職業教科書委員會審查通過

實用材料強弱學

徐守楨編著

商務印書館發行

職業學校教科書

實用材料强弱學

徐守楨編著

商務印書館發行

✚E三七四〇

中華民國十四年五月初版

中華民國二十六年十一月國難後改訂第一版

港

(63744·3)

職業學校教科書 實用材料强弱學一冊

每冊實價國[redacted]

外埠酌加運費匯費

版權所有
翻印必究

編著者 徐守楨

發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者喻飛生)

編印職業教科書緣起

我國中等教育,從前側重於學生之升學。但事實上能升學者,究佔少數;大部分不能不從事職業。故現在中等教育之方針,已有漸重職業教育之趨勢。近年教育部除督促各省市教育行政機關擴充中等職教經費,並撥款補助公私立優良職業學校,以資鼓勵外,對於各類職業學校之教學,亦擬有改進辦法。其最重要者,爲向各省市職業學校徵集各科自編講義,擇尤刊印教本,供各學校之採用。先後徵得講義二百餘種,委託敝館組織職業教科書委員會,以便甄選印行。敝館編印中小學各級教科書,已歷多年,近復編印大學叢書,供大學教科參考之用。關於職業學校教科書,亦曾陸續出版多種,並擬有通盤整理之計畫。自奉教育部委託,即提前積極進行。經於二十五年春,聘請全國職業教育專家及著名職業學校校長組織職業學校教科書委員會。該會成立後,一面參照教育部印行之職業學校課程表及教材大綱,釐訂簡明目錄,以便各學校之查

考；一面分科審查教育部徵集之講義及 敝館已出未出之書稿。一年以來，賴各委員之熱忱贊助，初審複審工作，勉告完成。計教育部徵集之講義，經委員會選定最優者約達百種，自廿六年秋季起，陸續整理印製出版。本館已出各書，則按照審查意見澈底修訂，務臻妥善；其尙未出版者，亦設法徵求佳稿，以求完備。委員會又建議，職業學校之普通學科，內容及分量，均與普通中學不同，亟應於職業學科外，編輯普通學科教本，以應各校教學上之迫切需要。敝館謹依委員會意見，聘請富有教學及編著經驗之專家，分別擔任撰述。每一學科，並分編教本數種，俾各學校得按設科性質，自由選用。惟我國各省職業環境不同，課程科目亦復繁多，編印之教科書，如何方能適應各地需要，如何方能增進教學效率，非與各省實際從事職業教育者通力合作不爲功 尙祈全國職業教育專家暨職業學校教師，賜以高見，俾 敝館有所遵循，隨時改進。無任企幸之至。

中華民國二十六年七月一日　王雲五

目　次

實用材料強弱學

第一章　應力 (Stresses)

1. 緒論(Introduction)

古時架木爲屋，聊供棲息，初不計其能持久也；迨後民智漸開，土木繁興，工業發達，機械之用尤廣，則其用以建築及製造之材料，不能不擇其堅固耐用者；而計力量材，又必使之各如其分，此則有賴於專門之學矣。

材料力學(mechanics of materials)者，係力學之一部，專研究彈性固體(elastic solids)形狀之改變，及發生此改變之諸力也；若試驗建築材料所得之物理常數 (physical constants) 及其結果，加入於彈性固體理論中，則名爲材料強弱學 (strength of materials)。

2. 直接應力(Direct Stresses)

凡彈性物體，受有外力(external force)則其內部即生抵抗力以應之，此內力名曰應力(stress)；設有一繩，懸重 30 磅，則繩之

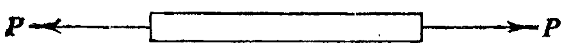
橫截面 (cross-section)，均有 300 磅之應力，量應力之單位，與力相同；或以公斤(kilogram) 計，或以磅計，亦有用噸爲單位者。

當物體加以外力時，非但其內部發生應力，而其形狀亦有改變之趨勢；施力愈大，則應力與變形亦愈大；若加力過大，則應力不勝抵抗，物體即破斷矣，

取橡皮而引伸其兩端，是爲張引 (tension)，若推而壓之，則爲縮壓(compression)，其有切剖之作用，如鋼板之打眼者名曰切割(shear)，發生此等應力之諸力，謂之張力，壓力及切力 (tensile, compressive, and shearing forces)；而其應力，通常稱爲張應力，壓應力及切應力 (tensile, compressive and shearing stresses)。

3. 張引(Tension)

試取橡皮帶，握其一端，而懸重於他端，則其帶卽伸長，鋼鐵木石等物，均有此伸長之性，惟遠不及橡皮之大耳；此橡皮帶實受有二力：一爲下垂之重；一卽手所握持之力也。



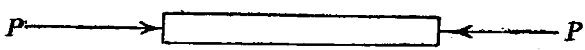
第一圖

凡二力施於物體，沿同一直線而外向者，名曰張引，如第一圖：設 P 爲所施之張力，則其各橫截面之張應力，亦必爲 P。

4. 縮壓(Compression)

縮壓與張引之不同,僅在力之方向而已；若置木塊於桌上,其上端加重 10 磅,則該木塊受有二力,卽桌之抵力及 10 磅之重也。

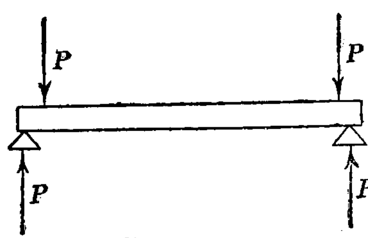
凡二力施於物體,沿同一直線而內向者,謂之縮壓,如第二圖:物體受壓力時,每沿施力線而縮短。



第　二　圖

5. 切割(Shear)

凡二力在反對方向,各沿距離甚近之二平行線,施於一物體,如剪刀之切割者,謂之切割;設有一桿,支持其兩端,而於其支點相近處,各加重 P 磅,則其支點與載重之間,卽各發生二平行力,有橫截該桿之趨勢,而在此等剖面內之切應力,亦均爲 P 磅。



第　三　圖

6. 單位應力(Unit Stress)

在單位面積內之應力,名曰單位應力(unit stress),可用「每方吋……磅」(簡寫爲磅/吋^2),或「每方公分……公斤」等字

樣表示之；若欲化「每方吋……磅」爲「每方公分……公斤」，則以 0.07 乘之卽得。

設擔負(load)爲 P，橫截面積爲 A，則其單位應力爲：

$$s=\frac{P}{A} \qquad (I)$$

凡非特別加以說明者，其應力常假定爲均等分佈於其截面，例如鐵桿之橫截面積爲 3 方吋，若加力 12,000 磅，則單位應力爲每方吋 4,000 磅。

若加於物體之力，爲張力或壓力時，上式中所取之橫截面積，與力之方向相正交，若爲切力，則相平行。

7. 形變(Deformation)

當物體受外力時，有形狀大小之改變，此之謂形變 (deformation)，其因張力而生之形變爲伸長(elongation)，因壓力而生之形變爲縮短(shortening)，外力旣去，形變自消，有時亦尙有殘存之形變，則名之曰永久形變(permanent deformation or set)。

單位長度內所生之形變，謂之單位形變 (unit deformation)；若桿之橫截面大小勻等，則以其原長除形變，卽得單位形變；設 l 爲原來長度，d 爲伸長或縮短之度，則單位形變爲：

$$\delta=\frac{d}{l} \qquad (II)$$

習　　題

一、直徑 2 吋之鋼桿，懸重 20,000 磅於其一端，其單位應力，當爲若干？

答　6370磅/吋²

二、切力 50 磅均勻分佈於 4 吋見方之面積，試求其單位切應力？

答　3.1磅/吋²

三、一桿長 8.吋，在材料試驗機上試驗時，伸長至 8.008 吋，試求其單位應變？

答　0.1%

四、設有 4 呎之桿，伸長 ½ 吋，則其單位形變，應爲若干？

答　1/96

8. 彈性限度(Elastic Limit)

凡物體受外力，則生形變；設其力不過某限度，則當移去時，仍能回復原形；倘一過此限，則不能完全恢復，而有永久之形變，在此限度之單位應力，爲其材料之彈性限度(elastic limit)；設有一熟鐵桿，長 8 吋，受張力 20,000 磅/吋² 時，則伸長 0.006 吋，若將其力移去，則能回復其原來之長度，可知 20,000 磅/吋²，尙在熟鐵彈性限度之下；若加力至 30,000 磅/吋²，則伸長 0.075 吋，再將此力移去，僅能縮短 0.009 吋，尙有 0.066 吋爲永久之形變，則已超過其彈性限度矣。

表一　彈性限度 (Elastic Limit)

材　　料	每方吋……磅	
	張　　引	縮　　壓
木　材 (Timber)	3,000	3,000
生　鐵 (Cast iron)	6,000	20,000
熟　鐵 (Wrought iron)	25,000	25,000
鋼 (Steel)	35,000	35,000

9. 彈性係數(Modulus of Elasticity)

若力不逾彈性限度,其單位應力與單位形變,恆有一定之比率;此比率名之曰彈性係數 (modulus of elasticity); 亦稱楊氏係數(Young's modulus); 其公式如下:

$$E=\frac{s}{\delta} \qquad \text{(III)}$$

式中 E 爲彈性係數, s 爲單位應力, δ 爲單位形變,彈性係數表示物體之倔強性 (stiffness), 所用之單位與應力同, 可以「每方吋……磅」或「每方公分……公斤」表示之。

張引彈性係數與縮壓彈性係數,其值相同, 下表所列, 爲各材料之平均值;但切割彈性係數,約爲表中所列者之三分之一。

表二　彈性係數 (Modulus of Elasticity)

材　　料	每方吋……磅
木　材 (Timber)	1,500,000

生　鐵 (Cast iron)	15,000,000
熟　鐵 (Wrought iron)	25,000,000
鋼 (Steel)	30,000,000
1:2:4混凝土(Concrete)	3,000,000
1:3:6混凝土(Concrete)	2,000,000

10. 極力(Ultimate Strength)

加力於物體，若超過其彈性限度則生極大之形變；倘再加力不已，則必至破斷，其將破斷時之最大單位應力，即名極力(ultimate strength)。

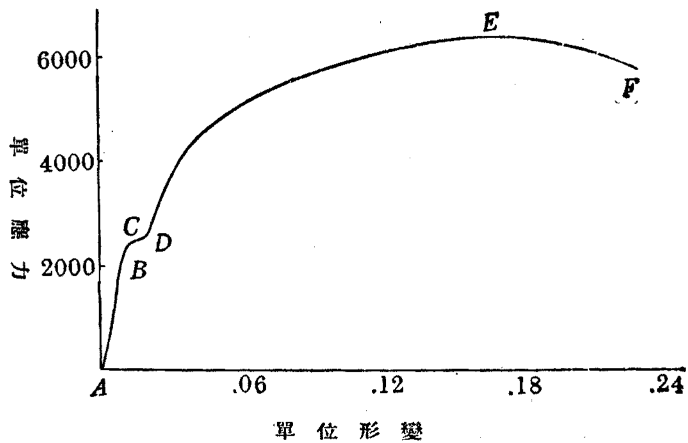
材料之極力，大於其彈性限度二倍乃至四倍；亦有極限壓力 (ultimate compressive strength)，大於極限張力 (ultimate tensile strength) 者。

表三　極力　(Ultimate Strength)

材　　料	每方吋……磅		
	張　引	縮　壓	切　割
木　材 (Timber)	10,000	8,000	600縱 3,000橫
磚 (Brick)	——	3,000	1,000
石 (Stone)	——	6 000	1,500
生　鐵 (Cast iron)	20 000	90,000	20,000
熟　鐵 (Wrought iron)	50 000	50,000	40,000
鋼 (Steel)	65,000	65 000	50,000

11. 應力圖(Stress Diagram)

今取鋼桿，漸施以張力則逐次伸長；若在彈性限度以下，其伸長度與所施之力，恆相正比，一逾彈性限度，則伸長度之增加，較力為大；若更加力不已，大至極力時，物即破斷矣，



第四圖　應力圖

欲說明此等現象，以圖解為便；其以單位應力為縱座標(ordinate)，單位形變為橫座標(abscissa)者，謂之應力形變圖(stress-strain diagram)；或簡稱為應力圖(stress diagram)。

試觀第四圖，自A至B，係一直線，即應力與形變，互為比例；過此則形變驟增，直至曲線之末端，為破斷之點；故B點為彈性限度，E點為極力。

12. 資用應力及安全係數(Working Stress and Factor of Safety)

自來設計機械或建築所用之單位應力，必遠在極力以下，以免破斷，亦必不逾彈性限度致妨安全，其實際上材料所生之單位應力，謂之資用應力 (working stress)；工程家對於某材料所定之最大資用應力，謂之容許應力 (allowable unit stress)；極力對於資用應力之比率，謂之安全係數 (factor of safety)；安全係數隨擔負 (load) 而異，突加及變動擔負 (shock and variable load)，損傷材料，較不變擔負 (steady load) 爲大，故其安全係數亦較大；昔時設計，都採用安全係數；近則以爲欲判定材料之安固，不如參比彈性限度之較爲適當也。

表四　安全係數　(Factor of Safety)

材　　料	不變應力(房屋)	變動應力(橋梁)	突加應力(機械)
木材(Timber)	8	10	15
磚石(Brick and stone)	15	25	40
生鐵(Cast iron)	6	10	20
熟鐵(Wrought iron)	4	6	10
鋼(Steel)	4	6	10

表五　容許應力　(Allowable Unit Stress)

材　　料	每方吋……………………………磅	
	張　　引	縮　　壓
木　料　(Timber)	1,200	1,000

生　鐵 (Cast iron)	3,000	15,000
熟　鐵 (Wrought iron)	12,000	12,000
鋼 (Steel)	16,000	16,000
1:2:4 混凝土 (Concrete)	——	450
1:3:6 混凝土 (Concrete)	——	300

習　題

一、今有 4 吋見方之木塊,長 10 吋,若縮壓載重 8,000 磅時,縮短 0.0040 吋,試求該本之彈性係數?

答 1,250,000 磅/吋^2

二、直徑 1 吋之熟鐵桿,支重 30,000 磅,其資用應力,當爲若干?若其極限強度爲每方吋 50,000 磅,則安全因數,又爲若干?

答資用應力 38,197 磅/吋,安全因數 1.3

三、設有一生鐵桿,直徑爲 8 吋,極限張力爲每方吋 20,000 磅,今欲張引該桿,使之破斷,則所需之力,當爲若干?

答約 1,000,000 磅

13. 工作及躍回能(Work and Resilience)

力加於物體,而使之移動,是謂工作 (work);工作之大小等於力之大小,乘該力在施力線上所行之距離;例如有一物體,重 10 磅,依鉛直方向升高 5 呎,則其重量即爲所需之力,而所成之工作,爲 50 呎磅。若該物體沿水平方向移動,則所需之力,全視

其水平方向內之摩擦力(friction) 及他種阻力而定;若此等阻力爲 3 磅,向前移動 5 呎,則所成之工作,爲 15 呎磅。

物體受外力,則生形變;若其力未過彈性限度,則當移去時,能回復原形,其內部應力所作之工,謂之躍回能(resilience) 應力至彈性限度時所作之工,謂之彈限躍回能 (elastic resilience);應力至破折時所作之工,謂之極限躍回能(ultimate resilience)。

14. 躍回係數(Modulus of Resilience)

在應力圖內,彈性限度與座標軸之起點間所包括之面積,可代表單位容積之材料,加力至彈性限度時所作之工;換言之,卽該面積爲單位容積之彈性限度躍回能,因名之曰躍回係數(modulus of resilience);設 δ 爲在彈性限度時之單位形變,s 爲其單位應力,吾人既知應力圖內,自座標軸之起點至彈性限度爲一直線(見 11 節),則其所包括之面積,係一三角形,卽躍回係數爲:

$$\mu p=\frac{1}{2}s\cdot\delta$$

但 $$E=\frac{s}{\delta}$$

或 $$\delta=\frac{s}{E}$$

$$\therefore\quad \mu p=\frac{s^2}{2E}$$

若 s 及 E 之單位,爲每方吋……磅;則 μp 之單位,爲每立

方吋……吋磅；例如鋼之彈性限度為 35,000 磅/吋^2，其彈性係數為 30,000,000 磅/吋^2，則躍回係數為：

$$\mu p=\frac{35,000^2}{2\times 30,000,000}=20\cdot 5 \text{ 吋磅/吋}^3$$

躍回係數用以比較材料之能抵抗衝擊 (impact) 之程度，而彈限躍回能之總量，又視物體之長度及其截面之大小而定，設其截面為 A，長為 l，則：

$$\text{躍回能}=\frac{s^2}{2E}\times Al$$

15. 突加擔負(Sudden Loads)

加力於桿，逐漸自 0 增至 P，斯時最大應力為

$$s=\frac{P}{A} \qquad (1)$$

若驟加以外力 P，如由 h 高處落下時，則生形變 y；而

$$\text{外工作}=P(h+y)$$

今設 s 為在彈性限度以內由衝擊(impact)而生之單位應力，

則：
$$\text{內工作}=\frac{1}{2}(As)\cdot y$$

式中之$\frac{1}{2}(As)$ 為平均應力，因應力仍逐漸自0增至 s 也。

至若火車疾行過橋梁時，其 h 為零，但內工作必等於外工作；故

$$P(0+y)=\frac{1}{2}Asy$$

$$\therefore \quad s=\frac{2P}{A} \tag{2}$$

試將 (2) 式與 (1) 式相比，即可知由突加擔負 (suddenly applied load) 所生之應力，實倍於漸加擔負也。

16. 熱應力(Temperature Stress)

金屬等類，恆因溫度升降而脹縮，脹縮之度，視材料之種類與溫度相差之度數而異；線脹係數(coefficient of linear expansion)者，即溫度升高一度，每單位長度內當伸長若干之量也。

表六　線脹係數　(Coefficient Of Linear Expansion)

材　料	線　脹　係　數　1° F
鋼　(Steel)	0.0000061
生　鐵　(Cast iron)	0.0000063
熟　鐵　(Wrought iron)	0.0000068
磚　石　(Brick and stone)	0.0000050
銅　(Copper)	0.0000094
混凝土　(Concrete)	0.0000055

建築上鋼鐵等件，若係固定，則當溫度改變時，脹縮被阻礙，即生應力，名之曰熱應力(temperature stress)；故若該件甚長，而溫度改變頗大，當預留空隙爲伸縮地步，否則熱應力甚大，足以使之彎折或坍陷也。

今命 c 爲線脹係數，t 爲華氏寒暑表相差度數，E 爲彈性係數，則單位長度之桿，溫度改變 t 度時，其單位形變爲 ct；但

單位應力爲單位形變乘彈性係數之積(見 9 節)。

$$\therefore\quad s=ct\cdot E$$

觀上式,可知單位應力與長度無關。

例如有一鋼梁,長 50 呎,固定於二柱之間,若溫度改變 50 度,則熱應力當爲若干?

$s=ct\ E=0.0000061\times50\times30,000,000=9150$ 磅/吋^2,若溫度降低 50 度,梁受張力,若升高 50 度,則受壓力。

習　題

一、今有彈簧鋼,其彈性限度爲每方吋 90,000 磅, 彈性係數爲每方吋 30,000,000 磅,試求其躍回係數?

答 135 吋磅

二、設有一鋼軌,其截面爲 8.8 方吋,當溫度降下華氏 50 度而不令縮短時,其所受之力,應爲若干磅?(線脹係數爲 0.0000065)

答 85,800 磅

總　習　題

一、今欲設計一生鐵圓桿,須受張力 34,000 磅, 若其單位應力規定爲每方吋 2,500 磅,則該桿之直徑,當爲若干吋?

答 4.16 吋

二、橋梁上鋼製牽桿 (tie-rod) 之直徑爲 $1\frac{1}{4}$吋,若其單位應力,不逾彈性限度二分之一時,則能載重若干?　答 21,470 磅

三、一桿原長 8 吋，受有張應力，而伸長 0.0052 吋，試求其單位形變？　答0.00065 吋

四、一鋼桿長 12 吋，直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋，當受張引擔負 (teusile load) 38,400 磅吋，伸長 0.009 吋，其楊氏係數應爲若干？

答 29,000,000磅/吋^2

五、今有一鋼桿，寬 2 吋，厚 1 吋，長 8 吋，共伸長 0.0048 吋，其載重當爲若干磅？　答 36,000 磅

六、某種鎗管鋼經專家之試驗，知在彈性限度時之單位張應力，爲 71,000 磅/吋^2，極限張力爲 118,000 磅/吋^2；今欲使其工作應力，適在彈性限度內，則安全係數當爲若干？

答約 1.7

七、今取一鋼製圓桿，經受張力 100,000 磅，若極限強度爲每方吋 65,000 磅，則其直徑應需若干吋？(安全因數爲5)

答 3.129 吋

八、$1\frac{1}{2}$ 吋徑熟鐵繫桿 (bolt) 之頭 (head)，長 $1\frac{1}{4}$ 吋，設加張力 15,000 磅，其張引單位應力及安全係數當爲若干？又螺釘頭之單位切應力及切割安全係數當爲若干？

答安全係數 6 及 16

張引應力8490磅/吋^2

切應力 2550 磅/吋^2

九、今有一混凝土短柱，16 吋見方，載重 75,000 磅；若其極力爲每方吋 1,200 磅，則安全係數當爲若干？

答安全係數 4

十、鋼板鑿孔所用之力，須勝過其抗切強度 (shearing strength) 若該鋼板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，孔徑 $\frac{3}{4}$ 吋，極限切力爲每方吋 50,000 磅則需力若干磅方可鑿通？　答 58,900 磅

十一、今有一鋼桿長 16 吋，直徑 0.75 吋，加以 15,000 磅之張力，若 E 爲每方吋 29,000,000 磅，試計算其躍回係數及總躍回能。

答躍回係數 19.9 吋磅

總躍回能　140.6 吋磅

十二、一鋼桿以螺旋扭緊二牆，令其單位應力爲每方吋 10,000 磅，當温度降下 10 度時，其牆並未牽動，則所生之熱應力當爲若干，又斯時鋼桿之新單位應力，當爲若干？

答熱應力 1,950 磅/吋^2

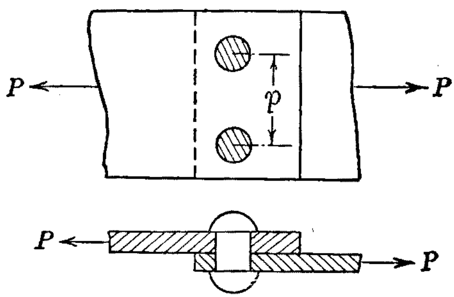
新應力 11,95 磅/吋^2

第二章　鉚釘接榫 (Riveted Joints)

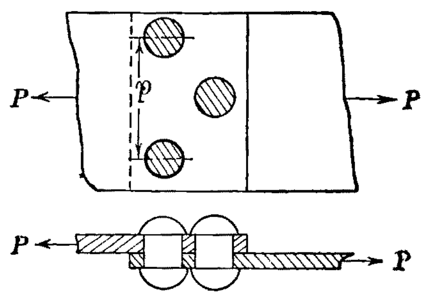
17. 鉚釘搭頭接榫 (Riveted Lap Joints)

試取鋼板二塊，以鉚釘 (rivet) 連接之，當其受張力，自一板傳至他板時，其鉚釘非但爲所擠壓，且同時受切力而有割離之勢，其一板之邊，搭蓋他板之邊，而以鉚釘接合者，謂之搭頭接榫 (lap joint)，鉚釘有用一列者(第五圖)，亦有用二列者(第六圖)。

