大代數學講義

上　册

上野清　著
王家荄
張廷華　譯

商務印書館發行

大代數學講義

上册

上野清著

王家菼 張廷華譯

駱師曾 趙秉良
王積沂 壽孝天 校

商務印書館發行

序

俯仰宇宙。自然界。人爲界。形而上者。形而下者。系而爲學。釐而爲科。繁然錯列。莫殫莫究。卽就一科而言之。有委有原。有約有博。作者創始。述者增高。駸駸乎日進而未有極限。學者之習科學也。當其始患不得入其門。旣入其門。則欲罷不能。恆以一探究竟博觀變化爲愉快。遊山者思登五嶽之高。觀水者思極九瀛之闊。人情大抵然乎。憶曩時初習代數。所循誦者爲製造局之譯本。深喜代數立術。能探究數之公性情。足與中土天元術相頡頏。以視舊有各術之枝枝節節而爲之者。難易蓋迥判矣。然嘗因其術而觸類引伸。覺意象之表。尙有種種繁賾之理。足供研究者在。惜所誦之本。尙語焉而不詳。偶見某雜誌。載級數求和之解法。批郤導窾。得未曾有。聞友人述。謂是固譯自東文大代數者耳。於是知海外著述。不乏淵博精深先得我心者。深自恨未諳東文。無由窺此鴻祕也。近年以來。代數學教科書。出版日多。初學入門。可無困難之感。默計此時明習代數之人。當倍蓰於十年以前。苟非迻譯程度較高之書。引入於深造之域。殆不足饜其拾級而登之願望。館中同人。不辭勞瘁。取日本上野清之大代數講義而譯之。期年而譯始成。又期年而印始成。某以與於校勘之役。藉得稍稍瀏覽。一償夙願。旣深自幸。且以此忖度並世學子之心。知其對於是書之出版。亦必有以先覩爲快者焉。吁。來者不可知。由今日言之。則是書者。固代數學中之五嶽九瀛也矣。

己酉年夏五月紹興壽孝天識於商務印書館編譯所

例言

一是書爲日本上野清氏所編纂。取英國斯密斯氏霍爾氏乃托氏三家之大代數學。譯述解證。演爲講義。其立義之嶄新。體例之完備。久爲彼國教育家所歡迎。今重譯之。以供吾國習代數者參考之用。

一斯密斯氏書。自開端始。霍爾氏乃托氏書。自比例始。本書以斯密斯氏本爲主。以霍爾氏乃托氏之說補其缺。皆依據一千八百九十三四年間最新之版而蒐採。上野氏此書。實可謂集三家之大成。

一是書共分八卷。都三十二編。自第一編至第十九編專論數之運算及性質。可稱爲初等之部。自第二十編至第三十二編。於數之運算及性質外。詳論數之變化及配合。可稱爲高等之部。學者明此界限。循序漸進。自無難通之處。苟能反覆熟習。代數學之奥蘊畢宣矣。

一是書例題之解答。專爲查對而設。學者習至例題。宜先以己意解演之。後視其與是書合否。合則考其孰繁孰簡。不合則考其誤在何處。庶易得益。若第按文循誦。而曰是易解是易解。則非編纂者之本意也。

一是書材料豐富。凡代數學之理法。包括殆盡。卽向之稱爲難題者。依此書之理法解之。自覺游刃有餘。

一是書各種名詞。悉照現今所通行者而用之。仍附載英文原名。以資考證。譯文之中。間有爲譯者所添註而非上野淸氏原書之所有者。則標譯註二字以爲區別。

一是書文字不尙高深。解說不厭煩瑣。務以達意爲主惟卷帙浩繁。譯述讐校。前後易數人之手。始克竣事。未當之處。訛誤之處。均恐不免。還望海內大雅。匡其不逮。則幸甚矣。

目　錄

第壹卷

第壹編

第貳編

第叁編

第肆編

第伍編

第陸編

第陸編（補）

第貳卷

第柒編

第捌編

第玖編

第玖編(補)

第叁卷

第拾編

第拾壹編

第拾貳編

第拾貳編 (補)

第拾叁編

第肆卷

第拾肆編

第拾伍編

第拾陸編

第拾柒編

第拾捌編

第拾玖編

第伍卷

第貳拾編

第貳拾壹編

第貳拾貳編

第貳拾叁編

第陸卷

第貳拾肆編

第貳拾伍編

第貳拾陸編

第貳拾柒編(上)

第柒卷

第貳拾柒編(續)

第貳拾捌編

第貳拾玖編

第貳拾玖編(補)

第捌卷

第叁拾編

第叁拾壹編

第叁拾貳編

查 理 斯 密 司 氏

霍 爾 氏, 乃 托 氏

大代數學講義

第壹卷

第壹編

定義

1. 代數學〔Algebra〕為論數之學科。與算術(Arithmetic)同。

譯注。算術舊稱數學。今從本書原名。稱算術。

算術中以5,6,等數字表數。其數字各有一定之値。代數學中以文字表數。其文字可代任何之數(卽未定之數)。此代任何數之文字。謂之元字。但在一個題內所用同一之元字。所代爲同一之數。

代數學中所用之元字。可以代任何之數。故凡所論數之理法可推之於任何數而皆同。

例如5加6所得之數爲11。此算術中所論之理法。不能類推之於他數。若代數中用元字代數。如a加a其所得之數常爲a之2倍。此a不論爲任何數皆合。

2. 數〔Numbers〕謂整數及分數也。

又有數量者。如價値,長,面積,時間之類。各以其單位爲標準。而以數示其爲單位之若干倍或若干分。

例如記物之長爲4。此必爲其單位所度得之數。其單位爲一尺,或一步,或一里,或爲別定之長。則其物之長。卽爲4尺,或4步,或4里,或爲所定之長之4倍。

夫數者。本祇用以計算數量。故無論以元字或數字。爲數量之記號。其元字與數字。皆僅能表其數量之數。而數與數量。雖有分別。尋常亦屢有以數量二字爲數之代字者。

譯註 算術中全以數字與單位相連而言。如4尺或4步謂之名數。對名數而言。則凡不連舉單位之數。謂之不名數。名數所以表數量。而名數中所用之數字。仍以表數而已。

〔注意〕此後各章。其關係尤要者。常加( )爲記號。如下3章關係尤要。故作(3)。

3. 加號 + 〔**Plus**〕 置此號於一數之前。以示此一數加於前一數也。

例 $6+3$。以示3加於6也。又$6+3+2$。以示3加於6之後。又以2加之也。

$a+b$。以示b加於a也。又$a+b+c$。以示b加於a之後。又以c加之也。

4. 減號 − 〔**Minus**〕 置此號於一數之前。以示從前一數減去此一數也。

例 $6-3$。所以示自6減去3也。又$6-3-2$。所以示自6減3之後又以2減之也。

$a-b$。所以示自a減去b也。又$a-b-c$。所以示自a減b之後又以c減之也。此與加號之次序同。

加減兩號並用。如$a+b-c$。爲b加於a之後而以c減之。

又$a-b+c$。爲自a減去b而又以c加之也。

〔法則〕加減之運算。必從左順次以及於右。

例 $9+3+2=12+2=14$。此從左及於右者也。

又 $9+3+2=9+5=14$。此從右及於左者也。

加法之演算。從右及於左。其結果尚無不合。然依此習慣。以行於減法。則有大誤。

例 $9-3-2=6-2=4$。此從左及於右者也。

若從右及左而運算之。則$9-3-2=9-1=8$。卽爲大誤。何則以$9-3-2$之意。謂從9減3餘6。又從6減2餘4。此4卽所得之結果。若從右運算。則與題意違背。學者宜愼之。

又 $9+3-2=12-2=10$。此從左及於右者也。

$9+3-2=9+1=10$。此從右及於左者也。其結果尙無不合。

$9-3+2=6+2=8$。此從左及於右者也。

$9-3+2=9-5=4$。此從右及於左者也。其結果不合。

5. 乘號 × (Into) 置此號於一數之前。以示此一數乘於前一數也。

例 $a\times b$。所以示以 b 乘 a 也。$a\times b\times c$。所以示以 b 乘 a。又以 c 乘之也。

文字與文字之間。或數字與文字之間。其乘號可省。例 $a\times b$ 記爲 ab。$a\times b\times c$ 記爲 abc。

若夫數字與數字之間。其乘號斷不可省。否則大誤。例記 3×6 爲 36。此 36 卽爲三十六之數。斷不可以代 3×6 者也。

有時以點(.)代乘號。然恐其與小數點相混。故記此點時。比小數點略低。例 6×3 則記如 $6\cdot 3$。

〔餘論〕數字與數字之間。加號有時可省。

例 $60+3$ 卽 63。又 $6+\frac{3}{10}$ 卽 $6\frac{3}{10}$。

然如 $8+3$ 則不得記爲 83。

6. 除號 ÷ (Divided by) 置此號於一數之前。以示用此一數以除前一數也。

例 $a\div b$。卽 a 以 b 除也。$a\div b\div c$。所以示 a 以 b 除。又以 c 除之也。

乘除兩號並用。如 $a\div b\times c$。爲 a 以 b 除。又以 c 乘之也。又 $a\times b\div c$。爲 a 以 b 乘。又以 c 除之也。

〔法則〕乘除之運算。亦從左順次以及於右。與加減之運算同。若運用加減乘除之記號。如 $a-b\times c+c\div d$。其運算之次序若何。則於16章之末別爲說明之。

7. 積 (Product) 凡二數或二個以上之數相乘。其結果爲諸數之連乘積 (Continued product)。或單稱積。而其所乘之諸數。爲其積之因子 (Factor)。

將積之因子分而爲二。彼此互爲係數 (Coefficient)。

例將 $3abx$ 之因子分爲 3 與 abx。則 3 爲 abx 之係數。而 abx 爲 3 之係數。

若分爲 $3ab$ 與 x。則 $3ab$ 爲 x 之係數。而 x 爲 $3ab$ 之係數。

積中一因子以數字表之者。謂之數字係數 (numerical coefficient)。

例 $3abx$。其 3 爲 abx 之數字係數。

〔注意〕保數用數字係數之處最多。

8. 方乘〔Power〕諸因子相同。其所成之積。爲其因子之方乘。例 a 與 a 二因子所成之積 aa。爲 a 之二方乘。又 aaa 爲 a 之三方乘。$aaaa$ 爲 a 之四方乘。以下類推。

有時祇有一個因子 a。卽以爲 a 之一方乘。

二方乘亦稱平方 (Square)。三方乘亦稱立方 (Cube)。例 aa 爲 a 之平方。aaa 爲 a 之立方。

9. 指數〔Index〕 $aa, aaa, aaaa$ 等之方乘簡略記法。卽以 a^2 代 aa。以 a^3 代 aaa。以 a^4 代 $aaaa$。故 a^n 可以代 $aaaa$………乘至 n 次之方乘也(n 爲整數)。

其於 a 之右肩上所記之小數字 2, 3, 4 及文字 n。所以示同因子之數。如 a^3b^2 卽爲 $aaabb$。

如上所記之小數字及文字以示同因子之數者。稱爲指數。a 之一方乘當記爲 a^1。然可略之。僅記爲 a。

10. 方根〔Root〕若一數之平方等於 a。則其一數。爲 a 之平方根。例 4 之平方卽 4^2 等於 16。則 4 爲 16 之平方根。

平方根 (Square Root) 之記號。記以 $\sqrt[2]{\ }$。或略記以 $\sqrt{\ }$。故 $\sqrt{a}$ 爲 a 之平方根。$\sqrt{16}$ 爲 16 之平方根。卽 $\sqrt{16}=4$。

若一數之立方等於 a。則其一數爲 a 之立方根。例 3 之立方卽 3^3 等於 27。故 3 爲 27 之立方根。

立方根 (Cube Root) 之記號。記以 $\sqrt[3]{\ }$。故 $\sqrt[3]{a}$ 爲 a 之立方根。又 $\sqrt[3]{27}$ 卽 3 爲 27 之立方根。

四乘根記以 $\sqrt[4]{\ }$。五乘根記以 $\sqrt[5]{\ }$。又 n 乘根記以 $\sqrt[n]{\ }$。故 $\sqrt[4]{a}$ 爲 a 之四乘根。$\sqrt[n]{a}$ 爲 a 之 n 乘根。但 n 限於整數。

$\sqrt{}$ 之記號。蓋從根字卽 Radix 之首字碼 r 變化而成。此種記號稱爲根號(Radical Sign)。

11. 不盡根〔Surd〕 所得之方根。其小數無盡者。稱爲不盡根或無理數(Irrational Surd)。例 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 若精密求之。其小數無有窮盡。故稱 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 等爲不盡根。

依算術上求平方根之法。$\sqrt{7}$ 之値僅能得其略近數 2.6457……若於代數學 7 之平方根。祇記爲 $\sqrt{7}$ 而已。

12. 代數式〔Algebraical expression〕 以種種之文字,數字,符號集合而成者。

例如 $7a+b^2-cd$ 或 $\sqrt{a}+9$ 等。皆爲代數式。

若如 $+\times 6-\div ab$ 爲任意集合毫無意義者。不得謂之代數式。

項〔Terms〕 以 $+$ 或 $-$ 相連之各部爲項。

例 $2a-3bx+5cy^2$ 此代數式之各部,爲 $2a$, $-3bx$, $+5cy^2$。卽此代數式爲有三項者。

若以 $\times$ 或 $\div$ 相連之各部。不得曰項。例 $5+6-7$ 爲有 $5, +6, -7$ 之三項。若 $5\times 6\div 7$。其全部分僅得爲一項。

例 $2a-3bx+5cy^2$ 爲 $2\times a-3\times b\times x+5\times c\times y\times y$。其在 $+$ 及 $-$ 之間者得謂之項。其在 $\times$ 與 $+$ 或 $-$ 之間者不得謂之項。

13. 同類項〔Like terms〕 有二項。除數字係數之外。其餘悉相同者。謂之同類項。

例 a 與 $3a$ 爲同類項。$5a^3b^2c$ 與 $3a^3b^2c$ 爲同類項。

至若 $5a^2b^3c$ 與 $3a^3b^2c$ 則爲異類而非同類項。何則。一數中 a 之因子有二。b 之因子有三。而又一數中 a 之因子有三。b 之因子有二。故相異也。又 $5a^2b$ 與 $5ax$ 亦爲異類項。

14. 壹項式〔Monomial expression〕 代數式祇有一項者。例如 $3ab$, $7\div 6\times 8$。皆爲壹項式。

多項式〔Multinomial expression〕 代數式有二項或二以上之項者。

例如 $a+b$, $a-b\times c$ 爲二項式(Binomial expression)。

$a-b+c$, ax^2+bx+c 爲三項式(Trinomial expression)。

15. **相等號** $=$〔Equals〕置此號於兩代數式之間。以示其兩代數式爲相等者。例 $a=b$。爲 a 等於 b 也。$a+b=c$。爲 $a+b$ 等於 c 也。

若置符號 $>$ 於兩代數式之間。所以示前式大於後式。例 $a>b$ 爲 a 大於 b 也。

若置符號 $<$ 於兩代數式之間。所以示前式小於後式。例 $a<b$ 爲 a 小於 b 也。

若置符號 $\neq$ 於兩代數式之間。所以示前式與後式不相等。例 $a\neq b$ 爲 a 不等於 b。卽爲 a 大於 b 或小於 b 也。故 $a\neq b$ 或記爲 $a\gtrless b$。

若置符號 $\ngtr$ 於兩代數式之間。所以示前式不大於後式。例 $a\ngtr b$ 爲 a 不大於 b。卽爲 a 小於 b 或等於 b 也。故 $a\ngtr b$ 或記爲 $a\leqq b$。

若置符號 $\nless$ 於兩代數式之間。所以示前式不小於後式。例 $a\nless b$ 爲 a 不小於 b。卽爲 a 大於 b 或等於 b 也。故 $a\nless b$ 或記爲 $a\geqq b$。

16. **括弧**〔Brackets〕將二項或二項以上之代數式。置於括弧之內。視此代數式之全項。當作一項。例 $(a+b)c$ 其意謂於 b 加於 a 之結果。而以 c 乘之。其 $a+b$ 附以括弧者。視 $(a+b)$ 爲一項。卽視爲 b 加於 a 之結果也。

又 $(a-b)(c+d)$。其意謂以 a 減 b 爲一數。c 加 d 爲又一數。而以此二數相乘也。

又 $(a+b)^2(c+d)^2$。其意謂以 a, b 和之平方爲一數。c, d 和之平方爲又一數。而以此二數相乘也。

所有括弧之形。如 ( ), { }, [ ]。

括線〔Vinculum〕以——代括弧者也。

例 $a-\overline{b-c}$ 卽 $a-(b-c)$。又 $\sqrt{\ }a+b$ 卽 $\sqrt{(a+b)}$。根號無括弧及括線者。其根號僅屬於一數。如 $\sqrt{\ }2a$ 爲於 2 之平方根卽 $\sqrt{2}$ 以 a 乘之。與 $\sqrt{2a}$ 或 $\sqrt{(2a)}$ 不同。若 $\sqrt{2a}$ 或 $\sqrt{(2a)}$。則爲 $2a$ 之平方根也。

又 $\sqrt{\ }a+x$ 爲於 a 之平方根卽 $\sqrt{a}$ 加以 x 也。與 $\sqrt{a+x}$ 或 $\sqrt{(a+x)}$ 不同。因 $\sqrt{a+x}$ 或 $\sqrt{(a+x)}$。爲 $a+x$ 之平方根也。欲表示全式之平方根。必用括弧或括線將全式包括之。

記分數時。於其分子分母間所置之橫線。與括線同其作用。

如$\frac{a+b}{3}$可記爲$\frac{1}{3}(a+b)$。但$\frac{1}{3}a+b$不得視爲與$\frac{1}{3}(a+b)$同也。

〔注意〕代數式之各項。雖無括弧。可視爲與有括弧者無異。以行其加減。

例 $a+bc-d\div e+f$ 此式爲有 $a, +bc, -d\div e, +f$ 四項。其 $+bc$ 及 $d\div e$ 視爲 $+(bc)$ 及 $(d\div e)$。故此式可作爲 $a+(bc)-(d\div e)+f$。其意爲於 a 加 b, c 之積。又從其所得之結果以 e 除 d 之商減之。末則加以 f 也。

此卽如4章所云加減之運算從左以及於右也。

又如 $15+6\times8-36\times4\div18+72\div9-1$。其運算之次序如次。

$$15+(6\times8)-(36\times4\div18)+(72\div9)-1。$$
$$=15+48-(144\div18)+8-1=15+48-8+8-1。$$

〔法則〕於一式中加減乘除之運算。其次序先乘除而後加減。(參觀4章及6章)。

例 題

1. 設 $a=1, b=2, c=3$ 及 $d=4$。試求下列各式之值。

(1) $5a+3c-3b-2d=5\times1+3\times3-3\times2-2\times4$
$=5+9-6-8=14-6-8=8-8=0$〔答〕

(2) $26a-3bc+d=26\times1-3\times2\times3+4=26-18+4=12$〔答〕

(3) $ab+3bc-5d$。〔答 0〕 (4) $bc-ca-ab$。〔答 1〕

(5) $a+bc+d$。〔答 11〕

(6) $bcd+cda+dab+abc$
$=2\times3\times4+3\times4\times1+4\times1\times2+1\times2\times3=50$〔答〕

2. 設 $a=3, b=1$ 及 $c=2$。則次之各值如何。

(1) $2a^3-3b^2-4c^3=2\times3^3-3\times1^2-4\times2^3$
$=2\times27-3\times1-4\times8=54-3-32=19$。〔答〕

(2) $2a^2b-3b^3c^2=2\times3^2\times1-3\times1^3\times2^2=18-12=6$。〔答〕

(3) $\frac{1}{16}c^3-\frac{1}{2}b^3=\frac{1}{16}\times2^3-\frac{1}{2}\times1^3=\frac{1}{16}\times8-\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$。〔答〕

(4) $a^3+3ac^2-3a^2c-c^3$。〔答 1〕

(5) $2a^4b^2c-3b^4c^2a-2c^4a^2b$。〔答 0〕

3. $a=3, b=2, c=1$ 及 $d=0$。求下各式之值。

(1) $(3a+4d)(2b-3c)=(3\times3+4\times0)(2\times2-3\times1)$

$=(9+0)(4-3)=9\times1=9$。〔答〕

(2) $2a^2-(b^2-3c^2)d=2\times3^2-(2^2-3\times1^2)\times0=18-0=18$。〔答〕

(3) $a^3-b^3-2(a-b+c)^3$。〔答 3〕

(4) $a(b^2-c^2)+b(c^2-d^2)+d(a^2-b^2)$。〔答 11〕

(5) $3(a+b)^2(c+d)-2(b+c)^2(a+d)=3(3+2)^2(1+0)-2(2+1)^2(3+0)$

$=3(5)^2(1)-2(3)^2(3)=3\times25\times1-2\times9\times3=21$。〔答〕

(6) $\dfrac{2a^2}{b+c}-\dfrac{2b^2}{c+a}-\dfrac{2c^2}{b+d}+\dfrac{2d^2}{a+d}=\dfrac{2\times3^2}{2+1}-\dfrac{2\times2^2}{1+3}-\dfrac{2\times1^2}{2+0}+\dfrac{2\times0^2}{3+0}$

$=\dfrac{2\times9}{3}-\dfrac{2\times4}{4}-\dfrac{2\times1}{2}+\dfrac{2\times0}{3}=6-2-1+0=3$。〔答〕

4. 若 $a=5, b=4, c=3$。求次之各值。

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$。〔答〕

$\sqrt{5ab}+c=\sqrt{5\times5\times4}+3=5\times2+3=13$。〔答〕

$\sqrt{(b^4c^2+b^2c^4)}=\sqrt{(4^4\times3^2+4^2\times3^4)}=\sqrt{(256\times9+16\times81)}$

$=\sqrt{3600}=60$。〔答〕

$\sqrt[3]{(a^2+4b^2+4c^2)}=\sqrt[3]{(5^2+4\times4^2+4\times3^2)}=\sqrt[3]{(25+64+36)}$

$=\sqrt[3]{125}=5$。〔答〕

5. (1) $a=2, b=1$。或 (2) $a=5, b=3$。或 (3) $a=12, b=5$。則 a^2-b^2 恆等於 $(a+b)(a-b)$。試證之。

〔證〕(1) $a^2-b^2=2^2-1^2=4-1=3$ 而 $(a+b)(a-b)=(2+1)(2-1)=3\times1=3$。即 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。(2) 及 (3) 亦用同法證之。

6. (1) $a=3, b=2$ 或 (2) $a=5, b=1$ 或 (3) $a=6, b=3$ 則次之式恆相等。試證明之。

a^3-b^3, $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $(a-b)^3+3ab(a-b)$, $(a+b)^3-3ab(a+b)-2b^3$。

第貳編

根原之法則

17. 名數量〔Concrete quantities〕 凡名數量。必以其同類單位之若干倍計算之。例如長14尺。卽長1尺之14倍。然如論財產。同一金額。而有收與付之不同。贏與絀之各異。論路之距離。於同一直線上。而有反對之兩方向。論時間。計某時以前之時。與某時以後之時。而有旣往將來之分別。若此類者。不遑枚舉。

故名數量有正反對兩種性質。解問題時。當從其量之性質。互用特別之符號表之。

18. 正及負數量 某數量不論其單位若何。而如 $+4$ 者所以示增加單位4倍之意。如 -4 者。所以示減少單位4倍之意。

若以 $+4$ 表某人之財產增加4圓。(以一圓爲單位)則以 -4 表。某人之財產減少4圓。或以 $+4$ 表某人之借款增加4圓。則以 -4 表某人之借款減少4圓。

其他若以 $+4$ 表某人贏利4圓。則以 -4 表某人虧本4圓。或以 $+4$ 表某人虧本4圓。則以 -4 表某人贏利4圓。

若就直線上之方向計之。以 $+4$ 表其方向上之距離4尺。則以 -4 表其反對方向上之距離4尺。

19. 性質之符號〔Signs of Affections〕 如前章所述。若從其反對之性質。別立新符號以表之。於計算時更覺煩冗。不若仍用 $+$ 及 $-$ 之符號爲簡便也。

故於代數學所用之 $+$ 及 $-$ 之符號。有二種意義焉。一如舊例。名曰加號減號。其效用與算術同。是謂運算之符號。一以區別數量之性質。表示其正反對之形狀。是謂性質之符號。

將性質之符號。置於數量之前。所以表示其數量之性質若何也。

性質之符號 $+$。常畧而不用。例 $+4$ 可畧記爲4。若夫5加6卽 $5+6$。此 $+$ 爲運算之符號。斷不可畧。否則將 $5+6$ 畧記爲56誤甚。

20. 正數量及負數量 於數量之前。置符號＋者。謂之正數量(Positive quantity)。於數量之前。置符號－者。謂之負數量(Negative quantity)。而＋及－謂之正號及負號。

〔註〕於代數學上之符號。雖有加減乘除之符號。及＝＜＞等種。而僅云符號時。大都指正號＋負號－而言。

故變代數式之符號時。卽將其式中之各項＋變爲－。－變爲＋而已。

例變 $a+b-c\times d$ 之符號。則得 $-a-b+c\times d$。

21. 絕對量〔Absolute Magnitude〕 僅計某量之大小。不論其符號之關係若何。此謂絕對量。卽無性量。

例如昇上4尺。及降下4尺。當示以＋4及－4。今僅曰4尺。卽謂之絕對量。

又如計年數而曰五年。此五年爲從今以前之五年乎。抑爲從今以後之五年乎。今但曰五年。卽謂之絕對量。又如計銀錢而曰五圓。此五圓旣非我所有。亦非人所有。無所謂贏絀。無所謂損益。此謂之絕對量。

譬如開議會時。有提出五圓之議案。吾輩與絕對的相爲反對。而曰議員之於此五圓。爲支出抑爲收入。二者必居一於此。否則僅曰五圓。是有名而無實也。故反對此議案者。非有反對收入五圓之意。亦非有反對支出五圓之意。此卽絕對二字之意義也。

加　法

22. 加法〔Addition〕 將二數量或諸數量合併而爲一。其法謂之加法。其結果謂之和(Sum)。

正數量示增。負數量示減。故加正數量。增其絕對量。加負數量。減其絕對量。

今舉一俗例。譬如火之始燃。加以薪。則火勢增。加以水。則火勢減。然則加正數量。與加負數量。其意亦猶是耳。

例如以＋4。加於＋6。則得 $+6+4$，卽 $+10$。以 -4 加於 $+10$。則得 $+10-4$。卽 $+6$。

故
$$+6+(+4)=+6+4。$$
$$+10+(-4)=+10-4。$$
又如以 $+b$ 加於 $+a$。得 $+a+b$。以 $-b$ 加於 $+a$。得 $+a-b$。卽
$$+a+(+b)=+a+b。$$
$$+a+(-b)=+a-b。$$

由是得次之規則。

〔規則〕將任何項加於某代數式時。可不變其符號。以列於某代數式之次。

用 a 及 b 之數值。可以求得 $a+b$。及 $a-b$ 之數值。而於代數學。不論其 a 及 b 之值如何。則僅作 $a+b$ 及 $a-b$。其意義卽已充足。至若 $5+3$ 及 $5-3$。可更充其意。卽爲 8 及 2。

23. 負數之結果 $a-b$ 其 b 若大於 a。則於算術上無從計算之。

例如 $a=3$ 及 $b=5$。則 $a-b$ 爲 $3-5$。而 3 本不能減 5。然減 5 同於減 3 之後又減 2 也。由此意以推之。則得
$$3-5=3-3-2=-2。$$

但此 -2 有二種見解。一以示 2 減於他代數式之意。一以示與 $+2$ 之性質相反對之意。若此 -2 爲最後之結果。則以後之見解爲合宜。

有時解問題時。所得負數之結果。與題理不能合者。例如計算某邑人口之數。若得負數之結果。則與人口之數不相合。解此問題時。其結果非但負數不能合理。卽分數亦不能合理。

減　法

24. 減法〔Subtraction〕減法之運算。與加法適相反。減數量時。正者反減之。負者反加之。故減正數量減其絕對量。減負數量加其絕對量。

例如從 $+10$ 減 $+4$。得 $+10-4$。卽 6。

又從 $+6$ 減 -4。得 $+6+4$。卽 10。

故 $+10-(+4)=+10-4=+6$。

$+6-(-4)=+6+4=+10$。

又依同理 $a-(+b)=a-b$。

$a-(-b)=a+b$。

由是得次之規則

〔規則〕將任何項減自某代數式時。可變其符號。以列於某代數式之次。

25. 正項及負項

以上文字所表之量。祇限於正數。然存此限制。殊多不便。此後所用文字。其所表之量。未必定爲正數。如前所述之$a+b$。其a, b假定爲正數量。此後所用之a, b。其所表之量爲正爲負。未可定也。卽任何文字。可表正或負之數量。學者當注意之。

惟文字雖可表正或負之數量而文字前置$+$者。未必果爲正數量。前置$-$者。未必果爲負數量。

例如$+a$。此a所表者。若爲$+4$。則$+(+4)=+4$。若爲-4。則$+(-4)=-4$。

然項之正負。則從外觀上判定之。其以$+$置於前者。稱爲正項(**Positive term**)。以$-$置於前者稱爲負項(**Negative term**)。

26. 加減之公式

定b爲正數量。證22及24章之結果如次。

$$\left.\begin{aligned} a+(+b) &= a+b \cdots\cdots(1)\\ a+(-b) &= a-b \cdots\cdots(2)\\ a-(+b) &= a-b \cdots\cdots(3)\\ a-(-b) &= a+b \cdots\cdots(4)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

於此公式。其b不但爲任何之正數量能合於理。卽b爲任何之負數量亦合於理。

若b爲負數等於$-c$。但c爲正整數。然

$$+b=+(-c)=-c。$$

$$-b=-(-c)=+c。$$

乃從(A)之四式中。以$-c$代其$+b$。以$+c$代其$-b$。則得

$$a+(-c)=a-c,$$

$$a+(+c)=a+c,$$

$$a-(-c)=a+c,$$

$$a-(+c)=a-c,$$

此卽b爲負數量所得之關係。其c爲任何之正數量。均能合理。故b爲負數量。亦能合理。

由是知(A)之公式。其b不論其爲正數量或負數量。皆能合理。

27. 定義壹 兩數量a及b之差。爲從第壹數量a減去第貳數量b所得之結果也。

例5與4之差。爲$5-4$。又4與5之差。爲$4-5$。

故代數差。(卽於代數學上所謂之兩數差)非同算術差(卽於算術上所謂之兩數差)從大數減小數也。如欲表示a與b之算術差。其a, b爲未定之值。無從辨別其大小。則當記爲$a\sim b$。而此$a\sim b$之$\sim$。與$-$判然不同。

此$a\sim b$。其意以爲a若大於b。則爲$a-b$。a若小於b。則爲$b-a$。非若代數差所得之$a-b$。無論a, b之值若何。早決定從a減b也。

定義貳 壹數量a比他數量b爲大。則$a-b$必爲正。由此定義。連次記$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$其各數比其前數爲大。又連次記$-1, -2, -3, -4, \ldots\ldots$。其各數比其前數爲小。

例-4必比-3爲小。何則。因$(-3)-(-4)=-3+4=1$。其所得爲正數故也。

由是如$7, 5, 0, -5, -7$等。可依大小之順序而列之。

例題

1. (1) 5及-4。 (2) -5及4。 (3) $5, -3$及-6。 (4) $-3, 4, -6$及5。求其各和。 〔解 $1, -1, -4, 0$〕

〔解〕(1) $5+(-4)=5-4=1$。

(4) $-3+4+(-6)+5=-3+4-6+5=0$。

2. (1)從-4減3。(2)於3減-4。(3)於$-b$減$-a$。〔答$-7, 7, -b+a$〕

〔解〕(1)$-4-3=-7$。(2)$3-(-4)=3+4=7$。

3. 有風雨表,第一日降下.01吋。第二日上昇.015吋。第三日又降下.01吋。問比初日昇降若干吋。〔答$-.005$吋〕

〔解〕$-.01+.015+(-.01)$吋$=.015-.02$吋$=-.005$吋。卽降下.005吋。

4 攝氏寒暑表原指10度。浸入冷水中。則降下20度。問指在何度。〔答-10度〕

〔解〕$10+(-20)=10-20=-10$。卽零度下10度。

5. $a=1, b=-2$,及$c=3$。則$a-b+c$及$-a+b-c$之值如何。〔答$6, -6$〕

〔解〕$a-b+c=1-(-2)+3=1+2+3=6$。

6. $a=1, b=-2, c=-1$。或$a=-2, b=-1, c=-3$。則$-a+b-c$之值如何。〔答$-2, 4$〕

7. $a=-3, b=-2, c=-1$。則$a-(-b)+(-c)$之值如何。〔答-4〕

〔解〕$a-(-b)+(-c)=a+b-c=(-3)+(-2)-(-1)=-4$。

8. $a=-2, b=-3, c=-5$。則$-a+(-b)-(-c)$之值如何。〔答0〕

9. $a=-1, b=-2, c=-3$。則$-(-a)+b-(-c)$之值如何。〔答-6〕

〔解〕$-(-a)+b-(-c)=a+b+c=(-1)+(-2)+(-3)=-6$。

乘法

28. 乘法〔**Multiplication**〕於算術中乘法最初之定義。而曰一數以他數乘之者。爲連次取其一數。其次數同於他數單位之倍數也。例如5以4乘。以其他數單位之倍數爲4。故取其一數至四次卽得。

然上之定義。僅合於整數。而不能合於分數。故玆不得不別立定義。使任何數之乘法。皆可援此定義以說明之。

定義 第一數以第二數乘。爲以第二數代其第二數所有之單位卽得。

例如5以4乘。其4之中所有之單位。爲$4=1+1+1+1$。

以5代其單位1。則爲$5\times4=5+5+5+5$。

又$\frac{5}{7}$以$\frac{3}{4}$乘,其$\frac{3}{4}$爲以單位1四等分之爲一分。而取其三分。卽

$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$。以$\frac{5}{7}$代其單位1。則以$\frac{5}{7}$四等分之。即$\frac{5}{7\times4}$爲一分。而取其三分。得

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{7\times4}+\frac{5}{7\times4}+\frac{5}{7\times4}=\frac{5\times3}{7\times4}。$$

又$(-5)\times4=(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=-5-5-5-5=-20$。

上之定義。其以負數乘者亦可通用。

例4以-5乘。-5即同於逐次減五回。

$$-5=-1-1-1-1-1。$$
$$4\times(-5)=-4-4-4-4-4=-20。$$

又-5以-4乘。以

$$-4=-1-1-1-1。故$$
$$\begin{aligned}(-5)\times(-4)&=-(-5)-(-5)-(-5)-(-5)\\&=+5+5+5+5 \qquad (由 26 章)\\&=+20。\end{aligned}$$

故此定義。對於任何數。皆能合用。

因得次之法則。

〔法則〕求兩數量之積。先以兩數之絕對值相乘。次定其符號。若兩數量俱爲正或俱爲負。則其積爲正。置符號$+$於積之前以表之。若兩數量一爲正一爲負。則其積爲負。置符號$-$於積之前以表之。

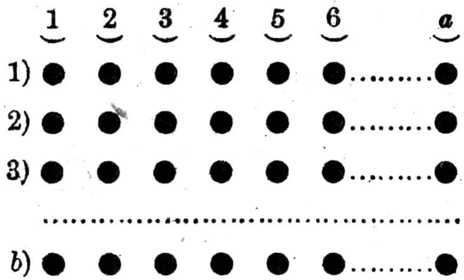
例

$$\left.\begin{aligned}(+a)\times(+b)&=+ab\ldots\ldots(1)\\(-a)\times(-b)&=+ab\ldots\ldots(2)\\(+a)\times(-b)&=-ab\ldots\ldots(3)\\(-a)\times(+b)&=-ab\ldots\ldots(4)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

此法則。所以決定積之符號者。謂之符號之法則(Law of Signs)。此法則簡言之。則曰同號得$+$。異號得$-$ (Like signs give $+$ and unlike signs give $-$)。

29. 積之因子 不拘於次序如何。無論爲整數或分數。第壹數以第貳數乘。同於第貳數以第壹數乘。此於算術已證明之。其證法如次。

先取兩整數 a 及 b。用黑點●作圖以示之。



此圖中所示。橫曰列。縱曰行。每列有 a 個黑點。共有 b 列。每行有 b 個黑點。共有 a 行。

故此黑點之全數。從橫列計算之。爲有 a 個黑點之 b 倍。卽 $a\times b$ 從縱行計算之。爲有 b 個黑點之 a 倍。卽 $b\times a$。$\therefore a\times b=b\times a$。

若 a 及 b 爲分數。則由28章。

$$\frac{5}{7}\text{以}\frac{3}{4}\text{乘。爲}\frac{5\times3}{7\times4}\text{。又}\frac{3}{4}\text{以}\frac{5}{7}\text{乘。爲}\frac{3\times5}{4\times7}\text{。}$$

惟依上之整數證法。$5\times3=3\times5$。又 $7\times4=4\times7$。故 $\frac{5\times3}{7\times4}=\frac{3\times5}{4\times7}$。卽 $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$。

由是 $ab=ba$。已證得 a 及 b 凡爲正數者。無不合理。

然此法則。不獨對於正數。卽負數亦能合理。何則。依前章所述。而知兩數之積之絕對值。與符號不相關。卽 $+a\times-b$ 及 $-b\times a$。其絕對值 ab 及 ba 相等。故 $+a\times-b=-b\times a$。

如是 a 及 b 爲任何值。如次之公式皆能合理。

$$ab=ba\text{..................................}(1)$$

今試以 c 代前圖之黑點●

$$\begin{array}{lcccccc} & \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{4} & & \underbrace{a} \\ 1) & c & c & c & c & \ldots\ldots\ldots\ldots & c \\ 2) & c & c & c & c & \ldots\ldots\ldots\ldots & c \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ b) & c & c & c & c & \ldots\ldots\ldots\ldots & c \end{array}$$

卽 c 之全數。爲有 ab 個。故 $c\times(ab)$。

又以每列爲 c 之 a 倍。卽 $c\times a$。共有 b 列。故 $c\times a\times b$。

由是 $c\times a\times b=c\times(ab)$。

此對於 a, b, c 之任何值。皆能合理。與 $ab=ba$ 之法則同。故得次之公式。

$$a\times b\times c=a\times(b\times c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

前云積之因子不拘於次序如何。玆可引用 (1) (2) 兩公式以證明之如次。

$$\begin{aligned} abc&=a(bc) && \text{由 (2)} \\ &=a(cb) && \text{由 (1) } bc=cb \\ &=acb && \text{由 (2)} \end{aligned}$$

又 $$\begin{aligned} abc=a(bc)&=(bc)a && \text{由 (1)} \\ &=bca。 \end{aligned}$$

如是得次之公式。

$$abc=acb=bca=bac=cab=cba\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

30. 壹項式之積 旣知積之因子不拘於次序如何。由是可求得壹項式之積如次。

$$3a\times 4a=3\times 4\times a\times a=12a^2。$$

$$\begin{aligned}(-3a)\times(-4b)&=+3a\times 4b \qquad \text{(由 28 章)} \\ &=3\times 4\times a\times b=12ab。\end{aligned}$$

$$(ab)^2=ab\times ab=a\times a\times b\times b=a^2b^2。$$

$$(\sqrt{2}a)^2=\sqrt{2}a\times\sqrt{2}a=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times a\times a=2a^2。$$

積之因子。雖不拘於次序。而通例恆以數字係數置於前。文字則依其次序順列於後。

例如 $3ab=3ba=ba3=a3b$。而通例用 $3ab$。

31. **指數之法則**〔Index Law〕說明如次。

$a^2=aa,\quad a^3=aaa,\quad \therefore\ a^2\times a^3=aa\times aaa=a^5=a^{2+3}$。

又 $\qquad a^3\times a^4=aaa\times aaaa=a^7=a^{3+4}$。

及 $\qquad a^4\times a=aaaa\times a=a^5=a^{4+1}$。

〔法則〕由上例得兩個同文字方乘之積其指數等於兩因子指數之和。

凡方乘之指數。爲正整數者。此法則皆能合理。設兩個 a 之方乘爲 a^m 及 a^n。則

$a^m=aaa$……至 m 因子, $a^n=aaa$……至 n 因子,

$\therefore\ a^m\times a^n=$($aaa$…至 m 因子)×(aaa……至 n 因子)

$=aaaaa$……至$(m+n)$因子$=a^{m+n}$(由定義)

由是 m 及 n 爲任何正整數。卽得次之指數之法則。

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\qquad\text{(D)}$$

32. **平方根之符號** 由28章$(-a)\times(-a)=+a^2=(+a)\times(+a)$。反言之 a^2 爲 $-a$ 與 $-a$ 之積。或爲 $+a$ 與 $+a$ 之積。故 a^2 之平方根爲 $+a$ 或爲 $-a$。卽 $\sqrt{a^2}=\pm a$

此複號(Double Sign)$\pm$ 所以示 $+$ 或 $-$ 之兩意。

如是則任何兩代數式之平方根。必有二值。其值之絕對值相等。而符號相反。

例題

1. 試以 $-4b$ 乘 $2a$。以 $-a^3$ 乘 a^2。以 $-3ab^3$ 乘 $-2a^3b$。

〔答 $-8ab,\ -a^5,\ 6a^4b^4$〕

〔解〕 $2a\times -4b=-2a\times 4b=-2\times 4\times a\times b=-8ab$。

$a^2\times -a^3=-a^{2+3}$〔從(D)〕$=-a^5$

$-2a^3b\times -3ab^3=+2a^3b\times 3ab^3=6a^{3+1}b^{1+3}=6a^4b^4$。

2. $-2xy^2$ 乘 $-3y^2z$。$3ax^2y$ 乘 $-5a^2xy^2$。及 $3a^2bc^2x$ 乘 $12ab^2cx^3$。

〔答 $6xy^4z,\ -15a^3x^3y^3,\ 36a^3b^3c^3x^4$〕

3. $7a^4b^3c^2$ 乘 $-3a^3b^5c^7$。及 $-2ab^3x^5y^2$ 乘 $-4a^3b^2x^4y^6$。

〔答 $-21a^7b^8c^9$, $8a^4b^5x^9y^8$〕

4. 求 $(-a)^2$, $(-a)^3$, $(-a)^4$ 及 $(-a)^5$ 之值。 〔答 a^2, $-a^3$, a^4, $-a^5$〕

〔解〕$(-a)^2=-a\times-a=+a^2$。 $(-a)^3=(-a)^2(-a)=a^2\times-a=-a^3$。

$(-a)^4=(-a)^3(-a)=-a^3\times-a=+a^4$。

$(-a)^5=(-a)^4(-a)=a^4\times-a=-a^5$。

5. 求 $(-ab)^2$, $(a^2b)^4$ 及 $(-3ab^2c^3)^3$ 之值。 〔答 a^2b^2, a^8b^4, $-27a^3b^6c^9$〕

〔解〕本例之第三式之乘法如次。

$(-3ab^2c^3)^3=-3ab^2c^3\times-3ab^2c^3\times-3ab^2c^3=-27a^3b^6c^9$。

6. 證負數量之連次方乘。其號恆交互爲正負。

〔證〕$-a$ 之平方爲正。$-a$ 之立方。卽以 $-a$ 乘平方之正值。故爲負。$-a$ 之四方乘。卽以 $-a$ 乘 $-a$ 之立方。故爲正。以下同理。

7. $2a^2b$, $-3ab^2c^3$, 及 $-2a^2bx^3y^2$ 試各求其立方。

〔答 $8a^6b^3$, $-27a^3b^6c^9$, 及 $-8a^6b^3x^9y^6$〕

8. $(-a)^2\times(-b)^3$. $(-2ab^2)^3\times(-3a^2b)^3$, $(-3abc)^2\times(2a^2b)^3$ 求其各值。

〔答 $-a^2b^3$, $216a^9b^9$, $72a^8b^5c^2$〕

〔解〕$(-a)^2\times(-b)^3=+a^2\times-b^3=-a^2b^3$。

$(-2ab^2)^3\times(-3a^2b)^3=-8a^3b^6\times-27a^6b^3=216a^9b^9$。

$-(3abc)^2\times(2a^2b)^3=9a^2b^2c^2\times8a^6b^3=72a^8b^5c^2$。

9. $a=2$, $b=-1$, $c=-2$。求 $3abc-2a^2bc^3+4c^4$ 之值。 〔答 12〕

〔解〕原式 $=3\times2\times(-1)\times(-2)-2\times2^2\times(-1)\times(-2)^3+4\times(-2)^4$

$=3\times2\times1\times2-2\times4\times1\times8+4\times16=12-64+64=12$。

10. $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$, $d=-4$, 則 $2a^2bc-3b^2cd+4c^2da-5d^2ab$ 之值爲何。 〔答 -148〕

除　法

33. **除法〔Division〕** 其運算與乘法相反。設 $c\times b=a$。其 c 卽爲 b 除 a 時所得之結果。

故 b 除 a。卽求其何數以 b 乘之而能等於 a 也。

除法之運算與乘法相反。且乘法不拘於因子之次序。故連次以各數除。亦不拘於除數次序。

例 $a\div b\div c=a\div c\div b$

於29章中所證明者。知連次以兩數量乘之。同於以其積一次乘之。卽 $a\times b\times c=a\times(bc)$。反之。$a\div b\div c=a\div(b\times c)$。

但通例 $a\div(b\times c)$ 記爲 $a\div bc$。

卽連次以兩數量除。同於以其積一次除之也。

乘除互用時。其乘數與除數亦不拘於次序。

卽 $a\times b\div c=a\div c\times b$。

何則以 $a=a\div c\times c,$

$$\therefore a\times b=a\div c\times c\times b=a\div c\times b\times c \qquad (29章)$$

兩邊以 c 除之。 $a\times b\div c=a\div c\times b$。

由是 a, b 之積。以 c 除。與 c 除 a 後以 b 乘。其結果相同。

34. 餘論 除法之運算。往往書除數於被除數之下。而中間記以橫線。

例 $\dfrac{a}{b}=a\div b$。 有時 $\dfrac{a}{b}$ 或記爲 a/b。從 $a\div b$ 得分數 $\dfrac{a}{b}$。其 a 爲分子。b 爲分母。

又 $\dfrac{1}{c}=1\div c$。則 $\dfrac{1}{c}\times c=1\div c\times c=1$。

$a\times\dfrac{1}{c}\times c=a\times(\dfrac{1}{c}\times c)=a\times 1=a,$ 此兩邊以 c 除之。爲 $a\times\dfrac{1}{c}=a\div c$。

故以任何數 c 除同於以 $\dfrac{1}{c}$ 乘。

由是 $a\times b\div c=a\div c\times b$ 可記之如次。

$$a\times b\times\frac{1}{c}=a\times\frac{1}{c}\times b \text{ 卽與29章}(C)\text{同。}$$

35. 指數之除法 $a^3\times a^2=a^5$, 及 $a^7\times a^3=a^{10}$。此法則已述明於前。反之則爲 $a^5\div a^3=a^2$, $a^{10}\div a^7=a^3$ 由此推之。若 m 及 n 爲正整數。而 $m>n$。則 $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

何則。由31章 $a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}=a^m$。兩邊以 a^n 除之 $a^{m-n}=a^m\div a^n$。

例題十三

解以下之各方程式。

1. $x+y=x^2-y^2=23$。 〔答 $x=12$, $y=11$〕。

〔解〕以 $x+y=23$。除 $x^2-y^2=23$。則 $x-y=1$。

2. $x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1$。

〔解〕$y=2x-1$。 $\therefore\ x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1$。

即 $15x^2-23x+8=0$。即 $(x-1)(15x-8)=0$。

$\therefore\ x=1,\ y=1$, 或 $x=\dfrac{8}{15}$, $y=\dfrac{1}{15}$。

3. $x^2+xy=12,\ xy-2y^2=1$。

〔解〕$(x^2+xy)-12(xy-2y^2)=12-12$。即 $x^2-11xy+24y^2=0$。

即 $(x-3y)(x-8y)=0$。 $\therefore\ x=3y$, 或 $8y$。

若 $x=3y$。則 $(3y)^2+3y^2=12$。 $\therefore\ y=\pm1,\ x=\pm3$。

若 $x=8y$。則 $(8y^2)^2+8y^2=12$。 $\therefore\ y=\pm\sqrt{\dfrac{1}{6}},\ x=\pm8\sqrt{\dfrac{1}{6}}$。

4. $x^2+2y^2=22,\ 3y^2-xy-x^2=17$。

〔答 ±2, ±3, 或 $\pm\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$, $\mp\dfrac{13}{9}\sqrt{3}$〕。

5. $x-y=5,\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{84}$。

〔解〕變第二式。爲 $x-y=\dfrac{5}{84}xy$。 $\therefore$ 從第一得 $5=\dfrac{5}{84}xy$。

即 $xy=84,\ (x-y)^2+4xy=5^2+4\times84$。即 $x+y=\pm19$。

從 $x+y=\pm19$。及 $x-y=5$。得 $x=12,\ y=7$, 或 $x=-7,\ y=-12$。

6. $x+y=a+b,\ \dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1$。 〔答 a, b 或 $2a-b, 2b-a$〕。

〔解〕由視察得 $x=a,\ y=b$, 兩方程式爲適合。

又去第二式之分母而括之。則 $(a-b)(x-y)+ay=a^2+b^2-ab$。

從第一式得 $y=a+b-x$。

37. 根原之公式 凡屬於壹項式所有代數學根原之法則如前諸章所示之(A), (B), (C), (D)諸公式是也。茲復彙集之如次。

$$\left.\begin{array}{l}+(+a)=+a\\+(-a)=-a\\-(+a)=-a\\-(-a)=+a\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\text{(A)}\qquad\left.\begin{array}{l}(+a)(+b)=+ab\\(+a)(-b)=-ab\\(-a)(+b)=-ab\\(-a)(-b)=+ab\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

$$abc=cba=cab=\cdots\cdots\cdots\text{(C)}\qquad a^m\div a^n=a^{m-n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(D)}$$

如上所示之公式。於(A), (B), (C)已證得 a, b, c 爲任何數。均能合理。於(D)證得 m 及 n 爲正整數爲合理。

多項式

38. 多項式〔Multinominal Expression〕以上所述皆一項式。至是進論多項式。

先記 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots$ 爲任何之多項式。但 $a, b, c\cdots\cdots\cdots$ 爲正或負之任何數。

例多項式 $3x^2y-\dfrac{5}{2}xy^2-7xyz$。由(A)可記爲

$(3x^2y)+(-\dfrac{5}{2}xy^2)+(-7xyz)$。

以 a 代 $3x^2y$。以 b 代 $-\dfrac{5}{2}xy^2$。以 c 代 $-7xyz$。則上之多項式卽爲 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots$。

故以某代數式證明某定理時。皆可記其式爲 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots$ 以證之。但 $a, b, c, \cdots\cdots$ 爲正或負之任何數。

39. 互換法則〔Commutative Law〕二或二以上諸代數量(卽正量或負量)之和。不論其相加之次序如何。其結果恆同。此可由加法之意義說明之。

例如某人有若干項之存款及借款。欲計其總數。則於若干項內。不論以何項爲先。何項爲後。其求得之總數。恆相等。

故 $\qquad a+b+c=c+a+b=b+c+a=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(E)}$

所示之(C)及(E)。其法則。謂之互換法則。卽加法及乘法之運算。不拘於其次序如何也。

40. 餘論 既知加法之運算。不拘於次序。

故 $$a+(b+c+d+\ldots\ldots)=(b+c+d+\ldots\ldots)+a \text{〔由(E)〕}$$
$$=b+c+d+\ldots\ldots+a$$
$$=a+b+c+d+\ldots\ldots \text{〔由(E)〕}$$

由是知將代數式之全項一併加之。與將其各項分別加之。其結果相同。

代數式 $+a-b+c-d$ 可記爲 $+a+(-b)+c+(-b)$ 之形。

故 $$+[+a-b+c-d]=+[+a+(-b)+c+(-d)]。$$

因是將代數式之各項分別相加時。其置於項之前所含之符號。須記憶之。

凡所謂項者。其於項之前。必含有符號者也。

41. 多項式之減法 減法之運算與加法相反。於加法將代數式之全項一併加之。與將其各項分別加之。其結果同。由同理而知將代數式之全項一併減之。與將其各項分別減之。其結果亦同。即 $a-(b+c+d+\ldots\ldots)=a-b-c-d-\ldots\ldots$。

42. 配分法則〔Distributive Law〕 c 爲正整數。而 a 及 b 爲任何數。可證得 $(a+b)c=ac+bc$。

$$(a+b)c=(a+b)+(a+b)+(a+b)+\ldots\ldots\ldots\text{至 } c \text{ 項(乘法之定義)}$$
$$=a+b+a+b+a+b+\ldots\ldots\ldots(40\text{ 章})$$
$$=a+a+a+\ldots\ldots\text{至 } c \text{ 項 } +b+b+b+\ldots\ldots\text{至 } c \text{ 項}$$
$$=ac+bc。$$

由是 c 爲正整數。證得 $(a+b)c=ac+bc$ ……………………………(F)

除法與乘法相反。故 d 爲正整數。

$$(a+b)\div d=a\div d+b\div d。$$

別證之。由 (F) $(ac+bc)\div c=a+b=ac\div c+bc\div c$。

由是 $(a+b)\times c\div d=\{(a+b)\times c\}\div d$。

$$=\{ac+bc\}\div d=ac\div d+bc\div d。$$

即 $$(a+b)\times\frac{c}{d}=a\times\frac{c}{d}+b\times\frac{c}{d}。$$

由此式而知公式(F)其 c 爲分數。亦能合理。然 c 爲任何值。皆能合理。設 c 爲負數。證明如次。

$$(a+b)(-c)=-(a+b)c=-ac-bc=a(-c)+b(-c)。$$

乃證得公式(F)其 a, b, c 爲任何值。皆能合理。

故兩代數量之和以第三數乘。等於各代數量以第三數乘所得積之和。是謂配分法則。

43. 除法之配分法則 此於前章已爲證明。茲別爲證之如次。

$$(a+b)\div c=(a+b)\times\frac{1}{c}=a\times\frac{1}{c}+b\times\frac{1}{c}$$
$$=a\div c+b\div c。$$

故兩代數量之和以第三數除。等於各代數量以第三數除所得商之和。

44. 結合法則(Associative Law) 由40章之理。而知

$$a+b+c+d+e+\ldots\ldots=(a+b)+c+(d+e)+\ldots\ldots$$
$$=a+(b+c+d)+e+\ldots$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots。$$

卽凡代數式。可任取若干項集合之。

又由20章之理。而知

$$abcde\ldots\ldots=a(bc)(de)\ldots\ldots=a(bcd)e=\ldots\ldots。$$

卽凡積可任取若干因子集合之。

45. 注意 此編所示者。爲代數學根原之法則。而於次編。乃推廣之。以示此法之應用。

第參編

加法，減法，括弧用法

加　法

46. 加法〔Addition〕凡加任意之項於代數式。其項之符號不變。又取代數式之全體相加與次第分加其結果相同。此在前編已詳述之。由是得加法之法則如下。

〔法則〕凡加二個或二個以上之代數式。其各項之號不變。而可任意連記之。

例如求 $a-2b+3c$ 及 $-4d-5c+6f$ 之和。其各符號不變。惟記爲 $a-2b+3c-4d-5c+6f$。

47. 運算 如前法諸式相加之後。遇有同類項。須用加或減。化爲簡式。

二同類項之號同者。先求其兩係數之和。乃記以公用之號。以公有之文字。附於係數後。

例如 $2a$ 及 $5a$ 連次相加。與一次加入 $7a$ 同。卽 $+2a+5a=+7a$。

又以 $2a$ 及 $5a$ 連次相減。與一次減去 $7a$ 同。卽 $-2a-5a=-7a$。

若二同類項之號異者。先求其兩係數之差。乃以大數之號爲號。以公有之文字。附於係數後。

例如 $+5a-3a=+2a+3a-3a=+2a$

又 $+3a-5a=+3a-3a-2a=-2a$。

故有種種之同類項者。可依前法而併爲一項。

〔第一例〕 $2a+5b$ 加 $a-6b$。則

其和 $=2a+5b+a-6b=2a+a+5b-6b=3a-b$。

〔第二例〕 $3a^2-5ab+7b^2$ 加 $-4a^2-2ab+3b^2$ 加 $2a^2+5ab-8b^2$。則其和 $=3a^2-5ab+7b^2-4a^2-2ab+3b^2+2a^2+5ab-8b^2$。其 $3a^2$，$-4a^2$，

$+2a^2$。可用心算併爲 $+a^2$。由同理得 $-2ab$ 及 $+2b^2$。

故所求之和 $=a^2-2ab+2b^2$。

初學者可將同類項。列於一行加之。

例如
$$\begin{array}{r} 3a^2-5ab+7b^2 \\ -4a^2-2ab+3b^2 \\ 2a^2+5ab-8b^2 \\ \hline a^2-2ab+2b^2 \end{array}$$

減　法

48. 減法〔Subtraction〕 凡減任意之項於代數式。須變其項之符號。又取代數式之全體相減。與次第分減其結果相同。在前編亦既詳言之。因得下之法則。

〔法則〕 凡減去任何代數式。須變其各項之號。而列於原式之次。

例如從 $2a-3b-4c$。減去 $a-2b+3c$。則變其 $a-2b+3c$ 式各項之符號。而列於 $2a-3b-4c$ 之次。

即 $2a-3b-4c-a+2b-3c=a-b-7c$。即所求之差。

49. 運算 置減式於被減式之下。將同類項列於一行而求其差。惟置時減式之符號仍其舊。至運算時。可反視其各號。而如加法施之。依前章例。列爲
$$\begin{array}{r} 2a-3b-4c \\ a-2b+3c \\ \hline a-b-7c \end{array}$$

減式之 a。心中可記爲 $-a$。$-2b$ 可記爲 $+2b$。$+3c$ 可記爲 $-3c$。

又從 $a^2-5ab+2ac-2b^2$ 減去 $3ab-5ac+c^2$。
$$\begin{array}{l} a^2-5ab+2ac-2b^2 \\ \quad\;\; 3ab-5ac \qquad\quad +c^2 \\ \hline a^2-8ab+7ac-2b^2-c^2 \end{array}$$
即所求之差。

括　弧　用　法

50. 括弧〔Brackets〕 一全代數式相加。用括弧括之。而於其

前置＋號。然如46章所云。凡加任何代數式。其各項之號不變。而可連記之。由是知括弧之前置＋者。可以逕去其括弧。

例如 $+(2a-5b+7c)=+2a-5b+7c$。故代數式中之若干項。可任意用括弧括之。而於其前置＋。如

$$3a-2b+4c-d+e-f=3a-2b+(4c-d+e-f)=3a+(-2b+4c)-d+(e-f)$$

括弧內首項之號爲＋者。略而不記可也。

51. 括弧之減法 減一全代數式者。其代數式可以括弧括之。於其前置－。依48章所云。凡減任何代數式。則變其各項之號。而列於原式之次。由是知括弧之前置－者。欲去其括弧。必盡變其括弧內各項之號。

例如 $a-(2b-c+d)=a-2b+c-d$。

故有任意之代數式若干項。欲以括弧括之。而於其前置－者。必變其所括各項之號。

例如 $a-2b+3c-d=a-(2b-3c+d)=a-2b-(-3c+d)$。

52. 括弧解法 有時括弧內又有括弧。則須避諸括弧之混雜。而用種種相異之形。

例如 $a-[2b-\{3c-(2d-e)\}]$。

此式爲從 $2b$ 減去 $\{\ \}$ 內之式。其結果再從 a 減去之。而在 $\{\ \}$ 內之式。又爲從 $2d$ 減去 e。其結果再從 $3c$ 減去者也。

若遇此數種之括弧。欲解去之。可依50及51兩章之法則。例如下。

$$a-[b+\{c-(d-e)\}]=a-[b+\{c-d+e\}]$$
$$=a-[b+c-d+e]=a-b-c+d-e。$$

例題一

試加下列之各式。

1. $3x-5y$, $5x-2y$, 及 $7y-4x$。〔答 $4x$〕

〔解〕 $3x-5y+5x-2y+7y-4x=3x+5x-4x-5y-2y+7y=4x$。

$$\begin{array}{rr} \text{或}\quad & 3x-5y \\ & 5x-2y \\ & \underline{-4x+7y} \\ & 4x \end{array}$$

2. $3x-5y+2z,\ 5x-7y-5z$, 及 $6y-z-10x$。

〔答 $-2x-6y-4z$〕

3. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c,\ \frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}a$, 及 $\frac{1}{2}c-\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$。

〔答 $\frac{5}{12}a+\frac{5}{12}b+\frac{5}{12}c$〕

4. $a^3-a^2+a,\ a^2-a+1$, 及 a^4-a^3-1。 〔答 a^4〕

5. $x^2-5xy-7y^2$ 及 $3y^2+4xy-x^2$。 〔答 $-xy-4y^2$〕

6. $m^2-3mn+2n^2,\ 3n^2-m^2$, 及 $5mn-3n^2+2m^2$。

〔答 $2m^2+2mn+2n^2$〕

7. $3a^2-2ac-2ab,\ 2b^2+3bc+3ab$, 及 $c^2-2ac-2bc$。

〔答 $3a^2+2b^2+c^2+ab-4ac+bc$〕

8. $\frac{3}{2}a^2b-5ab^2+7b^3,\ 2a^3-\frac{1}{2}a^2b+5ab^2$, 及 $3b^3-2a^3$。

〔答 a^2b+10b^3〕

9. 試從 $a+b-2c$ 減 $3a-4b+2c$。

〔解〕 $a+b-2c-3a+4b-2c$

$=a-3a+b+4b-2c-2c$

$=-2a+5b-4c$。〔答〕

或
$$\begin{array}{r} a+b-2c \\ 3a-4b+2c \\ \hline -2a+5b-4c \end{array}$$

10. 試從 $c-\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b$ 減 $\frac{a}{2}+\frac{3}{2}b-\frac{5}{3}c$。 〔答 $-a-\frac{13}{6}b+\frac{8}{3}c$〕

11. 試從 $4x^2-5x-7$ 減 $3x^2-4x+2$。 〔答 x^2-x-9〕

12. 試從 $5b^4-3ab^3+4a^2b^2$ 減 $5a^4-3a^3b+4a^2b^2$。

〔答 $-5a^4+3a^3b-3ab^3+5b^4$〕

13. 求 $-3x^2-5xy+4y^2$ 及 $-5x^2+2xy-3y^2$ 之差。

〔解〕 $-3x^2-5xy+4y^2-(-5x^2+2xy-3y^2)$

$=-3x^2-5xy+4y^2+5x^2-2xy+3y^2=2x^2-7xy+7y^2$。〔答〕

14. 加何數於 $2bc-3ca-4ab$ 其和爲 $bc+ca$。

〔解〕 $bc+ca-(2bc-3ca-4ab)=bc+ca-2bc+3ca+4ab$

$=4ab-bc+4ca$。〔答〕

15. 加何數於 $3a^2-2b^2+3c^2$ 其和爲 $bc+ca+ab$。

〔答 $-3a^2+2b^2-3c^2+bc+ca+ab$〕

16. $3x-\{2y+(5x-\overline{3x+y})\}$ 化爲簡式。

〔解〕原式 $=3x-\{2y+(5x-3x-y)\}=3x-\{2y+5x-3x-y\}$

$=3x-2y-5x+3x+y=x-y$。〔答〕

又此解式之簡法如下。

原式 $=3x-\{2y+(5x-3x-y)\}=3x-\{2y+(2x-y)\}$

$=3x-\{2y+2x-y\}=3x-\{2x+y\}=3x-2x-y$

$=x-y$。

17. $x-[3y+\{3z-(x-2y)\}+2x]$ 化爲簡式。

〔解〕原式 $=x-[3y+\{3z-x+2y\}+2x]=x-[3y+3z-x+2y+2x]$

$=x-[x+5y+3z]=x-x-5y-3z=-5y-3z$。〔答〕

18. $y-2x-\{z-x-(y-x+z)\}$ 化爲簡式。

〔解〕原式 $=y-2x-\{z-x-y+x-z\}=y-2x-\{-y\}$

$=y-2x+y=-2x+2y$。〔答〕

19. $a-[a-b-\{a-b+c-(a-b+c-d)\}]$ 化爲簡式。

〔解〕原式 $=a-[a-b-\{a-b+c-a+b-c+d\}]$

$=a-[a-b-(+d)]=a-[a-b-d]$

$=a-a+b+d=b+d$。〔答〕

20 $2x-[3x-9y-\{2x-3y-(x+5y)\}]$ 化爲簡式。 〔答 y〕

21 $a-[3a+c-\{4a-(3b-c)+3b\}-2a]$ 化爲簡式。

〔解〕原式 $=a-[3a+c-\{4a-3b+c+3b\}-2a]$

$=a-[3a+c-\{4a+c\}-2a]=a-[3a+c-4a-c-2a]$

$=a-[-3a]=a+3a=4a$。〔答〕

22. 從 $y-\{2x-(z-y)\}$ 減 $x-(3y-z)$。

〔解〕所求之差 $=y-\{2x-(z-y)\}-\{x-(3y-z)\}$

$=y-\{2x-z+y\}-\{x-3y+z\}$

$=y-2x+z-y-x+3y-z=-3x+3y$。〔答〕

23. 從 $2n-(3n-\overline{2m-n})$ 減 $2m-(3m-\overline{2n-m})$。

〔解〕所求之差爲 $2n-(3n-\overline{2m-n})-\{2m-(3m-\overline{2n-m})\}$

$=2n-(3n-2m+n)-\{2m-(3m-2n+m)\}=4m-4n$。〔答〕

24. 設 $a=-1, b=-2, c=-3$。試求

$\{a-(b-c)\}^2+\{b-(c-a)\}^2+\{c-(a-b)\}^2$ 之值。

〔解〕原式 $=\{a-b+c\}^2+\{b-c+a\}^2+\{c-a+b\}^2$

$=\{-1-(-2)+(-3)\}^2+\{-2-(-3)+(-1)\}^2+\{-3-(-1)+(-2)\}^2$

$=\{-1+2-3\}^2+\{-2+3-1\}^2+\{-3+1-2\}^2$

$=\{-2\}^2+\{0\}^2+\{-4\}^2=4+0+16=20$。〔答〕

25. 設 $a=1, b=2, c=-3$。試求

$\{a^2-(b-c)^2\}-\{b^2-(c-a)^2\}-\{c^2-(a-b)^2\}$ 之值。

〔解〕原式 $=a^2-(b-c)^2-b^2+(c-a)^2-c^2+(a-b)^2$

$=1^2-(2+3)^2-2^2+(-3-1)^2-(-3)^2+(1-2)^2$

$=1-5^2-4+(-4)^2-9+(-1)^2$

$=1-25-4+16-9+1=-20$。〔答〕

第肆編

乘法

53. 一項式之積 於第二編所示之結果。順序之如下。

(1) 積之因子。其次序可以任意更換。

(2) 兩數量積之符號。如兩數量之號。同者爲正。異者爲負。

(3) 同數量兩方乘積之指數。等於其因子指數之和。

由是可依(1), (2), (3)三例求一項式之積如下。

$$(-2a^2bc^3)\times(-3a^3b^2c)=+2a^2bc^3\times 3a^3b^2c \quad \text{依 (2) 例}$$
$$=2\times 3\times a^2a^3bb^2c^3c \quad \text{依 (1) 例}$$
$$=6a^5b^3c^4 \quad \text{依 (3) 例}$$

又 $(-3a^2b)(-5ab^3)(-7a^4b^2)=\{+3a^2b\cdot 5ab^3\}(-7a^4b^2)$

$=-3.5.7.a^2.a.a^4bb^3b^2=-105a^7b^6$。

54. 多項式及一項式之積 依42章所云任意兩代數量之和。乘第三數量之積。等於兩代數量各乘第三數量之積之和。

例如 $(x+y)z=xz+yz$……………………………(1)

