平面，只交於一點。如果平面上過這交點的一切直線，都和這直線垂直，叫做這直線和平面垂直或直交；否則叫做斜交，或這直線爲平面的斜線。如果直線和平面永遠不相交的，叫做直線和平面平行。如(i)圖，AB是N平面的斜線，P是牠的交點。如(ii)圖，O是DO和平面上的交點；OA、OB、

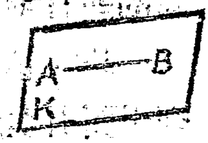




(iii)



(iv)



OQ都垂直於DQ，所以DQ是L平面的垂線。如(iii)圖，AB和平面M是永遠不相交的，所以AB平行於M平面，如果直線和平面既不相交又不平行，牠的全部都在這平面上時，叫作平面含這直線，或直線被這平面所含。如(iv)圖，平面K含直線AB。因爲平面可以擴張到無窮遠，所以直線的一部分在這平面上，就是全部在這平面上，

現在把前幾節的結果總括起來，列成一表如下：

(一)兩直線的位置關係
- (1)相交 } 確定一平面
- (2)平行 } 確定一平面
- (3)不相交不平行

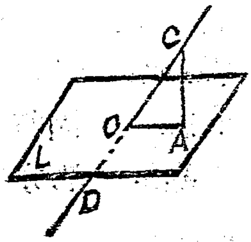
(二)直線和平面的位置關係
- (1)相交(交於一點，斜交或直交)
- (2)平行
- (3)平面含直線的全部

(三)兩平面間的位置關係
- (1)相交(交於一直線)
- (2)平行

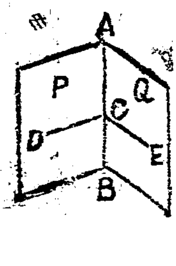
§163. 點和平面的距離 從平面外一點到平面所引的垂線長，叫做這點和平面的距離。

§164. 兩平行平面間的距離 兩平行平面間的共有垂線，叫這二面間的距離。

§165. 直線和平面的交角 從直線上一點到平面引垂線，其垂足和交點聯成的直線和原直線所夾的角，叫做這直線和平面的交角。如圖，平面 L 和直線 CD 交於 O，從 C 點到 L 平面引垂線 CA，聯 OA，這 COA 角就是 CD 和 L 平面的交角。

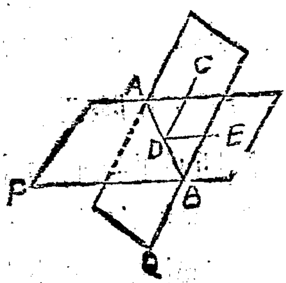


§166. 二面角和面角、面和稜 兩平面相交，牠的開口叫做二面角或兩平面的交角。過兩平面的交線上任一點，在兩平面上各引交線的垂線，這兩垂線的交角，叫做面角或直線角，這角就是二面角的大小，這兩個平面，叫做二面角的面，兩面的交線叫做稜。如圖，AB 是兩平面 P、Q 的交線，C 是 AB 上任一點，在 P 平面上引 CD 垂直於 AB，在 Q



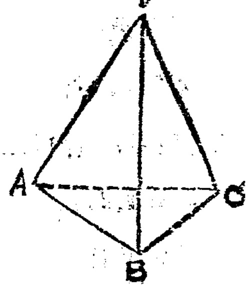
平面上引 CE 垂直於 AB。這兩直線 CD、CE 所成的角 DCE，就是兩平面 P、Q 的交角，P 和 Q 是二面的角的面，AE 是牠的稜。

§167 垂直平面　兩平面的交角爲直角，這兩平面叫做垂直平面。如圖，$\angle CD$ 等於直角，P、Q 兩平面叫做垂直平面，以記號 $\perp Q$ 於示牠。



§168. 多面角　三個或三個以上的平面會於一點，牠的開口叫做多面角，公共點叫做頂點。相隣兩平面的交線，叫做稜。在相隣兩稜中間的平面部分，叫做面。相隣兩稜所夾的角，叫做面角。兩個相隣平面，總成一個二面角，這等面角和二面角，叫做多面角的部分。