第五圖爲一列鉚釘之搭頭接榫，命 P 爲自一板傳至他板之張力，t 爲板厚，d 爲鉚釘幹徑，p 爲釘距 (pitch of rivet)，即自任何鉚釘中心至其貼近鉚釘中心之距離，又命 s_t 爲鋼板截面(在二鉚釘間)之張引單位應力，s_c 及 s_s 爲鉚釘之縮壓單位應力及切割單位應力其受外力 P 之鋼板截面，爲 t ×



第　五　圖



第　六　圖

(p−d)。故:

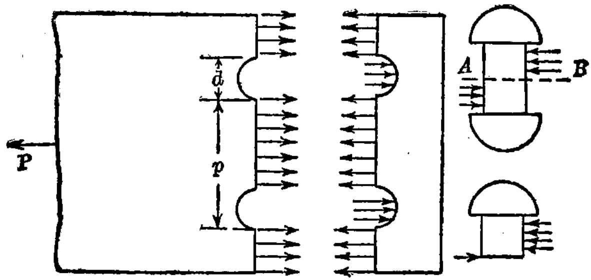
$$P=t(p-d)s_t$$

外力傳至釘邊(side of rivet)爲縮壓,其受縮壓之面積爲 td,

故: $$P=td\,s_c$$

又該外力有令鉚釘沿 A B 面(二鋼板間)割離之趨勢(第七圖),抵抗此切力之面積,爲 $\frac{1}{4}\pi d^2$。故:

$$P=\frac{1}{4}\pi d^2 s_s$$



第 七 圖

設有一列鉚釘之搭頭接榫,受張力 3,900 磅,其鉚釘幹徑爲 3/4 吋,釘距 2 吋,板厚 1/2 吋,試求諸單位應力。

$$板之張應力\ s_t=\frac{3900}{\frac{1}{2}(2-3/4)}=6,240\ 磅/吋^2$$

$$釘之壓應力\ s_c=\frac{3900}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}=10,400磅/吋^2$$

$$釘之切應力\ s_s=\frac{3900}{0\cdot785\times\frac{9}{16}}=8860\ 磅/吋^2$$

若鉚釘用二列時，則其中之一列，常在他列釘距中央之對面相當位置（如第六圖），而其外力P則分布於二釘截面，其方程式如下：

$$板之張力\qquad P=t(p-d)\ s_t$$

$$釘之壓力\qquad P=2td\ s_c$$

$$釘之切力\qquad P=2\cdot\frac{1}{4}\pi d^2 s_s$$

設有二列鉚釘之搭頭接榫，P 為 8000 磅，p 為$2\frac{1}{2}$吋，d 為 7/8 吋，t 為 3/4 吋，則：

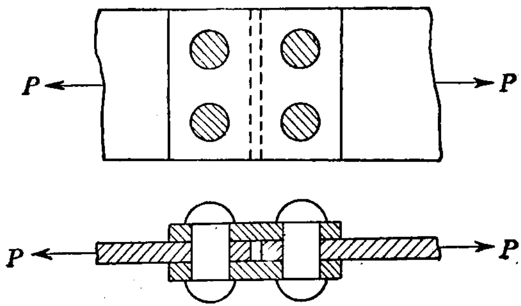
$$s_t=\frac{8000}{\frac{3}{4}(2\frac{1}{2}-\frac{7}{8})}=6560\ 磅/吋^2$$

$$s_c=\frac{8000}{2\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}}=6100\ 磅/吋^2$$

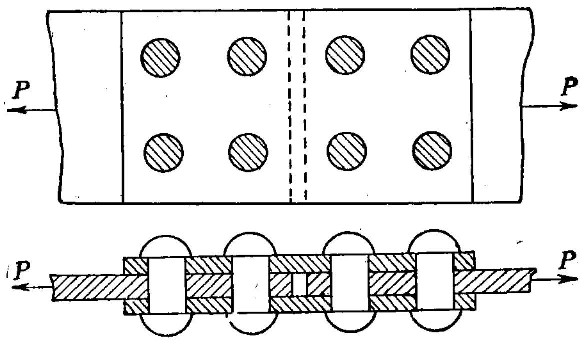
$$s_s=\frac{8000}{3\times0\cdot785\times\left(\frac{7}{8}\right)^2}=6650\ 磅/吋^2$$

18．鉚釘平頭接榫(Riveted Butt Joints)

二板相對平列，上下面各蓋以狹板，而以鉚釘接合者，謂之平頭接榫(butt joint)，而其狹板謂之蓋板(cover plates or butt straps)。



第　八　圖



第　九　圖

第八圖爲一列鉚釘之平頭接榫，設於二鋼板加張力 P，則鉚釘因之受壓力，而此壓力更生切力，今該切力分佈於各釘之二截面，而傳$\frac{1}{2}$ P 於各蓋板，因名複切 (double shear)。其外力與應力之方程式如下：

板之張力　　$P=t(p-d)\ s_t$

釘之壓力　　$P=td\ s_c$

釘之切力　　$P = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 s_s$

二蓋板之平頭接榫，亦有用二列鉚釘者（第九圖）。其方程式如下：

板之張力　　$P = t(p-d)\, s_t$

釘之壓力　　$P = 2td\ s_c$

釘之切力　　$P = 4 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 s_s$

設有二鋼板，各厚 1/2 吋，用二蓋板連成爲平頭接榫，各邊貫以單列之 7/8 吋鉚釘，若鋼板之容許張應力爲 10,000 磅/吋^2，釘之容許切應力爲 8,000 磅/吋^2 則釘距當爲若干？今一釘之面積，爲 0·6013 方吋，各釘均爲複切，而受張力之面積爲 $\frac{1}{2}\left(p-\frac{7}{8}\right)$。故：

$$\frac{1}{2}\left(p-\frac{7}{8}\right) \times 10000 = 2 \times 0.6013 \times 8000$$

或 $p-\frac{7}{8} = 1.824$ 吋

$\therefore\ p = 2.70$ 吋

19. 鉚釘接榫之效率 (Efficiency of Riveted Joint)

鉚釘接榫所用之鋼板，須先穿孔，爲插入鉚釘之用，故較原來之板爲弱。其效率 (efficiency) 可用下式表示之：

$$\text{鉚釘接榫之效率} = \frac{\text{接榫之強度}}{\text{未穿孔前鋼板之強度}}$$

故欲求某接榫之效率,先計算已穿孔鋼板之張力,及鉚釘之壓力與切力,然後於此三者之中,取其最小值,以未穿孔鋼板之張力除之。

例如有 3/8 吋鋼板二塊,用二列 $\frac{3}{4}$ 吋鉚釘連合之,使成爲搭頭接榫,每列之釘距,爲 $2\frac{3}{4}$ 吋,鋼板之極限張力,爲 55,000 磅/吋^2。鉚釘之極限切力爲 44,000 磅/吋^2。極限壓力爲 95,000 磅/吋^2。試求其接榫效率。

$$\text{板之張力}=\frac{3}{8}\left(2\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)\times 55000$$

$$=41250 \text{ 磅}$$

$$\text{釘之切力}=2\times 0.4418\times 44000$$

$$=38878 \text{ 磅}$$

$$\text{釘板間壓力}=2\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}\times 95000$$

$$=53437 \text{ 磅}$$

$$\text{未穿孔板之張力}=2\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\times 55000$$

$$=56719 \text{ 磅}$$

此接榫以切力爲最弱故:

$$\text{效率}=\frac{38878}{56719}=0.685=68.5\%$$

若設計接榫時,使張力壓力與切力同大,則其效率爲:

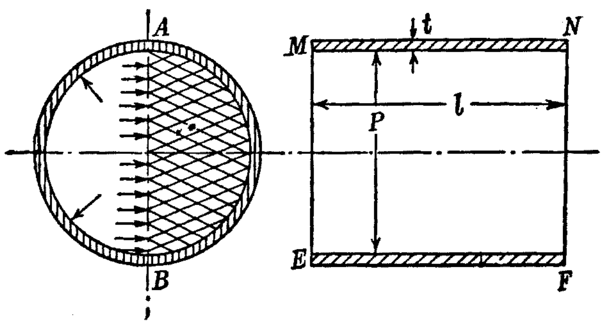
$$\frac{t(p-d)S_t}{tp\ S_t}=1-\frac{d}{p}$$

例如釘徑爲$\frac{3}{4}$吋，釘距爲 2 吋，則其接榫之效率爲：

$$1-\frac{3/4}{2}=.625=62.5\%$$

表七　接榫之效率　(Efficiency of Jointe)

接　榫　之　種　類	效　率
一列鉚釘搭頭接榫	50—65%
二列鉚釘搭頭接榫	65—75%
一列鉚釘平頭接榫	65—75%
二列鉚釘平頭接榫	70—80%



第　十　圖

20. 薄壁筒管 (Thin Cylinders and Pipes)

若於筒管內，貯有液體或氣體，則其壓力散佈於各方向，且有使筒管沿縱線而破裂之趨向，因之筒管之壁，發生張應力以抵

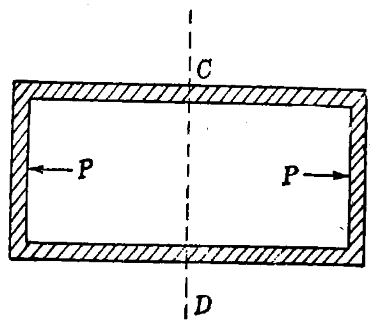
抗之，今命筒管內徑爲 D，長爲 l，液體或氣體之壓力，爲每方吋 P 磅，(第十圖)吾人可縣想在直徑 A B 之任一邊，裝滿固體 則其截面積爲 l D，故其總壓力爲 PlD，又命 t 爲筒管之厚，s_t 爲張引單位應力，則其總應力爲 2 s_t tl（因沿 M N 及 E F 二線，均能抵抗外力），欲保持其平衡，壓力與應力必相等。故：

$$PlD = 2.s_t\,tl$$

或 $$s_t = \frac{PD}{2t} \qquad (1)$$

此式祇能於筒管內徑至少大於其厚十倍時適用之。

設有一熟鐵蒸汽管，直徑爲 18 吋，假定其容許應力爲5,500磅/吋²，則該管之厚，當爲若干吋，方能受汽壓每方吋 250 磅，由上(1)式，得：



第十一圖

$$t = \frac{PD}{2s_t} = \frac{250 \times 18}{2 \times 5500}$$

$$= 0.45 \text{ 吋}$$

故管壁之厚，大抵選取 $\frac{1}{2}$ 吋。

至於筒管之端，亦受有壓力，而與其壁有分離之勢。其筒端之壓力爲$\frac{1}{4}\pi D^2\times P$，筒壁則生縱應力 $\pi Dt\times s_t$ 以抵抗之。

故　$$\pi Dts_t=\frac{1}{4}\pi D^2P$$

卽　$$s_t=\frac{PD}{4t} \qquad (2)$$

觀(1)(2)二式，可知縱直應力，爲横側應力之二分之一，上式(2)，亦可應用於受內壓力之中空球體。

總　習　題

一、有二塊$\frac{1}{2}$吋鋼板，各闊 12 吋用 5 個$\frac{3}{4}$吋鉚釘排爲一列，連成搭頭接榫，該接榫傳張力 13,200 磅，試求鋼板之張引單位應力，鉚釘之切割單位應力，及縮壓單位應力。

答 s_t 3200 磅/吋^2

s_s 5975 磅/吋^2

s_c 7040 磅/吋^2

二、今有二塊 3/8 吋鋼板，連成平頭接榫，各邊有$\frac{3}{4}$吋鉚釘一列，釘距爲 $2\frac{1}{2}$吋，若釘之切割應力爲 6000 磅/吋^2，則鋼板之張引單位應力及釘板間之縮壓單位應力，各爲若干？

答 s_t　8,079 磅/吋^2

s_c 18,850 磅/吋^2

三、今有二塊 3/8 吋鋼板，用二列 7/8 吋鉚釘聯成搭頭接榫，釘距爲 3 3/8 吋，試求該接榫之效率，（鋼板之極限張力爲 55,000 磅/吋^2），鉚釘之極限切力爲 44,000 磅/吋^2，極限壓力爲 95,000 磅/吋^2）。 答 74.1 %

四、二塊 1/4 吋厚之鋼板，用 11/16 吋鉚釘一列，連成搭頭接榫，釘距爲 1 5/8 吋，若極限抗切強度爲 44,000 磅/吋^2，極限抗壓強度爲 95,000 磅/吋^2，極限抗張強度爲 55,000 磅/吋^2 時，該接榫之效率若干？ 答 57.6%

五、直徑 30 吋之鍋爐鋼殼 (boiles shell)，受蒸汽壓力每方吋 150 磅，鋼板厚爲 3/8 吋，試求其單位應力。

答 6,000 磅/吋^2

六、一鋼管內徑 6.065 吋，厚 0.28 吋，通過水蒸汽，受有計示壓力 (gauge pressure) 每方吋 125 磅，其縱直單位應力，當爲若干？ 答 1355 磅/吋^2

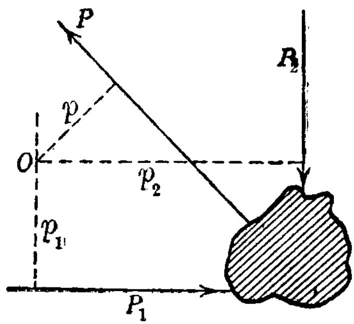
七、設有一生鐵球，其徑 24 吋，厚 3/4 吋，今欲使之破裂，則其內壓力，當每方吋若干磅？ 答 2,500 磅/吋^2

*第三章　初矩及複矩

(First and Second Moments)

21. 初矩或靜矩 (first moment or static moment)

力施於物體，使其有繞定點而旋轉之趨向者，名爲該力之初矩(first moment)或靜矩(static moment)；簡稱之曰力矩；而其定點謂之矩中心(center of moment)；力矩之大小，等於力乘挺率(lever arm)之積；挺率者卽自定點至施力方向之正交距離也。



第　十　二　圖

如第十二圖，設 O 爲定點，P 爲所施之力，p爲自 O 至 P 之正交距離(挺率)，則該力對於O 點之初矩爲 p×p；依普通之計算，力之單位爲磅，距離之單位爲呎或吋；故以呎磅(foot-pounds)或吋磅(inch-pounds)，爲力矩之單位。

*該章得移至 36 節抗矩後講授，俾學生易于明瞭轉動慣量之用處。

因求計算上之便利，力矩之順時針方向旋轉者爲正；逆時針方向旋轉者爲負；其符號亦可視定點 O 之在施力線 (line of action of force) 左方或右方而定；若 O 在右(順箭頭方向視之)，力幾爲正，如 P_2p_2 是；若在左，則爲負，如 Pp 及 P_1p_1 是。

22. 力矩原理(Principle of Moments)

諸力施於物體，而仍保持其靜止者，謂之平衡(equilibrium)；本此義而推論之，物體在平衡時，則靜止不動，對於任何點，自無旋轉之趨向，因得力矩原理如下：

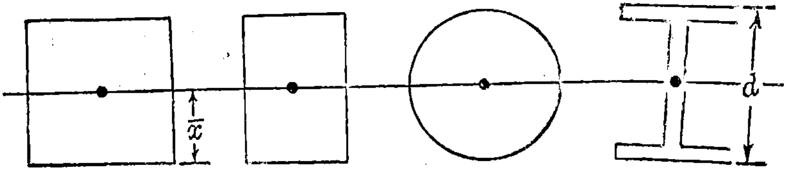
同在一平面內之諸力，若爲平衡時，則對於該平面內任何點諸力矩之代數和，必等於零。

力矩原理，常用以求形體之重心(center of gravity)。

23. 面積重心(Centroid or Center of Gravity of a Plane Area)

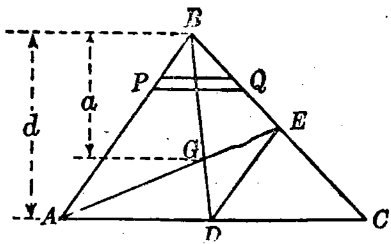
在材料強弱學中，面積重心甚爲重要；面積重心者，即某水平面積，在平衡時所支之點也；該面積可視爲厚度密度勻等之薄片，而計算力矩時，其每單位面積內所含之質量，通常作爲一單位。

方形、矩形、圓形、或工形之上下邊 (flange) 同大者，其重心甚易求得，即 $\overline{x}=\frac{1}{2}d$；式中 $\overline{x}$ 爲重心距離，d 爲平面之寬，欲求三角形面之重心，先將該面分成許多狹條，與 AC 邊(第十四



第　十　三　圖

圖)平行,如 P Q 等;每條之重心,既各在其中點,則全面之重心,必在連接此諸中點之 B D 線內,卽必在三角面之中線(median)上;再將該三角面分成許多狹條,與 BC 邊平行,則其重心亦必在 A E 中線上;故此二中線之交點 G,必爲三角面之重心也。



第　十　四　圖

今三角形 D E G 爲 A B G 相似。

$$\therefore \quad \frac{DG}{GB}=\frac{DE}{AB}$$

又 $DE=\frac{1}{2}AB$;(依幾何原理,連接三角形兩邊之中點之線,與第三邊相平行,且等於第三邊之二分之一)。

$$\therefore \quad \frac{DG}{GB}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AB}=\frac{1}{2}$$

或　$DG=\frac{1}{2}GB$

$\therefore\quad BD=DG+GB=\frac{3}{2}GB$

$\therefore\quad GB=\frac{2}{3}BD$

若 d 爲三角形形之深，$\overline{x}$ 爲重心距離，則其公式爲：

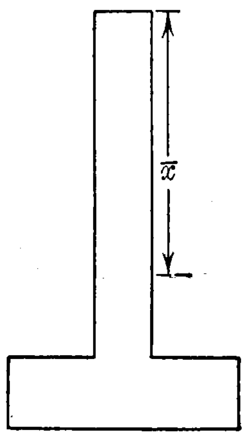
$$\overline{X}=\frac{2}{3}d$$

24. 集合形之重心(Centroid of Composite Figure)

許多重要平面爲三角形或矩形等所合成，其重心可應用力矩原理以求之，設有 T 形截面，其水平邊 (flange) 之闊爲 4 吋，厚爲 $1\frac{1}{4}$ 吋，則其面積爲 5 方吋，若鉛直腹(wed)之高爲 6 吋，厚爲 1 吋，則其面積爲 6 方吋；故 T 形之總面積，共爲 11 方吋；試取腹之上端爲軸，則諸挺率爲 $\frac{1\frac{1}{4}}{2}+6\left(=6\frac{5}{8}\right)$，$\frac{6}{2}$ $(=3)$ 及 $\overline{x}$ 吋，而初矩方程式爲：

$$5\times6\frac{5}{8}+6\times3-11\times\overline{x}=0$$

$$\therefore\quad \overline{x}=4.65\text{ 吋}$$



第十五圖

由上所述，力矩原理可用以求面積之重心；設 ΔA 爲任何元面積(elementary area)，x 爲自軸線至重心之距離，則 $\Delta A.x$ 卽爲該元面積之初矩，又設平面面積 A，分爲 ΔA_1 ΔA_2 ΔA_3 ……等元面，而其重心至軸線之距離，各爲 x_1，x_2，x_3……等，則 ΔA_1x_1，ΔA_2x_2，ΔA_3x_3……等，爲諸元面之初矩，若 $\bar{x}$ 爲自軸線至全面積 A 之重心之距離，則依力矩原理，得式如下：

$$\Delta A_1x_1+\Delta A_2x_2+\Delta A_3x_3+\cdots\cdots-\bar{x}A=0$$

或 $$\Sigma\Delta Ax-\bar{x}=A0 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \bar{x}=\frac{\Sigma\Delta Ax}{A}$$

式中 $\Sigma\Delta Ax$ 代表 ΔA_1x_1，ΔA_2x_2，ΔA_3x_3……等項相加之總和，此 Σ(Sigma) 非乘數，乃指示加法之記號也。

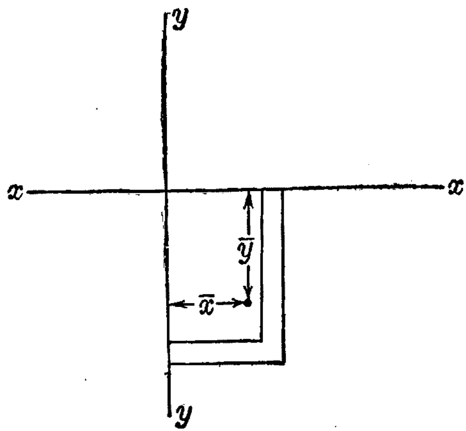
上式爲求重心之公式，若軸線在平面內，x 值有正有負，若軸線經過平面之重心，則 $\bar{x}$ 等於零故(1)式變爲

$$\Sigma\Delta Ax=0$$

至於角形(angle)之重心，恆在其面之外，須以 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$ 表示之，設有角形(如第十六圖)，其二邊 (leg) 之長爲 6 吋與 4 吋，其厚均爲 3/4 吋，長邊之面積爲 $6\times3/4=4.5$ 方吋，其重心在 X－X軸之下 3 (卽 $\frac{6}{2}$)吋，Y－Y 軸之右 3.625(卽 $\frac{3/4}{2}+\overline{4-3/4}$)吋，短邊之面積爲 $(4-3/4)\times\frac{3}{4}=2.4375$ 方吋，其重心在X－X

軸之下 5.625$\left(\text{即}6-\frac{3/4}{2}\right)$吋,Y－Y軸之右 1.625$\left(\text{即}\frac{4-3/4}{2}\right)$吋,該角形之總面積爲 4.5+2.4375=6.9375 方吋,其對於X－X軸之初矩方程式爲

$$6.9375\,\overline{y}=4.5\times3+2.4375\times5.625$$



第 十 六 圖

故$\overline{y}$之值爲 3.92 吋,又對於 Y－Y 軸之初矩方程式爲:

$$6.9375\,\overline{x}=4.5\times3.625+2.4375\times1.625$$

故x之值爲 2.92 吋

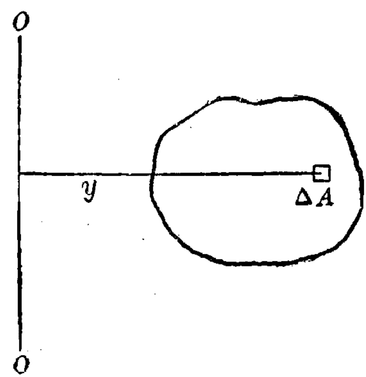
25. 複矩或轉動慣量

(Second Moment or Moment of Inertia)

研究梁(beam)柱(column)時,須用一形象因數(shape factor)名轉動慣量(moment of inertia)者，通常以 I 表之，轉動慣量者卽平面內諸元面各乘其與某定軸距離之自乘方所得諸積之代數和也。其公式如下：

$$I=\Sigma y^2\Delta A$$

式中 ΔA 爲元面，y 爲其與定軸之距離(參考第十七圖)，轉動慣量亦稱複矩 (second moment)，因係初矩之矩也；若面積之單位爲方吋，距離之單位爲吋，則複矩之單位，爲吋四次方(簡寫爲吋^4)。



第　十　七　圖

任何平面對於二平行軸之複矩之關係，可用下法求得之：

設 O－O 爲經過重心之軸，A－A 爲任何平行軸，d 爲該二軸間之距離(如第十八圖)，又設 I_0，爲其平面對於 O－O 軸之複矩，I_A 爲對於 A－A 軸之複矩，由複矩之定義，得式如下：