(1) 式中之 x, y 及 z 任爲何數。皆合於理。故以 $a+b$ 代 x 用於式卽得

$$\{(a+b)+y\}z=(a+b)z+yz=az+bz+yz$$
$$\therefore (a+b+y)z=az+bz+yz$$

同法得 $(a+b+c+d+\ldots\ldots)z=az+bz+cz+dz+\ldots\ldots$

但 $a+b+c+d+\ldots\ldots$ 爲任何多項式(見38章)。

〔法則〕多項式及一項式之積。等於多項式之各項。分乘其一項之積之和。

55. 兩多項式之積 先示乘法之通例。卽兩多項式之乘法如下。

求 $(a+b+c+\ldots\ldots)(x+y+z+\ldots\ldots)$ 之積。依38章。

$x+y+z+\ldots\ldots$ 以 m 代之。由前章得

$$(a+b+c+\cdots\cdots)(x+y+z+\cdots\cdots)=(a+b+c+\cdots\cdots)m$$
$$=am+bm+cm+\cdots=ma+mb+mc+\cdots\cdots$$
$$=(x+y+z+\cdots)a+(x+y+z+\cdots)b+(x+y+z+\cdots)c+\cdots\cdots$$
$$=ax+ay+az+\cdots+bx+by+bz+\cdots+cx+cy+cz+\cdots\cdots$$

〔法則〕由是兩多項式之積。等於兩式中所有各項相乘積之和。

例如 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。

又 $(3a+5b)(2a+3b)$
$$=(3a)(2a)+(3a)(3b)+(5b)(2a)+(5b)(3b)$$
$$=6a^2+9ab+10ab+15b^2=6a^2+19ab+15b^2。$$

又 $(a-b)(c-d)=\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$
$$=ac+a(-d)+(-b)c+(-b)(-d)=ac-ad-bc+bd。$$

兩多項式之乘法。須留意各式中各項之符號(視40章)。

56. 乘法之三公式 以下示以最要之例。名爲三公式。

(1) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb$
$$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2。$$

〔法則〕由是任意兩數量和之平方。等於其各平方之和。加兩數量相乘積之二倍。

(2) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=aa+a(-b)+(-b)a+(-b)(-b)$
$$\therefore (a-b)^2=a^2-2ab+b^2。$$

〔法則〕由是任意兩數量差之平方。等於其各平方之和。減兩數量相乘積之二倍。

(3) $(a+b)(a-b)=aa+a(-b)+ba+b(-b)$
$$\therefore (a+b)(a-b)=a^2-b^2。$$

〔法則〕由是任意兩數量和與差之積。等於兩數量平方之差。

由此三公式。又得最要之公式如下。

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$
$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

此兩公式其知之與否。足以驗其學力之淺深。

例如 A.P. 之初項爲5。公差爲4，則其第10項 $=5+(10-1)4=41$。及第30項 $=5+(30-1)4=121$。

221. 知等差級數之任意二項 則其級數卽能決定。例如第 m 項爲 α。第 n 項爲 β。則設 a 爲初項。d 爲公差。故

$$a+(m-1)d=\alpha,\qquad a+(n-1)d=\beta。$$

於此兩方程式 a 及 d 之値。可以 α,β 之項表之。

例如 A.P. 之第7項15及第21項22。求第10項。

a 爲初項。d 爲公差。則

$$a+6d=15,\qquad a+20d=22。$$

由是 $d=\frac{1}{2}$ 及 $a=12$。 $\therefore$ 第10項 $=12+9\times\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$。

222. 等差中項 三數量爲等差級數。則其中數謂爲他兩數之等差中項 (Arithmetic Mean)。

如 $a, b, c,$ 爲 A.P. 則依定義

$$b-a=c-b。\qquad \therefore\quad b=\frac{1}{2}(a+c)。$$

故兩數量間之等差中項。等於其兩數量之和之半。

諸數量爲 A.P. 則其中間之諸數量。謂爲兩外項之等差諸中項。

例如 7, 9, 11, 13, 15 之五數。其 9, 11, 13 稱爲7及15之等差三中項。

凡已知兩數量之間。可插入若干之等差中項。

例如 a 及 b 爲已知兩數量。今欲插入 n 項。則 a, b 二項與其間插入之 n 項。共得 $n+2$ 項之等差級數。a 爲其初項。b 爲其末項卽第 $n+2$ 項。

由是設 d 爲公差。則 $b=a+(n+2-1)d$。 $\therefore\quad d=\frac{b-a}{n+1}$。

卽此級數爲 $a,\ a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1}\ \cdots\cdots\cdots$

故所求之等差中項。爲

$$a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1},\cdots\cdots\cdots a+n\frac{b-a}{n+1}。$$

同法以同文字之最低指數置於左。順次而置其高次於右。謂爲該文字之遞昇方乘〔Ascending Powers〕。

例如前式$a^3+a^2b+ab^2+b^3$。爲b之遞昇方乘。

如有$a^3-ab^2+6a^2b-b^3$之不整列式。依a之遞降方乘整列之。爲$a^3+6a^2b-ab^2-b^3$。依a之遞昇方乘整列之。爲$-b^3-ab^2+6a^2b+a^3$。

59. 注意 代數式所以欲整列爲遞降。或遞昇方乘者。以便於求兩多項式之積。如**57**章。蓋兩式不整列。則其積之同類項不能相配於一縱行。

例如

$$\begin{array}{r}
6a-3a^2+7\\
\underline{2+8a^2+a}\\
12a-6a^2+14\\
+48a^3-24a^4+56a^2\\
\underline{+6a^2-3a^3+7a}\\
19a+56a^2+45a^3+14-24a^4
\end{array}$$

如此求其積則不合法。若兩式皆整列於遞降方乘。則得

$$\begin{array}{r}
-3a^2+6a+7\\
\underline{8a^2+a+2}\\
-24a^4+48a^3+56a^2\\
-3a^3+6a^2+7a\\
\underline{-6a^2+12a+14}\\
-24a^4+45a^3+56a^2+19a+14
\end{array}$$

60. 定義 凡n個文字之積所成之項。謂之n乘元〔Dimensions〕或云n次〔Degree〕項。

例如$3abc$爲三乘元。即三次項。$5a^3b^2c$爲$5aaabbc$爲六乘元。即六次項也。

故一項之次數。爲其因子指數之和。

乘元專指文字因子。不指數字。例如$5ab$則a,b爲乘元。而$5,a,b$爲因子。

稱某項或某代數式之次數。有時但指其中之特別一個。或數個文字之方乘而言。

例如ax^2+bx+c之第一項爲三次。第二項爲二次。第三項爲一次。然若專指x言。則謂爲x之二次式。因(x^2即xx)故也。

又$ax^2y+bxy+cx^2$謂爲x之二次式。或謂爲x, y之三次式。因以第一項之x, y爲三次故也。

若是者。稱代數式之次數。卽指特別文字之最高次。

又某代數式。特別文字爲x。其不函x之項。謂爲x之無關係項。例如ax^2+bx+c。其c卽x之無關係項。

等次項〔Homogeneous〕代數式各項之乘元。其次數相等者。稱此代數式爲等次式。

例如$a^3+3a^2b-5b^3$之各項。皆爲三次。故稱等次式。

又$ax^2+bxy+cy)$。爲x及y二次之等次式。

又如$ax^2+bcxy+d^3y^2$。雖各項不等次。而指x及y言。亦爲二次之等次式。

61. 兩等次式之積 亦必等次何也。兩多項式之積。爲其兩式各項積之總合。如(55章)。故兩式之各項。各自等次。則其各項之積。必爲兩式中各一項次數之和。

例如$a^3+a^2b+b^3$。以a^2-ab+b^2乘之。其積爲$a^5+2a^2b^3-ab^4+b^5$。卽五次之等次式。蓋因被乘式之各項三次。乘乘式之各項二次。故積之各項爲三次與二次之和。卽五次。

兩等次式之積。若不等次。其有誤可知。

62. 餘論 兩代數式之積。其特別一個最高次之項。必爲其兩式中各最高次之項之積。又其積之同文字之最低次項。必爲其兩式中各最低次之項之積。凡此皆當注意。

故兩代數式中。其特別文字之最高次。及最低次項。祇有一項。則積內同文字之最高次。及最低次項。亦祇有一項。

例如61章。兩代數式中其a之爲最高及最低次者。祇有一項。故積內a之最高次a^5及最低次b^5。亦祇有一項也。

63. 分離係數〔Detached Coefficients〕代數式之簡畧乘法。可僅以兩式之係數相乘。謂之分離係數法。

例如 $3x^2-x+2$。以 $3x^2+2x-2$ 乘之。

依 x 之遞降方乘。順次記其係數。卽

$$\begin{array}{r}
3-1+2\\
\underline{3+2-2}\\
9-3+6\\
+6-2+4\\
\underline{-6+2-4}\\
9+3-2+6-4
\end{array}$$

兩式內 x 之最高次。爲 x^2 及 x^2。故積之最高次爲 x^4。依 x^4 而順次記 x 之方乘。卽

$9x^4+3x^3-2x^2+6x-4$。爲所求之積。若方乘之某項缺者。則補以0。

例如 $x^4-2x+x-3$。以 x^4+x^3-x-3 乘之。被乘式缺 x^3。乘式缺 x^2。故各補以0。

$$\begin{array}{l}
1+0-2+1-3\\
\underline{1+1+0-1-3}\\
1+0-2+1-3\\
\quad 1+0-2+1-3\\
\qquad\qquad -1-0+2-1+3 \text{……此項次於0項。故比}\\
\qquad\qquad\quad\ \underline{-3-0+6-3+9} \qquad\qquad \text{上列右二位。}\\
1+1-2-2-5-1+5+0+9
\end{array}$$

卽 $x^8+x^7-2x^6-2x^5-5x^4-x^3+5x^2+9$。卽積。

凡等次式之積函二個文字者。亦可依分離係數法求之。

例如 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。以 $a^2-2ab+b^2$ 乘之。則可以 $1-2+1$ 乘 $1-3+3-1$。詳於例題二。

64. 公式用法 56章所示之三公式。

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{…………………………}(1)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \text{…………………………}(2)$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \text{…………………………}(3)$$

此公式爲施乘法者所必需。

此公式中之 a 及 b 任爲何數。皆合於理。

今於(1)式之b用$-b$代之。則得

$$\{a+(-b)\}^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2$$

即$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$即從(1)式得(2)式。又於(3)式之b用$\sqrt{2}$代之。則得

$$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})=a^2-(\sqrt{2})^2=a^2-2。$$

用不盡根。亦能合理。其用$\sqrt{2}$之原理。此處暫不解釋。因至後編。自能明瞭也。

以上三公式旣用任何數。皆合於理。故可於(1)式之b用$\boxed{}$代之。則$(a+\boxed{})^2=a^2+2a\boxed{}+\boxed{}^2$。

故置$b+c$於$\boxed{}$之內。亦無不合。

即$(a+\boxed{b+c})^2=a^2+2a\boxed{b+c}+\boxed{b+c}^2$。若去此$\boxed{}$。

即$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$。

$$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

於(4)式之c用$-c$代之。則

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2a(-c)+2b(-c)。$$

$$\therefore (a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc。$$

又於(3)式之b用$b+c$代之。則

$$\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}=a^2-(b+c)^2=a^2-(b^2+2bc+c^2)。$$

$$\therefore (a+b+c)(a-b-c)=a^2-b^2-2bc-c^2。$$

〔增例〕再示數例於下。

$$(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)=(a^2)^2-(2b^2)^2=a^4-4b^4。$$

$$(a^2+\sqrt{3}b^2)(a^2-\sqrt{3}b^2)=(a^2)^2-(\sqrt{3}b^2)^2=a^4-3b^4。$$

$$(a-b+c)(a+b-c)=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}=a^2-(b-c)^2。$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$
$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4。$$

末一例稍混。恐初學未易記憶。故重記其公式於下。

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$$

$$(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2+x-1)=\{(x^3+x)+(x^2+1)\}\{(x^3+x)-(x^2+1)\}$$
$$=(x^3+x)^2-(x^2+1)^2=x^6+2x^4+x^2-(x^4+2x^2+1)=x^6+x^4-x^2-1。$$

65. 多項式之平方 於前章及51章之法。已可求得三數和之平方。今更示以求諸數和之平方法。

例如$(a+b+c+d+\ldots\ldots)^2$。

卽$(a+b+c+d+\ldots\ldots)(a+b+c+d+\ldots\ldots)$。

任意兩代數式之積。等於此式各項。乘彼式各項之積之和。前已證明之。故如上之被乘式。第一項a以乘式第一項a乘之。得a^2。同法得b^2, c^2, d^2………又被乘式之一項(例如b)以乘式中相異之項(例如d)乘之。得bd。而被乘式之一項d以乘式中相異之項b乘之。亦得bd。故得$2bd$。同法得兩式各異項之積。爲$2ab, 2ac$……

由是所求之平方。爲

$$a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots\ldots+2ab+2ac+2ad+\ldots\ldots+2bc+2bd+\ldots\ldots\ldots。$$

卽所有各項相乘積之和。

〔法則〕若干數量和之平方。等於各數量平方之和。加各相異兩數量之積之二倍。

例如求$(a+b+c)^2$。則各項之平方。爲a^2, b^2, c^2。又各相異兩項之積。爲ab, ac, bc。

由是而$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$。

同法得$(a+2b-3c)^2=a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a(2b)+2a(-3c)+2(2b)(-3c)$

$=a^2+4b^2+9c^2+4ab-6ac-12bc$。

又$(a-b+c-d)^2$

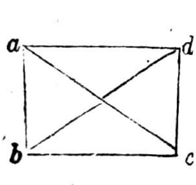
$=a^2+(-b)^2+c^2+(-d)^2+2a(-b)+2ac+2a(-d)+2(-b)c+2(-b)(-d)$
$+2c(-d)$

$=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$。

以上諸例熟練之後。可省去運算。而直書其答式。

求兩多項式之平方。可以直線畫多角形。計其各邊與對角線。則雖童子亦易求得之。

其各線爲2倍。各角點爲平方。示之如下。



求$(a+b+c+d)^2$。

四角形各角點之平方。爲a^2, b^2, c^2, d^2。

又四邊之2倍。爲$2ab, 2bc, 2cd, 2da$。

對角線之2倍。爲 $2bd$, $2ca$。

$\therefore (a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2da+2bd+2ca$。

$(a+b+c+d+e)^2$ 則可作五角形圖求之。

66. 連乘積 凡求諸代數式之連乘積。可先求任兩式之積。乃次第以他式乘之。

例如 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 之連乘積。求法如下。

$$
\begin{array}{l}
x+a \\
\underline{x+b} \\
x^2+ax \\
\underline{\quad +bx+ab} \\
x^2+(a+b)x+ab \\
\underline{x+c} \\
x^3+(a+b)x^2+abx \\
\underline{\quad + \quad cx^2+(ac+bc)x+abc} \\
x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc
\end{array}
$$
即連乘積。

如上式爲依公有文字 x 方乘之順序而記其積。爲整列代數式之要例。

又如求 $(x^2+a^2)^2(x+a)^2(x-a)^2$ 之連乘積。

積之因子可任意更換其次序。故從便利置之如下。即所求之積 $=(x+a)^2(x-a)^2(x^2+a^2)^2$

$=\{(x+a)(x-a)(x^2+a^2)\}^2=\{(x^2-a^2)(x^2+a^2)\}^2$

$=(x^4-a^4)^2=x^8-2a^4x^4+a^8$。

67. 視察法 兩多項式之積。等於此式各項乘彼式各項之積之和(55章)。故三多項式之積。等於兩多項式積之各項。乘第三式各項之積之和。即三多項式之連乘積。等於第一式各項與第二式各項之積。乘第三式各項之積之和。

同法推得諸多項式之連乘積。等於第一式各項。第二式各項。第三式各項。及他式各項相乘諸積之和。

依此法各多項式中各項之連乘積。可從視察得之。因而求得其全積。爲尤便捷。

例如$(a+b)^3$即求$(a+b)(a+b)(a+b)$之積。

此三式可視察其各項連乘積。先從三式各取a乘得a^3。次從兩式各取a。從他一式取b乘得a^2b。然三式內可以各取一b。以各乘他二式之a。故得三個a^2b。即$3a^2b$。又依同法從一式取a。從兩式各取b。亦可取三次。故得$3ab^2$。末從三式各取b乘得b^3。

由是而$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

例如求$(x+a)(x+b)(x+c)$之積。

先從三式各取x。得x^3。次從兩式各取x。從他一式取a或b或c。得x^2a, x^2b, x^2c。次從一式取x。從他兩式取ab或bc。得xab, xac, xbc。末從各式取a與b與c得abc。

由是而$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+x^2a+x^2b+x^2c+xab+xac+xbc+abc$。

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$。

68. 二項式之方乘

二項式之平方及立方。既詳於前矣。若繼此而更施乘法。則得四方乘五方乘等。但是等之運算。用分離係數法較易。

例如$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$

$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)$。

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$為三次之等次式。$a+b$為一次之等次式。故其積為四次之等次式。而第一項為a^4。依此運算頗易。

$$\begin{array}{r}
1+3+3+1\\
1+1\\
\hline
1+3+3+1\\
1+3+3+1\\
\hline
1+4+6+4+1
\end{array}$$

即$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$。

下列之公式。宜熟記之。

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$。

$(a+b)^3$之公式。又有簡要之記法如下。

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$。

於前公式中之b。用$-b$代之。則

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2。$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)。$$

$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4。$$

五方乘及高次之方乘。其逕求之法。稱爲二項式之定理。詳於後編。

〔要用之公式〕64章及本章所示之公式外。更有重要之公式。揭明如下。

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \text{.........................} (A)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \text{.........................} (B)$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4 \text{................} (C)$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc \text{...........} (D)$$

例題二

1. $2x-a$, 以 $x-2a$ 乘之。

〔解〕

$$\begin{array}{r} 2-1 \\ \underline{1-2} \\ 2-1 \\ \underline{-4+2} \\ 2-5+2 \end{array}$$

即 $2x^2-5ax+2a^2$。

2. $3x-\frac{1}{3}$, 以 $\frac{1}{3}x-3$ 乘之。

〔解〕

$$\begin{array}{r} 3-\frac{1}{3} \\ \underline{\frac{1}{3}-3} \\ 1-\frac{1}{9} \\ \underline{-9+1} \\ 1-9\frac{1}{9}+1 \end{array}$$

即 $x^2-9\frac{1}{9}x+1$。

3. x^2-xy+y^2, 以 $x+y$ 乘之。

〔解〕依公式 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$。

4. $1+x+x^2+x^3$, 以 $x-1$ 乘之。

〔解〕改被乘式爲x之遞降方乘。如 x^3+x^2+x+1。與乘式同一整列之。

$$\begin{array}{l} 1+1+1+1 \\ \underline{1-1\qquad\qquad} \\ 1+1+1+1 \\ \quad -1-1-1-1 \\ \hline 1+0+0+0-1 \end{array}$$

積之第一項爲x^4。而末項不含x。故所求之積爲x^4-1。

5. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$以$y-x$乘之。

〔解〕改乘式爲x之遞降方乘。卽$-x+y$。與被乘式同一整列之。

$$\begin{array}{l} 1+1+1+1+1 \\ \underline{-1+1\qquad\qquad\quad} \\ -1-1-1-1-1 \\ \quad +1+1+1+1+1 \\ \hline -1+0+0+0+0+1 \end{array}$$

卽所求之積爲$-x^5+y^5$。

6. x^2-x+2,以x^2+x-2乘之。

〔解〕所求之積$=\{x^2-(x-2)\}\{x^2+(x-2)\}=x^4-(x-2)^2$〔64章公式(3)〕

$=x^4-(x^2-4x+4)$〔64章公式(2)〕

$=x^4-x^2+4x-4$。

7. $1+ax+a^2x^2$以$1-ax+a^2x^2$乘之。

〔解〕所求之積$=(1+ax+a^2x^2)(1-ax+a^2x^2)=1+a^2x^2+a^4x^4$。〔公式(C)〕

8. x^4+x^2+1,以x^4-x^2+1乘之。

〔解〕所求之積爲$(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=x^8+x^4+1$。〔公式(C)〕

9. $3x^2-xy+2y^2$以$3y^2-xy+2x^2$乘之。

〔解〕改乘式爲$2x^2-xy+3y^2$如下。

$$\begin{array}{l} 3-1+2 \\ \underline{2-1+3} \\ 6-2+4 \\ \quad -3+1-2 \\ \qquad\quad +9-3+6 \\ \hline 6-5+14-5+6 \end{array}$$

卽$6x^4-5x^3y+14x^2y^2-5xy^3+6y^4$。

10. x^3-5x^2+1, 以 $2x^3+5x+1$ 乘之。

〔解〕
$$
\begin{array}{l}
1-5\ \ +0+1 \\
\underline{2+0\ \ +5+1} \\
2-10+0+2 \\
\qquad\quad 5-25+0+5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{1-5+0+1} \\
2-10+5-22-5+5+1
\end{array}
$$
即 $2x^6-10x^5+5x^4-22x^3-5x^2+5x+1$。

11. $x^3-5x^2y+y^3$, 以 $y^3+5xy^2+2x^3$ 乘之。

〔解〕於前題之答。入以 y 之遞昇方乘。即得

$2x^6-10x^5y+5x^4y^2-22x^3y^3-5x^2y^4+5xy^5+y^6$。

12. $3a^3-2a^2b+3ab^2-3b^3$, 以 $2a^3+5a^2b-4ab^2+b^3$ 乘之。

〔解〕
$$
\begin{array}{l}
3\ -2\ \ +3-3 \\
\underline{2\ \ +5\ \ -4+1} \\
6\ -4\ \ +6-6 \\
\qquad 15-10+15-15 \\
\qquad\quad -12\ \ +8-12+12 \\
\qquad\qquad\qquad 3-\ 2+\ 3-3 \\
\hline
6+11-16+20-29+15-3
\end{array}
$$

即 $6a^6+11a^5b-16a^4b^2+20a^3b^3-29a^2b^4+15ab^5-3b^6$。

13. $2a^3x^3-3a^2x^2y^2+5y^6$, 以 $a^3x^3+4axy^4-2y^6$ 乘之。

〔解〕改爲 $2(ax)^3-3(ax)^2(y^2)+5(y^2)^3$ 與 $(ax)^3+4(ax)(y^2)^2-2(y^2)^3$ 其 ax 及 y^2 各可視爲一個文字求之。

$$
\begin{array}{l}
2-3+0+5 \\
\underline{1+0+4-2} \\
2-3+0+5 \\
\qquad\qquad 8-12+0+20 \\
\qquad\qquad\quad -\ 4+6+\ 0-10 \\
\hline
2-3+8-11+6+20-10
\end{array}
$$

即 $2a^6x^6-3a^5x^5y^2+8a^4x^4y^4-11a^3x^3y^6+6a^2x^2y^8+20axy^{10}-10y^{12}$。

14. $2a-3a^2+5a^3-7a^5$ 以 $1-2a^2+6a^4$ 乘之。

〔解〕

$$\begin{array}{l} 2-3+5+0-7 \\ \underline{1+0-2+0+6} \\ 2-3+5+0-7 \\ \quad\quad -4+6-10-\ 0+14 \\ \underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad 12-18+30+0-42} \\ 2-3+1+6-\ 5-18+44+0-42 \end{array}$$

此例積之第一項爲 a。故 2 爲 $2a$。

即 $2a-3a^2+a^3+6a^4-5a^5-18a^6+44a^7-42a^9$。

15. $a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2$ 以 $a+b+c$ 乘之。

〔解〕 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$〔公式 (D)〕。

16. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ 以 $x+y+z$ 乘之。

〔解〕 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=x^3+y^3+z^3-3xyz$。

17. $4a^2+9b^2+c^2+3bc+2ca-6ab$ 以 $2a+3b-c$ 乘之。

〔解〕 $\{2a+3b+(-c)\}\{(2a)^2+(3b)^2+(-c)^2-(3b)(-c)-(-c)(2a)-(2a)(3b)\}$

$=(2a)^3+(3b)^3+(-c)^3-3(2a)(3b)(-c)$〔公式 (D)〕

$=8a^3+27b^3-c^3+18abc$。

18. 求 x^4+1, x^2+1, x^2-1 之連乘積。

〔解〕 $(x^2+1)(x^2-1)(x^4+1)=(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1$〔64 章 (3)〕。

19. 求 $x^4+16y^4, x^2+4y^2, x+2y$ 及 $x-2y$ 之連乘積。

〔解〕 $(x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4)=(x^2-4y^2)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4)$

$=(x^4-16y^4)(x^4+16y^4)=x^8-256y^8$。

20. 求 $(x-y)^2, (x+y)^2$ 及 $(x^2+y^2)^2$ 之連乘積。

〔解〕 $\{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\}^2=\{(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}^2$

$=(x^4-y^4)^2=x^8-2x^4y^4+y^8$。

21. 求 $(x^2+1)^3, (x+1)^3$ 及 $(x-1)^3$ 之連乘積。

〔解〕 $\{(x-1)(x+1)(x^2+1)\}^3=(x^4-1)^3=x^{12}-3x^8+3x^4-1$。

22. 求 x^2-x+1, x^2+x+1 及 x^4-x^2+1 之連乘積。

〔解〕 $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$

$=x^8+x^4+1$〔公式 (C)〕。

23. 求 $a^2-2ab+4b^2$, $a^2+2ab+4b^2$ 及 $a^4-4a^2b^2+16b^4$ 之連乘積。

〔解〕 $\{a^2-a(2b)+(2b)^2\}\{a^2+a(2b)+(2b)^2\}(a^4-4a^2b^2+16b^4)$

$=\{a^4+a^2(2b)^2+(2b)^4\}(a^4-4a^2b^2+16b^4)$

$=(a^4+4a^2b^2+16b^4)(a^4-4a^2b^2+16b^4)=a^8+16a^4b^4+256b^8$。

24. 求下列各式之平方。

(1) $a+2b-3c$, (2) a^2-ab+b^2, (3) $bc+ca+ab$,

(4) $1-2x+3x^2$, (5) x^3+x^2+x+1。

〔解〕可用64章及65章之公式求之。

(1) $(a+2b-3c)^2=a^2+4b^2+9c^2+2a(2b)+2a(-3c)+2(2b)(-3c)$

$=a^2+4b^2+9c^2+4ab-6ac-12bc$。

(2) $(a^2-ab+b^2)^2=a^4+a^2b^2+b^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3$。

$=a^4+3a^2b^2+b^4-2a^3b-2ab^3$。

(3) $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2(bc)(ca)+2(bc)(ab)+2(ca)(ab)$

$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2bc^2a+2b^2ca+2ca^2b$。

(4) $(1-2x+3x^2)^2=1+4x^2+9x^4-4x+6x^2-12x^3$

$=1-4x+10x^2-12x^3+9x^4$。

(5) $(x^3+x^2+x+1)^2=x^6+x^4+x^2+1+2x^5+2x^4+2x^3+2x^3+2x^2+2x$

$=x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$。

〔注意〕本例(3)又有如下法記之。亦爲要用之公式。

$(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$。

25. 求下列各式之立方。

(1) $a+b+c$, (2) $2a-3b-2c$, (3) $1+x+x^2$。

〔解〕可用68章之公式。

(1) $\{a+(b+c)\}^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$。

(2) 於前式之 a, b, c 順次用 $2a, -3b, -2c$ 代入之。則 $(2a-3b-2c)^3$

$=8a^3-27b^3-8c^3-36a^2b-24a^2c+54b^2a-54b^2c+24c^2a-36c^2b+72abc$。

(3) $(1+x+x^2)^3=1+x^3+x^6+3x+3x^2+3x^2+3x^4+3x^4+3x^5+6x^3$

$=1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$。

26. $(x+y+z)^2-(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2-(x+y-z)^2$ 化爲簡式。

〔解〕可用56章(A)及(B)之兩公式。

原式$=\{(y+z)+x\}^2-\{(y+z)-x\}^2+\{x+(z-y)\}^2-\{x-(z-y)\}^2$

$=4(y+z)x+4x(z-y)=8xz$。

27. 試證 $(x+y)(x+z)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2=(z+x)(z+y)-z^2$。

〔證〕$(x+y)(x+z)-x^2=(y+x)\{(y+z)-(y-x)\}-x^2$

$=(y+x)(y+z)-(y^2-x^2)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2$。

又以同法得 $(y+z)(y+x)-y^2=(z+x)(z+y)-z^2$。

28. 試證 $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2=(x+y+z)^2$。

〔證〕先解去左邊之括弧。并其同類項而簡之。卽得 $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$。卽依64章知等於 $(x+y+z)^2$。

29. 化 $\{x(x+a)-a(x-a)\}\{x(x-a)-a(x+a)\}$ 爲簡式。

〔解〕原式$=(x^2+ax-ax+a^2)(x^2-ax-ax-a^2)=(x^2+a^2)\{(x^2-a^2)-2ax\}$

$=(x^2+a^2)(x^2-a^2)-(x^2+a^2)2ax=x^4-a^4-2ax^3-2a^3x$。

30. 試證 $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y)$。

〔證〕$-(x-y)=-x+y=(z-x)+(y-z)$。用68章 $(a+b)^3$ 之簡要公式。則 $-(x-y)^3=\{(z-x)+(y-z)\}^3$。

卽 $-(x-y)^3=(z-x)^3+(y-z)^3+3(z-x)(y-z)\{(z-x)+(y-z)\}$。

卽 $-(x-y)^3=(z-x)^3+(y-z)^3-3(z-x)(y-z)(x-y)$。

由是得 $(x-y)^3+(z-x)^3+(y-z)^3=3(z-x)(y-z)(x-y)$。

31. 試證 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 及

$a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2$。

〔證〕依68章之簡要公式。卽得 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$。

又 $(a+b)^4=(a+b)^2(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^2\{(a^2-2ab+b^2)+4ab\}$

$=(a+b)^2(a-b)^2+4ab(a+b)^2$

$=(a^2-b^2)^2+4ab(a+b)^2$

$=a^4+b^4-2a^2b^2+4ab(a+b)^2$。

由是得 $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2$。

32. 試證 $(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)=(x^2-xy+y^2)^2$。

〔證〕由56章公式。$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ 故 $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$。依

此。則 $(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)=\{(x^2+y^2)+xy\}^2-4(x^2+y^2)xy$。

$$=\{(x^2+y^2)-xy\}^2=(x^2-xy+y^2)^2\text{。}$$

33. 試證 $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2+2(x+y)(x+z)+2(x+z)(y+x)$

$$+2(z+x)(z+y)=4(x+y+z)^2$$

〔證〕 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$。以 $x+y, y+z, z+x$ 代其 a, b, c。則左邊爲 $\{(x+y)+(y+z)+(z+x)\}^2=4(x+y+z)^2$。

34. 試證 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$。

〔證〕 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$。

$=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$。

35. 設 $x=a+d, y=b+d, z=c+d$。試求下題之證。

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\text{。}$$

〔證〕 $x-y=(a+d)-(b+d)=a-b,\ y-z=b-c,\ z-x=c-a$。

由是 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 解去兩邊之括弧。

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$。

卽 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$。

36. $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$。試求下題之證。

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$。

〔證〕此題與35同法證之。

37. 試證 $2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$

$$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\text{。}$$

〔證〕因 $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$。平方之。得

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2(a-b)(b-c)+2(b-c)(c-a)+2(c-a)(a-b)=0$ 卽

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(b-a)(b-c)-2(c-b)(c-a)-2(a-c)(a-b)=0$.

是爲本題之證。

38. 試證 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2\text{。}$$

〔證〕解去左邊之括弧。化爲簡式。卽得

$b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2acxz+a^2z^2+a^2y^2-2abyx+b^2x^2$。

卽 $(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bz)^2$。

39. $x=a^2-bc, y=b^2-ca, z=c^2-ab$。試證下列之式。

$ax+by+cz=(x+y+z)(a+b+c),\ bc(x^2-yz)=ca(y^2-zx)=ab(z^2-xy)$。

〔證〕 $ax+by+cz=a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc$。

依 68 章公式 (D)。 $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=(a+b+c)\{(a^2-bc)+(b^2-ca)+(c^2-ab)\}$$

$$=(a+b+c)(x+y+z)。$$

又 $x^2-yz=(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)=a(a^3+b^3+c^3-3abc)$。

故 $bc(x^2-yz)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$ca(y^2-zx)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$ab(z^2-xy)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$\therefore\ bc(x^2-yz)=ca(y^2-zx)=ab(z^2-xy)$。

40. 設 $3x=a+b+c$。

試求 $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)$ 之值。

〔解〕依 68 章公式 (D)。

$$原式=\frac{1}{2}\{(x-a)+(x-b)+(x-c)\}[\{(x-a)-(x-b)\}^2+\{(x-b)-(x-c)\}^2+\{(x-c)-(x-a)\}^2]$$

$$=\frac{1}{2}\{3x-(a+b+c)\}\{(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\}。$$

而 $3x=a+b+c$。即 $3x-(a+b+c)=0$。$\therefore$ 原式 $=0$。

41. 試證 $(a^2+b^2+c^2)^2=(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2+(ab-ac)^2+a^4$

$$=(bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2。$$

〔證〕 $(a^2+b^2+c^2)^2=\{(b^2+c^2)+a^2\}^2=(b^2+c^2)^2+2(b^2+c^2)a^2+a^4$

$=(b^2+c^2)^2+a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2)+(a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2)+a^4$

$=(b^2+c^2)^2(ab+ac)^2+(ab-ac)^2+a^4$。

又 $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)+a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$。

$=(ab+bc+ca)^2+(a^4-2a^2bc+b^2c^2)+b^4-2b^2ca+c^2a^2)+(c^4-2c^2ab+a^2b^2)$

$=(ab+bc+ca)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2$。

42. 試證 $(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$

$=(ax-by)^2+(ax-by)(ay+bx+by)+(ay+bx+by)^2$。

〔解〕$(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$

$=a^2x^2+b^2y^2+a^2xy+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2+abx^2+abxy+aby^2$

$=(a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2+2abxy+2b^2xy+2aby^2)-abxy-b^2xy-aby^2$
$+a^2xy+abx^2+a^2x^2$

$=(ay+bx+by)^2+(a^2x^2-2abxy+b^2y^2)+abxy-b^2y^2+a^2xy-aby^2$
$+abx^2-b^2xy$

$=(ay+bx+by)^2+(ax-by)^2+by(ax-by)+ay(ax-by)+bx(ax-by)$

$=(ay+bx+by)^2+(ax-by)^2+(ax-by)(by+ay+bx)$。

43. 試證 $1+a^2+b^2+c^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+a^2b^2c^2$

$=(1-bc-ca-ab)^2+(a+b+c-abc)^2$。

〔證〕$1+\{a^2+b^2+c^2\}+\{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\}+a^2b^2c^2$

$=1+\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}+\{(bc+ca+ab)^2-2abc(a+b+c)\}$
$a^2+b^2c^2$

$=1-2(ab+bc+ca)+(bc+ca+ab)^2+(a+b+c)^2-2abc(a+b+c)+a^2b^2c^2$

$=(1-ab-bc-ca)^2+(a+b+c-abc)^2$。

44. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2$。

〔證〕$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=\{(a^2+b^2-c^2-d^2)+2(c^2+d^2)\}^2$

$=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2-c^2-d^2)(c^2+d^2)+4(c^2+d^2)^2$

$=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$。

但 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$（依 34 例）

$\therefore (a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2$。

45. 試證明下列之二題。

(1) $(a+2)^2-4(a+1)^2+6a^2-4(a-1)^2+(a-2)^2=0$。

(2) $(a+2)(b+2)-4(a+1)(b+1)+6ab-4(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)=0$。

〔證〕(1) 左邊 $=(a+2)^2+(a-2)^2-4\{(a+1)^2+(a-1)^2\}+6a^2$

$=2(a^2+4)-8(a^2+1)+6a^2=2a^2+8-8a^2-8+6a^2=0$。

(2) 左邊 $=(a+2)(b+2)+(a-2)(b-2)-4\{(a+1)(b+1)+(a-1)(b-1)\}$
$+6ab$

$=ab+2(a+b)+4+ab-2(a+b)+4-4\{ab+(a+b)+1+ab-(a+b)+1\}$
$+6ab$

$=2ab+8-4(2ab+2)+6ab=2ab+8-8ab-8+6ab=0$。

46. 試證下二題。

(1) $(a+2)^3-4(a+1)^3+6a^3-4(a-1)^3+(a-2)^3=0$。

(2) $(a+2)(b+2)(c+2)-4(a+1)(b+1)(c+1)+6abc-4(a-1)(b-1)(c-1)$
$+(a-2)(b-2)(c-2)=0$

〔證〕(1) 左邊 $=(a+2)^3+(a-2)^3-4\{(a+1)^3+(a-1)^3\}+6a^3$
$=2a^3+24a-4(2a^3+6a)+6a^3=0$。

(2) 左邊 $=(a+2)(b+2)(c+2)+(a-2)(b-2)(c-2)$
$-4\{(a+1)(b+1)(c+1)+(a-1)(b-1)(c-1)\}+6abc$
$=abc+(ab+bc+ca)2+(a+b+c)4+8+abc-(ab+bc+ca)2+(a+b+c)4$
$-8-4\{abc+ab+bc+ca)+(a+b+c)+1+abc-(ab+bc+ca)$
$+(a+b+c)-1\}+6abc$
$=2abc+8(a+b+c)-4\{2abc+2(a+b+c)\}+6abc=0$。

47. 證 $(a+b+c)^3+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$=4a^2(b+c)+4b^2(c+a)+4c^2(a+b)+4abc$。

〔證〕令 $a+b+c=s$。則左邊 $=s^3+(s-2a)(s-2b)(s-2c)$
$=s^3+s^3-2s^2(a+b+c)+4s(ab+bc+ca)-8abc$
$=2s^3-2s^3+4s(ab+bc+ca)-8abc$
$=4(a+b+c)(ab+bc+ca)-8abc$
$=4a\{a(b+c)+bc\}+4b\{b(c+a)+ca\}+4c\{c(a+b)+ab\}-8abc$
$=4a^2(b+c)+4b^2(c+a)+4c^2(a+b)+4abc$。

48. 試證 $x(x-y+z)(x+y-z)+y(x+y-z)(-x+y+z)$
$+z(-x+y+z)(x-y+z)+(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)+4xyz$。

〔證〕令 $x+y+z=s$。則左邊
$=x(s-2y)(s-2z)+y(s-2z)(s-2x)+z(s-2x)(s-2y)+(s-2x)(s-2y)(s-2z)$
$=s^2(x+y+z)-4s(xy+yz+zx)+12xyz+s^3-2s^2(x+y+z)$
$+4s(xy+yz+zx)-8xyz$
$=s^3-4s(xy+yz+zx)+12xyz+s^3-2s^3+4s(xy+yz+zx)-8xyz=4xyz$。

49. $a^2+b^2+c^2+d^2-bc-ca-ab-ad-bd-cd$。以 $a+b+c+d$ 乘之。

〔解〕$(a^2+b^2+c^2+d^2-bc-ca-ab-ad-bd-cd)(a+b+c+d)$。

上兩式之積 a^3, b^3, c^3, d^3。各有一個。如 a^2b 之項。則爲 $a^2b-a^2b=0$。

同法 a^2c, a^2d, b^2a, b^2c 等項。亦相消而爲 0。又 abc 其係數爲 -3。故所求之積。爲 $a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3abd-3bcd-3cad$。

50. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)\ldots\ldots(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1)$
$=x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1$。

〔證〕 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1=(x^{2^2}+x^2+1)$,

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=x^8+x^4+1=x^{2^3}+x^{2^2}+1。$$

同法得 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)=x^{2^4}+x^{2^8}+1$,

$\therefore$ 左邊 $=x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1$。

第伍編

除法

69. 一項式之除法 以一項式除一項式之法。已詳於前。惟依43章兩代數之和。以第三數量除之。所得之商。等於以第三數量。分除其各數量之商之和。又依54章乘法之反法。多項式以一項式除之。所得之商。等於以一項式分除其各項之商之和。

例如 $(a^2x-3ax)\div ax=a^2x\div ax-3ax\div ax=a-3$。

又 $(12x^3-5ax^2-2a^2x)\div 3x=12x^3\div 3x-5ax^2\div 3x-2a^2x\div 3x$。

$$=4x^2-\frac{5}{3}ax-\frac{2}{3}a^2。$$

70. 多項式之除法 茲示以除法之通例。即以多項式除多項式之法。

除法爲乘法之反法。故於除式當求以何式乘之。而得被除式。因之得求法如下。

被除式與除式。皆整列爲某文字(假設 a)之遞降方乘。則其商亦得整列爲遞降方乘。

依62章被除式之第一項。爲除式第一項與商之第一項之積。故以除式之第一項。除被除式之第一項。得商之第一項。以乘除式。從被除式內減去之。則其餘式。等於商之他項與除式之積。是爲餘式。此餘式又整列於 a 之遞降方乘。以除式之第一項除其第一項。得商之第二項。以乘除式。從餘式減去之。迭次施此方法。得商之第三項第四項等。以至得所求之商而止。

例如 $8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3$。以 $2a+b$ 除之。與算術除法同式如下。

$$\begin{array}{rl}
2a+b)\,8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3 & (4a^2+2ab+b^2\text{……商} \\
\underline{8a^3+4a^2b\qquad\qquad\quad} & \\
4a^2b+4ab^2+b^3 & \\
\underline{4a^2b+2ab^2\qquad} & \\
2ab^2+b^3 & \\
\underline{2ab^2+b^3} &
\end{array}$$

商之第一項。為 $8a^3\div 2a=4a^2$。以乘除式。從被除式內減去之。得 $4a^2b+4ab^2+b^3$ 為餘式。商之第二項為 $4a^2b\div 2a=2ab$。以乘除式。從餘式內減去之。得 $2ab^2+b^3$ 為第二餘式。商之第三項。為 $2ab^2\div 2a=b^2$。以乘除式。從第二餘式內減去之。則已無餘。故被除式。等於所減諸式之和。卽被除式等於以 $4a^2$, $+2ab$, $+b^2$ 乘除式之積之和。卽被除式等於 $4a^2+2ab+b^2$ 式乘除式之積。故 $4a^2+2ab+b^2$ 為所求之商。

被除式與除式可整列為同文字之遞降方乘。亦可均列為遞昇方乘。如本例之 a 為遞降方乘。其在 b 卽遞昇方乘。惟被除式與除式。不可一式遞昇。一式遞降耳。

71. 例解 更舉數例解之如下。

〔第一例〕 $a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4$。以 a^2+b^2 除之。

$$
\begin{array}{lllllll}
a^2+b^2)\,a^4 & -a^3b & +2a^2b^2 & -ab^3 & +b^4\,(a^2-ab+b^2 \\
\quad a^4 & & +a^2b^2 & & \\
\hline
 & -a^3b & +a^2b^2 & -ab^3 & +b^4 \\
 & -a^3b & & -ab^3 & \\
\hline
 & & +a^2b^2 & & +b^4 \\
 & & +a^2b^2 & & +b^4 \\
\hline
\end{array}
$$

〔第二例〕 $a^4+a^2b^2+b^4$。以 a^2-ab+b^2 除之。

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$。已示於前。故

$a^4+a^2b^2+b^4\div(a^2-ab+b^2)=a^2+ab+b^2$。雖然。當以實際之運算。解之如下。

$$
\begin{array}{llllll}
a^2-ab+b^2)\,a^4 & & +a^2b^2 & & +b^4\,(a^2+ab+b^2 \\
\quad a^4 & -a^3b & +a^2b^2 & & \\
\hline
 & a^3b & & & +b^4 \\
 & a^3b & -a^2b^2 & +ab^3 & \\
\hline
 & & a^2b^2 & -ab^3 & +b^4 \\
 & & a^2b^2 & -ab^3 & +b^4 \\
\hline
\end{array}
$$

此例於被除式與除式俱整列爲 a 之遞降方乘。而因欲便於逐次相減。故於被除式 a^3 及 a 之兩項。特空其位置。然不如此。而僅將各餘式。依 a 之遞降方乘整列之亦可。

例如 $a^2-ab+b^2)\,a^4+a^2b^2+b^4\,(a^2+ab+b^2$

$$\begin{array}{l}
\underline{a^4-a^3b+a^2b^2} \\
\quad a^3b+\quad b^4 \\
\quad \underline{a^3b-a^2b^2+ab^3} \\
\quad a^2b^2-ab^3+b^4 \\
\quad \underline{a^2b^2-ab^3+b^4}
\end{array}$$

〔第三例〕$a^3+b^3+c^3-3abc$。以 $a+b+c$ 除之。

$a+b+c)\,a^3-3abc+b^3+c^3\,(a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2$

$$\begin{array}{l}
\underline{a^3+a^2b+a^2c} \\
-a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 \\
\underline{-a^2b-ab^2-\ abc} \\
\quad -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 \\
\quad \underline{-a^2c\qquad -\ abc-ac^2} \\
\qquad ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3 \\
\qquad \underline{ab^2\qquad\qquad +b^3+b^2c} \\
\qquad\quad -abc+ac^2-b^2c+c^3 \\
\qquad\quad \underline{-abc\qquad -b^2c-bc^2} \\
\qquad\qquad ac^2+bc^2+c^3 \\
\qquad\qquad ac^2+bc^2+c^3
\end{array}$$

如上例含二個以上之文字。不僅整列於 a 之遞降方乘。卽其他文字。亦順次整列。故上例之 b 皆置於 c 前。又或僅作 a 式。其他二字以括弧括之。改爲簡式。如下。

$a+(b+c))\,a^3-3abc+(b^3+c^3)\,(a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)$

$$\begin{array}{l}
\underline{a^2+a^2(b+c)} \\
\quad -a^2(b+c)-3abc+(b^3+c^3) \\
\quad \underline{-a^2(b+c)-a(b+c)^2} \\
\qquad a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3) \\
\qquad \underline{a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3)}
\end{array}$$

惟從第一餘式之第二項 $-3abc$ 減 $-a(b+c)^2$ 得 $a(b^2-bc+c^2)$. 非熟練者不易知之。

72. 分離係數 除法亦如乘法用分離係數爲便。

例如 $2x^6-7x^5+5x^4+3x^3-3x^2+4x-4$。以 $2x^3-3x^2+x-2$ 除之。

$$
\begin{array}{r}
2-3+1-2)\,2-7+5+3-3+4-4\,(1-2-1+2) \\
\underline{2-3+1-2} \\
-4+4+5-3+4-4 \\
\underline{-4+6-2+4} \\
-2+7-7+4-4 \\
\underline{-2+3-1+2} \\
4-6+2-4 \\
\underline{4-6+2-4}
\end{array}
$$

商之第一項。爲 $2x^6\div 2x^3=x^3$。故從 $1-2-1+2$ 而得 x^3-2x^2-x+2。即所求之商。

73. 除法之別定義 於70章所示被除式之最初減餘式。其第一項已減盡而爲0。故餘式比被除式。其 a 之次數必低。故逐次之餘式。必次第爲 a 之低次式。至餘式之次數較低於除式。則知其已不能整除。即與算術之餘數比除數小則不能整除者同。由是除法之定義。須擴張之。如下。

〔定義〕 以B除A。求B×C等於A之代數式C。或求得C後。其B×C與A之差式內特別一文字。比B內特別一文字之次數低。此定義其第一爲能整除者。第二爲不能整除者。

例如 $a^2+3ab+4b^2$。以 $a+b$ 除之

$$
\begin{array}{r}
a+b)\,a^2+3ab+4b^2\,(a+2b \\
\underline{a^2+ab} \\
2ab+4b^2 \\
\underline{2ab+2b^2} \\
2b^2
\end{array}
$$

故得$(a^2+3ab+4b^2)\div(a+b)=a+2b$。而餘式爲$2b^2$。

卽 $a^2+3ab+4b^2=(a+b)(a+2b)+2b^2$。

又被除式與除式。其整列與前異者。則

$$
\begin{array}{r}
b+a)\,4b^2+3ab+a^2\,(4b-a\\
\underline{4b^2+4ab}\\
-\ ab+a^2\\
\underline{-\ ab-a^2}\\
2a^2
\end{array}
$$

卽 $a^2+3ab+4b^2=(a+b)(4b-a)+2a^2$。

第一之餘式爲$2b^2$。第二之餘式爲$2a^2$。蓋因第一爲a之遞降方乘。故其餘式不復含a。第二爲b之遞降方乘。故其餘式不復含b

由是知同文字之整列。有遞降遞昇之異。而餘式亦因之而異

74. 恆同式〔Identity〕 代數式之文字。不論爲如何之值常有相等之關係者。謂之恆同式。

例如$a+a=2a$。其a爲任何值無不相等。故爲恆同式。

下列之恆同式。當熟記之。(乘法之公式亦爲恆同式。)

$$(x^2\pm2ax+a^2)\div(x\pm a)=x\pm a。$$
$$(x^2-a^2)\div(x\pm a)=x\mp a。$$
$$(x^3\pm a^3)\div(x\pm a)=x^2\mp ax+a^2。$$
$$(x^4-a^4)\div(x\mp a)=x^3\pm ax^2+a^2x\pm a^3。$$
$$(x^4+a^2x^2+a^4)\div(x^2\mp ax+a^2)=x^2\pm ax+a^2。$$
$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx。$$

例題三

1. x^2-9y^2。以$x+3y$除之。

〔解 由**74**章之公式 $\{x^2-(3y)^2\}\div(x+3y)=x-3y$。

2. x^4-16y^4。以x^2-4y^2除之。 〔答 x^2+4y^2〕

3. $27x^3+64y^3$。以 $4y+3x$ 除之。

〔解〕由 **74** 章之公式。

$$\{(3x)^3+(4y)^3\}\div(3x+4y)=(3x)^2-(3x)(4y)+(4y)^2=9x^2-12xy+16y^2。$$

4 $3x^2-4xy-4y^2$。以 $2y-x$ 除之。

〔解〕除式列為 $-x+2y$。

$$\begin{array}{l} -1+2)\,3-4-4\,(-3-2 \text{ 卽 } -3x-2y \text{ 商} \\ \quad\quad\quad\underline{3-6\quad\;\;} \\ \quad\quad\quad\quad\;\; 2-4 \\ \quad\quad\quad\quad\;\; \underline{2-4} \end{array}$$

5. $1-5x^4+4x^5$。以 $1-x$ 除之。〔答 $1+x+x^2+x^3-4x^4$〕

6. $x^5-5xy^4+4y^5$。以 $x-y$ 除之。〔答 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3-4y^4$〕

〔解〕5, 6 兩題。可同用一分離係數求之。卽

$$\begin{array}{l} 1-1)\,1+0+0+0-5+4\,(1+1+1+1-4 \\ \quad\quad\;\underline{1-1\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \quad\quad\quad\;\; 1+0+0-5+4 \\ \quad\quad\quad\;\; \underline{1-1\quad\quad\quad\;\;} \\ \quad\quad\quad\quad\;\; 1+0-5+4 \\ \quad\quad\quad\quad\;\; \underline{1-1\quad\quad\;\;} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; 1-5+4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{1-1\quad\;\;} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad -4+4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{-4+4} \end{array}$$

7. $1-6x^5+5x^6$。以 $1-2x+x^2$ 除之。〔答 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$〕

8. $m^6-6mn^5+5n^6$。以 $m^2-2mn+n^2$ 除之。

〔答 $m^4+2m^3n+3m^2n^2+4mn^3+5n^4$〕

〔解〕7, 8 兩題。亦可同用一分離係數如前例。

9. $1-7x^6+6x^7$。以 $(1-x)^2$ 除之。

〔解〕$(1-x)^2=1-2x+x^2$。故

$$
\begin{array}{l}
1-2+1)\,1+0+0+0+0+0-7+6\,(1+2+3+4+5+6 \\
\qquad\qquad \underline{1-2+1\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad 2-1+0+0+0-7+6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2-4+2\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 3-2+0+0-7+6 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{3-6+3\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 4-3+0-7+6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{4-8+4\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 5-4-7+6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{5-10+5\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6-12+6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{6-12+6}
\end{array}
$$

卽所求之商。爲

$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5$.

10. $1-x^3$。以 $1-x^2$ 除之。

〔解〕$\{1-(x^2)^4\}\div(1-x^2)=1+x^2+(x^2)^2+(x^2)^3=1+x^2+x^4+x^6$。

11. $1+x-8x^2+19x^3-15x^4$。以 $1+3x-5x^2$ 除之。

〔答 $1-2x+3x^2$〕

12. $4-9x^2+12x^3-4x^4$。以 $2+3x-2x^2$ 除之。

13. $4x^4-9x^2y^2+6xy^3-y^4$。以 $2x^2+3xy-y^2$ 除之。

〔解〕

$$
\begin{array}{l}
2+3-2)\,4+0-9+12-4\,(2-3+2 \\
\qquad\qquad \underline{4+6-4\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\ -6-5+12-4 \\
\qquad\qquad\ \underline{-6-9+6\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 4+6-4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{4+6-4}
\end{array}
$$

〔12. 答 $2-3x+2x^2$〕

〔13. 答 $2x^2-3xy+y^2$〕

14. $x^3-3x^2+3x+y^3-1$。以 $x+y-1$ 除之。

〔解〕本題含二文字。且爲不等次項。故不能用分離係數之法。今由68章 $(a-b)^3$ 之公式。

$x^3-3x^2+3x-1+y^3=(x-1)^3+y^3$ 故所求之商。卽

$\{(x-1)^3+y^3\}\div\{(x-1)+y\}=(x-1)^2-(x-1)y+y^2$。

15. $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$。以 x^2+xy+y^2 除之。

〔解〕

$$
\begin{array}{l}
1+1+1)\,1+1+1+1+1+1\,(1+0+0+1 \text{ 即 } x^3+y^3。\\
\quad\underline{1+1+1\qquad\qquad}\\
\qquad\qquad 1+1+1\\
\qquad\qquad \underline{1+1+1}
\end{array}
$$

16. $x^5-5x^4y+7x^3y^2-x^2y^3-4xy^4+2y^5$。以 $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 除之。

〔答 $x^2-2xy-2y^2$〕

17. $a^2-2b^2-6c^2+ab-ac+7bc$。以 $a-b+2c$ 除之。

〔解〕本題祇能用通例之除法。因題式中含三文字。故雖爲等次。不能用分離係數之法。且又無公式可用也。

$$
\begin{array}{l}
a-b+2c)\,a^2+ab-ac-2b^2+7bc-6c^2\,(a+2b-3c\\
\qquad\qquad \underline{a^2-ab+2ac\qquad\qquad\qquad\qquad}\\
\qquad\qquad\quad 2ab-3ac-2b^2+7bc-6c^2\\
\qquad\qquad\quad \underline{2ab\qquad\quad -2b^2+4bc\qquad\quad}\\
\qquad\qquad\qquad -3ac\qquad +3bc-6c^2\\
\qquad\qquad\qquad \underline{-3ac\qquad +3bc-6c^2}
\end{array}
$$

18. $a^2+2b^2-3c^2+bc+2ac+3ab$。以 $a+b-c$ 除之。

〔解〕本題同前用通例除法。 〔答 $a+2b+3c$〕

19. $6a^4+4b^4-a^3b+13ab^3+2a^2b^2$。以 $2a^2+4b^2-3ab$ 除之。

〔解〕除式與被除式。皆整列爲 a 之遞降方乘。用分離係數法。則得 $3+4+1$。即所求之商。爲 $3a^2+4ab+b^2$。

20. $x^4+y^4-z^4+2x^2y^2+2z^2-1$。以 $x^2+y^2-z^2+1$ 除之。

〔解〕$x^4+y^4-z^4+2x^2y^2+2z^2-1=x^4+2x^2y^2+y^4-(z^4-2z^2+1)$

$=(x^2+y^2)^2-(z^2-1)^2$。

故 $\{(x^2+y^2)^2-(z^2-1)^2\}\div\{(x^2+y^2)-(z^2-1)\}=(x^2+y^2)+(z^2-1)$。

21. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-c^3$。以 $a-b-c$ 除之。

〔解〕被除式 $=(a-b)^3-c^3$。

故 $\{(a-b)^3-c^3\}\div\{(a-b)-c\}=(a-b)^2+(a-b)c+c^2$。

22. $a^3+8b^3-c^3+6abc$。以 $a+2b-c$ 除之。

〔解〕由 74 章 $\{a^3+(2b)^3+(-c)^3-3a(2b)(-c)\}\div\{a+2b-c\}$

$=a^2+(ab)^2+(-c)^2-a(2b)-2b(-c)-(-c)a$。

故所求之商。爲 $a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca$。

23. $a^3+8b^3+27c^3+18abc$。以 $a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ 除之。

〔解〕由 **74** 章 $a^3+(2b)^3+(3c)^3-3a(2b)(3c)$

$=(a+2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab)$。以

$a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ 除之。得 $a+2b+3c$。

24. $27a^3-8b^3-27c^3-54abc$。以 $3a-2b-3c$ 除之。

〔解〕與前例同。其商爲 $9a^2+4b^2+9c^2+6ab-6bc+9ca$。

25. $acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc$。以 $ax-b$ 除之。

〔解〕用通常之除法如下。

$$
\begin{array}{r|l}
ax-b) & acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc\ (cx^2+dx-c \\
 & \underline{acx^3\qquad -bcx^2\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad\qquad adx^2-(ac+bd)x+bc \\
 & \qquad\qquad \underline{adx^2-bdx\qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -acx+bc \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-acx+bc}
\end{array}
$$

26. $2a^2x^2-2(b-c)(3b-4c)y^2+abxy$。以 $ax+2(b-c)y$ 除之。

〔解〕

$$
\begin{array}{r|l}
ax+2(b-c)y) & 2a^2x^2+abxy-2(b-c)(3b-4c)y^2\ (2ax-(3b-4c)y \\
 & \underline{2a^2x^2+4a(b-c)xy\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad -a(3b-4c)xy-2(b-c)(3b-4c)y^2 \\
 & \qquad \underline{-a(3b-4c)xy-2(b-c)(3b-4c)y^2}
\end{array}
$$

27. $9a^2b^3-12a^4b+3b^5+2a^3b^2+4a^5-11ab^4$。以 $3b^3+4a^3-2ab^2$ 除之。

〔解〕被除式 $=4a^5-12a^4b+2a^3b^2+9a^2b^3-11ab^4+3b^5$

及　　除式 $=4a^3-2ab^2+3b^3$。

故

$$
\begin{array}{r|l}
4+0-2+3) & 4-12+2+9-11+3\ (1-3+1 \\
 & \underline{4+\ 0-2+3\qquad\quad} \\
 & \quad -12+4+6-11+3 \\
 & \quad \underline{-12-0+6-9\qquad} \\
 & \qquad\qquad 4+0-2+3 \\
 & \qquad\qquad \underline{4+0-2+3}
\end{array}
$$

即 $a^2-3ab+b^2$

28. 用 $x+y$ 除 x^3+y^3 之結果。以求 $x+y+z$。除 $(x+y)^3+z^3$ 之商。

〔答 $(x+y)^2-(x+y)z+z^2$〕

29. 用 $x-y$ 除 x^3-y^3 之結果。以求 $x+y-2z$, 除 $(x+y)^3-8z^3$ 之商。

〔解〕本例與28例同法。$(x^3-y^3)\div(x-y)=x^2+xy+y^2$。

故以 $(x+y)$ 代 x。以 $2z$ 代 y。則答式爲

$\{(x+y)^3-(2z)^3\}\div\{(x+y)-2z\}=(x+y)^2+(x+y)2z+4z^2$。

第陸編

因子分割法

75. 定義 任意之代數式。其分母不含文字者。謂之整代數式。例如 $\frac{1}{2}a^3b-\frac{1}{4}b^3$ 爲整代數式。

又如 $3a^3b-4b^3$ 之爲整代數式。固不待論。

任意之代數式。指其某特別之文字。而稱爲整代數式者。必其分母不含此特別文字也。

例如 $\frac{x^2}{a}+\frac{x}{a+b}$ 雖分母含文字爲不整代數式。然以其不含 x。故就 x 言。仍爲整代數式。

代數式各項不含平方根及他之方根者。稱爲有理〔Rational〕式。

例如 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ 爲有理式。$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 爲無理式。

76. 因子 此編就任意之代數式。推究其有若何因子。而僅示其簡易之例。

故此編所推究者。其因子爲有理整代數式。或關於特別文字。而爲有理整代數式。卽其因子可整除其原代數式者也。

77. 一項因子 代數式之各項。皆含此一文字。可以之除盡各項者。卽爲其式之因子。

例如 $2ax+x^2=x(2a+x)$, $ax+a^2x^2=ax(1+ax)$

及 $2a^2b^2x+3a^2b^3y=a^2b^2(2x+3by)$ 皆易明瞭。

78*. 公式用法 由已知之恆同式。可比較而求得諸因子。是等因子。最易顯出。

例如 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。故

$a^2-4b^2=a^2-(2b)^2=(a+2b)(a-2b)$, $a^2-2=a^2-(\sqrt{2})^2=(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$a^4-16b^4=(a^2)^2-(4b^2)^2=(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)=(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$,

及 $a^3-9ab^2=a(a^2-9b^2)=a(a+3b)(a-3b)$。

又 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。故

$a^3+8b^3=a^3+(2b)^3=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$,

$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$,

及 $a^9+x^9=(a^3)^3+(x^3)^3=(a^3+x^3)(a^6-a^3x^3+x^6)$

$$=(a+x)(a^2-ax+x^2)(a^6-a^3x^3+x^6)。$$

又 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。故

$a^3b^3-\frac{1}{8}x^3y^3=(ab)^3-(\frac{1}{2}xy)^3=(ab-\frac{1}{2}xy)(a^2b^2+\frac{1}{2}abxy+\frac{1}{4}x^2y^2)$。

附與此同法之例於下。

(1) $(a+b)^2-(c+d)^2=\{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\}$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)。$$

(2) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$

$=\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{c^2-(a^2-2ab+b^2)\}=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$。爲必要之公式。

(3) $(a+2b)^3-(2a+b)^3$

$=\{(a+2b)-(2a+b)\}\{(a+2b)^2+(a+2b)(2a+b)+(2a+b)^2\}$

$=(b-a)(7a^2+13ab+7b^2)$。

79*. 視察之因子 x^2+px+q 之因子。可以視察而得,由恆同式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$。則 x^2+px+q。有 $x+a$, $x+b$ 之因子 $a+b=p$, $ab=q$。

〔法則〕由是而 x^2+px+q。有一次因子。爲 x 之係數 p。卽等於 $x+a$, $x+b$ 兩因子第二項之和。q 則等於其積。

例如 $x^2+7x+12$。則 $3+4=7$, $3\times4=12$。故

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)。$$

又 $x^2-7x+12$ 則 $(-3)+(-4)=-7$, $(-3)(-4)=12$。故

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)。$$

又 $x^2+3x-18$。則 $-3+6=3$, $-3\times6=-18$。故

$$x^2+3x-18=(x-3)(x+6)。$$

已知 x^2+px+q 之因子。爲 $x+a$ 及 $x+b$。則以同法觀察。可知 $x^2+pxy+qy^2$ 之因子爲 $x+ay$ 及 $x+by$。

又 $(x+y)^2+p(x+y)z+qz^2$ 之因子。爲 $x+y+az$ 及 $x+y+bz$。

由以上之結果。得 $x^2+7xy+12y^2=(x+3y)(x+4y)$

$$x^2+3xy^2-18y^4=(x+6y^2)(x-3y^2)。$$

$$(a+b)^2-7(a+b)x+10x^2=(a+b-2x)(a+b-5x)。$$

及 $$x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5(x^2)+4=(x^2-4)(x^2-1)$$

$$=(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)。$$

例題四

求次之各因子。

1. a^4-16b^4。

〔解〕原式 $=(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)=(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$。

2. $16x^4-81a^4b^4$。 〔答 $(4x^2+9a^2b^2)(2x-3ab)(2x+3ab)$〕

3. $16-(3a+2b)^2$。

〔解〕原式 $=\{4+(3a+2b)\}\{4-(3a+2b)\}=(4+3a+2b)(4-3a-2b)$。

4. $4y^2-(2z-x)^2$ 〔答 $(2y+2z-x)(2y-2z+x)$〕

5. $20a^3x^3-45axy^2$。

〔解〕原式 $=5ax(4a^2x^2-9y^2)=5ax(2ax+3y)(2ax-3y)$。

6. $36a^2x^6-4a^2x^2y^4$。 〔答 $4a^2x^2(3x^2+y^2)(3x^2-y^2)$〕

7. $(3a^2-b^2)^2-(a^2-3b^2)^2$。

〔解〕原式 $=\{(3a^2-b^2)+(a^2-3b^2)\}\{(3a^2-b^2)-(a^2-3b^2)\}$

$=(4a^2-4b^2)(2a^2+2b^2)=8(a^2-b^2)(a^2+b^2)=8(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$。

8. $(5a^2-3b^2)^2-(3a^2-5b^2)^2$。 〔答 $16(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$〕

9. $(5x^2+2x-3)^2-(x^2-2x-3)^2$。

〔解〕原式 $=\{(5x^2+2x-3)+(x^2-2x-3)\}\{(5x^2+2x-3)-(x^2-2x-3)\}$

$$=(6x^2-6)(4x^2+4x)=24x(x^2-1)(x+1)=24x(x-1)(x+1)^2。$$

10. $(3x^2-4x-2)^2-(3x^2+4x-2)^2$。 〔答 $16x(2-3x^2)$〕

11. $32a^3b^3-4b^9$。

〔解〕原式 $=4b^3(8a^3-b^6)=4b^3(2a-b^2)(4a^2+2ab^2+b^4)$。

12. $(a^2-2bc)^3-8b^3c^3$。 〔答 $(a^2-4bc)(a^4-2a^2bc+4b^2c^2)$〕

〔解〕原式 $=(a^2-2bc-2bc)\{(a^2-2bc)^2+(a^2-2bc)2bc+4b^2c^2\}$。

13. a^2-2a-8。

〔解〕$-4+2=-2$, $-4\times 2=-8$, 故

原式 $=(a-4)(a+2)$。

14. $x+12-x^2$

〔解〕原式 $=-(x^2-x-12)=-(x-4)(x+3)$。

15. $1-18x-63x^2$。

〔解〕$-21x+3x=-18x$, $-21x\times 3x=-63x^2$。故

$$1-18x-63x^2=(1-21x)(1+3x)。$$

16. $8a-4a^2-4$。

〔解〕原式 $=-4(a^2-2a+1)=-4(a-1)^2$。

17. $a^3b-4a^2b^2+3ab^3$。

〔解〕原式 $=ab(a^2-4ab+3b^2)=ab(a-3b)(a-b)$。

18. $a^4b+5a^3b^2+4a^2b^3$。

〔解〕原式 $=a^2b(a^2+5ab+4b^2)=a^2b(a+b)(a+4b)$。

19. $(b+c)^2-6a(b+c)+5a^2$。 〔答 $(b+c-5a)(b+c-a)$〕

20. $9(a+b)^2-6(a+b)(c+d)+(c+d)^2$。

〔解〕原式 $=\{3(a+b)\}^2-2\{3(a+b)\}(c+d)+(c+d)^2=\{3(a+b)-(c+d)\}^2$。

21. x^4-29x^2+100。

〔解〕原式 $=(x^2)^2-29(x^2)+100=(x^2-25)(x^2-4)$

$=(x+5)(x-5)(x+2)(x-2)$。

22. $100x^4-29x^2y^2+y^4$。 〔答 $(5x+y)(5x-y)(2x+y)(2x-y)$〕

23. $x^4-8x^2y^2z^2+16y^4z^4$。

〔解〕原式 $=(x^2)^2-2(x^2)(4y^2z^2)+(4y^2z^2)^2=(x^2-4y^2z^2)^2$

$=(x+2yz)^2(x-2yz)^2$。

24. $9a^6-10a^4b^2+a^2b^4$。 〔答 $a^2(a+b)(a-b)(3a+b)(3a-b)$〕

25. $x^2-2ax-b^2+2ab$。

〔解〕原式 $=(x^2-2ax+a^2)-(a^2-2ab+b^2)=(x-a)^2-(a-b)^2$

$=\{(x-a)+(a-b)\}\{(x-a)-(a-b)\}=(x-b)(x-2a+b)$。

26. $x^2+2xy-a^2-2ay$。 〔答 $(x-a)(x+2y+a)$〕

27. $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$。

〔解〕原式$=\{2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\}\{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}$

$=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}$

$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$。

28. $4(xy-ab)^2-(x^2+y^2-a^2-b^2)^2$。

〔答 $(x+y+a+b)(x+y-a-b)(x-y+a-b)(-x+y+a-b)$〕

80*. 普通二次式之因子

某特別文字卽x。求其二次式之因子。法如下。

x之普通二次式。爲ax^2+bx+c (60章)。但a, b及c皆不含x。

此問題須先將x之普通二次式。分解其有理兩因子。此各因子。卽x之一次式。卽爲x及x以外之文字或數字所成之有理式或無理式。

普通二次式。爲ax^2+bx+c。欲求其兩因子。必先將此式配爲兩平方之差。

〔注意〕將代數式化爲兩式平方之差A^2-B^2。最爲要法。因所求之兩因子。可從$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$解之。又$x^2+2ax+a^2$。爲完全之平方式。若祇有其首次兩項$x^2, 2ax$。欲配成完全三項式。則其第三項。必爲x係數$2a$之半之平方卽a^2。

