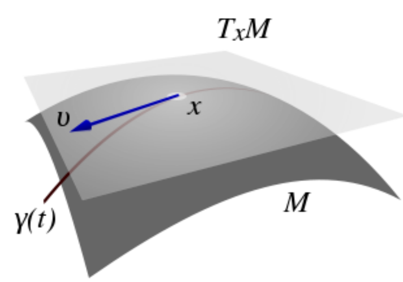
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 4

Der Tangentialraum

Holomorphe Funktionen auf einer offenen Menge von $\mathbb{C}$ sind komplex-differenzierbar. Wie „differenziert“ man eine holomorphe Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ auf einer riemannschen Fläche? Nach Lemma 3.2 ist für jede Karte $\alpha\colon U \to V$ mit $U \subseteq X$ und $V \subseteq \mathbb{C}$ offen die Funktion $f \circ \alpha^{-1}$ holomorph auf V und somit ist für einen Punkt $P \in U$ die Ableitung $(f \circ \alpha^{-1})'(\alpha(P))$ eine wohldefinierte komplexe Zahl. Diese hängt aber wesentlich von der gewählten Karte ab. Um ein wohlbestimmtes Differenzierbarkeitskonzept für komplexe Mannigfaltigkeiten zu entwickeln, muss man einen anderen Weg gehen. Wir rekapitulieren ohne Beweise die Konstruktion des reellen Tangentialraumes für eine reell-differenzierbare Mannigfaltigkeit mit der Hilfe von tangentialen Kurven und führen dann für eine komplexe Mannigfaltigkeit die entsprechende Konstruktion mit holomorphen Kurven durch, die den komplexen Tangentialraum ergibt, der auf dem zugrunde liegenden reellen Tangentialraum einfach eine zusätzliche komplexe Struktur ergibt.



Definition 4.1. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Es seien

$$\gamma_1\colon I_1 \longrightarrow M$$

und

$$\gamma_2\colon I_2 \longrightarrow M$$

zwei auf offenen Intervallen $0 \in I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$. Dann heißen γ_1 und γ_2 *tangential äquivalent* in P, wenn es eine offene Umgebung $P \in U$ und eine Karte

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ derart gibt, dass

$$\left(\alpha \circ \left(\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}\right)\right)'(0) = \left(\alpha \circ \left(\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}\right)\right)'(0)$$

gilt.

Wir brauchen einige einfache Lemmata, um nachzuweisen, dass es sich hierbei um einen sinnvollen Begriff handelt.

Lemma 4.2. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Es seien*

$$\gamma_1 \colon I_1 \longrightarrow M$$

und

$$\gamma_2 \colon I_2 \longrightarrow M$$

zwei auf offenen Intervallen $0 \in I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$. Dann sind γ_1 und γ_2 genau dann tangential äquivalent in P, wenn für jede Karte

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

mit $P \in U$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\left(\alpha \circ \left(\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}\right)\right)'(0) = \left(\alpha \circ \left(\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}\right)\right)'(0)$$

gilt.

Lemma 4.3. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Dann ist die tangentiale Äquivalenz von differenzierbaren Kurven durch P eine Äquivalenzrelation.*

Aufgrund dieses Lemmas ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 4.4. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Unter einem *Tangentialvektor* an P versteht man eine Äquivalenzklasse von tangential äquivalenten differenzierbaren Kurven durch P. Die Menge dieser Tangentialvektoren wird mit

$$T_P M$$

bezeichnet.

Lemma 4.5. *Es sei M eine (C^1)-differenzierbare Mannigfaltigkeit, $P \in M$ ein Punkt, $P \in U = M$ offen und*

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

eine Karte. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Abbildung*

$$T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ [\gamma] \longmapsto \left(\alpha \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U)}\right)'(0),$$

ist eine wohldefinierte Bijektion.

(2) *Die durch diese Abbildung auf T_pM definierte Vektorraumstruktur ist unabhängig von der gewählten Karte.*

Definition 4.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Unter dem *Tangentialraum* an P, geschrieben T_PM, versteht man die Menge der Tangentialvektoren an P versehen mit der durch eine beliebige Karte gegebenen reellen Vektorraumstruktur.

Die Dimension des Tangentialraumes stimmt mit der Dimension der Mannigfaltigkeit überein. Jede Karte induziert einen Isomorphismus zwischen T_pM und dem $\mathbb{R}^n$, aber diese Isomorphismen hängen von der gewählten Karte ab. Insbesondere gibt es auf dem Tangentialraum keine Standardbasis.