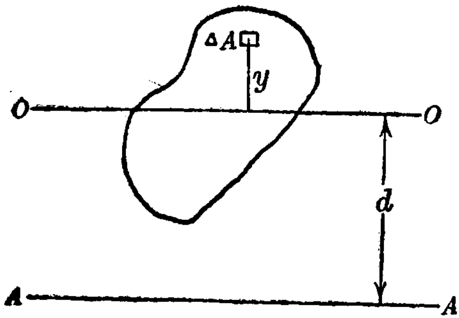
$$I_A=\Sigma(y+d)^2\Delta A=\Sigma y^2\Delta A+2d\Sigma y\Delta A+d^2\Sigma\Delta A$$

但 O－O 爲經過該平面重心之軸。

$\therefore \Sigma y\Delta A=0$　　　(見 24 節)

又 $\Sigma y^2\Delta A=I_0$

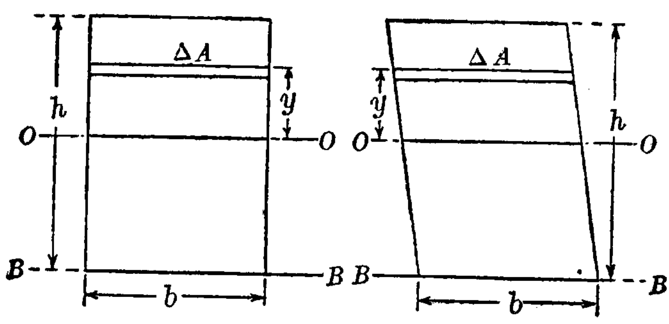
代入上式，得　$I_A = I_O + d^2A$



第　十　八　圖

26. 矩形之複矩 (I for Rectangle)

設有一矩形(或平行四邊形)，其闊為 b, 高為 h, 欲求其對於 O—O 軸之複矩，O—O 軸，係經過其重心，而與上下兩對邊相平行如(第十九圖)。



第　十　九　圖

今將該形面積 A, 分為 n 箇微小條，各微小條均相等而與

O－O 軸相平行。假定 n 之數為極大，則各微小條之闊為極小，而其元面積 ΔA，即為 $\frac{h}{n}\times b$。

試取離軸第 h 箇之微小條(p 為任何數可大至 $\frac{n}{2}$)，則從該條至軸之距離為

$$y=p\frac{h}{n}$$

故矩形(或平行四邊形)對於 O－O 軸之複矩為

$$\Sigma\Delta Ay^2=\Sigma\frac{h}{n}\ bp^2\ \frac{h^2}{n^2}\qquad\text{(見 25 節)}$$

$$=\Sigma\frac{bh^3}{n^3}p^2=\frac{bh^3}{n^3}\Sigma p^2$$

得求矩形(或平行四邊形)在 O－O 軸上方之複矩，p 須代表 $\frac{n}{2}$ 以下之各數，其在 O－O 軸下方者亦同，即

$$I=2\times\frac{bh^3}{n^3}\Sigma\left[1^2+2^2+\cdots\cdots+p^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]$$

從代數上，得式如下：

$$\Sigma\left[1^2+2^2+p^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n^3+3n^2+2n}{24}$$

$$\therefore \quad I = 2\frac{bh^3}{n^3} \cdot \frac{n^3+3n^2+2n}{24}$$

或 $$I = \frac{bh^3}{12}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$$

式中 n 之數愈大,則求得之 I 愈準確,若 n 爲無限大,其求得之數值,即爲眞正複矩,在此條件之下,$\frac{3}{n}$及$\frac{2}{n^2}$二項,均等於零。

$$\therefore \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

其對於底邊之複矩,可用 $I_A = I_0 + d^2A$ 式求之(見 25 節)。

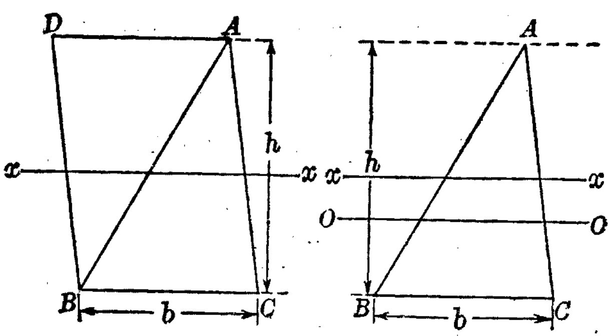
令 $$I_0 = \frac{bh^3}{12}$$

$$d = \frac{1}{2}$$

及 $$A = bh$$

$$\therefore \quad I_B = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot bh = \frac{bh^3}{3}$$

27. 三角形之複矩(I for Triangle)



第 二 十 圖

矩形可視爲二箇相等而相似之三角形所合成（如第二十圖中之 △ABC 及 △ABD)。故該兩三角形對於 x－x 軸（即通過矩形重心之軸）之複矩必相等，而其中之一三角形對該軸之複矩爲

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \div 2 = \frac{bh^3}{24}$$

但從此軸至 O－O 軸(即三角形重心軸)之距離爲

$$d = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$$

$$\therefore \quad I_0 = I_x - Ad^2$$

$$I_0 = \frac{bh^3}{24} - \frac{bh}{2} \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

又三角形對於 A－A 軸(即通過頂點而與底邊相平行之軸)之複矩爲

$$I_A = I_0 + Ad^2$$

$$I_A = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{4}$$

同法對於 B－B 軸(即三角形底邊)之複矩爲

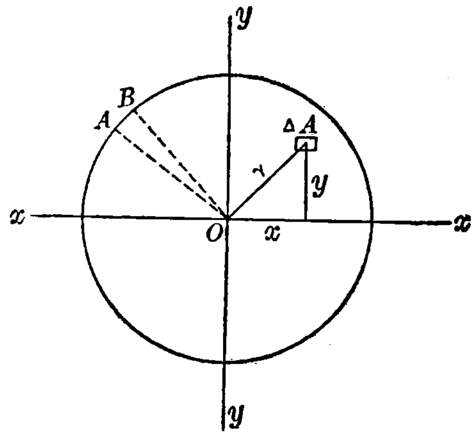
$$I_B = \frac{bh^3}{12}$$

28. 圓形之複矩(I for Circle.)

欲求圓形之複矩,先求其極軸轉動慣量 (polar moment of inertia) 爲便,平面之極軸轉動慣量者,即對於正交其面之軸之

轉動慣量，通常以J表之。

今取其經過圓心而與圓面正交之軸爲極軸，假定該圓形爲許多微小三角形如OAB者所組成（第二十一圖）；O爲其公共頂點，OB爲其高度，即圓半徑a也；此



第二十一圖

微小三角形對於O點之轉動慣量爲：$\frac{AB\times a^3}{4}$（見上節）；故圓形全部之轉動慣量爲：

$$J=\Sigma\frac{AB\times a^3}{4}=\frac{a^3}{4}\Sigma AB$$

但　$\Sigma AB=$圓周$=2\pi a$

故　$J=\frac{a^3}{4}\cdot 2\pi a=\frac{\pi a^4}{2}=\frac{\pi d^4}{32}$

若 X−X 與 Y−Y 爲圓形之二正交直徑，γ 爲自其交點O至任何元面 ΔA 之距離（第二十一圖），則

$$\gamma^2=x^2+y^2$$

故　$\Sigma\gamma^2\Delta A=\Sigma(x^2+y^2)\Delta A=\Sigma x^2\Delta A+\Sigma y^2\Delta A$

即　$J = I_y + I_x$

然圓形對於其諸直徑,均爲對稱(symmetrical),即 $I_x = I_y$ 故圓形對於任何直徑之複矩爲:

$$I_d = I_x = I_y = \frac{J}{2}$$

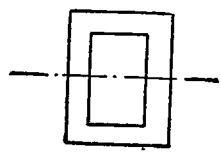
即　$I_d = \frac{\pi a^4}{4}$

或　$I_d = \frac{\pi d^4}{64}$

29. 集合形之複矩(I for Composite Figures)

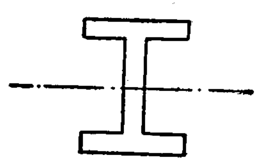
對於同軸之複矩,可以加減,如其他同類之數量。故平面形之能分爲數單形(simple figures)如三角形矩形及圓形者,其對於任何軸之複矩,可將諸單形對於該軸之複矩相加減求得之。

設有一中空矩形,(第二十二圖),其外邊之闊爲 b,高爲 h,其內邊之闊爲 b_1,高爲 h_1,假定其全形厚度均等,則外矩與內矩形之複矩爲 $\frac{bh^3}{12}$ 及 $\frac{b_1h_1^3}{12}$,故該形之複矩爲:



第二十二圖

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}$$



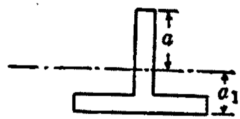
第二十三圖

又設有等邊之 I 形截面(第二十三圖),其邊(flange)之闊爲 b,全截面之深

爲 d, 腹(web)厚爲 t, 邊厚爲 t_1 則該截面之複矩，爲面積 bd 及面積 (b−t) (d−2t_1) 之複矩相減之較，即：

$$I=\frac{bd^3}{12}-\frac{(b-t)(d-2t_1)^3}{12}$$

至於 T 形截面(如第二十四圖)，須先求自重心至腹 (web) 端之距離，(即 a 值，求法見24節)，而其至邊 (flange) 之外緣之距離(即 a_1 值)，亦爲已知；設 b 爲邊闊，t 爲邊厚，t 爲腹厚，則面積 ta 之複矩爲 $\frac{ta^3}{3}$，面積 ba_1 之複矩爲 $\frac{ba_1{}^3}{3}$ 及面積 (b−t) (a_1-t_1) 之複矩爲 $\frac{(b-t)(a_1-t_1)^3}{3}$ (見26節)，



第二十四圖

故該 T 形剖面之複矩，爲：$I=\frac{ta^3}{3}+\frac{ba_1{}^3}{3}-\frac{(b-t)(a_1-t_1)^3}{3}$

30．迴轉半徑(Radius of Gyration)

設複矩公式 $I=\Sigma\Delta A\cdot y^2$ 內之諸元面 ΔA，其大小相等，則其全面 $A=n\cdot\Delta A$；換言之，即全面 A 分成爲 n 箇相等元面ΔA；故：

$$I=\Sigma\Delta A\cdot y^2=\Delta A\,\Sigma y^2=A\frac{\Sigma y^2}{n}$$

假定諸 y^2 之平均值爲 k^2，則 $\frac{\Sigma y^2}{n}=k^2$；

$$\therefore \quad I = Ak^2$$

$$\therefore \quad k^2 = \frac{I}{A} \qquad \text{或}\ k = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

此 k 名為迴轉半徑(radius of gyration);

欲求迴轉半徑,須先求得複矩,而以面積除之。

實心矩形 $k^2 = \frac{d^2}{12}$

中空矩形 $k^2 = \frac{bd^3 - b_1 d_1^3}{12(bd - b_1 d_1)}$

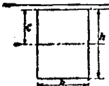
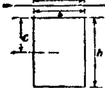
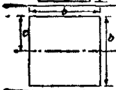
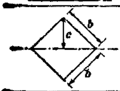
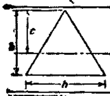
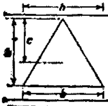
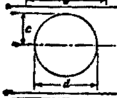
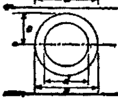
實心方形 $k^2 = \frac{d^2}{12}$

中空方形 $k^2 = \frac{(d^2 + d_1^2)}{12}$

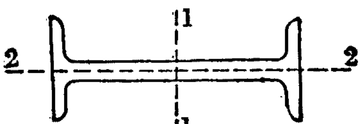
實心圓形 $k^2 = \frac{d^2}{16}$

中空圓形 $k^2 = \frac{d^2 + d_1^2}{16}$

表八 各種截面之性質 Properties of Various Sections

面形	面積	重心軸 c	複矩 I	截面係數 $\frac{I}{c}$
	bh	$c=\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{b}$
	bh	$c=\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{3}$	
	b^2	$c=\frac{b}{2}$	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b^3}{6}$
	b^2	$c=\frac{b}{\sqrt{2}}=.707b$	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b^3}{6\sqrt{2}}=.118b^3$
	$\frac{1}{2}bh$	$c=\frac{2}{3}h$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$
	$\frac{1}{2}bh$	$c=\frac{2}{3}h$	$\frac{bh^3}{12}$	
	$\frac{\pi d^2}{4}=785d^2$	$c=\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}=.049d^4$	$\frac{\pi d^3}{32}=.098d^3$
	$\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}=.715(D^2-d^2)$	$c=\frac{D}{2}$	$\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}=.049(D^4-d^4)$	$\frac{\pi(D^4-d^4)}{32D}$ $=.098(D^3-\frac{d^4}{D})$

表九 I形鋼桁(Steel I-beams)



桁　深	每呎之重量	截面積	複矩 1－1軸	截面係數	複矩 2－2軸
d		A	I	$\frac{I}{c}$	I′
24 吋	100 磅	29.4 方吋	2380 吋^4	198 吋^3	48.6 吋^4
24	80	23.5	2088	174	42.9
20	75	22.1	1269	127	30.2
20	65	19.1	1170	117	27.9
18	70	20.6	921	102	24.6
18	55	15.9	796	88.4	21.2
15	55	16.2	511	68.1	17.1
15	42	12.5	442	58.9	14.6
12	35	10.3	228	38.0	10.1
12	$31\frac{1}{2}$	9.3	216	36.0	9.50
10	40	11.8	159	31.7	9.50
10	25	7.4	122	24.4	6.89
9	35	10.3	112	24.8	7.31
9	21	6.3	85.0	18.9	5.16

8	$25\frac{1}{4}$	7.50	68.4	17.1	4.75
8	18	5.33	56.9	14.2	3.78
7	20	5.88	42.2	12.1	3.24
7	15	4.42	36.2	10.4	2.67
6	$17\frac{1}{4}$	5.07	26.2	8.73	2.36
6	$12\frac{1}{4}$	3.61	21.8	7.27	1.85
5	$14\frac{3}{4}$	4.34	15.2	6.08	1.70
5	$9\frac{3}{4}$	2.87	12.1	4.84	1.23
4	$10\frac{1}{2}$	3.09	7.1	3.55	1.01
4	$7\frac{1}{2}$	2.21	6.0	3.00	0.77
3	$7\frac{1}{2}$	2.21	2.9	1.93	0.60
3	$5\frac{1}{2}$	1.63	2.5	1.71	0.46

總 習 題

一、設有截面(如第二十五圖),其尺寸為:

$b = 10$ 吋

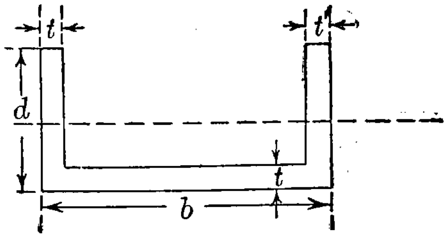
$d = 4$ 吋

$t = 1$ 吋

試求其重心軸 1 − 1。

答　離底邊 $1\frac{1}{4}$吋

二、今有一甲板桁 (deck beam)，用以建築房屋，其邊(flange)為4×3/4吋之矩形，其腹 (web) 為 5×1/2 吋之矩形，而其頭 (head) 為橢圓形，該頭之面積為 1·6 方吋，深為 1 吋，試求其重心與頭頂(top of the head)相去之距離。



第　二　十　五　圖

答 4.04 吋

三、試求第二十六圖所示一桿之重心。　答 $\overline{x}$ 0.147 吋

$\overline{y}$ 1.89 吋

四、設有截面（如第二十七圖），其尺寸為：

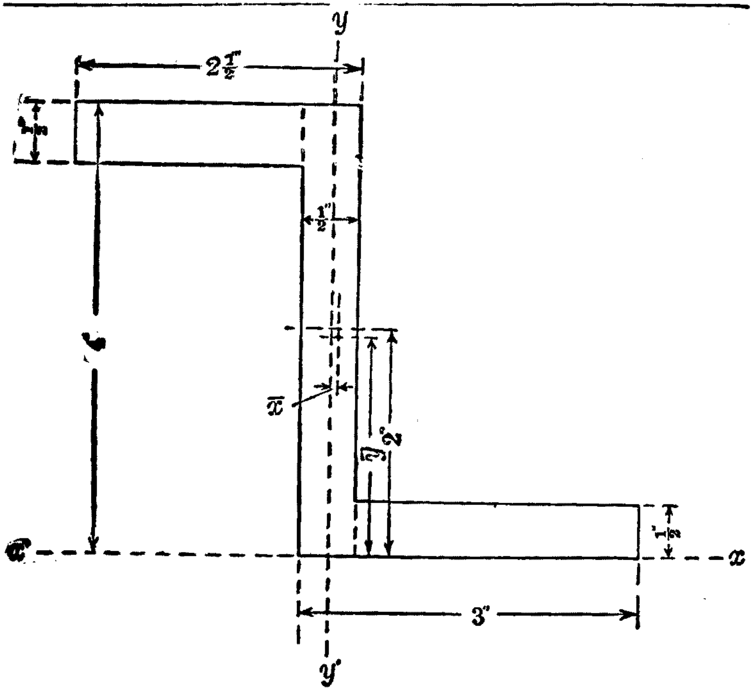
b＝ 8 吋

h＝10 吋

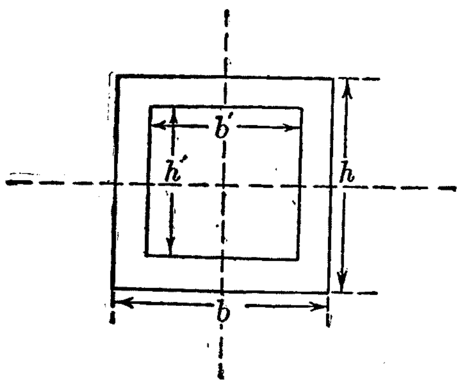
b′＝ 5 吋

h′＝ 6 吋

試求其對於二重心軸之複矩。　答 $576\frac{2}{3}$吋^4，$361\frac{1}{6}$吋^4



第二十六圖



第二十七圖

五、有一中空生鐵柱,外徑爲 6 吋,厚爲 1 吋,試求其截面對於直徑之複矩。 答 51 $吋^4$

六、中空圓軸 (shaft) 之外徑爲 18 吋,內徑爲 10 吋,試求其極軸轉動慣量。 答 9328 $吋^4$

七、今有一矩形,高爲 10 吋,底邊爲 6 吋, 設所取之軸在底邊下 4 吋而與該底邊相平行,試求其複矩。 答 5360 $吋^4$

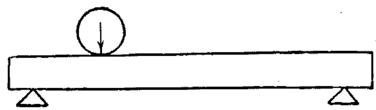
八、今有一圓環,外徑 10 吋,內徑 8 吋,試求其迴轉半徑。

答 3.2 吋

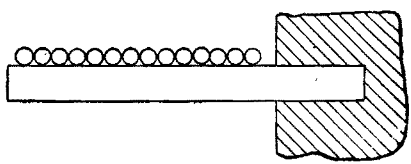
第四章 梁(Beams)

31. 梁之種類 (Kinds of Beams)

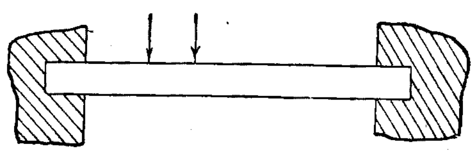
橫桿之二端,靠於支柱(supports)者,謂之普通梁(simple beam),或單稱之曰梁(如第二十八圖);一端插定,一端懸空者,謂之肱梁(cantilever)(如第二十九圖);其插定之端,仍保持其水平者,謂之固定梁(restrained or fixed beam);第三十圖,為二端固定之梁(beam fixed at both ends);第三十一圖之梁,係一端固定,一端倚靠(fixed at one end and supported at the other);又如第三十二圖所示,桿端伸過其支柱者,謂之外伸梁(overhanging beam);凡非



第二十八圖

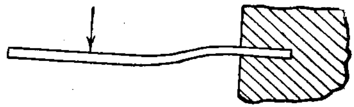


第二十九圖



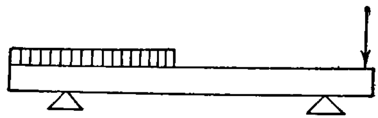
第三十圖

加以特別注明者，梁之全部各剖面，其大小皆相等。



第三十一圖

梁之擔負有二種：(一)集中擔負 (concentrated load)，卽單一重量之施於梁上一點者（第二十八、三十、三十一等圖)；(二)均佈擔負 (uniformly distributed load)，卽係梁自身之重量，及均等分佈於其全部之任何擔負（第二十九圖），通常以「每呎……磅」(pounds per linear foot)表示之。

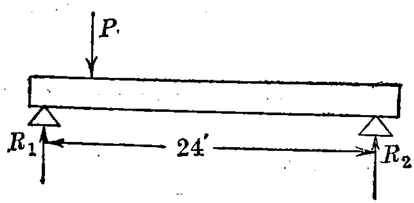


第三十二圖

32. 支柱之反力 (Reactions of Supports)

梁靠於支柱；則其自身之重及其擔負，均爲支柱所負荷，因生向上之反力 (reaction)；該反力與擔負必爲平衡，通常擔負之大小及位置皆已知，故其反力可應用力矩原理以求之。

設有一梁（第三十三圖)，二端靠於支柱，



第三十三圖

架徑(span)爲 24 呎,離左支柱 6 呎處擔負 P 磅;今取右支點爲矩中心,則 R_1 之挺率爲 24 呎,P 之挺率爲 18 (卽24−6)呎,R_2 之挺率爲 0,依力矩原理:

$$R_1\times 24-P\times 18=0$$

$$\therefore\quad R_1=3/4P$$

又取左支點爲矩中心,則 R_1 之挺率爲 O,P 之挺率爲 6 呎,R_2 之挺率爲 24 呎,依力矩原理:

$$-R_2\times 24+P\times 6=0$$

$$\therefore\quad R_2=\frac{1}{4}P$$

今梁旣在平衡,二反力之和,自必等於擔負,卽:

$$R_1+R_2=\frac{3}{4}P+\frac{1}{4}P=P$$

其因梁自身之重而生之反力,亦可照上法求之:惟在力矩式中,假定該均佈擔負(卽梁之重量)集中於其重心處,例如梁重爲W,其力矩式爲:

$$R_1\times 24-W\times\frac{24}{2}=0$$

及

$$-R_2\times 24+W\times\frac{24}{2}=0$$

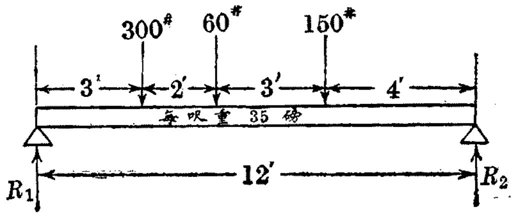
由上式得

$$R_1=\frac{1}{2}W$$

及　　$R_2=\frac{1}{2}W$

然由均佈擔負及集中擔負二者所生之反力，可用一解法求得之，不必如上法之分爲二次也。

今有一梁（第三十四圖），在二支點間之長爲 12 呎，每呎重 35 磅，共重 420 磅；設有擔負 300 磅，60 磅及 150 磅，各置於離左支點 3 呎，5 呎及 8 呎處；欲求左方之反力 R_1；試取右支點爲矩中心，而假定梁之重量集中於其中點，



第　三　十　四　圖

則力矩方程式爲：

$$R_1\times 12-420\times\frac{12}{2}-300\times 9-60\times 7-150\times 4=0$$

$\therefore$　$R_1=520$ 磅

同法，欲求 R_2，則取左支點爲矩中心，其力矩公式爲：

$$-R_2\times 12+420\times\frac{12}{2}\times 300\times 3+60\times 5+150\times 8=0$$