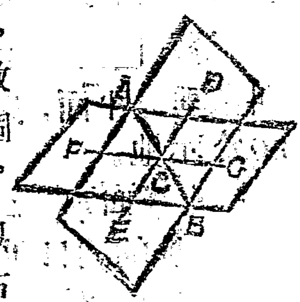
多面角有三面的叫做三面角；有四面的，叫做四面角，其餘準此。



多面角的大小，和各面的相互位置有關係，但是和各面的大小是沒有關係的。

如上圖，三個平面 VAB、VBC、VAC 會於 V 點，所以這個多面角叫做三面角；V 是牠的頂點，VA、VB、VC 是牠的稜，VAB、VAC、VBC 是牠的面，$\angle AVB$、$\angle BVC$、$\angle BVC$ 是牠的面角。

§ 69. 相鄰二面角和對頂二面角　兩平面相交所成四個二面角中，每相鄰兩個二面角，叫做相鄰二面角。不相鄰兩個二面角，叫做對頂二面角。因為面角或直線角，可以測二面角的大小，所以右圖中，$\angle DCG$、$\angle DCF$ 就是相鄰二面角，$\angle DCG$、$\angle FCE$ 就是對頂二面角。



習　題

1. 試在教室內看出兩平面交於一直線的實例，並舉出兩個相交平面和兩個平行平面的實例。

2. 試在教室內舉出直線和平面平行，及直線和平面垂直的實例。

3. 確定平面的四個條件，可以併做兩個條件，究竟怎樣併法，試述其理由。

4. 試用實物說明不相交不平行的兩直線。

5. 教室內有沒有垂直平面的實例?

6. 無論如何延長總不相交的兩直線，能不能說牠就是平行直線。

7. 對頂二面角，有什麽關係?

8. 相鄰二面角有什麽關係?

9. 在空間內過直線上一點和這線垂直的直線，是不是只有一根? 並問從直線外一點和這線垂直的直線有幾根?

10. 過平面上一點，畫許多直線和這平面相交。試檢查牠有幾根直線和這平面垂直。

11. 從平面外一點到這平面引許多直線，試檢查牠有幾根直線和這平面垂直。

12. 過直線上一點，作許多平面，試檢查牠有幾個平面和這直線垂直。

13. 過直線外一點，作許多平面，試驗查牠有幾個平面和這直線垂直。

14. 同時垂直於一直線的兩平面，必互相平行，試套用這理和 12 題的結果，說明過平面外一點和這平面平

15. 過平面外一點和這平面平行的直線，是不是只有一根？

16. 一平面和兩個平行平面相交，牠的交線是相交還是平行？

17. 一平面含他平面的垂線，問這平面有什麼關係？

18. 過平面上一直線，和這平面垂直的平面有幾個？過平面上一點，和這平面垂直的平面有幾個？

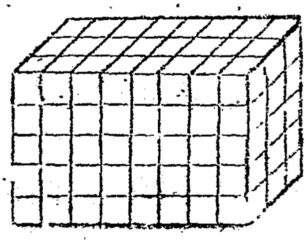
19. 相交二平面和一平面相交，如果這二平面的交線和這平面垂直，問這二平面和這平面是不是垂直？

20. 相交二平面各與一平面垂直，試檢查這二平面的交線，是不是和這平面垂直。

第七章　立體體積和面積的度量

§170. 體積的度量　立體所含大小的量，叫做體積　和計算面積時一樣，僅用長的單位或角的單位，不能計算體積，就是用面積單位，也不能計算牠，所以不得不另設一種單位。這種單位，也是同長的單位相應而生的，是間接的，不是直接的，所以是間接度量。普通取長、闊、高各等於單位長的小立方體，作體積單位。例如長、闊、高各一寸的小立方體，叫做一立方寸。長、闊、高各一厘米或一毫米的小立方體，叫做一立方厘米或一立方毫米。

§171. 直六面體或長方體　六個平面圍成的立體，叫做六面體。六面體中相鄰二平面的交線，叫做稜。相對面各各平行的，叫做平行六面體。平行六面體的任一組相對面，都可叫做底。稜和底面垂直的平行六面體，叫做直六面體，或長方體



如圖，用刻度尺量得直六面體的長、闊、高為8

寸、3寸、5寸，先把這直六面體剖做八片，再把每片分做三條，又把每條分做五塊，因爲所取的單位長是寸，所以每塊都是長、闊、高等於一寸的小立方體，就是單位體積。但這單位體積，共有120塊，所以這直六面體的體積，等於120立方寸。由是得直六面體的體積公式於下：

直六面體的體積＝長×闊×高。

如果以V代表牠的體積，a、b、c代表牠的長、闊、高，可簡記爲　$V=abc$.