Der komplexe Tangentialraum

Da eine komplexe Mannigfaltigkeit M der komplexen Dimension n insbesondere eine reell-differenzierbare Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2n$ ist, gibt es auf ihr zu jedem Punkt P einen wohldefinierten reellen Tangentialraum der Dimension $2n$. Wir möchten zeigen, dass dieser in kanonischer Weise auch ein komplexer Vektorraum der komplexen Dimension n ist. Dazu werden wir zuerst die reelle Konstruktion mit holomorphen Kurven nachbilden und dann den so entstandenen komplexen Tangentialraum mit dem reellen Tangentialraum identifizieren. Für komplexe Mannigfaltigkeiten definiert man holomorphe Abbildungen wie im Fall von riemannschen Flächen unter Bezug auf Karten. Eine holomorphe Kurve auf M ist einfach eine holomorphe Abbildung $\gamma\colon B \to M$, die auf einer offenen Kreisscheibe $B \subseteq \mathbb{C}$ definiert ist. Die Holomorphie bezieht sich auf Karten von M. Da die folgenden Überlegungen lokal sind, kann man die Kreisscheiben verkleinern und dann annehmen, dass die holomorphe Kurve ganz in einem Kartengebiet landet.

Definition 4.7. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Es seien

$$\gamma_1\colon B_1 \longrightarrow M$$

und

$$\gamma_2\colon B_2 \longrightarrow M$$

zwei auf offenen Bällen $0 \in B_1, B_2 \subseteq \mathbb{C}$ definierte holomorphe Kurven mit $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$. Dann heißen γ_1 und γ_2 *tangential äquivalent* in P, wenn es eine offene Umgebung $P \in U$ und eine Karte

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

mit $V \subseteq \mathbb{C}^n$ derart gibt, dass

$$\left(\alpha \circ \left(\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}\right)\right)'(0) = \left(\alpha \circ \left(\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}\right)\right)'(0)$$

gilt.

Wir brauchen einige einfache Lemmata, um nachzuweisen, dass es sich hierbei um einen sinnvollen Begriff handelt.

Lemma 4.8. *Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Es seien*

$$\gamma_1 \colon B_1 \longrightarrow M$$

und

$$\gamma_2 \colon B_2 \longrightarrow M$$

zwei auf offenen Bällen $0 \in B_1, B_2 \subseteq \mathbb{C}$ definierte holomorphe Kurven mit $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$. Dann sind γ_1 und γ_2 genau dann tangential äquivalent in P, wenn für jede Karte

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

mit $P \in U$ und $V \subseteq \mathbb{C}^n$ die Gleichheit

$$\left(\alpha \circ \left(\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}\right)\right)'(0) = \left(\alpha \circ \left(\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}\right)\right)'(0)$$

gilt.

Beweis. Für eine holomorphe Kurve

$$\gamma \colon B \longrightarrow M$$

mit $0 \in B$ und $\gamma(0) = P$ und eine Karte

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

(mit $P \in U$ und $V \subseteq \mathbb{C}^n$) ändert sich der Ausdruck

$$\left(\alpha \circ \left(\gamma|_{\gamma^{-1}(U)}\right)\right)'(0)$$

nicht, wenn man zu einem kleineren offenen Ball $0 \in B' \subseteq B$ und einer kleineren offenen Menge $P \in U' \subseteq U$ (mit der induzierten Karte) übergeht. Wir können also davon ausgehen, dass γ_1 und γ_2 auf dem gleichen offenen Ball definiert sind und ihre Bilder in U liegen, und dass es für dieses U zwei Karten

$$\alpha_1 \colon U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 \colon U \longrightarrow V_2$$

gibt. Dann folgt aus

$$(\alpha_1 \circ \gamma_1)'(0) = (\alpha_1 \circ \gamma_2)'(0)$$

nach der Kettenregel unter Verwendung der komplexen Differenzierbarkeit der Übergangsabbildung $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$ sofort

$$\begin{aligned}
(\alpha_2 \circ \gamma_1)'(0) &= \left(\left(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}\right) \circ (\alpha_1 \circ \gamma_1)\right)'(0) \\
&= \left(D\left(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}\right)\right)_{\alpha_1(P)} \left((\alpha_1 \circ \gamma_1)'(0)\right) \\
&= \left(D\left(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}\right)\right)_{\alpha_1(P)} \left((\alpha_1 \circ \gamma_2)'(0)\right) \\
&= (\alpha_2 \circ \gamma_2)'(0).
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.9. *Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Dann ist die tangentiale Äquivalenz von holomorphen Kurven durch P eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die Reflexiviät und die Symmetrie der Relation sind unmittelbar klar. Zum Nachweis der Transitivität seien drei holomorphe Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon B \longrightarrow M$$