$R_2=410$ 磅

欲驗所求得 R_1 及 R_2 值之錯誤與否，可視 R_1 及 R_2 之和，是否等於梁之擔負及其自身重量之和。

習　題

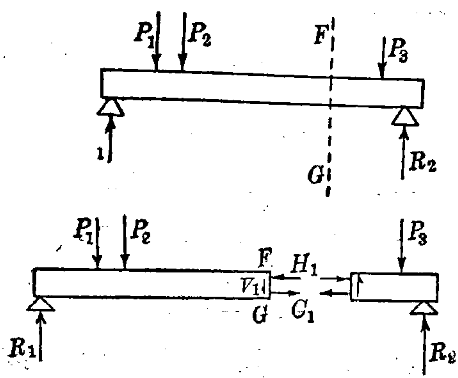
一、一普通梁長 10 呎，受有均布擔負 6,000 磅，其反力應爲若干？　　答 3,000 磅

二、今有一普通梁，二支柱之距離爲 20 呎，離左支柱 5 呎處，置集中擔負 1,200 磅，試計算其反力。

答 300 磅 900 磅

33. 梁之切力(Shear in a Beam)

凡梁加以擔負，則其內部必生應力以抵抗之，此應力可析爲二分力 (components)，卽鉛直分應力(卽 v_1)及水平分應力(卽 H_1 及 C_1) (vertical and horizontal components of the internal resisting stresses)；如第三十五圖之梁，吾人可懸想用一鉛直面 F G 橫切之，使分爲左右二部，今試略去其右部，僅就左部而論，該部所有諸擔負(卽 P_1 及 P_2)及反力(卽 R_1)，必與 F G 截面上之諸應力相平衡，此擔負及反力



第三十五圖

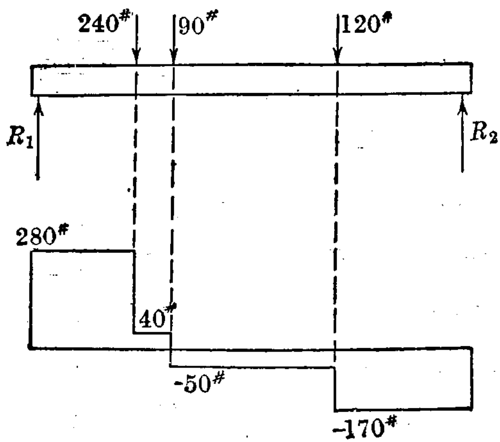
之代數和，謂之鉛直切力(vertical shear)。通常以 V 表之，而沿 F G截面之鉛直分應力 V_1，謂之抗切力(resisting shear)。今梁之左部，既爲平衡，則其抗切力必等於鉛直切力。故：

$$s_s A = V \qquad \text{或} \quad s_s = \frac{V}{A}$$

式中A爲梁之橫截面積，s_s 爲該截面之單位切應力，V爲鉛直切力，在截面左方之鉛直切力，通常以向上爲正，向下爲負。

設有一梁，靠於二支柱，其架徑爲 12 呎，離左支點 3,4,及 8 呎處，各擔負 240,90，及 120 磅，應用上節所述之法，求得左方反力 R_1 爲 280 磅，右方反力 R_2 爲 170 磅，在左支點及第一擔負間任何截面之鉛直切力爲：

$$V = 280 \text{ 磅}$$



第三十六圖

在第一擔負及第二擔負間截面之鉛直切力,為:

$$V=280-240=40 \text{ 磅};$$

在第二擔負及第三擔負間截面之鉛直切力,為:

$$V=280-240-90=-50 \text{ 磅};$$

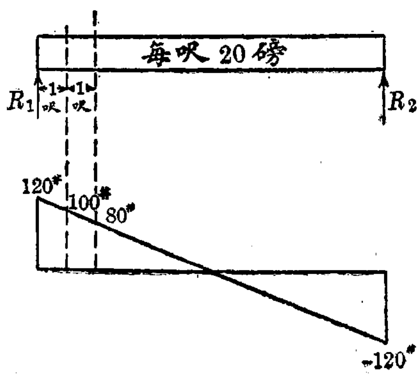
在第三擔負及右支點間截面之鉛直切力,為:

$$V=280-240-90-120=-170 \text{ 磅};$$

此鉛直切力與右方反力,數值相同(same numerical value)而符號則異。

由是可知,鉛直切力在梁之各截面,其值大不相同;若以各截面之鉛直切力為縱座標(ordinate),而以各該截面離某定點之距離為橫座標 (abscissa),則得線圖可以表示梁之諸鉛直切力,謂之切力圖 (shear diagram) (第三十六圖)。

又設有一梁(第三十七圖),長 12 呎,每呎重 20 磅,共重 240 磅,其左右二反力,各為 120 磅,在左支柱處之鉛直切力為 120 磅, 而在右支柱處



第三十七圖

$$V=120-240=-120 \text{ 磅}$$

離左支點 1 呎處

$$V=120-20\times1=100 \text{ 磅}$$

離左支點 2 呎處

$$V=120-20\times2=80 \text{ 磅}$$

觀此梁之切力圖（第三十七圖），可知其連接諸縱座標上端之線,係一直線。

又設有一外伸梁,其左端及離右端 2 呎處,各靠於支柱，梁重每呎 20 磅,離左方支柱 2 呎處及在右方支柱，分別受有集中擔負 100 磅與 80 磅（如第三十八圖）,其左方支柱之反力為 160 磅,右方支柱之反力為 260 磅，設 x 為從左支柱至任何截面之距離,則得鉛直切力方程式如下:

$$V_{0-2}=160-20x \qquad (\text{從 } 0 \text{ 至 } 2 \text{ 呎})$$

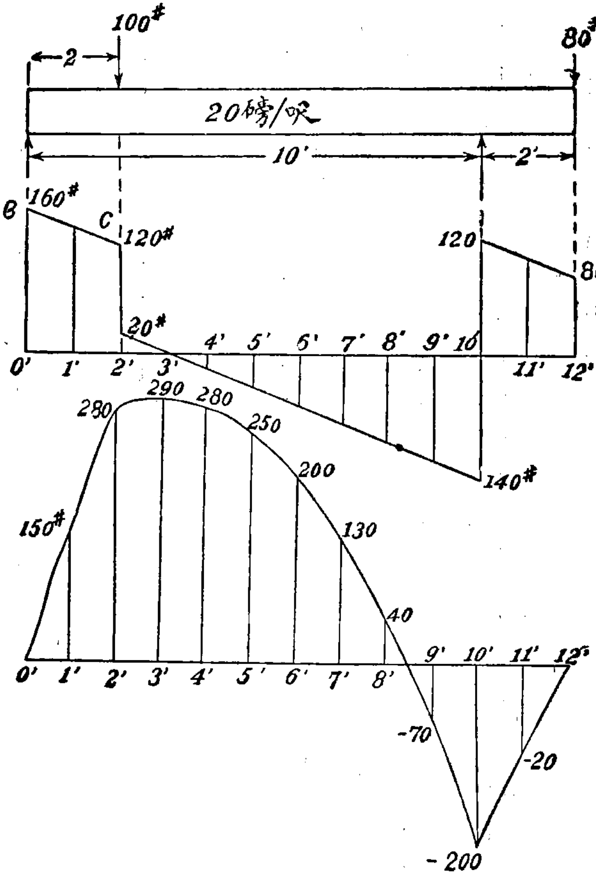
$$V_{2-10}=160-100-20x \qquad (\text{從 } 2 \text{ 至 } 10\text{呎})$$

$$V_{10-12}=160-100+260-20x \qquad (\text{從}10 \text{ 至 } 12\text{呎})$$

若 $x=2$ 呎

尙未過第一集中擔負	切力為　120 磅
適已過第一集中擔負	切力為　20 磅
$x=3$ 呎	切力為　0
$x=10$呎	
尙未過右支柱	切力為 −140 磅

適已過右支柱	切力為 120 磅
x＝11呎	切力為 100 磅



第三十八圖

習　題

一、梁長 10 呎，受有均布擔負每呎 300 磅，其二端倚靠於支柱，試求其離左支柱 4 呎處之鉛直切力。　答 300 磅

二、一普通梁長 25 呎，離左端 5 呎處，受有集中擔負 1000 磅；10 呎處，2,000 磅；15 呎處，2,400 磅；試計算其鉛直切力。

答	左端	2960 磅
	第一集中擔負處	1960 磅
	第二集中擔負處	−40 磅
	第三集中擔負處	−2440 磅
	右端	−2440 磅

三、一普通梁長 24 呎，受均布擔負每呎 200 磅，並離左端 4 呎處，置集中擔負 800 磅；10 呎處，置 1600 磅；及離右端 8 呎處，置 2100 磅，試求其集中擔負處各鉛直切力，並繪切力圖。

答	第一集中擔負處	3100 磅
	第二集中擔負處	300 磅
	第三集中擔負處	−3000 磅

34. 彎曲矩(Bending Moment)

梁之破斷，恆在橫面，此由於其外力繞該破斷面內某點旋轉而起，即所謂彎曲矩(bending moment)也。梁內任何截面之彎曲矩，爲在該截面左方諸外力之初矩之代數和，試取經過左支點之

截面，其彎曲矩爲零；因在此截面之左，並無外力，而欲保持其平衡，右支點之彎曲矩亦爲零，其餘各截面，均有彎曲矩之存在也。

設有一梁，長 30 呎，離左支點 8，12，及 22 呎處，各擔負 100 磅，用前法，求得左方反力爲 160 磅，右方反力爲 140 磅，離左支點 4 呎處之彎曲矩，爲：

$$160\times4=640\text{呎磅}$$

離左支點 8 呎處之彎曲矩爲：

$$160\times8=1280\text{呎磅}$$

又離左支點 10 呎處取截面，則該截面之左，有二箇鉛直外力：一爲向上之 160 磅（卽左方反力），一爲向下之 100 磅（卽第一擔負），故該截面之彎曲矩爲：

$$160\times10-100\times(10-8)=1400\ \text{呎磅}$$

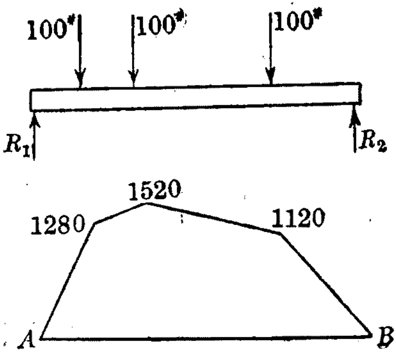
其在梁之中央之彎曲矩爲：

$$160\times15-100(15-8)-100(15-12)=1400\text{呎磅}$$

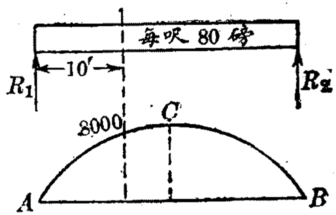
若截面取在第二擔負處，其彎曲矩爲 1520 呎磅，在第三擔負處爲 1120 呎磅；而離右支點 3 呎處，則爲 420 呎磅。

今取上述諸截面之彎曲矩爲縱座標，自各該截面至某定點之距離爲橫座標，卽得線圖，可表示全梁之諸彎曲矩，名曰彎曲矩圖 (moment diagram)（第三十九圖）。

又設有一梁，其架徑爲 1，均佈擔負爲每呎 w 磅，則其二



第三十九圖



第四十圖

端之反力，各爲 $\frac{1}{2}$wl，而其離左支點 x 處任何截面之彎曲矩爲 $\frac{1}{2}wl\times x - wx\times\frac{1}{2}x$（因反力之挺率爲 x，均佈擔負 wx 之挺率爲 $\frac{1}{2}$x），若 l 爲 30 呎，w 爲 80 磅（即每呎 80 磅），則任何截面之彎曲矩爲 $1200x-40x^2$

若 x=10 呎，	彎曲矩爲 8000 呎磅；
x=15 呎，	彎曲矩爲 9000 呎磅；
x=20 呎，	彎曲矩爲 8000 呎磅；

觀此梁之彎曲矩圖（第四十圖），可知其連諸縱座標上端之線，係一普通拋物線（parabola）。

若梁同時受有集中擔負及均佈擔負如上節第三十八圖所示，其彎曲矩亦可用上法求之。

假定 x 爲從左端至任何截面之距離,則其彎曲矩式爲:

$$M_{0-2} = 160x - 20x \cdot \frac{x}{2} = 160x - 10x^2$$

(從 0 至 2 呎)

$$M_{2-10} = 160x - 100(x-2) - 20x \cdot \frac{x}{2}$$

$$= 60x + 200 - 10x^2$$

(從 2 至 10 呎)

$$M_{10-12} = 160x - 100(x-2) + 260(x-10) - 20x \cdot \frac{x}{2}$$

$$= 320x - 2400 - 10x^2$$

(從 10 至 12 呎)

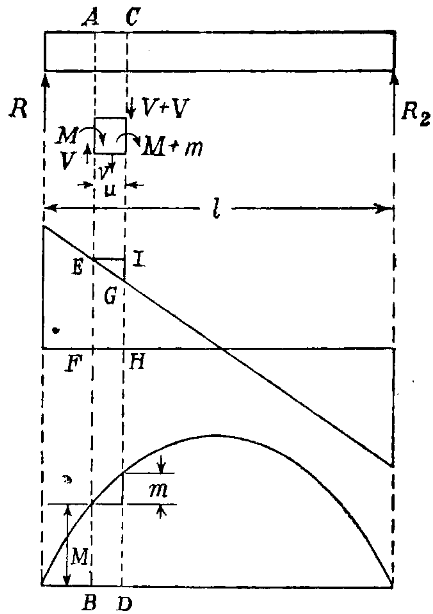
若 $x=2$ 呎	彎曲矩爲 280 呎磅
$x=3$ 呎	彎曲矩爲 290 呎磅
$x=10$呎	彎曲矩爲 −200 呎磅
$x=11$呎	彎曲矩爲 −90 呎磅

35. 鉛直切力與彎曲矩之關係

(Relation between the Vertical shear and the Bending Moment)

命 M 爲離左支柱處之彎曲矩,及 M+m 爲相離 x+u 處之彎曲矩。其 u 係沿 ox 軸之微小長度,而 m 爲二截面彎曲矩之差。在第四十一圖中之梁,取 AB 與 CD 二截面,則 M 爲在

AB 截面左方之彎曲矩，由此而傳至右部，則彎曲矩爲 M+m，其所增之量 m，係由外力作用於該小部而起。此項外力爲左方鉛直切力 V，重量 wu（w 係單位長度之重），及右方鉛直切力 V+v，其對於 CD 截面內之軸之彎曲矩，爲



第　四　十　一　圖

$$M+m=M+Vu-wu\cdot\frac{u}{2}$$

$$=M+Vu-w\frac{u^2}{2}$$

u 可取值極小，使在此微小長度上之擔負，可視爲均匀一致。觀第四十一圖，可知 Vu 係矩形 EFHI 之面積，$w\frac{u^2}{2}$ 係三角形 EGI 之面積，故

$$m=EFHI-EGI$$

即等於軸與切力圖間之面積。由此可得一結論:任何二截面彎曲矩之變差(change),等於該二截面間切力圖之面積。

設 $m = Vu - w\frac{u^2}{2}$ 式中之 u,變爲極小,使 AB 與 CD 二截面互爲連續,則 $w\frac{u^2}{2}$ 與 Vu 相比較時,$w\frac{u^2}{2}$ 自極微小,可視爲零。故其變率(rate)爲

$$\frac{m}{u} = \frac{V_u}{u} = V$$

即任何截面彎曲矩之變率,等於該截面之鉛直切力。

最大切應力係在最大鉛直切力處,最大張矩應力與最大壓矩應力(tensile and compressive moment stresses),係在最大彎曲矩處。無論何種之梁,其最大切力適在支柱之一面,而梁之破損,每在最大彎曲矩之截面,因之該截面謂之危險截面,(dangerous section)。欲知危險截面之所在,可應用切力圖面積與彎曲矩之關係求得之。

觀第四十一圖,可知二截面間之切力圖,代表該二截面間彎曲矩之變差。試沿梁之全部而考之,當切力圖面積爲正時,彎曲矩逐漸增加;切力圖面積爲負時,彎曲矩逐漸減小。在軸線上方之切力圖爲正,在軸線下方者爲負。切力改變正負號,適當切力圖交於軸線處,故梁之最大彎曲矩,係在切力圖交於軸線之點,即鉛直切力爲零之點,該點可作切力圖以求之。若將鉛直切力方

程式 (equation of vertical shear) 等於零而解之，亦可求得。所應注意者，代表 V 之方程式，須確爲切力經過零點之部份。無論何時在集中擔負處，切力經過零點，則最大彎曲矩當在該擔負處。

試查第三十八圖，離左方支柱 2 呎處之切力圖面積，爲

$$\frac{160+120}{2}\times 2=280$$

與上節所求得 2 呎處之彎曲矩 280 呎磅相符，又離左方支柱 3 呎處之切力圖面積，爲

$$280+\frac{20\times 1}{2}=290$$

亦與上節所求得 3 呎處之彎曲矩 290 呎磅相符。但此處之鉛直切力爲零，故該 290 呎磅爲最大彎曲矩。

習　題

一、今有 9 呎長之肱梁，置 2,000 磅於其懸空端，則離該端 50 吋處之彎曲矩，應爲若干。

答　−100,000 吋磅

二、一普通梁長 20 呎，其中央受有集中擔負 10,000磅，試求其離左端 8 呎與 16 呎處之彎曲矩

答　480,000 吋磅

240,000 吋磅

三、今有一梁，長 10 呎，計重 400 磅，其二端均有支柱支承之，若受均布擔負 1,600 磅時，每間 2 呎之彎曲矩，各爲若干。

答 M_2 1,600 呎磅

M_4 2,400 呎磅

M_6 2,400 呎磅

M_8 1,600 呎磅

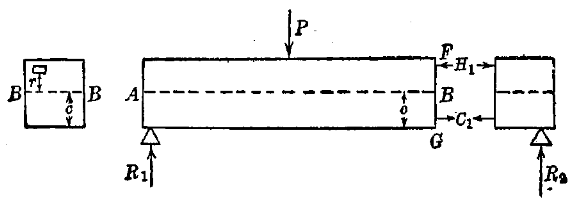
四、今有外伸梁，長 16 呎，左端及離右端 4 呎處，均有支柱支承之。其全長受有均布擔負每呎 200 磅，並離左端 4 呎處，加集中擔負 2,000 磅，試作切力圖與彎曲矩圖，並注明其最大切力及最大彎曲矩。

答 左端鉛直切力 2,400 磅

集中擔負處彎曲矩 8,000 呎磅

36. 抗矩 (Resisting Moment)

設有一梁，試懸想其爲一鉛直平面 F G 所橫切，而分成左右二部(如第四十二圖)，今略去其右部，僅就左部而論，其反力(卽 R_1)及擔負(卽 P)之初矩之代數和，爲 F G 截面之彎曲矩，



第 四 十 二 圖

其在該截面諸水平分應力（即H_1 及C_1，參照第三十五圖）之初矩之代數和，謂之抗矩 (resisting moment)，彎曲矩有使該梁繞B點，順時針而旋轉之趨向，欲常保持其平衡，則抗矩當有繞該B點逆時針而旋轉之趨向，且其大小，非與彎曲矩相等不可也。

由歷來實驗，知梁當受力而屈曲時，有某線如 A B，其長度不改變，故沿該線無水平應力，在此中立線以下諸絲 (fibers)，受張力而伸長在此中立線以上諸絲受壓力而縮短，梁之各鉛直縱截面 (longitudinal vertical section)，均有如A B之中立線，故在梁之全部，爲一中立面 (neutral surface)，此中立面與任何橫截面相交之線如B B者，謂之中立軸 (neutral axis)。

又由歷來實驗，知材料不逾彈性限度時，其任何截面上各處之水平應力，均與其離中立軸之距離，爲正比例，今命 s 爲梁之上邊或下邊之水平單位應力（縮壓或張引），則在該邊及中立軸之適中處之單位應力，爲 $\frac{1}{2}$ s，又命 c 爲自中立軸至上邊或下邊之距離（第四十二圖），v 爲任何絲至中立軸之距離，則在 v 處之水平單位應力，爲 $s\frac{v}{c}$，又設該處之元面爲 ΔA，則在此面之應力，共爲 $\Delta A\cdot s\frac{v}{c}$，此應力對於B點之初矩，爲 $\Delta A\cdot s\frac{v}{c}$ 乘挺率 v，即 $s/c\,\Delta A\cdot v^2$。

但抗矩爲此等微小初矩之代數和，即

$$抗矩=\frac{s}{c}(\Delta A_1 v_1{}^2+\Delta A_2 v_2{}^2+\Delta A_3 v_3{}^2+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{s}{c}\cdot\Sigma\Delta A\cdot v^2=\frac{s}{c}\cdot I\ (見\ 25\ 節)$$

上述任何截面之彎曲矩,等於該截面之抗矩,故得:

$$M=\frac{s\ I}{c} \tag{IV}$$

此式謂之彎曲公式(flexure formula),式中M爲彎曲矩,s爲梁之上邊或下邊之最大水平單位應力,通常稱爲外絲單位應力(extreme-fibre or skin unit-stress),c爲自中立軸至上邊或下邊之鉛直距離,I爲截面對於中立軸之複矩,$\frac{I}{c}$名爲彎曲係數或截面係數(section modulus)。

37. 最大切力及彎曲矩(Maximum Shears and Moments)

普通梁之最大鉛直切力,係在二支點,肱梁之最大鉛直切力,在其嵌插之處,設普通梁之長爲 l,所受之均佈擔負爲每呎w磅,其最大之鉛直切力,即係其反力$\frac{1}{2}$wl,若無均佈擔負,而在其中央,加以集中擔負 P,其最大切力,亦爲其反力$\frac{1}{2}$P,又設肱梁之長爲 l,擔負每呎w磅,其最大切力,爲其全重 wl,若 P 爲其懸空端之集中擔負,則其最大切力,即爲 P。

試觀上節所述之彎曲公式$M=\frac{s\ I}{c}$,可知 s 與M相正比,即梁之最大張應力或壓應力,必在最大彎曲矩之截面

設有一普通梁，受有均佈擔負，其離左支點 x 處任何截面之彎曲矩爲：

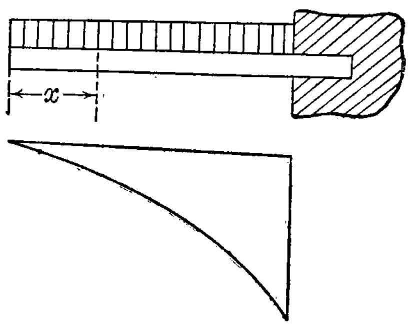
$$M=\frac{1}{2}wlx - wx\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}w(lx-x^2)$$

若 $x=\frac{1}{2}l$，則得 $M=1/8\ wl^2$，卽爲其最大之彎曲矩；若 w 爲其總擔負 wl，則可寫爲 $M=\frac{1}{8}wl$，又若該梁之中央，受有集中擔負 P 時，則其最大彎曲矩爲：

$$M=\frac{1}{2}P\times\frac{1}{2}l=\frac{1}{4}Pl$$

若有許多集中擔負，其最大彎曲矩，通常在集中擔負處。

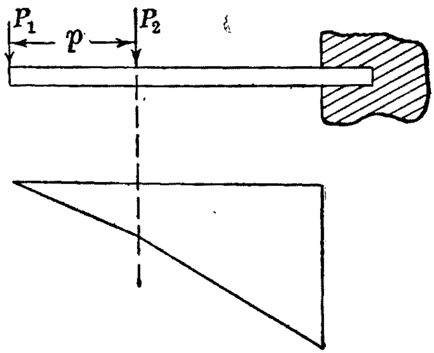
至於肱梁之最大彎曲矩，恆在其嵌插之處，設有均佈擔負爲每呎 w 磅，則離左端 x 處之彎曲矩(第四十三圖）爲擔負 wx 乘挺率 $\frac{1}{2}x$ 之積。此彎曲矩爲負，因其旋轉之趨向與時針方向相反，故任何截面之彎曲矩爲 $M=-\frac{1}{2}wx^2$，而其彎曲矩圖係一拋物線（第四十三圖），當 $x=l$ 時，$M=-\frac{1}{2}wl^2$，此卽該梁之最大彎曲矩，此