長、闊、高都是相等的直六面體，叫做立方體，所以立方體的體積＝(每邊的長)^3，或簡記爲　$V=a^3$

把包圍立體各面的面積計算出來，再求牠的總和，這總和叫做表面積。因爲直六面體的各組相等面兩兩相等，所以

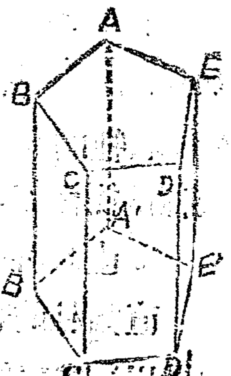
直六面體的表面積＝2×(長×闊＋長×高＋闊×高)

如果以S代表牠的表面積，可簡記爲

$$S=2(ab+ac+bc)$$

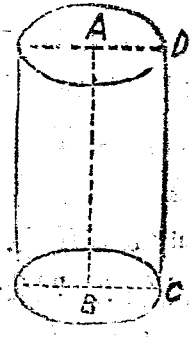
立方體的表面積＝6×(每邊的長)^2，或簡記爲　$S=6a^2$

§17. 柱體 成柱狀的立體，叫做柱體。柱體又分做角柱體和圓柱體兩種。角柱體的兩面，爲全等的多角形，在兩平行面之上；其他各面都是平行四邊形。這兩個多角形，叫做底面，其他各面都叫做側面。相隣兩側面的交線，叫做側稜。圓柱體的兩面，爲全等曲線形，這兩曲線形，叫做底面，在兩平行面之上；牠的側面也是曲面。最簡單的角柱體，是直角柱，兩底是互相平行的正多角形。諸側稜和兩底面垂直，所以側面都是相等的長方形，側稜就是他的高，如右圖(1)是。最簡單的圓柱體，是直圓柱，是用長方形的一邊作軸，迴轉一周而成。這軸的一邊叫做高，牠的對邊所成的曲面，叫做側面，其他兩對邊所成的，叫做底面，牠的半徑，就是直圓柱的半徑，如下圖(2)是。把直角柱或直圓柱的底面，



平行移動，可生直角柱或原直圓柱。換一句話說：直角柱或直圓柱，是由牠的底面平行移動而生。所以

直角柱的體積＝底面積×高。(38)



如果以A代表牠的底面積，h代表牠的高，V代表牠的體積，可簡記爲 $V=Ah$。

直圓柱的體積＝底面積×高。

如果以V代表牠的體積，A代表牠的底面積，h代表牠的高，r代表牠的半徑，可簡記爲 $V=\pi hr^2$ $(\because A=\pi r^2)$

又由以上所述的關係，得

直角柱的側面積＝底面的周×高。

直角柱的表面積＝側面積＋2底面積。

如果以S代表牠的表面積，以p代表牠的周，以h代表牠的高，以b代表牠的底面積，以L代表牠的側面積，可簡記爲 $L=p\times h$，$S=p\times h+2b$

直圓柱的側面積＝底面的周×高。

直圓柱的表面積＝側面積＋2底面積。

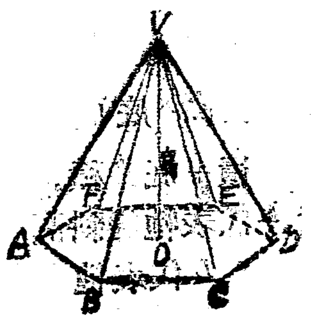
如果以S代表牠的表面積，以p代表牠的周，以h代表牠的高，以b代表牠的底面積，r代表牠的半徑，L代表牠的側面積，可簡記爲

$$L=p\times h=2\pi rh$$

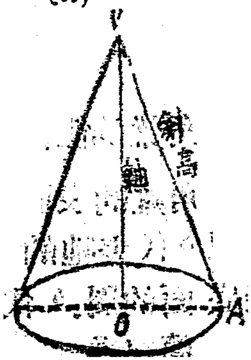
$S=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r(h+r)$。 $[\because p=2\pi r, b=\pi r^2]$