gegeben, wobei wir sofort annehmen dürfen, dass sie auf dem gleichen offenen Ball $0 \in B \subseteq \mathbb{C}$ definiert sind. Es seien $P \in U_1, U_2$ offene Mengen, mit denen man die tangentiale Gleichheit von γ_1 und γ_2 bzw. von γ_2 und γ_3 nachweisen kann. Dann kann man nach Lemma 4.8 mit $U = U_1 \cap U_2$ die tangentiale Gleichheit von γ_1 und γ_3 nachweisen. □

Aufgrund dieses Lemmas ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 4.10. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Unter einem *Tangentialvektor* an P versteht man eine Äquivalenzklasse von tangential äquivalenten holomorphen Kurven durch P. Die Menge dieser Tangentialvektoren wird mit

$$T_P M$$

bezeichnet.

Lemma 4.11. *Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit, $P \in M$ ein Punkt und $\alpha \colon U \to V$ eine Karte. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Abbildung*

$$T_p M \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ [\gamma] \longmapsto \left(\alpha \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U)}\right)'(0),$$

ist eine wohldefinierte Bijektion.

(2) *Die durch diese Abbildung auf $T_p M$ definierte $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur ist unabhängig von der gewählten Karte.*

Beweis. (1). Die Wohldefiniertheit der Abbildung ist wegen Lemma 4.8 klar. Die Injektivität folgt unmittelbar aus der Definition 4.7. Zur Surjektivität sei $v \in \mathbb{C}^n$. Wir betrachten die affin-lineare Kurve

$$\theta \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ z \longmapsto \theta(z) = \alpha(P) + zv,$$

dessen Ableitung in 0 gerade v ist. Wir schränken diese Kurve auf einen Ball $0 \in B \subseteq \mathbb{C}$ derart ein, dass $\theta(B) \subseteq V$ ist und betrachten

$$\gamma = \alpha^{-1} \circ \theta \colon B \longrightarrow M.$$

Für diese Kurve gilt

$$\gamma(0) = \left(\alpha^{-1} \circ \theta\right)(0) = \alpha^{-1}(\theta(0)) = \alpha^{-1}(\alpha(P)) = P$$

und

$$(\alpha \circ \gamma)'(0) = \left(\alpha \circ \left(\alpha^{-1} \circ \theta\right)\right)'(0) = \theta'(0) = v.$$

(2). Durch Übergang zu kleineren offenen Mengen können wir annehmen, dass zwei Karten
$$\alpha_1\colon\, U \longrightarrow V_1$$
und
$$\alpha_2\colon\, U \longrightarrow V_2$$
vorliegen. Die Übergangsabbildung
$$\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}\colon\, V_1 \longrightarrow V_2$$
ist biholomorph und für ihr totales Differential in $\alpha_1(P)$ gilt nach der Kettenregel die Beziehung
$$\left(D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})\right)_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma)'(0)) \,=\, (\alpha_2 \circ \gamma)'(0).$$
Das bedeutet, dass das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} T_PM & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{C}^n, \end{array}$$
wobei vertikal das totale Differential zu $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$ steht, kommutiert. Da das totale Differential eine lineare Abbildung ist, die in der gegebenen Situation bijektiv ist, macht es keinen Unterschied, ob man die Addition und die Skalarmultiplikation auf T_PM unter Bezug auf die obere oder die untere horizontale Abbildung definiert. □

DEFINITION 4.12. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Unter dem *Tangentialraum* an P, geschrieben T_PM, versteht man die Menge der Tangentialvektoren an P versehen mit der durch eine beliebige Karte gegebenen komplexen Vektorraumstruktur.

Die Dimension des Tangentialraumes als komplexer Vektorraum stimmt mit der komplexen Dimension der Mannigfaltigkeit überein. Jede Karte induziert einen Isomorphismus zwischen T_pM und dem $\mathbb{C}^n$, aber diese Isomorphismen hängen von der gewählten Karte ab. Insbesondere gibt es auf dem Tangentialraum keine Standardbasis.