第四十三圖

負號僅表示旋轉之方向，當應用彎曲公式（即公式IV）時，可祇將M之值代入，不必繫以符號也。

又如第四十四圖所示之肱梁，受有集中擔負 P_1 及 P_2，命x為梁上某截面至左端之距離，若此截面在 P_2 之左，則其彎曲矩為 $-P_1x$；若在 P_2 之右，則 $M=-P_1x-P_2(x-p)$，式中之 p，為二集中擔負之距離，此梁之彎曲矩圖，係由直線所組成，



第四十四圖

當 $x=l$ 之時，$M=-P_1l-P_2(l-p)$，即該梁之最大彎曲矩。

38. 梁之計算(Calculation of Beams)

梁之大小及擔負，若為已知，則可求其最大之彎曲矩，而中立軸之所在（即 c 值）及複矩之大小，亦可推算。將此等數值，代入 $M=\frac{s\ I}{c}$ 式內，又可求得最大單位應力 s 之值，再將該單位應力與其材料之容許應力相比，即可知該梁為安全與否。

設有一木梁，闊 3 吋，深 4 吋，其架徑為 16 呎，一人重 150 磅，立於其中央，木材每立方呎，重 40 磅，試查驗該梁究為安全否。今

$$b = 3\text{吋},\quad h = 4\text{吋},\quad l = 16 \times 12 = 192\text{ 吋},$$

$$c = \frac{1}{2}h = 2\text{吋},\quad I = \frac{bh^3}{12} = 16\text{吋}^4,\quad P = 150\text{ 磅。}$$

設W爲梁自身之重量,則

$$W = \frac{3}{12} \times \frac{4}{12} \times 16 \times 40 = 53.3\text{ 磅}$$

其最大彎曲矩(因受均佈擔負W及集中擔負P而生,見上節)爲:

$$M = \frac{1}{8}Wl + \frac{1}{4}Pl = 706.7\text{ 呎磅}$$

$$= 8480\text{ 吋磅}$$

故最大之單位應力爲

$$S = \frac{Mc}{I} = \frac{8480 \times 2}{16} = 1060\text{ 磅/吋}^2$$

試觀第五表,木材受張引時,其容許應力爲 1200 磅/吋^2,受縮壓時,爲 1000 磅/吋^2,故該梁對於前者,頗爲安全,對於後者,則稍覺危險也。

吾人計算時,若梁之長度單位爲呎,則當化爲吋,因 s, I,及 c 所用之單位,均爲吋故也。

又梁之大小及形狀,若爲已知,則不推算I及c之值,而欲求其安全擔負(safe load),亦必先將該未知擔負所生之最大彎曲矩,代入$M = \frac{sI}{c}$式中。例如一生鐵梁,闊 3 吋,深 4 吋,長 36 吋,今欲使其所生之單位應力,爲每方吋 2000 磅,則其均佈擔負,

當爲若干磅。設該均佈擔負爲每吋w磅,其總擔負爲 wl,二端之反力各爲$\frac{1}{2}$wl, 最大彎曲矩爲: $M=\frac{1}{8}wl^2=\frac{1}{8}w\times36^2=162w$,又c=2吋,I=16吋^4, 代入彎曲公式$M=\frac{sI}{c}$則得:

$$162\ w=\frac{2000\times16}{2}$$

$$\therefore\quad w=98.8\ \text{磅/吋}$$

$$\therefore\quad wl=98.8\times36=3560\ \text{磅}$$

故該梁之均佈安全擔負,爲 3560 磅。

39. 梁之設計(Design of Beams)

梁之設計者,卽其長度與擔負爲已知,而求其截面之大小也。先假定其容許應力 s 之値,再從已知擔負,求其最大彎曲矩; 然後用彎曲公式$\frac{I}{c}=\frac{M}{s}$,定 I 及 c 之値,若梁之截面,係一矩形,其闊爲 b, 深爲 d, 則 c 爲$\frac{1}{2}$d, I 爲$\frac{bd^3}{12}$,故上式可寫爲:

$$bd^2=\frac{6M}{s}.$$

先假定 b 或 d 之値,卽可求其他之値。

例如設計一木質矩形肱梁,須受均佈擔負共 80 磅,其長爲6呎,工作應力爲每方吋 800 磅, 此梁之最大彎曲矩爲$\frac{1}{2}\times80\times6=240$呎磅$=2880$ 吋磅,而 bd^2 爲 21.6 吋^3。

若 b 爲 1 吋，　　則 $d = 4.65$ 吋；

b 爲 2 吋，　　則 $d = 3.29$ 吋；

b 爲 3 吋，　　則 $d = 2.68$ 吋。

今在市上易購得之木材，爲 3×3 吋，故即用此尺寸，爲該梁之截面。

又設計一工形鋼梁(steel I beam)，長 30 呎，須能受均佈擔負 30,000 磅，今最大彎曲矩爲：

$$M = \frac{1}{8} \times 30,000 \times 30 \times 12 = 1,350,000 \text{ 吋磅}$$

若容許應力爲 16,000 磅/吋^2，則

$$\frac{I}{c} = \frac{M}{s} = \frac{1350000}{16000} = 84.4 \text{吋}^3$$

翻閱工形鋼桁表，查得 55 磅重 18 吋深之工形鋼桁，其$\frac{I}{c}$值，與所求得者最相近，故即用此以爲梁。

40. 比較的強度(Relative Strength of Beams)

當單位應力 s 已知時，梁之強度，即以其所能支承擔負測定之。今命梁之長度爲 l，闊爲 b，深爲 d，則 $c = \frac{1}{2}d$，$I = \frac{bd^3}{12}$，試就各梁分論之如下：

(1)肱梁之端擔負W者：

$$M = Wl \text{ 及 } W = \frac{sbd^2}{6l}。$$

(2)肱梁受有均佈擔負W者：

$$M=\frac{1}{2}Wl \text{ 及 } W=\frac{2sbd^2}{6l}。$$

(3)普通梁之中央擔負W者:

$$M=\frac{1}{4}Wl \text{ 及 } W=\frac{4sbd^2}{6l}。$$

(4)普通梁受有均佈擔負W者:

$$M=\frac{1}{8}Wl \text{ 及 } W=\frac{8sbd^2}{6l}。$$

故四梁之強度,爲 1,2,4,8,之比,換言之,卽四梁設爲同質同長同大小時,第二梁比第一梁強 2 倍,年三梁強 4 倍,第四梁強 8 倍也。

由上所述諸方程式,可推得矩形梁之公例如下:

(1)梁之強度與其闊相正比,亦與其深之自乘方相正比。

(2)梁之強度與其長相反比。

(3)梁受均佈擔負時之強度,爲其受等量之集中擔負時之二倍。

上述之第二第三公例,亦可應用於任何橫截面之梁。

41. 強度不變之梁(Beams of Constant Strength)

上述諸梁,其全部各截面,大小均相等,但在梁端之彎曲矩甚小,而 s 亦因之甚小,故該處所用之材料,實屬過量,其梁之各截面,大小不同,而諸 s 値,務必使之相等者,謂之強度不變之梁

(beam of constant strength)。

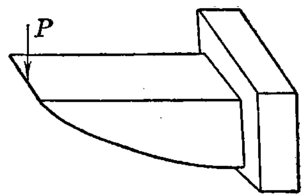
設肱梁之端,置有P重,則在任何距離 x 處之彎曲矩,爲Px,若其截面爲矩形,則:

$$Px=\frac{1}{6}sbd^2 \quad (\text{見 34 節})$$

若 b 不變,則:

$$d^2=\frac{6Px}{sb}$$

故 d^2 與 x 相正比,而梁之外圍,係普通拋物線形(第四十五圖),當 $x=l$ 時,其深假定爲 d_1 (卽嵌插端之深),由上述定義,得:



第四十五圖

$$s=\frac{6Pl}{bd_1^2}=\frac{6Px}{bd^2}$$

$$\therefore\ d=d_1\sqrt{\frac{x}{l}}$$

又該梁受均佈擔負每單位長度爲w時,彎曲矩爲$\frac{1}{2}wx^2$,故

$$\frac{1}{2}wx^2=\frac{1}{6}sbd^2$$

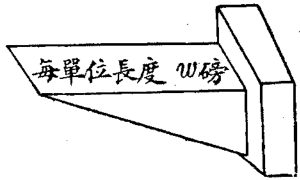
若其闊均等,則:

$$d^2=\frac{3wx^2}{sb}$$

此梁之外圍，係三角形（第四十六圖），當 $x=l$ 時，其深假定爲 d_1，則：

$$s=\frac{3wl^2}{bd_1^{\,2}}=\frac{3wx^2}{bd^2}$$

$$\therefore \quad d=d_1\frac{x}{l}$$



第四十六圖

習題

一、今有一工形鋼桁，二端倚靠於支柱，其間相去 15 呎。離其一支柱 5 呎處，置集中擔負 8,000 磅，若該鋼桁重 375 磅，其腹截面(web section) 爲 3.2 方吋，則最大單位切應力，當爲若干？　　答 1,725 磅/吋^2

二、一6 吋 ×10 吋*之梁，長 15 呎，其二端均承以支柱，設加每呎 120 磅之均佈擔負，則其最大單位絲應力若干？

答 405 磅/吋^2

*闊在前，深在後。

三、今取 10 吋 25 磅之工形鋼桁，用爲普通梁，其架徑爲 16 呎，若容許絲應力，爲每方吋 16,000 磅，則該鋼桁能加均佈擔負若干磅？　　答 16,270 磅

四、試設計一正方衫木肱梁，其架徑爲 8 呎，而在懸空端須置集

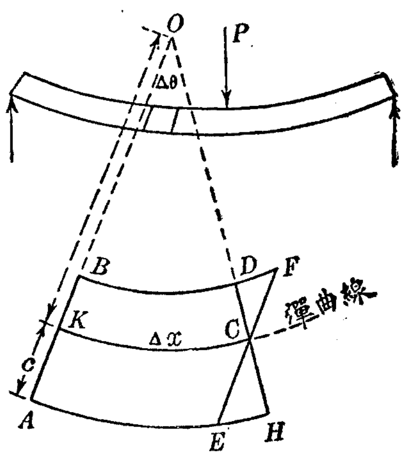
中擔負 500 磅。　　答 6.61 吋

五、一強度不變之肱梁,於其懸空端置集中擔負 600 磅。全體闊 4吋,截面矩形,容許絲應力爲每方吋 1,200 磅,若從擔負處至固定點長 60 吋,試求每間 10 吋處之深度。

答	10 吋處	深 2.74 吋
	20 吋處	深 3.87 吋
	30 吋處	深 4.74 吋
	40 吋處	深 5.48 吋
	50 吋處	深 6.12 吋
	60 吋處	深 6.71 吋

42. 撓度公式(General Deflection Formula)

梁受載重,則生撓曲,其鉛直縱截面與中立面相交之線,謂之彈性曲線(Elastic curve),(第四十七圖)彈性曲線之任意小部分 Δx,可視爲以 O 爲中心之圓弧,該 O 點爲圓弧 Δx 之曲率半徑(radius of curvature),曲率半徑非爲



第四十七圖

常數,沿梁之各點,均不相同。

試取任何鄰近二截面 A B與D H,在未撓曲前,本相平行,而在撓曲時,則相交於曲率中心O,命K C = Δx 爲其絲之本來長度,經過C點畫E F線與A B平行,則D F代表上邊絲之縮短度,E H代表下邊絲之伸長度,Δx 爲極小時,K O C及E C H可視爲相似三角形。

$$\therefore \quad \frac{EH}{KC}=\frac{CH}{OK}=\frac{c}{r} \qquad (1)$$

又K C爲原來之長度,E H爲上邊或下邊絲之形變,故$\frac{EH}{KC}$爲單位形變 δ, 依公式 $\delta=\frac{s}{E}$,(1)式可寫爲:

$$\frac{s}{E}=\frac{c}{r}$$

$$但\ s=\frac{Mc}{I} \qquad (公式IV)$$

$$\therefore \quad \frac{Mc}{EI}=\frac{c}{r}$$

$$卽\ r=\frac{EI}{M} \qquad (2)$$

命A B爲彈性曲線之任意一部分,A A'及B B'爲A點及B點之切線(第四十八圖),若A B分爲諸小段 Δx, 而 Δθ 爲各該小段所對之圓心角(在曲率中心O),則 $\Delta x=r\Delta\theta$ 或$\Delta\theta=\frac{\Delta x}{r}$,將(2)式中 r 之値代入,則得 $\Delta\theta=\frac{M\Delta x}{EI}$ 其總角撓度(total angular deflection) θ 爲:

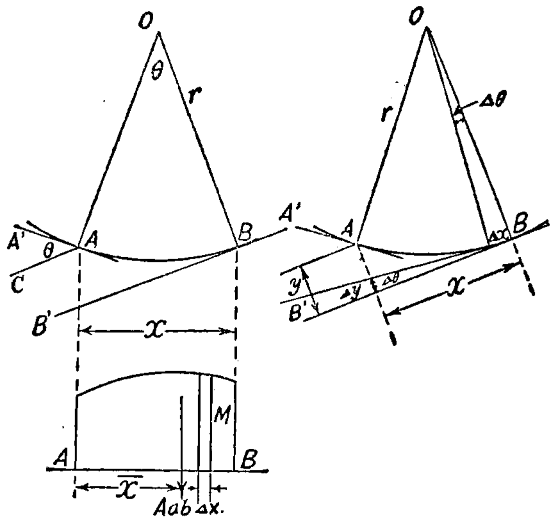
$$\theta=\Sigma\Delta\theta=\frac{1}{EI}\Sigma M\Delta x$$

今取任何小圓弧 Δx，其離 x 處之撓度 Δy（自其圓弧始點之切線量起，參觀第四十八圖），爲：

$$\Delta y=x\Delta\theta$$

故任何圓弧 A B 之總撓度 y（自 A 點量至 B 點之切線），爲：

$$y=\Sigma\Delta y=\Sigma x.\Delta\theta=\frac{1}{EI}\Sigma(M.\Delta x)x \qquad (3)$$



第　四　十　八　圖

但 $M.\Delta x$ 爲彎曲矩圖內鉛直小條之面積，該條高爲 M，底邊爲 Δx，而 $\Sigma(M.\Delta x)x$ 爲所有諸元面對於 A 點之靜矩之總和，此

總和實等於A B間彎曲矩圖之面積乘其重心至A點之距離之積(見 24 節)。換言之,若 Aab 爲A B二點間彎曲矩圖之面積,$\overline{x}$爲自 Aab 之重心至A點之距離,則:

$$\Sigma(M\Delta x)x = Aab.\overline{x}$$

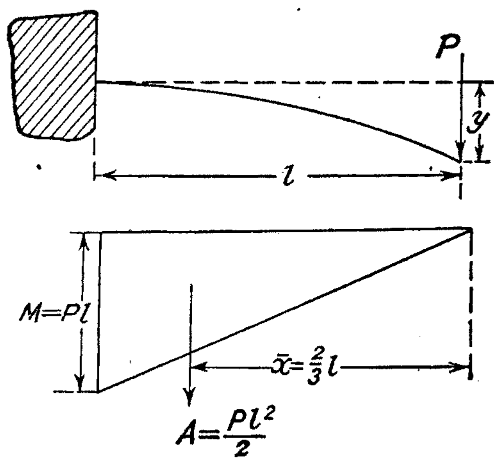
代入(3)式,則得:

$$y = \frac{1}{EI}Aab.\overline{x}$$

或 $y = \frac{1}{EI} \times$ 彎曲矩圖之靜矩

43. 肱梁之撓度(Deflection of Cantilever Beams)

設有一肱梁,其長爲l,於其懸空端加以擔負P,(如第四十九圖),其彎曲矩圖爲三角形,此圖之面積爲$A = \frac{Pl^2}{2}$,自其重心至懸空端之距離爲$\overline{x} = \frac{2}{3}l$;故該端之撓度 ym 爲:



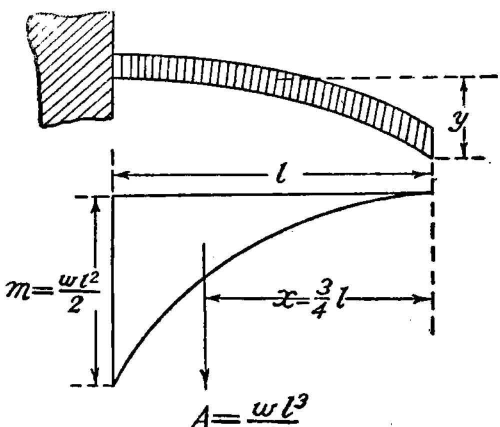
第四十九圖

$$ym = \frac{1}{EI}A\overline{x} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

若肱梁受有均佈擔負，每單位長度重 w 磅，即其總擔負 $W=wl$，其彎曲矩圖係拋物線形（第五十圖）在插嵌處之彎曲矩爲 $M=\frac{wl^2}{2}$，彎曲矩圖之面積*，爲 $A=\frac{1}{3}\cdot\frac{wl^2}{2}l=\frac{wl^3}{6}$，其重心至懸空端之距離*，爲 $\overline{x}=\frac{3}{4}l$；故該端之撓度 ym，爲：

$$ym=\frac{1}{EI}A\overline{x}=\frac{wl^4}{8EI}=\frac{Wl^3}{8EI}$$

由上所述，可知梁之撓度與其長度之立方相正比，即長度增 2 倍，則撓度增 8 倍也；又均佈擔負所生之撓度，比梁端集中擔負所生者爲小，僅及其八分之三。



第　五　十　圖

若梁之截面爲矩形，其闊爲 b，深爲 d，則 $I=\frac{bd^3}{12}$；故矩形梁之撓度，與 b 及 d^3 相反比。

*該拋物線形之面積，與以 l 爲高及 $\frac{wl^2}{2}$ 爲底座之稜錐之容積相同，而其重心之距離，亦與此稜錐之重心離其頂點之距離相同，即高度之 $\frac{3}{4}$。

設有 6×9 吋之木質肱梁（在前之數目指闊，在後之數目指深）長 6 呎，置 1350 磅於其懸空端，試求其撓度。

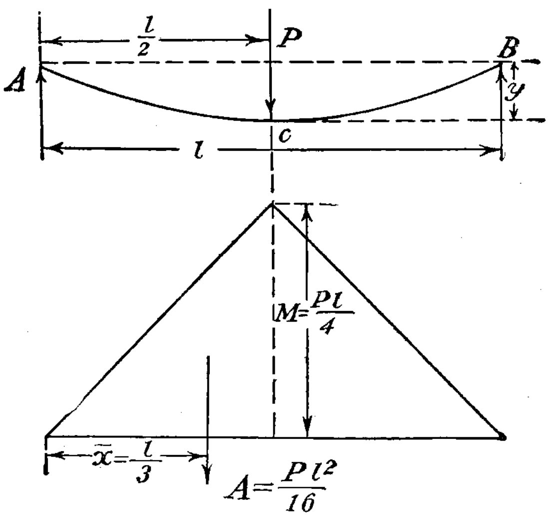
今 $P=1350$ 磅　　　$l=72$ 吋

$E=1,500,000$ 磅/吋^2　　$I=\frac{bd^3}{12}=\frac{6\times9^3}{12}=364.5$

$$\therefore \quad ym=\frac{1350\times72^3}{3\times1500000\times364.5}=0.3 \text{ 吋}$$

44. 普通梁之撓度(Deflection of Simple Beams)

欲將撓度公式應用於普通梁，其撓度須自 A 端或 B 端量至其中央 C 點之切線（第五十一圖）；若於其中央置擔負 P，則自

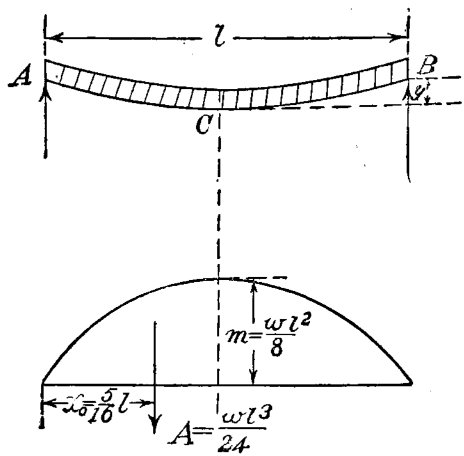


第五十一圖

A至C之彎曲矩圖，其面積爲 $A=\frac{1}{2}\times\frac{Pl}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{Pl^2}{16}$；而其重心至A端之距離，爲 $\overline{x}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$；故

$$ym=\frac{1}{EI}A\overline{x}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

若普通梁受有均佈擔負，其彎曲矩圖係一拋物線形（第五十二圖），其最大之縱座標爲 $\frac{wl^2}{8}$，其面積爲 $A=\frac{2}{3}\times\frac{wl^2}{8}\times 1=\frac{wl^3}{12}$*，欲應用撓度公式，其 ym 須自A端或B端量至中央C點之切線，而其面積爲該彎曲矩圖之二分之一，即 $A=\frac{wl^3}{24}$ 其重心距離爲 $\overline{x}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}1=\frac{5}{16}1$，故撓度爲：



第　五　十　二　圖

$$ym=\frac{1}{EI}A\overline{x}=\frac{5wl^4}{384EI}=\frac{5Wl^3}{384EI}$$

此撓度與中央受有同量之集中擔負者相比，僅及其八分之五。

* 參考 Wentworth's Solid Geometry 第 421 頁。

本節及上節所述諸公式，祇能於最大水平應力 s 不逾彈性限度時適用之；式中之 P 或W，可應用彎曲公式，以 s 代之，例如普通梁之中央受有集中擔負時，其彎曲矩爲 $\frac{1}{4}Pl=\frac{sl}{c}$，故其撓度爲：

$$ym=\frac{sl^2}{12Ec}$$

若受均佈擔負時，其彎曲矩爲 $\frac{1}{8}Wl=\frac{sl}{c}$ 故其撓度爲：

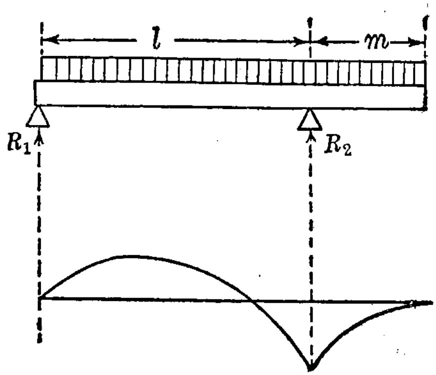
$$ym=\frac{5sl^2}{48Ec}$$

觀上二式，可知在同一單位應力時，梁之撓度，與長之平方相正比。

45. 外伸梁及固定梁

(Overhanging and Fixed Beams)