例如x^2+6x。則其第三項。爲x係數6之半之平方。卽$3^2=9$。其完全平方式。卽$x^2+6x+9=(x+3)^2$。

又x^2+5x加$\left(\frac{5}{2}\right)^2$則得$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$。

又x^2-px加$\left(\frac{-p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}$。則得$x^2-px+\frac{p^2}{4}=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$。

81*. 二次式之因子分割法

求ax^2+bx+c之因子。

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$。

今由前章於 $x^2+\frac{b}{a}x$ 加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$。則爲 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$。故於前式之括弧內加減 $\frac{b^2}{4a^2}$。則

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right\}=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right\}。$$

由是而上式成爲兩平方之差之形。故所求之因子爲

$$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}$$

x 之二次式。常有 x 之一次兩因子。視 91 章。

〔第一例〕求 x^2+4x+3 之因子。

$$x^2+4x+3=x^2+4x+4-4+3=(x+2)^2-1$$

$$=(x+2+1)(x+2-1)=(x+3)(x+1)$$

〔簡法〕$4=3+1$, $3=3\times1$。故 $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$。

〔第二例〕求 x^2-5x+3 之因子。

$$x^2-5x+3=x^2-5x+\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\left(-\frac{5}{2}\right)^2+3=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=\left(x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$$

此例不能用簡法。

〔第三例〕求 $3x^2-4x+1$ 之因子。

$$3x^2-4x+1=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=3\left\{x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right\}$$

$$=3\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}=3\left(x-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)=(3x-1)(x-1)$$

〔簡法〕$3x^2-4x+1=3x^2-3x-x+1=3x(x-1)-(x-1)$

$$=(x-1)(3x-1)。$$

〔第四例〕求 $x^2+2ax-b^2-2ab$ 之因子。

$$x^2+2ax-b^2-2ab=x^2+2ax+a^2-a^2-b^2-2ab=(x+a)^2-(a+b)^2$$
$$=\{(x+a)+(a+b)\}\{(x+a)-(a+b)\}$$
$$=(x+2a+b)(x-b)。$$

〔簡法〕$x^2+2ax-b^2-2ab=x^2-b^2+2a(x-b)=(x-b)(x+b+2a)$。

82. 公式用法 可用下列之公式。求二次式之因子。

$$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}$$

例如 $3x^2-4x+1$ 其 $a=3,\ b=-4,\ c=1$, 故從上之公式

$$3x^2-4x+1=3\left\{x+\frac{-4}{2\times3}+\sqrt{\frac{16-4\times3\times1}{4\times9}}\right\}\left\{x+\frac{-4}{2\times3}-\sqrt{\frac{16-4\times3\times1}{4\times9}}\right\}$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\right)\left(x-\frac{2}{3}-\frac{2}{6}\right)=(3x-1)(x-1)。$$

83*. 係數之關係 依81章。

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)。$$

於此公式中 $a, b, c, \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲正或零或負。

〔第一〕$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲正。則 ax^2+bx+c 之兩因子。視 b^2-4ac 爲完全平方數卽有理。爲不完全平方數卽無理。

例如 $3x^2-4x+1$。$b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times1=4=2^2$。

故 $3x^2-4x+1$ 有有理兩因子 $3x-1$ 及 $x-1$。

又 x^2-5x+3。$b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times3=13$ 爲不完全平方數。

故 $x-5x+3$ 有無理兩因子 $x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ 及 $x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$。

〔第二〕$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲 0。則前之公式。

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right) 卽 a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2。$$

故 $b^2-4ac=0$。則 ax^2+bx+c。爲 x 之完全平方式。

例如 $4x^2-12x+9$。

$b^2-4ac=(-12)^2-4(4\times 9)=144-144=0$。

爲 $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$。

〔第三〕 $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲負。則 $\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 即 $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ 之平方根決不能求。何也。凡正數或負數。其乘得之平方。皆爲正而不爲負也。

a 爲正則 $\sqrt{-a}$。即負數之平方根。謂之虛數 (imaginary)。而他之正負各數量。則與此虛數量有區別。均謂之實數 (Real)。

虛數之理。詳於後篇 此處祇求能辨虛數而已。由是知 ax^2+bx+c 之因子。若 b^2-4ac 爲負 則爲虛數因子也。

〔註〕 求因子之通例 在求有理因子 而有時亦須求無理因子。例如 x^3-8。通例以 $(x-2)(x^2+2x+4)$ 爲分解因子之結果。若再求 x 之一次三因子。則

$$x^2+2x+4 \quad x^2+2x+1+3=(x+1)^2-(-3)$$
$$=(x+1)^2-(\sqrt{-3})^2=(x+1+\sqrt{-3})(x+1-\sqrt{-3}),$$

故 $x^3-8=(x-2)(x+1+\sqrt{-3})(x+1-\sqrt{-3})$。

求此虛數因子之理。詳於179章及193章。

84. 餘論 81章於二次式分爲一次兩因子(實數或虛數)已示其法則。而普通三次式 如 ax^3+bx^2+cx+d 又四次五次等。其求因子法 以本編係授初學。故暫不說明。然在特別各式。可示明求因子之法如下。

85.* 項之整列及集合 求代數式之因子。有時當將各項整列或集合之。其法如下。

例如 $1+ax-x^2-ax^3=(1+ax)-x^2(1+ax)$
$$=(1+ax)(1-x^2)=(1+ax)(1+x)(1-x)。$$

或書爲 $1-x^2+ax-ax^3=(1-x^2)+ax(1-x^2)$
$$=(1-x^2)(1+ax)=(1+x)(1-x)(1+ax)。$$

求代數式之因子 原無普通之法則 然必整列或集合之。如下所示之方法爲最要。

〔(第一)〕 代數式含一次方之文字。則括合其同文字之項。而其因子自易求得

〔第一例〕 求 $ab+bc+cd+da$ 之因子。

此式中 a, b, c, d 各爲一次方 今集合其 a 字。則

$$ab+bc+cd+da=(ab+da)+(bc+cd)=a(b+d)+c(b+d)=(b+d)(a+c)。$$

〔第二例〕 求 $x^2+(a+b+c)x+ab+ac$ 之因子。

此式中 a, b, c 各爲一次方。集合 a 字。則

$$x^2+(a+b+c)x+ab+ac=(x^2+bx+cx)+(ax+ab+ac)$$
$$=x(x+b+c)+a(x+b+c)=(x+b+c)(x+a)$$

〔第三例〕 求 $ax^3+x+a+1$ 之因子

集合一次方之 a 字。則

$$ax^3+x+a+1=a(x^3+1)+(x+1)=(x+1)\{a(x^2-x+1)+1\}$$

〔第四例〕 求 $a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc$ 之因子。

此式中惟 c 爲一次方。故集合 c 字。則

$$a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc=(a^2+2ab-3b^2)-2c(a-b)$$
$$=(a-b)(a+3b-2c)。$$

壹方乘之文字 在代數式其因子分割法甚易。

〔(第二)〕 代數式屬於某文字之二次式。如81章 其文字依遞降方乘整列。而求其因子(但爲有理因子)。

〔第一例〕 求 $a^2+3b^2-c^2+2bc-4ab$ 之因子。

$$a^2+3b^2-c^2+2bc-4ab=a^2-4ab+3b^2+2bc-c^2$$
$$=a^2-4ab+4b^2-b^2+2bc-c^2=(a-2b)^2-(b-c)^2$$
$$=\{(a-2b)+(b-c)\}\{(a-2b)-(b-c)\}=(a-b-c)(a-3b+c)。$$

〔第二例〕 求 $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$ 之因子。

$$原式=a^2-2ad+d^2-b^2-c^2+2bc=(a-d)^2-(b-c)^2$$
$$=(a-d+b-c)(a-d-b+c)。$$

〔第三例〕 求 $a^2+2ab-ac-3b^2+5bc-2c^2$ 之因子。

$$原式=a^2+a(2b-c)-3b^2+5bc-2c^2$$
$$=a^2+a(2b-c)+\left(\frac{2b-c}{2}\right)^2-\left(\frac{2b-c}{2}\right)^2-3b^2+5bc-2c^2$$

$$=\left(a+\frac{2b-c}{2}\right)^2-\left(\frac{4b^2-4bc+c^2}{4}+3b^2-5bc+2c^2\right)$$

$$=\left(a+\frac{2b-c}{2}\right)^2-\frac{16b^2-24bc+9c^2}{4}=\left(a+\frac{2b-c}{2}\right)^2-\left(\frac{4b-3c}{2}\right)^2$$

$$=\left(a+\frac{2b-c}{2}+\frac{4b-3c}{2}\right)\left(a+\frac{2b-c}{2}-\frac{4b-3c}{2}\right)$$

$$=(a+3b-2c)(a-b+c)。$$

(簡法) 原式 $=a^2+a(2b-c)-(3b^2-5bc+2c^2)$

$$=a^2+a(2b-c)-(3b-2c)(b-c)$$
$$=a^2+a\{(3b-2c)-(b-c)\}-(3b-2c)(b-c)$$
$$=a^2+a(3b-2c)-a(b-c)-(3b-2c)(b-c)$$
$$=a(a+3b-2c)-(b-c)(a+3b-2c)$$
$$=(a+3b-2c)(a-b+c)。$$

大注意 此簡法於a之係數$2b-c$。作爲第三項$(3b-2c)(b-c)$之和或差。卽$(3b-2c)-(b-c)=2b-c$。

此法見**79**章之$x^2+px+q=(x+a)(x+b)$。而由$p=a+b$, $q=ab$擴張之者。實爲此後之要法。

〔第四例〕 求$x^4+x^2-2ax+1-a^2$之因子。

此爲a之二次式。故依a之遞降方乘整列。則

原式 $=-\{a^2+2ax-x^4-x^2-1\}$

$$=-\{a^2+2ax+x^2-x^4-2x^2-1\}$$
$$=-\{(a+x)^2-(x^2+1)^2\}=-(a+x+x^2+1)(a+x-x^2-1)。$$

〔(第三)〕 代數式中某特別之一字。祇含兩個方乘。其一個之平方等於他一個。則其因子可如二次式解之。見**81**章。

〔第一例〕 求x^4-10x^2+9之因子。

$$x^4-10x^2+9=(x^2)^2-10(x^2)+25-25+9=(x^2-5)^2-16$$
$$=(x^2-5+4)(x^2-5-4)=(x^2-1)(x^2-9)$$
$$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)。$$

或 $x^4-10x^2+9=x^4-6x^2+9-4x^2=(x^2-3)^2-(2x)^2$

$$=(x^2-3+2x)(x^2-3-2x)=(x+3)(x-1)(x-3)(x+1)。$$

〔第二例〕求 x^4+x^2+1 之因子。

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)。$$

〔注意〕若令 $x^4+x^2+1=x^4+x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$=\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$ 則不合於理。

〔第三例〕求 x^6-28x^3+27 之因子。

$$x^6-28x^3+27=x^6-28x^3+14^2-14^2+27=(x^3-14)^2-13^2$$
$$=(x^3-14+13)(x^3-14-13)=(x^3-1)(x^3-27)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)(x-3)(x^2+3x+9)。$$

此例及第一例亦可用79章之方法求之。

〔第四例〕求 $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ 之因子。

原式 $=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^4-2b^2c^2+c^4)$

$=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2-(b^2+c^2)^2+(b^2-c^2)^2$

$=\{a^2-(b^2+c^2)\}^2-4b^2c^2$

$=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}$

$=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)$。

(簡法) 原式 $=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2$

$=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b+c)^2(b-c)^2$

$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$。

〔(第四)〕P 含有 x 之若干項者。如 aP^2+bP+c。可依81章

$$aP^2+bP+c=a\left(P+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(P+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)。$$

〔第一例〕求 $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$ 之因子。

以 P 代 x^2+x 則

原式 $=P^2+4P-12=(P+6)(P-2)$

$=(x^2+x+6)(x^2+x-2)=(x^2+x+6)(x+2)(x-1)$。

此例之x^2+x-2。依83章第壹$b^2-4ac=1^2-4\times1(-2)=9=3^2$。故得$(x+2)(x-1)$。

然在x^2+x+6。則$b^2-4ac=1^2-4\times1\times6=-23$。故不能得有理因子。

〔第二例〕求$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$之因子。

原式$=\{(x^2+x+4)+3x\}\{(x^2+x+4)+5x\}$

$=(x^2+4x+4)(x^2+6x+4)=(x+2)^2(x^2+6x+4)$

〔第三例〕求$2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$之因子。

$2P^2+5PQ+2Q^2=(2P+Q)(P+2Q)$。故

原式$=\{2(x^2+6x+1)+(x^2+1)\}\{(x^2+6x+1)+2(x^2+1)\}$

$=(3x^2+12x+3)(3x^2+6x+3)$

$=9(x^2+4x+1)(x+1)^2$。

〔第四例〕求$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$之因子。

原式$=(x^2+x+1)(x^2+x+1+1)-12$

$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12$

$=\{(x^2+x+1)+4\}\{(x^2+x+1)-3\}$

$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$

$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$。

或原式$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2-12$

$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10$

$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$。

例題五

求次列各式之因子。

1. x^3+ax^2-x-a。

〔解〕原式$=x(x^2-1)+a(x^2-1)=(x^2-1)(x+a)=(x+1)(x-1)(x+a)$。

2. $ac-bd-ad+bc$。

〔解〕原式$=a(c-d)+b(c-d)=(c-d)(a+b)$。

3. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$。

〔解〕原式$=a(c^2-d^2)-b(c^2-d^2)=(c^2-d^2)(a-b)=(c+d)(c-d)(a-b)$。

4. $acx^2+(bc+ad)xy+bdy^2$。

〔解〕 原式 $=ax(cx+dy)+by(cx+dy)=(cx+dy)(ax+by)$。

5. $acx^3+bcx^2+adx+bd$。

〔解〕 原式 $=ax(cx^2+d)+b(cx^2+d)=(cx^2+d)(ax+b)$。

6. $(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$。

〔解〕 原式 $=(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2$

$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)+(a+c+b+d)(a+c-b-d)$

$=(a+b+c+d)(a+b-c-d+a+c-b-d)=2(a+b+c+d)(a-d)$。

7. $a^4+a^3b-ab^3-b^4$。

〔解〕 原式 $=a^3(a+b)-b^3(a+b)=(a+b)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

8. $a^4-a^3b-ab^3+b^4$。 〔答 $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$〕。

9. $a^2b^2-a^2-b^2+1$。

〔解〕 原式 $=a^2(b^2-1)-(b^2-1)=(b^2-1)(a^2-1)$

$=(b+1)(b-1)(a+1)(a-1)$。

10. $x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2+z^4$。

〔解〕 原式 $=x^2(y^2-z^2)-z^2(y^2-z^2)=(y^2-z^2)(x^2-z^2)$

$=(y+z)(y-z)(x+z)(x-z)$。

11. $x^2y^2z^2-x^2z-y^2z+1$。

〔解〕 原式 $=y^2z(x^2z-1)-(x^2z-1)=(x^2z-1)(y^2z-1)$。

12. $x^4+x^3y+xz^3+yz^3$。 〔答 $(x+y)(x+z)(x^2-xz+z^2)$〕。

13. $x(x+z)-y(y+z)$。

〔解〕 原式 $=(x^2-y^2)+z(x-y)=(x-y)(x+y+z)$。

14. x^4-7x^2-18。 〔答 $(x+3)(x-3)(x^2+2)$〕。

15. x^4-23x^2+1。

〔解〕 原式 $=x^4+2x^2+1-25x^2=(x^2+1)^2-(5x)^2$

$=(x^2+1+5x)(x^2+1-5x)=(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$。

16. $x^4-14x^2y^2+y^4$。

〔解〕 原式 $=x^4+2x^2y^2+y^4-16x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(4xy)^2$

$=(x^2+y^2+4xy)(x^2+y^2-4xy)=(x^2+4xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$

17. x^8+x^4+1。

〔解〕 原式 $=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+1+x^2)(x^4+1-x^2)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$。

18. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$。

〔解〕 原式 $=x^4-\{(a+b)^2+(a-b)^2\}x^2+(a+b)^2(a-b)^2$

$=\{x^2-(a+b)^2\}\{x^2-(a-b)^2\}$

$=(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$。

19. $x^4-4x^2y^2z^2+4y^4z^4$。 〔答 $(x^2-2y^2z^2)^2$〕。

20. $x^2-2(a+b)x-ab(a-2)(b+2)$。

〔解〕 原式 $=x^2-2(a+b)x+(a+b)^2-(a+b)^2-ab(a-2)(b+2)$

$=\{x-(a+b)\}^2-[(a+b)^2+ab\{ab+2(a-b)-4\}]$

$=(x-a-b)^2-\{(a+b)^2-4ab+2ab(a-b)+a^2b^2\}$

$=(x-a-b)^2-\{(a-b)^2+2ab(a-b)+a^2b^2\}$

$=(x-a-b)^2-(a-b+ab)^2$

$=(x-a-b+a-b+ab)(x-a-b-a+b-ab)$

$=(x-2b+ab)(x-2a-ab)$。

〔簡法〕 原式 $=x^2-2(a+b)x-(ab-2b)(ab+2a)$

$=x^2-\{(ab+2a)-(ab-2b)\}x-(ab-2b)(ab+2a)$

$=x^2-(ab+2a)x+(ab-2b)x-(ab-2b)(ab+2a)$

$=x(x-ab-2a)+(ab-2b)(x-ab-2a)$

$=(x-ab-2a)(x+ab-2b)$。

21. $x^3+bx^2+ax+ab$。 〔答 $(x^2+a)(x+b)$〕。

22. $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$。

〔解〕 原式 $=(1+y)^2-x^2\{(1+y)^2+(1-y)^2\}+x^4(1-y)^2$

$=(1+y)^2-x^2(1+y)^2-x^2(1-y)^2+x^4(1-y)^2$

$=(1+y)^2(1-x^2)-x^2(1-y)^2(1-x^2)$

$=(1-x^2)\{(1+y)^2-x^2(1-y)^2\}$

$=(1+x)(1-x)\{1+y+x(1-y)\}\{1+y-x(1-y)\}$。

23. $x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz$。

〔解〕 原式 $=x^2-2xz+z^2-(y^2-4yz+4z^2)$

$=(x-z)^2-(y-2z)^2=(x-z+y-2z)(x-z-y+2z)$

$=(x+y-3z)(x-y+z)$。

24. $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$。

〔解〕依 a 之遞昇方乘整列而括合之。則

原式 $=(2y^2-5xy+2x^2)-a(y+x)-a^2$

$=(2y-x)(y-2x)-a\{(2y-x)-(y-2x)\}-a^2$

$=(2y-x)(y-2x-a)+a(y-2x-a)$

$=(y-2x-a)(2y-x+a)$。

25. $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$。

〔解〕原式 $=a^2-2a(b+c)-3b^2-3c^2+10bc$

$=a^2-2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2-3b^2-3c^2+10bc$

$=\{a-(b+c)\}^2-\{(b+c)^2+3b^2+3c^2-10bc\}$

$=(a-b-c)^2-(2b-2c)^2$

$=(a-b-c+2b-2c)(a-b-c-2b+2c)$

$=(a+b-3c)(a-3b+c)$。

26. $2a^2-7ab-22b^2-5a+35b-3$。

〔解〕依 a 之二次式整列之。則

原式 $=2a^2-a(7b+5)-(22b^2-35b+3)$

$=2a^2-a(7b+5)-(11b-1)(2b-3)$

$=2a^2-a\{(11b-1)-2(2b-3)\}-(11b-1)(2b-3)$

$=2a^2-a(11b-1)+2a(2b-3)-(11b-1)(2b-3)$

$=a(2a-11b+1)+(2b-3)(2a-11b+1)$

$=(2a-11b+1)(a+2b-3)$。若將原式括合其二次一次諸項。則得 $(2a^2-7ab-22b^2)-(5a-35b)-3$

$=(a+2b)(2a-11b)-\{3(2a-11b)-(a+2b)\}-3$

$=(2a-11b)(a+2b-3)+(a+2b-3)=(a+2b-3)(2a-11b+1)$。

27. $1+(b-a^2)x^2-abx^3$。

〔解〕原式 $=1-a^2x^2+bx^2(1-ax)=(1-ax)(1+ax+bx^2)$。

28. $1-2ax-(c-a^2)x^2+acx^3$。

〔解〕原式 $=1-2ax+a^2x^2-cx^2(1-ax)=(1-ax)(1-ax-cx^2)$。

29. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$。

〔解〕括合 a 之二次式。則

原式 $=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c)$。

30. $b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+2abc$。

〔解〕集合 a 之二次式。則

原式 $=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}=(b+c)(a+d)(a+c)$。

31. $a^2b-ab^2+a^2c-ac^2-2abc+b^2c+bc^2$。

〔解〕原式 $=a^2(b+c)-a(b^2+2bc+c^2)+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b+c)(a-b)(a-c)$。

32. $x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$。

〔解〕括合 a 與 b 之各項。則

原式 $=a\{x^3-xy(x-y)\}+b\{xy(x-y)+y^3\}+x^3+y^3$

$=ax(x^2-xy+y^2)+by(x^2-xy+y^2)+(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2-xy+y^2)(ax+by+x+y)$。

33. $ax(y^3+b^3)+by(bx^2+a^2y)$。

〔解〕原式 $=xy(ay^2+b^2x)+ab(b^2x+ay^2)=(b^2x+ay^2)(xy+ab)$。

34. $2x^3-4x^2y-x^2z+2xy^2+2xyz-y^2z$。

〔解〕原式 $=2x^3-4x^2y+2xy^2-z(x^2-2xy+y^2)$

$=2x(x^2-2xy+y^2)-z(x^2-2xy+y^2)$

$=(x^4-2xy+y^2)(2x-z)=(x-y)^2(2x-z)$。

35. $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$。

〔解〕依 x 之遞降方乘括合之。則

原式 $=x^4yz-x^3(y^3+z^3)+xyz(y^3+z^3)-y^3z^3$

$=yz(x^4-y^2z^2)-x(y^3+z^3)(x^2-yz)$

$=(x^2-yz)\{yz(x^2+yz)-x(y^3+z^3)\}$

$=(x^2-yz)(x^2yz+y^2z^2-xy^3-xz^3)$

$=(x^2-yz)\{z^2(y^2-zx)-xy(y^2-zx)\}$

$=(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$。

36. $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$。

〔解〕原式 $=(x^2+x-12)(x^2+x-2)=(x-3)(x+4)(x-1)(x+2)$。

37. $(x^2-4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$。

〔解〕原式 $=(x^2+4x+8+2x)(x^2+4x+8+x)$

$$=(x^2+6x+8)(x^2+5x+8)=(x+4)(x+2)(x^2+5x+8)。$$

38. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$。

〔解〕原式 $=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-24$

$=\{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}-24=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-24$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$。

39. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$。

〔解〕原式 $=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15$

$$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$$

$$=\{(x^2+8x+10)-3\}\{(x^2+8x+10)+5\}+15$$

$$=(x^2+8x+10)^2+2(x^2+8x+10)-15+15$$

$$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+10+2)=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$$

$$=(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)。$$

40. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$。

〔解〕原式 $=4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)-3x^2$

$=4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2$

$=4\{(x^2+16x+60)+x\}(x^2+16x+60)-3x^2$

$=4(x^2+16x+60)^2+4x(x^2+16x+60)-3x^2$

$=\{2(x^2+16x+60)+3x\}\{2(x^2+16x+60)-x\}$

$=(2x^2+35x+120)(2x^2+31x+120)=(2x^2+35x+120)(2x+15)(x+8)$。

86. 定理 x^n-a^n 可以 $x-a$ 除之。但 n 必為正整數。

$$x-a)\,x^n-a^n\,(x^{n-1}$$

$$\underline{x^n-ax^{n-1}}$$

$$ax^{n-1}-a^n=a(x^{n-1}-a^{n-1})\cdots\cdots\text{餘式}$$

由是而 $x^n-a^n=x^{n-1}(x-a)+a(x^{n-1}-a^{n-1})$ ……………………(A)

(A) 之右邊 $x^{n-1}-a^{n-1}$。如可以 $x-a$ 除盡。則凡右邊皆可以 $x-a$ 除盡。即知 $x-a$ 可以除盡其左邊。

故 $x-a$。可以除盡 $x^{n-1}-a^{n-1}$。即能除盡 x^n-a^n。

但 $x-a$ 能除盡 x^3-a^3。故能除盡 x^4-a^4。

即能除盡 x^5-a^5。

即能除盡 x^6-a^6。

準此推之。知 x^n-a^n 式。其 n 爲任何正整數。無不可以 $x-a$ 除盡。

87. 餘論 因 $x^n+a^n=x^n-a^n+2a^n$。故以 $x-a$ 除 x^n+a^n。可除盡 x^n-a^n 而仍餘 $2a^n$。

〔定理〕 $x-a$ 決不能除盡 x^n+a^n。

又 $x-a$ 能除盡 x^n-a^n。故以 $-a$ 代 a。則

$x^n-(-a)^n$。可以 $x-(-a)$ 除盡。

但 $x-(-a)=x+a$, n 爲奇數。則 $(-a)^n=-a^n$。爲偶數。則 $(-a)^n=a^n$。

〔定理〕 由是 $n=$ 奇數。則 x^n+a^n 可以 $x+a$ 除盡。

〔定理〕 由是 $n=$ 偶數。則 x^n-a^n 可以 $x+a$ 除盡。

〔四定理〕 由是 n 爲任意之正整數。則

$x-a$ 恆能除盡 x^n-a^n。

$x-a$ 恆不能除盡 x^n+a^n。

n 爲奇數。$x+a$ 恆能除盡 x^n+a^n。

n 爲偶數。$x+a$ 恆能除盡 x^n-a^n。

依上之定理而得

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}。$$

$$\frac{x^n\pm a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\pm a^{n-1}。$$

但第二式如 n 爲奇數。則用複號 $\pm$ 中之 $+$。n 爲偶數。則用複號 $\pm$ 中之 $-$。

88. 定理 含 x 之有理整代數式。如用 a 代 x。而此式爲 0。則 $x-a$。必爲此式之因子(最必要)。

此有理式。依 x 之遞降方乘。整列之如下。

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

由題意用a代x。而設爲等於0如下。

$$aa^n+ba^{n-1}+ca^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots=0.$$

從原式減去此式是減0也。故仍得原式。卽

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots-(aa^n+ba^{n-1}+ca^{n-2}+\cdots)$$
$$=a(x^n-a^n)+b(x^{n-1}-a^{n-1})+c(x^{n-2}-a^{n-2})+\cdots\cdots$$

由前章之定理。知x^n-a^n, $x^{n-1}-a^{n-1}$, $x^{n-2}-a^{n-2}$, 皆能以$x-a$除盡。故$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots$亦能以$x-a$除盡。而爲其因子。

〔別證〕此定理又可證之如下。

以$x-a$除$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$令其商爲Q。其餘爲R。則

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots=Q\ (x-a)+R\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

此恆同式不論用何數代x。皆合於理。

故令$x=a$。則

$$aa^n+ba^{n-1}+ca^{n-2}+\cdots\cdots=Q\ (a-a)+R=R,\cdots\cdots\cdots(B)$$

但Q爲含x之式。故易x爲a。則Q之値當變。故爲Q′。又R爲$x-a$除原式之餘式。不含有x。故x之値雖變。而R仍爲R。

由是而R爲0。則(B)之左邊爲0。卽用a代x之原式爲0。其原式能以$x-a$除盡。若用a代x而不爲0。則(B)之左邊。卽爲以$x-a$除原式之餘式。

〔定理〕由是於x之有理整代數式用a代x。則其變化之式爲以$x-a$除原式之餘式。

〔第一例〕求以$x-2$除x^3-4x^2+2之餘數式。

令$x=2$。則餘數$=2^3-4.2^2+2=-6$。

〔第二例〕求以$x-a$除$x^3-2a^2x+a^3$之餘數。

令$x=a$。則餘數$=a^3-2a^2a+a^3=0$。卽原式能以$x-a$除盡。

〔第三例〕示$x-1, x-5, x+2$及$x+4$爲$x^4-23x^2-18x+40$之因子。

令$x=1$ 則原式$=1^4-23.1^2-18.1+40=0$ $\therefore x-1$爲因子。

令$x=5$ 則原式$=5^4-23.5^2-18.5+40=0$ $\therefore x-5$爲因子。

令$x=-2$則原式$=(-2)^4-23(-2)^2-18(-2)+40=0$ $\therefore x+2$爲因子。

令$x=-4$則原式$=(-4)^4-23(-4)^2-18(-4)+40=0$ $\therefore x+4$爲因子。

〔第四例〕 示 $a-b$。爲 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 之因子。

令 $a=b$ 則原式 $=b^3(b-c)+b^3(c-b)+0=0$。

〔第五例〕 示 a 爲 $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3$ 之因子。

令 $a=0$ 則原式 $=(b+c)^3-(b+c)^3-(-b+c)^3-(b-c)^3$

$$=(b+c)^3-(b+c)^3+(b-c)^3-(b-c)^3=0。$$

增補之問題 求 $x-a$ 除 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots$ 之商及餘式。

設商爲 Q。餘數爲 R。依前之定理。則

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots=Q(x-a)+R。$$

以 a 代 x 得 $aa^n+ba^{n-1}+ca^{n-2}+\ldots\ldots=R$。

由減法而 $a(x^n-a^n)+b(x^{n-1}-a^{n-1})+c(x^{n-2}-a^{n-2})+\ldots\ldots=Q(x-a)$。

以 $x-a$ 除之。得

$a(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots)+b(x^{n-2}+x^{n-3}a+\ldots)+c(x^{n-3}+\ldots)=Q$。

卽 $Q=ax^{n-1}+(aa+b)x^{n-2}+(aa^2+ba+c)x^{n-3}+\ldots\ldots$

〔例〕 求 $x-m$ 除 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 之商及餘式。

$$商=ax^3+(am+b)x^2+(am^2+bm+c)x+am^3+bm^2+cm+d,$$

及餘式 $=am^4+bm^3+cm^2+dm+e$。

89. 餘論 於代數式 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots$ 內用 a 代 x。若此式爲 0。則 $x-a$ 爲其因子。此理前已證明之。

今以 $x-a$ 除此式。則其商之第一項(x 之最高次項)必爲 ax^{n-1}。由是原式 $=(x-a)(ax^{n-1}+\ldots\ldots)$。

又設 $x=\beta$。而原式爲 0。則 $x=\beta$。其 $(x-a)(ax^{n-1}+\ldots)$ 式亦必爲 0。但 $x=\beta$ 時。則 $x-a$ 不能爲 0。故知 $ax^{n-1}+\ldots$ 式當爲 0。故 $ax^{n-1}+\ldots$ 能以 $x-\beta$ 除盡。

由是原式 $=(x-a)(x-\beta)(ax^{n-2}+\ldots)$。

又如以 $\gamma,\ \delta\ldots\ldots$ 等代 x。而原式亦爲 0。則由同理而得

原式 $=(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots\ldots(ax^{n-r}+\ldots\ldots\ldots)$,

但 r 爲 $x-a,\ x-\beta,\ x-\gamma,\ x-\delta\ldots\ldots$ 諸因子之數。若 $r=n$。則 $ax^{n-r}=ax^0$ 卽 a。

由是原式 $=a(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots\ldots$

在上式之 $x-a,\ x-\beta,\ x-\gamma,\ x-\delta,\ldots\ldots$ 爲 n 個因子。

〔推論〕若 $x-\alpha$, $x-\beta$,……等因子在 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots$ 式內不僅一個。例如 $x-\alpha$ 因子有 p 個。$x-\beta$ 因子有 q 個……則

原式 $=a(x-\alpha)^p(x-\beta)^q\ldots\ldots$ 故 $p+q\ldots\ldots=n$。

90. 凡 x 之 n 次式 x 之值。不能多於 n 個。若於 n 個外。別以他字代 x。則其式不能爲 0。

何則。如 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$ 其 x 之 n 個値 $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ 等。能令其式爲 0。故依前章得

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$

今若於 x 之 n 個 $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ 外。設有 x 之値 k 而以之代 x。則 $a(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)\ldots=0$。

然 k 與 $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ 各値不同。則 $k-\alpha$, $k-\beta$, $k-\gamma\ldots$ 各因子。均不能爲 0。而必 $a=0$。

故 x 之 n 次式若多於 n 個值。而其式爲 0 者。則其第一項（x 之最高次項）之係數必爲 0。

但 a 爲 0。則原式必變爲 $n-1$ 次式。卽 $bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$ 而此式 x 之値。若多於 $n-1$ 個。能令其式爲 0。則依同理必 $b=0$。

由此依同理類推。則必 $c=0$, $d=0$ 一切係數。可順次而知其等於 0 也。

〔定理之再述〕由是 x 之 n 次式。若 x 之値多於 n 個。而其式爲 0 者。必其係數皆爲 0 而後可。否則 x 之値。不能多於 n 個。若多於 n 個。其式不能爲 0。

91. 定理 凡 x 之兩 n 次式。若 x 有多於 n 個之値相等。則兩式全相等。（此卽謂兩 n 次式。其以字代 x。而其値相等者。不能多於 n 個。若多於 n 個。則兩式相同云云）。

如 x 之兩 n 次式。爲

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots$$

及 $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots$

設此兩式中。其 x 有多於 n 個之値相等。則兩式之差。爲

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots-(px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots)。$$

卽 $(a-p)x^n+(b-q)x^{n-1}+(c-r)x^{n-2}+\ldots\ldots$ 是 x 之值多於 n 個。而其式爲 0。則由前章之定理。其係數皆爲 0。

卽 $a-p=0,\quad b-q=0,\quad c-r=0\ldots\ldots$

卽 $a=p,\quad b=q,\quad c=r\ldots\ldots$ 則兩式全相同。故無論以何值代 x。而彼此恆相等。

〔別言〕是故 n 次之兩代數式。其代 x 之值。多於 n 個而相等。則兩式內 x 之同方乘之係數必相等。

有限項(自二項以至多項。其項數有限者)之兩代數式。其所含文字之任何值相等。則其同文字同方乘之係數必相等。

故有限項之任意兩代數式。其所含文字之任何值相等。則任意一文字之各方乘之係數亦相等。(此定理。甚爲重要。以下諸編屢用及之)。

92. 定理 含 x 之有理整代數式。分割其一次因子。祇有一法。

例如 x^2-3x+2。分割爲 $(x-1)(x-2)$。但僅此一法而已。決不能分割爲 $(x+1)(x-2)$ 或 $(x+2)(x+4)$。

設如 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$ 能分割爲 $a(x-\alpha)^p(x-\beta')^q\ldots$ 又依他之方法。分割爲 $a(x-\alpha')^m(x-\beta')^s\ldots$ 則令 $x=\alpha$ 而原式爲 0 時。其第二方法變得之式。爲

$a(\alpha-\alpha')^m(\alpha-\beta')^s\ldots=0$。然則 $\alpha-\alpha',\ \alpha-\beta\ \ldots\ldots$ 諸因子內。必有一因子爲 0。

今定 $\alpha=\alpha'$。於此兩方法之式。皆能以 $x-\alpha$ 除盡。則各因子之數相等。卽 $p=m$。

何則。$a(x-\alpha)^p(x-\beta)^q\ldots\ldots=a(x-\alpha')^m(x-\beta')^s\ldots$ 若 p 與 m 不相等。則以 $x-\alpha$ 除之。兩式內必有一式尙餘 $x-\alpha$。如

$a(x-\beta')^q\ldots=a(x-\alpha)^{m-p}(x-\beta')^s\ldots$ 則 $x=\alpha$ 時。僅有一式爲 0。於理爲不合。

故由 α 等於 α'。同法推得 $\beta,\ldots\beta'\ldots$ 亦各相等。卽兩方法全然相同。

93. 輪換次序〔Cyclical order〕 代數式整列於特別之順序。亦爲必要之法。

例如代數式$bc+ca+ab$。爲依輪換次序整列者也 輪換次序如右式即換a爲b。換b爲c 換c爲a。謂之a, b, c輪換

於$bc+ca+ab$式。第一項bc換b爲c。換c爲a。即得第二項ca。又換此c爲a,a爲b。即得第三項ab。

但不可如$ab+ca+cb$式之不依順序。

又$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$亦爲依$a, b, c$之輪換次序整列者也。即從$a^2(b-c)$。得$b^2(c-a)$。從$b^2(c-a)$得$c^2(a-b)$。又如$(b-c)(c-a)(a-b)$亦爲依輪換次序整列者。

94. 等勢式〔Symmetrical expressions〕凡代數式以其任意之兩文字互換。而其值不變者。稱之爲等勢式

例如$a+b+c$, $bc+ca+ab$, $a^3+b^3+c^3-3abc$, 皆爲等勢式。何則。因$a+b+c$若將a, b互換 則爲$b+a+c$。或將a, c互換。而爲$c+b+a$。其值皆不變也。

又於$bc+ca+ab$式互換a, b。則爲$ac+cb+ba$。其值不變。

又於$a^3+b^3+c^3-3abc$式互換b, a。則爲$b^3+a^3+c^3-3bac$。其值亦不變故爲等勢式。

設有$a+2b+3c$式將a,b互換。爲$b+2a+3c$。則其值變。故非等勢式。

代數式若祇以任意之二字互換。則其值變。若輪換其諸文字。則其值不變者謂之輪換等勢式。

例如$a^2b+b^2c+c^2a$互換a, b。則爲

$b^2a+a^2c+c^2b$。其值變。若將a, b, c輪換。則爲

$b^2c+c^2a+a^2b$。其值不變。故爲輪換等勢式。

又$(b-c)(c-a)(a-b)$式互換a, b。則爲$(a-c)(c-b)(b-a)$即$-(c-a)(a-b)(b-c)$。其值變。然將a, b, c輪換。則得$(c-a)(a-b)(b-c)$。其值不變。故爲輪換等勢式。

兩等勢式之積或商。亦爲等勢式。何則。各式內之文字。既能互換或輪換。而其值不變。則其積及商內之文字。亦必互換或輪換而其值不變。

〔**等勢公式**〕等勢公式。學者以能自作之爲要。

例如$2a+3b+5c$。非等勢式。若

$3a+3b+3c$, $-7a-7b-7c$。則一見而知爲一次等勢式。蓋 a, b, c 之係數常相等。即爲等勢式也。故 $La+Lb+Lc$ 即 $L(a+b+c)$。知其爲一次之等勢公式。

又 a, b, c 之二次等勢式爲 $2a^2+2b^2+2c^2$ 及 $6ab+6bc+6ca$。或 $8a^2+8b^2+8c^2+6ab+6bc+6ca$。故 $L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)$ 爲二次之等勢公式。何則。$L=2$, $M=0$。則得第一式。$L=0$, $M=6$。則得第二式。$L=8$, $M=6$。則得第三式。

一次式與二次式互換輪換皆同。自三次式以上。互換者雖可輪換。而輪換者不能互換。

例如 a, b, c 之三次互換公式爲

$$L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+Nabc。$$

又輪換公式爲

$$L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+b^2c+c^2a)+N(ab^2+bc^2+ca^2)+Pabc。$$

四次以上解法同。

〔第一例〕求 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 之因子。

令 $a=b$。則原式 $=b^2(b-c)+b^2(c-b)+0=b^2(b-c)-b^2(b-c)=0$。

故 $a-b$ 爲原式之一因子。見(88章)。同法得 $b-c$, $c-a$ 亦爲因子。而原式爲三次式。故其因子之數有三。

$$\therefore 原式=L(a-b)(b-c)(c-a)。$$

但 L 爲 a, b, c 同一之某係數。故依91章。原式與右邊之式。其同文字之係數當相等。

由是原式與右邊之式。比較其 a^2b 之係數。則於原式 a^2b 之係數爲 $+1$。於右邊 a^2b 之係數爲 $-L$。故 $-L=1$。即 $L=-1$。

$$\therefore 原式=-(a-b)(b-c)(c-a)。$$

數字代用法 此例用任意之值代 a, b, c。其 L 常同。故 $a=0$。$b=1$, $c=2$。則

$$原式=L(a-b)(b-c)(c-a)。$$

即 $0+1^2(2-0)+2^2(0-1)=L(0-1)(1-2)(2-0)$。

即 $\quad -2=2L。\qquad \therefore L=-1。$

如上所用 a, b, c 之值。取其運算之簡易。若令 $a=99, b=7, c=8$ 則 $99^2(7-8)+7^2(8-99)+8^2(99-7)=L(99-7)(7-8)(8-99)$。依此運算亦為 $L=-1$。

〔第二例〕求 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 之因子。

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\dots\dots(1)$$

令 $b=c$。則(1)式為 0。故 $b-c$ 為(1)式之因子。同法得 $c-a, a-b$ 亦為(1)式之因子。但(1)式為四次式。故在 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之三次因子外。尚有一因子。為 a, b, c 之一次等勢式。即 $L(a+b+c)$。則(1)式與下之(2)式同值。

$$L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)\dots\dots(2)$$

比較其 a^3b 之係數。則(1)式為 1。(2)式為 $-L$。故 $1=-L, \therefore L=-1$。

由是原式 $=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$。

通例之分割法 用此例則當依 a 之遞降方乘整列之。

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}$〔此依 b 之遞降方乘整列者〕

$=(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c-a)\}$

$=(b-c)(c-a)\{-c(a-b)-(a^2-b^2)\}$〔此括 c 之一方乘〕

$=-(b-c)(c-a)(a-b)(c+a+b)$。

〔第三例〕求 $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$ 之因子。

$$b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)\dots\dots(1)$$

令 $b=c$。則(1)式為 0。故 $b-c$ 為(1)式之因子。由是得 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之三次因子。但(1)式為五次式。尚有 a, b, c 二次等勢式之因子。故(1)式變為同值之(2)式。如下

$$(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\}\dots\dots(2)$$

比較其 a^4b 之係數。則(1)式為 0。(2)式為 $-L$。 $\therefore L=0$,

又比較其 a^3b^2 之係數。則(1)式為 1。(2)式為 $L-M$。 $\therefore 1=L-M$。但 $L=0$。 $\therefore M=-1$。

由是原式 $=-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$。

常通之因子分割法 用此例。則

$b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$

$=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$〔此係 a 之遞降方乘整列者〕

$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$

$=(b-c)\{b^2(c^2-a^2)-a^2b(c-a)-ca^2(c-a)\}$〔$b$ 爲遞降方乘〕

$=(b-c)(c-a)\{b^2(c+a)-a^2b-ca^2\}$

$=(b-c)(c-a)\{-c(a^2-b^2)-ab(a-b)\}$〔括 c 之一方乘〕

$=-(b-c)(c-a)(a-b)\{c(a+b)+ab\}$。

〔注意〕查理斯密斯氏於因子分割法。未見完善。今多從篤獨亨他氏本改正之。

例題六

求下列各式之因子。

1. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$。

〔解〕$y=z$。則原式$=0+(y-x)^3+(x-y)^3=0$。

$\therefore y-z$ 爲因子。 $\therefore$ 原式$=L(y-z)(z-x)(x-y)$。

比較 x^2y 之係數。則 $-3=-L$。 $\therefore L=3$。

由是原式$=3(y-z)(z-x)(x-y)$。

〔別法〕$(y-z)+(z-x)=y-x=-(x-y)$ 已可明瞭。兩邊各求其立方。則 $[(y-z)+(z-x)]^3=-(x-y)^3$。

卽 $(y-z)^3+(z-x)^3+3(y-z)(z-x)\{(y-z)+(z-x)\}=-(x-y)^3$。

卽 $(y-z)^3+(z-x)^3+3(y-z)(z-x)(y-x)=-(x-y)^3$。

$\therefore (y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=-3(y-z)(z-x)(y-x)$。

2. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$。

〔解〕原式$=(y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$。

因 x^4y 之係數。爲 $-5=-L$。 $\therefore L=5$。

又 $x=0$。$y=1$。$z=2$。則

$(1-2)^5+(2-0)^5+(0-1)^5=(1-2)(2-0)(0-1)\{5(0+1+4)+M(0+2+0)\}$。

卽 $-1+32-1=2\{25+2M\}$。 $\therefore M=-5$。

由是原式$=5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$。

3. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$。

〔解〕$b=c$。則原式$=0$。$\therefore$ 有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子。

又 $b=-c$。則原式$=a^4(c^2-c^2)+c^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-c^2)=0$。

$\therefore$ 有 $(b+c)(c+a)(a+b)$ 之因子。

由是原式$=b(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$。

比較 a^4b^2 之係數。則 $1=-L$。 $\therefore L=-1$。

$\therefore$ 原式$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$。

4. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$。

〔解〕原式$=L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$。$L=1$。

$\therefore$ 原式$=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$。

5. $a(b-c)^5+b(c-a)^5+c(a-b)^5$。

〔解〕原式有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之三次因子。而原式爲六次式。故尙有三次因子。由是

$$原式=(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+b^2c+c^2a)$$
$$+N(ab^2+bc^2+ca^2)+Pabc\}$$

比較 a^5b 之係數。則 $-1=-L$。 $\therefore L=1$。

比較 a^4b^2 之係數。則 $0=L-M$。 $\therefore M=L=1$。

比較 a^2b^4 之係數。則 $0=-L+N$。 $\therefore N=L=1$。

又 $a=1$。$b=2$。$c=3$。則

$$1(2-3)^5+2(3-1)^5+3(1-2)^5=(2-3)(3-1)(1-2)\{(1^3+2^3+3^3)$$
$$+(1^2.2+2^2.3+3^2.1)+(1.2^2+2.3^2+3.1^2)+P\times1\times2\times3\},$$

卽 $-1+64-3=2\{1+8+27+2+12+9+4+18+3+6P\}$。 $\therefore P=-9$。

$\therefore$ 原式$=(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$
$-9abc\}$。

6. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$。 〔答 $-(b-c)(c-a)(a-b)$〕

7. $b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)+a^3b^3(a-b)$。

〔解〕原式爲七次式。是三次因子 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之外。尙有四次因子。然考原式 a 之最高方乘爲 a^4。故四次式內之 a 方乘高於二次者。可省畧之如下。

原式$=(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+M(a^2bc+b^2ca+c^2ab)\}$

比較 a^4b^3 之係數。則 $1=-L$, $\therefore L=-1$。

設 $a=1, b=2, c=3$ 則

$2^3.3^3(2-3)+3^3.1^3(3-1)+1^3.2^3(1-2)$

$=(2-3)(3-1)(1-2)\{-(1^2.2^2+2^2.3^2+3^2.1^2)+M(1^2.2.3+2^2.3.1+3^2.1.2)\}$

即 $-216+54-8=2\{-49+36M\}$ $\therefore M=-1$。

$\therefore$ 原式 $=-(b-c)(c-a)(a-b)\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)\}$。

8. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$。

〔答 $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$〕

9. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$。

〔解〕原式 $=(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+b^2c+c^2a)$

$+N(ab^2+bc^2+ca^2)+Pabc\}$。

比較 a^5b^1 之係數。則 $1=-L$。 $\therefore L=-1$。

比較 a^4b^2 之係數。則 $0=L-M$。 $\therefore M=L=-1$。

比較 a^2b^4 之係數。則 $0=-L+N$。 $\therefore N=L=-1$。

若 $a=1, b=2, c=3$, 則得 $P=-1$。由是原式為

$-(b-c)(c-a)(a-b)(a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+abc)$。

10. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$。

〔解〕$a=0$ 則原式 $=(b+c)^3-(b+c)^3-(c-b)^3-(b-c)^3=0$。

$\therefore$ 原式 $=Labc$, $a=b=c=1$, 則

$(1+1+1)^3-(1+1-1)^3-(1+1-1)^3-(1+1-1)^3=L\ 1.1.1$。

$\therefore L=24$。由是原式 $=24abc$。

11. $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$。

〔解〕原式 $=abc\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\}$。

若 $a=b=2$。$c=-1$ 則 $(2+2-1)^5-(2-1-2)^5-(-1+2-2)^5-(2+2-1)^5$

$=-4\{L(4+4+1)+M(4-2-2)\}$ 即 $243+1+1-3125=-4\{9L+0\}$

$\therefore L=80$。又 $a=b=c=1$。則

$(1+1+1)^5-(1+1-1)^5-(1+1-1)^5-(1+1-1)^5=\{80(1+1+1)$

$+M(1+1+1)\}$

$\therefore M=0$。由是原式 $=80abc(a^2+b^2+c^2)$。

12. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$。

〔解〕$a=0$ 則原式 $=b(c-b)^2+c(b-c)^2+(b+c)(c-b)(b-c)$

$=(b-c)^2(b+c)-(b+c)(b-c)^2=0$。

$\therefore$ 原式$=Labc$。$a=b=c=1$。則 $1+1+1+1=L$,

$\therefore L=4$ 由是原式$=4abc$。

13. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$。

〔答 $2abc$〕

14. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+a(a-b+c)(a+b-c)$
$+b(a+b-c)(-a+b+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$。

〔答 $4abc$〕

15. $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(a+b-c)(-a+b+c)$
$+(a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$。 〔答 $-4(b-c)(c-a)(a-b)$〕

16. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$。 〔答 $3(y+z)(z+x)(x+y)$〕

17. $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$。

〔解〕$x=-y$。則原式$=(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5=0$。

$\therefore$ 原式$=(x+y)(y+z)(z+x)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$。

比較 x^4y 之係數。則 $5=L$, 若 $x=y=1$, $z=0$。則

$2^5-1-1=2\{5(1+1)+M(1)\}$ $\therefore M=5$。

由是原式$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$。

18. $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$。〔答 $-(b-c)(c-a)(a-b)$〕

19. $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$。

〔答 $-2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$〕

20. $(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$。

〔答 $-(b-c)(c-a)(a-b)\{3(a^2+b^2+c^2)+5(bc+ca+ab)\}$〕

21. $a^3+b^3+c^3+5abc-a(a-b)(a-c)-b(b-c)(b-a)-c(c-a)(c-b)$。

〔答 $(b+c)(c+a)(a+b)$〕

22. $a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$。

〔解〕$b=c$。則原式$=c^2(2c)(c+a)(c-a)+c^2(c+a)(2c)(a-c)$

$=2c^3(c^2-a^2)-2c^3(c^2-a^2)=0$。

故原式有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子。

又 $a+b+c=0$。則

原式$=a^2(-c)(-b)(b-c)+b^2(-a)(-c)(c-a)+c^2(-b)(-a)(a-b)$

$=abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}=abc\{0\}=0$。

由是原式$=L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2$比得$L=-1$。

卽原式$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2$。

23. $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$。

〔解〕$x+y+z=0$。則原式$=(-x)(-y)(-z)+xyz=0$,

$\therefore$ 原式$=(x+y+z)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$,

$\therefore L=0,\ M=1$。由是原式$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$。

24. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+abc(a+b+c)$
$+(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)$。 〔答 $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$〕

25. $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$。

〔答 $12xyz(x+y+z)$〕

26. $a^2(b+c-2a)+b^2(c+a-2b)+c^2(a+b-2c)+2(c^2-a^2)(c-b)$
$+2(a^2-b^2)(a-c)+2(b^2-c^2)(b-a)$。 〔答 $-3(b-c)(c-a)(a-b)$〕

27. $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d)+(c+a-b-d)^4(c-a)(b-d)$
$+(a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)$。

〔解〕$b=c$ 則原式$=(a-d)^4(c-a)(c-d)+(a-d)^4(a-c)(c-d)=0$。

又$d=a$則原式$=0$。如此。則

原式$=L(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$。

$\therefore L=16$,因是原式$=16(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$。

28. $12\{(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(z+x)^{2n}-(x+y)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\}$
能以$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$除盡。

〔證〕$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4=12xyz(x+y+z)$

今於第一式令$x=0$。則

$12\{(y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-z^{2n}-y^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\}=0$。

又$x+y+z=0$。則$12\{-(-x)^{2n}-(-y)^{2n}-(-z)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\}=0$

故第一式有$12, x, y, z, (x+y+z)$之因子。卽可以第二式除盡之。

29. 求證$a^3(b+c-a)^2+b^3(c+a-b)^2+c^3(a+b-c)^2+abc(a^2+b^2+c^2)$
$+(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=2abc(bc+ca+ab)$。

〔證〕左邊$a=0$,則左邊$=0$。故有abc之因子。由是左邊爲

$abc\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\}$。考得$L=0,\ M=2$卽與右邊相等

30. 試證 $(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-9(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$
$=2(a-b)^3(a-c)^3+2(b-c)^3(b-a)^3+2(c-a)^3(c-b)^3$。

〔證〕 $x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b$, 則

$x+y+z=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$。 $\therefore\ x+y=-z$

$(x+y)^3=-z^3$。 卽 $x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3$。

$\therefore\ x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)=3xyz$。又 $(x^3+y^3+z^3)^2=9x^2y^2z^2$。

卽 $x^6+y^6+z^6+2x^3y^3+2y^3z^3+2z^3x^3=9x^2y^2z^2$。

$\therefore\ x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2=-2x^3y^3-2y^3z^3-2z^3x^3$。

卽 $(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-9(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$

$$=-2(b-c)^3(c-a)^3-2(c-a)^3(a-b)^3-2(a-b)^3(b-c)^3$$
$$=2(c-b)^3(c-a)^3+2(a-c)^3(a-b)^3+2(b-a)^3(b-c)^3。$$

31. 證 $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+(c+d)^3$
$=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$。

〔證〕 $a+b+c+d=0$。則左邊 $=0$。卽易知其等於右邊。

32. 化 $4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2$ 爲最簡式。

〔解〕 $a=0$。則原式 $=4(b^2)^3-(-b)^2(2b)^2(b)^2=0$。

又 $a=-b$。則原式 $=4(a^2-a^2+a^2)^3-(2a)^2(-a)^2(a)^2=0$。

由是原式 $=ab(a+b)\{L(a^3+b^3)+M(a^2b+ab^2)\}$

$$=ab(a+b)^2\{L(a^2-ab+b^2)+Mab\}。$$

$\therefore$ 原式 $=ab(a+b)^2\{L(a^2-2ab+b^2)+(L+M)ab\}$。

$a=b=1$。則

$4(1+1+1)^3-(1-1)^2(1+2)^2(2+1)^2=1(1+1)^2\{L(1-2+1)+(L+M)\}$。

卽 $108=4(L+M)$。 $\therefore\ L+M=27$。又 $a=2,\ b=1$。則

$4(4+2+1)^3-(2-1)^2(2+2)^2(4+1)^2=2(2+1)^2\{L(4-4+1)+(27)2\}$。

卽 $1372-400=18\{L+54\}$。 $\therefore\ L=0,\ M=27-L=27$。

由是原式 $=ab(a+b)^2\{27ab\}=27a^2b^2(a+b)^2$。

33. $a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4(a^2+b^2-c^2)^3$。能以
$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ 除盡之。

〔證〕 $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

$=-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$。

設 $a+b+c=0$。則第一式

$=a^4\{b^2+c^2-(b+c)^2\}^3+b^4\{c^2+a^2-(c+a)^2\}^3+c^4\{a^2+b^2-(a+b)^2\}^3$

$=a^4\{-2bc\}^3+b^4\{-2ca\}^3+c^4\{-2ab\}^3$

$=-8a^3b^3c^3(a+b+c)=-8a^3b^3c^3(0)=0$。$\therefore$ 第一式有 $a+b+c$ 之因子。

又 $a+b-c=0$。則第一式

$=a^4\{b^2+c^2-(c-b)^2\}^3+b^4\{c^2+a^2-(c-a)^2\}^3+c^4\{a^2+b^2-(a+b)^2\}^3$

$=a^4\{2bc\}^3+b^4\{2ca\}^3+c^4\{2ab\}^3$

$=8a^3b^3c^3(a+b-c)=8a^3b^3c^3(0)=0$。

$\therefore a+b-c$。亦爲第一式之因子。同法考得 $b+c-a, c+a-b$。均爲第一式之因子。故如題云云。

34. $4\{cd(a^2-b^2)+ab(c^2-d^2)\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2$。

〔解〕原式 $=4\{c^2d^2(a^2-b^2)^2+2abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+a^2b^2(c^2-d^2)^2\}$
$+(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2-8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+16a^2b^2c^2d^2$

$=4c^2d^2(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(c^2-d^2)^2+(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2+(4a^2b^2)(4c^2d^2)$

$=\{(c^2+d^2)^2-(c^2-d^2)^2\}(a^2-b^2)^2+\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\}(c^2-d^2)^2$
$+(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2+\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\}\{(c^2+d^2)^2-(c^2-d^2)^2\}$。

令 $a^2+b^2=x,\ a^2-b^2=y,\ c^2+d^2=m,\ c^2-d^2=n$。則

原式 $=\{m^2-n^2\}y^2+\{x^2-y^2\}n^2+y^2n^2+\{x^2-y^2\}\{m^2-n^2\}=x^2m^2$。

卽 原式 $=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$ 此例不用通例之解式。

35. 求證 $(y^2-z^2)(1+xy)(1+xz)+(z^2-x^2)(1+yz)(1+yx)$
$+(x^2-y^2)(1+zx)(1+zy)=(y-z)(z-x)(x-y)(xyz+x+y+z)$。

〔證〕$y=z$，則原式 $=0$。$\therefore$ 原式有 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 之三次因子。而原式爲自六次式至二次式。故其餘之因子。尙有三次二次一次零次。又原式 x 之最高方乘爲 x^3。故其餘之因子含 x 者。不多於一方乘。

$\therefore$ 原式 $=(y-z)(z-x)(x-y)\{Lxyz+M(xy+yz+zx)+N(x+y+z)+P\}$。

比較 x^2y 之係數。$0=-P$, $\therefore P=0$。

又比較 x^3y 之係數。$-1=-N$。 $\therefore N=1$。

又比較 x^3y^2 之係數。$0=-M$。 $\therefore M=0$。

又 $x=1, y=2, z=3$。則得 $L=1$。由是

原式$=(y-z)(z-x)(x-y)(xyz+x+y+z)$。

36. $a^3(b-c)(c-d)(d-b)-b^3(c-d)(d-a)(a-c)$
$+c^3(d-a)(a-b)(b-d)-d^3(a-b)(b-c)(c-a)$。

〔解〕$b=c$。則原式$=0$。依此求因子。則

原式$=(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$。

37. $b^2c^2d^2(b-c)(c-d)(d-b)-c^2d^2a^2(c-d)(d-a)(a-c)+d^2a^2b^2(b-a)(a-b)(b-d)-a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a)$。

〔解〕原式$=(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)\{L(abc+bcd+cda+dab)\}$而$L=-1$。

$\therefore$原式$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)\{abc+bcd+cda+dab\}$。

此式之$\{\ \}$為三次式。而其中無a^3, a^2b, 等項者。以原式無自a^3以上之高次項故也。

第陸編補

霍爾及乃托氏第三十四編摘要

等勢式

1. 緒言 霍爾及乃托氏之大代數自比例論始。故前數編之講義。無可入之材料。然在彼書 439 頁所載等勢式之例題。有為斯密氏所未詳者。因摘要以解之。

2. 記號 Σ之記號。示等勢式之和。卽總記其同種類之各項也。

如記 $a+b+c$ 則為 Σa。然有時 $ab+bc+ca$ 不能為 Σab。何則。以不見有 c 字故也。若欲知 Σab 之為 $ab+bc+ca$。可書為 $\Sigma_{abc}\, ab$。故 $\Sigma_{abc}ab=ab+bc+ca$。

又 $\Sigma_{abcd}ab=ab+bc+ca+ad+bd+cd$。

例題 〔例題三十四 a〕

求以下各式之因子（題之號數依原書）

9. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$。

〔解〕 $a=-b$ 則原式 $=-b(b-c)^2+b(c+b)^2+c(-b-b)^2-8b^2c$
$=b\{(b+c)^2-(b-c)^2\}+4b^2c-8b^2c=4b^2c+4b^2c-8b^2c=0$。

由是原式 $=L(a+b)(b+c)(c+a)$。依此求 L。則為 1。故題式為 $(a+b)(b+c)(c+a)$。

19. $(bc+ca+ab)^3-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3$。

〔解〕 $a=-b$ 則原式 $=(bc-cb-b^2)^3-b^3c^3+c^3b^3+b^6$
$=-b^6-b^3c^3+b^3c^3+b^6=0$。故有 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 之因子。

又 $a=0$。則原式 $=(bc)^3-b^3c^3=0$。故有 abc 之因子。

由是原式 $=Labc(a+b)(b+c)(c+a)$。

$a=b=c=1$。則求得 L 為 3。故題式為 $3abc(a+b)(b+c)(c+a)$。

18. 證 $\Sigma a^2(b+c)-\Sigma a^3-2abc=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$。

〔解〕 原式$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-a^3-b^3-c^3-2abc$

$=a^2(b+c)+a(b^2+c^2-2bc)+bc(b+c)-(b^3+c^3)-a^3$

$=(b+c)\{a^2+bc-(b^2-bc+c^2)\}-a\{a^2-(b-c)^2\}$

$=(b+c)\{a^2-(b-c)^2\}-a\{a^2-(b-c)^2\}$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)-a\}=(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$。

20. 試證 $4\Sigma(b-c)(b+c-2a)^2=9\Sigma(b-c)(b+c-a)^2$。

〔解〕 原式$=4(b-c)(b+c-2a)^2+4(c-a)(c+a-2b)^2+4(a-b)(a+b-2c)^2$

令 $b=c$。則原式$=0+4(c-a)(a-c)^2+4(a-c)(a-c)^2=0$。

故原式$=A(b-c)(c-a)(a-b)$。

a^2b 之係數為 $16+16+8-4=-A$。 $\therefore A=-36$。

又原式右邊$=9(b-c)(b+c-a)^2+9(c-a)(c+a-b)^2+9(a-b)(a+b-c)$

$=36(b-c)(c-a)(a-b)$。故如題云云。

22. 證 $\Sigma(ab-c^2)(ac-b^2)=(\Sigma bc)(\Sigma bc-\Sigma a^2)$。

〔解〕 原式$=(ab-c^2)(ac-b^2)+(bc-a^2)(ba-c^2)+(ca-b^2)(cb-a^2)$

$=abc(a+b+c)+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-(ac^3+a^3c+ba^3+b^3a+cb^3+c^3b)$

$=(bc+ca+ab)^2-abc(a+b+c)-ac^3-a^3c-ba^3-b^3a-cb^3-c^3b$

$=(bc+ca+ab)^2-a^2(bc+ca+ab)-b^2(bc+ca+ab)-c^2(bc+ca+ab)$

$=(bc+ca+ab)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2)$。

23. 證 $abc(\Sigma a)^3-(\Sigma bc)^3=abc\Sigma a^3-\Sigma b^3c^3=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$。

〔解〕 $abc(a+b+c)^3-(bc+ca+ab)^3$

$=abc\{a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3\}$

$-\{a^3(b+c)^3+3a^2bc(b+c)^2+3ab^2c^2(b+c)+b^3c^3\}$

$=bc(a^4-b^2c^2)+3abc(b+c)(a^2-bc)-a(b+c)^3(a^2-bc)$

$=(a^2-bc)\{bc(a^2+bc)+3abc(b+c)-a(b+c)^3\}$

$=(a^2-bc)\{bc(a^2+bc)+3abc(b+c)-ab^3-ac^3-3abc(b+c)\}$

$=(a^2-bc)\{a^2bc+b^2c^2-ab^3-ac^3\}=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$。

又 $abc(a^3+b^3+c^3)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$

$=bc(a^4-b^2c^2)-ab^3(a^2-bc)-ab^3(a^2-bc)$

$=(a^2-bc)\{bc(a^2-bc)-ac^3-ab^3\}=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$。

例 題 (例題三十四 b)

證下列之各式。

26. $(x^3+6x^2y+3xy^2-y^3)^3+(y^3+6xy^2+3x^2y-x^3)^3$

$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^3$。

〔解〕 原式 $=\{3xy(2x+y)+(x^3-y^3)\}^3+\{3xy(x+2y)-(x^3-y^3)\}^3$。

令 $x^3-y^3=A,\ 3xy(2x+y)=M,\ 3xy(x+2y)=N$。則

$M+N=9xy(x+y),\ M-N=3xy(x-y),\ MN=9x^2y^2(2x^2+5xy+2y^2)$。

由是原式 $=(M+A)^3+(N-A)^3$

$=M^3+N^3+3A(M^2-N^2)+3A^2(M+N)$

$=(M+N)\{M^2+N^2-MN+3A(M-N)+3A^2\}$

$=(M+N)\{(M-N)^2+MN+3A(M-N)+3A^2\}$

$=9xy(x+y)\{9x^2y^2(x-y)^2+9x^2y^2(2x^2+5xy+2y^2)+9Axy(x-y)+3A^2\}$

$=9xy(x+y)\{27x^2y^2(x^2+xy+y^2)+9(x^3-y^3)xy(x-y)+3(x^3-y^3)^2\}$

$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{9x^2y^2+3(x-y)^2xy+(x^3-y^3)(x-y)\}$

$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{3xy(x^2+xy+y^2)+(x^3-y^3)(x-y)\}$

$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2\{3xy+(x-y)^2\}$。

28. 求 $2a^2b^2c^2+(a^3+b^3+c^3)abc+b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3$ 之因子。

〔解〕 原式 $=a^4bc+a^3(b^3+c^3)+2a^2b^2c^2+abc(b^3+c^3)+b^3c^3$

$=bc(a^4+2a^2bc+b^2c^2)+a(b^3+c^3)(a^2+bc)$

$=(a^2+bc)\{bc(a^2+bc)+a(b^3+c^3)\}$

$=(a^2+bc)\{ab(b^2+ca)+c^2(b^2+ca)\}$

$=(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$。

查理斯密司氏
霍爾氏，乃托氏

大代數學講義

第貳卷

第柒編

最高公因子，最低公倍數

最高公因子

95. 公因子〔Common Factor〕 凡二個以上之整代數式。能以一整代數式各除盡之。則此一整代數式。謂爲各式之公因子。

最高公因子〔Highest Common Factor〕 二個以上之整代數式。其最高公因子。卽諸因子之中之最高次式。最高公因子之記號。則用 $H.C.F.$

例如 a^4-b^4, $(a^2-b^2)^2$ 之公因子爲 $a+b$, $a-b$, a^2-b^2。而 a^2-b^2 爲其最高公因子。

96. 一項式之最高公因子 二個以上之一項式。其最高公因子。可由視察而得。

例如求 a^3b^2c, 及 a^4b^3c 之最高公因子。其能除盡各式者。在 a 之最高方乘爲 a^3。在 b 之最高方乘爲 b^2。而 c 之最高方乘卽爲 c。

故所求之 $H.C.F.=a^3b^2c$。

又求 $a^3b^4c^4$, a^2b^3 及 a^5bc^2 之最高公因子。其可以除盡三式者。a 之最高方乘爲 a^2。b 之最高方乘爲 b。而 c 不能整除各式。故所求之 $H.C.F.=a^2b$。

〔法則〕由是二個以上之一項式。其最高公因子。卽各式中公有文字之最低方乘之積。

97. 因子分割法之應用 諸多項式之最高公因子。若

已知各式之因子。可與前章同法求之。

例如求$(x-2)^2(x-1)^2(x-3)$。及$(x-2)^2(x-1)(x-3)^3$之最高公因子。其能整除各式之$x-2$。其最高方乘爲$(x-2)^2$。又能整除各式之$x-1$及$x-3$。其最高方乘爲$x-1$及$x-3$。

故所求之$H.C.F.=(x-2)^2(x-1)(x-3)$。

又$a^2b^3(a-b)^2(a+b)^3$及$a^3b^2(a-b)(a+b)^2$之$H.C.F.$爲$a^2b^2(a-b)(a+b)^2$。

例題

1. 求$a^4b^2-a^2b^4$及$a^4b^3+a^3b^4$之最高公因子。

〔解〕$\left.\begin{array}{l}a^4b^2-a^2b^4=a^2b^2(a+b)(a-b)\\ a^4b^3+a^3b^4=a^3b^3(a+b)\end{array}\right\}$ $\therefore$ 所求之$H.C.F.=a^2b^2(a+b)$。