§173. 錐體　成錐狀的立體，叫做錐體，錐體又分做角錐和圓錐兩種。角錐體的一面爲任意多角形，叫做底面；其他各面都是三角形，有一公共的頂點。這公共的頂點，叫做角錐體的頂點；這許多三角形，叫做角錐體的側面；從頂點到底面的垂線長叫做角錐體的高；相隣兩三角形的交線，叫做側稜。圓錐體的一面爲曲線形的，叫做底面，牠的側面也是曲面。最簡單的角錐體，是直角錐，牠的底面是正多角形，側面都是全等的三角形；牠的高和底面垂直的，這垂足就是正多角形的中心；每個三角形的高都相等，這個高叫做斜高，如下圖(i)是。最簡單的圓錐體，是直圓錐，是用直角三角形裏夾直

(i)



(ii)



角的一邊做軸，迴轉一周而生。這做軸的一邊，叫做直圓錐的軸，就是牠的高；夾直角的另一邊所成的圓，叫做底面，這圓的半徑，就是圓錐的半徑；斜邊所成的曲面，叫做側面，這斜邊斜叫做斜高；邊斜和軸的交點，叫做頂點，如前圖(24)是。

做同底同高的柱體和錐體，用水灌入這兩體內，就可以發見柱體的容積，三倍於錐體的容積。但是柱體的體積，是等於底面積乘高，所以錐體的體積，是底乘高的三分之一，就是

直角錐的體積$=\frac{1}{3}$(底面積×高)，　或簡記爲

$$V=\frac{1}{3}Ah$$

直圓錐的體積$=\frac{1}{3}$(底面積×高)，　或簡記爲

$$V=\frac{1}{3}\pi hr^2;$$

直角錐的側面積$=\frac{1}{2}$×斜高×底面的周。

直角錐的表面積＝側面積＋底面積。

如果以S代表牠的側面積，M代表牠的斜高，P代表底面的周，b代表底面積，L代表牠的側面積，可簡記爲

$$L=\frac{1}{2}M.P,\quad S=\frac{1}{2}M.P+b$$

直圓錐的側面積$=\frac{1}{2}\times$斜高$\times$側面的周

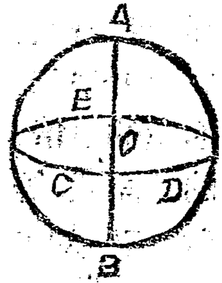
直圓錐的表面積$=$側面積$+$底面積

如果以S代表牠的側面積，M代表牠的斜高，P代表底面的周，b代表牠的表面積，L代表牠的側面積，r代表牠的半徑，可簡記爲

$$L=\frac{1}{2}M.P=\pi rM\quad(\because P=2\pi r)$$

$$S=\pi rM+\pi r^2+\pi r(M+r)\quad(\because b=\pi p^2)$$

§174. 球　用半圓的直徑做軸，把這半圓迴轉一周所生的立體，叫做球，這半圓周所成的曲面，叫做球面。球面上任何點，都和一定點距離，這距離叫做球的半徑，就是迴轉圓的半徑，這定點叫做球心，就是迴轉圓的圓心；過球心，其兩端在球面上的線段，叫做直徑，牠的長等於半徑的兩倍；過球心的平面，把



球分做兩個全等的部分，每部分就叫做半球。這個截面，是一個圓，叫做大圓。如圖，O是球心，AB是直徑，ECD是大圓，$CDAE$或$CDBE$是半球。

作一個空圓柱，令牠的高等於球的直徑，

把這球放在空圓柱內，牠的表面，當然和空圓柱的各面相接觸。再用水注入空圓柱內，等到注滿的時候，這水所佔的容積，就是空圓柱的容積和球的容積之差。但是水的容積，是空圓柱的容積三分之一，所以球的容積，是空圓柱的容積三分之二。如果以V代表球的體積，r代表球的半徑，(即空圓柱的半徑)得 $V=\frac{2}{3}\pi\cdot 2r\cdot r^2=\frac{4}{3}\pi r^3$。

作一個圓柱體，令牠的高等於底面的半徑，同時作一個球，令牠的半徑等於圓柱體底面的半徑。用一根絲圍繞這圓柱的側面；同時用這根絲圍繞半球，剛剛用盡；由是可知這個圓柱體側面積的兩倍，等於球的表面積。但是這圓柱體的側面積，等於$2\pi r^2$，所以球的表面積$=2\times 2\pi r^2=4\pi r^2$。如果以$S$代球的表面積，得$S=4\pi r^2$。由這個結果，立刻可以曉得球的表面積，四倍於大圓的面積(因為大圓的面積等於πr^2)。