今有一外伸梁，二支柱間之距離爲 l，其一支柱在左端，其他支柱至右端之距離爲 m（第五十三圖）；若加以均佈擔負每單位長度爲 w，則其左方反力爲：



第五十三圖

$$R_1=\frac{1}{2}w\left(1-\frac{m^2}{l}\right)$$

最大正彎曲矩爲：

$$M=\frac{1}{2}\cdot\frac{R_1^2}{w}$$

最大負彎曲矩爲：

$$M=\frac{1}{2}\cdot wm^2$$

例如 $l=10$ 呎，$m=6$ 呎，及 $w=30$ 磅/呎，則梁之全重爲 480 磅，左方反力爲 96 磅，最大正彎曲矩爲 153.6 呎磅，最大負彎曲矩爲 540 呎磅。

若於外伸梁二支柱間之中央，加以擔負 P，則 R_1 及 R_2 與普通梁同值，而最大彎曲矩亦爲 $\frac{1}{4}Pl$；若 P 置於其外伸部之端，則反力爲：

$$R_1=-\frac{Pm}{l}$$

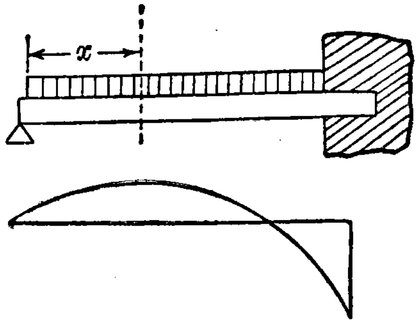
$$及R_2=+P\left(1-\frac{m}{l}\right)$$

而其最大彎曲矩爲 Pm。

又有 l 長之梁，一端固定，一端倚靠（第五十四圖），受有均佈擔負每單位長度爲 w 磅，則當未逾彈性限度時，支點之反力爲 $3/8\ wl_1$ *離支點 x 處之任何截面之彎曲矩，爲 $3/8wl\cdot x-\frac{1}{2}$

*參考 Slocum's Resistance of Materials 第 86 頁。

$wx \cdot x$；由此可知當 $x = \frac{3}{4}l$ 時，其彎曲矩等於零；但 $x = \frac{3}{8}l$ 時，最大正彎曲矩爲 $\frac{9}{128}wl^2$，$x = l$ 時，最大負彎曲矩爲 $\frac{1}{8}wl^2$，

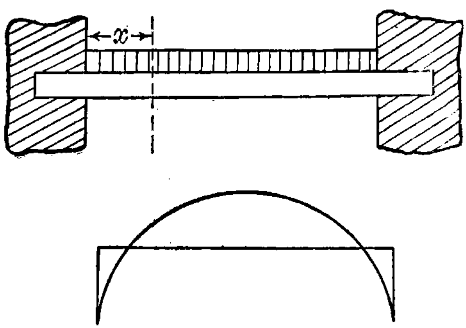


第五十四圖

而其最大之撓度，則在 $x = 0.42151$ 處，其式爲：

$$ym = \frac{wl^4}{185EI} = \frac{Wl^3}{185EI}$$

又有一梁，二端固定（第五十五圖）受有均佈擔負；其最大負彎曲矩爲 $\frac{1}{12}wl^2$，* 係在二端插嵌之處，最大正彎曲矩爲 $\frac{1}{24}wl^2$ 則在其中央，該中央處之撓度爲：



第五十五圖

*參考 Slocum's Resistance of Materials 第 80 頁。

$$ym=\frac{wl^4}{384EI}=\frac{Wl^3}{384EI}$$

普通梁之最大彎曲矩,為 $\frac{1}{8}Wl$; 二端固定梁之最大彎曲矩,為$\frac{1}{12}Wl$; 故若二梁大小相同,則固定梁能支持較大之擔負,若擔負相同,則固定梁可較小於普通梁;故梁能固定其二端使之水平,則材料當可撙節也。

習 題

一、設有一 6×9 吋之肱梁,其端突出 6 呎,置有集中擔負 1,350 磅。試求其最大撓度? 答 0.3 吋

二、今有 20 吋 65 磅工形桁, 用以為普通梁,其架徑為 25 呎,每呎擔負 1,200 磅,若 E 為 29,000,000 磅/吋^2,則其中央之撓度若干? 答 0.311 吋

總 習 題

一、今有一均等梁(uniform beam),長 12 呎,計重 60 磅, 二端倚靠於支柱,在離左支柱 4 呎處,擔負 72 磅,試求其反力?

答 78 磅及 54 磅

二、一梁長 20 呎,每呎重 30 磅,其右端及離左端 4 呎處均倚靠於支柱,其左端受擔負 80 磅,則其反力當為若干?

答 475 磅及 205 磅

三、設有一外伸梁,離左端 2 呎處及離右端 4 呎處, 各承以支

柱,在左端置集中擔負 2,100 磅,右端置 1,600 磅,並離左支柱 6 呎處置 3,600 磅,其二支柱之反力各爲若干磅?

答 左支柱反力 4,000 磅

右支柱反力 3,300 磅

四、一普通梁長 20 呎, 每呎重 30 磅,自左支柱起至離該柱 8 呎處止,受有均布擔負,計共 2,000 磅,並離右支柱 5 呎處,受有集中擔負 800 磅,試求二支柱之反力。

答 2,100 磅

1,300 磅

五、一梁長 10 呎,每呎重 12 磅,其二端倚靠於支柱,離左端 3 呎處擔負 30 磅,試求其離該端 1 呎及 9 呎處之鉛直切力?

答 69 磅及 -57 磅

六、一肱梁每呎重 40 磅,右端插定,離左端 3 呎處擔負 60 磅,試求其離左端 2 呎及 4 呎處之鉛直切力及彎曲矩?

答切力 -80 磅, -220 磅

彎曲矩 -80 呎磅, -380 呎磅

七、一均等水平梁長 15 呎,每呎重 24 磅,其右端及離左端 3 呎處,各有支柱支承之,試求其離左端 2 呎及 6 呎處之鉛直切力與彎曲矩。

答 V_2 -48 磅

V_6 81 磅

M_2　-48 呎磅

M_6　243 呎磅

八、一外伸梁長 30 呎，每呎重 40 磅，其右端伸過右支柱 6 呎；若在右端加集中擔負 3,000 磅，及離左端 6 呎處加 960 磅，12 呎處加 1,200 磅，與 16 呎處加 2,400 磅，則二支柱間諸集中擔負處及右支柱之彎曲矩，各爲若干？

答　第一集中擔負處　10,200 呎磅

第二集中擔負處　13,200 呎磅

第三集中擔負處　9,600 呎磅

右支柱　$-18,720$ 呎磅

九、今有一普通梁長 12 呎，每呎受有均布擔負 100 磅，並離左端 2 呎處，加集中擔負 2,000 磅，3 呎處加 1,000 磅；及離右端 2 呎處，加 3,000 磅，5 呎處加 5,000 磅，試作切力圖與彎曲矩圖，並證明最大彎曲矩係在切力變號之截面，及任何截面之彎曲矩等於切力圖之面積。

答最大彎曲矩　22,750 呎磅

十、今有一梁，擔負 800 磅，其架徑爲 12 呎，試各求下列諸項之最大彎曲矩？

(a)用以爲肱梁而其擔負集中於其懸空端時。

(b)用以爲肱梁而其擔負均等分佈時。

(c)用以爲普通梁而其擔負集中於其中央時。

(d)用以爲普通梁而其擔負均等分佈時。

答－115,200 吋磅， －57,600 吋磅

28,800 吋磅， 14,400 吋磅

十一、一木梁深 8 吋，闊 4 吋，試求其安全彎曲矩?

答 42,700 吋磅

十二、設有 7 吋深之工形桁，每呎重 22 磅，該桁截面之複矩，爲 52.5 吋^4；今用以爲普通梁，架徑爲 18 呎，若最大單位應力不逾 12,000 磅吋^{2}時，則其中央之擔負 P 當爲若干?

答 3,130 磅

十三、一工形鋼桁，架於二支柱，其間相離 15 呎，其截面係數爲 20.4 吋^3，若資用強度 (working strength) 爲每方吋 16,000 磅，則離一端 5 呎處，能置擔負若干磅(梁之自身重量不計)。

答 8,160 磅

十四、試設計一矩形木質肱梁，須使其自嵌插處突出 4 呎，而其懸空端能擔負 500 磅? 答橈率 24 吋^3

十五、今取一 10 呎長之工形鋼桁，用爲普通梁，離左支柱 1 呎處，置重 1,000 磅，6 呎處 2,000 磅，及離右支柱 2 呎處置 3,000 磅，若鋼之安全強度爲每方吋 16,000 磅，則該鋼桁之尺寸大小如何?

答 12 $\frac{1}{4}$磅 6 吋工形鋼桁

十六、一生鐵普通梁,長 14 呎,其中央擔負 10,000 磅,若其截面之闊爲 4 吋,而取 10 爲安全係數,則其深當爲若干吋?

答 18 吋

十七、今有一梁,闊 3 吋,深 6 吋,長 4 呎;又有一梁,闊 2 吋,深 4 吋,長 10 2/3 呎,其強弱相比如何? 答 9:1

十八、一強度不變之肱梁,長 5 呎,置集中擔負於懸空端,其闊度不變,靠牆之深度爲 8 吋,試求每間 1 呎處之深度。

答離牆 1 呎處 深 3.58 吋

離牆 2 呎處 深 5.06 吋

離牆 3 呎處 深 6.20 吋

離牆 4 呎處 深 7.16 吋

十九、今有 4×6 吋之木製肱梁,長 10 呎,受有均佈擔負每呎 40 磅;若 E 爲 1,200,000 磅/吋^2,則其懸空端之撓度及其外絲單位應力,各爲若干? 答 1 吋 1,000 磅/吋^2

二十、單層扁葉彈簧(flat leaf spring)長 1 呎,闊 $1\frac{1}{2}$吋,厚 $\frac{3}{8}$ 吋其彈性係數爲 30,000,000 磅/吋^2,若該彈簧之懸空端,加有 100 磅之擔負,而其作用如肱梁時,則撓度應爲若干?

答 0.29 吋

二十一、今取 8 吋 18 磅工形鋼桁,用爲肱梁,計長 5 呎,載有

均布擔負每呎 120 磅，並於其懸空端加集中擔負 500 磅，試求懸空端之撓度及最大絲應力($E=29,000,000$ 磅/吋^2)。

答彎曲矩 48,000 吋磅

最大應力 3,374 磅/吋^2

二十二、今有 l 長 d 深之梁，其二端架於支柱，受有均布擔負，E 為其彈性係數，若單位應力不逾其容許值(allowable value) s 時，最大撓度應為若干？ 答 $\frac{5sl^2}{48Ec}$

二十三、一18 吋 55 磅工形鋼桁，長 20 呎，其二端各靠於支柱，受有均布擔負每呎 1,200 磅，並於其中央加集中擔負 10,000 磅，若 E 為 29,000,000 磅/吋^2，I 為 795.6 吋^4，則其中央之撓度若干？ 答 0.312 吋

二十四、今有一梁，一端固定，一端倚靠，其中央受有擔負 P，而倚靠端之反力為$\frac{5}{16}$P，試求擔負處及固定端之彎曲矩，並作彎曲矩圖。 答 $+5/32$ Pl 及$-3/16$ Pl

第五章　柱(Column)

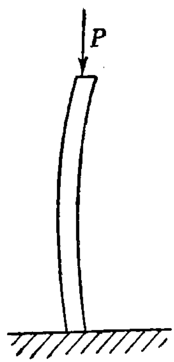
46. 柱之原理(Principles of Column)

凡受縮壓之桿，其長比橫截面之最小邊，大十倍以上者，謂之柱(column or strut)；其不及十倍者，通常謂之短桿(short block or pier)。

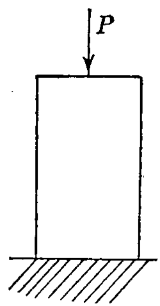
設有截面爲A之短桿，沿其軸線加以壓力P(第五十六圖)，則其內部應力均等分佈於全截面，故縮壓單位應力爲：

$$s=\frac{P}{A}$$

若係長柱，通常不能適用上式，因其恆向側方屈撓(第五十七圖)；故知其除直接壓應力(direct compressive stress)外，尚生彎曲應力(bending stress)，雖其平均單位應力，仍爲A/P，然在凹面之單位應力，比P/A爲大；在凸面之單位應力，比P/A爲小，柱愈長，則在凹面之單位應力亦愈大；故若截面相同，長柱之擔負，恆較短



第五十六圖



第五十七圖

桿為小也。

柱之為木製者，常係圓形或方形，生鐵柱則圓形而中空，鋼柱多為槽鋼 (channel)，鋼板 (plate) 及角鋼 (angle) 所合成，工形桁有時亦用之，圓形及方形較矩形為適用；因前二形之屈撓趨勢，對於各方向均相等，而矩形之屈撓平面，則與其短邊相平行，且常與其最小複矩所取之軸相正交也。

47. 柱之分類 (Classification of Columns)

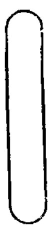
柱端之裝置，有種種不同，可分為下列之四類：

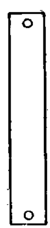
(一)二端圓形 (round)(第五十八圖)。

(二)二端鉸狀 (hinged) 卽二端有孔，各貫以栓 (pin)，如鉸鏈之可轉動者 (第五十九圖)。

(三)一端鉸狀一端固定 (fixed) (第六十圖)。

(四)二端固定(第六十一圖)。


第五十八圖


第五十九圖


第六十圖


第六十一圖

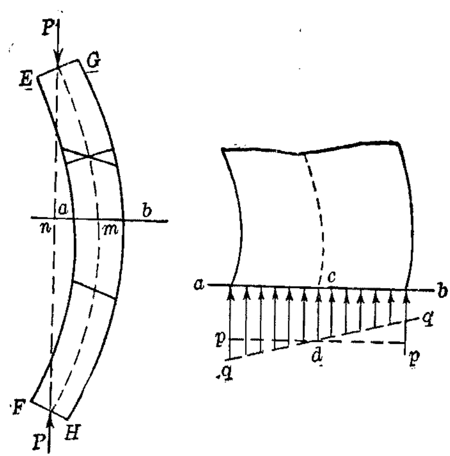
第一類之柱，不用於建築，僅於機械偶用之；第二類之柱，用於橋梁及機械汽機之搖桿(connecting rod)，可屬於此類；第三

類之柱，多用於機械如汽機之梃桿 (piston rod) 等；第四類之柱則用於橋梁及其他建築；第二類之工，與第一類同強度；第三類較強於第二類；而第四類又較強於第三類；此由實驗試得者也。

48. 柱之公式(Formula for Columns)

柱之破斷，常由於受擠壓及屈撓所共生之應力而起，其現象甚為複雜，故無純粹的理論公式，足以表示一切，其最通行者為郎肯公式(Rankine formula)。

設鉛直柱之擔負為P，而其中央以水平面ab割之，如第六十二圖；若A為其截面積，則平均單位應力為 P/A，可以 cd 線代表之；但因屈撓，此應力在凹面增至 aq，而在凸面減至 bq；今命 s 為最大單位應力 aq，其 ap 與 cd 或 P/A 相等，pq 係受屈撓所生之應力，以 s_b 代表之，則該最大單位應力 aq 為：



第六十二圖

$$s = \frac{P}{A} + s_b \qquad (1)$$

依 36 節所述之彎曲公式，s_b 等於 $\frac{Mc}{I}$，式中 M 爲諸外力之彎曲矩，今僅有外力 P，則其挺率爲柱之中線之側方撓度（卽 mn），今以 ym 代表之，則 $M = P\,y_m$

故（1）式可寫爲： $$s = \frac{P}{A} + \frac{P y_m c}{I}$$

式中之 c 代表 ac 之距離，I 爲截面之最小複矩（參照 46 節）；但 $I = Ak^2$ （見 30 節），

$$\therefore \quad s = \frac{P}{A} + \frac{P y_m c}{Ak^2} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{c y_m}{k^2}\right) \tag{2}$$

觀上式，可知凹面之單位應力，隨側方撓度 ym 而增減；但此撓度 ym 又與長之平方相正比（見 44 節），卽 cy_m 可等於 ql^2，代入（2）式。

$$s = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ql^2}{k^2}\right)$$

$$\frac{P}{A} = \frac{s}{1 + q\frac{l^2}{k^2}} \tag{V}$$

此卽所謂郎肯公式，適用於 $\frac{l}{k} \gtrless {20 \atop 150}$ 之柱；式中 k 爲最小迴轉半徑（least radius of gyration），而 $\frac{l}{k}$ 稱爲徑長比（slenderness ratio），q 爲常數，依材料之種類及柱端之裝置而定。

表十 柱之常數 (column constants)(q)

材　　料	二端固定	一端固定 一端鉸狀	二端圓形
木料 (Timber)	$\frac{1}{3000}$	$\frac{2}{3000}$	$\frac{4}{3000}$
生鐵 (Cast iron)	$\frac{1}{5000}$	$\frac{2}{5000}$	$\frac{4}{5000}$
熟鐵 (Wrought iron)	$\frac{1}{35000}$	$\frac{2}{35000}$	$\frac{4}{35000}$
鋼 (Steel)	$\frac{1}{25000}$	$\frac{2}{25000}$	$\frac{4}{25000}$

49. 柱之計算 (Calculation of Columns)

柱之大小長短及擔負，若為已知，則其單位應力，可以求得；若再與所用材料之極限壓力及彈性限度相比較，卽可知其為安全與否也。例如有二端固定之中空熟鐵柱，擔負 38,000 磅，外徑為 6.36 吋，內徑為 6.02 吋，長為 18 呎，試求其單位應力 s 及安全係數。

$$今\ P=38000磅,\quad A=\frac{\pi}{4}\left(\overline{6.36}^2-\overline{6.02}^2\right)=3.31方吋,$$

$$q=\frac{1}{35000},\qquad l=18\times 12=216\ 吋,$$

$$k^2=\frac{1}{16}\left(\overline{6.36}^2+\overline{6.02}^2\right)=4.79\ 吋^2。$$

$$\therefore\ s=\frac{P}{A}\left(1+q\frac{l^2}{k^2}\right)=\frac{38000}{3.31}\left(1+\frac{216\times 116}{35000\times 4.79}\right)$$

$$=14700\ 磅/吋^2。$$

其安全係數約爲 4,若其擔負係不變,則頗安全;若爲變動擔負或激衝,則太小矣。

今設柱長爲 36 呎,則單位應力 s 約爲 25,000 磅/吋^{2}而與彈性限度相等,故不安全。

又如 40 磅 10 吋之工形桁,用爲橋梁之柱,其二端係鉸狀,長爲 25 呎,受壓力 5,900 磅,由表檢得 $A=11.8$ 方吋及 $I'=9.50$ 吋^4。$\therefore$ $k^2=0.80$ 吋^2;今 $q=\frac{4}{25000}$,$l=300$ 吋,$P=5900$ 磅;代入郎肯公式,則得 $s=9500$ 磅/吋^2,約爲彈性限度之三分之一,故甚安全。

至於柱之大小長短,及所用之材料爲已知,而欲求其安全擔負,須先假定其容許應力,而上式可寫爲:

$$P=\frac{As}{1+q\frac{l^2}{k^2}}。$$

例如 4×3 吋之木柱長 5 呎,若最大縮壓單位應力不逾 800 磅/吋^{2}求其安全擔負爲若干磅。

$$今\ b=4吋,\quad d=3\ 吋,\quad k^2=\frac{1}{12}d^2=0.75\ 吋^2,$$

$$l^2=3600\ 吋^2,\ \frac{l^2}{k^2}=4800,\quad q=\frac{1}{3000},\quad q\frac{l^2}{k^2}=1.6。$$

$$\therefore P=\frac{3\times4\times800}{1+1.6}=3690\ 磅(安全擔負)。$$

若柱長僅 1 呎,則 $P=As=12\times800=9600$ 磅;若其長度

爲 12 呎,則依郎肯公式,求得P僅爲 940 磅,由是可知柱之長度,影響於安全擔負甚大也。

50. 柱之設計(Design of Columns)

柱之擔負長度及二端之裝置,均已知時,柱之設計,在定其截面之大小,期合於適當之容許應力,通常須試數次,方可求得。

例如設計一正方木柱,二端固定,長24呎,須能擔負100,000磅,其單位應力爲 800 磅/吋^2,若此柱甚短,則其面積 $A=\frac{100,000}{800}=125$ 方吋,即其二邊各約爲 11 吋;但柱長爲 24 呎,其邊必較大於 11 吋;今假定爲 16 吋,代入郎肯公式,則 s 之值,稍大於 800,可知 16 吋尙太小;再以 17 吋試之,則 s 之值又較 800 爲小,故取 16.5 吋,較爲相近。

欲求正方及圓形柱之大小,郎肯式中A及 k^2 之值,可以邊或直徑 d 代之,計算時較爲便當。

(一)實心方柱

$$s=\frac{P}{A}\left(1+q\frac{l^2}{k^2}\right)$$

$$=\frac{P}{A}+\frac{P}{A}\cdot q\cdot\frac{l^2}{k^2}$$

$$\text{或}\ A-\frac{P}{s}=\frac{P}{s}\cdot q\cdot\frac{l^2}{k^2} \tag{1}$$

$$d^2-\frac{P}{s}=\frac{P}{s}\cdot\frac{ql^2}{\frac{1}{12}d^2}$$

$$\therefore \quad d^4-\frac{P}{s}d^2=\frac{P}{s}\cdot 12\,ql^2 \tag{2}$$

(二)實心圓柱

由(1)式得

$$\frac{\pi}{4}d^2-\frac{P}{s}=\frac{P}{s}\cdot\frac{ql^2}{\frac{1}{16}d^2}$$

$$\frac{\pi}{4}d^4-\frac{P}{s}d^2=\frac{P}{s}\cdot 16\;ql^2$$

$$\therefore \quad d^4-\frac{4P}{\pi s}d^2=\frac{4P}{\pi s}\cdot 16\;ql^2 \tag{3}$$

(三)中空方柱

由(1)式得

$$(d^2-d_1{}^2)-\frac{P}{s}=\frac{P}{s}\cdot q\cdot\frac{l^2}{\frac{1}{12}(d^2+d_1{}^2)}$$

$$(d^4-d_1{}^4)-\frac{P}{s}(d^2+d_1{}^2)=\frac{P}{s}\cdot 12\;ql^2$$

$$d^4-d_1{}^4-\frac{P}{s}d^2-\frac{P}{s}d_1{}^2=\frac{P}{s}\cdot 12\;ql^2$$

$$\therefore \quad d^4{}_1+\frac{P}{s}d_1{}^2=d^4-\frac{P}{s}(d^2+12ql^2) \tag{4}$$

(四)中空圓柱

由(1)式得

$$\frac{\pi}{4}(d^2-d_1{}^2)-\frac{P}{s}=\frac{P}{s}\cdot q\cdot\frac{l^2}{\frac{1}{16}(d^2+d_1{}^2)}$$

$$\therefore\quad d_1^4+\frac{4P}{\pi s}d_1^2=d^4-\frac{4P}{\pi s}(d^2+16ql^2) \tag{5}$$

設有一生鐵中空圓柱,二端固定,長 18 呎,須擔負 240,000 磅;若外徑爲 10 吋,則內徑當爲若干?