2. 求$a^6b^2-4a^4b^4$及$a^6b^2-16a^2b^6$之最高公因子。〔答$a^2b^2(a^2-4b^2)$〕。

3. 求$a^3+3a^2b+2ab^2$及$a^4+6a^3b+8a^2b^2$之最高公因子。〔答$a(a+2b)$〕

98*。兩多項式之最高公因子 二次以上多項式之因子。雖不能以普通法求之。見(84章)。然如算術上兩數求最大公約數法求之。亦可得其最高公因子。

諸代數式中。含一項式之因子。可視察而得。故一項式之最高公因子。亦可視察而得。由是求兩多項式之最高公因子時。其一項式之因子。可置勿問祗求其兩式中公有之最高次多項可也。

設A及B爲兩多項式。各依同文字之遞降方乘整列。又B之次數。較A爲高。

以A除B得商爲Q。其餘式爲R。則

$B=AQ+R$............(1)。 $\therefore R=B-AQ$............(2)。

任意代數式之各項。能以某式除盡之。卽其全式亦能以某式除盡。故(1)式之B。能以A及R之各公因子除盡。(2)式之R。能以B及A之各公因子除盡。

由是A及B之各公因子。與A及R之各公因子全然相同。故A及R之$H.C.F.$卽所求A及B之$H.C.F.$

今設以R除A。其餘式爲S。則R及S之$H.C.F.$可用同法推得與A及R之$H.C.F.$同。亦卽爲所求A與B之$H.C.F.$若依此法續

除之。(即又以 S 除 R) 則其除式及被除式之 $H.C.F.$ 必與原兩式之 $H.C.F.$ 同。

故依此方法除至無餘。則其最後之除式。必爲其最後之被除式之最高公因子。即爲所求之最高公因子。

〔註〕例如求 A 及 B 之最高公因子。依前述之講義。示式於下。

$$
\begin{array}{l}
A)\,B\,(Q \\
\quad \underline{AQ} \\
\quad\; R)\,A\,(Q_1 \\
\qquad \underline{RQ_1} \\
\qquad S)\,R\,(Q_2 \\
\qquad\quad \underline{SQ_2} \\
\qquad\quad \cdots\cdots \text{歷次除之至末後} \\
\qquad\qquad X)\,U\,(Q_n \\
\qquad\qquad\quad \underline{XQ_n} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

A, B 之 $H.C.F.=R, A$ 之 $H.C.F.$

$=S, R$ 之 $H.C.F.$

$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=X, 0$ 之 $H.C.F=X$ 爲所求之 $H.C.F.$ 即 A 及 B 之最高公因子。

〔注意〕依除法之性質。餘式之次數必比除式爲低。例如 x 之三次式。其除得之餘式。不能高於 x 之二次式。

故如前次第施其除法。則餘式必次第爲低次式。若所得餘式。無公有之文字。則原兩式。爲無最高公因子。此猶在算術中最後之餘數爲 1。則原兩數無最大公約數。

前述之求 $H.C.F.$ 法。其兩式內皆不含一項之公因子。即祇求多項式之 $H.C.F.$ 也。故其被除式或除式。以任何一項式除之或乘之。其所求之最高公因子皆不變。

〔法則〕由是求兩多項式之 $H.C.F.$ 則以兩式之公有文字。依遞降方乘整列之。以其低次式除高次式。(若兩式爲同次式。則可

任以一式除餘一式)。又以餘式除前之除式。次第依法除之。至無餘式時。則其最後之除式。卽其所求之 $H.C.F.$ 但此法非求一項式之公因子者。蓋兩式之一項公因子。原可由視察得之也。又在運算時。其任意之除式。被除式或餘式。以一項因子除之或乘之。其最高公因子不變。

〔第一例〕求 x^3+x^2-2 及 x^3+2x^2-3 之 $H.C.F.$

$$
\begin{array}{l}
x^3+x^2-2)\,x^3+2x^2-3\,(1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^3+\ x^2-2} \\
\qquad\qquad\qquad x^2-1)\,x^3+x^2-2\,(x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^3-x\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2+x-2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x^2\quad\ -1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x-1)\,x^2-1\,(x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^2-x\ \ } \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

故 $x-1$ 爲所求之 $H.C.F.$

又此運算內第一之餘式 x^2-1。爲有 $x-1$ 及 $x+1$ 之因子。而依88章。$x=1$ 則原兩式爲 0。故 $x-1$ 爲原兩式之公因子。而 $x=-1$ 則兩式不能爲 0。故 $x+1$ 不爲原兩式之公因子。而 $x-1$ 爲 $H.C.F.$

〔第二例〕求 $x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3$ 及 $x^5-x^4y+8x^2y^3-8xy^4$ 之 $H.C.F.$

第二式可以 x 除。而 x 非兩式之公因子。故可省去。卽以 x 除第二式。得 $x^4-x^3y+8xy^3-8y^4$。

$$
\begin{array}{l}
x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3)\,x^4-x^3y+8xy^3-8y^4\,(x-5y \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^4+4x^3y-8x^2y^2+24xy^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -5x^3y+8x^2y^2-16xy^3-8y^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-5x^3y-20x^2y^2+40xy^3-120y^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 28x^2y^2-56xy^3+112y^4
\end{array}
$$

此餘式$=28y^2(x^2-2xy+4y^2)$此因子$28y^2$可除去。故

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-2xy+4y^2) & x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3\,(x+6y \\
 & \underline{x^3-2x^2y+4xy^2} \\
 & \quad 6x^2y-12xy^2+24y^3 \\
 & \quad \underline{6x^2y-12xy^2+24y^3}
\end{array}
$$

由是$x^2-2xy+4y^2$為所求之 $H.C.F.$

〔第三例〕 求$2x^4+9x^3+14x+3$及$3x^4+15x^3+5x^2+10x+2$之 $H.C.F.$

依此例施除法。則得分數之商。今欲避之。故以2乘第二式。以下倣此。

$$
\begin{array}{l}
2x^4+9x^3+14x+3)3x^4+15x^3+5x^2+10x+2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\underline{2\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 6x^4+30x^3+10x^2+20x+4\,(3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{6x^4+27x^3\qquad\quad+42x+9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^3+10x^2-22x-5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
3x^3+10x^2-22x-5)2x^4+9x^3+14x+3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\underline{3\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 6x^4+27x^3+42x+9\,(2x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{6x^4+20x^3-44x^2-10x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 7x^3+44x^2+52x+9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{3\qquad\qquad\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 21x^3+132x^2+156x+27\,(7 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{21x^3+\ \ 70x^2-154x-35} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 62)\underline{62x^2+310x+62} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2+\ \ 5x+1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x^2+5x+1)3x^3+10x^2-22x-5\,(3x-5 \\
\qquad\quad \underline{3x^3+15x^2+\ \ 3x} \\
\qquad\qquad -\ 5x^2-25x-5 \\
\qquad\qquad \underline{-\ 5x^2-25x-5}
\end{array}
$$

故x^2+5x+1為所求之 $H.C.F.$ 然如63章用分離係數為便。

99. 別法 求兩式之 $H.C.F.$ 若依下之定理運算。較爲省力。

〔定理〕任意之兩式 A 及 B。其特別文字(設爲 x)之最高次公因子。與 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之最高公因子同。但 p, q, r, s。爲不含 x 之任意或正負數量。

欲證明此理。當先知 A 及 B 之公因子。爲 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之因子。又 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之公因子。爲 $s(pA+qB)-q(rA+sB)$ 之因子。即 $(sp-qr)A$ 之因子。

但 $sp-qr$ 內不含有 x。故 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之公因子。爲 A 之因子。而 $sp-qr$ 內不能有 A 之因子。

由同法得 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之公因子。爲 $r(pA+qB)-p(rA+sB)$。即 $(rq-ps)B$ 之因子。即 B 之因子。

由是 A 及 B 之各公因子。恆爲 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之因子。而 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之各公因子。恆爲 A 及 B 之因子也。

故 A 及 B 之 $H.C.F.$ 與 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之 $H.C.F.$ 同。

〔例〕求 $2x^4+x^3-6x^2-2x+3,\ 2x^4-3x^3+2x-3$ 之 $H.C.F.$。

我第一式內減去第二式。即

$$(2x^4+x^3-6x^2-2x+3)-(2x^4-3x^3+2x-3)$$
$$=4x^3-6x^2-4x+6 \qquad\cdots\cdots(1)$$

又於第一式內加入第二式。即

$$(2x^4+x^3-6x^2-2x+3)+(2x^4-3x^3+2x-3)$$
$$=2x^2(2x^2-x-3) \qquad\cdots\cdots(2)$$

所求之 $H.C.F.$。爲 (1) 式及 (2) 式之 $H.C.F.$。又即爲 (1) 式及 $2x^2-x-3$ 之 $H.C.F.$。

由是以 2 乘 $2x^2-x-3$。加入 (1) 式。則得

$$2(2x^2-x-3)+(4x^3-6x^2-4x+6)=2x(2x^2-x-3) \qquad\cdots\cdots(3)$$

而 $2x^2-x-3$ 及 (3) 式之 $H.C.E.$ 即所求之 $H.C.F.$

$\therefore$ 所求之 $H.C.F.=2x^2-x-3$。

100. 餘論 依98章求兩式 A 及 B 之 $H.C.F.$ 逐次之餘式。爲 $R, S, \ldots\ldots$。則 A 及 B 之各公因子。爲 R 之因子。故亦爲 A 及 R 之公因子。

由同法得A及R之各公因子。亦爲R及S之公因子。以下同理。故A及B之各公因子。爲各餘式之因子。而最後之餘式。爲A及B之H.C.F.。故A及B之各公因子。爲所求最高公因子之因子可知矣。

由是兩式之各公因子爲其H.C.F.之因子。與一項式同。

求A及B之H.C.F.之法。其所得之各餘式。皆得示$FA+GB$之形。但F及G爲x之有理整代數式。

何則。令逐次之商。爲$Q_1, Q_2, Q_3,\ldots\ldots\ldots Q_n$。逐次之餘式。爲$R_1, R_2, R_3,\ldots\ldots\ldots\ldots R_n$。卽

$$\begin{array}{l}
A)\,B\,(Q_1\\
\quad\underline{Q_1A}\\
\quad R_1)\,A\,(Q_2\\
\qquad\underline{Q_2R_1}\\
\qquad R_2)\,R_1\,(Q_3\\
\qquad\quad\underline{Q_3R_2}\\
\qquad\quad\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\quad R_{n-1})\,R_{n-2}\,(Q_n\\
\qquad\qquad\underline{Q_nR_{n-1}}\\
\qquad\qquad R_n)\,R_{n-1}\,(Q_{n+1}\\
\qquad\qquad\quad\underline{Q_{n+1}R_n}
\end{array}$$

R_n爲有A及B之公因子。卽其H.C.F.若A及B無含有x之公因子。卽R_n不含有x。

但 $R_1=B-Q_1A=-Q_1A+B$。

$$R_2=A-Q_2R_1=A-Q_2(B-Q_1A)=(Q_1Q_2+1)A-Q_2B.$$

$$\begin{aligned}R_3=R_1-Q_3R_2&=(-Q_1A+B)-Q_3\{(Q_1Q_2+1)A-Q_2B\}\\&=-(Q_1Q_2Q_3+Q_1+Q_3)A+(Q_2Q_3+1)B.\end{aligned}$$

$$\ldots=\ldots$$

$$R_n=R_{n-2}-Q_nR_{n-1}.$$

R_1等於$FA+GB$。則F爲$-Q_1$。G爲1。

R_2等於$FA+GB$。則F爲Q_1Q_2+1。G爲$-Q_2$。

以下皆如此。則F及G爲x之有理整代數式。

同理推得$R_n=FA+GB$。

A及B不含有x之公因子。則R_n不含x。故$\frac{F}{R_n}$, $\frac{G}{R_n}$爲x之有理整代數式。而$1=\frac{F}{R_n}A+\frac{G}{R_n}B$,但$\frac{F}{R_n}=P$, $\frac{G}{R_n}=Q$。則$1=PA+QB$。而P及Q爲x之有理整代數式。由是得定理如下。

〔定理〕A及B爲x之有理整代數式。而在不含有x之公因子。則可作$PA+QB=1$之形。而P及Q爲x之有理整代數式。

〔例〕$A=x^3-3x^2+1$及$B=x^2+2x+2$。求其P及Q。

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+2x+2) & x^3-3x^2+1(x-5 \\
& \underline{x^3+2x^2+2x} \\
& \quad -5x^2-2x+1 \\
& \quad \underline{-5x^2-10x-10} \\
& \qquad\qquad 8x+11
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
8x+11) & x^2+2x+2(\frac{1}{8}x+\frac{5}{64} \\
& \underline{x^2+\frac{11}{8}x} \\
& \quad \frac{5}{8}x+2 \\
& \quad \underline{\frac{5}{8}x+\frac{55}{64}} \\
& \qquad \frac{73}{64}
\end{array}
$$

由是 $8x+11=(x^3-3x^2+1)-(x-5)(x^2+2x+2)$

$$\frac{73}{64}=(x^2+2x+2)-\left(\frac{1}{8}x+\frac{5}{64}\right)(8x+11)$$

$$=(x^2+2x+2)-\left(\frac{1}{8}x+\frac{5}{64}\right)\{(x^3-3x^2+1)-(x-5)(x^2+2x+2)\}$$

$$=-\left(\frac{1}{8}x+\frac{5}{64}\right)(x^3-3x^2+1)+\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{35}{64}x+\frac{39}{64}\right)(x^2+2x+2)。$$

即 $1=-\frac{1}{73}(8x+5)(x^3-3x^2+1)+\frac{1}{73}(8x^2-35x+39)(x^2+2x+2)$

$\therefore P=-\frac{1}{73}(8x+5)$, $Q=\frac{1}{73}(8x^2-35x+39)$。

101　諸多項式之最高公因子　三個以上之多項式。求其最高公因子之法如下。

諸多項式爲 A, B, C, D…………

求 A 及 B 之 $H.C.F.$ 爲 G。

所求之 $H.C.F.$ 爲 A 及 B 之公因子。亦爲 G 之因子。見前章。故 G, C, D…………之 $H.C.F.$ 可求。

依此法當先求第一式與第二式之 $H.C.F.$ 次以之求第三式之 $H.C.F.$。逐次如此。至最後之 $H.C.F.$，卽爲所求之 $H.C.F.$。

〔註〕在代數學之最高公因子。有時亦稱爲最大公約數，卽 ($G.C.M.$) 然此名殊不適當。

何則。以一式與他式相較。就一文字論。祇能審其次數高低。不能定其數値大小。故可曰高而不可曰大。

例如 a^2。可謂爲比 a 高。不可謂爲比 a 大。蓋 a 爲 3。則 $a^2=9$。a^2 固比 a 大。若 $a=\frac{1}{3}$, 則 $a^2=\frac{1}{9}$, a^2 又比 a 小也。

又兩式之最高公因子。(就一文字言) 不得謂爲兩式數値之最大公約數。

例如 $14x^2+15x+1$ 及 $22x^2+23x+1$ 之 $H.C.F.$ 爲 $x+1$。

今設 $x=\frac{1}{2}$, 則 $14x^2+15x+1=14\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{2}+1=12$。

$$22x^2+23x+1=22\times\frac{1}{4}+23\times\frac{1}{2}+1=18。$$

卽兩式之數値 12, 18 之最大公約數爲 6。然其 $H.C.F.$ 爲 $x+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$。故最高公因子。不得稱爲最大公約數。

例題七

求以下各兩式之 $H.C.F$

1.　$a^2-5ab+4b^2$ 及 $a^3-5a^2b+4b^3$。　〔答 $a-b$〕

〔解〕$1-5+4)1-5+0+4(1$

$$\begin{array}{l}
\underline{1-5+4} \\
-4)\underline{-4+4} \\
\quad 1-1)1-5+4(1-4 \\
\qquad \underline{1-1} \\
\qquad -4+4 \\
\qquad \underline{-4+4}
\end{array}$$

$\therefore 1-1$ 即 $a-b$ 爲所求之 $H.C.F.$。

2. $2x^2-5x+2$ 及 $12x^3-8x^2-3x+2$。 〔答 $2x-1$〕

3. $2x^4-3x^2y^2+y^4$ 及 $2x^6-3x^4y^2+y^6$。

〔解〕$2x^4-3x^2y^2+y^4=2x^2(x^2-y^2)-y^2(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(2x^2-y^2)$

$2x^6-3x^4y^2+y^6=2x^4(x^2-y^2)-y^2(x^4-y^4)$

$=(x^2-y^2)(2x^4-x^2y^2-y^4)$。

由是 x^2-y^2 爲所求之 $H.C.F.$。

4. $2x^3+3x^2y-y^3$ 及 $4x^3+xy^2-y^3$ 〔答 $2x-y$〕

5. $x^2-4y^2+12yz-9z^2$ 及 $x^2+2xz-4y^2+8yz-3z^2$。

〔解〕$x^2-4y^2+12yz-9z^2=x^2-(2y-3z)^2$

$=(x+2y-3z)(x-2y+3z)$

$x^2+2xz-4y^2+8yz-3z^2=x^2+2xz+z^2-(4y^2-8yz+4z^2)$

$=(x+z)^2-(2y-2z)^2=(x+z+2y-2z)(x+z-2y+2z)$

$=(x+2y-z)(x-2y+3z)$。

$\therefore x-2y+3z$ 爲所求之 $H.C.F.$。

6. $20a^4-3a^3b+b^4$ 及 $64a^4-3ab^3+5b^4$。

〔解〕$20a^4-3a^3b+b^4)64a^4-3ab^3+5b^4(5$

$$\begin{array}{l}
\underline{100a^4-15a^3b+5b^4} \\
-3a)\underline{-36a^4+15a^3b-3ab^3} \\
\quad 12a^3-5a^2b+b^3)20a^4-3a^3b+b^4(b \\
\qquad \underline{12a^3b-5a^2b^2+b^4} \\
\qquad 5a^2)\underline{20a^4-15a^3b+5a^2b^2} \\
\qquad\quad 4a^2-3ab+b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4a^2-3ab+b^2)\,12a^3-5a^2b+b^3\,(3a+b \\ \qquad\qquad\quad \underline{12a^3-9a^2b+3ab^2} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 4a^2b-3ab^2+b^3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{4a^2b-3ab^2+b^3} \end{array}$$

$\therefore$ $4a^2-3ab+b^2$。為所求之 $H.C.F.$。

7. $a^3-a^2b+ab^2+14b^3$ 及 $4a^3+3a^2b-9ab^2+2b^3$。 〔答 $a+2b$〕

8. $2x^4+x^3-9x^2+8x-2$ 及 $2x^4-7x^3+11x^2-8x+2$。

〔解〕

$$\begin{array}{l} 2-7+11-8+2)\,2+1-9+8-2\,(1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{2-7+11-8+2} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 4)\,8-20+16-4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2-5+4-1)\,2-7+11-8+2\,(1,-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{2-5+4-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -2+7-7+2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-2+5-4+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2-3+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2-3+1)\,2-5+4-1\,(1-1 \\ \qquad\quad \underline{2-3+1} \\ \qquad\quad -2+3-1 \\ \qquad\quad \underline{-2+3-1} \end{array}$$

故 $2-3+1$ 即 $2x^2-3x+1$。為所求之 $H.C.F.$。

9. $11x^4-9ax^3-a^2x^2-a^4$ 及 $13x^4-10ax^3-2a^2x^2-a^4$。

〔解〕從第二式減等一式。則

$13x^4-10ax^3-2a^2x^2-a^4-(11x^4-9ax^3-a^2x^2-a^4)=x^2(2x^2-ax-a^2)$。

而 $2x^2-ax-a^2=(2x+a)(x-a)$。

故所求之 $H.C.F.$。必可除盡 $(2x+a)(x-a)$。

而 $2x+a$，非兩式之公因子。故 $x-a$ 為 $H.C.F.$。

10. $x^4+x^3-9x^2-3x+18$ 及 $x^5+6x^2-49x+42$。

〔解〕

$$\begin{array}{l} 1+1-9-3+18)\,1+0+0+6-49+42\,(1-1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{1+1-9-3+18} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -1+9+9-67+42 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-1-1+9+\ 3-18} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 10)\,\underline{10+0-70+60} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1+0-\ 7+6 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
1+0-7+6)\,1+1-9-3+18\,(1+1\\
\qquad\qquad \underline{1+0-7+6}\\
\qquad\qquad\quad 1-2-9+18\\
\qquad\qquad\quad \underline{1+0-7+\ 6}\\
\qquad\qquad -2)\underline{-2-2+12}\\
\qquad\qquad\qquad 1+1-\ 6)\,1+0-7+6\,(1-1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{1+1-6}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1-1+6\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-1-1+6}
\end{array}
$$

$\therefore$ $1+1-6$ 卽 x^2+x-6 爲 $H.C.F.$。

11. $x^4-2x^3+5x^2-4x+3$ 及 $2x^4-x^3+6x^2+2x+3$。 〔答 x^2-x+3。〕

12. $x^4+3x^2+6x+35$ 及 $x^4+2x^3-5x^3+26x+21$。 〔答 x^2-3x+7。〕

最低公倍數

102. 定義 二個以上整代數式之公倍數 (**Common Multiple**) 謂可被各式整除之式。

二個以上整代數式之最低公倍數。(**Lowest Common Multiple**) 卽可被各式整除最低次之式。最低公倍數之記號則用 $L.C.M.$。

103. 一項式之最低公倍數 已知諸代數式之因子。則其最低公倍數。可由視察而得。

例如求 $a^3b^2(x-a)^2(x-b)^3$ 及 $ab^4(x-a)^4(x-b)$ 之 $L.C.M.$。此兩式之任意公倍數。則有 a^3 之因子。又有 b^4。$(x-a)^4$, $(x-b)^3$ 之因子。故任意之公倍數爲 $a^3b^4(x-a)^4(x-b)^3$。惟諸公倍數內無有更低於此者。由是 $a^3b^4(x-a)^4(x-b)^3$ 爲所求之 $L.C.M.$。

依上例得如下之法則。

〔法則〕 諸代數式之最低公倍數。爲諸式內所含各因子最高方乘之積。

例 題

1. 求 $3x^2yz$, $27x^3y^2z^2$, $6xy^2z^4$ 之 $L.C.M.$。

〔解〕 3,27,6 之最小公倍數 54。爲所求 $L.C.M.$ 之數字係數。x^3, y^2, z^4 爲其因子。故所求之 $L.C.M.=54x^3y^2z^4$。

2. 求 $6ab^2(a+b)^2$, $4a^2b(a^2-b^2)$ 之 $L.C.M.$

〔解〕 $4a^2b(a^2-b^2)=4a^2b(a+b)(a-b)$。

故所求之 $L.C.M.=12a^2b^2(a+b)^2(a-b)$。

3. 求 $2axy(x-y)^2$, $3ax^2(x^2-y^2)$, $4y^2(x-y)^2$ 之 $L.C.M.$

〔答 $12ax^2y^2(x^2-y^2)^2$〕

4. 求 x^2-3x+2, x^2-5x+6, x^2-4x+3 之 $L.C.M.$

〔解〕 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$。

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

故所求之 $L.C.M.=(x-1)(x-2)(x-3)$。

104. 兩多項式之最低公倍數 多項式之因子。難由視察得之者。可依98章之法。先求兩式之 $H.C.F.$ 如下。

〔例〕 求 x^3+x^2-2 及 x^3+2x^2-3 之 $L.C.M.$

此兩式之 $H.C.F.$ 依98章得 $x-1$。

而 $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$, $x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$。

但 x^2+2x+2, x^2+3x+3 兩式。爲以 $H.C.F.$ 除得之商。故無公因子。

由是所求之 $L.C.M.=(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)$。

105*. 最低公倍之定理 A 及 B 爲兩整代數式。L 爲其最低公倍數。

a 及 b 爲 H 除 A 及 B 所得之商。

卽 $A\div H=a$, $B\div H=b$, 故 $A=Ha$, $B=Hb$。

因 H 爲 A 及 B 之最高公因子。故 a 及 b 無公因子。由是 A 及 B 之 $L.C.M.$ 爲 $H\times a\times b$。

故 $L=Hab=Ha\times Hb\div H=A\times B\div H$ ....(1)

由是 $L\times H=A\times B$ ....(2)

〔定理〕 從(1)式則兩式之 $L.C.M.$。等於兩式之積。以其 $H.C.F$ 除得之商。從(2)式則兩式之積。等於其 $L.C.M.$ 與 $H.C.F.$ 之積。

例題八

求以下諸式之 $L.C.M.$

1. $6x^2-5ax-6a^2$。 $4x^3-2ax^2-9a^3$。

〔解〕 $6x^2-5ax-6a^2=(2x-3a)(3x+2a)$。

$4x^3-2ax^2-9a^3=4x^3-6ax^2+4ax^2-9a^3=2x^2(2x-3a)+a(4x^2-9a^2)$

$=(2x-3a)(2x^2+2ax+3a^2)$。

$\therefore$ 所求之 $L.C.M.=(2x-3a)(3x+2a)(2x^2+2ax+3a^2)$

$=12x^4+2ax^3-4a^2x^2-27a^3x-18a^4$。

2. $4a^2-5ab+b^2$, $3a^3-3a^2b+ab^2-b^3$。

〔解〕 $4a^2-5ab+b^2=(4a-b)(a-b)$。

$3a^3-3a^2b+ab^2-b^3=3a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(3a^2+b^2)$。

$\therefore$ 所求之 $L.C.M.=(a-b)(4a-b)(3a^2+b^2)$。

3. $3x^3-13x^2+23x-21$, $6x^3+x^2-44x+21$。

〔解〕 求得兩式之 $H.C.F.$ 爲 $3x-7$。

$\therefore$ 所求之 $L.C.M.=(3x^3-13x^2+23x-21)(6x^3+x^2-44x+21)\div(3x-7)$

$=(3x^3-13x^2+23x-21)(2x^2+5x-3)$。

4. x^4-11x^2+49, $7x^4-40x^3+75x^2-40x+7$。

〔答 $(x^2+5x+7)(7x^4-40x^3+75x^2-40x+7)$〕

5. $x^3+6x^2+11x+6$, $x^4+x^3-4x^2-4x$。

〔解〕 $x^3+6x^2+11x+6=x^3+2x^2+4x^2+8x+3x+6$

$=x^2(x+2)+4x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x^2+4x+3)=(x+2)(x+1)(x+3)$。

而 $x^4+x^3-4x^2-4x=x(x^3+x^2-4x-4)=x(x+1)(x+2)(x-2)$。

$\therefore$ 所求之 $L.C.M.=x(x+1)(x+2)(x+3)(x-2)$。

6. x^4-x^3+8x-8, $x^4+4x^3-8x^2+24x$。

〔答 $x(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$〕

7. $8a^3-18ab^2$, $8a^3+8a^2b-6ab^2$, $4a^2-8ab+3b^2$。

〔解〕 $8a^3-18ab^2=2a(4a^2-9b^2)=2a(2a+3b)(2a-3b)$。

而 $8a^3+8a^2b-6ab^2=2a(4a^2+4ab-3b^2)=2a(2a-b)(2a+3b)$。

又 $4a^2-8ab+3b^2=(2a-3b)(2a-b)$。

$\therefore$ 所求之 $L.C.M.=2a(2a-3b)(2a-b)(2a+3b)$。

8. $x^2-7x+12$, $3x^2-6x-9$, $2x^3-6x^2-8x$。 〔答 $6x(x+1)(x-3)(x-4)$〕

9. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$, $6x^2-5x-6$。

〔答 $(3x+2)(8x^3+27)(8x^3-27)$〕

10. $x^2-6xy+9y^2$, $x^2-xy-6y^2$, $3x^2-12y^2$。 〔答 $3(x-3y)^2(x^2-4y^2)$〕

11. $x^2-7xy+12y^2, x^2-6xy+8y^2, x^2-5xy+6y^2$。

〔答 $(x-2y)(x-3y)(x-4y)$〕

12. 如 $ax^2+bx+c, a'x^2+b'x+c'$ 有 $x+f$ 之公因子。則 $(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$。試證之。

〔證〕$x+f$ 必可整除 $a(a'x^2+b'x+c')-a'(ax^2+bx+c)$。

卽 $(ab'-a'b)x+ac'-a'c=(ab'-a'b)\left(x+\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)$。 $\therefore f=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$。

又 $x+f$ 可整除 $c'(ax^2+bx+c)-c(a'x^2+b'x+c')$。

卽 $(ac'-a'c)x^2+(bc'-bc')x=(ac'-a'c)x\left(x+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}\right)$。 $\therefore f=\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$。

由是 $\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$。 $\therefore (ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$。

13. $ax^3+bx^2+cx+d, a'x^3+b'x^2+c'x+d'$ 如有 x 之二次公因子。試證 $\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}=\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}$。

〔證〕x 之二次公因子。爲 x^2+px+q。而 x^2+px+q 必能除原兩式之和或差。故如下法。

$$a'(ax^3+bx^2+cx+d)-a(a'x^3+b'x^2+c'x+d')$$
$$=(ba'-b'a)\left(x^2+\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}x+\frac{da'-d'a}{ba'-b'a}\right)。$$

$\therefore p=\frac{ca'-c\ a}{ba'-b'a},\quad q=\frac{da'-d'a}{ba'-b'a}$。

又 $d'(ax^3+bx^2+cx+d)-d(a'x^3+b'x^2+c'x+d')$

$$=(ad'-a'd)x\left(x^2+\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd}x+\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}\right)。$$

$\therefore p=\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd},\quad q=\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}$。

由是 $\frac{ca'-c'c}{ba'-b'a}=\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd}$。 卽 $\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}$，

又 $\frac{da'-d'a}{ba'-b'a}=\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}$。 卽 $\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}=\frac{ba'-b'a}{ad'-a\ d}$。

$\therefore \frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}=\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}$。

14. ax^3+bx+c, $a'x^3+b'x+c'$。有 $x+f$ 之公因子。則其關係如何。

〔解〕 $x+f$ 可整除 $a(a'x^3+b'x+c')-a'(ax^3+bx+c)$

$$=(ab'-a'b)\left(x+\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)。$$

$$\therefore f=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=-\frac{ac'-a'c}{ba'-b'a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)。$$

又 $x+f$。可整除 $c'(ax^3+bx+c)-c(a'x^3+b'x+c')$

$$=(ac'-a'c)x\left(x^2+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}\right)。$$

卽可整除 $x^2+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$。故由 88 章 $x=-f$。則 $(-f)^2+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}=0$。

$$\therefore f^2=\frac{b'c-bc'}{ac'-a'c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

依 (1) (2) 兩式 $\left(-\frac{ac'-a'c}{ba'-b'a}\right)^2=\frac{b'c-bc'}{ac'-a'c}$。

由是 $(ac'-a'c)^3=(ba'-b'a)^2(b'c-bc')$。

15. 有 a, b, c, 三量。每二量之 H.C.F. 爲 g_1, g_2, g_3。L.C.M. 爲 l_1, l_2, l_3。試證 $g_1g_2g_3l_1l_2l_3=(abc)^2$。

〔證〕 由 105 章 $g_1l_1=ab$, $g_2l_2=bc$, $g_3l_3=ca$, 以三個相等式相乘。卽得 $g_1g_2g_3l_1l_2l_3=ab\cdot bc\cdot ca=(abc)^2$。

16. A, B, C, 爲任意之三式。(BC), (CA), (AB), 及 (ABC)。爲 B 及 C, C 及 A, A 及 B, A, B 及 C 之最高公因子。則 A, B 及 C 之最低公倍數。爲 $A\cdot B\cdot C\cdot(ABC)\div\{(BC)\cdot(CA)\cdot(AB)\}$ 其證如何。

〔證〕 $B=(ABC)m$, $C=(ABC)n$, $A=(ABC)p$。則 m, n, p 爲以 H.C.F. 除其 A, B, C 之商。故無公因子。設 x, y, z 爲三式之各因子。其 x 與 y。x 與 z, y 與 z 均無公因子。再設 α, β, γ 爲每二個原式之公因子。而 α 與 β, α 與 γ, β 與 γ。亦無公因子。則 $m=\beta\gamma y$, $n=\gamma\alpha z$, $p=\alpha\beta x$。

故 $(BC)=(ABC)\gamma$, $(CA)=(ABC)\alpha$, $(AB)=(ABC)\beta$。

$\therefore A, B, C$ 之 L.C.M. $=(ABC)\alpha\beta\gamma xyz$

$=(ABC)\alpha\beta x\cdot(ABC)\beta\gamma y\cdot(ABC)\gamma\alpha z\cdot(ABC)\div\{(ABC)\gamma\cdot(ABC)\alpha\cdot(ABC)\beta\}$

$=A\cdot B\cdot C\cdot(ABC)\div\{(BC)\cdot(CA)\cdot(AB)\}$。

第捌編

分　數

106. 分數〔Fractions〕 表示除法運算之式。可於被除式之下作一橫線。而以除式書之。其商數謂之代數分數(Algebraical Fraction)。

被除式爲分子(Numerator)。除式爲分母(Denominator)。

例如$\frac{a}{b}$。即$a\div b$之意義。

由此定義$\frac{a}{b}=a\div b$。故可推知$\frac{a}{b}\times b=a\div b\times b=a$。

107*. 定理 以同數量乘分母分子。其分數之值不變。

例如$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$。試證之。

依前章$\frac{a}{b}\times b=a$兩邊皆以m乘之。則

$$\frac{a}{b}\times bm=am$$ 兩邊皆以bm除之。則

$$\frac{a}{b}=am\div bm=\frac{am}{bm}。$$

108. 約分 如前章凡分數以同數量乘分母分子。其值不變。故反之,以同數量除分母分子。則其值亦不變。

因之凡分數之分母分子。可去其公有之因子。而化爲簡式。

例如$\frac{a^2x}{b^2x}=\frac{a^2}{b^2}$即去其分母分子公有之因子$x$也。

如分母分子無公因子。則其分數爲已約分數(Lowest Terms)。簡言之。曰最低項。

欲化分數爲已約分數。可以分母分子之$H.C.F.$除其分母分子蓋如此則分母分子無公因子。且仍與原分數等值。

〔第一例〕變$\dfrac{3ax^2y}{6a^2xy}$爲已約分數。

分母分子之$H.C.F.$爲$3axy$。故

$$\frac{3ax^2y}{6a^2xy}=\frac{3ax^2y\div 3axy}{6a^2xy\div 3axy}=\frac{x}{2a}$$

〔第二例〕化$\dfrac{x^2-7xy+10y^2}{x^2-8xy+12y^2}$爲最簡式。

$$\frac{x^2-7xy+10y^2}{x^2-8xy+12y^2}=\frac{(x-2y)(x-5y)}{(x-2y)(x-6y)}=\frac{x-5y}{x-6y}$$

〔第三例〕化$\dfrac{x^2-ax}{a^2-x^2}$爲最簡式。

$$\frac{x^2-ax}{a^2-x^2}=\frac{-x(a-x)}{(a+x)(a-x)}=\frac{-x}{a+x}=-\frac{x}{a+x}$$

此$\dfrac{-x}{a+x}=\dfrac{x}{-(a+x)}=-\dfrac{x}{a+x}$因在除法。凡被除數與除數。其號異者。其商爲負也。

〔第四例〕化$\dfrac{x^4+3x^2+6x+35}{x^4+2x^3-5x^2+26x+21}$爲最簡式。

求分母分子之$H.C.F.$爲x^2-3x+7。

$$\text{故原分數}=\frac{(x^4+3x^2+6x+35)\div(x^2-3x+7)}{(x^4+2x^3-5x^2+26x+21)\div(x^2-3x+7)}=\frac{x^2+3x+5}{x^2+5x+3}$$

109. 通分母 以同數乘分母分子。其值不變。故異分母之諸分數。可變爲同分母。謂之通分。

其法先求各分母之最低公倍數。以其各分母除之。而各以所得之商。乘本分數之分母分子卽得。

如是則所得之新分數。皆以諸分母之最低公倍數爲分母。

〔例〕化$\dfrac{a}{x^3y(x+y)},\ \dfrac{b}{xy^3(x-y)},\ \dfrac{c}{x^2y^2(x^2-y^2)}$爲同分母。

此諸分母之$L.C.M.$爲$x^3y^3(x^2-y^2)$。以各分母除之。則順次得$y^2(x-y),\ x^2(x+y),\ xy.$各商。以之各乘分母分子。則得

$$\frac{a}{x^3y(x+y)}=\frac{a\times y^2(x-y)}{x^3y(x+y)\times y^2(x-y)}=\frac{ay^2(x-y)}{x^3y^3(x^2-y^2)},$$

$$\frac{b}{xy^3(x-y)}=\frac{b\times x^2(x+y)}{xy^3(x-y)\times x^2(x+y)}=\frac{bx^2(x+y)}{x^3y^3(x^2-y^2)},$$

$$\frac{c}{x^2y^2(x^2-y^2)}=\frac{c\times xy}{x^2y^2(x^2-y^2)\times xy}=\frac{cxy}{x^3y^3(x^2-y^2)}。$$

通諸分數爲同分母。若不用 $L.C.M.$ 而用任意之公倍數。亦可變爲同分母。然欲求簡式。非用最低公倍數不可。

110. 分數之加法 同分母兩分數之和(或差)。卽以兩分子之和(或差)爲分子。而以其同分母爲分母。

此理可由43章推知之。

在43章 $(a+b)\div c=a\div c+b\div c$。

故 $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ 卽 $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$,

同法 $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$,

若兩分數爲異分母者。先化爲同分母。再依上法求之。至如多於二個之諸分數。相加或相減。亦依前法次第求之。卽先通諸分母爲同分母。而後以通得之諸分子相加或減卽得。

〔第一例〕求 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$ 之值。

分母之 $L.C.M.$ 爲 $(a+b)(a-b)$ 而。

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}+\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)+(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{2a}{a^2-b^2}$$

〔第二例〕求 $\frac{a}{a-b}+\frac{ab}{b^2-a^2}$ 之值。

$$\frac{a}{a-b}+\frac{ab}{b^2-a^2}=\frac{a}{a-b}+\frac{ab}{-(a^2-b^2)}=\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}$$

〔第三例〕化 $\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}+\frac{4a^2}{a^4+x^4}$ 爲最簡式。

此例以每二分數依次相加爲便,式如下。

$$\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}=\frac{a(a+x)+a(a-x)}{a^2-x^2}=\frac{2a^2}{a^2-x^2}。$$

$$\frac{2a^2}{a^2-x^2}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}=\frac{2a^2(a^2+x^2)+2a^2(a^2-x^2)}{a^4-x^4}=\frac{4a^4}{a^4-x^4},$$

$$\frac{4a^4}{a^4-x^4}+\frac{4a^4}{a^4+x^4}=\frac{4a^4(a^4+x^4)+4a^4(a^4-x^4)}{a^8-x^8}=\frac{8a^8}{a^8-x^8}。$$

依上之運算。其第二式。可用a^2, x^2代第一之a, x。而以2乘之卽得。其第三式。可用a^4, x^4代第二之a^2, x^2。亦以2乘之卽得。故旣得第一式之結果。則以後求之頗易。

〔第四例〕化$\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}$爲最簡式。

此例須括合同種類之項。而施運算之法。

$$\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}-\left(\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x+1}\right)$$

$$=\frac{(x+3)-(x-3)}{x^2-9}-\frac{3(x+1)-3(x-1)}{x^2-1}=\frac{6}{x^2-9}-\frac{6}{x^2-1}$$

$$=\frac{6(x^2-1)-6(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)}=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}。$$

〔第五例〕化$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$爲最簡式。

依等勢式之例。易化諸分數爲同分母。

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$=-\frac{a^2}{(a-b)(c-a)}-\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}-\frac{c^2}{(c-a)(b-c)}$$

$$=-\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1。$$

但依94章第一例。則分子爲

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)。$$

〔第六例〕化$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}$爲最簡式。

原式$=-\frac{a^2}{(a-b)(c-a)(x+a)}-\frac{b^2}{(b-c)(a-b)(x+b)}-\frac{c^2}{(c-a)(b-c)(x+c)}$

$$=-\frac{a^2(b-c)(x+b)(x+c)+b^2(c-a)(x+c)(x+a)+c^2(a-b)(x+a)(x+b)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

但依94章。分子內之$b=c$。則分子$=0$。同法推之。則分子有$(b-c)(c-a)(a-b)$之因子。惟分子之a無高於a^2次。故此外之因子不含a。

由是分子$=L(b-c)(c-a)(a-b)x^2$。

比較其a^2bx^2之係數。則$1=-L$。 $\therefore L=-1$。

故分子$=-(b-c)(c-a)(a-b)x^2$。

由是原式$=-\dfrac{-(b-c)(c-a)(a-b)x^2}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)}$

$$=\frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}。$$

111. 分數之乘法 代數分數之乘法如下。

兩分數$\dfrac{a}{b}$及$\dfrac{c}{d}$。試證$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$。

依106章。$\dfrac{a}{b}\times b=a$, $\dfrac{c}{d}\times d=c$。

由是$\dfrac{a}{b}\times b\times\dfrac{c}{d}\times d=ac$。即$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}\times bd=ac$。兩邊以$bd$除之。則

$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=ac\div bd=\dfrac{ac}{bd}$。

〔法則〕兩分數之積。以其分母之積爲分母。分子之積爲分子。同理推得諸分數之連乘積。即其諸分母之連乘積爲分母。諸分子之連乘積爲分子。

何則。因$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}\times\dfrac{e}{f}=\dfrac{ac}{bd}\times\dfrac{e}{f}=\dfrac{ace}{bdf}$。

又依同法得分數之方乘如下。

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2}{b^2}$。即 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$。

112. 分數之除法 代數分數之除法如下。

證$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$。

$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$其理已明。又兩邊以$\dfrac{d}{c}$乘之。則

$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}\times\dfrac{c}{d}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$。但$\dfrac{c}{d}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{cd}{dc}=1$。

由是 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$。

〔法則〕以 $\frac{c}{d}$ 除者。可以 $\frac{c}{d}$ 之反商 $\left(\text{卽}\frac{d}{c}\right)$ 乘之。

〔特別之例〕乘法及除法。示以特別之例如下。

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}。$$

$$\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{b}\div\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}。$$

〔註〕代數分數之乘及除。可由33章證明之法則得之。

例如 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=a\div b\times(c\div d)=a\div b\times c\div d$

$$=a\times c\div b\div d=ac\div(bd)=\frac{ac}{bd}。$$

〔第一例〕化 $\frac{x^3+a^3}{x^2-a^2}\times\frac{x-a}{(x+a)^2}$ 爲最簡式。

原式 $=\frac{(x^3+a^3)(x-a)}{(x^2-a^2)(x+a)^2}=\frac{(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)}{(x+a)(x-a)(x+a)^2}=\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}$。

〔第二例〕化 $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$ 爲最簡式

原式 $=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\dfrac{xy}{xy\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=\dfrac{xy}{y+x}$。

〔第三例〕化 $\dfrac{\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}}$ 爲最簡式。

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{a^2-x^2}=\frac{4ax}{a^2-x^2}。$$

$$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x)^2+(a-x)^2}{a^2-x^2}=\frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}。$$

∴ 原式 $=\frac{4ax}{a^2-x^2}\div\frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}=\frac{4ax}{a^2-x^2}\times\frac{a^2-x^2}{2(a^2+x^2)}=\frac{2ax}{a^2+x^2}$。

113*. 分數之定理 下示以必要之定理。卽第二項內含有第一項者。

〔定理一〕諸分數$\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_3}$,若相等。則必各等於

$$\frac{pa_1+qa_2+ra_3+\cdots\cdots\cdots}{pb_1+qb_2+rb_3+\cdots\cdots\cdots}$$

設各分數皆等於x。則$\frac{a_1}{b_1}=x,\ a_1=b_1x,$

$$\therefore\ pa_1=pb_1x,$$

同法得
$$qa_2=qb_2x,$$
$$ra_3=rb_3x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由加法得$pa_1+qa_2+ra_3+\ldots=(pb_1+qb_2+rb_3+\ldots)x$。

$$\therefore\ \frac{pa_1+qa_2+ra_3+\ldots}{pb_1+qb_2+rb_3+\ldots}=x=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots$$

〔推論〕若$p=q=r=\ldots=1$。則

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots}$$

〔定理二〕諸分數$\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_3}$若相等。則必各等於$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$。但$A$爲$a_1, a_2, a_3,\ldots$所成$n$次之等次式。$B$爲在$A$內用$b_1$代$a_1$, b_2代a_2, b_3代a_3等所得之式。因各分數相等。故令各分數等於x。則

$$a_1=b_1x,\quad a_2=b_2x,\quad a_3=b_3x\cdots\cdots\cdots$$

在A之任意一項爲$\lambda a_1{}^{\alpha}\, a_2{}^{\beta}\, a_3{}^{\gamma}\cdots\cdots$則$\lambda b_1{}^{\alpha}\, b_2{}^{\beta}\, b_3{}^{\gamma}\cdots\cdots$爲在$B$內相當之項。以$A, B$二式爲$n$次之等次式。故$\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=n$。

由是$\lambda a_1{}^{\alpha}\, a_2{}^{\beta}\, a_3{}^{\gamma}\cdots\cdots=\lambda(b_1x)^{\alpha}\,(b_2x)^{\beta}\,(b_3x)^{\gamma}\cdots\cdots$

$$=\lambda b_1{}^{\alpha}\, b_2{}^{\beta}\, b_3{}^{\gamma}\cdots\cdots x^{\alpha+\beta+\gamma+}\cdots\cdots$$

而$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=n$。故前式$=\lambda b_1{}^{\alpha}\, b_2{}^{\beta}\, b_3{}^{\gamma}\cdots\cdots x^n$。

卽A之任意一項$=B$之相當項$\times x^n$。

$\therefore A$之各項之和$=B$之各項之和$\times x^n$。

即 $A=x^n\times B$。 $\therefore \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=x$。

〔例〕 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{\sqrt[3]{(\lambda a_1^3+\beta a_2^3+\gamma a_1a_2a_3)}}{\sqrt[3]{(\lambda b_1^3+\beta b_2^3+\gamma b_1b_2b_3)}}$。

〔定理三〕若 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$……爲不等諸分數。而其分母皆爲正數則分數 $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots}$ 必較此中之最大分數小。而較最小分數大也。

設 $\frac{a_1}{b_1}$ 爲最大分數。而以 x 代之。則

$\frac{a_1}{b_1}=x$。故 $\frac{a_2}{b_2}<x$, $\frac{a_3}{b_3}<x$, ……

由題意 $b_1, b_2, b_3,$……皆爲正數。故得如下式。

$$a_1=b_1x$$
$$a_2<b_2x$$
$$a_3<b_3x$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

由加法 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots<(b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots)x$。

$$\therefore \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots}<x=\frac{a_1}{b_1}。$$

其 $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots}$ 比最小之分數大者。亦可以同法證明之。

〔注意〕本題因 $b_1. b_2. b_3$……爲正數。故能合理。若爲負數。則不等式之兩邊。以負乘之。其大小適相反。

例如 $5<7$。兩邊以 -2 乘之。則 $-10>-14$。

故如 b_2 爲負。則從 $\frac{a_2}{b_2}<x$ 變爲 $a_2>b_2x$。於理不合。

〔第一例〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。可證 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=x$。則 $a=bx$。$c=dx$。

$\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{bx+b}{bx-b}=\frac{x+1}{x-1}\times\frac{d}{d}=\frac{dx+d}{dx-d}=\frac{c+d}{c-d}$。

〔別法〕因$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$故$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$。即$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

又 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$。即$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$。

由是$\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$。即$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

〔第二例〕$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。證其各等於$\frac{\sqrt{(a^2-2ac+2c^2)}}{\sqrt{(b^2-2bd+2d^2)}}$。此例依定理二即可推得。今別證之如下。

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=x$。$a=bx,\ c=dx$。

$$\begin{aligned}\therefore\ a^2-2ac+2c^2&=(bx)^2-2(bx)(dx)+2(dx)^2\\&=(b^2-2bd+2d^2)x^2。\end{aligned}$$

由是$x^2=\frac{a^2-2ac+2c^2}{b^2-2bd+2d^2}$。即$x=\frac{\sqrt{(a^2-2ac+2c^2)}}{\sqrt{(b^2-2bd+2d^2)}}$。

〔第三例〕$\frac{cy+bz}{l}=\frac{az+cx}{m}=\frac{bx+ay}{n}$。試證

$$\frac{bcx}{-al+bm+cn}=\frac{cay}{al-bm+cn}=\frac{abz}{al+bm-cn}。$$

從定理一。各分數$=\frac{-a(cy+bz)+b(az+cx)+c(bx+ay)}{-al+bm+cn}$

$$=\frac{2bcx}{-al+bm+cn}。$$

同法推得各分數$=\frac{2cay}{al-bm+cn}=\frac{2abz}{al+bm-cn}$。

例題九

化次之各分數爲最簡式。

1. $\frac{30a^2b^3c^5x^2y^4z^8}{36a^5bc^2x^5yz^6}$。 答$\frac{5b^2c^3y^3z^2}{6a^3x^3}$。

2. $\frac{3a^7b^2c^{10}x^8yz^4}{a^6c^4x^3y^6}$。 答$\frac{3ab^2c^6x^5z^4}{y^5}$。

3. $\frac{a^2-8ab+7b^2}{a^2-3ab-28b^2}$。

〔解〕 $\frac{(a-b)(a-7b)}{(a+4b)(a-7b)}=\frac{a-b}{a+4b}$。〔答〕

4. $\frac{7x^4y^4-8x^2y^2+1}{28x^4y^4+3x^2y^2-1}$。

〔解〕 $\frac{(7x^2y^2-1)(x^2y^2-1)}{(7x^2y^2-1)(4x^2y^2+1)}=\frac{x^2y^2-1}{4x^2y^2+1}$。〔答〕

5. $\frac{(x^3-y^3)(x+y)}{(x^3+y^3)(x-y)}$。

〔解〕 $\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$。〔答〕

6. $\frac{(x^6-y^6)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^4-y^4)}$。

〔解〕 $\frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}$。〔答〕

7. $\frac{2x^3+3x^2-1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$。

〔解〕 原式 $=\frac{2x^2(x+1)+x^2-1}{x^2(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)}=\frac{(x+1)(2x^2+x-1)}{(x^2+2x+1)(x^2+1)}$

$=\frac{2x^2+x-1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{2x-1}{x^2+1}$。

8. $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$

〔解〕 原式 $=\frac{x^3(x-1)-(x-1)}{x^4+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}=\frac{(x-1)(x^3-1)}{(x^4+x^2+1)-2x(x^2+x+1)}$

$=\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1-2x)}=\frac{(x-1)^2}{x^2-3x+1}$。

9. $\frac{2x^3+5x^2y+xy^2-3y^3}{3x^4+3x^3y-4x^2y^2-xy^3+y^4}$。

〔解〕 原式 $=\frac{2x^3+2x^2y-2xy^2+3x^2y+3xy^2-3y^3}{3x^4+3x^3y-3x^2y^2-x^2y^2-xy^3+y^4}$

$=\frac{2x(x^2+xy-y^2)+3y(x^2+xy-y^2)}{3x^2(x^2+xy-y^2)-y^2(x^2+xy-y^2)}=\frac{2x+3y}{3x^2-y^2}$。

10. $\frac{54x^5-27x^4-3x^2-4}{36x^5+3x^3+3x-2}$。 答 $\frac{9x^3-3x-2}{6x^3+3x^2-1}$。

11. $\dfrac{(a+b)\{(a+b)^2-c^2\}}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{\{2bc+(a^2-b^2-c^2)\}\{2bc-(a^2-b^2-c^2)\}}$

$=\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}}$

$=\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}=\dfrac{a+b}{(a-b+c)(b+c-a)}$。

12. $\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)}{-(x-y)(y-z)(z-x)}=xy+yz+zx$。

13. $\dfrac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}$

$=-\dfrac{1}{2}(y-z)(z-x)(x-y)$。

14. $\dfrac{a(b-c)(c-d)-c(d-a)(a-b)}{b(c-d)(d-a)-d(a-b)(b-c)}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{a\{-c^2+(b+d)c-bd\}-c\{-a^2+(b+d)a-bd\}}{b\{-d^2+(a+c)d-ac\}-d\{-b^2+(a+c)b-ac\}}$。

$=\dfrac{ac(a-c)-bd(a-c)}{ac(d-b)-bd(d-b)}=\dfrac{(a-c)(ac-bd)}{(d-b)(ac-bd)}=\dfrac{a-c}{d-b}$。

15. $\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)}{-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}=\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$。

16. $\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{2a(a-b)+2b(a+b)}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$。

17. $\dfrac{3-x}{1-3x}-\dfrac{3+x}{1+3x}-\dfrac{1-16x}{9x^2-1}$。

〔解〕原式 $=\frac{(3-x)(1+3x)-(3+x)(1-3x)}{1-9x^2}+\frac{1-16x}{1-9x^2}$

$=\frac{16x}{1-9x^2}+\frac{1-16x}{1-9x^2}=\frac{1}{1-9x^2}$。

18. $\frac{x}{x+2y}-\frac{y}{2y-x}-\frac{(x-y)^2}{x^2-4y^2}$。 〔答 $\frac{y(x+y)}{x^2-4y^2}$〕

19. $\frac{x-2a}{x+2a}-\frac{x+2a}{2a-x}+\frac{8ax}{x^2-4a^2}$。

〔解〕原式 $=\frac{x-2a}{x+2a}+\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{8ax}{x^2-4a^2}$。

$=\frac{(x-2a)^2+(x+2a)^2+8ax}{x^2-4a^2}=\frac{2(x^2+4ax+4a^2)}{x^2-4a^2}=\frac{2(x+2a)}{x-2a}$。

20. $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x+4}+\frac{3}{x+6}-\frac{1}{x+8}$。

〔解〕原式 $=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+8}\right)-\left(\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x+6}\right)=\frac{6}{(x+2)(x+8)}-\frac{6}{(x+4)(x+6)}$

$=\frac{6(x+4)(x+6)-6(x+2)(x+8)}{(x+2)(x+8)(x+4)(x+6)}=\frac{48}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)}$。

21. $\frac{1}{x+a}-\frac{3}{x+3a}+\frac{3}{x+5a}-\frac{1}{x+7a}$。 〔答 $\frac{48a^3}{(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)}$〕

22. $\frac{1}{x-2a}-\frac{4}{x-a}+\frac{6}{x}-\frac{4}{x+a}+\frac{1}{x+2a}$。

〔解〕原式 $=\left(\frac{1}{x-2a}+\frac{1}{x+2a}\right)-\left(\frac{4}{x-a}+\frac{4}{x+a}\right)+\frac{6}{x}$。

$=\frac{2x}{x^2-4a^2}-\frac{8x}{x^2-a^2}+\frac{6}{x}=\frac{24a^4}{x(x^2-4a^2)(x^2-a^2)}$。

23. $\frac{1}{x^2-5xy+6y^2}-\frac{2}{x^2-4xy+3y^2}+\frac{1}{x^2-3xy+2y^2}$。

〔解〕原式 $=\frac{1}{(x-2y)(x-3y)}-\frac{2}{(x-3y)(x-y)}+\frac{1}{(x-y)(x-2y)}$

$=\frac{(x-y)-2(x-2y)+(x-3y)}{(x-y)(x-2y)(x-3y)}=\frac{0}{(x-y)(x-2y)(x-3y)}=0$。

24. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$。 〔答 0〕

25. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$。　〔答 1〕

26. $\dfrac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(1+bc)(1+ba)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(c-b)}$。

〔解〕原式 $=-\dfrac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{(1+bc)(1+ba)}{(b-c)(a-b)}-\dfrac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(b-c)}$

$$=-\frac{(b-c)(1+ab)(1+ac)+(c-a)(1+bc)(1+ba)+(a-b)(1+ca)(1+cb)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

在分子 $b=c$。則分子 $=0$。故分子有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子。而分子之 a 不高於 a^2 故分子 $=L(b-c)(c-a)(a-b)$。 $\therefore L=1$。
由是原式爲 -1。

27. $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$。

〔解〕原式 $=abc\left\{\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}\right\}$

$$+d\left\{\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\right\}=abc\{0\}+d\{1\}=d。$$

✓ 28. $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}$。

〔解〕 $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}=\dfrac{x(x+z)-z(x+y)}{(x+y)(x+z)}=\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{z}{x+z}$。

同法 $\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}=\dfrac{y}{y+z}-\dfrac{x}{y+x}$, $\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}=\dfrac{z}{z+x}-\dfrac{y}{z+y}$。

由加法原式 $=0$。

29. $\dfrac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y-2z)}+\dfrac{(z-y)(x-y)}{(x+y-2z)(-2x+y+z)}$

$$+\frac{(z-x)(z-y)}{(-2x+y+z)(x-2y+z)}。$$

〔解〕 $x-y=a,\ y-z=b,\ z-x=c$。則

$$\frac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y+2z)}=\frac{-(x-y)(z-x)}{\{(x-y)-(y-z)\}\{(y-z)-(z-x)\}}=-\frac{ac}{(a-b)(b-c)}。$$

$\therefore$ 原式 $=-\dfrac{ac}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{ba}{(b-c)(c-a)}-\dfrac{cb}{(c-a)(a-b)}=1$。

30. $$\frac{\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}+\dfrac{x+c}{x-c}-3\dfrac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}{\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}+\dfrac{x}{x-c}-3\dfrac{x^3+(ab+bc+ca)x}{(x-a)(x-b)(x-c)}}。$$

〔解〕分子 $=\dfrac{x+a}{x-a}+1+\dfrac{x+b}{x-b}+1+\dfrac{x+c}{x-c}+1-3\left\{\dfrac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}+1\right\}$

$$=\frac{2x}{x-a}+\frac{2x}{x-b}+\frac{2x}{x-c}-3\frac{(x+a)(x+b)(x+c)+(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{2x}{x-a}+\frac{2x}{x-b}+\frac{2x}{x-c}-3\frac{2x^3+2(ab+bc+ca)x}{(x-a)(x-b)(x-c)}=2\times\text{分母。}$$

∴ 原式 $=2$。

31. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$。 〔答 $a+b-c$〕

32. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$。

〔解〕原式 $=-\dfrac{a^4}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{b^4}{(b-c)(a-b)}-\dfrac{c^4}{(c-a)(b-c)}$

$$=-\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab。$$

33. $a^2\dfrac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$。

〔解〕通分母爲 $-(a-b)(b-c)(c-a)$。則

分子 $=a^2(b-c)(a+b)(a+c)+b^2(c-a)(b+c)(b+a)+c^2(a-b)(c+a)(c+b)$

$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2。$$

∴ 原式 $=(a+b+c)^2$

34. $$\frac{a^2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}{a\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}。$$

〔解〕以 abc 乘分母子則得

$$\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=a+b+c。$$

35. $\dfrac{1}{(a-b+c)(a+b-c)}+\dfrac{1}{(a+b-c)(-a+b+c)}+\dfrac{1}{(-a+b+c)(a-b+c)}$。

〔解〕 $原式=\dfrac{(-a+b+c)+(a-b+c)+(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}$

$$=\frac{a+b+c}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}。$$

36. $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$。

〔解〕 $原式=\dfrac{b-c}{(a+b-c)(a-b+c)}+\dfrac{c-a}{(b+c-a)(b-c+a)}+\dfrac{a-b}{(c+a-b)(c-a+b)}$

$$=\frac{(b-c)(-a+b+c)+(c-a)(a-b+c)+(a-b)(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$分子=-a(b-c)+(b^2-c^2)-b(c-a)+(c^2-a^2)-c(a-b)+(a^2-b^2)$

$=-\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}+\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}$

$=-\{0\}+\{0\}=0$。

由是原式$=0$。

37. 試證 $16+\left(\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}-2\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2=16\left(\dfrac{x^4+a^4}{x^4-a^4}\right)^2$。

〔證〕 $16+\left\{\dfrac{(x+a)^2+(x-a)^2}{x^2-a^2}-\dfrac{2(x^2-a^2)}{x^2+a^2}\right\}^2$

$$=16+\left\{\frac{2(x^2+a^2)}{x^2-a^2}-\frac{2(x^2-a^2)}{x^2+a^2}\right\}^2=16+\left\{\frac{8a^2x^2}{x^4-a^4}\right\}^2$$

$$=16\left\{1+\frac{4a^4x^4}{(x^4-a^4)^2}\right\}=16\left(\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}\right)^2。$$

38. 證 $\dfrac{a+b}{ax+by}+\dfrac{a-b}{ax-by}+2\dfrac{a^2x+b^2y}{a^2x^2+b^2y^2}=4\dfrac{a^4x^3-b^4y^3}{a^4x^4-b^4y^4}$

39. 證明以下諸式。

(1) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(1+ax)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(1+bx)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$

$$=\frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

(2) $$\frac{a}{(a-b)(a-c)(1+ax)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(1+bx)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$$
$$=\frac{-x}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}。$$

(3) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)(1+ax)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(1+bx)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$$
$$=\frac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}。$$

〔證〕茲就三題內之(3)證之。

原式$$=-\frac{(b-c)(1+bx)(1+cx)+(c-a)(1+cx)(1+ax)+(a-b)(1+ax)(1+bx)}{(b-c)(c-a)(a-b)(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

分子$=(b-c)(c-a)(a-b)(Lx^2+Mx+N)$。

比較 a^2bx^2 之係數。則 $1=-L$。 $\therefore L=-1$。

比較 a^2bx 之係數。則 $0=-M$。 $\therefore M=-0$。

比較 a^2b 之係數。則 $0=-N$。 $\therefore N=-0$。

由是原式$=\dfrac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$。

40. $$\frac{(a+p)(a+q)}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{(b+p)(b+q)}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{(c+p)(c+q)}{(c-a)(c-b)(x+c)}。$$

〔解〕通分母爲 $-(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)$。則分子爲

$$(a+p)(a+q)(b-c)(x+b)(x+c)+(b+p)(b+q)(c-a)(x+c)(x+a)$$
$$+(c+p)(c+q)(a-b)(x+a)(x+b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(x-p)(x-q)。$$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{(x-p)(x-q)}{(x+a)(x+b)(x+c)}$。

41. $$\frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(c+a-b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(a+b-c)}{(c-a)(c-b)}。$$ 〔答 -2〕

42. $$\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(c-a)(c-b)}。$$

〔解〕同分母$=-(a-b)(b-c)(c-a)$。則分子爲

$$(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(b-c+a)(b+c-a)$$
$$+(a-b)(c-a+b)(c+a-b)=L(b-c)(c-a)(a-b)$$

比較 a^2b 之係數。則

$1-1+1+1+1+1=-L$。 $\therefore L=-4$。

由是原式$=4$。

43. $\dfrac{a(b+c)}{b+c-a}+\dfrac{b(c+a)}{c+a-b}+\dfrac{c(a+b)}{a+b-c}$。

〔解〕原式$=\dfrac{a(b+c)(c+a-b)(a+b-c)+\text{以下 } a,b,c \text{ 之輪換}}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$。

在分子 $a=0$。則分子$=0$。

$\therefore$ 分子$=Labc(a+b+c)$。

$a=b=c=1$。則

$1(2)(1)(1)+1(2)(1)(1)+1(2)(1)(1)=L(1+1+1)$。 $\therefore L=2$。

由是原式$=\dfrac{2abc(a+b+c)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$。

44. 求下式之證。

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^2+\left(n+\frac{1}{n}\right)^2+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)^2-\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(mn+\frac{1}{mn}\right)=4。$$

〔證〕左邊$=m^2+2+\dfrac{1}{m^2}+n^2+2+\dfrac{1}{n^2}$

$$+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)\left\{mn+\frac{1}{mn}-\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=4+\left(m^2+\frac{1}{n^2}\right)+\left(n^2+\frac{1}{m^2}\right)+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)\left\{-\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\right\}$$

$$=4+\frac{m}{n}\left(mn+\frac{1}{mn}\right)+\frac{n}{m}\left(mn+\frac{1}{mn}\right)+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)\left\{-\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\right\}$$

$$=4+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}-\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\right)=4。$$

45. 求下式之證。

$$\left(\frac{2bc}{b+c}-b\right)\div\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b-2c}\right)+\left(\frac{2bc}{b+c}-c\right)\div\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c-2b}\right)=bc。$$

〔證〕左邊$=b\left(\dfrac{2c}{b+c}-1\right)\div\dfrac{b-c}{c(b-2c)}+c\left(\dfrac{2b}{b+c}-1\right)\div\dfrac{c-b}{b(c-2b)}$

$$=\frac{b(c-b)}{b+c}\div\frac{-(c-b)}{c(b-2c)}+\frac{c(b-c)}{b+c}\div\frac{b-c}{b(2b-c)}$$

$$=\frac{b(c-b)}{b+c}\times\frac{c(b-2c)}{-(c-b)}+\frac{c(b-c)}{b+c}\times\frac{b(2b-c)}{b-c}$$

$$=-\frac{bc(b-2c)}{b+c}+\frac{bc(2b-c)}{b+c}=\frac{bc(-b+2c+2b-c)}{b+c}$$

$$=\frac{bc(b+c)}{b+c}=bc。$$

46. 證 $\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}+\frac{a-b}{1+ab}=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$。

47. $(yz+zx+xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$。

〔解〕原式 $=\frac{yz+zx+xy}{x}+\frac{yz+zx+xy}{y}+\frac{yz+zx+xy}{z}-\frac{yz}{x}-\frac{zx}{y}-\frac{xy}{z}$

$$=\frac{yz}{x}+z+y+z+\frac{zx}{y}+x+y+x+\frac{xy}{z}-\frac{yz}{x}-\frac{zx}{y}-\frac{xy}{z}$$

$$=2(x+y+z)。$$

〔別法〕原式 $=\frac{(yz+zx+xy)^2}{xyz}-xyz\left(\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2}\right)$

$$=\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz(x+y+z)}{xyz}-\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{xyz}$$

$$=2(x+y+z)$$

48. 設 $\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$。試證此各分數。等於

$$\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}。$$

〔證〕 $\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}=k$。則

$$y+z=(b-c)k,\ z+x=(c-a)k,\ x+y=(a-b)k。$$

$\therefore (y+z)+(z+x)+(x+y)=(b-c+c-a+a-b)k$。

即 $x+y+z=0$……………………………………………………(1)。

又 $k^2=\frac{(y+z)^2}{(b-c)^2}=\frac{(z+x)^2}{(c-a)^2}=\frac{(x+y)^2}{(a-b)^2}$，由 113 章定理一

$$=\frac{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}，由 (1) 式$$

$$=\frac{(-x)^2+(-y)^2+(-z)^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}。$$

$$\therefore\quad k=\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}。$$

49. 設 $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$。試證 $\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}$

〔證〕 $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=k$。則 $x=yk,\ a=bk$。

$$\therefore\quad \frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{y^2k^2+b^2k^2}{yk+bk}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{y^2k+b^2k}{y+b}+\frac{y^2+b^2}{y+b}$$

$$=\frac{y^2(k+1)+b^2(k+1)}{y+b}\times\frac{k+1}{k+1}=\frac{(yk+y)^2+(bk+b)^2}{yk+bk+y+b}$$

$$=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+a+y+b}。$$

50. 設 $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$。試證 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

〔證〕 $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}=k$

$x=(b+c-a)k,\ y=(c+a-b)k,\ z=(a+b-c)k$。

$$\therefore\quad (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$$

$$=\{(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)+(a-b)(a+b-c)\}k$$

$$=\{b^2-c^2-a(b-c)+c^2-a^2-b(c-a)+a^2-b^2-c(a-b)\}k$$

$$=0。$$

51. 設 $\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$。而 c 不為 0。則此各分數。等於 $\frac{ay-bx}{a-b}$。

又 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$。試證之。

〔證〕 $\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{a(bz-cy)+b(cx-az)}{a(b-c)+b(c-a)}=\frac{-c(ay-bx)}{-c(a-b)}$。

而 $c\neq0$。故以 $-c$ 除分母子。即得 $\frac{ay-bx}{a-b}$。令此各分數。皆等於 k。則

$bz-cy=(b-c)k,\ cx-az=(c-a)k,\ ay-bx=(a-b)k$。

由加法 $(bz-cy)+(cx-az)+(ay-bx)=(b-c+c-a+a-b)k=0$。

即 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$。

52. 求下式之證。

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c}{(c-d)(c-a)(c-b)}$$

$$+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}=a+b+c+d。$$

〔證〕左邊之同分母爲 $(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$。則

分子 $=-a^4(b-c)(b-d)(c-d)-b^4(c-a)(c-d)(a-d)-c^4(a-b)(a-d)(b-d)$

$-d^4(a-b)(b-c)(c-a)$。

$=(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$。

由是左邊等於 $a+b+c+d$。卽等於右邊。

53. 下列諸分數之和。若 $r<n-1$。則等於 0。若 $r=n-1$。則等於 1。若 $r=n$。則等於 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n$。試證之。

$$\frac{a_1{}^r}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)}+\frac{a_2{}^r}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)}$$

$$+\ldots\ldots+\frac{a_n{}^r}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}。$$

〔證〕通分母爲

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)\ldots\ldots(a_{n-1}-a_n)$$

則分子 $=a_1{}^r(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_n)(a_3-a_4)\ldots\ldots(a_3-a_n)\ldots\ldots(a_{n-1}-a_n)$
$+a_2{}^r(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)(a_3-a_4)\ldots(a_{n-1}-a_n)+\ldots+a_n{}^r(a_1-a_2)\ldots(a_{n-1}-a_n)$。

分子爲等次式。而就其次數求分子之第一項。則 $a_1{}^r$ 爲 r 次，$(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)$ 爲 $n-2$ 次，(a_3-a_4) 爲 $n-3$ 次…$a_{n-1}-a_n$ 爲 1 次故其次數爲

$r+(n-2)+(n-3)+\ldots\ldots+2+1=r+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 次…………(A)

又分母有 $(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)\ldots\ldots(a_{n-1}-a_n)$ 之因子。而其次數含 a_1 之因子 $n-1$。含 a_2 之因子 $n-2$。……含 a_{n-1} 之因子 1。故得 $(n-1)+(n-2)+\ldots\ldots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$ 次。

今 $r=n-1$ 則分子之次數從(A)得 $n-1+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$。

卽 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次。故原式等於 1。

故 r 若小於 $n-1$ 則分子之次數低於 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次。故原式可爲 0。

又 $r=n$。則(A)爲 $n+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 次。分子有高於 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次 1 次者。故分子在前之因子外。有 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n$

故原式$=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots a_n$。

54. 試證 $1+\dfrac{a_1}{x-a_1}+\dfrac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}+\dfrac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}+\ldots\ldots$

$+\dfrac{a_nx^{n-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}=\dfrac{x^n}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}$。

〔證〕 $1+\dfrac{a_1}{x-a_1}=\dfrac{x}{x-a_1}$, $1+\dfrac{a_1}{x-a_1}+\dfrac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}=\dfrac{x}{x-a_1}+\dfrac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}$

$=\dfrac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)}$ 以下由同理。推得本題之結果。

55. 求證 $\dfrac{b+c+d+\ldots\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots\ldots+k+l)}=\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\ldots\ldots$

$+\dfrac{l}{(a+b+\ldots\ldots+k)(a+b+\ldots\ldots+k+l)}$。

〔證〕 從 $\dfrac{b+c+d+\ldots\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots\ldots+k+l)}$ 減 $\dfrac{b}{a(a+b)}$。則得

$\dfrac{c+d+\ldots\ldots+k+l}{(a+b)(a+b+\ldots\ldots+k+l)}$。從此式減 $\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}$。則得

$\dfrac{d+\ldots\ldots+k+l}{(a+b+c)(a+b+c+\ldots\ldots+k+l)}$。以下可以同理推之。

第玖編

方程式 一未知數量

114. 方程式〔Equations〕 兩代數式相等之式。謂之方程式。其兩相等式。稱方程式之兩節 (Members)。或稱兩邊 (Sides)。

例如 $x+a=b+c-d$ 之方程式。$x+a$ 爲前節或爲左邊。$b+c-d$ 爲後節或爲右邊。

方程式其內所含諸文字不論爲何值而常相等。謂之恆同式 (Identity)。

例如 $x+x=2x$ 爲恆同式。因 x 爲 3 或爲 6。其 $x+x$ 恆等於 $2x$ 也。

又 $2(x+a)=2x+2a$ 其 x, a 任爲何值而常相等。故爲恆同式。

非恆同式者。謂之方程式。此編及次編則專論此。蓋方程式內所含諸文字。不論何值而相等者。祇可謂之恒同式。若其所含諸文字。僅限於特別之值而相等者。乃可謂之方程式。

方程式內含已知數量(Known Quantity)。及未知數量(Unknown Quantity) 二種。已知數量用數字或 a, b, c 等最初之文字代之。未知數量則 x, y, z 等最後之文字代之。

115. 一未知數量 此編所論爲有一未知數量之方程式。

解(Solve) 方程式。卽求其未知數量之值。其值用於方程式。能令兩邊相等乃爲合理。而此未知數量之值。謂之方程式之根(Root)。凡同根兩方程式。謂之等值 (Equivalent)。

僅有一未知數量 x 之方程式。爲 x 之有理整式。而其最高次僅有 x 者。其方程式爲一次 (Simple)。有 x^2 者爲二次 (Quadratic)。有 x^3 者爲三次 (Cubic) 以下類推。

116*. 原則 解方程式須依下之原則。

〔第一〕方程式之兩邊各加同數量。與原式爲等值。

例如 $A=B$ 之方程式。兩邊各加 m。得 $A+m=B+m$ 仍爲等值可知。

〔第二〕方程式之一邊。以其任意之項移於他邊。則必變其符號。

例如方程式 $a+b-c=p-q+r$ 兩邊各加 $-p+q-r$。則依原則第一。$a+b-c+(-p+q-r)=p-q+r+(-p+q-r)$。卽 $a+b-c-p+q-r=0$。

依此右邊移於左邊。則 p 爲 $-p$, $-q$, 爲 $+q$, $+r$ 爲 $-r$。已各變其符號。

由是凡方程式。以其他邊之各項。盡移於一邊。則其他邊可爲0。

又 $a+b-c=p-q+r$。移項可變爲

$$a+q-r=p-b+c。$$

〔第三〕方程式之兩邊。以同數量乘之或除之。則所得之方程式。亦與原式等值。

何則如 $A=B$。卽知 $mA=mB$。反之若由 $mA=mB$。證明 $A=B$。則因 $mA=mB$。由原則第二。得 $m(A-B)=0$。而以 m 非 0。故 $A-B=0$。

$\therefore A=B$。

又兩邊如以同數量 m 除之。可不必別用證法。卽與以 $\frac{1}{m}$ 乘之同。

故 $\frac{A}{m}=\frac{B}{m}$。卽 $A\div m=B\div m$。

117. 一次方程式 (Simple Equations) 示其解法於下。

〔第一例〕解 $13x-7=5x+9$ 式。

$5x$ 與 -7 各移項。得 $13x-5x=9+7$, (原則二)

卽 $8x=16$,

兩邊以 x 之係數 8 除之。則 $x=2$。 (原則三)

〔第二例〕解 $\frac{3x}{4}-2=\frac{2x}{5}+5$ 式。

去分母故以 4, 5 之 L.C.M. 20 乘之。則得

$$15x-40=8x+100,$$ (原則三)

移項則得 $15x-8x=100+40,$ (原則二)

即 $7x=140,$

兩邊以 x 之係數 7 除之。則 $x=20$。 (原則三)

〔第三例〕 解 $a(x-a)=2ab-b(x-b)$ 式。

解去括弧。則 $ax-a^2=2ab-bx+b^2,$

移項則得 $ax+bx=a^2+2ab+b^2,$

即 $(a+b)x=(a+b)^2,$

兩邊以 x 之係數 $a+b$ 除之。則 $x=a+b$。

由以上三例。得解一次方程式之法則。順序之如下。

〔法則〕 方程式爲分數式及有他之代數記號如括弧者。則第一當去其分母及其記號。(即有括弧者。解去其括弧)第二移未知數量之項於左邊。移已知數量之項於右邊。且令各邊皆集爲一項。第三以未知數量之係數除已知數量。即得方程式之根。

118. 特別之例 凡一次方程式由 x 之項與已知項所成。故總可變爲 $ax+b=0$。而其解答爲 $x=-\dfrac{b}{a}$。

由是得特別之例如下。

〔第一〕 $b=0$。則 $x=-\dfrac{0}{a}=0$。

〔第二〕 $b=0,\ a=0$。則 $x=-\dfrac{0}{0}$。於此式無論 x 爲何値皆合於理。即爲恆同式。

$\dfrac{0}{0}$ 者。所以示任何之値。何則。因 $\dfrac{3}{5}=\dfrac{3\times0}{5\times0}=\dfrac{0}{0}$。

又 $8=\dfrac{8\times0}{1\times0}=\dfrac{0}{0}$。故爲不定數。

〔第三〕 $a=0$。則 $x=-\dfrac{b}{0}=-\infty$。即無窮大。

何則。a 之値次第減小。因而 $x=-\dfrac{b}{a}$ 之値。必次第增大。

例如　$a=\frac{1}{10}$。　則 $x=-\frac{b}{\frac{1}{10}}=-10b$,

$a=\frac{1}{100}$。　則 $x=-\frac{b}{\frac{1}{100}}=-100b$,

$a=\frac{1}{1000}$。　則 $x=-\frac{b}{\frac{1}{1000}}=-1000b$。

……………………………………

$\therefore\ a=0$。則 $x=-\infty$。

例　題

解以下之方程式。

1. $\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=4$。

〔解〕兩邊以 12 乘之。則得, $6(x-2\ -4(x-3)+3(x-4)=48$。

即　　$6x-12-4x+12+3x-12=48$。

即　　$5x=60$。　$\therefore\ x=12$。

2. $\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{4}(x-8)+\frac{1}{5}(x-5)=0$。　〔答 $x=0$〕

3. $a(x-a)=b(x-b)$。　〔答 $x=a+b$〕

4. $(x+a)(x+b)-(x-a)(x-b)=(a+b)^2$。

〔解〕解去括弧。得 $x^2+(a+b)x+ab-x^2+(a+b)x-ab=(a+b)^2$。

即 $2(a+b)x=(a+b)^2$。　$\therefore\ x=\frac{1}{2}(a+b)$。

5. $a(2x-a)+b(2x-b)=2ab$。　〔答 $x=\frac{1}{2}(a+b)$〕

6 $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$

〔解〕解去括弧。得 $a^2b^2+(a^2+b^2)x+x^2=a^2b^2+2abx+x^2$。

移項得 $(a^2-2ab+b^2)x=a^2b^2-a^2b^2$。　$\therefore\ x=0$。

7. $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$。

〔解〕$5\{(x+5)^2-(x+8)^2\}=3\{(x+8)^2-(x+3)^2\}$。

即 $5(-3)(2x+13)=3(5)(2x+11)$。

故 $-2x-13=2x+11$。　$\therefore\ x=-6$.