習　題

1. 已知直六面體的長、闊、高是 5 公寸、9 公寸、6 公寸，求出牠的體積和表面積。

2. 已知直六面體的長是 8 公寸，闊是 9 公寸，體積是 504 立方公寸，求牠的高和表面積。

3. 已知直六面體的長是 12 公寸，闊是 7 公寸，表面積是 3?6 平方公寸，求牠的高和體積。

4. 已知直十二角柱體的底面積是 75 平方寸，高是 7 寸，求牠的體積。

5. 已知直七角柱體底面的周長是 21 寸，高是 9 寸，底面積是 32.697 平方寸，求牠的側面積和表面積。

6. 已知直五角柱體底面的周長 20 寸，底面積是 27.52 平方寸，表面積是 182 平方寸，求牠的高和側面積。

7. 已知直三角柱體的底面積是 $4\sqrt{2}$ 平方寸，側面積是 60 平方寸，高是 5 寸，求牠的表面積和底面各邊的長。

8. 已知直圓柱的半徑是 1.2 公寸，高是 8 公寸，求牠的體積、側面積和表面積。

9. 已知直圓柱體的半徑是 a，體積是 b，求牠的高、側面積和表面積。

10. 已知直角錐的斜高是 $8\frac{3}{4}$ 寸，底面的周是 $17\frac{1}{8}$ 寸，求牠的側面積。

11. 已知直角錐的高是 6 寸，底面積是 23 平方寸，表

牠的體積。

12. 已知直角錐的斜高是 18 寸，牠的底是正方形，每邊長 8 寸，求牠的表面積。

13. 已知直角錐的高是 17 公寸，體積是 283 立方公寸，求牠的底面積。

14. 已知直角錐的底面積是 9 平方公寸，體積是 21 立方公寸，求牠的高。

15. 已知直角錐的底面積是 20.0625 平方寸，表面積是 1472.0625 平方寸，底面的周是 57 寸，求牠的斜高和側面積。

16. 已知直角錐的斜高是 12 公寸，底面積是 144 平方公寸，表面積是 432 平方公寸，求牠底面的周長和側面積。

17. 已知直角錐的體積是 13.872 立方寸，高是 3.6 寸，如果牠的底面是正方形，問每邊長多少？

18. 已知直圓錐的高是 7.8 寸，底面積是 6.9 平方寸，求牠的體積。

19. 已知直圓錐的高是 10.5 寸，底面的半徑是 6.2 寸，求牠的體積。

20. 已知直圓錐的直徑是 12 寸，高是 9 寸，求牠的體

積。

21．已知直圓錐的直徑是 8 公寸，斜高是 5 公寸，求牠的表面積。

22．已知直圓錐的體積是 a，底的周是 b，求牠的高。

23．已知直圓錐的表面積是 c，底的周是 d，求牠的斜高。

24．已知立方體的體積是 50·653 立方公寸，求牠的表面積。

25．已知立方體的表面積是 201·84 平方公寸，求牠的體積。

26．球的半徑是 $9\frac{7}{8}$ 公寸，求牠的表面積和體積。

27．球的直徑是 36 公寸，求牠的表面積和體積。

28．球的大圓周是 18·8496 公寸，求牠的表面積和體積。

29．球的表面積是 12·5664 平方公寸，求牠的體積。

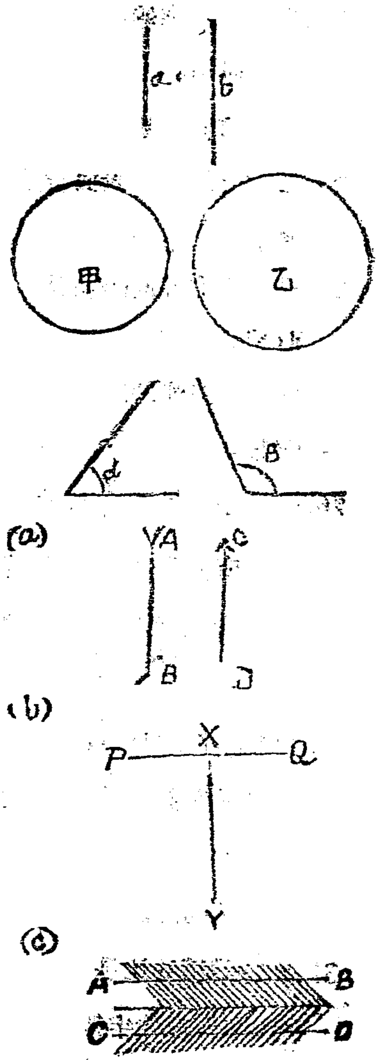
30．球的體積是 113·0976 立方寸，求牠的表面積。