LEMMA 4.13. *Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Dann gibt es eine natürliche Identifizierung zwischen dem komplexen Tangentialraum T_PM und dem Tangentialraum in P von M als differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Wir schreiben $T_P^{\mathbb{C}}M$ und $T_P^{\mathbb{R}}M$ für den komplexen bzw. den reellen Tangentialraum. Dabei ist $T_P^{\mathbb{C}}M$ ein komplexer Vektorraum der komplexen Dimension n, wobei n die komplexe Dimension der komplexen Mannigfaltigkeit M ist. Damit ist $T_P^{\mathbb{C}}M$ insbesondere ein reeller Vektorraum der reellen Dimension $2n$. Da M als reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit die Dimension $2n$ besitzt, hat auch $T_P^{\mathbb{R}}M$ die reelle Dimension $2n$. Wir betrachten die Abbildung
$$T_P^{\mathbb{C}}M \longrightarrow T_P^{\mathbb{R}}M,\, [\gamma] \longmapsto [\gamma|_{\mathbb{R}}],$$

die einem holomorphen Tangentialvektor, der durch eine holomorphe Kurve $\gamma\colon B \to M$ mit $0 \in B \subseteq \mathbb{C}$ und $\gamma(0) = P$ repräsentiert wird, den reellen Tangentialvektor zuordnet, der durch den reellen differenzierbaren Weg $\gamma|_{B\cap\mathbb{R}}$ repräsentiert wird. Diese Abbildung ist wohldefiniert und $\mathbb{R}$-linear. Zum Nachweis der Bijektivität betrachten wir zu einer Karte $\alpha\colon U \to V \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_P^{\mathbb{C}}M & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_P^{\mathbb{R}}M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

wobei die horizontalen Abbildungen die Bijektionen aus Lemma 4.5 bzw. Lemma 4.11 sind. Wegen

$$(\alpha \circ \gamma)'(0) = (\alpha \circ \gamma|_{\mathbb{R}})'(0)$$

ist das Diagramm kommutativ, daher ist die linke vertikale Abbildung ein reeller Isomorphismus. $\square$

Das Tangentialbündel

Definition 4.14. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann nennt man die Menge

$$TM = \biguplus_{P\in M} T_PM,$$

versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi\colon TM \longrightarrow M,\ (P,v) \longmapsto P,$$

das *Tangentialbündel* von M.

Definition 4.15. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und

$$TM = \biguplus_{P\in M} T_PM$$

das Tangentialbündel, versehen mit der Projektionsabbildung

$$\pi\colon TM \longrightarrow M,\ (P,v) \longmapsto P.$$

Das *Tangentialbündel* wird mit derjenigen Topologie versehen, bei der eine Teilmenge $W \subseteq TM$ genau dann offen ist, wenn für jede Karte

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

die Menge $(T(\alpha))(W \cap \pi^{-1}(U))$ offen in $V \times \mathbb{R}^n$ ist.

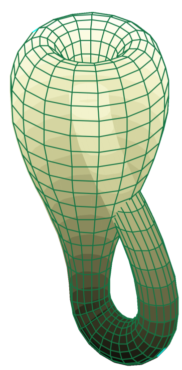
Das Tangentialbündel zu einer offenen Menge $V = \mathbb{C}^n$ ist einfach $V \times \mathbb{C}^n$ mit der Produkttopologie. Zu einer offenen Menge $U \subseteq M$ ist $TU \subseteq TM$

eine offene Teilmenge. Wenn eine Karte $\alpha\colon U \to V$ vorliegt, so liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TU & \longrightarrow & V \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} & V \end{array}$$

vor, wobei die obere horizontale Abbildung für jeden Punkt $P \in U$ der natürliche Isomorphismus $T_P M \cong \mathbb{C}^n$ ist. Diese Abbildungen kann man wiederum als Karten für TM nehmen und erhält dadurch auf dem Tangentialbündel die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.

Orientierbarkeit



Die sogenannte Kleinsche Flasche ist ein Beispiel für eine nicht orientierbare kompakte Fläche. Das Bild ist nur eine Andeutung, die Kleinsche Flasche kann nicht überschneidungsfrei im $\mathbb{R}^3$ realisiert werden. Es ist definitiv keine riemannsche Fläche.

Lemma 4.16. *Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist orientierbar.*

Beweis. Dies beruht im Wesentlichen darauf, dass zu einer bijektiven $\mathbb{C}$-linearen Abbildung auf einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V die zugrunde liegende reell-lineare Abbildung nach Aufgabe 4.7 eine positive Determinante besitzt. $\square$

Abbildungsverzeichnis