8. $(x+a)^4-(x-a)^4-8ax^3+8a^4=0$。

〔解〕 $\{(x+a)^2+(x-a)^2\}\{(x+a)^2-(x-a)^2\}-8a(x^3-a^3)=0$。

卽 $2(x^2+a^2)4ax-8a(x^3-a^3)=0$。

卽 $(x^2+a^2)x-(x^3-a^3)=0$。

故 $a^2x=-a^3$。 $\therefore\ x=-a$。

9. $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=3x(x^2-1)$。

〔解〕 $(x-1)^3+(x+1)^3+x^3=3x^3-3x$。

卽 $2x^3+6x+x^3=3x^3-3x$。 $\therefore\ 9x=0$。 $\therefore\ x=0$。

10. $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$。

〔解〕
$$\begin{aligned}A^3+B^3+C^3-3ABC&=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)\\&=\frac{1}{2}(A+B+C)(2A^2+2B^2+2C^2-2AB-2BC-2CA)\\&=\frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}。\end{aligned}$$

故原方程式 $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3-3(x+a)(x+b)(x+c)=0$。

變爲 $\frac{1}{2}(x+a+x+b+x+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$。

卽 $3x+a+b+c=0$。 $\therefore\ x=-\frac{1}{3}(a+b+c)$。

119. 因子分割法之應用 凡因子有一爲0者。其積亦爲0。因子無一爲0者。其積亦不能爲0。

例如 $(x-2)(x-3)$ 必 $x-2$ 爲0。或 $x-3$ 爲0。則其式乃可爲0。

由是方程式 $(x-2)(x-3)=0$。則 $x-2=0$。或 $x-3=0$ 乃合於理。故此方程式之根爲 $x=2$。或 $x=3$。其他皆不能適合。

又連乘積 $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$ 則必 $x-a$ 爲0。或 $x-b$ 爲0。或 $x-c$ 爲0……其式乃可爲0。若 $x-a,\ x-b,\ x-c,\ldots\ldots$ 諸因子內無一爲0者。則此連乘積不能爲0。

由是方程式 $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots=0$。則

$x-a=0$。或 $x-b=0$。或 $x-c=0$。乃合於理。故此方程式之根。爲 $x=a,\ x=b,\ x=c,\ldots\ldots$

依上所示。可不論方程式之次數如何。其餘答法。祇分割其一次因子令等於0。則其根可逕書出。

〔法則〕有任何次數之方程式。以其各項移於一邊而等於0。其解法與同次代數式分割其因子法同。

〔第一例〕解 $x^2-5x=6$ 式。

移項得 $x^2-5x-6=0$。

即 $(x-6)(x+1)=0$。

$\therefore$ $x-6=0$。或 $x+1=0$。

由是 $x=6$。或 $x=-1$。

〔第二例〕解 $x^3-x^2=6x$ 式。

移項得 $x^3-x^2-6x=0$。

即 $x(x-3)(x+2)=0$。

$\therefore$ $x=0$。或 $x=3$。或 $x=-2$。

120*. 二次方程式〔Quadratic Equation〕二次方程式盡移其各項於一邊。則其公式如下。

$$ax^2+bx+c=0。$$

但 a, b, c 爲已知數量。

二次式因子分割法已見於第80章。今以同方法求二次方程式之根如下。

例如解二次方程式 $ax^2+bx+c=0$。

以 x^2 係數 a 除之。得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$。

以 x 係數之半。即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}$ 之平方加而又減之。則得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0。$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left\{\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}^2=0。$$

即 $$\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\right\}=0。$$

由是 $x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0$。或 $x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0$。

$\therefore$ x之二根。爲$-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。

〔簡解法〕平方根有+及-之二種。卽$\sqrt{16}=\pm4$。故二次方程式之解法。如下爲便。

$$ax^2+bx+c=0。$$

卽
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}。$$

兩邊各加$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$。則得$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$。

卽
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}。$$

$$\therefore\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}。$$

由是 $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。

〔第一例〕解 $x^2-13x+42=0$ 式。

$$x^2-13x+\left(\frac{13}{2}\right)^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2-42。$$

卽
$$\left(x-\frac{13}{2}\right)^2=\frac{1}{4}。$$

$$\therefore\quad x-\frac{13}{2}=\pm\frac{1}{2}。$$

由是 $x=\frac{13}{2}\pm\frac{1}{2}$。卽 $x=7$。或 $x=6$。

〔第二例〕解 $3x^2-10x+6=0$ 式。

卽
$$x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2-2。$$

卽
$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{7}{9}。$$

$$x-\frac{5}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}。$$

由是 $x=\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}$ 或 $x=\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}$。

〔第三例〕解 $a(x^2+1)=x(a^2+1)$ 式。

變原方程式爲 $x^2-\frac{x}{a}(a^2+1)=-1$。

即 $x^2-\frac{x}{a}(a^2+1)+\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-1$。

即 $$\left(x-\frac{a^2+1}{2a}\right)^2=\frac{a^4-2a^2+1}{4a^2}。$$

$$\therefore\quad x-\frac{a^2+1}{2a}=\pm\frac{a^2-1}{2a}。$$

由是 $x=\frac{a^2+1}{2a}\pm\frac{a^2-1}{2a}$。

$\therefore\quad x=a$。或 $x=\frac{1}{a}$。

〔註〕以上所示二次方程式之解法。用因子分割法求之更便。

例 題

解下之各方程式。

1. $9x^2-24x+16=0$。 〔答 $\frac{4}{3}$〕

〔解〕由原方程式。得 $(3x-4)^2=0$。 $\therefore\ 3x=4$。

2. $5(x^2+4)=4(x^2+9)$。 〔答 ±4〕

〔解〕由原方程式。得 $x^2=16$。 $\therefore\ x=\pm4$。

3. $3x^2=8x+3$。 〔答 $3, -\frac{1}{3}$〕

4. $16x^2+16x+3=0$。 〔答 $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$〕

〔解〕$16x^2+16x+4=1$, $(4x+2)^2=1$。 $\therefore\ 4x+2=\pm1$。

5. $x^2+(a-x)^2=(a-2x)^2$。 〔答 $0, a$〕

〔解〕$x^2+(a-x)^2=(a-x)^2-2(a-x)x+x^2$。

$2(a-x)x=0$。 由是 $x=a$。或 $x=0$。

6. $x^2+(a-2x)^2=(a-3x)^2$。 〔答 $0, \frac{a}{2}$〕

7. $x^2+x=a^2+a$。 〔答 $a, -(a+1)$〕

〔解〕 $x^2-a^2+x-a=0$。 卽 $(x-a)(x+a+1)=0$。

8. $x^2+2ax=b^2+2ab$。 〔答 $b, -(2a+b)$〕

〔解〕 $x^2+2ax+a^2=b^2+2ab+a^2$。

卽 $(x+a)^2=(b+a)^2$。 $\therefore\ x+a=\pm(b+a)$。

9. $(x-a)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$。 〔答 a, b〕

〔解〕 $(x-a)^2+(x-b)^2=\{(x-b)-(x-a)\}^2$。

由是 $0=-2(x-a)(x-b)$。 $\therefore\ x=a,\ x=b$。

10. $(a-x)^3+(x-b)^3=(a-b)^3$。 〔答 a, b〕

〔解〕 $(a-x)^3+(x-b)^3=\{(a-x)+(x-b)\}^3$。

卽 $(a-x)^3+(x-b)^3=(a-x)^3+(x-b)^3+3(a-x)(x-b)\{(a-x)+(x-b)\}$。

由是 $3(a-x)(x-b)(a-b)=0$。 $\therefore\ x=a$ 或 b。

11. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$。 〔答 $1, \frac{a-b}{b-c}$〕

〔解〕 $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$。

由原方程式減之。則得

$$(b-c)(x^2-1)+(c-a)(x-1)=0。$$

卽 $(x-1)\{(b-c)(x+1)+(c-a)\}=0$。 $\therefore\ x=1$ 或 $\frac{a-b}{b-c}$。

121*. 二根之詳論 前章解二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根。為 $-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, 及 $-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。

負數之平方根爲虛數。故 $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。必依 b^2-4ac 之正負而定爲實數 (Real) 或虛數 (Imaginary)。

故 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根。從 b^2-4ac 之正負。而得實根或虛根。

又此兩根可從 b^2-4ac 之爲完全平方或非完全平方。而定其爲有理式或無理式。

由是此兩根皆爲有理式或皆爲無理式。又皆爲實根或皆爲虛根。自易明瞭。

又 $b^2-4ac=0$。則兩根爲等根。卽 $-\frac{b}{2a}$。但此方程式不曰有一根 $-\frac{b}{2a}$ 而曰有相等之二根。

如 b^2-4ac 不爲 0。則此方程式爲有不等之二根。

由是 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根若相等。則其關係在 $b^2=4ac$，但依 83 章 $b^2=4ac$。則代數式 ax^2+bx+c 爲完全平方數。

〔注意〕b^2-4ac 之關係。最宜注意。

122. 特別之例 二次方程式特別之例。卽在係數爲 0 者，示之如下。

〔第一〕$c=0$。則 $ax^2+bx+c=0$。

卽 $$ax^2+bx=0。$$

卽 $$x(ax+b)=0。$$

$\therefore\ x=0$, 及 $-\frac{b}{a}$。卽此兩根爲 0。及 $-\frac{b}{a}$。

〔第二〕$c=0$, 及 $b=0$。則方程式爲 $ax^2=0$。由是此兩根皆爲 0.

〔第三〕$b=0$。則方程式爲 $ax^2+c=0$,

由是 $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$。故兩根之數值相等。而符號相反。

〔第四〕$a=0$, $b=0$, $c=0$。則此方程式爲恆同式。卽 x 爲任何之值。皆合於理。

〔第五〕$a=0, b=0$。則在 $ax^2+bx+c=0$ 之式內。用 $\frac{1}{y}$ 代 x。卽 $\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c=0$。卽 $cy^2+by+a=0$。

而因 $a=0$, $b=0$。故 $cy^2=0$。

由第一例。則 y 俱爲 0。故 $x=\frac{1}{y}=\frac{1}{0}=\infty$。

卽 x 之兩根。俱爲無窮大。

〔第六〕$a=0$, $c=0$。則 $ax^2+bx+c=0$。變爲 $bx=0$。由是 $x=0$。

又依第五例 $cy^2+by+a=0$。則 $by=0$。卽 $y=0$。

由是$x=\frac{1}{y}=\frac{1}{0}=\infty$。

故在此例。則x之兩根爲0及∞。

〔第七〕$a=0$。則$cy^2+by=0$。

故$y=0$, 及$-\frac{b}{c}$。

由是$x=\frac{1}{y}=\infty$, 及$-\frac{c}{b}$。

例如方程式$(a-a')x^2+(b-b')x+c-c'=0$。設$a=a'$。則x之一根爲∞。其餘一根爲$-\frac{c-c}{b-b'}$。卽有限數。

設$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$。則此方程式不論x爲如何之値。皆合於理。則恆同式。

又方程式$a(x+b)(x+c)+b(x+c)(x+a)=c(x+a)(x+b)$。除$c=a+b$之外。不論$c$爲何値。必爲二次方程式。若$c=a+b$。則$x^2$之係數爲零。故通例爲一次方程式。然依第七例作二次方程式求之。則其一根必爲無窮大。

〔註〕無窮大之根。在代數學內。通例可置不論。

例如$x^2+6x=x^2+12$。卽$6x=12$。 $\therefore\ x=2$。

若從$x^2-x^2+6x=12$。卽$0x^2+6x=12$求之。則得$x=2$, 及∞。

123. 方程式之零及無窮大根 普通之方程式。卽n次方程式。如

$$ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+kx+l=0\ldots\ldots(1)$$

若$l=0$。則得$x(ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots\ldots+k)=0$。

又$l=0$, $k=0$。則x之二根爲0。依此其末項次第爲0。則0之根亦次第加多。

又$x=\frac{1}{y}$, 則得$a\left(\frac{1}{y}\right)^n+b\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+\ldots\ldots+k\left(\frac{1}{y}\right)+l=0$。

卽 $$ly^n+ky^{n-1}+\ldots\ldots+by+a=0。$$

故$a=0$, 則y之一根爲0, 卽x之一根爲∞。

又 $a=0, b=0$。則 y 之二根爲 0。卽 x 之二根爲 ∞。依此知方程式首項之係數次第爲 0。則 ∞ 之根。亦次第加增。

由是從 (1) 式之末項爲 0。則得 0 之根。從其首項爲 0。則得 ∞ 之根。若 (1) 式之係數皆爲 0。則爲恆同式。

此理已見於 90 章與 91 章。當參考之。

124*. 不整方程式 方程式之分母有含未知數者。謂之不整方程式。而其解法須以此不整方程式。化爲與之等値之整方程式。

方程式以其分數之分母乘之。則爲整方程式。雖然。其乘法必須檢查。(卽檢查其根合理與否)。

何則。方程式之兩邊。以含未知數量之式乘之。卽另得一新方程式。而其乘式等於 0 之一根。必非原方程式之根。故新方程式生有增根。

例如 $x+1=5$ 之根。爲 $x=4$。但此兩邊以 $x-2$ 乘之。則得
$(x+1)(x-2)=5(x-2)$。

卽 $(x-2)(x+1-5)=0$。 $\therefore\ x=4$, 及 $x=2$。

此 $x=2$ 爲非原方程所有之根。而由 $x-2=0$ 所生出者。

不整方程式化爲整方程式。則以含有未知數之分母乘其兩邊。故必生有增根。

如 $A=B$ 之方程式。以 P 乘之。則 $PA=PB$。卽 $P(A-B)=0$。

P 爲乘式之未知數。故 $P=0, A-B=0$。而生有 $P=0$ 之增根。而不整方程式。卽可依此意解之。

或謂不整方程式以其分母之最低公倍數乘之。則不生增根。但如下之第二例。乘以分母之最低公倍數者。仍生增根也。解明於後。

〔第一例〕 解 $\dfrac{3}{x-5}+\dfrac{2x}{x-3}=5$ 式。

以分母之 $L.C.M.$ $(x-5)(x-3)$ 乘其兩邊。則得

$$3(x-3)+2x(x-5)=5(x-5)(x-3)。$$

$$\therefore\ 3x^2-33x+84=0.$$

由是 $x=4$, 或 $x=7$。

〔第二例〕$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$。

以分母之 L.C.M. x^2-1 乘之。則得

$$x^2-3x+2(x^2-1)+x+1=0。$$

卽 $3x^2-2x-1=0$。 $\therefore\ (3x+1)(x-1)=0$。

由是 $x=-\frac{1}{3}$，及 $x=1$。

故此方程式有 $-\frac{1}{3}$ 及 1 之兩根。然 1 非原方程式之根。卽乘式 $x^2-1=0$ 之根。故爲增根。

由是不整方程式化爲整方程式之後。其不合理之根可省去。蓋不合理之根。必爲乘式 $=0$ 之根。而非原方程式之根也。今以別法證之如下。

〔別法〕$x-1$ 爲不合理之根。今先行設法令其結果不得此根則在於不必逕去其分母。

例如 從 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$。變爲

$$\frac{x^2-3x+(x+1)}{x^2-1}+2=0。卽\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1}+2=0。$$

卽 $\frac{x-1}{x+1}+2=0$。 $\therefore\ x-1+2(x+1)=0$。 $\therefore\ x=-\frac{1}{3}$。

〔第三例〕解 $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$ 式。

此例亦不必逕去其分母。可從兩邊之各項各減去1。

卽 $\frac{x}{x-2}-1+\frac{x-9}{x-7}-1=\frac{x+1}{x-1}-1+\frac{x-8}{x-6}-1$。

卽 $\frac{2}{x-2}+\frac{-2}{x-7}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-6}$。

卽 $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-6}$。

卽 $\frac{-5}{(x-2)(x-7)}=\frac{-5}{(x-1)(x-6)}$。

由是 $(x-2)(x-7)=(x-1)(x-6)$。

$$\therefore\ x=4。$$

〔第四例〕解 $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}+\dfrac{c}{x+c}=3$ 式。

兩邊各減去3。則得

$$\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1+\frac{c}{x+c}-1=0。$$

即 $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{x}{x+b}+\dfrac{x}{x+c}=0。$

$\therefore\ x=0$ .... (1)

或 $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x+c}=0。$

以分母之 $L.C.M.$ 乘之。則得

$$(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)=0。$$

即 $3x^2+2x(a+b+c)+bc+ca+ab=0。$

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{3}\{(a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2-c^2-ab-bc-ca)}\}$ .... (2)

由是此方程式之根爲(1)及(2)。

〔第五例〕解 $\dfrac{b+c}{bc-x}+\dfrac{c+a}{ca-x}+\dfrac{a+b}{ab-x}=\dfrac{a+b+c}{x}$ 式。

移項括之。則得 $\dfrac{b+c}{bc-x}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{c+a}{ca-x}-\dfrac{b}{x}+\dfrac{a+b}{ab-x}-\dfrac{c}{x}=0。$

即 $\dfrac{(a+b+c)x-abc}{x(bc-x)}+\dfrac{(a+b+c)x-abc}{x(ca-x)}+\dfrac{(a+b+c)x-abc}{x(ab-x)}=0。$

由是 $(a+b+c)x-abc=0$ .... (1)

或 $\dfrac{1}{x(bc-x)}+\dfrac{1}{x(ca-x)}+\dfrac{1}{x(ab-x)}=0$ .... (2)

從(1)式 $x=\dfrac{abc}{a+b+c}。$

從(2)式去分母。得

$$(ca-x)(ab-x)+(ab-x)(bc-x)+(bc-x)(ca-x)=0。$$

即 $3x^2-2x(bc+ca+ab)+abc(a+b+c)=0。$

$$\therefore\ x=\frac{1}{3}\{bc+ca+ab\pm\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)}\}$$

125*. 無理方程式〔Irrational Equations〕 方程式含有未知數量之平方根或立方根。或其他之方根。謂之無理方程式。今示其解法於下。

先移無理項於一邊。其餘諸項移於他邊。乃將兩邊各自乘。乘後如尙有無理之項。再依此法解之。至悉化爲有理項而止。

〔第一例〕解 $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$ 式。

移項得 $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}$。

兩邊自乘。則 $x+4+2\sqrt{(x+4)(x+20)}+x+20=4(x+11)$。

簡之。得 $\sqrt{(x+4)(x+20)}=x+10$。

又以兩邊自乘。則 $(x+4)(x+20)=x^2+20x+100$。

$\therefore\ x=5$。

〔第二例〕解 $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$ 式。

移項得 $\sqrt{2x+8}-2=2\sqrt{x+5}$。

兩邊自乘。則 $2x+8-4\sqrt{2x+8}+4=4(x+5)$。

卽 $-4\sqrt{2x+8}=2x+8$。

又以兩邊自乘。則 $16(2x+8)=(2x+8)^2$。

卽 $(2x+8)(2x-8)=0$。

$\therefore\ x=-4$ 或 4。

〔第三例〕解 $\sqrt{ax+\alpha}+\sqrt{bx+\beta}+\sqrt{cx+\gamma}=0$ 式。

移項得 $\sqrt{ax+\alpha}+\sqrt{bx+\beta}=-\sqrt{cx+\gamma}$。

兩邊自乘。則 $ax+\alpha+2\sqrt{(ax+\alpha)(bx+\beta)}+bx+\beta=cx+\gamma$。

卽 $(a+b-c)x+\alpha+\beta-\gamma=-2\sqrt{(ax+\alpha)(bx+\beta)}$。

又自乘，則 $(a+b-c)^2x^2+2(a+b-c)(\alpha+\beta-\gamma)x+(\alpha+\beta-\gamma)^2$

$$=4(ax+\alpha)(bx+\beta)。$$

卽 $(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)x^2$

$+2(a\alpha+b\beta+c\gamma-b\gamma-c\beta-c\alpha-a\gamma-a\beta-b\alpha)x$

$+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma-2\gamma\alpha-2\alpha\beta=0$。

由是可從二次方程式而得其根。

〔餘論〕以上諸例。在平方根號之前所用之符號。無＋與－之差異。蓋代數量之平方根。必有兩符號。決非僅有一符號。卽如$\sqrt{16}=\pm 4$。故僅書 $+\sqrt{x+1}$。或 $-\sqrt{x+1}$。雖偏用一符號。而與$\pm\sqrt{x+1}$兼用兩符號者同意。

又 $x+\sqrt{x+1}$。決非僅爲$+\sqrt{x+1}$。而亦能爲$-\sqrt{x+1}$。

卽 $x+\sqrt{x+1}$。可爲$x\pm\sqrt{x+1}$。

例如$\sqrt{(x+1)}=5$。卽$x+1=25$。 $\therefore\ x=24$。

又 $-\sqrt{(x+1)}=5$。則亦$x+1=25$。 $\therefore\ x=24$。

故 $x=24$。則$\sqrt{x+1}=5$之根。卽$\sqrt{24+1}=5$。$+5=5$。

又 $x=24$。則$-\sqrt{x+1}=5$之根。卽$-\sqrt{24+1}=5$。$-(-5)=5$。

卽 $\sqrt{x+1}=5$。則用$\sqrt{25}=+5$。

$-\sqrt{x+1}=5$。則用$\sqrt{25}=-5$。

126 兩邊之平方

有理方程式之兩邊各自乘。則生增根。例如有理方程式$A=B$之兩邊各方之。則得$A^2=B^2$。卽$A^2-B^2=0$。卽$(A-B)(A+B)=0$。

$\therefore\ A=B$。$A=-B$。此$A=-B$之根爲增根。

由是方程式之兩邊各自乘。必不能與原方程式等值。然在無理方程式。獨能與原方程式等值。而不生增根。例如$\sqrt{A}=\sqrt{B}$之兩邊各方之。則得$A=B$。卽$A-B=0$。卽$(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})=0$。

$\therefore\ \sqrt{A}=\sqrt{B}$。$\sqrt{A}=-\sqrt{B}$。

又$\sqrt{A}=\sqrt{B}$。原含有$\pm\sqrt{A}=\pm\sqrt{B}$之意義。故有$\sqrt{A}=\sqrt{B}$, $-\sqrt{A}=-\sqrt{B}$, $\sqrt{A}=-\sqrt{B}$, $-\sqrt{A}=\sqrt{B}$之四根。而此四根兩兩相等。故實得$\sqrt{A}=\sqrt{B}$, $\sqrt{A}=-\sqrt{B}$之二根。故無理方程式。若兩邊求其平方。則仍與原方程式等值。

例如$x+1=\sqrt{x+13}$。$x+1=-\sqrt{x+13}$此二式皆兩邊自乘。則皆得$(x+1)^2=x+13$。可參觀(152章)。

127. 定理 二次方程式。祇有二根。

在 90 章 x 之 n 次式。曾證 x 之值。若多於 n 個。則其式不能相消而為 0。故 x 之二次式 x 之值。若多於二個。其式亦不能相消而為 0。故 x 之二次方程式。其根不能多於二。特證之如次。

若 $ax^2+bx+c=0$。設 x 之三根為 α, β, γ。則。

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

而此三方程式 a, b, c。非皆等於 0。則同時不能適合。證之如次。

從 (1) 式及 (2) 式由減法得 $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$。

即 $$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0。$$

但 α, β 原設為不等。即 $\alpha-\beta\neq 0$。

故 $$a(\alpha+\beta)+b=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

又 $\beta-\gamma\neq 0$。故 (2) (3) 兩式。亦與前同法得

$$a(\beta+\gamma)+b=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

從 (4) (5) 兩式。由減法得 $a(\alpha-\gamma)=0 \quad\cdots\cdots(6)$

$\alpha-\gamma\neq 0$。故非 $a=0$。則 6 式為不合理。

若 (6) 式為合理。即 $a=0$。從 (4) 式。則 $b=0$。從 (1) 式。則 $c=0$。

由是二次方程式。若有三根。則各項之係數皆為 0。即為恆同式。不論 x 為如何之根。皆合於理。故非恆同式。則二次方程式之根。祇有二個。

〔第一例〕 解 $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x^2$ 式。

$$x=a。則\ a^2\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)}=a^2。$$

即 $$a^2+0=a^2\ 為合理。$$

又 $$x=b\ 亦能合理。$$

而 $x=c$。則 $a^2\dfrac{(c-b)(c-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(c-c)(c-a)}{(b-c)(b-a)}=c^2$。其右邊為 c^2。故不合理。

由是此方程式 x 之二根。為 a, b。且為 x 之二次方程式。故非恆同式。

〔第二例〕 $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$。

此方程式。亦爲二次方程式。而 $x=a, x=b, x=c$ 皆能適合。卽有三根。故爲恆同式。

〔第三例〕 $a^3\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^3\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^3\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^3$。

此方程式爲三次方程式。而 $x=a, x=b, x=c$ 皆能適合又 $x=0$ 則不能適合。故非恆同式。

故此方程式。爲有 a, b, c 三根之三次方程式。

〔第四例〕 $(a-\alpha)^2x+(a-\beta)^2y+(a-\gamma)^2z=(a-\delta)^2$。

$$(b-\alpha)^2x+(b-\beta)^2y+(b-\gamma)^2z=(b-\delta)^2。$$

$$(c-\alpha)^2x+(c-\beta)^2y+(c-\gamma)^2z=(c-\delta)^2。$$

上之三方程式。證其合理如下。

先設 $(d-\alpha)^2x+(d-\beta)^2y+(d-\gamma)^2z=(d-\delta)^2$。

但 d 爲任意之數量。

再設方程式 $(X-\alpha)^2x+(X-\beta)^2y+(X-\gamma)^2z=(X-\delta)^2$。此式爲 X 之二次方程式。然令 $X=a, X=b, X=c$。則與最初之三方程式適合。是 X 之值有三個。故知此方程式。爲恆同式。卽 X 爲任意之值。均能合理。

由是 $X=d$。亦必適合。

卽 $(d-\alpha)^2x+(d-\beta)^2y+(d-\gamma)^2z=(d-\delta)^2$。

128*. 根及係數之關係 示二次方程式之根與其係數之關係如下。

依 120 章 $ax^2+bx+c=0$ 之根。爲 $-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。此二根爲 α, β, 則

$$\alpha=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}。\qquad \beta=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}。$$

由加法得 $\alpha+\beta=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$ ....(1)

又由乘法得 $\alpha\beta=\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$ ....(2)

(1) 式及 (2) 式。所以示兩根之和及積。全賴係數而著。故此兩式爲最要之式。

〔別法〕 $ax^2+bx+c=0$。卽 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$。其二根爲 α, β。則 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$。卽 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$。其二根亦爲 α, β。故此兩方程式全同。

由是比較其 x 之係數及末項。則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \text{及 } \alpha\beta=\frac{c}{a}。$$

129. 任意方程式之根及係數之關係

任何次數之方程式。其根與係數之關係。可依下之方法求得之。

x 之 n 次式。爲 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\ldots\ldots$ 而 x 之 n 個之値。卽 $x=\alpha, x=\beta, x=\gamma\ldots\ldots$ 可以代入。而令其式爲零。

故 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\ldots\ldots=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots\ldots$

此方程式之兩邊。x 之同方乘之係數相等。故可得根及係數之關係。(詳在 **437** 章)。

〔例〕 三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 三根爲 α, β, γ。則

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}。$$

比較其兩邊之係數。則

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=-\frac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha&=\frac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma&=-\frac{d}{a}\end{aligned}\right\}。$$

任意次數之方程式。其次項(卽比最高方乘少一次之項)之係數爲各根之和。故次項之係數爲 0。則其各根之和爲 0。

例如前之三次方程式。若 $b=0$。則

$ax^3+cx+d=0$。卽三根之和 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{0}{a}=0$。

〔附則〕$x^3+px+q=0$ 之三根爲 a, b, c。則 $a+b+c=0$。而得恆同式如下。

$$bc+ca+ab=p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$abc=-q \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

而因 $$a+b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

故 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2p \cdots\cdots (4)$

又因 a, b, c 爲 $x^3+px+q=0$ 之三根。

故 $$\left.\begin{array}{l} a^3+pa+q=0 \\ b^3+pb+q=0 \\ c^3+pc+q=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

從 (5) 式由加法得 $a^3+b^3+c^3+p(a+b+c)+3q=0$。

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3=-3q \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

(5) 式之第一第二第三。次第以 $a^{n-3}, b^{n-3}, c^{n-3}$, 乘之相加。則得 $a^n+b^n+c^n+p(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2})+q(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3})=0$。

由是此方程式設 $n=4$。則

$a^4+b^4+c^4+p(a^2+b^2+c^2)+q(a+b+c)=0$。

即 $a^4+b^4+c^4+p(-2p)+q(0)=0$。

$\therefore\quad a^4+b^4+c^4=2p^2$。

$n=5$。則 $a^5+b^5+c^5+p(a^3+b^3+c^3)+q(a^2+b^2+c^2)=0$。

即 $a^5+b^5+c^5+p(-3q)+q(-2p)=0$。

$\therefore\quad a^5+b^5+c^5=5pq$。

$n=6$。則 $a^6+b^6+c^6+p(a^4+b^4+c^4)+q(a^3+b^3+c^3)=0$。

即 $a^6+b^6+c^6+p(2p^2)+q(-3q)=0$。

$\therefore\quad a^6+b^6+c^6=3q^2-2p^3$。

$n=7$。則 $a^7+b^7+c^7=-7p^2q$。

由是 $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=pq,\ \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=-p,\ \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=-q$。

$$\therefore\quad \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ \ \frac{a^3+b^3+c^3}{3}。$$

又 $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=-p^2q=-p.\,pq=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^5+b^5+c^5}{5}。$$

又因 $2\dfrac{a^4+b^4+c^4}{4}=p^2$。故

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=-q.p^2=2\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ \frac{a^4+b^4+c^4}{4}。$$

此例之應用在308章第二例。

130. 已知根之方程式 凡高次方程式之根。每不能以普通之法求得之。然已知其根而反求其方程式。則任爲如何之高次式。皆易求得之。

例如求4及5爲根之方程式。則 $x=4$, $x=5$。卽 $x-4=0$, $x-5=0$。

$\therefore\quad (x-4)(x-5)=0$。卽 $x^2-9x+20=0$。

又如有2, 3及 -4 之根。而求其方程式。則 $x=2$, $x=3$, $x=-4$。卽 $x-2=0$, $x-3=0$, $x+4=0$。

$\therefore\quad (x-2)(x-3)(x+4)=0$。 卽 $x^3-x^2-14x+24=0$。

〔註〕方程式 $x^2-9x+20=0$ 所有之根爲4, 5。此外不能再有他根明矣。然以含 x 之他方程乘之。則其根除4, 5之外。必別有他根。若以 $x^5+7x^2-2=0$ 之方程式。爲無根之式。則 $(x^2-9x+20)(x^5+7x^2-2)=0$。卽 $(x-4)(x-5)(x^5+7x^2-2)=0$ 之方程式。亦另以4及5爲根，而别無他根。卽與前之 $x^2-9x+20=0$ 方程式同。必無是理。

謂各方程式必有一根者。可以論理方程式。(Theory of Equations)證明之。但屬於高等數學之部分。茲從略。

〔第一例〕α,β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之二根。則以 $\dfrac{\alpha}{\beta},\dfrac{\beta}{\alpha}$ 爲二根之方程式若何。

$ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α,β。故由128章

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ 及\ \alpha\beta=\frac{c}{a}。$$

又所求之方程式爲 $\left(x-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(x-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=0$。

卽 $$x^2-\left(\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}\right)x+1=0。$$

卽 $$\alpha\beta x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+\alpha\beta=0。$$

$$\frac{c}{a}x^2-\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}x+\frac{c}{a}=0$$

〔第二例〕 α,β,γ 爲 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根。則 $\beta\gamma,\gamma\alpha,\alpha\beta$ 爲三根之方程式若何。

由 129 章 $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$。

又所求之方程式爲 $(x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha)=0$。

即 $x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2=0$。

$$\therefore\quad x^3-\frac{c}{a}x^2+\frac{bd}{a^2}x-\frac{d^2}{a^2}=0。$$

即 $$a^2x^3-acx^2+bdx-d^2=0。$$

131. 二次三項式之值 論其變化如下。

代數式 ax^2+bx+c。因 x 之值變而全式之值亦變。然 x 爲任意之實數。可自 $+\infty$ 變至 $-\infty$。而此式之值。則僅限於其能變之值。不能任意變化之。

如 $2x-6$ 之一次式欲變爲 5。則令 $2x-6=5$。即 $x=5\frac{1}{2}$ 又欲變爲 0。則令 $2x-6=0$。即 $x=3$。其他不論如何之值。皆可變得。惟在二次式內。決不能如此。

代數式 ax^2+bx+c 用適宜之實數代 x。令全式之值爲 λ。即 $ax^2+bx+c=\lambda$。然此方程式。能否爲實根。其關係式由 121 章而得。

$$b^2-4a(c-\lambda)>0。$$

即 $$b^2-4ac+4a\lambda>0。\qquad\qquad(1)$$

〔第一〕 b^2-4ac 爲正。則在 (1) 式內之 $4a\lambda$。不論爲如何之正數。皆合於理。又 $4a\lambda$ 不大於 b^2-4ac。則不論爲如何之負數。亦皆合理。以能與關係式(即 (1) 式)適合。而不致原式中 x 爲虛根也。

故 b^2-4ac 爲正。則在 ax^2+bx+c 式以實數代 x。其值爲 λ。則與 a 同號 (λ 與 a 同號。則 $4a\lambda$ 爲正) 之各數。皆合於理。又與 a 異號 (λ 與 a 異號。則 $4a\lambda$ 爲負) 而小於 $\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 之負數。亦能合理。

例如 $3x^2-7x+2$ 之式內。其 $(-7)^2-4\times3\times2>0$。故此式之值。能得任何之正數值。又能得比 $\dfrac{(-7)^2-4\times3\times2}{4\times3}=2\dfrac{1}{12}$ 小之負數值。即用

任意之實數代x。則此式之值。可得任何之正數值。又可得比$2\frac{1}{12}$小之負數值。

〔第二〕若b^2-4ac爲負。則在(1)式內之$4a\lambda$。爲不比$4ac-b^2$小之各正數值。皆合於理。

故b^2-4ac爲負。則以實數代x。而ax^2+bx+c之值。恆與a同號。而不小於$\frac{4ac-b^2}{4a}$。

例如$3x^2-2x+7$。則得$(-2)^2-4\times3\times7<0$。故此式之值。由實數代x而得者。必不小於$\frac{4\times3\times7-(-2)^2}{4\times3}=6\frac{2}{3}$。

〔第三〕若b^2-4ac爲0。則在(1)式內。其$a\lambda$爲任何正數值。皆合於理。

依第一第二兩例。可知以下諸事。

代數式ax^2+bx+c。其b^2-4ac爲負或爲0。則無論用如何之數代x。而不變其號。

卽方程式$ax^2+bx+c=0$之兩根爲虛根。或爲等根。則代數式ax^2+bx+c內。以任何實數代x。而所得之值。其號不變。

若方程式$ax^2+bx+c=0$。爲不等之實根。則此代數式內。用任何實數以代x。恆變其號。

例如$3x^2-2x+7=0$之兩根。爲$\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{-20})$。卽虛根。故$3x^2-2x+7$之值。若$x=0$則爲$+7$。$x=1$則爲$+8$。$x=10$則爲$+287$。又$x=-1$則爲$+12$。其數恆爲正。

又$-9x^2+12x-16=0$爲等根。卽$\frac{4}{3}$。故在$-9x^2+12x-16$式內。無論用如何之實數代x。其數恆爲負。

又$x^2-9x+18=0$。有不等之兩實根3及6。故$x^2-9x+18$之值。若$x=2$則爲$+4$。$x=4$則爲-2。其號已變。又若$x=7$則爲$+4$。其號又變。

此證又可從下法得之。

方程式 $ax^2+bx+c=0$。爲有不等之二實根 α, β。

則 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$。

但 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 其 x 之值。大於 α 及 β。或小於 α 及 β。則其數皆爲正。何則。x 之值。若皆比 α, β 大。則 $x-\alpha$, $x-\beta$ 之積爲正。若皆比 α, β 小。則 $x-\alpha$, $x-\beta$ 爲負。而其積亦爲正數。

故以任意之值。代入方程式 ax^2+bx+c 中之 x。如 x 之值，不在方程式兩根之間。則所得之值，必恆與 a 同號。

若所代 x 之值。在 α, β 兩根之間。則 $x-\alpha$ 與 $x-\beta$ 異號。即 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 爲負。故代數式 ax^2+bx+c。即 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ 之值。與 a 異號。

132. 別法 二次三項式 ax^2+bx+c 之值。從其 b^2-4ac 之正或負。而對於 x 之種種之值。變其號或不變其號。以別法證之如下。

先設 $ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$……………………(A

〔第一〕 b^2-4ac 爲正。

則在 (A) 式內。若 $x=-\dfrac{b}{2a}$。則此代數式爲負。若 x 增大至 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ 大於 $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$。則此代數式爲正。

故 b^2-4ac 爲正。則代數式 ax^2+bx+c 用適宜之實數值代 x。則變其號。

〔第二〕 b^2-4ac 爲負或爲零。

惟 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ 恆爲正。而 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲正或爲零。則 (A) 式必恆爲正。

故代數式 ax^2+bx+c。其 b^2-4ac 爲負或爲零。則 x 無論爲如何之數值。而不變其號。即常與 a 同號。

133. 應用 依 131 章及 132 章。於 x 之二次式。用適宜之實數值代 x 而變其號。則其方程式之實根。即可因此推知。

例如在代數式 $a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)(x-\beta)$ 內，其 α, β, γ 依大小順序之爲 $\alpha>\beta>\gamma$。則此代數式。若 $x=\alpha$。其數必爲正。何則。$\alpha-\beta$ 與 $\alpha-\gamma$ 皆爲正。故 $a^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+0+0$ 爲正。

又 $x=\beta$。則 $0+b^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+0$ 卽 $-b^2(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)$ 爲負。

由是方程式 $a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)(x-\beta)=0$。在其代數式內。用 α, β 以代 x。卽必變其號。故 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 對於各實數值。皆爲實根。

〔第一例〕$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$。試就 x 之一切實數值。而證其數爲正。

此代數式 $=\{(x-1)(x-6)\}\{(x-3)(x-4)\}+10$。

$$=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10$$

$$=(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+82$$

$$=(x^2-7x+9)^2+1。$$

卽 $(x^2-7x+9)^2$。則以一切實數代 x。其數皆爲正。

〔第二例〕$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}$。用適宜之實數值代 x。則可得任意之實數值。試證之。

令 $$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}=\lambda。$$

則 $$x^2(4-12\lambda)+(36-8\lambda)x+(9-\lambda)=0。$$

在此方程式內。x 爲實根之關係。由 **121** 章。得

$$(36-8\lambda)^2-4(4-12\lambda)(9-\lambda)>0$$

卽 $$16(\lambda^2-8\lambda+72)>0。$$

卽 $$16(\lambda-4)^2+896>0。$$

卽上之關係 λ 爲任意之值。其式常爲正而大於0。故能合理。故用適宜之實數值代 x。可得 λ 爲任意之實數值。

〔第三例〕$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$。若 x 爲實數值。可證其式不大於7。又不小於 $\frac{1}{7}$。

令 $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=\lambda$。則 $x^2(1-\lambda)-3x(1+\lambda)+4(1-\lambda)=0$。

x 爲實根。則其關係爲 $9(1+\lambda)^2-16(1-\lambda)^2>0$。

卽 $$\{3(1+\lambda)+4(1-\lambda)\}\{3(1+\lambda)-4(1-\lambda)\}>0。$$

即 $$-7(\lambda-7)\left(\lambda-\frac{1}{7}\right)>0。$$

由上之關係 $\lambda-7$ 及 $\lambda-\frac{1}{7}$。可知其號相異。故 λ 在 7 與 $\frac{1}{7}$ 之間.

例題十

試解下列之方程式。

1. $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3$。

〔解〕 $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=\{(x-a+2b)-(x-2a+b)\}^3$。

即 $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3$
$-3(x-a+2b)(x-2a+b)\{(x-a+2b)-(x-2a+b)\}$。

$\therefore\ 0=-3(x-a+2b)(x-2a+b)(a+b)$。

由是 $x=a-2b$, 或 $2a-b$。

2. $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$。

〔解〕 $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x-(c+a-2b)-(a+b-2c)=0$。

即 $(c+a-2b)(x^2-1)+(a+b-2c)(x-1)=0$。

即 $(x-1)\{(c+a-2b)(x+1)+a+b-2c\}=0$。

$\therefore\ x-1=0$。或 $(c+a-2b)(x+1)+a+b-2c=0$。

由是 $x=1$, 或 $x=\dfrac{b+c-2a}{c+a-2b}$。

3. $\dfrac{a^2}{(x-a)^2}=\dfrac{b^2}{(x+b)^2}$。

〔解〕 去分母。則 $a^2(x+b)^2=b^2(x-a)^2$。兩邊開平方。則

$a(x+b)=\pm b(x-a)$。 $\therefore\ x=\dfrac{-ab\mp ab}{a\mp b}=0$, 或 $\dfrac{2ab}{a-b}$。

4. $\dfrac{a+x}{b+x}+\dfrac{b+x}{a+x}=2\dfrac{1}{2}$。

〔解〕 $\dfrac{a+x}{b+x}-2-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b+x}{a+x}\right)=0$。即 $\left(\dfrac{a+x}{b+x}-2\right)-\dfrac{b+x}{2(a+x)}\left(\dfrac{a+x}{b+x}-2\right)=0$。

即 $\left(\dfrac{a+x}{b+x}-2\right)\left(1-\dfrac{b+x}{2(a+x)}\right)=0$。 $\therefore\ \dfrac{a+x}{b+x}-2=0$。或 $1-\dfrac{b+x}{2(a+x)}=0$。

由是 $x=a-2b$, 或 $b-2a$。

5. $\dfrac{ax+b}{a+bx}=\dfrac{cx+d}{c+dx}$。

〔解〕去分母。則 $adx^2+(ac+bd)x+bc=bcx^2+(ac+bd)x+ad$。

$\therefore\ x^2(ad-bc)=ad-bc$。由是 $x=\pm1$。

6. $\dfrac{a-x}{1-ax}=\dfrac{1-bx}{b-x}$。 〔答 ±1〕

7. $\dfrac{3x-4}{x+1}=x^2+2x\dfrac{7}{x+1}$。

〔解〕$\dfrac{3x-4}{x+1}+\dfrac{7}{x+1}=x^2+2x$。卽 $\dfrac{3(x+1)}{x+1}=x^2+2x$。

卽 $3=x^2+2x$。 $\therefore\ 4=x^2+2x+1$。 $\therefore\ \pm2=x+1$。

由是 $x=1$, 或 -3。

8. $x+1+\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{5x-4}{x^2-1}$。

〔解〕$x+1+\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\dfrac{x^2}{x+1}$。卽 $x+1+\dfrac{x-4}{x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}\ldots\ldots(A)$

去分母。則 $x^2+2x+1+x-4=x^2$。 $\therefore\ x=1$。

〔餘論〕此方程式之根 $x=1$。用於原方程式。則

$1+1+\dfrac{1-5+4}{1-1}=\dfrac{1}{1+1}$ 根爲 $2+\infty=\dfrac{1}{2}$ 不能適合。然用於 (A) 式。則

$1+1+\dfrac{1-4}{1+1}$。卽 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ 爲能適合。

故原方程式。不以 $x-1$ 約之而變爲 (A) 式。卽不能合理。凡此皆當研究者也。

例如 $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ 若 $x=2$。則 $\dfrac{4+2-6}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ 不能適合。然以所含 $x-2$ 之因子約之。則

$\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x+3}{x+2}$ 而得 $\dfrac{2+3}{2+2}=\dfrac{5}{4}$。故遇不整方程式時。於此最當注意。

9. $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x+8}=0$。

〔解〕 $\left(\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x+8}\right)+\left(\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}\right)=0$。即 $\frac{2x}{x^2-64}+\frac{2x}{x^2-36}=0$。

$\therefore\ x=0$。或 $\frac{1}{x^2-64}+\frac{1}{x^2-36}=0$。 $\therefore\ x=0$，或 $\pm5\sqrt{2}$。

10. $\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}$。

〔解〕 $\frac{2}{x+8}-\frac{3}{x+15}=\frac{4}{x+6}-\frac{5}{x+9}$。即 $\frac{-x+6}{(x+8)(x+15)}=\frac{-x+6}{(x+6)(x+9)}$。

$\therefore\ -x+6=0$。或 $(x+8)(x+15)=(x+6)(x+9)$。 $\therefore\ x=6$，或 $-8\frac{1}{4}$。

11. $\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{x-2}=\frac{6}{3x+2}$。 答 $\frac{50}{29}$。

12. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-c}+\frac{x-c}{x-a}=3$。

〔解〕 $\frac{x-a}{x-b}-1+\frac{x-b}{x-c}-1+\frac{x-c}{x-a}-1=0$。

即 $\frac{b-a}{x-b}+\frac{c-b}{x-c}+\frac{a-c}{x-a}=0$。去分母。則

$(b-a)(x-c)(x-a)+(c-b)(x-a)(x-b)+(a-c)(x-b)(x-c)=0$。

即 $x\{(a-b)(c+a)+(b-c)(a+b)+(c-a)(b+c)\}$

$=ca(a-b)+ab(b-c)+bc(c-a)$。

$$\therefore\quad x=\frac{a^2c+b^2a+c^2b-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}。$$

13. $\frac{x+a}{a-x}+\frac{x+b}{b-x}+\frac{x-c}{c-x}=3$。

〔解〕 $\frac{x+a}{a-x}-1+\frac{x+b}{b-x}-1+\frac{x+c}{c-x}-1=0$。

即 $\frac{2x}{a-x}+\frac{2x}{b-x}+\frac{2x}{c-x}=0$。 $\therefore\ x=0$。

或 $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}+\frac{1}{c-x}=0$。去分母。則

$(b-x)(c-x)+(c-x)(a-x)+(a-x)(b-x)=0$。

即 $3x^2-2x(a+b+c)+bc+ca+ab=0$。

$\therefore\ x=\frac{1}{3}\left\{a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\right\}$。

14. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$。

〔解〕 $\frac{x+a}{x-a}-1+\frac{x+b}{x-b}-1+\frac{x+c}{x-c}-1=0$。

卽 $\frac{2a}{x-a}+\frac{2b}{x-b}+\frac{2c}{x-c}=0$。去分母。則

$a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$。

卽 $x^2(a+b+c)-2x(ab+bc+ca)+3abc=0$。

$\therefore\ x=\frac{1}{a+b+c}\left[ab+bc+ca\pm\sqrt{\{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)\}}\right]$

15. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=4+\frac{x-7}{x-1}$。

〔解〕 以各項之分母除其分子。而取整數之商。則

$2-\frac{3}{x+1}+3-\frac{7}{x+2}=4+1-\frac{6}{x-1}$。 $\therefore\ \frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x-1}$。

去分母。則 $3(x+2)(x-1)+7(x^2-1)=6(x+2)(x+1)$。

卽 $4x^2-15x-25=0$。 $\therefore\ x=5$, 或 $-\frac{5}{4}$。

16. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$。

〔解〕 $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{3}{x}-\frac{2}{x}$。卽 $\frac{x}{6}=\frac{1}{x}$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{6}$。

17. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x-b}{x+b}=0$。

〔解〕 $\frac{2(x^2+a^2)}{x^2-a^2}+\frac{2(x^2+b^2)}{x^2-b^2}=0$。去分母。則

$(x^2+a^2)(x^2-b^2)+(x^2-a^2)(x^2+b^2)=0$。卽 $2x^4-2a^2b^2=0$。

由是 $x^2=\pm ab$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{ab}$, 或 $\pm\sqrt{-ab}$。

18. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}$。

〔解〕 $\frac{x-1}{x+1}+1+\frac{x-4}{x+4}+1=\frac{x-2}{x+2}+1+\frac{x-3}{x+3}+1$。

卽 $\frac{2x}{x+1}+\frac{2x}{x+4}=\frac{2x}{x+2}+\frac{2x}{x+3}$。 $\therefore\ x=0$

或　$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$。

即　$\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}=\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$。　$\therefore$ $2x+5=0$。　$\therefore$ $x=-\frac{5}{2}$。

或　$(x+1)(x+4)=(x+2)(x+3)$。

則　$x^2+5x+4=x^2+5x+6$。但此關係與有限之根不合。故去之。

19.　$\frac{1}{x+a+\frac{1}{x+b}}=\frac{1}{x-a+\frac{1}{x-b}}$。

〔解〕 兩邊之分子爲1。故分母相等。

故 $x+a+\frac{1}{x+b}=x-a+\frac{1}{x-b}$　$\therefore$ $2a=\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x+b}$。

去分母,則 $a(x^2-b^2)=b$。　$\therefore$ $x=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}+b^2\right)}$。

20.　$\frac{1}{3a-x}+\frac{1}{3b-x}+\frac{1}{3c-x}=0$。

〔解〕 去分母。則 $(3b-x)(3c-x)+(3c-x)(3a-x)+(3a-x)(3b-x)=0$。

即　$3x^2-6x(a+b+c)+9(bc+ca+ab)=0$。

$\therefore$　$x=a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$。

21.　$\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+c}{x+c}=\frac{2(a+b+c)}{x+b+c}$。

〔解〕 $\frac{a+b}{x+b}-1+\frac{a+c}{x+c}-1=\frac{2a+2b+2c}{x+b+c}-2$。

即　$\frac{a-x}{x+b}+\frac{a-x}{x+c}=\frac{2(a-x)}{x+b+c}$。　$\therefore$ $x=a$。

或　$\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=\frac{2}{x+b+c}$。　$\therefore$ $\frac{x+b+c}{x+b}+\frac{x+b+c}{x+c}=2$。

即　$1+\frac{c}{x+b}+1+\frac{b}{x+c}=2$。　$\therefore$ $\frac{c}{x+b}+\frac{b}{x+c}=0$。

$\therefore$　$x=-\frac{b^2+c^2}{b+c}$。

22.　$\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b}$。

〔解〕 $\frac{a+c}{x+2b}-\frac{a+c}{x+a+b}=\frac{b+c}{x+a+b}-\frac{b+c}{x+2a}$。

即 $\frac{(a+c)(a-b)}{(x+2b)(x+a+b)}=\frac{(b+c)(a-b)}{(x+a+b)(x+2a)}$。 $\therefore\ \frac{a+c}{x+2b}=\frac{b+c}{x+2a}$。

由是 $x=-2(a+b+c)$。

23. $\frac{x-b}{x-a}-\frac{x-a}{x-b}=\frac{2(a-b)}{x-a-b}$。

〔解〕 $1+\frac{a-b}{x-a}-\left(1-\frac{a-b}{x-b}\right)=\frac{2(a-b)}{x-a-b}$。

$\therefore$ $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{2}{x-a-b}$。 $\therefore$ $\frac{x-a-b}{x-a}+\frac{x-a-b}{x-b}=2$。

即 $1-\frac{b}{x-a}+1-\frac{a}{x-b}=2$。 $\therefore$ $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=0$。

由是 $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$。

24. $\frac{(x+a)(x+b)}{x+a+b}=\frac{(x+c)(x+d)}{x+c+d}$。

〔解〕 $\frac{x(x+a+b)+ab}{x+a+b}=\frac{x(x+c+d)+cd}{x+c+d}$。

即 $x+\frac{ab}{x+a+b}=x+\frac{cd}{x+c+d}$。 $\therefore$ $\frac{ab}{x+a+b}=\frac{cd}{x+c+d}$。

$\therefore$ $x=\frac{cd(a+b)-ab(c+d)}{ab-cd}$。

25. $\frac{a(c-d)}{x+a}+\frac{d(a-b)}{x+d}=\frac{b(c-d)}{x+b}+\frac{c(a-b)}{x+c}$。

〔解〕 $(c-d)\left(\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}\right)=(a-b)\left(\frac{c}{x+c}-\frac{d}{x+d}\right)$

即 $\frac{(c-d)(a-b)x}{(x+a)(x+b)}=\frac{(a-b)(c-d)x}{(x+c)(x+d)}$。 $\therefore\ x=0$。

或 $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{(x+c)(x+d)}$ $\therefore\ x=\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$。

26. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$。

〔解〕 $\frac{(a+b)x-a^2-b^2}{ab}=\frac{(a+b)x-a^2-b^2}{(x-a)(x-b)}$。 $\therefore$ $\frac{a^2+b^2}{a+b}$

或 $ab=(x-a)(x-b)$。 $\therefore\ x=0$, 或 $a+b$。

27. $\dfrac{a-b}{x+a-b}+\dfrac{b-c}{x+b-c}+\dfrac{c-a}{x+c-a}=0$。

〔解〕 去分母。則 $(a-b)(x+b-c)(x+c-a)+(b-c)(x+c-a)(x+a-b)$
$+(c-a)(x+a-b)(x+b-c)=0$。

即 $-x\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}+3(a-b)(b-c)(c-a)=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$。

28. $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{2}{2+3x}+\dfrac{3}{3+4x}-\dfrac{4}{4+5x}=0$。

〔解〕 $\dfrac{-x}{(1+2x)(2+3x)}+\dfrac{-x}{(3+4x)(4+5x)}=0$。 $\therefore\ x=0$。

或 $(3+4x)(4+5x)+(1+2x)(2+3x)=0$。 $\therefore\ x=\dfrac{1}{26}(19\pm\sqrt{-3})$。

29. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)}=\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}$。

〔解〕 $\dfrac{(x+ma)(x+mb)}{(x-ma)(x-mb)}=\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}$。

即 $\dfrac{x^2+mx(a+b)+m^2ab}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\dfrac{x^2+x(a+b)+ab}{x^2-x(a+b)+ab}$ 兩邊各減1。則

$\dfrac{2mx(a+b)}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\dfrac{2x(a+b)}{x^2-x(a+b)+ab}$。 $\therefore\ x=0$。

或 $\dfrac{m}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\dfrac{1}{x^2-x(a+b)+ab}$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{mab}$。

30. $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$。

〔解〕 $\sqrt{2x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}$ 兩邊自乘。則

$2x+9=x+1+x-4+2\sqrt{(x+1)(x-4)}$。 $\therefore\ 6=\sqrt{(x+1)(x-4)}$。

兩邊自乘。則 $36=x^2-3x-4$。 $\therefore\ x=8$, 或 -5。

31. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$。

〔解〕 求兩邊之平方。則得

$(x-1)(x-2)+(x-3)(x-4)+2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}=2$。

即 $x^2-5x+6=-\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$。

又 $(x-2)^2(x-3)^2=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$。

$\therefore$ $(x-2)(x-3)\{(x-2)(x-3)-(x-1)(x-4)\}=0$。

即 $(x-2)(x-3)\{2\}=0$。 $\therefore$ $x=2$, 或 3。

32. $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$。

〔解〕兩邊求其平方。化爲簡式。則

$\sqrt{(7x-5)(4x-1)}=\sqrt{(7x-4)(4x-2)}$。

$\therefore$ $(7x-5)(4x-1)=(7x-4)(4x-2)$。 $\therefore$ $x=1$。

33. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b$。

〔解〕求兩邊之平方。則 $a^2-x+b^2+x+2\sqrt{(a^2-x)(b^2+x)}=(a+b)^2$。

$\therefore$ $\sqrt{(a^2-x)(b^2+x)}=ab$。 $\therefore$ $a^2b^2+(a^2-b^2)x-x^2=a^2b^2$。

由是 $x=0$, 或 a^2-b^2。

34. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$。

〔解〕兩邊自乘而簡之。則 $2\sqrt{(a-x)(b-x)}=0$。 $\therefore$ $x=a, b$。

35. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}$。 〔答 $x=\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$〕

36. $\sqrt{ax+b^2}+\sqrt{bx+a^2}=a-b$。

〔解〕$(ax+b^2)-(bx+a^2)=(a-b)x-(a^2-b^2)$ 其式已明。又以原方程式除之。則 $\sqrt{ax+b^2}-\sqrt{bx+a^2}=x-(a+b)$,

與原方程式相加。則 $2\sqrt{ax+b^2}=x-2b$。

$\therefore$ $4(ax+b^2)=x^2-4bx+4b^2$。 $\therefore$ $x=0$。或 $4(a+b)$。

37. $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b+2x}$。 〔答 $x=-a$, 或 $-b$〕

38. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{2a+2b}$。

〔解〕兩邊各求其平方。則 $a+b+2\sqrt{(a-x)(b+x)}=2a+2b$。

$\therefore$ $4(a-x)(b+x)=(a+b)^2$。即 $4\{ab+(a-b)x-x^2\}=(a+b)^2$。

$\therefore$ $4x^2-4(a-b)x+(a-b)^2=0$。即 $\{2x-(a-b)\}^2=0$。

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}(a-b)$。

39. $\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}=2\sqrt{ax}$。

〔解〕兩邊求其平方。則

$(a+x)(x+b)+2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}+(a-x)(x-b)=4ax$。

$\therefore\quad \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}=(a-b)x$。 $\therefore\quad (a^2-x^2)(x^2-b^2)=(a-b)^2x^2$。

即 $-x^4+(a^2+b^2)x^2-a^2b^2=(a^2+b^2-2ab)x^2$

$\therefore\quad x^4-2abx^2+a^2b^2=0$。 即 $(x^2-ab)^2=0$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{ab}$。

40. $\sqrt{a(a+b+x)}-\sqrt{a(a+b-x)}=x$。

〔解〕 $a(a+b+x)-a(a+b-x)=2ax$。其式已明。

以原方程式除之。則 $\sqrt{a(a+b+x)}+\sqrt{a(a+b-x)}=2a$。

但 $x\neq 0$。由加法。得 $2\sqrt{a(a+b+x)}=2a+x$。

$\therefore\quad 4a(a+b+x)=4a^2+4ax+x^2$。 $\therefore\ x=\pm 2\sqrt{ab}$。

41. $\sqrt{x^2+ax+b^2}-\sqrt{x^2-ax+b^2}=2a$。

〔解〕 $(x^2+ax+b^2)-(x^2-ax+b^2)=2ax$ 其式已明。

由除法。得 $\sqrt{x^2+ax+b^2}+\sqrt{x^2-ax+b^2}=x$。

由加法。$2\sqrt{x^2+ax+b^2}=x+2a$。

$\therefore\quad 4(x^2+ax+b^2)=x^2+4ax+4a^2$。 $\therefore\ x=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3(a^2-b^2)}$。