31．兩球的半徑是 7·6 寸和 6·8 寸，求牠體積的比和表面積的比。

32．兩球體積的比是 27∶125，如果小球的半徑是 1·5 寸，求大球的半徑。

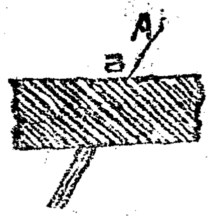
第八章　結論

175. 直接觀察的缺點　有許多幾何圖形，可毋須實驗，僅用直接觀察，就可以判斷牠的性質的。如(i)圖，兩直線 a、b，任何人都可以看出 $b>a$；如(ii)圖，甲乙兩圓，任何人都可以看出甲圓<乙圓；如(iii)圖，α、β 兩角，任何人都可以看出 $\angle\alpha<\angle\beta$。可是有許多圖形，僅用直接觀察，往往有判斷錯誤的地方。如右圖(a)，AB、CD 是兩根相等的線段，但是看起來，好像 CD 小於 AB 的樣子；如(b)圖



PQ、XY 是兩根相等的線段，但是看起來，像好 XY 大於 PQ 的樣子；如(c)圖，AB、CD 是平行線，看起來好像不是行線的樣子；如(d)圖，下面三根直線很不容易看出那一根是 AP 的延長線。如果實地去測驗，這種問題便可迎刃而解，由是就可以曉得實驗幾何的價值。

(d)



§176. 度量的缺點　因爲直接觀察不可靠所以用度量的方法去實際測驗，就可以解決了許多疑惑。但是實地測驗，也是近似的，並不是普遍的。好像三角形各角的和等於二直角，多角形諸外角的和等於四直角等問題，畫許多三角形或許多多角形，用量角器量各個三角形的內角或各個多角形的外角，而求其總和，並未見得各個三角形的內角和，都等於兩直角，沒有一點出入，總有一個幾個三角形的內角和，同二直角相差很小的；亦未見得各個多角形的外角和都等於四直角，沒有一點出入，總有一個或幾個多角形的外角和，同四直角相差很小的。這就是因爲量角器的精密度，沒有到

了一秒的幾百分之幾或幾萬分之幾，所以生出錯誤。就另一方面說，也是一樣。譬如有兩個三角形，牠的兩邊各各相等，如果這兩邊的夾角相差很小，用刻度尺去量這兩個三角形的第三邊，就不易判斷那一邊的大小了。這就是因為尺的精密度，沒有到了一厘米的幾千分之一或幾萬分之一，所以錯誤也不能免。總之在單位較大的時候，用度量法實際測驗，還不至於多大錯誤；如果在單位很小的時候，那就不能信任了。

§117. 證明的必要　如前兩節所述直接觀察，超過某程度以上的時候，決不可靠；實地測驗，也因器具機械的精粗及方法的良否，生出種種錯誤，所以我們不得不另想一個方法。不借助觀察、實驗各種手續，能使圖形的各種性質，都可以表示出來，就是相差極微的時候，也可以比較得出來。這種方法，叫做推理法，就是以某事項作基礎，依邏輯的方法，去推究圖形各種性質的真確性。這種手續，叫做證明。所以某種幾何圖形的性質，我們用推理法能證明牠的存在，就可以說牠是真確了。以下所

論理解幾何的價值，就在乎證明．因爲已經證明之後，我們就無法以反對了

中西名詞對照表

(一) 中西對照

(二) 西中對照

T

U

V

民國三十四年九月第四版

修正課程標準適用
新編初中幾何（全四冊）
第一冊原定價國幣三角
（郵運匯費另加）

編著者　陳修仁
校者　宋彥頫　陶鴻翔
發行者　中華書局
印刷者　中華書局印刷廠
發行處　各埠中華書局

（一一六〇〇）