今生鐵之容許應力爲 15,000 磅/吋^2, 及 $q=\frac{1}{5000}$, 代入上式(5),得

$$d_1^2=60.7。$$

$$或\ d_1=7.8\ 吋。$$

51. 直線公式(Straight Line Formula)

柱之公式有多種,以郎肯式爲最通行。近年來美國工程家,漸多採用直線公式 (straight line formula); 蓋經多種試驗,知 P/A 與 $\frac{l}{k}$ 之關係,(猶 y 與 x 之關係),可用直線表示之,其式如下:

$$\frac{P}{A}=s-C\cdot\frac{l}{k}$$

式中 s 爲柱之剖面之單位應力,C 爲常數,其值視材料之性質及柱端之裝置而定;用於建築上二端固定之柱,其擔負若係固定不變,則設計上所用之直線公式,爲

$$生鐵\quad P/A=10000-40\frac{l}{k} \tag{1}$$

$$熟鐵\quad P/A=12000-60\frac{l}{k} \tag{2}$$

$$鋼 \quad P/A = 16000 - 70\frac{l}{k} \qquad (3)$$

上述諸式，祇能用於P之單位爲磅，A之單位爲方吋，且$\frac{l}{k}$之值小於 120 時。

設有二端固定之中空生鐵柱，外邊爲 6×6 吋，內邊爲 5×5 吋，長爲 18 呎，試求其安全擔負。

$$今 \quad A = 11 \ 方吋$$

$$k^2 = \frac{1}{12}(36+25) = 5.08 \ 吋^2$$

$$或 \quad k = 2.252 \ 吋$$

$$及 \quad \frac{l}{k} = 95.9$$

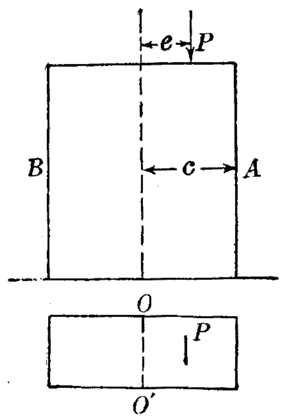
代入(1)式，得

$$P = 67800 \ 磅$$

又設有一實心生鐵柱，長 6 呎，其直徑應若干吋，方能支持不變擔負 64,000 磅；若柱極短時，l 可視爲零則 $A = \frac{64000}{10000} = 6.4$ 方吋，因得 d=2.85 吋及 k=0.71 吋；假定 d 爲 4 吋，則A爲 12.57 方吋，k爲1吋，而$\frac{l}{k}$爲 72，代入(1)式中，則得 P= 89,000 磅，此值比已知值 64,000 磅爲大，可知直徑當小於4吋，再假定d爲 3.5 吋，則A=9.62方吋，k=0.875 吋，而$\frac{l}{k}$爲 84.6，代入(1)式中，則得安全擔負 63,600 磅，與已知值頗近，故 3.5 吋卽爲所求之值。

52. 偏心擔負 (Eccentric Load)

前述諸節,假定擔負加於柱端時,其施力線適與柱之軸線相符合;然在工程上,往往不能如此適中者;設有一短桿(第六十三圖),在離軸線(該軸線經過截面之重心)e處,加擔負P,其內部縮壓單位應力,則非均等分佈於各截面,雖在面積A之平均單位應力,仍爲 P/A,然近P之邊,須加以屈撓單位應力(因擔負之偏心而起),而他邊則減去此屈撓單位應力;設 O—O′ 爲截面之



第六十三圖

中立軸,c 爲自中立軸至外邊之距離,I 爲對於該軸之複矩, k 爲其迴轉半徑,又設 s_b 爲在柱邊之屈撓單位應力,從屈撓公式,得

$$s_b=\frac{Mc}{I}$$

但彎曲矩M爲 Pe, 故

$$s_b=\frac{Pec}{I}=\frac{Pec}{Ak^2}$$

將此值與平均單位應力 P/A 相加,則得

$$s=\frac{P}{A}\left(1+\frac{ce}{k^2}\right) \qquad (1)$$

即為近P邊之縮壓單位應力，若欲求他邊之應力，可將式中＋號改為－號。

偏心度 e 雖甚小，足令單位應力 s 與平均值 P/A 相差甚大，若截面為矩形時，$k^2=\frac{1}{12}d^2$ 及 $c=\frac{1}{2}d$，故

$$\text{A邊} \qquad s_1=\frac{P}{A}\left(1+6\cdot\frac{e}{d}\right)$$

$$\text{B邊} \qquad s_2=\frac{P}{A}\left(1-6\cdot\frac{e}{d}\right)$$

當 $e=\frac{1}{6}d$ 時，$s_1=2\cdot\frac{P}{A}$，為平均值之二倍，而 s_2 則等於零；當 $e=\frac{1}{3}d$ 時，$s_1=3\cdot\frac{P}{A}$，而 $s_2=-\frac{P}{A}$，此負號即表示B邊是時受張力，非受壓力也。

上式(1)祇能應用於短桿(即 $\frac{e}{k}$ 小於 10 之柱)；若係長柱通常將彎曲應力，$\frac{Pce}{Ak^2}$，加入郎肯公式中，即

$$s=\frac{P}{A}\left(1+q\frac{l^2}{k^2}+\frac{ce}{k^2}\right)$$

$$\text{或} \quad \frac{P}{A}=\frac{s}{1+q\frac{l^2}{k^2}+\frac{ce}{k^2}}$$

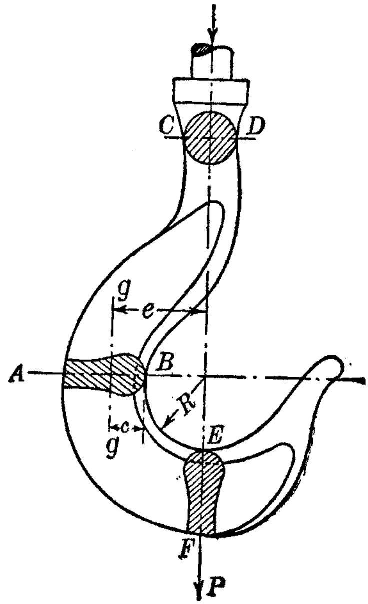
此式可用以計算或設計偏心擔負之柱。

53. 鉤 (Hooks)

偏心擔負公式，可用以設計起重車之鉤，如第六十四圖；截

面ＣＤ,係受純粹張力,其單位應力爲 $s=\frac{P}{A}$, 式中之Ｐ爲擔負其單位爲磅,Ａ爲截面ＣＤ之面積,其單位爲方吋, 截面ＥＦ係受純粹切力,其單位應力爲 $s_s=\frac{P}{A_1}$,式中 A_1 爲截面ＥＦ之面積。

至於截面 ＡＢ,除受純粹張應力(因擔負 Ｐ 而生)外,尙有屈撓作用;此屈撓作用,由於ＡＢ截面之中立軸, 不在擔負Ｐ之施力線內而起, 其在中立軸之右,發生張力,而在左則生壓力,故最大應力,係在Ｂ點之外絲。



第六十四圖

今命由於純粹張引而生之張應力爲 st, 則

$$st=\frac{P}{A}$$

又命由於屈撓而生之張應力爲 s_b, 則

$$s_b=\frac{Mc}{I}$$

ＡＢ截面外絲之總張應力,爲

$$s=st+s_b=\frac{P}{A}+\frac{Mc}{I}$$

但彎曲矩 $M=Pe$ 式中之 e,爲擔負 P 之施力線與 AB 截面之中立軸相去之距離,故設計 A B 截面時所用之公式爲:

$$s=\frac{P}{A}+\frac{Pec}{I}$$

式中 s 爲安全資用應力(張引),P 爲擔負,c 爲自中立軸至 B 點外絲之距離,I 爲其截面對於 g－g 軸之複矩。

設有一熟鐵鉤,在 A B 截面之直徑爲 $1\frac{1}{2}$ 吋,e 爲 2 吋,s 爲 8000 磅/吋^2,試求安全擔負。

今 $A=0.785d^2=1.77$ 方吋,$e=2$ 吋,$c\frac{d}{2}=0.75$ 吋,

$$I=\frac{\pi d^4}{64}=0.25\text{吋}^4,\quad \therefore\ 8000=\frac{P}{1.77}+\frac{P\times2\times0.75}{0.25}$$

$$\therefore\quad P=1200\ \text{磅。}$$

總　習　題

一、一 8×8 吋之木柱,長 12 呎,二端方形(固定),容許單位壓應力爲每方吋 1200 磅,試求其安全擔負。　答 33,400 磅

二、今有一中空生鐵柱,二端固定,長 18 呎,外邊爲 6×6 吋,內邊爲 5×5 吋,試求其安全擔負。　答 58,200 磅

三、一矩形木柱,長 14 呎,外邊爲 12×12 吋,內邊爲 9×9 吋,若兩端固定,加以擔負 10,000 磅,則其單位應力當爲若干?

答 238 磅/吋^2

四、今擬取 12 呎長之工形鋼桁,用以爲柱,須擔負 100,000 磅,

若其容許應力爲每方吋 12,000 磅,則當選取何種之工形桁。

答 55 磅 15 吋工形桁

五、今取鋼板與角鋼 (angle) 合成 14 呎長之柱,其截面爲 23.4 吋^2,最小迴轉半徑爲 1.72 吋。試用直線公式,求其安全應力。

答 9,160 磅/吋^2

六、今有 $6\times6\times1$ 吋之等邊角鋼,長 10 呎,取以爲柱,試用直線公式,計算其安全擔負,(該角鋼之截面爲 11 方吋,最小迴轉半徑爲 1.16 吋)。　答 96,350 磅

七、一直徑 2 吋之實心圓桿,加以張力 15,000 磅,若其施力線,離該桿之軸線 0.1 吋,則最大與最小之單位應力,各爲若干?

答 6,684 磅/吋^2

2,865 磅/吋^2

八、今有一鉤,截面圓形,直徑 2 吋。其施力線離截面重心 3 吋,若載重 1,600 磅,試求其最大張應力與最小壓應力之近似值。

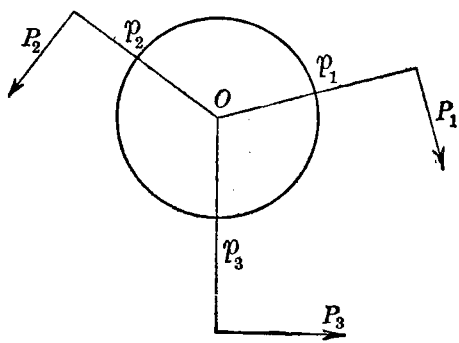
答 6,621 磅/吋^2

5,602 磅/吋^2

第六章　軸 (Shafting)

54. 扭矩(或轉矩) (Twisting Moment)

力加於滑車 (pulley) 之周線 (circumference), 則有令其支承之軸 (shaft), 繞軸心線 (axis) 而扭捲之趨向, 斯時該軸所生之應力, 謂之扭應力 (torsional stress), 實爲切力之一種。將上述之外力, 乘軸心與施力線間之正交距離, 所得之積, 謂之扭矩 (twisting moment or torque), 以T表之。扭矩有正有負, 設有外力 P_1, P_2 及 P_3, 其與軸心相去之距離, 爲 p_1 p_2 及 p_3, (第六十五圖) 外力 P_1 有令其軸順時計方向而旋轉之趨向, 故其扭矩 $P_1 p_1$ 爲正。外力 P_2 及 P_3 有令其軸逆時計方向而旋轉之趨向, 故其扭矩 $P_2 p_2$ 及 $P_3 p_3$, 均爲負。該軸之總扭矩, 爲上述諸扭矩之代數和。

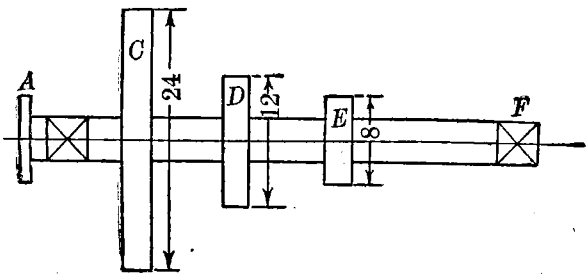


第六十五圖

扭矩之單位爲呎磅或吋磅, 與力矩同。

在軸之截面, 其扭矩不必相等, 例如第六十六圖之軸, 裝有

滑車 C, D, 及 E, 其力則由 A 處傳來。若 C, D 及 E 滑車上之力,各爲 200,150 及 100 磅,且其方向相同,則在 F 軸枕 (bearing) 與 E 滑車間之截面,其扭矩爲零。滑車 D 及 E 間之扭矩,爲 $100 \times 4 = 400$ 吋磅。滑車 C 及 D 間之扭矩,爲 $150 \times 6 + 100 \times 4 = 1300$ 吋磅。C 及 A 間之扭矩,爲 $200 \times 12 + 150 \times 6 + 100 \times 4 = 3700$ 吋磅。

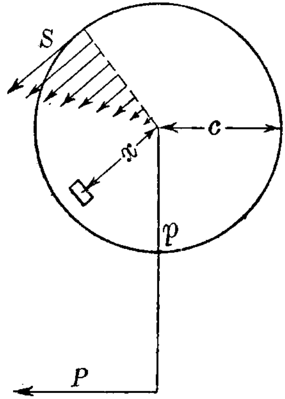


第 六 十 六 圖

55. 抗扭矩(Resisting Moment in Torsion)

由實驗試得,圓軸受扭捩而不逾彈性限度,所有諸應力定理與梁相同(見 36 節)。若於軸上,取二橫截面,甚相接近,則各截面有互相扭轉之趨向,而截面之各點,均有切應力。此應力在軸心爲零,離軸心愈遠則愈大,且其方向與由軸心至各該點之半徑相正交。在彈性限度以內,應力與其離軸心之距離相正比,而任何截面內諸應力初矩之和,謂之抗矩 (resisting moment)。依平衡定理,扭矩與抗矩必相等。

設P為外力，p為其離軸心之距離，則所生之扭矩為Pp。今命 s_s 為離軸心c處（即外緣）之切割單位應力，離軸心 $\frac{1}{2}$ c 處之應力，為 $\frac{1}{2}$ s_s，而離軸心 x 處，則為 $s_s x/c$，在 x 處元面 ΔA 之總應力為 $\Delta A\ s_s\ x/c$，該應力對於軸心之初矩，為 $s_s/c \cdot \Delta A\ x^2$，其抗矩為 $s_s/c\ \Delta A\ x^2$ 諸值之總和。s_s



第六十七圖

及c既為常數，則此總和為 $s_s/c \cdot \Sigma\Delta Ax^2$。但 $\Sigma\Delta Ax^2$ 為極軸轉動慣量J（見28節），因之內部諸切應力之抗矩為 $\frac{s_s J}{c}$，此與扭矩 Pp 相等。故：

$$\frac{s_s J}{c} = Pp = T \qquad \text{(VI)}$$

此為圓軸之扭轉公式(formula for torsion)，與梁之彎曲公式類似。式中 s_s 常為切應力，傳力之軸，係受變動擔負及激衝，故 s_s 諸值應較小。該式亦祇能於 s_s 不逾彈性限度時適用之。

設有一圓軸，其直徑為4吋，扭矩T為 20,000 吋磅，試求其切應力。今 C=2 吋，J=25.13 吋^4，由公式 VI，求得 s_s 為 1590 磅/吋^2，若該軸係木質，則其值太低，約為極限抗切強

度之二分之一。若爲熟鐵或鋼製，則安全係數頗大。

習 題

一、今有一中空軸，外徑 3 吋，內徑 $1\frac{1}{2}$ 吋，若離軸心 2 呎 6 吋處，施力 450 磅扭轉之，則其最大切應力，當爲若干？

答 2,720 磅/吋^2

56. 軸之傳力 (Transmitting Power by Shafts)

原動機之力，常由皮帶達於軸上，再由軸傳至工作之處，然用水力渦輪 (water turbines) 時，水所發生之力，經由車輪達於其軸，而直接輸送至發電機或其他機械，無論用皮帶與否，其軸均受扭矩而發生切應力。

單位時間內所成之工作，謂之工率 (power)，工率之單位爲馬力 (horse-power) (簡寫爲HP)，卽一分鐘內所成 33,000 呎磅之工作是也。例如物件重 10,000 磅，每分鐘舉起 150 呎，則馬力爲 $\frac{10000\times150}{38000}=27.3$。

今命 H 爲由皮帶傳至滑車之工率，P 爲皮帶加於滑車周線之正切力 (tangential force) (單位爲磅)，R 爲滑車之半徑 (單位爲吋)，N 爲軸與滑車在一分鐘內旋轉之次數，每旋轉一次，P 力進行 $2\pi R$ 吋，而所成之工作爲 $P\times2\pi R$ 吋磅，或 $\frac{1}{6}\pi PR$ 呎磅。在一分鐘內所成之工作，爲 $\frac{1}{6}\pi NPR$ 呎磅。欲求其馬力，可將該工作以 33,000 除之。卽：

$$H=\frac{\pi NPR}{198000}$$

式中之扭矩 PR,若以抗矩 $s_s J/c$ 代之,(卽公式VI)則得:

$$\frac{s_s J}{c}=\frac{198000H}{\pi N} \qquad (1)$$

上式用以討論傳力之圓軸,圓軸之截面,無論爲實心或中空,其 c 值等於外徑之二分之一。

57. 實心軸與中空軸(Solid and Hollow Shafts)

若軸之截面,爲直徑 d 之實心圓形,則極軸轉動慣量爲 $\frac{\pi d^4}{32}$, c 值爲 $\frac{d}{2}$ 代入上節(1)式,

$$\frac{s_s\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}}=\frac{198000H}{\pi N}$$

或 $$\frac{s_s\pi d^3}{16}=\frac{198000H}{\pi N}$$

$$\therefore \quad s_s\ d^3=321000\frac{H}{N}$$

式中 d 之單位,須常爲吋。s_s 之單位,須常爲磅吋^2。此式可用以求已知軸之應力 s_s, 或當設計時,求 d 之值。

例如有一熟鐵實心圓軸,其直徑爲 $2\frac{1}{2}$ 吋,每分鐘旋轉100次,傳達 25 馬力時,其切割單位應力,當爲若干?

今 d =2.5 吋,

$$H=25,$$

$$N=100;$$

故：$s_s=\dfrac{321000\times 25}{2\cdot 5^3\times 100}=5140$磅/吋^2

又試設計一實心圓形鋼軸，每分鐘旋轉 200 次，須傳達 100 馬力，其容許應力爲每方吋 6,000 磅。

令　$H=100,$

$N=200,$

$s_s=6000$ 磅/吋^2

故：$d^3=\dfrac{321000\times 100}{6000\times 200}=27$

卽：$d=3$ 吋

近來海洋輪船，多用中空鋼軸，若 d 爲外徑，d_1 爲內徑，則 J 值爲 $\dfrac{\pi(d^4-d_1^{\,4})}{32}$，c 值爲 $\dfrac{d}{2}$，代入上節(1)式，得：

$$s_s\frac{d^4-d_1^{\,4}}{d}=321000\frac{H}{N}$$

例如有一鎳鋼(nickel steel)軸，外徑爲 17 吋，每分鐘旋轉 50 次，須傳達 16,000 馬力，欲令切應力 s_s 每方吋不逾 25,000 磅，其內徑應爲若干吋？

令　$d=17$吋

$H=16000$

$N = 50$

$s_s = 25000$ 磅/吋^2

代入上式,得:

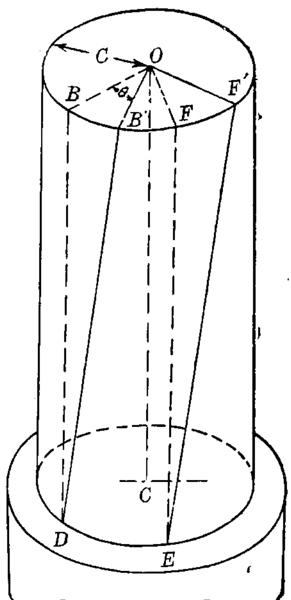
$$25000 \times \frac{17^4 - d_1{}^4}{17} = 321000 \times \frac{16000}{50}$$

$\therefore\ d_1{}^4 = 13671$

$\therefore\ d = 11$ 吋

58. 軸之扭度(Twist of Shafts)

試取一鉛直圓軸,固定其下端(第六十八圖),若加以扭矩Pp,使之逆時針而扭轉,則 DB 線本與軸心線 CO 相平行者,今變為螺形線D B′,而半徑 OB 移至 OB′ 位置。由實驗試得,材料不逾彈性限度時, BOB′ 與 BDB′ 二角,均與扭矩相正比,且扭矩除去,則 D B′ 與 O B′ 均能回復原來位置。



第六十八圖

設 s_s 為外絲之切割單位應力,δ_s 為單位長度之形變,則其切割彈性係數為:

$$E_s = \frac{s_s}{\delta_s} \qquad (1)$$

又設 l 為軸之長度, c 為自軸

心至外絲之距離(卽軸之半徑)，θ (θ之單位係弧度 radian) 爲其上端對於底座所旋轉之角,其總形變 B B′ 弧等於 $c\theta$。故:

$$\delta_s=\frac{c\theta}{l},$$

代入(1)式,得 $E_s=\dfrac{s_s l}{c\theta}$ (2)

但 $s_s=\dfrac{Ppc}{J}$ (卽公式VI)

$$\therefore\quad E_s=\frac{Ppl}{J\theta} \tag{3}$$

或 $\theta=\dfrac{Ppl}{E_sJ}$ (4)

欲將弧度變爲角度，可以$\frac{\pi\phi}{180}$代(4)式中之θ (ϕ之單位係角度 degree)。卽:

$$\frac{\pi\phi}{180}=\frac{Ppl}{E_sJ}$$

或 $\phi=57.3\dfrac{Ppl}{E_sJ}$ (5)

若軸每分鐘旋轉N次,所傳之馬力爲H,則:

$Pp=\dfrac{198000H}{\pi N}$ (見 55 及 56 節)

代入(5)式,得

$$\phi=\frac{3610000Hl}{NE_sJ} \tag{6}$$

式中 l 之單位為吋，J 為吋^4，E_s為磅/吋^2。

設有一鋼軸，長 125 呎，外徑 17 吋，內徑 11 吋，每分鐘旋轉 50 次，傳達 16000 馬力時，其扭角 (angle of twist) 當為若干度？

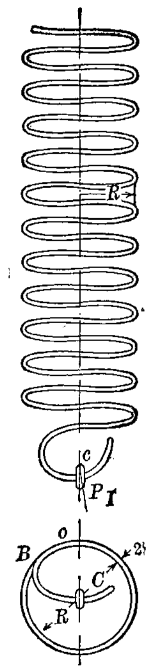
$$\text{令}\quad H=16000$$
$$l=1500 \text{ 吋}$$
$$N=50$$
$$E_s=10,000,000 \text{ 磅/吋}^2$$
$$J=6765 \text{ 吋}^4$$

代入(6)式，求得　$\phi=25.3°$

若此軸每分鐘僅旋轉 25 次，而所成工作相同，則其扭角及應力，均較前加倍。再觀(6)式，又可知扭角與軸長相正比。

59. 螺旋線彈簧(Helical spring)

螺旋線彈簧，係繞金屬線(或桿)於圓筒而成(如第六十九圖 I)。普通多為單層，作螺旋形。彈簧線圈 (coil of spring) 之半徑，為金屬線半徑與所繞圓筒半徑之和。當受張力時，線之二端，轉向中心，故其力常在軸線上 (in the line of the axis)。



第六十九圖

螺旋線彈簧之伸長，多由於扭力。試取截面 O（如第六十九圖 II），以其在軸上（C 點）加有 P 擔負，遂生扭矩，即

$$T = PR = \frac{S_s J}{r} \quad \text{（見 55 節）}$$

其扭角為

$$\theta = \frac{PRl}{E_s J} \quad \text{（見 58 節）}$$

上二式中 R 為彈簧線圈之半徑，r 為金屬線之半徑，及 l 為金屬線之長，即 $2\pi Rn$（n 為金屬線所繞之轉數）。

今取 0.2 吋徑之金屬桿，繞成螺旋線彈簧，計共 20 轉，其線圈之半徑，自軸至各截面之中心為 1 吋，剛性係數 (modulus of rigidity) 為 12,000,000 磅/吋^2，若加以 3 磅擔負，則扭矩為

$$PR = 3 \times 1 = 3 \text{ 吋磅}$$

桿長為

$$l = 2\pi Rn = 2\pi \times 1 \times 20 = 40\pi$$

扭角為

$$\theta = \frac{PRl}{E_s J} = \frac{PRl}{E_s \frac{\pi r^4}{2}}$$

$$= \frac{3 \times 40\pi \times 2}{12{,}000{,}000 \times \pi \times \left(\frac{0.2}{2}\right)^4} = 0.2 \text{ 弧度}$$