42. $\sqrt{x^2+ax+a^2}+\sqrt{x^2-ax+a^2}=\sqrt{2a^2-2b^2}$。

〔解〕 兩邊求其平方。則

$x^2+ax+a^2+2\sqrt{(x^4+a^2x^2+a^4)}+x^2-ax+a^2=2a^2-2b^2$。

$\therefore\quad \sqrt{(x^4+a^2x^2+a^4)}=-x^2-b^2$。 $\therefore\ x^4+a^2x^2+a^4=x^4+2b^2x^2+b^4$。

由是 $x=\pm\sqrt{\left(\dfrac{b^4-a^4}{a^2-2b^2}\right)}$。

43. $\sqrt{ax-b}+\sqrt{cx+b}=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx-b}$。

〔解〕 兩邊自乘而簡之。則 $\sqrt{(ax-b)(cx+b)}=\sqrt{(ax+b)(cx-b)}$。

$\therefore\ acx^2+bx(a-c)-b^2=acx^2-bx(a-c)-b^2$。 $\therefore\ x=0$。

44. $\sqrt{x(a+b-x)}+\sqrt{a(b+x-a)}+\sqrt{b(a+x-b)}=0$。

〔解〕 $\sqrt{x(a+b-x)}=-\sqrt{a(b+x-a)}-\sqrt{b(a+x-b)}$。

兩邊自乘。則 $x(a+b-x)=a(b+x-a)+b(a+x-b)+2\sqrt{ab\{x^2-(a-b)^2\}}$。

$\therefore\quad x^2-(a-b)^2=-2\sqrt{ab\{x^2-(a-b)^2\}}$。

$\{x^2-(a-b)^2\}^2=4ab\{x^2-(a-b)^2\}$。

由是 $x^2-(a-b)^2=0$。 或 $x^2-(a-b)^2=4ab$。

即 $x^2=(a-b)^2$。 或 $(a+b)^2$。 $\therefore\ x=\pm(a-b)$， $\pm(a+b)$。

45. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}=0$。

〔解〕 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=-\sqrt{x+c}$ 兩邊求其平方，則

$$x+a+x+b+2\sqrt{(x+a)(x+b)}=x+c。$$

$\therefore\quad x+(a+b-c)=-2\sqrt{x^2+x(a+b)+ab}$ 兩邊自乘。則

$$x^2+2x(a+b-c)+(a+b-c)^2=4x^2+4x(a+b)+4ab。$$

$\therefore\quad 3x^2+2x(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)=0$。

$\therefore\quad x=\dfrac{1}{3}\left\{a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\right\}$。

46 $\sqrt{ab(a+b+x)}=\sqrt{a(a+b)(b-x)}+\sqrt{b(a+b)(a-x)}$。

〔解〕 兩邊平方之。則

$$ab(a+b+x)=a(a+b)(b-x)+b(a+b)(a-x)+2(a+b)\sqrt{ab(a-x)(b-x)}。$$

即 $ab(x-a-b)+x(a+b)^2=2(a+b)\sqrt{ab\{ab+x(x-a-b)\}}$。

兩邊平方之。則

$$a^2b^2(x-a-b)^2+2abx(x-a-b)(a+b)^2+x^2(a+b)^4$$
$$=4a^2b^2(a+b)^2+4abx(x-a-b)(a+b)^2。$$

$\therefore\quad a^2b^2(x-a-b)^2-2abx(x-a-b)(a+b)^2+x^2(a+b)^4=4a^2b^2(a+b)^2$。

兩邊開平方。則 $ab(x-a-b)-x(a+b)^2=\pm 2ab(a+b)$。

$\therefore\quad x=\dfrac{\mp 2ab(a+b)-ab(a+b)}{(a+b)^2-ab}=\dfrac{-3ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$，或 $\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$。

47. $\sqrt{x^2-b^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2-a^2}+\sqrt{x^2-a^2-b^2}=x$。

〔解〕 $\sqrt{x^2-b^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2-a^2}=x-\sqrt{x^2-a^2-b^2}$ 兩邊平方之。則

$$x^2-b^2-c^2+x^2-c^2-a^2+2\sqrt{(x^2-b^2-c^2)(x^2-c^2-a^2)}。$$
$$=x^2+x^2-a^2-b^2-2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}。$$

即 $\sqrt{(x^2-b^2-c^2)(x^2-c^2-a^2)}=c^2-x\sqrt{x^2-a^2-b^2}$。又平方之。則

$$x^4-x^2(a^2+b^2+2c^2)+(b^2+c^2)(c^2+a^2)=c^4+x^2(x^2-a^2-b^2)$$
$$-2c^2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}。$$

即 $-2c^2x^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=-2c^2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}$。又平方之。則

$$4c^4x^4-4c^2x^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2=4c^4x^2(x^2-a^2-b^2)。$$

$\therefore\quad -4c^2a^2b^2x^2=-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2$。 $\therefore\quad x=\pm\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2abc}$。

48.　$\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}+\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-x^2}$。

〔解〕 $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-x^2}-\sqrt{c^2-x^2}$ 兩邊平方之。則

$$a^2-x^2+b^2-x^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}=a^2+b^2+c^2-x^2+c^2-x^2.$$
$$-2\sqrt{(a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2)}。$$

即　$\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}-c^2=-\sqrt{(a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2)}$。又平方之。則

$$a^2b^2-x^2(a^2+b^2)+x^4+c^4-2c^2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}=(a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2)。$$

即　$a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+2c^2x^2=2c^2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$。又平方之。則

$$(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)^2+4c^2x^2(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)+4c^4x^4$$
$$=4c^4\{a^2b^2-x^2(a^2+b^2)+x^4\}。$$

即　$4c^2a^2b^2x^2=4a^2b^2c^4-(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)^2$。

$$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{2abc}\sqrt{(2abc^2+a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)(2abc^2-a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$
$$=\pm\frac{1}{2abc}\sqrt{(ab+bc+ca)(ab+bc-ca)(ab-bc+ca)(-ab+bc+ca)}$$

49.　問 x 爲如何之值。則 $\sqrt{14-(3x-2)(x-1)}$ 爲實數。

〔解〕 原式$=\sqrt{12+5x-3x^2}=\sqrt{-3(x-3)(x+\frac{4}{3})}$。根號內之數量爲正。則 $x-3$ 與 $x+\dfrac{4}{3}$ 爲異號。故 x 在 $-\dfrac{4}{3}$ 與 3 之間。卽 x 之值不小於 $-\dfrac{4}{3}$。不大於 3。

50.　$\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ 證其在 5 與 9 之間無實數值。

〔證〕 $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}=\lambda$。則 $x^2(\lambda-1)+2x(\lambda-17)-(7\lambda-71)=0$。

此方程式 x 爲實根。則 $4(\lambda-17)^2-4(\lambda-1)\{-(7\lambda-71)\}>0$。

卽 $32(\lambda-5)(\lambda-9)>0$。　$\therefore$ $\lambda-5$ 與 $\lambda-9$ 同號。由是 λ 比 5 及 9 大。或比 5 及 9 小。故 5 與 9 之間無實數値。

51.　x 爲實數。則 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}$ 不能小於 $-\dfrac{1}{3}$。試證之。

〔證〕 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}=\lambda$。則 $x^2(\lambda-1)+2x(\lambda+3)+(\lambda-5)=0$。

故 $4(\lambda+3)^2-4(\lambda-1)(\lambda-5)>0$。即 $48(\lambda+\frac{1}{3})>0$。

$\therefore\ \lambda+\frac{1}{3}>0$。即 $\lambda>-\frac{1}{3}$。

52. x 爲實數。則 $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 爲如何之値。

〔解〕 $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\lambda$。則 $x^2(\lambda-1)+x(\lambda+1)+(\lambda-1)=0$。

$\therefore\ (\lambda+1)^2-4(\lambda-1)^2>0$。即 $-3(\lambda-3)(\lambda-\frac{1}{3})>0$。

由是 λ 在 3 與 $\frac{1}{3}$ 之間。

53. 方程式 $x^2+y^2=6x-8y$。求其 x 及 y 之最大値。及最小値。

〔解〕 變原方程式爲 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$。

故 $y+4=\pm\sqrt{\{25-(x-3)^2\}}=\pm\sqrt{-(x-8)(x+2)}$。

$\therefore$ x 在 8 與 -2 之間。

又 $x-3=\pm\sqrt{\{25-(y+4)^2\}}=\pm\sqrt{-(y-1)(y+9)}$。

$\therefore$ y 在 1 與 -9 之間。

54. $x^2+4y^2-8x-16y-4=0$。求 x 及 y 之最大値。與最小値。

〔解〕 變原方程式爲 $(x-4)^2+(2y-4)^2=36$。

$\therefore\ 2y-4=\pm\sqrt{\{36-(x-4)^2\}}=\pm\sqrt{-(x+2)(x-10)}$。

$\therefore$ x 在 -2 與 10 之間。

又 $x-4=\pm\sqrt{\{36-(2y-4)^2\}}=\pm\sqrt{-4(y+1)(y-5)}$。

$\therefore$ y 在 -1 與 5 之間。

55. x 及 y 之方程式。適合於 $(x^2+y^2)=2a^2(x^2-y^2)$。則 y 之最大値如何。

〔解〕 從原方程式。得 $x^4+2x^2(y^2-a^2)+y^4+2a^2y^2=0$。

x 之實根爲 $4(y^2-a^2)^2-4(y^4+2a^2y^2)>0$。

即 $16\left(\frac{a}{2}+y\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)>0$。 $\therefore$ y 在 $-\frac{a}{2}$ 與 $\frac{a}{2}$ 之間。

由是 y 之最大値爲 $\frac{a}{2}$。

56. $x^2(b^2+b'^2)+2x(ab+a'b')+a^2+a'^2=0$。其實根爲等根。試證明之

〔證〕 $4(ab+a'b')^2-4(b^2+b'^2)(a^2+a'^2)\not<0$。

即 $-4(ab'-a'b)^2\not<0$。 $\therefore ab'-a'b=0$。

故由121章得等根。

57. $ax^2+bx+c=0$ 之兩根比爲 $m:n$。則 $mnb^2=(m+n)^2ac$。

〔證〕兩根爲 $m\alpha, n\alpha$。則 $m\alpha+n\alpha=-\dfrac{b}{a}$, $m\alpha\cdot n\alpha=\dfrac{c}{a}$。

由是 $\dfrac{(m+n)^2\alpha^2}{mn\alpha^2}=\dfrac{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2}{\dfrac{c}{a}}$ 即 $\dfrac{(m+n)^2}{mn}=\dfrac{b^2}{ac}$。

58. $ax^2+2bx+c=0$。及 $a'x^2+2b'x+c'=0$。內有一個等根。則 b^2-ac 及 $b'^2-a'c'$。皆爲完全平方數。其證如何。

〔證〕由題意。前方程式之兩根爲 α,β。則後方程式之兩根爲 α,γ。

由是 $\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$, $\alpha+\gamma=\dfrac{2b'}{a'}$, $\alpha\gamma=\dfrac{c'}{a'}$。

$\therefore\ \beta-\gamma=(\alpha+\beta)-(\alpha+\gamma)=\left(-\dfrac{2b}{a}\right)-\left(-\dfrac{2b'}{a'}\right)=$ 任意之有理數量…(1)

又 $\alpha-\beta=\sqrt{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=\sqrt{\left\{\left(-\dfrac{2b}{a}\right)^2-4\dfrac{c}{a}\right\}}=\dfrac{2}{a}\sqrt{(b^2-ac)}$

及 $\alpha-\gamma=\sqrt{\{(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma\}}=\sqrt{\left\{\left(-\dfrac{2b'}{a'}\right)^2-4\dfrac{c'}{a'}\right\}}=\dfrac{2}{a'}\sqrt{(b'^2-a'c')}$。

$\therefore\ \beta-\gamma=(\alpha-\gamma)-(\alpha-\beta)=\dfrac{2}{a'}\sqrt{(b'^2-a'c')}-\dfrac{2}{a}\sqrt{(b^2-ac)}$ ……………(2)

從(1)則(2)之左邊不爲0。爲有理數量。故(2)之右邊之各項。亦爲有理式。由是 b^2-ac 及 $b'^2-a'c'$ 爲完全平方數。

59. x_1 及 x_2 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根。則以(1) x_1^3 及 x_2^3 (2) $\dfrac{x_1^2}{x_2}$ 及 $\dfrac{x_2^2}{x_1}$ (3) $b+ax_1$ 及 $b+ax_2$ 爲兩根之方程式各如何。

〔解〕 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$。

(1) x_1^3 及 x_2^3 爲兩根之方程式。即 $(x-x_1^3)(x-x_2^3)=0$。

即 $x^2-(x_1^3+x_2^3)x+x_1^3x_2^3=0$。

即 $x^2-\{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\}x+(x_1x_2)^3=0$。

$\therefore\quad x^2-\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^3-\dfrac{3c}{a}\left(-\dfrac{b}{a}\right)\right\}x+\left(\dfrac{c}{a}\right)^3=0$。

即 $a^3x^2+(b^3-3abc)x+c^3=0$。

(2) $\dfrac{x_1{}^2}{x_2}$ 及 $\dfrac{x_2{}^2}{x_1}$ 爲兩根之方程式。即 $\left(x-\dfrac{x_1{}^2}{x_2}\right)\left(x-\dfrac{x_2{}^2}{x_1}\right)=0$。

即 $x^2-\left(\dfrac{x_1{}^2}{x_2}+\dfrac{x_2{}^2}{x_2}\right)\left(\dfrac{x_2{}^2}{x_1}\right)=0$。

即 $x_1x_2-x^2-\{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\}x+(x_1x_2)^2=0$。

$\therefore\quad \dfrac{c}{a}x^2-\left\{\left(-\dfrac{c}{a}\right)^3-3\dfrac{c}{a}\left(-\dfrac{c}{a}\right)\right\}x+\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=0$。

即 $a^2cx^2+(b^3-3abe)x+ac^2=0$。

(3) $b+ax_1$ 及 $b+ax_2$。爲兩根之方程式。即

$\{x-(b+ax_1)\}\{x-(b+ax_2)\}=0$。

即 $x^2-\{2b+a(x_1+x_2)\}x+b^2+ab(x_1+x_2)+a^2x_1x_2=0$。

$\therefore\quad x^2-\left\{2b+a\left(-\dfrac{b}{a}\right)\right\}x+b^2+ab\left(-\dfrac{b}{a}\right)+a^2\left(\dfrac{c}{a}\right)=0$。

即 $x^2-bx+ac=0$。

60. x_1 及 x_2 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根。而於 a, b, c 之項。求 $x_1{}^2(bx_2+c)+x_2{}^2(bx_1+c)$。及 $x_1{}^2(bx_2+c)^2+x_2{}^2(bx_1+c)^2$ 之值。

〔解〕 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}$。

$\therefore\quad x_1{}^2(bx_2+c)+x_2{}^2(bx_1+c)$。

$=b(x_1+x_2)x_1x_2+c(x_1{}^2+x_2{}^2)=b\left(-\dfrac{b}{a}\right)\dfrac{c}{a}+c\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{2c}{a}\right\}=-\dfrac{2c^2}{a}$。

又 $x_1{}^2(bx_2+c)^2+x_2{}^2(bx_1+c)^2=2b^2x_1{}^2x_2{}^2+2bcx_1x_2(x_1+x_2)+c^2(x_1{}^2+x_2{}^2)$

$=2b^2\left(\dfrac{c}{a}\right)^2+2bc\left(\dfrac{c}{a}\right)\left(-\dfrac{b}{a}\right)+c^2\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{2c}{a}\right\}=\dfrac{b^2c^2}{a^2}-\dfrac{2c^3}{a}$。

61. $x^2+mx+m^2+a=0$ 之兩根爲 x_1 及 x_2。試證

$x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2+a=0$。

〔證〕 $x_1+x_2=-m,\ x_1x_2=m^2+a$。

$\therefore\quad (x_1+x_2)^2-x_1x_2=(-m)^2-(m^2+a)$。即 $x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2+a=0$

62. $(x^2+1)(a^2+1)=max(ax-1)$ 之兩根爲 x_1 及 x_2。

求 $(x_1{}^2+1)(x_2{}^2+1)=mx_1x_2(x_1x_2-1)$ 之證。

〔證〕從原方程式得$(a^2+1-ma^2)x^2+max+a^2+1=0$。

$$\therefore\quad x_1+x_2=-\frac{ma}{a^2+1-ma^2},\qquad x_1x_2=\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}。$$

又 $$(x_1{}^2+1)(x_2{}^2+1)=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=\left(-\frac{ma}{a^2+1-ma^2}\right)^2+\left(\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}-1\right)^2$$

$$=\frac{m^2a^2}{(a^2+1-ma^2)^2}+\frac{m^2a^4}{(a^2+1-ma^2)^2}$$

$$=\frac{m(a^2+1)}{a^2+1-ma^2}\left(\frac{ma^2}{a^2+1-ma^2}\right)=mx_1x_2\left(\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}-1\right)$$

$=mx_1x_2(x_1x_2-1)$。

63. $A(x^2+m^2)+Amx+Bm^2x^2=0$ 之兩根為 x_1 及 x_2。

求 $A(x_1{}^2+x_2{}^2)+Ax_1x_2+Bx_1{}^2x_2{}^2=0$ 之證。

〔證〕從原方程式。得$(A+Bm^2)x^2+Amx+Am^2=0$。

$$\therefore\quad x_1+x_2=-\frac{Am}{A+Bm^2}\ 及\ x_1x_2=\frac{Am^2}{A+Bm^2}。$$

又 $$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{A^2m^2}{(A+Bm^2)^2}-\frac{2Am^2}{A+Bm^2}$$

$$=\frac{-Am^2(A+2Bm^2)}{(A+Bm^2)^2}=-\frac{Am^2}{A+Bm^2}\left(1+\frac{Bm^2}{A+Bm^2}\right)=-x_1x_2\left(1+\frac{Bx_1x_2}{A}\right)。$$

由是 $A(x_1{}^2+x_2{}^2)=-x_1x_2(A+Bx_1x_2)$。

64. x 為實數。則 $2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})$ 不大於 a^2+b^2。試證之。

〔證〕$2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})=\lambda$。

則 $2(a-x)\sqrt{(x^2+b^2)}=\lambda-2x(a-x)$。

兩邊平方之。則 $4(a-x)^2(x^2+b^2)=\lambda^2-4\lambda x(a-x)+4x^2(a-x)^2$。

即 $4b^2(a-x)^2+4\lambda x(a-x)-\lambda^2=0$。

即 $4(b^2-\lambda)(a-x)^2+4a\lambda(a-x)-\lambda^2=0$。

$a-x$ 為實數。故 $16a^2\lambda^2+16(b^2-\lambda)\lambda^2>0$。 即 $16\lambda^2(a^2+b^2-\lambda)>0$。

由是 λ 不大於 a^2+b^2。

65. 對於 x 之實數。求 $\dfrac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+2}{(x^2+1)^2}$ 之最小值。

〔解〕以x^2除原式分母子。卽得

$$\frac{2x^2-4x+9-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}。$$

令 $x+\frac{1}{x}=y$。 $=\frac{2y^2-4y+5}{y^2}=\lambda$。

$\therefore\ y^2(\lambda-2)+4y-5=0$。 $\therefore\ 16+20(\lambda-2)>0$。

卽 $20\left(\lambda-\frac{6}{5}\right)>0$。 $\therefore\ \lambda$不小於$\frac{6}{5}$。卽所求之最小值爲$\frac{6}{5}$。

高次方程式

134. 高次方程式 高於二次之方程式。其普通之解法甚深。在此編不能驟示。故僅解明其特別之例而已。

135. 準二次方程式 因$ax^4+bx^2+c=0$。與二次方程式同形。故其解法。與$ax^2+bx+c=0$之二次方程式同。卽$ax^4+bx^2+c=0$之根。爲

$$x^2=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。卽\ x=\pm\sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)}。$$

又不僅未知數量之次數。與二次式同形。其未知數量之兩項。有與二次式同形者。例如含x之各項爲P。而$aP^2+bP+c=0$。則

$P=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$爲等值之方程式。

〔第一例〕解$x^4-10x^2+9=0$式。

$(x^2-9)(x^2-1)=0$。 $\therefore\ x^2=9$, 或 1。 $\therefore\ x=\pm3$, 或 ±1。

由是所求之根。爲 $+3, -3, +1, -1$ 之四根。

〔第二例〕解$(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$式。

$\{(x^2+x)+6\}\{(x^2+x)-2\}=0$。 $\therefore\ x^2+x+6=0$ 或 $x^2+x-2=0$。

從 $x^2+x+6=0$。則 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-23}$。

從 $x^2+x-2=0$。則 $x=1$ 或 -2。

故所求之根。爲 $1, -2, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-23}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-23}$。

〔第三例〕解 $(x^2+2)^2+8x(x^2+2)+15x^2=0$ 式。

$(x^2+2+5x)(x^2+2+3x)=0$。 $\therefore\ x^2+2+5x=0$。 $x^2+2+3x=0$。

從 $x^2+2+5x=0$。則 $x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$。

從 $x^2+2+3x=0$。則 $x=-1$, 或 -2。

由是所求之根。爲 $-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}, -1, -2$。

〔第四例〕解 $ax^2+bx+c+p\sqrt{ax^2+bx+c}+q=0$ 式。

令 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$。則 $y^2+py+q=0$。此 y 之根爲 α, β。則從 $ax^2+bx+c=y^2$。得 $ax^2+bx+c=\alpha^2$, $ax^2+bx+c=\beta^2$。

由是可求得 x 之四根。

〔第五例〕解 $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$ 式。

$2(x^2-2x+6)+3\sqrt{(x^2-2x+6)}-27=0$。

令 $y=\sqrt{(x^2-2x+6)}$。則 $2y^2+3y-27=0$。 $\therefore\ y=3$ 或 $-\frac{9}{2}$。

故從 $x^2-2x+6=y^2$。則 $x^2-2x+6=9$。 $\therefore\ x=3$ 或 -1。

又從 $x^2-2x+6=\frac{81}{4}$。則 $x=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{61}$。

由是所求之根。爲 $3, -1, 1+\frac{1}{2}\sqrt{61}, 1-\frac{1}{2}\sqrt{61}$。

〔第六例〕解 $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=\frac{9}{16}a^4$。

左邊之第一因子與第四因子相乘。又中間之兩因子相乘，則得 $(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)=\frac{9}{16}a^4$。

即 $\{(x^2+5ax+5a^2)-a^2\}\{(x^2+5ax+5a^2)+a^2\}=\frac{9}{16}a^4$。

即 $(x^2+5ax+5a^2)^2-a^4=\frac{9}{16}a^4$。

即 $(x^2+5ax+5a^2)^2=\frac{25}{16}a^4$。

$\therefore\quad x^2+5ax+5a^2=\pm\frac{5}{4}a^2$。從 $x^2+5ax+5a^2=\frac{5}{4}a^2$。

則 $x=-\frac{5}{2}a\pm\frac{a}{2}\sqrt{10}$。又從 $x^2+5ax+5a^2=-\frac{5}{4}a^2$。

則 $\left(x+\frac{5}{2}a\right)=0$。 $\therefore\quad -\frac{5}{2}a$。

136. 反商方程式〔Reciprocal Equations〕謂其係數前後相同之方程式。

例如下式。卽反商方程式。

$$ax^3+bx^2+bx+a=0。$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0。$$

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0。$$(又見443章)。

〔第一例〕解 $ax^3+bx^2+bx+a=0$ 式。

$a(x^2+1)+bx(x+1)=0$。卽 $(x+1)\{a(x^2-x+1)+bx\}=0$。

$\therefore\quad x+1=0$。或 $a(x^2-x+1)+bx=0$。

$\therefore\quad x=1$, 或 $\frac{a-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{(a-b)^2-4a^2}}{2a}$。

〔第二例〕解 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 式。

以 x^2 除而括之。則得 $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$。

令 $y=x+\frac{1}{x}$。則 $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$。 $\therefore\quad a(y^2-2)+by+c=0$。

由是得 y 之兩根爲 α,β。則 $x+\frac{1}{x}=\alpha$。及 $x+\frac{1}{x}=\beta$。

又由此兩方程式。可得 x 之四根。

〔第三例〕解 $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$ 式。

$a(x^5-1)+bx(x^3-1)+cx^2(x-1)=0$。

卽 $(x-1)\{a(x^4+x^3+x^2+x+1)+bx(x^2+x+1)+cx^2\}=0$。

$\therefore\quad x=1$。或 $ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(a+b)x+a=0$。

第二之方程式。爲四次之反商方程式。故與第二例同法。

137. 視察法 依88章之定理。方程式之一根。可由視察求得。

〔第一例〕解 $x(x-1)(x-2)=a(a-1)(a-2)$ 式。

由視察而知其一根爲 $x=a$。

又變原方程式。爲 $x^3-3x^2+2x-a(a-1)(a-2)=0$。

以 $x-a$ 除之。則得 $x^2+(a-3)x+(a-1)(a-2)=0$。由是可得其二根。

〔第二例〕解 $x^3+2x^2-11x+6=0$ 式。

求方程式之一根。爲如何之値。當依下之原則。但其根以有理數量爲限。

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+K=0$ 之一根爲 $\pm\frac{\alpha}{\beta}$。則 α 爲 K 之因子。β 爲 a 之因子。

依此原則得 $x^3+2x^2-11x+6=0$ 之一根。必爲6之因子。

而在 ±1, ±2, ±3, ±6, 之內。惟 $x=2$ 爲適合。故 $x=2$ 爲其一根而變原方程式如下。

$$(x-2)(x^2+4x-3)=0。$$

由是從 $x^2+4x-3=0$。可得 $x=-2\pm\sqrt{7}$。

〔第三例〕解 $(a-x)^4+(x-b)^4=(a-b)^4$ 式。

$x=a$ 及 $x=b$ 爲能適合。

又變原方程式。爲 $(a-x)^4+(x-b)^4=\{(a-x)+(x-b)\}^4$。

$\therefore\quad 0=4(a-x)^3(x-b)+6(a-x)^2(x-b)^2+4(a-x)(x-b)^3$。

卽　$2(a-x)(x-b)\{2(a-x)^2+3(a-x)(x-b)+2(x-b)^2\}=0$。

故所求之根。爲 a 及 b 與二次方程式。

$2(a-x)^2+3(a-x)(x-b)+2(x-b)^2=0$ 之二根。

〔第四例〕解 $a^4\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^4$ 式。

由視察而知 $x=a$, $x=b$, $x=c$ 均能適合。

又此方程式去其分母。則

$$a^4(b-c)(x-b)(x-c)+b^4(c-a)(x-c)(x-a)+c^4(a-b)(x-a)(x-b)$$
$$=-x^4(a-b)(b-c)(c-a),$$

而以x^2之係數爲0。故諸根之和爲0。(見**129**章)。因而他之一根,爲$0-(a+b+c)$。卽$-a-b-c$。

由是所求之根。爲$a, b, c, -a-b-c$。

138. 二項方程式〔Binomial Equations〕

其普通之式。爲$x^n \pm k=0$。

下所示之例。可以已說明之方法解之。

二項方程式。其普通之解法。可用三角法內 De Moivre 氏之定理解之。

〔第一例〕解$x^3-1=0$式。

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$。 $\therefore\ x-1=0$。卽$x=1$。

或$x^2+x+1=0$。卽$x=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{-3}$。

〔注意〕由是$x^3=1$有三根。卽1之立方根爲

$$1,\quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},\qquad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}。$$

〔第二例〕解$x^4-1=0$式。

$x^4-1=(x-1)(x+1)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})=0$。

故1之四方根爲$1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$。

〔第三例〕解$x^5-1=0$式。

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$。 $\therefore\ x=1$。

或$x^4+x^3+x^2+x+1=0$。卽反商方程式。故由**136**章。而得

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0。卽\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0。$$

$$\therefore\quad x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}。$$

由是 $x^2-x\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)+1=0$。

卽$x^2-x\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$。

$$\therefore\quad x-\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{(-10\mp2\sqrt{5})}}{4}$$

由是1之五方根爲

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}。$$

〔第四例〕解 $x^4+1=0$ 式。

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})=0。$$

由是 $x^2+1+x\sqrt{2}=0$。　　$\therefore\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-2}}{2}$。

或　$x^2+1-x\sqrt{2}=0.$　　$\therefore\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-2}}{2}$。

故所求之根爲 $\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$。卽 $\frac{\pm1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$。

139. 一之立方根 由前章之例。知1之立方根。爲

$$1,\quad \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right),\qquad \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3}\right)。$$

1之立方虛根可設爲ω。又令此二虛根中之一個爲ω_1。其他一個爲ω_2。以區別之。則1之立方根爲$1, \omega_1, \omega_2$。

示其關係式如下。

$$1+\omega_1+\omega_2=1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=0。$$

及　$$\omega_1\omega_2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=\frac{1}{4}(1+3)=1。$$

此關係亦可依129章得之。何則。三次方程式三根之和。原等於變號之x^2係數。而$x^3-1=0$之式。其x^2係數爲0。故$1, \omega_1, \omega_2$之和爲0。又三根之積。原等於三次方程式變號之末項。故$1, \omega_1, \omega_2$之積爲1。

又 $$\omega_1^2=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{-3})^2=\frac{1}{4}(1-2\sqrt{-3}-3)=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=\omega_2。$$

及 $$\omega_2^2=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{-3})^2=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{-3}-3)=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\omega_1。$$

卽 $\omega_1^2=\omega_2$ 及 $\omega_2^2=\omega_1$, 由是 $\omega_1\omega_2=1$。$\omega_1^3=\omega_2^3=1$。

且知1之立方虛根。其一根等於他一根之平方。故設ω爲1之立方虛根。則1之立方根爲$1, \omega, \omega^2$。

〔例〕$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$。

由是$a+b+c$爲$a^3+b^3+c^3-3abc$之因子。

由是$a+\omega b+\omega^2 c$爲$a^3+(\omega b)^3+(\omega^2 c)^3-3a(\omega b)(\omega^2 c)$。

即 $a^3+\omega^3 b^3+\omega^6 c^3-3\omega^3 abc$。

即 $a^3+b^3+c^3-3abc$之因子。

同法$a+\omega^2 b+\omega c$爲$a^3+(\omega^2 b)^3+(\omega c)^3-3a(\omega^2 b)(\omega c)$

即 $a^3+b^3+c^3-3abc$之因子。

$\therefore$ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$。

例題十一

試解以下之方程式。

1. $x^4-2x^2-8=0$。

〔解〕$(x^2-4)(x^2+2)=0$。 $\therefore$ $x=\pm 2$或$\pm\sqrt{-2}$。

2 $x^6+7a^3x^3-8a^6=0$。

〔解〕$(x^3-a^3)(x^3+8a^3)=0$。 $\therefore$ $x^3-a^3=0$。$x^3+8a^3=0$。

由是$x=a,\ a\omega,\ a\omega^2,\ -2a,\ -2a\omega,\ -2a\omega^2$。

3. $x^6-7a^3x^3-8a^6=0$。 〔答 $-a,\ -a\omega,\ -a\omega^2,\ 2a,\ 2a\omega,\ 2a\omega^2$〕。

4. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$。 $\left[答\ 1,\ \dfrac{1}{4}(1\pm\sqrt{-15})\right]$。

〔解〕 $\dfrac{x}{x^2+1}=y$。則$y+\dfrac{1}{y}=2+\dfrac{1}{2}$。由視察得$y=2$,或$\dfrac{1}{2}$。

即 $\dfrac{x}{x^2+1}=2$,或$\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$。因之而得答數。

5. $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$。 〔答 $0,\ 1,\ 3,\ -8$〕。

〔解〕 $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}=y$。解法悉如前例。

6. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$。 $\left[答\ 1,\ -2,\ \dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-19})\right]$。

〔解〕 $x^2+x+1=y$。則$y(y+1)=3.4$,由視察得$y=3$。

又y之係數爲1。 $\therefore$ $y=-1-3=-4$。

由是$x^2+x+1=3$,或$x^2+x+1=-4$。

7. $(x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19$。 $\left[答\ -1,\ -6,\ \frac{1}{2}(-7\pm3\sqrt{5})\right]$。

〔解〕 $(x^2+7x+5)^2-3(x^2+7x+5)=4$, 而 $x^2+7x+5=y$。則

$y^2-3y-4=0$。 $\therefore\ y=4$, 或 -1。

8. $\sqrt{16-7x-x^2}=x^2+7x-\frac{1}{4}$。 $\left[答\ \frac{1}{2},-\frac{15}{2},\ \frac{1}{2}(-7\pm4\sqrt{2})\right]$。

〔解〕 $(16-7x-x^2)+\sqrt{(16-7x-x^2)}-16+\frac{1}{4}\geqq0$。

令 $\sqrt{(16-7x-x^2)}=y$。 則 $y^2+y-\frac{63}{4}=0$。 $\therefore\ y=-\frac{9}{2}$, 或 $\frac{7}{2}$。

9. $6\sqrt{(x^2-2x+6)}=21+2x-x^2$。 〔答 $3,\ -1,\ 1\pm2\sqrt{19}$〕

〔解〕 $(x^2-2x+6)+6\sqrt{(x^2-2x+6)}=27$。 令 $\sqrt{(x^2-2x+6)}=y$。

則 $y^2+6y-27=0$。 $\therefore\ y=3$, 或 -9。

10. $(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4)$。

$\left[答\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3}),\ \frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4})\right]$。

〔解〕 $1+x+x^2=0$。或 $(a-1)(1+x+x^2)=(a+1)(1-x+x^2)$。

11. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$。

〔解〕 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$。

即 $(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24=24$。

$\therefore$ $(x^2+5x)(x^2+5x+10)=0$。由是 $x=0$, 或 -5, 或 $\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{-15})$。

12. $(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)=384a^4$。

〔解〕 $(x^2+8ax+7a^2)(x^2+8ax+15a^2)=384a^4$。

即 $\{(x^2+8ax-9a^2)+16a^2\}\{(x^2+8ax-9a^2)+24a^2\}=384a^4$。

即 $(x^2+8ax-9a^2)^2+40a^2(x^2+8ax-9a^2)+384a^4=384a^4$。

$\therefore$ $(x^2+8ax-9a^2)(x^2+8ax-9a^2+40a^2)=0$。

即 $(x-a)(x+9a)(x^2+8ax+31a^2)=0$。

由是 $x=a$, 或 $-9a$, 或 $-4a\pm a\sqrt{-15}$。

13. $(x-3a)(x-a)(x+2a)(x+4a)=2376a^4$。

〔解〕 $(x^2+ax-12a^2)(x^2+ax-2a^2)=2376a^4$。

設 $x^2+ax-2a^2=y$。則 $(y-10a^2)y=2376a^4$。

卽 $y^2-10a^2y+25a^4=2401a^4$。 $\therefore$ $y-5a^2=\pm 49a^2$。

由是 $y=54a^2$, 或 $-44a^2$。

卽 $x^2+ax-2a^2=54a^2$, 或 $x^2+ax-2a^2=-44a^2$。

由是 $x=7a$, 或 $-8a$, 或 $\frac{1}{2}a(-1\pm\sqrt{-167})$。

14. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$。 $\left[答\ -4,\ -6,\ \frac{1}{2}(-15\pm\sqrt{129})\right]$。

〔解〕 $(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$。

卽 $\{(x^2+10x+24)+4x\}\{(x^2+10x+24)+x\}=4x^2$。

卽 $(x^2+10x+24)^2+5x(x^2+10x+24)+4x^2=4x^2$。

$\therefore$ $(x^2+10x+24)(x^2+10x+24+5x)=0$。

由是 $x^2+10x+24=0$, 或 $x^2+15x+24=0$。

15. $2x^2-3x-21=2x\sqrt{x^2-3x+4}$。

〔解〕 $(x^2-3x+4)-2x\sqrt{(x^2-3x+4)}+x^2=25$。

$\therefore$ $\sqrt{(x^2-3x+4)}-x=\pm 5$。 卽 $x^2-3x+4=(x\pm 5)^2$。

卽 $-3x\mp 10x=21$。 $\therefore$ $x=-\frac{21}{13}$, 或 3。

16. $x^4-2(a+b)x^2+a^2+2ab+b^2=0$。 〔答 $\pm\sqrt{(a+b)}$〕。

〔解〕 $x^4-2(a+b)x^2+(a+b)^2=0$。 卽 $\{x^2-(a+b)\}^2=0$。

17. $x^4-2a^2x^2-2b^2x^2+a^4+b^4-2a^2b^2=0$。

〔解〕 $x^4-2x^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2=4a^2b^2$。兩邊各開平方。

則 $x^2-(a^2+b^2)=\pm 2ab$。 卽 $x^2=(a\pm b)^2$。 $\therefore$ $x=\pm(a\pm b)$。

18. $4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=0$。 $\left[答\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}(-3\pm\sqrt{-7})\right]$。

〔解〕 $4(x^4+2x^2+1)-4x(x^2+1)-15x^2=0$。

卽 $4(x^2+1)^2-4x(x^2+1)-15x^2=0$。

卽 $\{2(x^2+1)-5x\}\{2(x^2+1)+3x\}=0$。

由是 $2(x^2+1)-5x=0$, 或 $2(x^2+1)+3x=0$。

此方程式用反商方程式(136章)之解法卽得。

19. $9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0$。 $\left[答\ 3,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}(-1\pm\sqrt{-8})\right]$。

〔解〕 $9(x^2+1)^2-24x(x^2+1)-20x^2=0$。

卽 $\{3(x^2+1)-10x\}\{3(x^2+1)+2x\}=0$。與前例同。

20. $x^5+1=0$。

〔解〕 $x+1=0$, 或 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$。從 $x+1=0$。

$\therefore$ $x=-1$。又從 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$。得

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0。\qquad \therefore\ x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})!$$

由是 $x^2-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})x+1=0$。 $\therefore x=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})\pm\frac{1}{4}\sqrt{(-10\pm2\sqrt{5})}$。

由是所求之根爲

$$-1,\quad \frac{1}{4}\{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}\},\quad \frac{1}{4}\{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}\}。$$

21. 解 $x^8-1=0$。

〔解〕 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$。 $\therefore$ $x=1,\ -1,\ \pm\sqrt{-1}$。

或 $x^4+1=0$。由 **138** 章第四例。$x=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$。

22. 解 $3x^3-14x^2+20x-8=0$。 〔答 $2,\ 2,\ \frac{2}{3}$〕。

〔解〕 $3x^3-6x^2-8x^2+16x+4x-8=0$。

卽 $3x^2(x-2)-8x(x-2)+4(x-2)=0$。 $\therefore$ $x-2=0$, 或 $3x^2-8x+4=0$。

23. 解 $x^4-15x^2+10x+24=0$。 〔答 $2,\ 3,\ -1,\ -4$〕。

〔解〕 $x^4-9x^2-6x^2+18x-8x+24=0$。

卽 $x^2(x^2-9)-6x(x-3)-8(x-3)=0$。

卽 $(x-3)\{x^2(x+3)-6x-8\}=0$。 卽 $(x-3)(x+1)(x+4)(x-2)=0$。

24. 解 $x^4+7x^3-7x-1=0$。 〔答 ±1, 或 $\frac{1}{2}(-7\pm3\sqrt{5})$〕。

〔解〕 $x^4-1+7x(x^2-1)=0$。 $\therefore$ $x^2-1=0$, 或 $x^2+1+7x=0$。

25. 解 $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3=0$。

〔解〕 設 $x=a,\ b,\ c$ 則各適合。而此方程式爲三次式。由是所求之根爲 $a,\ b,\ c$。

26. 解 $x(x-1)(x-2)=9\cdot8\cdot7$。 〔答 $9,\ -3\pm\sqrt{-47}$〕。

〔解〕 由視察得 $x=9$。故以 $x-9$ 除原方程式。卽得二次式。

27. 解 $x(x-1)(x-2)(x-3)=9\cdot8\cdot7\cdot6$。

〔解〕$(x^2-3x)(x^2-3x+2)=54,\ 46$。 令 $x^2-3x=y$。則

$y(y+2)=54,\ 56$。 $\therefore\ y=54$。 又 y 之係數爲 2。故 y 之二根之和爲 -2。由是他之一根。爲 $y=-2-54=-56$。

$\therefore\ x^2-3x=54$, 或 $x^2-3x=-56$。

$$\therefore\ x=9,\ 或\ -6。或\ \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-215})。$$

28. 解 $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$。

〔解〕$(a-x)^3+(b-x)^3=\{(a-x)+(b-x)\}^3$

$$=(a-x)^3+(b-x)^3+3(a-x)(b-x)\{(a-x)+(b-x)\}。$$

$3(a-x)(b-x)(a+b-2x)=0$。 由是 $x=a,\ b,\ \frac{1}{2}(a+b)$。

29. 解 $(a-x)^4+(b-x)^4=(a+b-2x)^4$。

〔解〕$(a-x)^4+(b-x)^4=\{(a-x)+(b-x)\}^4$。

$\therefore$ $4(a-x)^3(b-x)+6(a-x)^2(b-x)^2+4(a-x)(b-x)^3=0$。

卽 $2(a-x)(b-x)\{2(a-x)^2+3(a-x)(b-x)+2(b-x)^2\}=0$。

卽 $(a-x)(b-x)\{7x^2-7x(a+b)+2a^2+2b^2+3ab\}=0$。

$\therefore$ $x=a$, 或 b, 或 $\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{14}(a-b)\sqrt{-7}$。

30. 解 $(a-x)^5+(b-x)^5=(a+b-2x)^5$。

〔解〕$(a-x)^5+(b-x)^5=\{(a-x)+(b-x)\}^5$。卽

$5(a-x)^4(b-x)+10(a-x)^3(b-x)^2+10(a-x)^2(b-x)^3+5(a-x)(b-x)^4=0$。

卽 $(a-x)(b-x)\{(a-x)^3+2(a-x)^2(b-x)+2(a-x)(b-x)^2+(b-x)^3\}=0$。

卽 $(a-x)(b-x)\{(a-x)+(b-x)\}\{(a-x)^2+(a-x)(b-x)+(b-x)^2\}=0$。

卽 $(a-x)(b-x)(a+b-2x)\{3x^2-3x(a+b)+a^2+b^2+ab\}=0$。

$\therefore$ $x=a,\ b,\ \frac{1}{2}(a+b),\ \frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{6}\ a-b\ \sqrt{-3}$。

31. 解 $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$。 $\left[答\ a,\ b,\ \frac{1}{2}(a+b)\right]$。

〔解〕兩邊各求其立方。則

$a-x+b-x+3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{b-x}(\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x})=a+b-2x$。

即 $3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{b-x}\sqrt[3]{a+b-2x}=0$。

$\therefore \quad (a-x)(b-x)(a+b-2x)=0$。

32. 解 $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$。

〔解〕兩邊平方之。則

$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+2\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}=\sqrt{a+b-2x}$。移項。則

$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}-2\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}$。又平方之。則

$$a-x+b-x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}$$
$$=a+b-2x+4\sqrt{(a-x)(b-x)}-4\sqrt{(a+b-2x)}\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}.$$

即 $-2\sqrt{(a-x)(b-x)}=-4\sqrt{(a+b-2x)}\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}$。

又四方之 $(a-x)^2(b-x)^2=16(a+b-2x)^2(a-x)(b-x)$。

即 $(a-x)(b-x)\{16(a+b-2x)^2-(a-x)(b-x)\}=0$。 $\therefore x=a$, 或 b。

或 $16(a+b-2x)^2-(a-x)(b-x)=0$。

即 $16(a+b)^2-64x(a+b)+64x^2-ab+(a+b)x-x^2=0$。

即 $63x^2-63x(a+b)+16(a+b)^2-ab=0$。

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}\left\{a+b\pm\frac{1}{63}(a-b)\sqrt{-63}\right\}。$$

33. 解 $(a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5$。 $\left[答\ a,\ b,\ \frac{1}{2}\left\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-3}\right\}\right]$.

〔解〕$(a-x)^5+(x-b)^5=\{(a-x)+(x-b)\}^5$ 與 **30** 例同法。

34. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{a-b}$ 試解之。 〔答 a, b〕.

〔解〕求兩邊之立方如 **31** 例。

35. 解 $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}=\sqrt[4]{a-b}$。 $\left[答\ a,\ b,\ \frac{1}{2}\left\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-63}\right\}\right]$.

〔解〕與 **32** 同法。

36. 解 $x^4+(a-x)^4=b^4$。

〔解〕$x=m+n$。及 $a-x=m-n$。則 $m=\dfrac{a}{2}$, $n=x-\dfrac{a}{2}$。

又從原方程式。得 $(m+n)^4+(m-n)^4=b^4$。

即 $2m^4+12m^2n^2+2n^4=b^4$。

即 $2\left(\frac{a}{2}\right)^4+12\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{a}{2}\right)^4=b^4$。

即 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^4+\frac{3}{2}a^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=-\frac{a^4}{16}+\frac{b^4}{2}$。

$\therefore$ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$。即 $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left\{-\frac{3}{4}a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\right\}}$。

37. 解 $(x+a)^4+(x+b)^4=17(a-b)^4$。

〔解〕 $(x+a)^4+(x+b)^4=17\{(x+a)-(x+b)\}^4$。

即 $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^4+1=17\left\{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)-1\right\}^4$ 令 $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)=y$。則

$y^4+1=17(y-1)^4$。即 $16y^4-68y^3+102y^2-68y+16=0$。

$\therefore$ $8\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-34\left(y+\frac{1}{y}\right)+51=0$。

即 $8\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-34\left(y+\frac{1}{y}\right)+35=0$。 $\therefore$ $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$，或 $\frac{7}{4}$。

由是 $y^2-\frac{5}{2}y+1=0$，或 $y^2-\frac{7}{4}y+1=0$。

$\therefore$ $y=2$，或 $\frac{1}{2}$，或 $y=\frac{1}{8}(7\pm\sqrt{-15})$。

即 $\frac{x+a}{x+b}=2$，$\frac{x+a}{x+b}=\frac{1}{2}$，$\frac{x+a}{x+b}=\frac{1}{8}(7\pm\sqrt{-15})$。

從 $\frac{x+a}{x+b}=2$，或 $\frac{1}{2}$，得 $x=a-2b$，或 $b-2a$。

又從 $\frac{x+a}{x+b}=\frac{7\pm\sqrt{-15}}{8}$，得 $\frac{a-b}{x+b}=\frac{-1\pm\sqrt{-15}}{8}$。

$\therefore$ $x+b=\frac{8(a-b)}{-1\pm\sqrt{-15}}$ 以 $-1\mp\sqrt{-15}$ 乘分母子。則

$x+b=\frac{8(a-b)(-1\mp\sqrt{-15})}{1-(-15)}=\frac{(a-b)(-1\mp\sqrt{-15})}{2}$。

$\therefore$ $x=-\frac{1}{2}\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-15}\}$。

38. 解 $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b}$。

〔解〕 平方之。得 $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}+2\sqrt[4]{x(a-x)}=\sqrt{b}$。

即 $\sqrt{x}+\sqrt{(a-x)}=\sqrt{b}-2\sqrt[4]{x(a-x)}$。又平方之。即得

$x+a-x+2\sqrt{x(a-x)}=b-4\sqrt{b}\sqrt[4]{x(a-x)}+4\sqrt{x(a-x)}$。

即 $2\sqrt{x(a-x)}-4\sqrt{b}\sqrt[4]{x(a-x)}=a-b$。令 $\sqrt[4]{x(a-x)}=y$。

即 $2y^2-4y\sqrt{b}=a-b$。 $\therefore\ y=\sqrt{b}\pm\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$。

即 $x(a-x)=y^4=\left(\sqrt{b}\pm\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^4$。

39. 解 $abx(x+a+b)^3-(ax+bx+ab)^3=0$。

〔解〕 $abx\{x^3+3x^2(a+b)+3x(a+b)^2+(a+b)^3\}$

$$=x^3(a+b)^3+3x^2(a+b)^2ab+3x(a+b)a^2b^2+a^3b^3,$$

即 $abx^4-x^3(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}+abx(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}-a^3b^3=0$。

即 $ab(x^4-a^2b^2)-x(a+b)(a^2-ab+b^2)(x^2-ab)=0$。

即 $(x^2-ab)\{ab(x^2+ab)-x(a+b)(a^2-ab+b^2)\}=0$。

即 $(x^2-ab)\{abx^2-x(a^3+b^3)+a^2b^2\}=0$。

即 $(x^2-ab)(bx-a^2)(ax-b^2)=0$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{ab},\ \dfrac{a^2}{b},\ \dfrac{b^2}{a}$。

40. 解 $abcx(x+a+b+c)^2-(xbc+xca+xab+abc)^2=0$。

〔解〕 $abcx\{(x+a)+(b+c)\}^2=\{bc(x+a)+ax(b+c)\}^2$。去括弧而簡之。

則 $abcx\{(x+a)^2+(b+c)^2\}=b^2c^2(x+a)^2+a^2x^2(b+c)^2$。

即 $bc(x+a)^2(ax-bc)-ax(b+c)^2(ax-bc)=0$。

即 $(ax-bc)\{bc(x+a)^2-ax(b+c)^2\}=0$。

即 $(ax-bc)(bx-ca)(cx-ab)=0$。

$\therefore\ x=\dfrac{bc}{a}$, 或 $\dfrac{ca}{b}$, 或 $\dfrac{ab}{c}$。

41. 解 $\dfrac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{a^4+b^4}{(a+b)^2}$。

〔解〕 $\dfrac{\{(a-x)^2-(x-b)^2\}^2+2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{(a^2-b^2)^2+2a^2b^2}{(a+b)^2}$。

即 $\dfrac{(a+b-2x)^2(a-b)^2+2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{(a-b)^2(a+b)^2+2a^2b^2}{(a+b)^2}$。

即 $(a-b)^2+\dfrac{2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=(a-b)^2+\dfrac{2a^2b^2}{(a+b)^2}$。

$\therefore\ \dfrac{(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$。由是 $\dfrac{(a-x)(x-b)}{a+b-2x}=\pm\dfrac{ab}{a+b}$。

$\therefore\ x=0,\ a+b,\ \dfrac{a^2+b^2}{a+b},\ \dfrac{2ab}{a+b}$。

42. $x^4+b(a+b)x^3+(ab-2)b^2x^2-(a+b)b^3x+b^4=0$。

〔解〕 $(x^2-b^2)^2+bx(a+b)(x^2-b^2)+ab^3x^2=0$。

卽 $(x^2-b^2+abx)(x^2-b^2+b^2x)=0$。

∴ 從 $x^2-b^2+abx=0$。$x=\frac{1}{2}b\left(-a\pm\sqrt{a^2+4}\right)$。

又 從 $x^2-b^2+b^2x=0$。$x=\frac{1}{2}b(-b\pm\sqrt{b^2+4})$。

43. 解 $(x^2+b^2)^2=2ax^3+2ab^2x-a^2x^2$。

〔解〕 $(x^2+b^2)^2-2ax(x^2+b^2)+a^2x^2=0$。

卽 $\{(x^2+b^2)-ax\}^2=0$。 ∴ $x^2+b^2-ax=0$, $x=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4b^2}\right)$。

44. 解 $(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)+abc=0$。

〔解〕 $x+b+c+a=y$。則原方程式。變爲 $(y-a)(y-b)(y-c)+abc=0$。

卽 $y^3-y^2(a+b+c)+y(ab+bc+ca)=0$。 ∴ $y=0$。

卽 $x+a+b+c=0$。 ∴ $x=-a-b-c$。

或 $y^2-y(a+b+c)+ab+bc+ca=0$。

∴ $y=\frac{1}{2}\{a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\}$。

卽 $x=\frac{1}{2}\{(-a-b-c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\}$。

45. 解 $\frac{a}{b+c-x}+\frac{b}{c+a-x}+\frac{c}{a+b-x}+3=0$。

〔解〕 $\frac{a+b+c-x}{b+c-x}+\frac{a+b+c-x}{c+a-x}+\frac{a+b+c-x}{a+b-x}=0$。

∴ $x=a+b+c$, 或 $\frac{1}{b+c-x}+\frac{1}{c+a-x}+\frac{1}{a+b-x}=0$。

卽 $(c+a-x)(a+b-x)+(a+b-x)(b+c-x)+(b+c-x)(c+a-x)=0$。

卽 $3x^2-4x(a+b+c)+a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca=0$。

∴ $x=\frac{1}{3}\{2(a+b+c)\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\}$。

46. $\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2-(b-c)^2}+\frac{(x-b)^2}{(x-b)^2-(c-a)^2}+\frac{(x-c)^2}{(x-c)^2-(a-b)^2}=1$。

〔解〕 $x=a$, 或 b, 或 c 爲能適合。 ∴ a, b, c 爲根。

又 $$\frac{(x-a)^2}{(x-a+b-c)(x-x-b+c)}+\frac{(x-b)^2}{(x-b+c-a)(x-b-c+a)}$$
$$+\frac{(x-c)^2}{(x-c+a-b)(x-c-a+b)}=1。$$

卽 $$(x-a)^2(x+a-b-c)+(x-b)^2(x-a+b-c)+(x-c)^2(x-a-b+c)$$
$$=(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c)。$$

由是此方程式。爲三次方程式。故所求之根爲 a, b, c。

47. $$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}+\frac{(x-c)(x-d)}{(x+c)(x+d)}。$$

〔解〕 $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=y$。 $\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}=z$。則

原方程式爲 $y+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{z}$。卽 $(y-z)(yz-1)=0$。

$\therefore$ $y=z$。卽 $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}$。

$\therefore$ $x=0$。或 $\pm\sqrt{\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{a+b-c-d}}$。

又 $yz=1$，卽 $\frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}=1$。

$\therefore$ $x=\pm\sqrt{-\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d}}$。

第玖編補

霍爾及乃托氏第九編摘要

二次三項式

1. 二次三項式 在ax^2+bx+c。內有如下之關係。

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$。若b^2-4ac爲負。則

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$$。

由是b^2-4ac爲負。則ax^2+bx+c式之值。與a同號。視a爲正則正。否則爲零。

2. 例解 $\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$爲任意之實數。若$x$爲實數。則$a$值之界限若何。

令 $\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}=y$。則

$$(a-5y)x^2-7x(1-y)+(5-ay)=0$$。

因x爲實數。故$49(1-y)^2-4(a-5y)(5-ay)\nless 0$即爲正。

即 $(49-20a)y^2+2(2a^2+1)y+(49-20a)$爲正。

由1章$4(2a^2+1)^2-4(49-20a)^2$應爲負或零。

即 $4(a-5)^2(a+12)(a-2)$爲負或零。

由是a在2與-12之間。則前之代數式爲負。而$49-20a$爲正。

若$a=5$, 或-12, 或2。則此代數式爲零。然$a=5$。則$49-20a$爲負。

故知此值之界限爲2及-12。而a在其中間。

例題九 (b)

10. 代數式 $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$。若 p 在1與7之間。則對於 x 之任意實數值試表之。

〔解〕 $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}=y$。則

$x^2(p+4y)+3x(y-1)-(py+4)=0$。

x 爲實數。則 $9(y-1)^2+4(p+4y)(py+4)\nless 0$。

即 $y^2(16p+9)+2y(2p^2+23)+(16p+9)\nless 0$。

故此代數式爲正。由2章。

$4(2p^2+23)^2-4(16p+9)^2$ 當爲負。

即 $4(p+4)^2(p-1)(p-7)$ 爲負。

由是 $p-1$ 與 $p-7$ 不能不異號。

故 p 在1與7之間。

14. $\frac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}$ 若 a^2-b^2 與 c^2-d^2 爲同號。則對於 x 之任意實數值試表之。

〔解〕 $\frac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}=y$。則

$(ad-bcy)x^2-(ac+bd)(1-y)x+(bc-ady)=0$。因 x 爲實數。故

$(ac+bd)^2(1-y)^2-4(ad-bcy)(bc-ady)\nless 0$。

即 $(ac-bd)^2y^2-2y\{(ac-bd)^2-2(ad-bc)^2\}+(ac-bd)\nless 0$。

故 $\{(ac-bd)^2-2(ad-bc)^2\}^2-(ac-bd)^4$ 爲負。

即 $(ad-bc)^2\{(ad-bc)^2-(ac-bd)^2\}$ 爲負。

即 $-(a^2-b^2)(c^2-d^2)$ 爲負。

由是 a^2-b^2, c^2-d^2 不能不同號。

霍爾及乃托氏第拾編摘要

雜方程式

3. **雜方程式** 在斯密氏書內所無者。爲指數方程式。今於此編補其例題於下。

例題十 (a)

11. $3^{2x}+9=10\cdot 3^{x}$。

〔解〕變原方程式。爲 $(3^{x})^{2}-10(3^{x})+9=0$。

卽 $(3^{x}-1)(3^{x}-9)=0$。

故 $3^{x}-1=0$, 或 $3^{x}-9=0$。 卽 $3^{x}=3^{0}$, 或 $3^{x}=3^{2}$。

由是 $x=0$, 或 $=2$。

12. $5(5^{x}+5^{-x})=26$。

〔解〕 $5\left(5^{x}+\frac{1}{5^{x}}\right)=26$。 卽 $(5^{x})^{2}-\frac{26}{5}(5^{x})+1=0$。

卽 $\left(5^{x}-\frac{1}{5}\right)\left(5^{x}-5\right)=0$。

故 $5^{x}=5^{-1}$, 或 $5^{x}=5^{1}$。

由是 $x=-1$, 或 $=+1$, 卽 $x=\pm 1$。

13. $2^{2x+8}+1=32\cdot 2^{x}$。

〔解〕 $2^{2x+8}+1=2^{5}.2^{x}$。 卽 $(2^{x+4})^{2}-2(2^{x+4})+1=0$。

開平方。則 $2^{x+4}-1=0$。 卽 $2^{x+4}=1=2^{0}$。

由是 $x+4=0$。 卽 $x=-4$。

14. $2^{2x+3}-57=65(2^{x}-1)$。

〔解〕 $2^{3}\cdot 2^{2x}-65\cdot 2^{x}+8=0$。 卽 $(2^{x}-8)(8\cdot 2^{x}-1)=0$。

故 $2^{x}=8=2^{3}$, 或 $2^{x}=\frac{1}{8}=2^{-3}$。

由是 $x=3$, 或 $=-3$。 卽 $x=\pm 3$。

15. $\sqrt{2^{x}}+\frac{1}{\sqrt{2^{x}}}=2$。

〔解〕 $\sqrt{2^{2x}}-2\sqrt{2^{x}}+1=0$。開平方得 $\sqrt{2^{x}}-1=0$。

故 $2^{\frac{x}{2}}=1$。 卽 $2^{\frac{x}{2}}=2^{0}$。 $\therefore x=0$。

44. $2^{x^{2}}:2^{2x}=8:1$。

〔解〕 $2^{x^{2}}\times 1=2^{2x}\times 8$。 卽 $2^{x^{2}}=2^{2x+3}$。

故 $x^{2}=2x+3$。因之 $x=3$, 或 $=-1$。

45. $a^{2x}(a^{2}+1)=(a^{3x}+a^{x})a$。

〔解〕 $a^{3x+1}-a^{2x+2}-a^{2x}+a^{x+1}=0$。以 a 除之。則

$$a^{3x}-a^{2x+1}-a^{2x-1}+a^{x}=0。$$

即 $a^{2x}(a^{x}-a)-a^{x-1}(a^{x}-a)=0$。

即 $(a^{x}-a)(a^{2x}-a^{x-1})=0$

故 $a^{x}=a$, 或 $a^{2x}=a^{x-1}$。

由是 $x=1$, 或 $2x=x-1$, 故 $x=\pm1$。

48. $(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}=5(a^{2}-x^{2})^{\frac{1}{3}}$。

〔解〕 $(a+x)^{\frac{1}{3}}=y$。 $(a-x)^{\frac{1}{3}}=z$。 則原方程式。爲

$$y^{2}+4z^{2}=5yz。\quad 即\ y^{2}-5yz+4z^{2}=0。$$

即 $(y-z)(y-4z)=0$。

由是 $y=z$, 或 $y=4z$。

即 $y^{3}=z^{3}$, 或 $y^{3}=64z^{3}$。

即 $a+x=a-x$, 或 $a+x=64(a-x)$。

由是 $x=0$, 或 $x=\frac{63}{65}a$。

〔注意〕以上所示之例題。如 12. 15 等。曾有負指數。及分指數即如 5^{-x} 或 $2^{\frac{x}{2}}$ 此等雖未經證明。然 $5^{-x}=\frac{1}{5^{x}}$. 及 $2^{\frac{x}{2}}=\sqrt{2^{x}}$。即證明在後。故此處僅示其定義而已。

例如 $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$。 $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ 之類。

又如 $x^{-3}=\frac{1}{x^{3}}$ $\quad x^{-n}=\frac{1}{x^{n}}$。

凡分指數。及負指數。斯密氏於第十三編述之頗詳。然令先知其定義。方知指數上之計算亦頗簡便。

查理斯密司氏
霍爾氏，乃托氏

大代數學講義

第叁卷

第拾編

通同方程式(或名聯立方程式。卽多元方程式)。

140. 通同方程式〔Simultaneous Equation〕 一方程式含有二個或二個以上之未知數量。則其諸未知數量之值。能適合者。多至無限。何則。其一個未知數量。恆因他未知數量任意之值而變。而得種種之值。

例如 $2x+y=12$ 式。其 $y=12-2x$。若 $x=1$ 則 $y=10$。$x=2$ 則 $y=8$。$x=3$ 則 $y=6$。故 x 及 y 可有無限之値。皆能適合。

然同此二未知數量。有二個方程式。則其未知數量之值。求其皆能適合者。卽爲有限。推之至於含 n 個未知數量之方程式。亦有 n 個。則其未知數量之值。同時能適合者。亦必有限。

二個以上之方程式。其所含諸未知數量之値能適合者。謂之通同方程式。

含諸未知數量 $x, y, z, \cdots\cdots\cdots$ 之方程式。則其式之次數。當依未知數量中最高乘元之次數稱之

例如 $ax+a^2y+a^3z=a^4$。 爲一次方程式。

$xy+x+y+z=0$。 爲二次方程式。

$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$。 爲三次方程式。

141. 一次通同方程式 先論有二未知數量之一次方程式。

有 $x, y, z, \cdots\cdots\cdots$ 之一次方程式。爲 $ax+by+cz+\cdots\cdots\cdots=k$。在此方程式內 $a, b \cdots\cdots\cdots k$。爲已知數量。

〔註〕同一組之諸方程式。其同未知數量之係數。可用同文字而附點。或小數字。以區別其値之異。則較便利。

例如 a, b, c, 用於第一方程。則第二方程用 a', b', c', 第三方程用 a'', b'', c''。或第一用 a, b, c, 第二用 a_2, b_2, c_2。

由是含 x 及 y 之一次通同方程式。則爲

$$ax+by=c。$$

$$a'x+b'y=c'。$$

142. 兩未知數量之方程式 如下。

$$ax+by=c。\quad a'x+b'y=c'。$$

以第二式 y 之係數 b' 乘第一式。得 $ab'x+bb'y=cb'$。

以第一式 y 之係數 b 乘第二式。得 $a'bx+bb'y=c'b$。

由減法得 $(ab'-a'b)x=cb'-c'b$。 $\therefore\ x=\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$。

以 x 之値。代入第一式。則得 $a\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}+by=c$。

由是 $by=\dfrac{c(ab'-a'b)-a(cb'-c'b)}{ab'-a'b}$ $\therefore\ y=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$。

或不關於 x 而徑求 y。則如第一次求 x 之法。從第一式得 $a'ax+a'by=a'c$。從第二式得 $a'ax+ab'y=ac'$。

由減法得 $(a'b-ab')y=a'c-ac'$。 $\therefore\ y=\dfrac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$。

〔註〕x 及 y 得其一個。則他一個可互換其係數得之。

例如 $x=\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$ 從 a, b 及 a', b' 互換。則得

$y=\dfrac{ca-c'a}{ba'-b'a}$ 卽旣知 x 可以徑得 y。

故凡解一次二通同方程式。必先消去他未知數量。而變爲第三之方程式。則其一未知數量。卽可求得。依此方法去他之一未知數量者。謂之消去法〔Eliminated〕。

143*. 公式 依前章從

$$\left.\begin{aligned} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{aligned}\right\} \quad 則\ x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \quad 及\ y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}。$$

由是 $\dfrac{x}{cb'-c'b}=\dfrac{1}{ab'-a'b}$ 即 $\dfrac{x}{bc'-b'c}=\dfrac{-1}{ab'-a'b}$。

及 $\dfrac{y}{ac'-a'c}=\dfrac{1}{ab'-a'b}$ 即 $\dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{-1}{ab'-a'b}$。

由是得最要之公式如下

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}。$$

此最要之公式。稱爲十文字之法。

$$ax+by+c(-1)=0。$$

$$a'x+b'y+c'(-1)=0。$$

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ a' & & b' & & c' & & a' \end{array}$$

-1 之分母　x 之分母　y 之分母

上之十文字。以其對角線上之兩文字相乘一得正積。一得負積。

$$\therefore\quad \frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}。$$

又從 $\left.\begin{aligned} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{aligned}\right\}$ 得

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ a' & & b' & & c' & & a' \end{array}$$

1 之分母　x 之分母　y 之分母

$$\therefore\quad \frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}。$$

〔第一例〕解 $3x+2y=13,\ 7x+3y=27$。

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 13 & 3 \\ 7 & 3 & 27 & 7 \end{array}$$

-1之分母　x之分母　y之分母

$$\therefore\quad \frac{x}{2\cdot27-3\cdot13}=\frac{y}{13\cdot7-27\cdot3}=\frac{-1}{3\cdot3-7\cdot2}\ \text{即}\ \frac{x}{15}=\frac{y}{10}=\frac{1}{5}。$$

由是 $x=\frac{15}{5}=3,\qquad y=\frac{10}{5}=2$。

〔第二例〕解 $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=2,\quad \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=-7$。

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -7 & 2 \end{array}\qquad \therefore\ \frac{\frac{1}{x}}{3(-7)-(-5)2}=\frac{\frac{1}{y}}{2\cdot2-(-7)4}=\frac{-1}{4(-5)-2\cdot3},$$

-1之分母　$\frac{1}{x}$之分母　$\frac{1}{y}$之分母

$$\text{即}\ \frac{\frac{1}{x}}{-11}=\frac{\frac{1}{y}}{32}=\frac{1}{26}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}=\frac{-11}{26}。\quad \text{即}\ x=-\frac{26}{11}.\quad \frac{1}{y}=\frac{32}{26}。\ \text{即}\ y=\frac{13}{16}.$$

〔第三例〕解 $x-y=a-b,\ ax-by=2(a^2-b^2)$。

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & (a-b) & 1 \\ a & -b & 2(a^2-b^2) & a \end{array}\qquad \therefore\ \frac{x}{-2(a^2-b^2)+b(a-b)}=\frac{y}{(a-b)a-2(a^2-b^2)}=\frac{-1}{-b+a}。$$

-1之分母　x之分母　y之分母

$$\text{即}\ \frac{x}{b^2+ab-2a^2}=\frac{y}{2b^2-ab-a^2}=\frac{1}{b-a}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{b^2+ab-2a^2}{b-a}=2a+b。\ y=\frac{2b^2-ab-a^2}{b-a}=a+2b。$$

〔別法〕令 $y=x-(a-b)$ 代入第二式。則

$ax-b\{x-(a-b)\}=2(a^2-b^2)$。即 $x(a-b)=2(a^2-b^2)-b(a-b)$。

$\therefore\quad x=2(a+b)-b=2a+b$。又 $y=x-(a-b)=2a+b-(a-b)=a+2b$。

144. 論一次兩通同方程式之解法 如下

$$ax+by=c \quad\text{.......................................}(1)$$

$$a'x+b'y=c' \quad\text{.......................................}(2)$$

此方程式變為下之(3)(4)兩式。其 x 及 y 之值。能適合明矣。

$$(ab'-a'b)x=cb'-c'b \quad\text{.............................}(3)$$

$$(ba'-b'a)y=ca'-c'a \quad\text{.............................}(4)$$

故 $ab'-a'b\neq0$。則 x 及 y 各能得一個有限值。

若 $ab'-a'b=0$。則 x 及 y 皆為無限大。見〔118 章〕。但此固因 $cb'-c'b\neq0$。

又 $ab'-a'b=0$。即 $b'=\dfrac{a'b}{a}$ 代入(3)式。為 $c\times\dfrac{a'b}{a}-c'b\neq0$

即 $\dfrac{b}{a}(ca'-c'a)\neq0$。 故亦 $ca'-c'a\neq0$。 惟(3)(4)式。x 及 y 之係數皆為 0。以 0 除非 0 者。必為無限大。

若 $ab'-a'b=0$。及 $cb'-c'b=0$。則 $x=\dfrac{0}{0}$。

又從 $b'=\dfrac{a'b}{a}$ 得 $c\times\dfrac{a'b}{a}-c'b=0$。 即 $\dfrac{b}{a}(ca'-c'a)=0$。

$\therefore\quad ca'-c'a=0$。由是 $y=\dfrac{0}{0}$。則對於 x 及 y 不論為如何之值皆能適合。

$ab'-a'b=0$。則 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$。

$ab'-a'b=0$。及 $cb'-c'b=0$。則 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$。

不合理之方程式〔Inconsistent〕對於未知數量有限之值不適合者。謂之不合理之方程式。

例如 $ab'-a'b=0$。$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ 而不等於 $\dfrac{c}{c'}$。

不定方程式〔Indeterminate〕$ab'-a'b=0,\quad cb'-c'b=0$

卽 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$。則兩方程式全然相同。故謂之不定式。

例如以 $\frac{a'}{a}$ 乘(1)式，則 $a'x+\frac{a'}{a}by=\frac{a'}{a}c$。卽

$a'x+\frac{b'}{b}by=\frac{c'}{c}c$。卽 $a'x+b'y=c'$。卽(1)式與(2)式同在此例。則 x 及 y 之值。可多至無限而皆能適合。

a, a', b, b'，不常爲0。今試設 a 及 a' 爲0。則從(1)式。$y=\frac{c}{b}$。從(2)式。$y=\frac{c'}{b'}$。而此結果非 $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ 則不合理。

由是 $a=a'=0$，及 $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ 則(1)式及(2)式爲 $y=\frac{c}{b}$ 能適合。而 x 之值當爲無限大。

若 $a=a'=0$ 而 $\frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'}$。則 $by=c$ 及 $b'y=c'$。雖不合理。然在 $ax+by=c$ 及 $a'x+b'y=c'$ 之內。令 a 及 a' 減小。至於極限。則亦能合理。

何則 $\frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'}$。則 $cb'-c'b\neq0$。

又 $a=a'=0$。則 $ab'-a'b=0$。故 x 及 y 之值。可爲無限大。

145. 三未知數量之通同方程式 解法如下。

$$ax+by+cz=d \quad\cdots\cdots(1)$$

$$a'x+b'y+c'z=d' \quad\cdots\cdots(2)$$

$$a''x+b''y+c''z=d'' \quad\cdots\cdots(3)$$

〔連次消去之法〕 以 c' 乘(1)式。c 乘(2)式。則得

$$ac'x+bc'y+cc'z=dc'$$

及

$$a'cx+b'cy+cc'z=d'c$$

由減法得 $(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c \quad\cdots\cdots(4)$

以 c'' 乘(1)式 c 乘(3)式如前法。則得

$$(ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y=dc''-d''c \quad\cdots\cdots(5)$$

從(4)式及(5)式。用**143**章之公式如下。

$$x=\frac{-(bc'-b'c)(dc''-d''c)+(dc'-d'c)(bc''-b''c)}{(ac'-a'c)(bc''-b''c)-(bc'-b'c)(ac''-a''c)}。$$

〔未定係數之法〕以λ乘(1)式。μ乘(2)式。與(3)式相加。則得

$$x(\lambda a+\mu a'+a'')+y(\lambda b+\mu b'+b'')+z(\lambda c+\mu c'+c'')=\lambda d+\mu d'+d''。$$

此方程式λ及μ。爲任意之值。皆能適合。見(149章。)

令分y及z之係數爲0。以求λ及μ之值。則

$$x(\lambda a+\mu a'+a'')=\lambda d+\mu d'+d''。\qquad \therefore\quad x=\frac{\lambda d+\mu d'+d''}{\lambda a+\mu a'+a''}。$$

但從$\left.\begin{matrix}\lambda b+\mu b'+b''=0\\ \lambda c+\mu c'+c''=0\end{matrix}\right\}$用143章之公式。得

$$\frac{\lambda}{b'c''-b''c'}=\frac{\mu}{b''c-bc''}=\frac{1}{bc'-b'c}。$$

$$\therefore\quad \lambda(bc'-b'c)=b'c''-b''c' \text{ 及 } \mu(bc'-b'c)=b''c-bc''。$$

由是 $x=\dfrac{\lambda d+\mu d'+d''}{\lambda a+\mu a'+a''}\times\dfrac{bc'-b'c}{bc'-b'c}$

$$=\frac{d\lambda(bc'-b'c)+d'\mu(bc'-b'c)+d''(bc'-b'c)}{a\lambda(bc'-b'c)+a'\mu(bc'-b'c)+a''(bc'-b'c)}$$

$$\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}。$$

連次消去法。所得x之值。可以c約其分母分子。與未定係數法。所得x之值同。

依上法求得x之值。則y及z之值。可逕得之。卽y之值。可在x值內。以a與b及a'與b'及a''與b''交換而得之。又y之值。可在x值內。以a, b, c及a', b', c'及a'', b'', c''輪換而得之。至z之值。可用第二之輪換得之。

x, y, z之值。其分母常同。而此分母非等於0。則各値皆爲有限數。

〔第一例〕解 $\begin{cases} x+2y+3z=6\text{..............................}(1)\\ 2x+4y+z=7\text{..............................}(2)\\ 3x+2y+9z=14\text{..............................}(3)\end{cases}$

以2乘(1)式。則$2x+4y+6z=12$。由此式減(2)式。則$5z=5$。$\therefore z=1$。

以3乘(1)式。則$3x+6v+9z=18$。由此式減(3)式。則$4y=4$。$\therefore y=1$。

$\therefore$ 從(1)式。得$x+2\cdot1+3\cdot1=6$。 $\therefore x=1$。

〔第二例〕解下之方程式。

$$x+y+z=1 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$ax+by+cz=d \quad\cdots\cdots(2)$$

$$a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \quad\cdots\cdots(3)$$

以 c 乘 (1) 式減去 (2) 式。則得 $(c-a)x+(c-b)y=c-d \quad\cdots\cdots(4)$

以 c 乘 (2) 式減去 (3) 式。則得 $a(c-a)x+b(c-b)y=d(c-d) \quad\cdots\cdots(5)$

以 b 乘 (4) 式減去 (5) 式。則得 $(b-a)(c-a)x=(b-d)(c-d)$。

$$\therefore \quad x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}.$$

y, z 之值。可如下式逕書出之。

$$y=\frac{(c-d)(a-d)}{(c-b)(a-b)},\quad z=\frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$$

〔第三例〕解下之方程式。

$$x+y+z=a+b+c \quad\cdots\cdots(1)$$

$$ax+by+cz=bc+ca+ab \quad\cdots\cdots(2)$$

$$bcx+cay+abz=3abc \quad\cdots\cdots(3)$$

從 (1) 式。則 $(x-c)+(y-a)+(z-b)=0$。

從 (2) 式。則 $a(x-c)+b(y-a)+c(z-b)=0$。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a \end{array}$$

用 143 章十文字之法。則得

$(z-b)$ 之分母 $(x-c)$ 之分母 $(y-a)$ 之分母

$$\frac{x-c}{c-b}=\frac{y-a}{a-c}=\frac{z-b}{b-a}$$

$$=\frac{bc(x-c)+ca(y-a)+ab(z-b)}{bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)}=\frac{bcx+cay+abz-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

從 (3) 式。則 $\dfrac{x-c}{c-b}=\dfrac{y-a}{a-c}=\dfrac{z-b}{b-a}=\dfrac{3abc-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$。

$$\therefore \quad x=c-\frac{3abc-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(c-a)}=\frac{a(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}.$$

由是 y 與 z 之值。可逕書出。

〔第四例〕解下之方程式。

$$x+ay+a^2z+a^3=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$x+by+b^2z+b^3=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$x+cy+c^2z+c^3=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

先設 $\lambda^3+z\lambda^2+y\lambda+x=0$。此方程式內。用 a, b, c 代 λ。則順次得(1)。(2),(3)三式而適合。故 λ 之值爲 a, b, c。

又以 a, b, c 爲三根之方程式。爲 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0$。

即 $\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(ab+bc+ca)\lambda-abc=0$。

與前之 λ 之三次方程式。比較其係數。則

$z=-(a+b+c)$。 $y=ab+bc+ca$。 $x=-abc$。

146. 諸未知數量之通同方程式

含三個以上未知數量之一次通同方程式。依後編所示之定準數法。自易求得。又用連次消去法。或未定係數之倍數法。亦能求得之。

例如

$$ax+by+cz+du=e \quad\cdots\cdots(1)$$

$$a'x+b'y+c'z+d'u=e' \quad\cdots\cdots(2)$$

$$a''x+b''y+c''z+d''u=e'' \quad\cdots\cdots(3)$$

$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''u=e''' \quad\cdots\cdots(4)$$

λ 乘(1)式。μ 乘(2)式。γ 乘(3)式。與(4)式相加。則得

$$x(a\lambda+a'\mu+a''\gamma+a''')+y(b\lambda+b'\mu+b''\gamma+b''')$$

$$+z(c\lambda+c'\mu+c''\gamma+c''')+u(d\lambda+d'\mu+d''\gamma+d''')$$

$$=e\lambda+e'\mu+e''\gamma+e''' \quad\cdots\cdots(5)$$

λ, μ, γ 在(5)式內設 y, z, u 之係數爲0。則

$$x=\frac{e\lambda+e'\mu+e''\gamma+e'''}{a\lambda+a'\mu+a''\gamma+a'''} \quad\cdots\cdots(6)$$

但 λ, μ, γ 可從方程式。

$$\left.\begin{array}{l} b\lambda+b'\mu+b''\gamma+b'''=0 \\ c\lambda+c'\mu+c''\gamma+c'''=0 \\ d\lambda+d'\mu+d''\gamma+d'''=0 \end{array}\right\} \quad\cdots\cdots(7)$$

而用145章之法解之。得 λ, μ, γ 之各值。以此代入(6)式。即得值。

又得 x 之後。則 y, z, u 各值。可由 a, b, c, d 及 a', b', c', d' 及 a'', b'', c'', d'' 及 a''', b''', c''', d''' 輪換得之。即由 x 之值得之也。但未知數量之分母則同。

例題十二

試解以下之方程式。

1. $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{2}$。 $\frac{x}{5}-\frac{3y}{10}=\frac{1}{2}$。

〔解〕去兩方程式之分母。則 $2x-y=3, 2x-3y=5$。

$\therefore$ $(2x-y)-(2x-3y)=3-5$。即 $2y=-2$。 $\therefore$ $y=-1$。

$$x=\frac{1}{2}(y+3)=1。$$

2. $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=2$。 $\frac{18}{x}+\frac{8}{y}=10$。 〔答 $x=2\frac{4}{7}$, $y=2\frac{2}{3}$〕。

〔解〕$\frac{9}{x}-\frac{4}{y}+\frac{1}{2}\left(\frac{18}{x}+\frac{8}{y}\right)=2+\frac{1}{2}\times 10$。即 $\frac{18}{x}=7$。 $\therefore$ $x=2\frac{4}{7}$。

3. $x+\frac{3}{y}=\frac{7}{2}$。 $3x-\frac{2}{y}=\frac{26}{3}$。 〔答 $x=3$, $y=6$〕。

〔解〕$3\left(x+\frac{3}{y}\right)-\left(3x-\frac{2}{y}\right)=3\times\frac{7}{2}-\frac{26}{3}$。即 $\frac{11}{y}=\frac{11}{6}$。 $\therefore$ $y=6$。

4. $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+5=\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10$。

〔解〕$\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+5=10$。 即 $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}=5$。 又 $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10$。

由加法 $\frac{10}{x}=15$。 $\therefore$ $x=\frac{2}{3}, y=3$。

5. $ax+by=2ab$。 $bx-ay=b^2-a^2$。

〔解〕$a(ax+by)+b(bx-ay)=a(2ab)+b(b^2-a^2)$。

即 $x(a^2+b^2)=b(a^2+b^2)$。 $\therefore$ $x=b$, 及 $y=a$。

6. $x+ay+a^2=0$。 $x+by+b^2=0$。 〔答 $x=ab, y=-a-b$〕。

〔解〕由減法 $(a-b)y+a^2-b^2=0$。 $\therefore$ $y=-(a+b)$。

7. $x+y=2a$。 $(a-b)x=(a+b)y$。

〔解〕 $y=\frac{(a-b)x}{a+b}$。 $\therefore\ x+\frac{(a-b)x}{a+b}=2a$。 $\therefore\ x=a+b,\ \ y=a-b$。

8. $(b+c)x+(b-c)y=2ab$。 $(c+a)x+(c-a)y+2ac$。

〔解〕 以 c 乘第一式。b 乘第二式。由減法。

$(c^2-ab)x-(c^2-ab)y=0$。 $\therefore\ y=x$。

故從第一式 $(b+c)x+(b-c)x=2ab$。 得 $x=a=y$。

9. $bx+ay=2ab$。 $a^2x+b^2y=a^3+b^3$。

〔解〕 $b(x-a)+a(y-b)=0$。 $a^2(x-a)+b^2(y-b)=0$。

由視察得 $x-a=0$。 $y-b=0$。 $\therefore\ x=a,\ \ y=b$。

10. $(a+b)x+by=ax+(b+a)y=a^3-b^3$。

〔解〕 從 $(a+b)x+by=ax+(b+a)y$ 得 $bx=ay$。 $\therefore\ y=\frac{b}{a}x$。

由是 $(a+b)x+b\times\frac{b}{a}x=a^3-b^3$。

即 $(a^2+ab+b^2)x=a(a^3-b^3)$。 $\therefore\ x=a(a-b)$ 及 $y=b(a-b)$。

11. $x+y+z=1$。 $2x+3y+z=4$。 $4x+9y+z=16$。

〔解〕 於第二式減第一式。則 $x+2y=3$。

於第三式減第二式。則 $2x+6y=12$。即 $x+3y=6$。

$\therefore$ $(x+3y)-(x+2y)=6-3$。 $\therefore\ y=3,\ \ x=-3,\ \ z=1$。

12. $x+y+z=1$。 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+4z=1$。 $\frac{5}{3}x+\frac{3}{4}y-\frac{z}{2}=1$。

〔解〕 變第二式。爲 $2x+y+16z=4$。變第三式。爲 $20x+9y-6z=12$。乃於第二式減第一式。則 $x+15z=3$。 又以 9 乘第二式。而於第三式減去之。則 $2x-150z=-24$。即 $x-75z=-12$。

$\therefore$ $(x+15z)-(x-75z)=3-(-12)$。即 $90z=15$。

由是 $z=\frac{1}{6}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$。

13. $x+2y+3z=3x+y+2z=2x+3y+z=6$。 〔答 $x=y=z=1$〕。

14. $y+z=2a,\ z+x=2b,\ x+y=2c$。

〔解〕 $(y+z)+(z+x)-(x+y)=2a+2b-2c$。即 $2z=2a+2b-2c$。

由是 $z=a+b-c,\ \ x=b+c-a,\ \ y=c+a-b$。

15. $y+z-x=2a,\quad z+x-y=2b,\quad x+y-z=2c$。

〔解〕於第一加第二。則 $2z=2a+2b$。

由是 $z=a+b,\quad x=b+c,\quad y=c+a$。

16. $y+z-3x=2a,\quad z+x-3y=2b,\quad x+y-3z=2c$。

〔解〕三方程式相加。得 $-x-y-z=2a+2b+2c$。

由此加第一式。則 $-4x=4a+2b+2c$。

$\therefore\quad x=-\frac{1}{2}(2a+b+c),\quad y=-\frac{1}{2}(2b+c+a),\quad z=-\frac{1}{2}(2c+a+b)$。

17. $ax+by+cz=1,\quad bx+cy+az=1,\quad cx+ay+bz=1$。

〔解〕第一第二次。由減法得 $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0$。

第二第三式。由減法得 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

用十文字之法。得

$$\frac{x}{(b-c)(a-b)-(c-a)^2}=\frac{y}{(c-a)(b-c)-(a-b)^2}=\frac{z}{(a-b)(c-a)-(b-c)^2}$$

此三分母。同爲 $ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2$。故 $x=y=z$。

由是 $ax+bx+cx=1$。$\therefore\quad x=y=z=\frac{1}{a+b+c}$。

18. $\frac{y+z-x}{b+c}=\frac{z+x-y}{c+a}=\frac{x+y-z}{a+b}=1$。

〔解〕$\frac{(y+z-x+(z+x-y)}{(b+c)+(c+a)}=1$。卽 $\frac{2z}{a+b+2c}=1$。$\therefore\ z=\frac{1}{2}(a+b+2c)$。

19. $x+y+z=0,\quad ax+by+cz=1,\quad a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c$。

〔解〕$(a+b+c)(ax+by+cz-(a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c-(a+b+c)$。

卽 $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0$。此式與第一用十文字之法。

得 $\frac{x}{b(c+a)-c(a+b)}=\frac{y}{c(a+b)-a(b+c}=\frac{z}{a(b+c)-b(c+a)}$。

卽 $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{ax+by+cz}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$。

$\therefore$ 從第二 $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{1}{-(a-b(b-c)(c-a)}$。

由是 $x=-\frac{a}{(a-b(c-a)},\quad y=-\frac{b}{(b-c)(a-b)},\quad z=-\frac{c}{(c-a)(b-c)}$。

20. $x+y+z=a+b+c,\quad bx+cy+az=bc+ca+ab,$

$$cx+ay+bz=bc+ca+ab.$$

〔解〕變三方程式爲順次。得 $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0,$

$$b(x-a)+c(y-b)+a(z-c)=0,\quad c(x-a)+a(y-b)+b(z-c)=0.$$

由視察得 $x=a,\quad y=b,\quad z=c.$

21. $x+y+z=a+b+c,\quad bx+cy+az=a^2+b^2+c^2,$

$$cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2.$$

〔解〕從第一 $(x-b)+(y-c)+(z-a)=0.$

從第二 $b(x-b)+c(y-c)+a(z-a)=0$。用十文字之法。得

$$\frac{x-b}{a-c}=\frac{y-c}{b-a}=\frac{z-a}{c-b}=\frac{c(x-b)+a(y-c)+b(z-a)}{c(a-c)+a(b-a)+b(c-b)}=\frac{cx+ay+bz-bc-ca-ab}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}.$$

∴ 從第三 $\dfrac{x-b}{a-c}=\dfrac{y-c}{b-a}=\dfrac{z-a}{c-b}=\dfrac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}=-1.$

由是 $x=b+c-a,\quad y=c+a-b,\quad z=a+b-c.$

22. $x+y+z=0,\quad (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=(b-c)(c-a)(a-b).$

$bcx+cay+abz=0.$

〔解〕第一及第三用十文字之法。得

$$\frac{x}{ab-ca}=\frac{y}{bc-ab}=\frac{z}{ca-bc}.$$

即 $\dfrac{x}{a(b-c)}=\dfrac{y}{b(c-a}=\dfrac{z}{c(a-b)}=\dfrac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)}.$

從第二得 $\dfrac{x}{a(b-c)}=\dfrac{y}{b(c-a)}=\dfrac{z}{c(a-b)}=\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=1.$

由是 $x=a(b-c),\quad y=b(c-a),\quad z=c(a-b).$

23. $ax+by+cz=a,\quad bx+cy+az=b,\quad cx+ay+bz=c.$

〔解〕$a(x-1)+by+cz=0,\quad b(x-1)+cy+az=0,$

$c(x-1)+ay+bz=0.$ ∴ 由視察得 $x=1,\quad y=z=0.$

24. $x-ay+a^2z-a^3=0,\quad x-by+b^2z-b^3=0,\quad x-cy+c^2z-c^3=0.$

〔解〕在 $\lambda^3-z\lambda^2+y\lambda-x=0$ 式內。以 λ 代 a, b, c 爲能適合。

故 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0.$

即 $\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(ab+bc+ca)\lambda-abc=0.$

$z=a+b+c,\quad y=ab+bc+ca,\quad x=abc.$

25. $ax+by+cz=m,\quad a^2x+b^2y+c^2z=m^2,\quad a^3x+b^3y+c^3z=m^3$。

〔解〕以 c 乘第一式而減第二式。則 $a(c-a)x+b(c-b)y=m(c-m)$。以 c 乘第二式而減第三式。則 $a^2(c-a)x+b^2(c-b)y=m^2(c-m)$。於此兩方程式。以 b 乘其前式而減後式。則

$$a(c-a)(b-a)x=m(c-m)(b-m)。\qquad \therefore\quad x=\frac{m(c-m)(b-m)}{a(c-a)(b-a)}。$$

26. $ax+cy+bz=a^2+2bc,\quad cx+by+az=b^2+2ca,$
$bx+ay+cz=c^2+2ab$。

〔解〕 $a(x-a)+c(y-b)+b(z-c)=0,\quad c(x-a)+b(y-b)+a(z-c)=0,$
$b(x-a)+a(y-b)+c(z-c)=0$。

由視察。得 $x=a,\quad y=b,\quad z=c$。

27. $x+y+z=2a+2b+2c,\quad ax+by+cz=2bc+2ca+2ab,$
$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

〔解〕 $\{x-(b+c)\}+\{y-(c+a)\}+\{z-(a+b)\}=0$。
$a\{x-(b+c)\}+b\{y-(c+a)\}+c\{z-(a+b)\}=0$。
$(b-c)\{x-(b+c)\}+(c-a)\{y-(c+a)\}+(a-b)\{z-(a+b)\}=0$。

$\therefore$ 由視察。得 $x=b+c,\quad y=c+a,\quad z=a+b$。

28. $ax+by+cz=a+b+c,\quad a^2x+b^2y+c^2z=(a+b+c)^2$。
$bcx+cay+abz=0$。

〔解〕 $(a+b+c)(ax+by+cz)-(a^2x+b^2y+c^2z)=(a+b+c)^2-(a+b+c)^2$。

即 $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0$。此式與第三式用十文字之法。得

$$\frac{x}{ca\cdot c(a+b)-b(c+a)ab}=\frac{y}{ab\cdot a(b+c)-c(a+b)bc}$$
$$=\frac{z}{bc\cdot b(c+a)-a(b+c)ca}。$$

即 $$\frac{x}{a(c-b)(ab+bc+ca)}=\frac{y}{b(a-c)(ab+bc+ca)}=\frac{z}{c(b-a)(ab+bc+ca)}。$$

即 $$\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{ax+by+cz}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}。$$

$\therefore$ 從第一 $$\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{a+b+c}{-(b-c)(c-a)(a-b)}。$$

由是 $$x=-\frac{a(a+b+c)}{(c-a)(a-b)},\quad y=-\frac{b(a+b+c)}{(a-b)(b-c)},\quad z=-\frac{c(a+b+c)}{(b-c)(c-a)}。$$

29. $x+y+z=l+m+n,\quad lx+my+nz=mn+nl+lm,$

$(m-n)x+(n-l)y+(l-m)z=0$。

〔解〕設 $x=\frac{\alpha}{2}$, $y=\frac{\beta}{2}$, $z=\frac{\gamma}{2}$ 則原三方程式變爲

$$\alpha+\beta+\gamma=2l+2m+2n,\quad l\alpha+m\beta+n\gamma=2mn+2nl+2lm,$$

$$(m-n)\alpha+(n-l)\beta+(l-m)\gamma=0。$$

依 27 題解之,得 $\alpha=m+n,\quad \beta=n+l,\quad \gamma=l+m$。

$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(m+n),\quad y=\frac{1}{2}(n+l),\quad z=\frac{1}{2}(l+m)$。

30. $lx+ny+mz=nx+my+lz=mx+ly+nz=l^3+m^3+n^3-3lmn$。

〔解〕三方程式相加。以 $m+n+l$ 除之。則

$x+y+z=3(m^2+n^2+l^2-mn-nl-lm)$ ....(A)

從第一減第二 $(l-n)x+(n-m)y+(m-l)z=0$。

從第二減第三 $(n-m)x+(m-l)y+(l-n)z=0$。

用十文字之法。得

$$\frac{x}{(n-m)(l-n)-(m-l)^2}=\frac{y}{(n-m)(m-l)-(l-n)^2}=\frac{z}{(l-n)(m-l)-(n-m)^2}。$$

此各分母同爲 $mn+ln+ml-m^2-n^2-l^2$。故 $x=y=z$。

由是從 (A) 得 $x=y=z=m^2+n^2+l^2-mn-nl-lm$。

31. $l^2x+m^2y+n^2z=lmx+mny+nlz=nlx+lmy+mnz=l+m+n$。

〔解〕$l(lx-1)+m(my-1)+n(nz-1)=0$。

$m(lx-1)+n(my-1)+l(nz-1)=0$。

$n(lx-1)+l(my-1)+m(nz-1)=0$。

由視察。得 $lx=my=nz=1$。

32. $\frac{x}{a+\alpha}+\frac{y}{a+\beta}+\frac{z}{a+\gamma}=1,\quad \frac{x}{b+\alpha}+\frac{y}{b+\beta}+\frac{z}{b+\gamma}=1,$

$\frac{x}{c+\alpha}+\frac{y}{c+\beta}+\frac{z}{c+\gamma}=1$。

〔解〕設以 λ 之值。代 a, b, c。此方程式變爲 $\frac{x}{\lambda+\alpha}+\frac{y}{\lambda+\beta}+\frac{z}{\lambda+\gamma}=1$。

$$\lambda^3-\lambda^2(x+y+z-\alpha-\beta-\gamma)+\lambda\{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-x(\beta+\gamma)-y(\gamma+\alpha)-z(\alpha-\beta)\}$$
$$-(\beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z-\alpha\beta\gamma)=0。$$

又 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0$。

即 $\lambda^3-\lambda^2(a+b+c)+\lambda(ab+bc+ca)-abc=0$。

此兩方程式。比較其係數。則

$$x+y+z-\alpha-\beta-\gamma=a+b+c \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-x(\beta+\gamma)-y(\gamma+\alpha)-z(\alpha+\beta)=ab+bc+ca \cdots\cdots(2)$$

$$\beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z-\alpha\beta\gamma=abc \cdots\cdots(3)$$

以 $(\alpha+\beta)$ 乘 (1) 加 (2) 則

$$(\alpha-\gamma)x+(\beta-\gamma)y=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+(\alpha+\beta)(a+b+c)+ab+bc+ca \cdots(4)$$

以 $\alpha\beta$ 乘 (1) 減 (3)。則

$$\beta(\alpha-\gamma)x-\alpha(\beta-\gamma)y=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta(a+b+c)-abc \cdots\cdots(5)$$

以 α 乘 (4) 減 (5)。則

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)x=\alpha^3+\alpha^2(a+b+c)+\alpha(ab+bc+ca)+abc。$$

$$\therefore\quad x=\frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}。$$

33. $y+z+w=a,\quad z+w+x=b,\quad w+x+y=c,\quad x+y+z=d。$

〔解〕四方程式相加。則 $3(x+y+z+w)=a+b+c+d \cdots\cdots(A)$

(A) 從第一則 $3(x+a)=a+b+c+d。\quad\therefore\ x=\frac{1}{3}(b+c+d-2a)。$

(A) 從第二則 $3(y+b)=a+b+c+d。\quad\therefore\ y=\frac{1}{3}(a+c+d-2b)。$

(A) 從第三則 $3(z+c)=a+b+c+d。\quad\therefore\ z=\frac{1}{3}(a+b+d-2c)。$

(A) 從第四則 $3(w+d)=a+b+c+d。\quad\therefore\ w=\frac{1}{3}(a+b+c-2d)。$

34. $x+ay+a^2z+a^3w+a^4=0,\quad x+by+b^2z+b^3w+b^4=0。$

$x+cy+c^2z+c^3w+c^4=0,\quad x+dy+d^2z+d^3w+d^4=0。$

〔解〕在 $\lambda^4+\lambda^3w+\lambda^2z+\lambda y+x=0$, λ 之四根爲 a, b, c, d。

故 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)=0。$

卽 $\lambda^4-\lambda^3(a+b+c+d)+\lambda^2(ab+bc+ca+ad+bd+cd)。$

$$-\lambda(abc+abd+bcd+cad)+abcd=0。$$

比較此兩方程式之係數。則

$w=-(a+b+c+d),\quad z=ab+bc+ca+ad+bd+cd,$

$y=-(abc+abd+bcd+cad),\quad x=abcd。$

二次通同方程式

147. 二次通同方程式 此處先論二次通同方程式。然後再解高於二次之通同方程式。

〔第一類〕含二未知數量之兩方程式。其一爲二次式。一爲一次式。

例如 $3x+2y=7$, $3x^2-2y^2=25$, 試解之。

從第一式 $x=\frac{7-2y}{3}$。以此代入第二式。則得 $3\left(\frac{7-2y}{3}\right)^2-2y^2=25$。

由是 $y^2+14y+13=0$。即 $(y+13)(y+1)=0$。

$\therefore$ $y=-1$ 或 $=-13$,

$y=-1$。則 $x=\frac{7-2(-1)}{3}=3$, $y=-13$。則 $x=\frac{7-2(-13)}{3}=11$。

依上例凡兩方程式。其一爲一次式。一爲二次式。則在一次式內。以其一未知數量表他一未知數量。以代入第二之方程式內則得他一未知數量之二次式。而二未知數量。均能依此求得之。今示以公式如下

$$lx+my+n=0。$$

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0。$$

從第一式。則 $x=-\frac{my+n}{l}$。以此代於第二式。則

$$a\left(\frac{my+n}{l}\right)^2-b\left(\frac{my+n}{l}\right)y+cy^2-d\left(\frac{my+n}{l}\right)+ey+f=0。$$

即 $y^2(am^2-bml+cl^2)+y(2anm-bnl-dml+el^2)+an^2-ndl+l^2f=0$。

即得 y 之二次式。由此先求得 y。而 x 之值亦易求得矣。

148. 任意之二次兩方程式 兩方程式均爲二次。則消去一未知數量。即爲他一未知數量之四次方程式。非前章之法所能解。

例如 $ax^2+bx+c=y$, $x^2+y^2=d$。

用第一式之 y 代於第二式。則

$$x^2+(ax^2+bx+c)^2=d。$$

即爲 x 之四次式。

149. 〔第二類〕 兩方程式。爲二次之等次式。則恆能解之。惟此例必消去已知數量之項。

例如 $ax^2+bxy+cy^2=d$。 $a'x^2+b'xy+c'y^2=d'$。

d' 乘第一式。d 乘第二式相減。則

$d'(ax^2+bxy+cy^2)-d(a'x^2+b'xy+c'y^2)=dd'-dd'$。

即 $(ad'-a'd)x^2+(bd'-b'd)xy+(cd'-c'd)y^2=0$。

此方程式由81章可分割爲一次兩因子。如 $lx+my=0$ 之形。然亦可用第一類之法解之。

〔例〕解 $y^2-xy=15$, $x^2+xy=14$,

$14(y^2-xy)-15(x^2+xy)=14\times15-15\times14$。

即 $15x^2+29xy-14y^2=0$。 $(5x-2y)(3x+7y)=0$。

由是 $5x-2y=0$。或 $3x+7y=0$。

$5x-2y=0$。即 $x=\frac{2}{5}y$。從第一式 $y^2-\frac{2}{5}y^2=15$。

$\therefore\ y=\pm5$。 $x=\pm2$。

$3x+7y=0$。即 $x=-\frac{7}{3}y$。從第一式 $y^2+\frac{7}{3}y^2=15$。

$\therefore\ y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$。 $x=\mp\frac{7}{\sqrt{2}}$。

由是 $x=2, y=5$, 或 $x=-2, y=-5$, 或 $x=-\frac{7}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$,

或 $x=\frac{7}{\sqrt{2}}$, $y=-\frac{3}{\sqrt{2}}$。

150. 特別之法 前設兩類之外。尙有特別類之方程式亦能解之。

〔第一例〕解 $x-y=2$, $xy=15$。

以第一式平方之。加第二式之四倍。則

$(x-y)^2+4xy=2^2+4\times15$。即 $(x+y)^2=64$。

$\therefore\ x+y=\pm8$。與 $x-y=2$ 相加或減。得

$x=\frac{\pm8+2}{2}=5$, 或 -3, $y=\frac{\pm8-2}{2}=3$, 或 -5。

由是 $x=5$, $y=3$, 或 $x=-3$, $y=-5$。

〔第二例〕解 $x^2+xy+y^2=a^2$, $x^4+x^2y^2+y^4=b^4$。

以第一式除第二式。則 $x^2-xy+y^2=\frac{b^4}{a^2}$ 從第一式減去此式則

$2xy=a^2-\frac{b^4}{a^2}$。 $\therefore\ xy=\frac{a^4-b^4}{2a^2}$。

由是 $(x^2+xy+y^2)+xy=a^2+\frac{a^4-b^4}{2a^2}$。 $\therefore\ x+y=\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}$。

及 $(x^2-xy+y^2)-xy=\frac{b^4}{a^2}-\frac{a^4-b^4}{2a^2}$。 $\therefore\ x-y=\pm\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}$。

$\therefore\ x=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}\pm\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right\},\ y=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}\mp\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right\}$。

〔第三例〕解 $x^2-2y^2=4y,\ 3x^2+xy-2y^2=16y$。以 4 乘第一式減去第二式。則得 $x^2-xy-6y^2=0$。

即 $(x-3y)(x+2y)=0$。 $\therefore\ x=3y$, 或 $x=-2y$。

$x=3y$。則從第一式得 $9y^2-2y^2=4y$。 $\therefore\ y=0$, 或 $\frac{4}{7}$。

$x=-2y$。則從第一式得 $4y^2-2y^2=4y$。 $\therefore\ y=0$, 或 2。

由是 $x=y=0$, 或 $x=-4,\ y=2$, 或 $x=\frac{12}{7}$。$y=\frac{4}{7}$。

〔第四例〕解 $x^2+y^2=(x+y+1)^2,\quad x^2+y^2=(x-y+2)^2$,

$(x+y+1)^2=(x-y+2)^2$。 $\therefore\ x+y+1=\pm(x-y+2)$。

$\therefore\ 2y=1$。 即 $y=\frac{1}{2}$, 或 $2x=-3$。 即 $x=-\frac{3}{2}$。

$y=\frac{1}{2}$。則 $x^2+\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2}+1)^2$。 $\therefore\ x=-\frac{2}{3}$。

$x=-\frac{3}{2}$。則 $\frac{9}{4}+y^2=(-\frac{3}{2}+y+1)^2$。 $\therefore\ y=-2$。

〔第五例〕解 $x+y=2b$。 $x^4+y^4=2a^4$。

令 $x=b+z$。 則從第一式 $y=b-z$。

由是第二式變爲 $(b+z)^4+(b-z)^4=2a^4$。

即 $z^4+6b^2z^2+b^4=a^4$。

$\therefore\ z=\pm\sqrt{\{-3b^2\pm\sqrt{(8b^4+a^4)}\}}$,

$x=b\pm\sqrt{\{-3b^2\pm\sqrt{(8b^4+a^4)}\}}$,

$y=b\mp\sqrt{\{-3b^2\pm\sqrt{(8b^4+a^4)}\}}$。

例題十三

解以下之各方程式。

1.　$x+y=x^2-y^2=23$。　〔答 $x=12$, $y=11$〕

〔解〕以 $x+y=23$。除 $x^2-y^2=23$. 則 $x-y=1$。

2.　$x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1$。

〔解〕$y=2x-1$。　$\therefore\ x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1$.

即 $15x^2-23x+8=0$。即 $(x-1)(15x-8)=0$.

$\therefore\ x=1,\ y=1$, 或 $x=\frac{8}{15},\ y=\frac{1}{15}$.

3.　$x^2+xy=12,\quad xy-2y^2=1$.

〔解〕$(x^2+xy)-12(xy-2y^2)=12-12$。即 $x^2-11xy+24y^2=0$.

即 $(x-3y)(x-8y)=0$。　$\therefore\ x=3y$, 或 $8y$。

若 $x=3y$。則 $(3y)^2+3y^2=12$。　$\therefore\ y=\pm1,\quad x=\pm3$。

若 $x=8y$. 則 $(8y^2)^2+8y^2=12$.　$\therefore\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{6}},\quad x=\pm8\sqrt{\frac{1}{6}}$.

4.　$x^2+2y^2=22,\ 3y^2-xy-x^2=17$。

$\left[答\ \pm2,\ \pm3,\ 或\ \pm\frac{16}{9}\sqrt{3},\ \mp\frac{18}{9}\sqrt{3}\right]$.

5.　$x-y=5,\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{5}{84}$.

〔解〕變第二式.爲 $x-y=\frac{5}{84}xy$.　$\therefore$ 從第一得 $5=\frac{5}{84}xy$.

即 $xy=84,\quad (x-y)^2+4xy=5^2+4\times84$. 即 $x+y=\pm19$.

從 $x+y=\pm19$. 及 $x-y=5$。得 $x=12,\ y=7$, 或 $x=-7,\ y=-12$.

6.　$x+y=a+b,\ \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1$。　〔答 $a,\ b$ 或 $2a-b,\ 2b-a$〕

〔解〕由視察得 $x=a,\ y=b$, 兩方程式爲適合.

又去第二式之分母而括之。則 $(a-b)(x-y)+ay=a^2+b^2-ab$.

從第一式得 $y=a+b-x$。

$\therefore\quad (a-b)(x-a-b+x)+x(a+b-x)=a^2+b^2-ab$。

即 $x^2-x(3a-b)-ab+2a^2=0$。 $\therefore$ x 二根之和爲 $3a-b$。

由是 $x=(3a-b)-a=2a-b$。 $\therefore\quad y=2b-a$。

7. $a(x+y)=b(x-y)=xy$。 $\left[\text{答 } 0,0 \text{ 或 } \dfrac{2ab}{b-a},\ \dfrac{2ab}{b+a}\right]$。

〔解〕由視察得 $x=y=0$。

又各以 xy 除之。則 $\dfrac{a}{y}+\dfrac{a}{x}=1$, $\dfrac{b}{y}-\dfrac{b}{x}=1$ 由此得 x, y。

8. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{a^2}$, $\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{yx}=\dfrac{1}{b^2}$。

〔解〕兩方程式相加。開平方。則 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\pm\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{ab}$。

從第一式 $a^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=x$。 $\therefore\quad x=\pm\dfrac{a\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$。

從第二式 $b^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=y$。 $\therefore\quad y=\pm\dfrac{b\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}$。

9. $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=10$, $\dfrac{ab}{xy}=3$。 $\left[\text{答 } \pm\dfrac{a}{3},\ \pm b \text{ 或 } \pm a,\ \pm\dfrac{b}{3}\right]$。

〔解〕$\left(\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}\right)+2\dfrac{ab}{xy}=10+2\times3$。 $\therefore\quad \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\pm4$。

又 $\left(\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}\right)-2\dfrac{ab}{xy}=10-2\times3$。 $\therefore\quad \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=\pm2$。

$\therefore\quad \dfrac{2a}{x}=(\pm4)+(\pm2)=\pm6$, 或 ±2。 $\therefore\quad x=\pm\dfrac{a}{3}$ 或 $\pm a$。

10. $x+y=2a$, $x^3+y^3=2b^3$。

〔解〕以第一式除第二式。則 $x^2-xy+y^2=\dfrac{b^3}{a}$。

$\therefore\quad (x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=(2a)^2-\dfrac{b^3}{a}$。即 $xy=\dfrac{4a^3-b^3}{3a}$。

又 $(x^2-xy+y^2)-xy=\dfrac{b^3}{a}-\dfrac{4a^3-b^3}{3a}$。 $\therefore\quad x-y=\pm\sqrt{\dfrac{4b^3-4a^3}{3a}}$。

由是 $x=a\pm\sqrt{\dfrac{b^3-a^3}{3a}}$。$y=a\mp\sqrt{\dfrac{b^3-a^3}{3a}}$。

11. $x^2-xy+y^2=109$, $x^4+x^2y^2+y^4=4251$。

〔解〕以第一式除第二式。則 $x^2+xy+y^2=39$。從此式減第一式。則 $2xy=-70$。卽 $xy=-35$。

$\therefore$ $(x^2+xy+y^2)+xy=39+(-35)$。 $\therefore$ $x+y=\pm 2$。

又 $(x^2-xy+y^2)-xy=109-(-35)$。 $\therefore$ $x-y=\pm 12$。

由是 $x=\pm 7$, $y=\mp 5$, 或 $x=\pm 5$, $y=\mp 7$。

12. $x^2+xy+y^2=133$, $x+\sqrt{xy}+y=19$。

〔解〕以第二式除第一式。則 $x-\sqrt{xy}+y=7$。從第二式減此式。則 $2\sqrt{xy}=12$。卽 $xy=36$。

$\therefore$ $(x^2+xy+y^2)+xy=133+36$。 $\therefore$ $x+y=\pm 13$。

又 $(x^2+xy+y^2)-3xy=133-3\times 36$。 $\therefore$ $x-y=\pm 5$。

由是 $x=\pm 9$, $y=\pm 4$, 或 $x=\pm 4$, $y=\pm 9$。

13. $x+y=72$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6$。 〔答 64, 8 或 8, 64〕。

〔解〕求第二式之立方。則 $x+y+3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})=216$。

$\therefore$ 從第一式 $72+3\sqrt[3]{xy}(6)=216$。 $\therefore$ $xy=512$。

14. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$, $xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$。 〔答 $-6\pm\sqrt{30}$, $6\mp\sqrt{30}$〕。

於第二式減第一式。則 $xy=6$。 又第一式爲 $y+x=2xy$。

$\therefore$ $y+x=12$。

15. $x+y=1$。 $x^5+y^5=31$。

〔解〕以第一式除第二式。則 $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=31$。

從 $(x+y)^4=1$ 減此式。則 $5x^3y+5x^2y^2+5xy^3=-30$。

卽 $x^2+xy+y^2=\frac{-6}{xy}$。從 $(x+y)^2=1$ 減此式。則

$xy=1+\frac{6}{xy}$。卽 $x^2y^2-xy-6=0$。 $\therefore$ $xy=3$, 或 $xy=-2$。

從 $x+y=1$, $xy=3$, 或 -2, 求 x 及 y。則

$x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-11})$, $y=\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{-11})$, 或 $x=2$, $y=-1$, 或 $x=-1$, $y=2$。

16. $x^2+y^2+3xy-4(x+y)+3=0$。 $xy+2(x+y)-5=0$。

〔解〕從第一式減第二式而括之。則 $(x+y)^2-6(x+y)+8=0$。

卽 $(x+y-4)(x+y-2)=0$。 $\therefore$ $x+y=4$, 或 $x+y=2$。

由是從第二式 $xy=5-2(x+y)$。卽 $xy=-3$, 或 $xy=1$。

從 $x+y=4$, $xy=-3$, $x=2\pm\sqrt{7}$, $y=2\mp\sqrt{7}$。

從 $x+y=2$, $xy=1$, $x=y=1$。

17. $x^2+xy+x=14$, $y^2+xy+y=28$。 $\left[答\ 2, 4, 或\ -\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right]$。

〔解〕兩方程式相加。則 $(x+y)^2+(x+y)=42$。 $\therefore$ $x+y=6$, 或 -7。

從第一式 $x=\frac{14}{x+y+1}=\frac{14}{6+1}=2$, 或 $x=\frac{14}{-7+1}=-\frac{7}{3}$。

18. $x^3+y^3=9$, $x^2-xy+y^2=3$。 〔答 2, 1, 或 1, 2〕。

〔解〕以第二式除第一式。則 $x+y=3$。

又 $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3^2-3$。卽 $3xy=6$。 $\therefore$ $xy=2$。

19. $x(y-b)=y(x-a)=2ab$。 〔答 $2a$, $2b$, 或 $-a$, $-b$〕。

20. $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{x}=4$。

〔解〕$xy+1=y$, $xy+1=4x$。 $\therefore$ $y=4x$。

由是從第二 $4x^2+1=4x$。 $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$, $y=2$。

21. $ax+by=2ab$, $\frac{a}{y}+\frac{b}{x}=2$。

〔解〕從第二式 $ax+by=2xy$。 $\therefore$ 從第一式 $xy=ab$。

又 $(ax+by)^2-4abxy=(2ab)^2-4ab(ab)$。卽 $ax-by=0$。

從 $ax+by=2ab$, 及 $ax-by=0$。 $\therefore$ $x=b$, $y=a$。

22. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12$。 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$。

$\left[答\ 6, 6, 或\ -\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{5}),\ -\frac{3}{2}(1\mp\sqrt{5})\right]$。

〔解〕去分母。則 $x^3+y^3=12xy$, $x+y=\frac{1}{3}xy$。

由除法得 $x^2-xy+y^2=36$。

又 $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=\left(\frac{1}{3}\times xy\right)^2-36$。

即 $3xy=\frac{1}{9}x^2y^2-36$。 $\therefore$ $x^2y^2-27xy-324=0$。

$\therefore$ $xy=36$, 或 -9。

23. $\frac{x^3}{y}+xy=a^2$, $\frac{y^3}{x}+xy=b^2$。 〔答 $\pm a\sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$, $\pm b\sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$〕。

〔解〕$x(x^2+y^2)=a^2y$, $y(y^2+x^2)=b^2x$。

由除法。得 $\frac{x}{y}=\frac{a^2y}{b^2x}$。 $\therefore$ $x=\pm\frac{a}{b}y$。

$\therefore$ 從第二式 $y\left(y^2+\frac{a^2}{b^2}y^2\right)=\pm aby$。 $\therefore$ $y=0$, 或 $\pm b\sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$。

24. $xy-\frac{x}{y}=a$, $xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{a}$。 〔答 $\pm\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}$, $\pm\sqrt{1+a^2}$〕。

〔解〕$(xy-a)\left(xy-\frac{1}{a}\right)=\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}$。即 $x^2y^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)xy+1=1$。

即 $xy=a+\frac{1}{a}$。又從第一式 $\frac{x}{y}=xy-a=a+\frac{1}{a}-a=\frac{1}{a}$。

由是 $xy\times\frac{x}{y}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a}$。 $\therefore$ $x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}$。

25. $x+y+\frac{y^2}{x}=14$, $x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=84$。 〔答 2, 4, 或 8, 4〕。

〔解〕$x^2+xy+y^2=14x$。$x^4+x^2y^2+y^4=84x^2$。

由除法 $x^2-xy+y^2=6x$。從第一式減此式。即得 $2xy=8x$。

$\therefore$ $y=4$, $x^2+4x+16=14x$。 $\therefore$ $x=2$, 或 $x=8$。

26. $x+y=6$, $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440$。

〔解〕從第二式 $\{(x+y)^2-2xy\}\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}=1440$。

$\therefore$ 從第一式 $\{(36-2xy\}\{216-18xy\}=1440$。

即 $x^2y^2-30xy+176=0$。 $\therefore$ $xy=8$ 或 22。

從 $xy=8$, $x+y=6$。故 $x=4$, $y=2$, 或 $x=2$, $y=4$。

又從 $xy=22$ 及 $x+y=6$。故 $x=3\pm\sqrt{-13}$, $y=3\mp\sqrt{-13}$。

27. $x+y=8xy$, $x^2+y^2=40x^2y^2$。

〔解〕$(x+y)^2-(x^2+y^2)=(8xy)^2-40x^2y^2$。即 $12x^2y^2-xy=0$。

$\therefore$ $xy=0$ 或 $\frac{1}{12}$。由是 $x+y=0$ 或 $\frac{2}{3}$。

從 $xy=0$, $x+y=0$, $\therefore$ $x=y=0$。

又從 $xy=\frac{1}{12}$。 $x+y=\frac{2}{3}$。 $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{6}$, 或 $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{2}$。

28. $x^2-xy=8x+3$, $xy-y^2=8y-6$。 [答 3, 6, 或 $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$]。

〔解〕從第一式減第二式。則 $x^2-2xy+y^2=8(x-y)+9$。

即 $(x-y)^2-8(x-y)-9=0$ $\therefore$ $x-y=9$, 或 -1。

若 $x-y=9$。則從第一式。得 $x(x-y)=8x+3$。

即 $9x=8x+3$。 $\therefore$ $x=3$。若 $x-y=-1$。則從第一式 $-x=8x+3$。

即 $x=-\frac{1}{3}$。

29. $\frac{x+y}{1-xy}=3$, $\frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}$。

〔解〕$x+y=3(1-xy)$, $x-y=\frac{1}{3}(1+xy)$。

由是 $(x+y)^2-(x-y)^2=9(1-xy)^2-\frac{1}{9}(1+xy^2)$。即 $2x^2y^2-5xy+2=0$。

$\therefore$ $xy=2$, 或 $\frac{1}{2}$, 從第一式 $x+y=-3$, 或 $\frac{3}{2}$。

從第二式 $x-y=1$。或 $\frac{1}{2}$。 $\therefore$ $x=-1$, $y=-2$, 或 $x=1$, $y=\frac{1}{2}$。

30 $x-y=a(x^2-y^2)$, $x+y=b(x^2-y^2)$。

〔解〕從第一式 $x-y=0$, 或 $1=a(x+y)$。

從第二式 $x+y=0$, 或 $1=b(x-y)$。

由是 $x=0$, $y=0$, $x=\frac{a+b}{2ab}$, $y=\frac{b-a}{2ab}$。

31. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}$。

〔解〕$2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=2\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2$。

即 $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2$。 $\therefore$ $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$, 或 $-\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$。

從 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$。則 $x=b$, $y=a$。

又從 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=-\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$。則 $x=\frac{a^2}{b}$, $y=\frac{b^2}{a}$。

32.　$\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{y}{b}+\frac{b}{y}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$。

〔解〕從第一式 $\frac{bx-ay}{ab}=\frac{bx-ay}{xy}$,　　$\therefore\ bx-ay=0$ (1)。或 $ab=xy$ (2)

從第二式 $\frac{y(x-b)}{bx}=\frac{x-b}{y}$,　　$\therefore\quad x-b=0$ (3)。或 $bx=y^2$ (4)

從 (1)(3) 則 $x=b$, $y=\frac{b^2}{a}$。從 (1)(4)。則 $x=\frac{a^2}{b}$, $y=a$。

從 (2)(3) 則 $x=b$, $y=a$,　從 (2)(4)。則 $x=\sqrt[3]{a^2b}$, $y=\sqrt[3]{ab^2}$。

〔注意〕(1)(2) 及 (3)(4)。不能於同時成立。

151. 解諸未知數量之通同方程式。含二未知數量之二次通同方程式。有一二之定則。已述於前。至未知數量在三個以上者。原無一定之解法。玆特舉其特別之例。解之如下。俾其他例題可以準此類推。

〔第一例〕

$$\text{解}\begin{cases}(x+y)(x+z)=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ (y+z)(y+x)=b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\\ (z+x)(z+y)=c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{cases}$$

(2) 式及 (3) 式之積。以 (1) 式除之。則得

$(y+z)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}$。　$\therefore\ y+z=\pm\frac{bc}{a}$。同法得 $z+x=\pm\frac{ca}{b}$, $x+y=\pm\frac{ab}{c}$。

由是 $(y+z)+(z+x)-(x+y)=\pm\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-\frac{ab}{c}\right)$。

即　$z=\pm\frac{b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}{2abc}$。

同法 $x=\pm\frac{c^2a^2+a^2b^2-b^2c^2}{2abc}$, 及 $y=\pm\frac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{2abc}$。

〔第二例〕

$$\text{解}\begin{cases}x(y+z)=a \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ y(z+x)=b \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\\ z(x+y)=c \cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{cases}$$

從(1)(2)兩式之和減去(3)式。則得 $2xy=a+b-c$。

同法 $2yz=b+c-a$, $2zx=c+a-b$。

$\therefore\quad \dfrac{(2xy)(2zx)}{2yz}=\dfrac{(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a}$。即 $x=\pm\sqrt{\dfrac{(a+b-c)(c+a-b)}{2(b+c-a)}}$

同法 $y=\pm\sqrt{\dfrac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(c+a-b)}}$, 及 $z=\pm\sqrt{\dfrac{(c+a-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}$。

〔第三例〕 解 $\begin{cases} x^2+2yz=a \dots\dots\dots (1) \\ y^2+2zx=a \dots\dots\dots (2) \\ z^2+2xy=b \dots\dots\dots (3) \end{cases}$

此三方程式相加開平方。則得 $x+y+z=\pm\sqrt{(2a+b)}$ ……(4)

從(1)式減(2)式。則 $(x-y)(x+y-2z)=0$。

$\therefore\quad x-y=0 \dots\dots\dots (5)$

或 $\quad x+y-2z=0 \dots\dots\dots (6)$

〔I〕從(5)式 $x=y$。 $\therefore$ 從(4)式 $2x+z=\pm\sqrt{(2a+b)}$。

又從(2)式減(3)式。則 $y^2+2zx-z^2-2xy=a-b$。

$\therefore$ 從(5)式 $x^2-2zx+z^2=b-a$。 $\therefore\ x-z=\pm\sqrt{(b-a)}$。

由是 $x=y=\dfrac{1}{3}\{\pm\sqrt{2a+b}\pm\sqrt{b-a}\}$。

$z=\dfrac{1}{3}\{\pm\sqrt{2a+b}\mp2\sqrt{b-a}\}$。

〔II〕從(6)式。$x+y=2z$。

$\therefore$ 從(4)式。$z=\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{(2a+b)}$。 及 $x+y=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{(2a+b)}$。

又 從(2)式。$y^2+x(x+y)=a$。

由是 $x=\pm\sqrt{\dfrac{a-b}{3}}\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{2a+b}$。 $y=\mp\sqrt{\dfrac{a-b}{3}}\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{2a+b}$。

〔第四例〕解 $b^2z+c^2y=c^2x+a^2z=a^2y+b^2x=xyz$。

$a^2(b^2z+c^2y)+b^2(c^2x+a^2z)-c^2(a^2y+b^2x)=(a^2+b^2-c^2)xyz$。

即 $2a^2b^2z=(a^2+b^2-c^2)xyz$。

$\therefore\quad z=0$, 或 $xy=\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2-c^2}$。

同法 $x=0$, 或 $yz=\dfrac{2b^2c^2}{b^2+c^2-a^2}$

$y=0$, 或 $zx=\dfrac{2c^2a^2}{c^2+a^2-b^2}$。

由是可如第二例。求 x, y, z。

〔第五例〕解 $x^2-yz=a$。 $y^2-zx=b$。 $z^2-xy=c$。

$(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)=a^2-bc$。

即 $x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^2-bc$。

同法 $\dfrac{x}{a^2-bc}=\dfrac{y}{b^2-ca}=\dfrac{z}{c^2-ab}=\dfrac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$。

$$\therefore\quad \frac{x^2}{(a^2-bc)^2}=\frac{yz}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\frac{x^2-yz}{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}。$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{(a^2-bc)^2}=\frac{a}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}。$$

$$\therefore\quad x=\frac{a^2-bc}{\pm\sqrt{(a^3+b^3+c^3-3abc)}}。$$

〔第六例〕

$$\text{解}\begin{cases}x+y+z=a+b+c\text{..............................}(1)\\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2\text{..............................}(2)\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3\text{..............................}(3)\end{cases}$$

由觀察可知 $x=a, y=b, z=c$。

又從 (1) 式。得 $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0$。

及從 (3) 式。得 $\dfrac{1}{a}(x-a)+\dfrac{1}{b}(y-b)+\dfrac{1}{c}(z-c)=0$。

即 $bc(x-a)+ca(y-b)+ab(z-c=0$。

(1) 式及 (3) 式。變如上之方程式。用十文字之法。則

$$\frac{x-a}{a(b-c)}=\frac{y-b}{b(c-a)}=\frac{z-c}{c(a-b)}=K。$$

$$\therefore\quad K^2=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}。$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2(ax+by+cz)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}。$$

$\therefore$ 從 (2) 式。$K^2=\dfrac{-2(ax+by+cz-a^2-b^2-c^2)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$..............(4)

又 $$K=\frac{a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}。$$

$$=\frac{ax+by+cz-a^2-b^2-c^2}{-(a-b)(b-c)(c-a)}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

以(5)式除(4)式。則 $K=\dfrac{2(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$。

$$\therefore\quad \frac{x-a}{a(b-c)}=\frac{y-b}{b(c-a)}=\frac{z-c}{c(a-b)}=\frac{2(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}。$$

〔第七例〕解下之方程式。

$$x+y+z=6。$$

$$yz+zx+xy=11。$$

$$xyz=6。$$

此三方程式。依 129 章三次方程式之關係式可解。

如含 x, y, z 三根之三次方程式。其未知數爲 λ。則

$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

從上之三方程式。則此三次方程式。爲

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0。$$

$$\therefore\qquad (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0。$$

$\therefore$ $\lambda=1, 2,$ 或 3。 $\therefore$ $x=1,\ y=2,\ z=3$。

而原方程式爲 x, y, z 之等勢式。故

$x=1,\ y=2,\ z=3$。

或 $x=1,\ y=3,\ z=2$。

或 $x=2,\ y=1,\ z=3$。

或 $x=2,\ y=3,\ z=1$。

或 $x=3,\ y=2,\ z=1$。

或 $x=3,\ y=1,\ z=2$。

〔第八例〕解下之方程式。

$$x+y+z=a,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},\quad yz+zx+xy=-c^2。$$

從第二式得 $a(yz+zx+xy=xyz$。 $\therefore$ 從第三式 $xyz=-ac^2$。

依前法λ之三根。爲 x, y, z 則其方程式。爲 $(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z=0$。

卽 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

卽 $\lambda^3-a\lambda^2-c^2\lambda+ac^2=0$。

卽 $(\lambda-a)(\lambda-c)(\lambda+c)=0$。 $\therefore\ \lambda=a,\ c,\ -c$。

由是 x, y, z 之值。爲 $a, c, -c$。

〔第九例〕解下之方程式。

$$x^2(y-z)=a^2(b-c)。$$
$$y^2(z-x)=b^2(c-a)。$$
$$z^2(x-y=c^2(a-b)。$$

由加法得 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)。$$

卽 $(y-z)(z-x)(x-y)=(b-c)(c-a)(a-b)$ ....(A)

又 由乘法得 $x^2(y-z)y^2(z-x)z^2(x-y)=a^2(b-c)b^2(c-a)c^2(a-b)$。

卽 $x^2y^2z^2(y-z)(z-x)(x-y)=a^2b^2c^2(b-c)(c-a)(a-b)$ ....(B)

從 (A)(B) 兩式。$x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$。 $\therefore\ xyz=\pm abc$..................(C)

又從第一第二兩式。$a^2(b-c)y+b^2(c-a)x=x^2y(y-z+y^2x(z-x)$

$$=xyz(y-x)。$$

$\therefore$ 從 (C) 式。$a^2(b-c)y+b^2(c-a)x=\pm abc(y-x)$。

卽 $bx(bc-ab\pm ca)=ay(ca-ab\pm bc)$。

由是 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, 或 $\dfrac{x(bc-ab-ca)}{a}=\dfrac{y(ca-ab-bc)}{b}$。

同法 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, 或 $\dfrac{x(bc-ca-ab)}{a}=\dfrac{y(ca-ab-bc)}{b}=\dfrac{x(ab-bc-ca)}{c}$。

〔I〕 $xyz=abc$, 及 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$。則 $\dfrac{x}{a}=\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{abc}}=\sqrt[3]{1}$。

$\therefore\ x=a,\ a\omega,\ a\omega^2$。 $y=b,\ b\omega,\ b\omega^2$。 $z=c,\ c\omega,\ c\omega^2$

〔II〕 $xyz=abc$, 及 $\dfrac{a(bc-ca-ab)}{a}=\dfrac{y(ca-ab-bc)}{b}=\dfrac{z(ab-bc-ca)}{c}$。

$$\therefore\ \frac{x(bc-ca-ab)}{a}=\sqrt[3]{\frac{xyz(bc-ca-ab)(ca-ab-bc)(ab-bc-ca)}{abc}}$$
$$=\sqrt[3]{\{(bc-ca-ab)(ca-ab-bc)(ab-bc-ca)\}}。$$

例題十四

解以下之方程式。

1. $yz=a^2$, $zx=b^2$, $xy=c^2$。

〔解〕 $\frac{(zx)(xy)}{yz}=\frac{b^2c^2}{a^2}$。 $\therefore$ $x=\pm\frac{bc}{a}$, $y=\pm\frac{ca}{b}$, $z=\pm\frac{ab}{c}$。

2. $x(x+y+z)=a^2$, $y(x+y+z)=b^2$, $z(x+y+z)=c^2$。

〔解〕 三方程式相加開平方。則 $x+y+z=\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$。

$$\therefore\quad x=\frac{a^2}{x+y+z}=\pm\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},$$

$$y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad z=\pm\frac{c^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}。$$

3. $-yz+zx+xy=a$, $yz-zx+xy=b$, $yz+zx-xy=c$。

〔解〕 第一第二式相加。則 $2xy=a+b$。

同法 $2yz=b+c$, $2zx=c+a$。

$$\therefore\quad \frac{(2zx)(2xy)}{2yz}=\frac{(a+b)(c+a)}{b+c}。\text{卽 } x=\pm\sqrt{\frac{(a+b)(c+a)}{2(b+c)}},$$

同法 $y=\pm\sqrt{\frac{(b+c)(a+b)}{2(c+a)}}$, $z=\pm\sqrt{\frac{(c+a)(b+c)}{2(a+b)}}$。

4. $yz=a(y+z)$, $zx=b(z+x)$, $xy=c(x+y)$。

〔解〕 由視察可知 $x=y=z=0$。

又 $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$。

$$\therefore\quad \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}。$$

卽 $\frac{2}{x}=\frac{ca+ab-bc}{abc}$。

由是 $x=\frac{2abc}{ca+ab-bc}$, $y=\frac{2abc}{ab+bc-ca}$, $z=\frac{2abc}{bc+ca-ab}$。

5. $yz=by+cz$, $zx=cz+ax$, $xy=ax+by$。

〔解〕 由視察可知 $x=y=z=0$。

又 $\frac{b}{z}+\frac{c}{y}=1$, $\frac{c}{x}+\frac{a}{z}=1$, $\frac{a}{y}+\frac{b}{x}=1$。

$\therefore\quad b\left(\frac{c}{x}+\frac{a}{z}\right)+c\left(\frac{a}{y}+\frac{b}{x}\right)-a\left(\frac{b}{z}+\frac{c}{y}\right)=b+c-a$。

即 $\frac{2bc}{x}=b+c-a$。 $\therefore\quad x=\frac{2bc}{b+c-a},\quad y=\frac{2ca}{c+a-b},\quad z=\frac{2ab}{a+b-c}$。

6. $x^2+2yz=12,\quad y^2+2zx=12,\quad z^2+2xy=12$。

〔解〕三方程式相加開平方。則 $x+y+z=\pm 6$。

從第一減第二式。則 $(x-y)(x+y-2z)=0$。

$\therefore\quad x-y=0,\ x+y-2z=0$。如 $x-y=0$。則從第二得 $x^2+2zx=12$

從第三得 $z^2+2x^2=12$。由減法 $x^2-2zx+z^2=0$。

$\therefore\quad x-z=0$。　　$\therefore\quad x=y=z$。

故從 $x+y+z=\pm 6$。則 $3x=\pm 6$。　$\therefore\quad x=y=z=\pm 2$。

又若 $x+y-2z=0$。則從 $x+y+z=\pm 6$。$3z=\pm 6$。 $\therefore\quad z=\pm 2$。

又從第二 $y^2+(x+y)x=12$, 及 $x+y=2z=\pm 4$。由是解此方程式。即得 x, y 而其根亦爲 ± 2。

7. $(y+z)(x+y+z)=a,\quad (z+x)(x+y+z)=b,\quad (x+y)(x+y+z)=c$。

〔解〕三方程式相加。則 $2(x+y+z)^2=a+b+c$。

$\therefore\quad x+y+z=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$。

又於第二加第三而減第一。則 $2x(x+y+z)=b+c-a$。

$\therefore\quad x=\frac{b+c-a}{2(x+y+z)}=\frac{b+c-a}{\pm\sqrt{2(a+b+c)}}$。

8. $(y+b)(z+c)=a^2,\quad (z+c)(x+a)=b^2,\quad (x+a)(y+b)=c^2$。

〔解〕第二式第三式相乘。以第一式除之。則 $(x+a)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}$

$\therefore\quad x=\pm\frac{bc}{a}-a,\qquad y=\pm\frac{ca}{b}-b,\qquad z=\pm\frac{ab}{c}-c$。

9. $x^2-(y-z)^2=a^2,\ y^2-(z-x)^2=b^2,\ z^2-(x-y)^2=c^2$,

〔解〕$(x+y-z)(x-y+z)=a^2,\ (y+z-x)(y-z+x)=b^2,$
$(z+x-y)(z-x+y)=c^2$。

第一第二相乘。以第三式除之。則 $(x+y-z)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}$。

$\therefore\quad x+y-z=\pm\frac{ab}{c},\ y+z-x=\pm\frac{bc}{a}$。

由加法 $2y=\pm\frac{ab}{c}\pm\frac{bc}{a}$。 $\therefore\quad y=\pm\frac{b(a^2+c^2)}{2ac}$。$z, x$ 以同理求之。

10. $x(y+z-x)=a,\ y(z+x-y)=b,\ z(x+y-z)=c$。

〔解〕 $y(z+x-y)+z(x+y-z)-x(y+z-x)=b+c-a$。

即 $-(y^2-2yz+z^2)+x^2=b+c-a$。 $\therefore\quad x^2-(y-z)^2=b+c-a$。

同法 $y^2-(z-x)^2=c+a-b,\ z^2-(x-y)^2=a+b-c$。

以此與9例同法解之。則

$$\frac{x}{a(-a+b+c)}=\frac{y}{b(a-b+c)}=\frac{z}{c(a+b-c)}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\}}}。$$

11. $\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=\frac{x+y}{c}=2xyz$。

〔解〕 $\frac{(z+x)+(x+y)-(y+z)}{b+c-a}=2xyz$。即 $\frac{2x}{b+c-a}=2xyz$。

$\therefore\quad x=0$，或 $yz=\frac{1}{b+c-a}$。 同法 $y=0$，或 $zx=\frac{1}{c+a-b}$。

$z=0$，或 $xy=\frac{1}{a+b-c}$。 由是 $x=y=z=0$，或

$$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}=\pm\frac{1}{\sqrt{\{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\}}}。$$

12. $\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=\frac{x+y}{c}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

〔解〕 由視察 $x=y=z=0$。

又由前例。即知 $\frac{2x}{b+c-a}=\frac{2y}{c+a-b}=\frac{2z}{a+b-c}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

$$\therefore\quad \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}=\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2。$$

由是 $\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

$$\therefore\quad \frac{2x}{b+c-a}=\frac{2y}{c+a-b}=\frac{2z}{a+b-c}=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}。$$

13. $yz=a+y+z,\ zx=b+z+x,\ xy=c+x+y$。

〔解〕 $(y-1)(z-1)=a+1,\ (z-1)(x-1)=b+1,\ (x-1)(y-1)=c+1$。

由是 $\frac{(z-1)(x-1)(x-1)(y-1)}{(y-1)(z-1)}=\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}$。

$\therefore\ x-1=\pm\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}$。

14. $yz=a(y+z)+\alpha,\ zx=a(z+x)+\beta,\ xy=a(x+y)+\gamma$。

〔解〕$(y-a)(z-a)=\alpha+a^2,\ (z-a)(x-a)=\beta+a^2,\ (x-a)(y-a)=\gamma+a^2,$

第二第三相乘。以第一除之。則

$(x-a)^2=\frac{(\beta+a^2)(\gamma+a^2)}{\alpha+a^2},\quad \therefore\ x=a\pm\sqrt{\frac{(\beta+a^2)(\gamma+a^2)}{\alpha+a^2}}$。

15. $yz-f^2=cy+bz,\ zx-g^2=az+cx,\ xy-h^2=bx+ay$。

〔解〕$(y-b)(z-c)=f^2+bc,\ (z-c)(x-a)=g^2+ca,\ (x-a)(y-b)=h^2+ab$

$\therefore\ (x-a)^2=\frac{(g^2+ca)(h^2+ab)}{f^2+bc}$。$\therefore\ x=a\pm\sqrt{\frac{(g^2+ca)(h^2+ab)}{f^2+bc}}$。

16. $x+y^{-1}=\frac{3}{2},\ y+z^{-1}=\frac{7}{3},\ z+x^{-1}=4$。

〔解〕從第二式 $\frac{1}{z}=\frac{7}{3}-y$, 從第三式 $z=4-\frac{1}{x}$。

$\therefore\ \left(\frac{7}{3}-y\right)\left(4-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{z}\times z$。即 $25x-7-3y(4x-1)=0$。