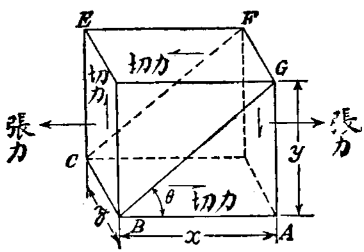
及單位切應力，為

$$s_s=\frac{PRr}{J}=\frac{PRr}{\frac{\pi r^4}{2}}=\frac{PR\times 2}{\pi r^3}$$

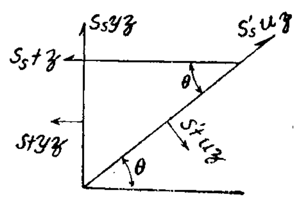
$$=\frac{2\times 3}{0.001\pi}=1910 \text{ 磅/吋}^2$$

60. 聯合應力(Combined Stress)

試截取梁之一部，闊爲 x，高爲 y，長爲 z（如第七十圖），並假定單位張應力 s_t 正交於左右二鉛直面，單位切應力 s_s 與該二面相平行，及同大之單位切應力 s_s 作用於頂底二面，今以 BCFG 平面，分該體爲二箇相等三角形稜體(triangular prism)，而考查其左方之一箇。其作用於該稜體者，計有五力（如第七十一圖）：



第七十圖



第七十一圖

總張力 $s_t yz$，向左施於 BCED 之中心；

總切力 $s_s yz$，向上施於 BCED 之中心；

總切力 $s_s xz$，向左施於 DEFG 之中心；

總切力 $s'_s uz$，與 BG 平行而施於 BCFG 之中心；

總張力 $s'_t uz$，正交 BCFG 於其中心。

但作用於對角面 (diagonal plane) 之 s'_s 及 s'_t，均爲未知數，欲求其最大值，可用下列二式：

最大切應力爲

$$s'_{sm}=\sqrt{s_s^2+\left(\frac{s_t}{2}\right)^2}$$

及最大張應力爲

$$s'_{tm}=\frac{s_t}{2}\pm\sqrt{s_s^2+\left(\frac{s_t}{2}\right)^2}$$

後式中之最大張應力爲正時，則 s'_{tm} 與 s_t 或均爲張應力，或均爲壓應力；若根號前爲負時，則 s'_{tm} 與 s_t 之號不同，卽 s'_{tm} 爲張應力時，s_t 爲壓應力，而 s'_{tm} 爲壓應力時，s_t 爲張應力。

工廠中總軸，通常傳扭力外，受有彎曲擔負 (bending load)，其最大切應力與最大張應力，亦可用上述二式，惟 s_t 易以 $\frac{mc}{I}$ 及 s_s 易以 $\frac{Tc}{J}$ 耳。

設有一鋼軸，直徑 2 吋，其扭矩爲 1900 吋磅，彎曲矩爲 5,720 吋磅，依上式，得

$$s_s=\frac{Tc}{J}=T\div\frac{\frac{\pi r^4}{2}}{r}=T\div\frac{\pi r^3}{2}$$

$$=1900\div\frac{\pi\left(\frac{2}{2}\right)^3}{2}=1900\div 1.57$$

$$=1210 \text{ 磅/吋}^2$$

$$s_t=\frac{m_c}{I}=m\div\frac{\frac{\pi r^4}{4}}{r}=m\div\frac{\pi r^3}{4}$$

$$=5720\div\frac{\pi\left(\frac{2}{2}\right)^2}{4}=5720\div0.785$$

$$=7280 \text{ 磅/吋}^2$$

$$\therefore\ s'_{sm}=\sqrt{s_s^2+\left(\frac{s_t}{2}\right)^2}=\sqrt{(1210)^2+\left(\frac{7280}{2}\right)^2}$$

$$=3835 \text{ 磅/吋}^2$$

$$s'_{tm}=\frac{s_t}{2}+\sqrt{s_s^2+\left(\frac{s_t}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{7280}{2}+\sqrt{(1210)^2+\left(\frac{7280}{2}\right)^2}$$

$$=7475 \text{ 磅/吋}^2$$

習　　題

一、一鋼製實心圓軸，直徑 3 吋，每分鐘轉 225 次，若其最大切應力，以每方吋 6,000 磅爲限，則該軸能傳若干馬力。

答 114 馬力

二、今有一繫桿，直徑 1 吋，受有張力 3,000 磅，同時，再加以橫切力 (cross shear) 5,000 磅，試求其最大單位張應力與切應力。

答最大張應力 8,560 磅/吋²

最大切應力 6,650 磅/吋²

總　習　題

一、若離軸心線 18 吋處,加力 80 磅,則軸扭轉 15 度。今相離 4 呎,當加力若干磅,方可得同一效果。

答 30 磅

二、設於 4 吋實心圓軸,加扭矩 6,000 呎磅,其最大切應力,當爲若干?

答 5729 磅/吋^2

三、今有 2 吋徑之鋼軸,其切應力爲每方吋 6,000 磅,若每分鐘旋轉 225 次,則能傳若干馬力?

答 33.6 馬力

四、今有一軸,每分鐘旋轉 180 次,可傳 600 馬力,若最大單位應力爲 5,000 磅/吋^2,則該軸之直徑,當爲若干吋?

答約 6 吋

五、一中空鋼製圓軸,外徑 15 吋,內徑 11 吋,每分鐘旋轉 50 次,若容許應力每方吋不逾 12,000 磅,則該軸能傳若干馬力?

答 4,484 力馬

六、試將 12 吋徑之實心圓軸,與外徑 14 吋,內徑 7 吋之空心圓軸,比較其強度及重量。

答強度 0.671

重量 0.98

七、一實心鋼軸，長 125 呎，徑 16 吋，每分鐘旋轉 25 次，可傳 8,000 馬力，試求其扭角。

答 26.55 度

八、以 0.75 吋徑之高炭鋼桿，繞成外徑 6.75 吋之螺旋線彈簧，加以 600 磅之擔負，試測定其最大單位切應力。

答 21,700 磅/吋^2

第七章　鋼骨混凝土

(Reinforced Concrete)

61. 混凝土與鋼(Concrete and Steel)

混凝土由石 (broken stone or gravel),砂 (sand) 及水泥 (portland cement) 三種,調水攪合而成。其配成之比例,視其顆粒之大小及他種情形而定。大抵須用適量之沙,使充滿碎石間之空隙 (voids),又用適量之水泥,使充滿散砂間之空隙,普通用以爲柱梁者,係一容積水泥二容積散砂及四容積碎石所合成。其較次者爲一容積水泥三容積散砂及六容積碎石,此二種稱爲 1:2:4 混凝土及 1:3:6 凝混土,前者較後者力強而價貴,因含水泥較多也。

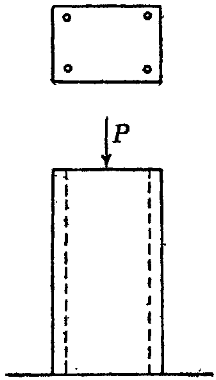
混凝土攪合半小時後,其水與水泥逐漸變硬,在十小時與二十四小時之間,可抵抗手指之壓力,一月內可完全變硬,其力亦與時俱增,大約經過一年後,不能十分增加。

純粹混凝土 (plain concrete) 富於壓力,而脆不任張力,故通常柱梁,多用鋼骨混凝土 (reinforced concrete),鋼骨混凝土者,即混凝土中置有鋼桿,互相黏結,俾鋼桿受張力而混凝土受壓力也。鋼桿之截面,或爲圓形,或爲方形,亦有桿周突起皺紋或

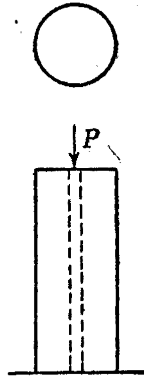
突刺，以防止其桿與混凝土之脫離者。

62. 鋼骨混凝土柱(Reinforced Columns)

鋼骨混凝土柱，通常爲力形或圓形，第七十二圖之柱，係方形，近角端處，有四鋼桿，第七十三圖之柱，係圓形，則僅有一鋼桿，貫其軸心，鋼骨凝土柱之長度，規定不能過其直徑 15 倍。故其側面可無屈撓之趨向，而計算時，自不必用長柱公式也。



第七十二圖



第七十三圖

今有一鋼骨混凝土柱，受壓力 P，命 A_c 及 s_c 爲混凝土之橫截面積及單位應力，A_s 及 s_s 爲鋼桿之橫截面積及單位應力，則 $A_c \times s_c$ 及 $A_s \times s_s$，爲該二截面之總應力，此二應力必與所加之壓力相平衡。故：

$$P = A_c s_c + A_s s_s \qquad (1)$$

未逾彈性限度時，混凝土與鋼桿所生之單位形變。爲：

$$\delta_c = \frac{s_c}{E_c}$$

及 $$\delta_s = \frac{s_s}{E_s}$$

式中 E_c 及 E_s 爲混凝土與鋼桿之彈性係數，但混凝土與鋼桿之形變必相等。即 $\delta_c=\delta_s$，故

$$\frac{s_s}{s_c}=\frac{E_s}{E_c}=n \qquad (2)$$

式中 n 爲二彈性係數之比率，通常爲 15（參考第二表），從(1)及(2)式得：

$$s_c=\frac{P}{A_c+nA_s}$$

設有 12 吋見方之混凝土柱，近角端處有 4 個 7/8 吋徑之鋼桿，與其長平行，鋼與混凝土彈性係數之比率爲 15，若受壓力 80,000 磅，則其單位應力各爲若干?

今　$A_s=4+0.6013=2.4\text{(}5$ 吋^2

$A_c=144-2.405=141.595$ 吋^2

$\therefore\quad s_c=\dfrac{80000}{141\cdot595+15\times2\cdot4\text{(}5}=450$ 磅/吋^2

及　$s_s=15\times450=6750$ 磅/吋^2

63. 鋼骨混凝土柱之設計

(Design of Reinforced Columns)

若欲設計鋼骨混凝土柱，其擔負 P 及混凝土之單位應力 s_c，或爲已知，或先假定，而 n 則取 15 或 10，視所用之混凝土而定。然後用 $A_c+nA_s=\frac{P}{s_c}$ 式，求截面 A_c 及 A_s，通常假定該二截面之一，而計算其他截面，如是 A_c 及 A_s 之值，可有多組，皆不相

同。大都依其便利及局部狀況，而取其一組。例如混凝土圓柱之軸心，貫一鋼桿。混凝土之單位應力，為 500 磅/吋^2，鋼與混凝土彈性係數之比率為 10，若柱徑為 6 吋，擔負為 20,000 磅時，其鋼桿直徑 d，當為若干吋？

令 $$A_s=\frac{1}{4}\pi d^2$$

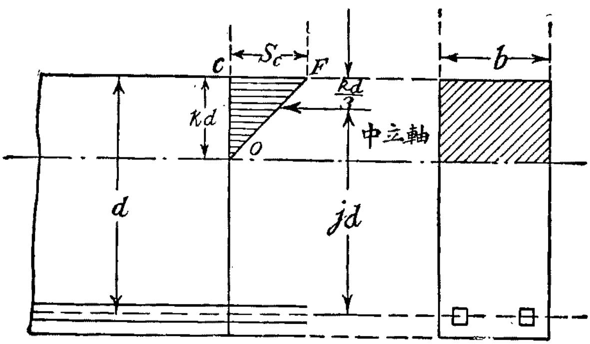
$$A_c=\frac{1}{4}\pi(6^2-d^2)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}\pi(36-d^2)+10\times\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{20000}{500}$$

由上式求得： d=1.28 吋，故鋼桿之徑，當取 1 5/16 吋。

64. 鋼骨混凝土梁(Reinforced Beams)

鋼骨混凝土梁，通常為矩形，而僅置鋼桿於其受張力之邊，故上面壓力，為混凝土所承受，而下面張力，可視為全由鋼桿所承受。故其中立軸不經過其截面之重心。



第七十四圖

設自梁之上邊至鋼桿中心之距離爲 d (第七十四圖)，自該上邊至中立軸之距離爲 kd，此 k 恆小於 1，則自中立軸至鋼桿中心之距離，爲 $(1-k)d$，又命 s_c 爲混凝土上邊之最大縮壓單位應力(卽外絲應力)，s_s 爲鋼桿平均張引單位應力，則在 $(1-k)d$ 處之縮壓單位應力爲 $s_c \times \frac{(1-k)d}{kd}$ (見 36 節)，而其單位形變，爲 $\frac{s_c \times \frac{(1-k)d}{kd}}{E_c}$，鋼桿之單位形變，爲 $\frac{s_s}{E_s}$，此二單位形變必相等，卽

$$\frac{s_s}{E_s} = \frac{s_c\frac{(1-k)d}{kd}}{E_c}$$

$$\therefore \quad s_s = \frac{E_s}{E_c} \cdot \frac{(1-k)}{k} \cdot s_c = \frac{n(1-k)}{k} s_c$$

式中 n 爲鋼與混凝土二彈性係數之比率。

今混凝土受壓力之面積，爲矩形截面 $b \cdot kd$，而該截面之平均單位應力爲 $\frac{s_c}{2}$，故混凝土之總壓應力爲 $\frac{s_c kbd}{2}$，設 A 爲鋼桿之總截面積，則其總張應力，爲 $As_s = \frac{An(1-k)s_c}{k}$，若命 p 爲鋼桿與混凝土面積之比率。則：

$$p = \frac{A}{bd}$$

$$卽 \quad A = pbd$$

今假定中立軸以下之混凝土，不承受張力，則欲保持其梁之

平衡,鋼桿之總張應力,必等於混凝土之總壓應力,即:

$$\frac{s_c k b d}{2} = \frac{p b d n (1-k) s_c}{k}$$

$$k^2 = 2pn(1-k)$$

$$k^2 + 2pnk - 2pn = 0 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad k = \sqrt{2pn + (pn)^2} - pn \qquad (2)$$

再混凝土之總壓應力,可視爲集中於 C F O 三角形之重心,鋼桿之總張應力,可視爲集中於鋼桿之中點,故抗矩之挺率;爲自鋼桿之中心線至三角形重心之距離,即$\left(1-\frac{k}{3}\right)d$,其$\left(1-\frac{k}{3}\right)$一項,可以 j 代表之。

梁之抗矩,爲總壓應力,或總張應力,與挺率相乘之積,即

$$M = \frac{s_c j k b d^2}{2} = s_s A j d \qquad (3)$$

$$或 \quad s_c = \frac{2M}{jkbd^2} \qquad (4)$$

$$及 \quad s_s = \frac{M}{Ajd} \qquad (5)$$

例如 b=12 吋,d=4·5 吋,A=0·6 吋^2,l=60 吋,n=10,及均佈擔負爲 1,800 磅,則 k=0·373。即可定中立軸與梁之上邊相去之距離;自已知擔負及長度,求得 M=13,500 吋磅;再用 (4) (5) 二式,求得混凝土之壓應力爲 340 磅/吋^2,及鋼桿之張應力爲 5,710 磅/吋^2

65. 鋼骨凝混土梁之設計

(Design of Reinforced Beams)

設計鋼骨混凝土時，務使鋼與混凝土二者，均能盡量抵抗外力，設或鋼桿面積太大，則鋼尙未及容許應力，而混凝土已不能再任重，殊非經濟之道，鋼桿與混凝土面積之比率，可用下法求得之。

梁在平衡時，其總張應力與總壓應力必相等(見上節)。故：

$$\frac{s_c kbd}{2}=s_s A$$

或
$$k=\frac{2s_s A}{s_c bd}=\frac{2s_s p}{s_c}\quad (A=pbd)$$

由上節(1)式

$$k^2+2pnk=2pn$$

將此二式中之k消去，則得

$$\frac{4s_s^2p^2}{s_c^2}+\frac{4s_s p^2 n}{s_c}=2pn$$

$$\therefore\quad p=\frac{n}{2\frac{s_s}{s_c}\left(\frac{s_s}{s_c}+n\right)}=\frac{1}{2\frac{s_s}{s_c}\left(\frac{s_s}{ns_c}+1\right)}\quad(1)$$

試設計一鋼骨混凝土梁，須能抵抗 300,000 吋磅之彎曲矩 s_c 爲每方吋 600 磅，s_s 爲每方吋 14,000 磅，n 則取 15，由上式(1)，得

$$p=0.0084。$$

代入 $k=\sqrt{2pn+(pn)^2}-pn$ 式中，

$$k=0.391。$$

$$\therefore \quad j=0.870。$$

從上節(5)式得

$$bd^2=\frac{M}{ps_sj}=\frac{300000}{0.0084\times14000\times0.870}=2930。$$

由上式，可求得 b 及 d 之值多組，若取 10 爲 b 值，則

$$d^2=\frac{2930}{10}=293$$

$$\therefore \quad d=17.25 \text{ 吋}$$

$$\therefore \quad A=0.0084\times10\times17.25=1.45 \text{ 方吋}$$

總 習 題

一、設有 1:2:4 混凝土之短柱，其截面爲 2×3 呎，試求其安全擔負。($s_c=500$ 磅/吋^2)　　答 432,000 磅

二、今有一鋼骨混凝土柱，其面積爲 144 方吋，擔負 80,000 磅，若混凝土之容許應力爲 450 磅/吋^2，而 n 之值取 15 時，則其鋼桿截面，當爲若干方吋？　　答 2.4 方吋

三、若鋼之彈性係數較混凝土大 15 倍，而鋼之面積，爲梁之面積 bd 之百分之一，試求自中立軸至上邊縮壓絲之距離。

答 0.418 d

四、今有一鋼骨混凝土梁，s_s 為 12,000 磅/吋^2, n 為 15, k 為 0.493,試求 s_c 值。　答 778 磅/吋^2

五、今有一鋼骨混凝土梁,闊 10 吋,深 12 吋,有鋼桿三條，每條截面為 0.39 方吋,若 n 為 15, s_c 為 650 磅/吋^2, 則抗矩當為若干?　答 167,000 吋磅

附 錄

建築材料(Materials of Construction)

1. 生鐵(Cast Iron)

生鐵爲近代工程上最重要之材料,十五世紀初葉,始製於英國,將鐵礦置於化鐵爐(blast furnace)而熔化之,則成銑鐵 (pig iron),銑鐵運至翻砂廠 (foundry),再投於熔鐵爐,使變流質,傾於模型,可成梁柱管(pipe)等鑄件(castings)。

生鐵(cast iron)約含鐵 90% 至 92%,及炭矽硫燐錳等雜質 10% 至 8%,其中炭質至少爲 1.5%,或爲石墨狀 (graphitic form),或爲化合狀(combined state)。若炭質爲石墨狀,則成灰色鐵 (gray iron)。若爲化合狀,則成白色鐵 (white iron)。

矽之成分,自 0.5% 至 4 % 不等。矽可除免鑄件內之氣泡(blow hole)而使鐵之密度 (density) 增加。錳可使生鐵變硬,硫質不能過 0.15%,因係有害之原質也。

燐能使生鐵更爲流動,然亦能使之變脆, 良好堅強之鑄件,燐不能過 0.6%。

生鐵價廉而強於壓力,故用途甚廣。但其性脆而張力頗低,不能用於受衝擊之建築。其伸長度甚微,受張引時, 無顯明之彈性限度。

2. 熟鐵(WrougLt Iron)

吾國周漢之間，已有熟鐵。其製法發明最早。現代熟鐵，係以銑鐵置於攪煉爐(puddling furnace)內，使氯化其炭矽等雜質而成。惟爐內溫度不高，煉出之熟鐵，係漿糊狀(pasty)。且含有渣滓(slag)，故牽之使破斷時，恆現纖維組織(fibrous structure)。

熟鐵頗強於張力，而伸長度則較小於鋼，性強韌，可延長，可展薄，易於鍛接(weld)。能抵抗衝擊，惟不能鍛(temper)之使硬，用爲切割器具。

3. 鋼 (Steel)

鋼爲鐵炭之化合物，其成分介於生鐵與熟鐵之間。

(一)罐鋼(crucible steel) 以熟鐵廢鋼(steel scraps)及木炭或銑鐵置於有蓋之罐(crucible)，入爐而熔煉之，約閱四五小時後，卽成罐鋼，常用以製機械上之工具。

(二)別色麻鋼(Bessemer steel) 置熔融之鐵於變鋼器(converter)內，速射空氣，使炭矽等起劇烈之氯化作用，卽成爲鋼，此法無庸外加燃料，且爲時甚速，僅需數十分鐘，別色麻鋼多用爲鐵路之軌條(rails)。

(三)露爐鋼(open hearth steel) 將銑鐵廢鋼或鐵礦，置於露爐(open hearth furnace)內而熔化之，大約需七八小時，方可煉成。露爐鋼用以造鎗砲鐵甲板及各種機械與建築。

鋼之物理性質，視其製造法及化學成分而定。炭之成分，自 1.5% 至 0.1% 不等。與鋼之強度及硬度，均有關係。錳可增其硬度。矽可增其強度。燐硫則使之變脆，俱爲有害之原質，不得過 0.08%。近來鐵路之軌條，廢棄熟鐵，而以鋼製，且各種建築，亦多改用鋼矣。

4. 木 (Timber)

木材採伐時含水分甚多，須暴露於風中及日光下，或置於蒸汽窰(kiln)內，使之乾燥。木之良者，顏色及組織 (texture) 均勻，無節瘤(knot)，風割(wind shakes)，白身(sap wood)，朽質 (decay) 等。大都顏色愈深，年輪(annular ring)愈密，則愈堅強，若節瘤不甚有害，用時須令有節之邊受壓力，木之彈性限度不顯著，其強度以沿木紋 (grain) 方向爲最大。側方之抵抗張引或縮壓之力，不及縱方之四分之一。

5. 石 (Stone)

用於建築之石，須強固耐久及價廉美觀。通常最硬最密緻最均勻之石，可具此四項要件。石之斷面 (fracture)，須明淨尖銳而無鬆散顆粒及暗黑泥土狀。

花崗石(granite)爲常用石中之最強固及最耐用者。係由石英(quartz)，長石(feld spar)及雲母(mica)所組成。

灰石(limestone)爲含炭酸鈣(barbonate of lime)之巖石，顏

色成分，有種種不同。其經過變質作用(metamorphism)者，爲大理石(marble)。用爲美觀之建築及屋內裝飾材料。

沙石(sandstone)爲沙(sand)所膠結而成。顏色強度，有種種不同，其抵抗風化(weathering)與花崗石相同。且較不易受火之影響，鑿割頗易，故爲建築上最常用之材料。

6. 磚 (Brick)

磚爲泥(clay)所製成，其強固不減於石，以易於製造運輸及處理。昔之用石者，今多以磚代之。

佳良之磚，須面平，角銳，大小一律，其邊互爲平行，組織須均勻，以錘擊時，當發清銳之音，且磚面應不易爲刀劃痕。

磚罕用於抵抗張引，其性質與生鐵類似，無顯著之彈性限度。

材料之平均重量表

材　料	每立方呎……………………磅
木材	40
磚	125
石	160
生鐵	450
熟鐵	480
鋼	490

職業學校實用材料強弱學　實價伍角伍分