$\therefore$ 第一式 $\frac{1}{y}=\frac{3}{2}-x$。即 $y=\frac{2}{3-2x}$。

或 $25x-7-\frac{6}{3-2x}(4x-1)=0$。即 $10x^2-13x+3=0$。

$\therefore\ x=1$, 或 $x=\frac{3}{10}$。由是 $x=1,\ y=2,\ z=3$。

或 $x=\frac{3}{10},\quad y=\frac{5}{6},\quad z=\frac{2}{3}$。

17. $x+y+z=6,\quad x^2+y^2+z^2=14,\quad xyz=6$。

〔解〕$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=6^2-14$。$\quad\therefore\ xy+yz+zx=11$

λ 之三根爲 x, y, z。則 $(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

即 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$。即 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$。

$\therefore\ \lambda=1, 2, 3$。由是 x, y, z 之值。爲 $1, 2, 3$。

即 $x=1,\ y=2,\ z=3,$ 或 $x=1,\ y=3,\ x=2$。

或 $x=2,\ y=1,\ z=3,$ 或 $x=2,\ y=3,\ z=1$。

或 $x=3,\ y=1,\ z=2,$ 或 $x=3,\ y=2,\ z=1$。

18. $x+y+z=15,\ x^3+y^3+z^3=495,\ xyz=105$。

〔解〕$x^3+y^3+z^3-3xyz=495-3\times105$。

即 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=180$。

即 $(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}=180$。

即 $15\{15^2-3(xy+yz+zx)\}=180$。 $\therefore\ xy+yz+zx=71$。

λ 之三根。爲 x,y,z。則 $(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

即 $\lambda^3-15\lambda^2+71\lambda-105=0$。 $\therefore\ (\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)=0$。

$\lambda=3,5,7$。 $\therefore\ x,y,z$ 之值。爲 3, 5, 7。

19. $x+y+z=9,\ x^2+y^2+z^2=41,\ x^3+y^3+z^3=189$。

〔解〕$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=9^2-41$。 $\therefore\ xy+yz+zx=20$。

又從 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}$。

則 $189-3xyz=9\{41-20\}$。 $\therefore\ xyz=0$。 $(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

即 $\lambda^3-9\lambda^2+20\lambda=0$。 $\therefore\ \lambda=0,4,5$。即 x,y,z 之值。爲 0, 4, 5。

20. $x+y+z=10,\ yz+zx+xy=33,\ (y+z)(z+x)(x+y)=294$。

〔解〕以第一代入第三式。則 $(10-x)(10-y)(10-z)=294$。

即 $1000-100(x+y+z)+10(xy+yz+zx)-xyz=294$。

即 $1000-100(10)+10(33)-xyz=294$。 $\therefore\ xyz=36$。

$$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0。$$

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

即 $\lambda^3-10\lambda^2+33\lambda-36=0$。 $\therefore\ (\lambda-3)^2(\lambda-4)=0$。

故 $\lambda=3,3,4$。由是 x,y,z 之値爲 3, 3, 4。

21. $\dfrac{yz}{bz+cy}=\dfrac{zx}{cx+az}=\dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

〔解〕與 11 及 12 兩例同法如下。

$$\frac{xyz+xyz-xyz}{x(bz+cy)+y(cx+az)-z(ay+bx)}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}。$$

即 $\frac{xyz}{2cxy}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。即 $\frac{z}{2c}=\frac{x}{2a}=\frac{y}{2b}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

以下與12例同法。 [答 0, 0, 0, 或 $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$]。

22. $\frac{a}{x}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{b}{y}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$。

〔解〕 $abc+cxy+bzx=bcx$, $cxy+abc+ayz=acy$, $bzx+ayz+abc=abx$。

從第一式減第二式而括之。則 $z(bx-ay)=c(bx-ay)$。

由是 $z=c$, 或 $bx=ay$。

〔I〕 $z=c$。則從第二 $cxy+abc+acy=cay$。即 $xy=-ab$。

又從第三 $bcx+acy+abc=abc$。即 $bx=-ay$。

從 $xy=-ab$, 及 $bx=-ay$, 得 $x=\pm a$, $y=\mp b$。

由是 $x=a$, $y=-b$, $z=c$, 或 $x=-a$, $y=b$, $z=c$。

〔II〕 $bx=ay$。即 $y=\frac{b}{a}x$。

則從第二 $cx\times\frac{b}{a}x+abc+a\times\frac{b}{a}xz=ca\times\frac{b}{a}x$。即 $z=\frac{c(ax-a^2-x^2)}{ax}$。

又從第三 $bzx+a\times\frac{b}{a}xz+abc=abz$。即 $z=\frac{ac}{a-2x}$。

由是 $\frac{c(ax-a^2-x^2)}{ax}=\frac{ac}{a-2x}$。即 $(a-2x)(ax-a^2-x^2)=a^2x$。

$\therefore$ $2x^3-3ax^2+2a^2x-a^3=0$。即 $(x-a)(2x^2-ax+a^2)=0$。

由是 $x=a$, 或 $2x^2-ax+a^2=0$。即 $x=\frac{1}{4}a(1\pm\sqrt{-7})$。

$x=a$。則 $z=\frac{ac}{a-2x}=\frac{ac}{a-2a}=-c$, $y=\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\times a=b$。

又 $x=\frac{1}{4}a(1\pm\sqrt{-7})$, $y=\frac{b}{a}x=\frac{1}{4}b(1\pm\sqrt{-7})$。

$z=\frac{ac}{a-2x}=\frac{ac}{a-\frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-7})}=\frac{2c}{1\mp\sqrt{-7}}=\frac{2c(1\pm\sqrt{-7})}{1-(-7)}=\frac{1}{4}c(1\pm\sqrt{-7})$。

$\therefore$ 原方程之根。爲 $x=a$, $y=-b$, $z=c$。

或 $x=-a$, $y=b$, $z=c$, 或 $x=a$, $y=b$, $z=-c$。

或 $x=\frac{1}{4}a(1\pm\sqrt{-7})$。$y=\frac{1}{4}b(1\pm\sqrt{-7})$, $z=\frac{1}{4}c(1\pm\sqrt{-7})$。

23. $ax=\frac{z}{y}+\frac{y}{z}$, $by=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$, $cz=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$。

〔解〕$axyz=y^2+z^2$, $bxyz=z^2+x^2$, $cxyz=x^2+y^2$。

$\therefore\quad (b+c-a)xyz=(z^2+x^2)+(x^2+y^2)-(y^2+z^2)=2x^2$。

由是 $x=0$, 或 $\frac{yz}{x}=\frac{2}{b+c-a}$。

同法 $y=0$。或 $\frac{zx}{y}=\frac{2}{c+a-b}$。

$\therefore\quad \frac{yz}{x}\times\frac{zx}{y}=\frac{2}{b+c-a}\times\frac{2}{c+a-b}$。卽 $z=\pm\frac{2}{\sqrt{\{(b+c-a)(c+a-b)\}}}$。

由是所求之根。爲 $x=0$, $y=0$, $z=0$。

或 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{\{(c+a-b)(a+b-c)\}}}$。$y=\pm\frac{2}{\sqrt{\{(a+b-c)(b+c-a)\}}}$。

24. $y^2+z^2-x(y+z)=a^2$, $z^2+x^2-y(z+x)=b^2$, $x^2+y^2-z(x+y)=c^2$。

〔解〕從第二第三之和減第一。則 $2x^2-2yz=b^2+c^2-a^2$。

$\therefore\quad x^2-yz=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$。

同法 $y^2-zx=\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)$, $z^2-xy=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$。

由 151 章第五例。得 x, y, z。

所求之根。爲 $x=\pm\frac{b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2}{\sqrt{(2a^6+2b^6+2c^6-6a^2b^2c^2)}}$。

25. $x^2+yz-a^2=y^2+zx-b^2=z^2+xy-c^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$。

〔解〕從 $x^2+yz-a^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$。$x^2-(y-z)^2=2a^2$。

同法 $y^2-(z-x)^2=2b^2$, $z^2-(x-y)^2=2c^2$。

由是與 9 例同法。卽得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$。

26. $x(x+y+z)-(y^2+z^2+yz)=a$,

$y(x+y+z)-(z^2+x^2+zx)=b$,

$z(x+y+z)-(x^2+y^2+xy)=c$,

〔解〕第一加第二。則 $2xy-2z^2=a+b$。 $\therefore\quad z^2-xy=-\frac{1}{2}(a+b)$

同法 $x^2-yz=-\frac{1}{2}(b+c)$。 $y^2-zx=-\frac{1}{2}(c+a)$。

由是與151章第五例同法。得

$$x=\pm\frac{(b+c)^2-(c+a)(a+b)}{2\sqrt{(3abc-a^3-b^3-c^3)}}。$$

27. $x+y+z=a+b+c,\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2,$

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

〔解〕 $x=a+\lambda,\ y=b+\mu,\ z=c+\nu$。則

從第一 $\lambda+\mu+\nu=0$。

從第二 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2+2a\lambda+2b\mu+2c\nu=0$。

從第三 $(b-c)\lambda+(c-a)\mu+(a-b)\nu=0$。

從第一及第三 $\frac{\lambda}{(a-b)-(c-a)}=\frac{\mu}{(b-c)-(a-b)}=\frac{\nu}{(c-a)-(b-c)}=K$。

$K^2=\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2}$ 從第二

$K^2=\frac{-(a\lambda+b\mu+c\nu)}{3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$ ……………………(A)

又 $K=\frac{a\lambda+b\mu+c\nu}{a(2a-b-c)+b(2b-c-a)+c(2c-a-b)}$。

卽 $K=\frac{a\lambda+b\mu+c\nu}{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$ ……………………(B)

以(B)除(A)。則 $K=-\frac{2}{3}$ $\therefore\ \frac{\lambda}{2a-b-c}=-\frac{2}{3}$。

卽 $\lambda=-\frac{2}{3}(2a-b-c)$。卽 $x+a=-\frac{2}{3}(2a-b-c)$。

$\therefore\ x=\frac{1}{3}(2b+2c-a)$ 又由視察得 $x=a,\ y=b,\ z=c$。

28. $(x+y)(x+z)=ax,\ (y+z)(y+x)=by,\ (z+x)(z+y)=cz$。

〔解〕 第一第二相乘。以第三除之。則 $(x+y)^2=\frac{abxy}{cz}$。

$\therefore\ x+y=\pm\frac{1}{cz}\sqrt{abcxyz}$。卽 $z(x+y)=\pm\frac{1}{c}\sqrt{abcxyz}$。

同法 $x(y+z)=\pm\frac{1}{a}\sqrt{abcxyz},\ y(z+x)=\pm\frac{1}{b}\sqrt{abcxyz}$。

由是 $x(y+z)+y(z+x)-z(x+y)=\pm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\sqrt{abcxyz}$。

即 $2xy=\pm\frac{bc+ca-ab}{abc}\sqrt{abcxyz}$。

即 $4x^2y^2=\frac{(bc+ca-ab)^2}{abc}xyz$。

$\therefore$ $xy=0$。或 $\frac{xy}{z}=\frac{(bc+ca-ab)^2}{4abc}$。

同法 $yz=0$ 或 $\frac{yz}{x}=\frac{(ca+ab-bc)^2}{4abc}$, $zx=0$ 或 $\frac{zx}{y}=\frac{(ab+bc-ca)^2}{4abc}$。

由是 $x=y=z=0$。或 $x=\pm\frac{1}{4abc}(bc-ca+ab)(bc+ca-ab)$。

29. $x^2-yz=ax$, $y^2-zx=by$, $z^2-xy=cz$。

〔解〕 $y(ax)+z(by)+x(cz)=y(x^2-yz)+z(y^2-zx)+x(z^2-xy)$。

即 $axy+byz+czx=0$……………………………………(A)

又 $z(ax)+x(by)+y(cz)=z(x^2-yz)+x(y^2-zx)+y(z^2-xy)$。

即 $bxy+cyz+azx=0$……………………………………(B)

從 (A), (B) 用十文字之法 $\frac{xy}{c^2-ab}=\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{zx}{b^2-ca}$。

$\therefore$ $\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{xy}{c^2-ab}\times\frac{zx}{b^2-ca}\div\frac{yz}{a^2-bc}$。

即 $\frac{yz}{(a^2-bc)^2}=\frac{x^2}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\frac{-(x^2-yz)}{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}$。

$\therefore$ 從第一 $\frac{x^2}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\frac{-ax}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}$。

由是 $x=0$, 或 $x=-\frac{(b^2-ca)(c^2-ab)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$ 如 $x=0$, 則從第三 $z^2=cz$。

$\therefore$ $z=0$, 或 c, 又推得各根如下。

$x=a$, $y=0$, $z=0$, 或 $x=0$, $y=b$, $z=0$, 或 $x=0$, $y=0$, $z=c$。

30. $x^2+a(2x+y+z)=y^2+b(2y+z+x)=z^2+c(2z+x+y)=(x+y+z)^2$。

〔解〕 $a(2x+y+z)=(x+y+z)^2-x^2=(2x+y+z)(y+z)$。

$\therefore$ $2x+y+z=0$……………(1) 或 $y+z=a$……………(2)

同法 $2y+z+x=0$……………(3) 或 $z+x=b$……………(4)

及 $2z+x+y=0$……………(5) 或 $x+y=c$……………(6)

從 (1), (3), (5) $x=y=z=0$。

從 (2), (4), (6) $x=\frac{1}{2}(b+c-a)$，$y=\frac{1}{2}(c+a-b)$，$z=\frac{1}{2}(a+b-c)$。

從 (1), (3), (6) $x=\frac{1}{2}c$, $y=\frac{1}{2}c$, $z=-\frac{3}{2}c$。

從 (1), (4), (5) $x=\frac{1}{2}b$, $y=-\frac{3}{2}b$, $z=\frac{1}{2}b$。

從 (2), (3), (5) $x=-\frac{3}{2}a$, $y=\frac{1}{2}a$, $z=\frac{1}{2}a$。

31. $y^2+yz+z^2=a^2$, $z^2+zx+x^2=b^2$, $x^2+xy+y^2=c^2$。

〔解〕三方程式相加而括之。則

$$2(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=a^2+b^2+c^2。$$

即 $(x+y+z)^2-3(yz+zx+xy)=a^2+b^2+c^2-(x+y+z)^2$ ....(A)

又從第一減第二而括之。則 $(y-x)(y+x+z)=a^2-b^2$。

即 $\frac{a^2-b^2}{x-y}$(同法)$=\frac{b^2-c^2}{y-z}=\frac{c^2-a^2}{z-x}=-(x+y+z)$ ....B)

$$\therefore\ \frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$$

$=(x+y+z)^2$。即 $\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)}=(x+y+z)^2$。

$\therefore$ 從 (A) $\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{a^2+b^2+c^2-(x+y+z)^2}=(x+y+z)^2$。

即 $(x+y+z)^4-(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2+a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=$

$\therefore (x+y+z)^2=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{3(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)}\}$。

由是得 $x+y+z$ 之値。設 $x+y+z=K$。

又從(B) $\frac{a^2-b^2}{x-y}=\frac{b^2-c^2}{y-z}=-K$。 $\therefore\ x-y=\frac{b^2-a^2}{K}$, $y-z=\frac{c^2-b^2}{K}$。

$\therefore\ (x+y+z)+(y-z)=K+\frac{c^2-b^2}{K}$。即 $x+2y=K+\frac{c^2-b^2}{K}$。

又 $2(x-y)+(x+2y)=\frac{2(b^2-a^2)}{K}+\left(K+\frac{c^2-b^2}{K}\right)$。

$\therefore\ x=\frac{1}{3K}(K^2+b^2+c^2-2a^2)$。

32. $a^2x+b^2y+c^2z=0,\ \dfrac{(b-c)^2}{ax}+\dfrac{(c-a)^2}{by}+\dfrac{(a-b)^2}{cz}=0$。

$\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$。

〔解〕從第一 $cz=-\dfrac{a^2x+b^2y}{c}$。從第二。則

$cz\{b(b-c)^2y+a(c-a)^2x\}+abxy(a-b)^2=0$。

即 $\dfrac{a^2x+b^2y}{c}\{b(b-c)^2y+a(c-a)^2x\}-abxy(a-b)^2=0$。

$\therefore\ a^3(c-a)^2x^2-ab\{c(a-b)^2-a(b-c)^2-b(c-a)^2\}xy+b^3(b-c)^2y^2=0$。

即 $a^3(c-a)^2x^2-ab(a+b)(c-a)(b-c)xy+b^3(b-c)^2y^2=0$。

即 $\{a^2(c-a)x-b^2(b-c)y\}\{a(c-a)x-b(b-c)y\}=0$。

由是 $\dfrac{b-c}{a^2x}=\dfrac{c-a}{b^2y}$，或 $\dfrac{b-c}{ax}=\dfrac{c-a}{by}$。

$\dfrac{b-c}{a^2x}=\dfrac{c-a}{b^2y}=\dfrac{a-b}{c^2z}=K$。則 $\dfrac{(b-c)(c-a)}{a^2b^2xy}=K^2$。

即 $\dfrac{1}{xy}=\dfrac{a^2b^2K^2}{(b-c)(c-a)}$。同法 $\dfrac{1}{yz}=\dfrac{b^2c^2K^2}{(c-a)(a-b)}$，$\dfrac{1}{zx}=\dfrac{c^2a^2K^2}{(a-b)(b-c)}$。

$\therefore$ 從第三 $K^2\left\{\dfrac{c^2a^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{a^2b^2}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b^2c^2}{(c-a)(a-b)}\right\}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$。

$\therefore\ K=\sqrt{-\dfrac{1}{abc}}$，即 $\dfrac{b-c}{a^2x}=\sqrt{\dfrac{1}{-abc}}$。$\therefore\ x=\dfrac{b-c}{a^2}\sqrt{(-abc)}$。

又 $\dfrac{b-c}{ax}=\dfrac{c-a}{by}=\dfrac{a-b}{cz}$。同法 $x=\dfrac{b-c}{a}\sqrt{\left(-\dfrac{abc}{bc+ca+ab}\right)}$。

第拾壹編

問題

152. 問題〔Problems〕本編爲研究方程式之應用問題。此等應用問題。有已知數量與未知數量二種。由此二種之關係。以求其未知數量。

解問題之方法。以代數記號表明已知數量與未知數量之關係。而作成方程式。然後將此方程式解之。以求未知數量。

解此方程式時。其結果須適合於所求之數量。其有不能適合者。因被問題意義所限制。而此限制在方程式不能顯著之例，如問題所求爲人數。則得分數之答。爲不合理也。

由是。解問題之次序有三。第一將已知數量與未知數量。以代數之記號作方程式。第二。解此方程式。求未知數量。第三。其求得之未知數量。須適合於問題之意義。其不合理者。則去之而檢查其合理不合理之法。則如下之諸例。

〔第一例〕甲有銀5鎊。乙有銀10先令。問甲與乙若干。則甲所有爲乙之四倍。(一鎊爲二十先令)。

命x爲甲與乙之先令數。則甲初有銀100先令者。今祇有$100-x$先令。而乙乃有$10+x$先令。依題理得方程式。

$100-x=4(10+x)$。　$\therefore$　$x=12$。卽甲與乙爲12先令。

〔注意〕x示常數。故x當附於名數單位之種類。如本題以x爲先令是也。

〔第二例〕大工一人。小工二人。合營一事。則12日可成。大工三人。小工一人。則6日可成。問大工一人獨營之。須幾何日。

命$x=$大工一人成事之日數。$y=$小工一人成事之日數。則大工一人1日爲全事之$\dfrac{1}{x}$。小工一人1日爲全事之$\dfrac{1}{y}$又大工一小

工二人日合營之事爲$\frac{1}{12}$。故$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{12}$。又大工三小工一1日合營之事爲$\frac{1}{6}$。故$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$。

由此兩通同方程。求得$x=20$。卽大工一人獨營爲20日。

〔第三例〕某家有童子若干人。若11倍之。比其原數平方之2倍多12。問童子之總數若干。

命x爲童子之數，則$11x=2x^2+12$。卽$(2x-3)(x-4)=0$。

由是$x=4$，或$x=\frac{3}{2}$。

但童子之數爲分數$\frac{3}{2}$則不合理。故4人爲所求之數。

〔第四例〕有桿長若干尺。若11倍之。比其長數平方之2倍多12尺。求桿長幾何。

命x爲桿之尺數。如前例得$x=4$或$\frac{3}{2}$。而桿之長爲分數亦能合理。故在本題。4尺或$\frac{3}{2}$尺均可爲所求之數。

〔第五例〕有二位之數。等於其數字之積之三倍。但知十位數比單位數少2。試求此數。

命x爲十位數字。則單位數字爲$x+2$。故原數爲$10x+(x+2)$。依題理得方程式。爲$10x+(x+2)=3x(x+2)$。 $\therefore\ x=2$或$-\frac{1}{3}$。

然數字必限於正整數。故$-\frac{1}{3}$爲不合理。由是十位數字爲2。單位數字爲$2+2=4$。 $\therefore$ 原數$=24$。

〔第六例〕二位之數。等於其數字之和之3倍。問此數爲若干。

命x爲十位數字。y爲單位數字。則依題理$10x+y=3(x+y)$。

卽 $7x=2y$。因x及y爲10以下之正整數。故$x=2$。則$y=7$。卽所求之數爲27。

〔第七例〕某數與其平方根之和爲90。求某數爲若干。

命 x 爲所求之數。則 $x+\sqrt{x}=90$。

$\therefore\ (x-90)^2=x$。卽 $x^2-181x+8100=0$。

$\therefore\ x=81$, 或 $x=100$, 在本題之平方根有正負之兩值。故 $x=81$。則 $81+\sqrt{81}=81+9=90$。$x=100$。則 $100+\sqrt{100}=100-10=90$。

〔第八例〕父子之年齡之和爲100歲。父子年數之積之 $\frac{1}{10}$。比父之年數多180。問各幾何歲。

命 x 爲父之年數。則 $100-x$ 爲子之年數。

$\therefore\ \frac{1}{10}x(100-x)=x+180$。卽 $x^2-90x+1800=0$。

卽 $(x-60)(x-30)=0$。 $\therefore\ x=60$, 或 30。

父之歲爲60。則子爲 $100-60=40$。卽40歲。若父之歲爲30。則子爲70歲。卽不合理。

〔第九例〕某人買豚,鵝,及鴨三種。鵝價若減一先令。而以原價爲鵝數。則買鵝之總價。與1豚之價等。但知1鵝之價。等於2鴨之價。而14鴨之價。比1豚之價多7〔先令〕。問各1頭之價若干。

命 $x=1$ 豚之價。 $y=1$ 鵝之價。 $x=1$ 鴨之價。

1豚之價。既等於以鵝價少1之數。買鵝之總價。

則 $x=y(y-1)$ ......(1)

又因1鵝等於2鴨。故 $y=2z$ ......(2)

又14鴨比1豚多7。故 $14z=x+7$ ......(3)

從(1)式。及(2)式。 $x=2z(2z-1)$。 $\therefore$ 從(3)式 $14z=2z(2z-1)+7$。

卽 $4z^2-16z+7=0$。 $\therefore\ z=\frac{7}{2}$, 或 $z=\frac{1}{2}$。

$z=\frac{7}{2}$。則 $y=2\times\frac{7}{2}=7$。$x=7(7-1)=42$。

又 $z=\frac{1}{2}$。則 $y=2\times\frac{1}{2}=1$。$x=1(1-1)=0$。

故1豚之價爲42先令。1鵝之價爲7先令。1鴨之價爲 $3\frac{1}{2}$ 先令。若1鴨之價爲 $\frac{1}{2}$ 先令。1鵝之價爲1先令。則豚爲無價。便不合理。

例題十五

1. 分50爲二分。第一分之二倍。等於第二分之三倍。問各若干。

〔解〕x爲第一分。則$50-x$爲第二分。

$\therefore\ 2x=3(50-x)$。　$\therefore\ x=30$。第二分$=50-30=20$。

2. A較B少5鎊。C等於A及B之和。而A, B, C之和爲50鎊。問各若干。　〔答A 10鎊，B 15鎊，C 25鎊〕。

〔解〕A之所持爲x鎊。則$B=x+5$鎊。$C=x+(x+5)$。即$2x+5$鎊。

由是$x+(x+5)+(2x+5)=50$。　$\therefore\ x=10$。

3. 甲70歲。乙45歲。試求甲歲當乙歲2倍之年。〔答20年前〕。

〔解〕所求之年爲自x年以前。則$70-x=2(45-x)$。　$\therefore\ x=20$。即20年以前。

又若所求之年爲x年以後。則$70+x=2(45+x)$。　$\therefore\ x=-20$。

即 -20年以後。故取負之反對。即正20年以前。

4. 雞卵之價。每個貴$\frac{1}{4}$。則付金1鎊。差少40個。問買雞卵20個之原價若干。(1鎊爲20先令)。

〔解〕20個之原價爲x鎊。則1個之原價爲$\frac{1}{20}x$鎊。

由是$\dfrac{1}{\frac{1}{20}x}=\dfrac{1}{\frac{1}{20}x(1+\cdot25)}+40$。　$\therefore\ x=\frac{1}{10}$。即$\frac{1}{10}\times20$先令。即2先令。

5. 貨幣50個之價。合計爲14磅。其間半磅貨之數3倍於磅貨。其餘爲先令貨。問各貨之個數。　〔答5, 15, 30〕。

〔解〕磅貨之數$=x$。則半磅貨之數$=3x$。而先令貨之數$=50-4x$。

由是$x+\frac{1}{2}(3x)+\frac{1}{20}(50-(4x)=14$。　$\therefore\ x=5$。

6. 有一工程A 20日可成。B 12日可成。若先使A動工後以B代之。則合計14日完工。求A之作工日數。

〔解〕甲作工日數$=x$。則甲每日所作爲全事之$\frac{1}{20}$。乙每日所作爲全事之$\frac{1}{12}$。故$\frac{x}{20}+\frac{14-x}{12}=1$。　$\therefore\ x=5$。卽5日。

7. 某人買每2個値1(辨士)之雞卵若干個。又買每12個値5(辨士)之雞卵四倍之。又買每20個値8(辨士)之雞卵五倍之。後賣去每100個價3先令8辨士。獲利3先令6辨士。求所買雞卵之數(1先令爲12辨士)。　〔答1800〕。

〔解〕最初所買之雞卵爲x個。則次所買爲$4x$及$5x$個。

由是$\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}(4x)+\frac{8}{20}(5x)=\frac{44}{100}(x+4x+5x)-42$。　$\therefore\ x=180$。

$\therefore$ 所求之雞卵數$=x+4x+5x=10x=10\times180=1800$。

8. 某甲應付某乙金63鎊5先令。今以磅貨及半(古倫)貨給之。合計100個。問磅貨之數若干。但半古倫爲2先令6辨士。卽$2\frac{1}{2}$先令。

〔解〕磅貨之數爲x。則半古倫貨之數$=100-x$。

由是$20x+\frac{5}{2}(100-x)=63\times20+5$。　$\therefore\ x=58$。

9. 有人從A地步至B地一小時行4哩。行至一時間後。有四輪車發自A地追及之。此人遂乘此車。又歷2時間。卽至B地。求A, B之距離若干。但四輪車每時之速率爲12哩。

〔解〕A, B之距離爲x。乘四輪車所行之路$=12$哩$\times2=24$哩。依題理步行$x-24$哩。比車發時早1時間。

由是$\frac{x-24}{4}=\frac{x-24}{12}+1$。　$\therefore\ x=30$。卽30哩。

10. 旅客二人持共重600磅之行李。除火車許帶之重額外。應付運費3先令4辨士。及11先令8辨士。若以一人獨帶此行李計算。則應付運費1鎊。求一人許帶之重額若干。　〔答120磅〕。

〔解〕許帶重額爲x磅。則$\frac{3\frac{4}{12}+11\frac{8}{12}}{600-2x}=\frac{20}{600-x}$。

11. 設如作成一事。A, B 共作之須 4 日。A, C 共作之須 6 日。B, C 共作之須 12 日。求 A, B, C 共作之日數。

〔解〕各人獨成此事之日數爲 $A=x,\ B=y,\ C=z$。則

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}。$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{4}。$$由是所求之日爲4日。

〔注意〕本題 A, B 共作。與 A, B, C 共作。均爲4日。可知 C 實未嘗作工也。

12. 父之年齡等於三子之和。然9年之後。則等於長子,仲子之和。又經3年。則等於長子,末子之和。又經3年。則等於仲子,末子之和。求各年齡幾何。〔答 36, 15, 12, 9〕。

〔解〕長子之歲 $=x$。仲子 $=y$。末子 $=z$。則父 $=x+y+z$。

由是 $x+y+z+9=(x+9)+(y+9)$。

$x+y+z+9+3=(x+9+3)+(z+9+3)$。

$x+y+z+9+3+3=(y+9+3+3)+(z+9+3+3)$。

從此三方程式。可得 x, y, z。

13. A, B 二人。從兩地同時相向而行。A 每時之速率比 B 多2哩。經3時而相會。若 B 每時之速率減1哩。而 A 爲前速之 $\frac{2}{3}$。則經4時相會。求兩地之距離若干。

〔解〕A 每時之速 $=x$ 哩。則 B 每時之速 $=x-2$ 哩。

由是 $3x+3(x-2)=4\times\frac{2}{3}x+4(x-2-1)$。 $\therefore\quad x=9$。

故所求之距離 $=3\times9+3(9-2)=48$。

14 一旅人擬至某地。預定在道之時限。若每時之速率增半哩。則至定限之 $\frac{4}{5}$。已達某地。又若每時減速半哩。則比定限後 $2\frac{1}{2}$ 時。始達某地。求其距離若干。〔答 15 哩〕。

〔解〕所求之距離 $=x$ 哩。每時之速 $=y$ 哩。則

$$\frac{x}{y+\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}\times\frac{x}{y}。\qquad \therefore\quad y=2。$$

又 $\dfrac{x}{y-\frac{1}{2}}=\dfrac{x}{y}+2\dfrac{1}{2}$。即 $\dfrac{x}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{x}{2}+2\dfrac{1}{2}$。 $\therefore\ x=15$。

15. 分 243 爲三分。第一分之$\dfrac{1}{2}$與第二分之$\dfrac{1}{3}$，與第三分之$\dfrac{1}{4}$。各相等。試求各數。

〔解〕依題理。第一分爲 $2x$。第二分爲 $3x$。第三分爲 $4x$。則 $2x+3x+4x=243$。由是得 $x=27$。

16. 有磅貨及先令貨若干個。若易磅貨爲先令。及先令貨爲辨士。則爲原價$\dfrac{1}{18}$。若磅貨爲五磅。及先令貨爲鎊。則其增價與原價之比。爲 15 比 2。試證之。

〔證〕磅貨之數 $=P$。先令貨之數 $=S$。則其原價爲 $P+\dfrac{1}{20}S$ 鎊。若鎊爲先令。先令爲辨士。則其價爲 $\dfrac{1}{20}P+\dfrac{1}{20\times 12}S$ 鎊。故

$$\frac{1}{20}P+\frac{1}{20\times 12}S=\frac{1}{18}\left(P+\frac{1}{20}S\right)$$ 化爲最簡式。$S=4P$。

由是原價 $=P+\dfrac{1}{20}S$。即 $P+\dfrac{1}{20}\times 4P$。即 $\dfrac{6}{5}P$ 鎊。又磅貨爲五磅。先令貨爲磅。則其價 $=5P+S$。即 $9P$ 磅。由是與原價之比爲 $9P:\dfrac{6}{5}P=15:2$。

17. 有金 1000 鎊。分給 A, B, C, D。祇知 B 所得者。等於 A 之半。C 較 D 多 A 之$\dfrac{1}{3}$。若 B 多得 100 鎊。則等於 C 與 D 之和。問各得幾許。

〔答 A 450 鎊, B 225 鎊, C 237 鎊 10 先令, D 87 鎊 10 先令〕

〔解〕A 之所得 $=x$ 鎊。則 B 之所得 $=\dfrac{1}{2}x$ 鎊。

又 C 之所得 $=y$ 鎊。則 D 之所得 $=y-\dfrac{1}{3}x$ 鎊。

由是 $\dfrac{1}{2}x+100=y+\left(y-\dfrac{1}{3}x\right)$。

及 $x+\dfrac{1}{2}x+y+\left(y-\dfrac{1}{3}x\right)=1000$。

18. 有兩數。第一數等於第二數之$\frac{3}{5}$。而其各平方之差爲16。問各若干。〔答 ±3 ±5〕。

〔解〕第二數$=x$。則第一數$=\frac{3}{5}x$。

故 $x^2-\left(\frac{3}{5}x\right)^2=16$。 $\therefore$ $x=\pm5$。

19. 有二位之兩數。其數字同而次序異。其和等於兩數字和之平方。其差等於小數字平方之5倍。問兩數各若干。〔答38, 83〕。

〔解〕小數字爲x。大數字爲y。則兩數爲$10x+y$, 及$10y+x$。

故 $(10x+y)+(10y+x)=(x+y)^2$。

即 $11(x+y)=(x+y)^2$。 $\therefore$ $x+y=11$。

又 $(10y+x)-(10x+y)=5x^2$。 即 $9(y-x)=5x^2$。

從 $x+y=11$。 $9(y-x)=5x^2$。得 $x=3, y=8$。

20. 某人行若干路。其三分之一。每時行10哩。又三分之一。每時行9哩。其餘每時行8哩。若其半每時行10哩。又其半每時行8哩。則其時間比前遲半分時。求路程若干。〔答18哩〕。

〔解〕全距離$=6x$哩。則依題理。

$\frac{2x}{10}+\frac{2x}{9}+\frac{2x}{8}=\frac{3x}{10}+\frac{3x}{8}-\frac{\frac{1}{2}}{60}$。 即 $\frac{x}{10}+\frac{x}{8}-\frac{2x}{9}=\frac{1}{120}$。

由是 $x=3$。 $\therefore$ $6x=18$。

21. 有兩脚踏車。一自甲地至乙。一自乙地至甲。各於正午發車。及轉回時。於午後三時。再會於離甲9哩之處。甲乙之距離爲27哩。求其初會之處。及其時刻。〔答離甲15哩, 一時〕。

〔解〕第一車於再會時。共行$27+(27-9)$哩。即45哩。又第二車共行$27+9$哩。即36哩。

$\therefore$ 第一車每時之速$=45$哩$\div3=15$哩。

第二車每時之速$=36$哩$\div3=12$哩。

又初會之時刻爲午後x時。則

$$15x+12x=27。$$

$\therefore$ $x=1$。即午後1時。

22. 有金1015鎊。分給A, B, C。但知B比A少5鎊。而C所得鎊數。等於A所得先令數。而又以B之鎊數倍之。問各得若干。

〔答 A 10鎊 B 5鎊 C 1000鎊〕。

〔解〕A之所得$=x$鎊。則$B=x-5$鎊。$C=(x-5)\times 20x$(卽1鎊爲20先令。故$20x$爲A之先令數)。

由是$x+(x-5)+(x-5)\times 20x=1015$。卽$10x^2-49x-510=0$。

卽$(x-10)(10x+51)=0$。

$\therefore\ x=10$。而$10x+51=0$之答。爲不合題理。故省去不用。

23. 某街道建等距離之電信柱若干根。今若每1哩之柱數比前減去1根。則各柱間之距離增$2\frac{14}{15}$碼。問1哩之柱數幾何。

〔解〕1哩卽1760碼之柱數爲x。則兩柱間之距離爲$\frac{1760}{x}$。

故 $\frac{1760}{x}+2\frac{14}{15}=\frac{1760}{x-1}$。故 $\frac{44}{15}=\frac{1760}{x(x-1)}$。

由 $x(x-1)=600$。 $\therefore\ x=25$,或-24。惟-24爲不合理。故從省。

24. 有兩數以其和乘大數。則得144。又以其差乘小數。則得14。問各若干。

〔解〕大數爲x。小數爲y。則$(x+y)x=144$ $(x-y)y=14$。

由除法得$\frac{(x+y)x}{(x-y)y}=\frac{144}{14}=\frac{72}{7}$。

化之爲$7x^2-65xy+72y^2=0$。 卽$(x-8y)(7x-9y)=0$。

$\therefore\ x=8y$。及$x=\frac{9}{7}y$。

從$x=8y$。用第二式。則$(8y-y)y=14$。

$\therefore\ y=\pm\sqrt{2}$。 $\therefore\ x=\pm 8\sqrt{2}$。

又從$x=\frac{9}{7}y$。用第二式。則$\left(\frac{9}{7}y-y\right)y=14$。

$\therefore\ y=\pm 7$。 $\therefore\ x=\pm 9$。

25. A及B從兩地同時相向而行。經五時相會。若A每時之速度增1哩。而B早1時起程。或B每時之速度減1哩。而A後1時起程。則其相會處。皆與前同點。求兩地之距離數。 〔答50哩〕。

〔解〕A每時之速度$=x$哩。B每時之速度$=y$哩。則所求之距離$=5x+5y$。而A行至會點之距離$=5x$。B行至會點之距離$=5y$。

A若每時增1哩。則行$5x$之時間為$5x\div(x+1)$。因B早1時起程。而仍行5時。故此A行之時間為$5-1$。即4時間。

由是 $\dfrac{5x}{x+1}=4$。　$\therefore\ x=4$。

又B若每時減1哩。則行$5y$之時間與前同法。為

$\dfrac{5y}{y-1}=5+1$。　$\therefore\ y=6$。

由是所求之距離$=5\times4+5\times6=50$。

26. 有兵卒若干人。作為充實方陣。今若改為中空方陣。則外一邊之人數增16人。而共列四層。問人數若干。　〔答576人〕。

〔解〕一邊之人數為x。則中空方陣之外一邊人數$=x+16$。中空之一邊$=x+16-4\times2=x+8$。

由是$x^2=(x+16)^2-(x+8)^2$。　$\therefore\ x=24$。　$\therefore\ x^2=576$。

27. 有二位之數。等於數字之和之7倍。則其轉位數。必等於數字之和之4倍。試證之。

〔證〕十位數字$=x$。單位數字$=y$。則

原數$=10x+y$。轉位數$=10y+x$。

依題理$10x+y=7(x+y)$。　$\therefore\ x=2y$。

由是$10y+x=4y+3(2y)+x=4y+3x+x=4(x+y)$。

28. A從甲地至乙地。計程7里。B後A 20分起行。B追及A復歸甲地。同時A亦達於乙地。B每時之速度4里。求A之速度。

〔解〕A每時之速度$=x$里。B追及A之路$=y$里。

從 $\dfrac{y}{4}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{20}{60}$。及 $\dfrac{2y}{4}=\dfrac{7}{x}-\dfrac{20}{60}$ 兩方程式消去y。

則得$x^2+25x-84=0$。即$(x-3)(x+28)=0$。　$\therefore\ x=3$。

29. A, B各乘脚踏車同時起程但A從L地向C地。B從C地向L地。途中相會後。A經4時達於C地。B經1時達於L地。求B所行之時。　〔答3時〕。

〔解〕A之時速$=x$。B之時速$=y$。則A行至會處之距離。為B行1時間之距離。卽等於$y\times1=y$。

又B行至會處之距離。為A行4時間之距離。卽$4x$。

故 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$。 $\therefore\ y=2x$。

而兩地之距離。為$y+4x$。卽$2x+4x=6x$。

由是所求B之時間為$\frac{6x}{y}=\frac{6x}{2x}=3$。

30. 有三位之數。其數字之和為10。中數字等於首末兩數字之和。若此數加99。則為轉位數。問原數若干。 〔答 253〕。

〔解〕依題理中數為$10\div2=5$。卽他兩數字之和為5。令百位數字為x。則單位數字為$5-x$。

由是$100x+50+(5-x)+99=100(5-x)+50+x$。 $\therefore\ x=2$。

31. 兩器各盛水與酒之混合物。第一器中酒與水之比為1:3。第二器中為3:5。若從兩器取出若干量作成酒5呏。及水9呏之混合物。問應各取若干。 〔答 2呏, 12呏〕。

〔解〕第一器取出之量為x呏。則第二器取出之量為$5+9-x$。卽$14-x$呏。而第一器取出之酒為$\frac{1}{1+3}x$。卽$\frac{1}{4}x$。第二器取出之酒為$\frac{3}{3+5}(14-x)$。卽$\frac{3}{8}(14-x)$。由是$\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}(14-x)=5$。 $\therefore\ x=2$。

又第二器取出之量為$14-2=12$。

〔別法〕前解所計算者為酒。若計算水。則以9呏代5呏。卽

$\frac{3}{1+3}x+\frac{5}{3+5}(14-x)=9$。 $\therefore\ x=2$。又第二為$14-2=12$。

32. 有一時計。於10時11時之間。其分針若在今後6分之位置。則與今3分時前之時針位置正相反對。問今為何時。

〔答 10時15分〕。

〔解〕今之時為10時x分。

$\therefore$ 今時分針之位置為在12時中之x分。

$\therefore$ 分針從今之位置。至10時為$50-x$分。

$\therefore$ 從今後六分之分針至10時為$50-x-6$。卽$44-x$分(1)。

因時針之速率。爲分針之$\frac{1}{12}$。故今時時針之位置。爲在10時後$\frac{1}{12}x$分。 $\therefore$ 今前3分之時針位置。爲在10時後$\frac{1}{12}x-\frac{3}{12}$分。

(1)之分針位置。與(2)之時針位置。正相反對。則兩針成一直線。卽其距爲30分。故$(44-x)+\left(\frac{1}{12}x-\frac{3}{12}\right)=30$。

$\therefore$ $x=15$分。

33. A, B, C三人順次於午後3時4時及5時。從甲地起。行至乙地。C於午後7時追及B。更行$4\frac{1}{2}$哩。於午後$7\frac{1}{2}$時追及A。求B追及A之處及其時刻。 〔答距甲地30哩。午後9時〕。

〔解〕B追及A之時爲午後x時。

A, B, C各每時之速率。順次爲a, b, c哩。

依題理C爲行$7-5=2$時追及B。更行$4\frac{1}{2}$哩追及A。故至是共行$2c+4\frac{1}{2}$哩。又C追及A爲行$7\frac{1}{2}-5=2\frac{1}{2}$時。故其行程爲$2\frac{1}{2}c$。

由是 $2c+4\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}c$。 $\therefore$ $c=9$哩。

又C追及B行$2c$哩。B爲行$7-4=3$時。故

$$2c=3b。卽\ b=\frac{2}{3}c=\frac{2}{3}\times 9=6\ 哩。$$

又A爲C追及之時。共行$7\frac{1}{2}-3=4\frac{1}{2}$時。故

$$4\frac{1}{2}a=2\frac{1}{2}c。卽\ 4\frac{1}{2}a=2\frac{1}{2}\times 9。\quad \therefore\ a=5\ 哩。$$

又B之追及A。共行$x-4$時。A行$x-3$時。故

$$b(x-4)=a(x-3)。卽\ 6(x-4)=5(x-3)。\quad \therefore\ x=9\ 時。$$

而所求之距離。爲距甲地$6(x-4)$哩。卽$6(9-4)=30$哩。

34. 長 60 碼之汽車與長 72 碼之汽車。在平行之鐵道上。同向而行。經 12 秒始通過。今若緩車之速度增 $\frac{1}{2}$。則其通過時間須 24 秒。求兩車每時之速度各若干。 〔答 45 及 $22\frac{1}{2}$ 哩〕。

〔解〕急車每時之速爲 x 哩。緩車每時之速爲 y 哩。則得

$$\frac{12}{60\times 60}(x-y)=\frac{60+72}{1760}\text{ 及 }\frac{24}{60\times 60}\left(x-\frac{3}{2}y\right)=\frac{60+72}{1760}。$$

35. A 及 B 各出 180 鎊。分給若干貧民。B 比 A 每人多給 6 鎊。故比 A 少給 40 人。問 A 給每人之金數。 〔答 3 鎊〕。

〔解〕所求之金爲 x 鎊。則 A 所給之人數爲 $\frac{180}{x}$ 人。

由是 $\frac{180}{x}-40=\frac{180}{x+6}$。故 $x^2+6x-27=0$。

即 $(x-3)(x+9)=0$。 $\therefore\ x=3$。而 $x=-9$ 不用。

36. 有三船航過兩港間。第一比第二每時之速度疾半浬。故航過時間少 $1\frac{1}{2}$ 時。又第二比第三每時疾 $\frac{3}{4}$。故航過時間少 $2\frac{1}{2}$ 時。求兩港間之距離。 〔答 450 浬〕。

〔解〕所求之距離爲 x 浬。每時之速第一爲 y 浬。第二爲 $\left(y-\frac{1}{2}\right)$ 浬。第三爲 $y-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$。即 $\left(y-\frac{5}{4}\right)$ 浬。

依題理。$\frac{x}{y-\frac{1}{2}}=\frac{x}{y}+1\frac{1}{2}$。即 $x=3y\left(y-\frac{1}{2}\right)$。

又 $\frac{x}{y-\frac{5}{4}}=\frac{x}{y}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$。即 $x=\frac{16}{5}y\left(y-\frac{5}{4}\right)$。

由是 $3y\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{5}y\left(y-\frac{5}{4}\right)$。 $\therefore\ y=\frac{25}{2}$。

故 $x=3y\left(y-\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{25}{2}\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right)=450$ 浬。

37. A 及 B 往復於 P 及 Q 兩地。A 比 B 後 1 時從 P 起行。至離 Q 2 哩之處追及 B。更經 32 分又與 B 會。迨 A 歸 P 地時。則離 B 4 哩。問 PQ 之距離若干。 〔答 30 哩〕。

〔解〕PQ之距離$=x$哩。A及B每時之速爲a及b。因A比B後1時起程。而至離Q 2哩之處追及B。故

$$\frac{x-2}{b}-\frac{x-2}{a}=1 \text{......................................}(1)$$

但B離A 4哩時。則已在歸途。因前已近Q 2哩故也。

由是
$$\frac{2x-4}{b}-\frac{2x}{a}=1 \text{......................................}(2)$$

2乘(1)式減(2)式。則$\frac{4}{a}=1$。　$\therefore\ a=4$。

A追及B後又行2哩。達於Q而歸。則B卽在此2哩之途中再A。故此32分間。共行2哩$\times 2=4$哩明矣。

由是 $\frac{32}{60}a+\frac{32}{60}b=4$。　卽 $a+b=\frac{15}{2}$。

$a=4$。故 $4+b=\frac{15}{2}$。　$\therefore\ b=\frac{7}{2}$。

由是從(1)式 $\frac{x-2}{\frac{7}{2}}-\frac{x-2}{4}=1$。　$\therefore\ x=30$。

第拾貳編

雜定理及雜例題

153. 消去法〔Elimination〕在通同方程式內。其方程式之數。若多於已可決定未知數量之方程式。則此諸方程式之常數必有種種之關係。而決定此關係之理。甚爲緊要。

求得之關係式。必令其含一未知數量。故須由諸方程式。將其未知數量逐出之。但逐出二字。其意欠雅。故稱爲消去未知數量

消去法。在代數學中。頗有一番學力。學者能熟於消去法。則其於代數學思過半矣。

予所改消去法之處。實較斯密氏法少優。可以自信。

〔第一例〕$ax+b=0,\ a'x+b'=0$。消去x。

從第一。$ax=-b$。從第二。$-b'=a'x$。

此兩方程式。順次相乘。則$ax(-b')=-b(a'x)$而$x\neq0$。故$ab'=a'b$。

$\therefore\ ab'-a'b=0$。此爲所求之常數關係式。

〔第二例〕從下之方程式消去x及y。

$$a\ x+b\ y+c\ =0。$$
$$a'\ x+b'\ y+c'\ =0。$$
$$a''x+b''y+c''=0。$$

依143章十文字之法從一二兩方程式。

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}=K。$$

又變第三式$a''x+b''y+c''=0$爲下式。

$$a''(bc'-b'c)\frac{x}{bc'-b'c}+b''(ca'-c'a)\frac{y}{ca'-c'a}+c''(ab'-a'b)\frac{1}{ab'-a'b}=0。$$

卽　$a''(bc'-b'c)K+b''(ca'-c'a)K+c''(ab'-a'b)K=0$。

$K\neq0$。　$\therefore$　$a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$。卽爲所求關係式。

有 $n-1$ 個未知數量。而有 n 個之一次方程式。其一般之消去法。詳於後編定準數。而此例爲其特例。

〔第三例〕從方程式 $ax^2+bx+c=0$。及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 消去 x。

依 **143** 章 $\dfrac{x^2}{bc'-b'c}=\dfrac{x}{ca'-c'a}=\dfrac{1}{ab'-a'b}=K$。

$$K^2=\left(\frac{x}{ca'-c'a}\right)^2=\left(\frac{x^2}{bc'-b'c}\right)\left(\frac{1}{ab'-a'b}\right)。$$

$\therefore\quad (ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$。

此關係式。爲兩代數式 ax^2+bx+c 及 $a'x^2+b'x+c'$。有 $x-\alpha$ 之公因子。故其關係式相同。何則兩式有 $x-\alpha$ 之因子。則以 α 代 x 得 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, 及 $a'\alpha^2+b'\alpha+c=0$。消去 α。卽上之關係式。

〔第四例〕方程式 $ax^3+bx+c=0$。及 $a'x^3+b'x+c'=0$。消去 x。

與第三例同。卽 $\dfrac{x^3}{bc'-b'c}=\dfrac{x}{ca'-c'a}=\dfrac{1}{ab'-a'b}=K$。

$$K^3=\left(\frac{x}{ca'-c'a}\right)^3=\left(\frac{x^3}{bc'-b'c}\right)\left(\frac{1}{ab'-a'b}\right)^2。$$

$\therefore\quad (ca'-c'a)^3=(bc'-b'c)(ab'-a'b)^2$ 爲關係式。

〔第五例〕從下之方程式消去 x。

$$ax^2+bx+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a'x^3+b'x^2+c'x+d=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 $a'x$ 乘 (1) 式。a 乘 (2) 式。用減法。則

$$(ab'-a'b)x^2+(ac'-a'c)x+ad=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從 (1) 式及 (3) 式。如第三例。卽得關係式。

〔第六例〕從下之方程式。消去 x, y, z。

$$x+y+z=a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+y^2+z^2=b^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$x^3+y^3+z^3=c^3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$xyz=d^3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

從 (3) 式及 (4)。得 $x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3-3b^3$。

卽 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=c^3-3d^3$。

即 $\frac{1}{2}(x+y+z)\{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\}=c^3-3d^3$。

以 (1) 及 (2) 兩式代入此式。則得

$$\frac{1}{2}(a)\{3(b^2)-(a)^2\}=c^3-3d^3。$$

$a^3+2c^3-6d^3-3ab^2=0$。即所求之關係式。

〔第七例〕從下之方程式消去 x, y, z。

$$x^2(y+z)=a^2 \text{..} (1)$$
$$y^2(z+x)=b^2 \text{..} (2)$$
$$z^2(x+y)=c^2 \text{..} (3)$$
$$xyz=abc \text{..} (4)$$

(1), (2), (3) 三式相加。又以 2 倍 (4) 式加之。則得

$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz=a^2+b^2+c^2+2abc$。

即　$x^2(y+z)+x(y^2+z^2+2yz)+yz(y+z)=a^2+b^2+c^2+2abc$。

即　$(y+z)\{x^2+x(y+z)+yz\}=a^2+b^2+c^2+2abc$。

即　$(y+z)(x+y)(x+z)=a^2+b^2+c^2+2abc$。

以此乘 (4) 式之平方 $x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$。則得

$x^2(y+z)y^2(z+x)z^2(x+y)=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+2abc)$。

又以 (1), (2), (3) 三式代入此式。則

$$a^2b^2c^2=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+2abc)。$$

a, b, c 非為 0。故 $a^2b^2c^2\neq 0$。

$\therefore\ 1=a^2+b^2+c^2+2abc$。即所求之關係式。

〔第八例〕從下之方程式。消去 l, m, n, l', m', n'。

$$ll'=a,\quad mm'=b,\quad nn'=c。$$

$mn'+m'n=2f,\quad nl'+n'l=2g,\quad lm'+l'm=2h$。

以後之三方程式相乘而括合之。則得

$$8fgh=2lmnl'm'n'+ll'(m^2n'^2+m'^2n^2)+mm'(n^2l'^2+n'^2l^2)+nn'(l^2m'^2+l'^2m^2)$$
$$=ll'(mn'+m'n)^2+mm'(nl'+n'l)^2+nn'(lm'+l'm)^2-4ll'mm'nn'$$
$$=a(2f)^2+b(2g)^2+c(2h)^2-4abc。$$

$\therefore\ abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$。即關係式。

154. 普通二次式之定理 x及y之最普通二次式。可分割爲x及y之一次兩因子。

x及y之最普通二次式如下。

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+3fy+c \quad\cdots\cdots(1)$$

上之代數式。與下之一次兩因子之積全相等。試求其關係式。

$$(lx+my+n)(l'x+m'y+n') \quad\cdots\cdots(2)$$

但l, m, n, l', m', n'爲不含x及y者。

以(2)式之兩因子相乘。則得

$$ll'x^2+(lm'+l'm)xy+mm'y^2+(nl'+n'l)x+(mn'+m'n)y+nn'.$$

是全與(1)式同。故與(1)式比較其x^2, xy, y^2, x, y之係數及常數項。則

$$ll'=a,\quad lm'+l'm=2h,\quad mm'=b,\quad nl'+n'l=2g.$$

$mn'+m'n=2f,\quad nn'=c$。此通同方程式。全與153章之第八例同。由是所求之關係式。爲

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

例題

1. $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+\lambda$。爲$x$及$y$之一次兩因子之積。則$\lambda$之值若何。〔答 $\lambda=2$〕。

〔解〕$a=12,\quad 2h=-10,\quad b=2,\quad 2g=11,\quad 2f=-5,\quad \lambda=c$。

故由(3)式。得

$$12\times 2\lambda+(-5)\frac{11}{2}\left(-\frac{10}{2}\right)-12\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\left(\frac{11}{2}\right)^2-\lambda\left(-\frac{10}{2}\right)^2=0.$$

即 $24\lambda+\dfrac{5^2\times 11}{2}-75-\dfrac{11^2}{2}-25\lambda=0.\qquad \therefore\quad \lambda=2.$

2. $12x^2+36xy+\lambda y^2+6x+6y+3$。爲$x$及$y$之一次兩因子之積。則$\lambda$之值若何。〔答 $\lambda=28$〕。

此例亦如前例。可從(3)式求得λ。

155. 文字値之制限 單方程式。含二未知數量。或諸未知數量。其未知數量。若任意不加限制。則可得無限之値。例如$x+y=5$。若$x=1$。則$y=4$。$x=2$。則$y=3$。又$x=6$。則$y=-1$。是所得

x, y 之值。可至無限。然其未知數量。或為有限制之數。則其答數亦必有限。例如 $x+y=5$。其 x 及 y 之值。以正整數為限制。則除 $x=0, y=5$, 及 $x=1, y=4$, 及 $x=2, y=3$, 及 $x=3, y=2$, 及 $x=4, y=1$, 及 $x=5, y=0$ 之六組外。更無答數。

又如單方程式 $2x+5y=7$。x 及 y 為正整數。則除 $x=1, y=1$ 外。更無答數。

又 $3(x-a)^2+4(y-b)^2=0$。各文字之數量。限為實數量。則除 $x-a=0$。$y-b=0$。即 $x=a$。$y=b$。此外別無答數。何則。因原方程式文字之項為平方。必兩項俱為正數。故非兩項皆為0。則其式不能等於0。〔下之例題各文字為實數〕。

例題

1. $(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab)$。則 $a=b=c$。試證之。

此題若不注意於**155**章之理論。則亦不易解。

〔證〕以原方程式之左邊。展其平方而化為簡式。則得

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0。$$

即 $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$。

此式左邊為平方數之和。故為正數。由是各文字項。不能不為0.

$\therefore\quad a=b,\quad b=c,\quad c=a$。

2. x, x', y, y' 均為實數而

$$2(x^2+x'^2-xx')(y^2+y'^2-yy')=x^2y^2+x'^2y'^2。$$

求證 $x=x',\quad y=y'$。

〔證〕解左邊與右邊同整列為 x 之方乘。則

$$x^2(y^2+2y'^2-2yy')-2xx'(y^2+y'^2-yy')+x'^2(2y^2+y'^2-2yy')=0。$$

$\therefore\quad (x^2-2xx'+x'^2)(y^2-2yy'+y'^2)+x^2y'^2-2xx'yy'+x'^2y^2=0$。

即 $(x-x')^2(y-y')^2-(xy'-x'y)^2=0$。

由是 $(x-x')(y-y')=0$。及 $xy'-x'y=0$。

從第一 $x=x'$, 或 $y=y'$。

$x=x'$, 則從第二。$xy'-x'y=0$。得 $x=0$, 或 $y=y'$。又 $y=y'$。則從第二。得 $y=0$, 或 $x=x'$。

但 $x=y=0$。則亦 $x'=y'=0$。

由是 $y=y'$, $x=x'$, 爲所求之結果。

3. $$\left.\begin{array}{r} a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots\dots\dots\dots=p^2 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots\dots\dots\dots=q^2 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots\dots\dots\dots=pq \end{array}\right\} 證\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots\dots\dots\frac{p}{q}$$

但各數量爲實數。

〔解〕第一第二及第三。順次以 p^2, q^2 及 $\frac{1}{2}pq$ 除之。則

得 $$\left(\frac{a_1}{p}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}\right)^2+\left(\frac{a_3}{p}\right)^2+\dots\dots\dots\dots=1\dots\dots\dots(1)$$

$$\left(\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{b_2}{q}\right)^2+\left(\frac{b_3}{q}\right)^2+\dots\dots\dots\dots=1\dots\dots\dots(2)$$

及 $$2\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{b_1}{q}\right)+2\left(\frac{a_2}{p}\right)\left(\frac{b_2}{q}\right)+2\left(\frac{a_3}{p}\right)\left(\frac{b_3}{q}\right)+\dots\dots=2\dots(3)$$

(1), (2) 兩式相加。又減 (3) 式而括之。則得

$$\left(\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}\right)^2+\left(\frac{a_3}{p}-\frac{b_3}{q}\right)^2+\dots\dots\dots=0。$$

此左邊之各項爲正數。

$$\therefore\ \frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}=0,\quad \frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}=0,\quad \frac{a_3}{p}-\frac{b_3}{q}\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

由是 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots\dots\dots\dots=\frac{p}{q}$。

156. 三次恆同式 其最要之公式有三。卽

$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

及 $$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)。$$

前之二式甚易明瞭。後一式亦已說明於 139 章, 此則示其應用之例。其 ω 爲 1 之立方虛根。

〔第一例〕$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$

$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

〔證〕由公式左邊$=\frac{1}{2}(\overline{a+b}+\overline{b+c}+\overline{c+a})$

$$\{(\overline{a+b}-\overline{b+c})^2+(\overline{b+c}-\overline{c+a})^2+(\overline{c+a}-\overline{a+b})^2\}$$

$$=(a+b+c)\{(a-c)^2+(b-a)^2+(c-b)^2\}$$

$$=2\times\frac{1}{2}(a+b+c)\{(c-a)^2+(a-b)^2+(b-b)^2\}$$

$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)。$$

〔第二例〕$(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$

$$-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

〔證〕左邊$=\frac{1}{2}(\overline{b+c-a}+\overline{c+a-b}+\overline{a+b-c})$

$\{(\overline{b+c-a}-\overline{c+a-b})^2+$ 以下二項。爲 a, b, c 之等勢$\}$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{4(b-a)^2+4(c-b)^2+4(a-c)^2$$

$$=4\times\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)。$$

〔第三例〕$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$
$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$。

〔證〕左邊$=\frac{1}{2}(\overline{x^2-yz}+\overline{y^2-zx}+\overline{z^2-xy})$

$$\{(\overline{x^2-yz}-\overline{y^2-zx})^2+(\overline{y^2-zx}-\overline{z^2-xy})^2+(\overline{z^2-xy}-\overline{x^2-yz})^2\}$$

$=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\{(x+y+z)^2(x-y)^2+$ 下二項爲等勢$\}$

$$=\frac{1}{4}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}(x+y+z)^2\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

$$=[\tfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}]^2=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2。$$

〔第四例〕試證 $(x^3+y^3+z^3-3xyz)(a^3+b^3+c^3-3abc)$。
可以 $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$ 之形表之。

〔證〕由公式 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$,
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$。

但 $(x+y+z)(a+b+c)=(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+ay+bz)$。

$(x+\omega y+\omega^2 z)(a+\omega^2 b+\omega c)$

$$=(ax+by+cz)+\omega^2(bx+cy+az)+\omega(cx+ay+bz)。$$

$(x+\omega^2 y+\omega z)(a+\omega b+\omega^2 c)$

$$=(ax+by+cz)+\omega(bx+cy+az)+\omega^2(cx+ay+bz)。$$

令 $ax+by+cz=X,\quad bx+cy+az=Y,\quad cx+ay+bz=Z$。

則 $(x^3+y^3+z^3-3xyz)(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$$=(X+Y+Z)(X+\omega Y+\omega^2 Z)(X+\omega^2 Y+\omega Z)=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ。$$

157. 定義 用$\equiv$記號於兩代數式之間。卽示兩代數式全然相同而爲恆同式。

例如 $a^2-b^2\equiv(a+b)(a-b)$。

又 Σ 記號所以示諸數量同類項之和。

例如 $a+b+c\equiv\Sigma a,\ ab+bc+ca\equiv\Sigma ab$。

由是 $(a+b+c+\ldots)^2\equiv a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots+2ab+2ac+\ldots\ldots+2bc+\ldots\ldots$

略書之爲 $(\Sigma a)^2\equiv\Sigma a^2+2\Sigma ab$。

又 Π 記號爲示同類數文字項之積之略號。

例如 $abc\equiv\Pi a,\quad \Pi(b+c)=(b+c)(c+a)(a+b)$，

a^2b 爲同類而 a, b, c 之輪換爲 b^2c, c^2a。

故 $\Sigma a^2b\equiv a^2b+b^2c+c^2a$。

又 $\Pi a^2b\equiv a^2b\times b^2c\times c^2a$。

158. 雜例 以下示以要用之例。

〔第一例〕 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$。則 $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}$。但 n 爲正整數。

〔證〕 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$。

由此已知恆同式。得 $3(b+c)(c+a)(a+b)=0$。

卽 $b+c=0$ (1), 或 $c+a=0$ (2), 或 $a+b=0$ (3)。

(1) $b+c=0$。則 $b=-c$, 及 $a+b+c=a$。

$$\therefore\quad a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}+(-c)^{2n+1}+c^{2n+1}$$

$$=(a+b+c)^{2n+1}-c^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}。$$

(2) $c+a=0$ 則 $c=-a$, 及 $a+b+c=b$。

$\therefore\quad a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=a^{2n+1}+(a+b+c)^{2n+1}+(-a)^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}$。

(3) $a+b=0$, 可以同法推之。

〔第二例〕若 x, y, z 爲不等。而

$y^3+z^3+m(y^2+z^2)=z^3+x^3+m(z^2+x^2)=x^3+y^3+m(x^2+y^2)$。則此各式皆等於 $2xyz$, 又 $x+y+z+m=0$。

〔證〕 $y^3+z^3+m(y^2+z^2)=z^3+x^3+m(z^2+x^2)$。故

$y^3-x^3+m(y^2-x^2)=0$ 卽 $(y-x)\{y^2+yx+x^2+m(y+x)\}=0$。

依題理 $y\neq x$。故 $y-x$ 非爲 0。

由是 $$y^2+yx+x^2+m(y+x)=0\text{..........................}(1)$$

又 $z^3+x^3+m(z^2+x^2)=x^3+y^3+m(x^2+y^2)$。由同法。

$z-y$ 非爲 0。故 $z^2+zy+y^2+m(z+y)=0$..........................(2)

從 (1) 式減 (2) 式而括之。則 $(x-z)(x+z+y+m)=0$。而

$x-z$ 非爲 0。故 $x+y+z+m=0$。卽如題言。

次以 $m=-(x+y+z)$ 代於 (1) 式。則

$y^2+yx+x^2-(x+y+z)(y+x)=0$。卽 $xy+yz+zx=0$..................(3)

但 $y^3+z^3+m(y^2+z^2)=y^3+z^3-(x+y+z)(y^2+z^2)$

$$=-(y^2x+z^2y+y^2z+z^2x)$$

$$=-y(xy+yz)-z(yz+zx)$$

從 (3) 式 $$=-y(-zx)-z(-xy)$$

$$=2xyz。$$

〔第三例〕 $a+b+c+d=0$。則

$a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd$。

〔證〕從 $a+b=-(c+d)$。則 $a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd$。

故 $a^2+b^2-c^2-d^2=2(cd-ab)$。又平方之。則

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2c^2d^2-2a^2c^2-2b^2c^2-2a^2d^2-2b^2d^2$$
$$=4(c^2d^2-2abcd+a^2b^2)$$

故 $$\Sigma a^4=2a^2b^2+2c^2d^2+2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2d^2+2b^2d^2-8abcd$$
$$=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd。$$

〔第四例〕 $ax+by+cz=0$。 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$。則

$ax^3+by^3+cz^3=-(a+b+c)(y+z)(z+x)(x+y)$。

〔證〕 用143章文字之法。則兩方程式如下。

$ax+by+cz=0.........(1)$ $ayz+bzx+cxy=0.........(2)$

從(1)式及(2)式 $\frac{a}{y.xy-zx.z}=\frac{b}{z.yz-xy.x}=\frac{c}{x.zx-yz.y}$。

即 $\frac{a}{x(y^2-z^2)}=\frac{b}{y(z^2-x^2)}=\frac{c}{z(x^2-y^2)}=K$。

依113章分數之定理。則

$$K=\frac{ax^3+by^3+cz^3}{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}$$。

$$=\frac{ax^3+by^3+cz^3}{-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)}\text{..........................}(3)$$。

又 $K=\frac{a+b+c}{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}=\frac{a+b+c}{(y-z)(z-x)(x-y)}\text{.....}(4)$。

從(3)式及(4)式 $\frac{ax^3+by^3+cz^3}{(y+z)(z+x)(x+y)}=-(a+b+c)$。

例題十六

1. $\frac{x}{y+z}=a$, $\frac{y}{z+x}=b$, $\frac{z}{x+y}=c$。則 $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$。

〔證〕 從第一 $\frac{y+z}{x}=\frac{1}{a}$, 加1則 $\frac{x+y+z}{x}=\frac{1+a}{a}$。

即 $\frac{x}{x+y+z}=\frac{a}{1+a}$ 由同理 $\frac{y}{x+y+z}=\frac{b}{1+b}$。

$\frac{x}{x+y+z}=\frac{c}{1+c}$。 $\therefore$ $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1$。

2. $ax+by=0$, 及 $cx^2+dxy+cy^2=0$。則 $a^2c+b^2c=abd$。

〔證〕 $y=-\frac{ax}{b}$ 代入第二式。則 $cx^2+dx\left(-\frac{ax}{b}\right)+c\left(-\frac{ax}{b}\right)^2=0$。

即 $(b^2c-abd+a^2c)x^2=0$。 $\therefore$ $b^2c+a^2c=abd$。

3. 從 $\frac{y-z}{y+z}=a$, $\frac{z-x}{z+x}=b$, $\frac{x-y}{x+y}=c$。消去 x, y, z。

〔答 $a+b+c+abc=0$〕。

〔解〕 $x+y=X$, $y+z=Y$, $z+x=Z$。則

第一 $\frac{(x+y)-(z+x)}{y+z}=a$ 為 $\frac{X-Z}{Y}=a$。

即 $\frac{Z-X}{Y}=-a$, 同法從第二第三 $\frac{X-Y}{Z}=-b$, $\frac{Y-Z}{X}=-c$。

由加法 $-(a+b+c)=\frac{Z-X}{Y}+\frac{X-Y}{Z}+\frac{Y-Z}{X}$

$$=\frac{ZX(Z-X)+XY(X-Y)+YZ(Y-Z)}{XYZ}=\frac{-(X-Y)(Y-Z)(Z-X)}{XYZ}。$$

即 $a+b+c=\frac{X-Y}{X}\ \frac{Y-Z}{Y}\ \frac{Z-X}{Z}=(-b)(-c)(-a)=-abc$。

$\therefore\ a+b+c+abc=0$。

4. 從 $\frac{y}{x}+\frac{x}{z}=a$, $\frac{z}{y}+\frac{y}{x}=b$, $\frac{x}{z}+\frac{z}{y}=c$, 消去 x, y, z。

〔答 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=8$〕。

〔解〕於第一加第二減第三。則 $\frac{2y}{x}=a+b-c$。同法

$\frac{2z}{y}=b+c-a$, $\frac{2x}{z}=c+a-b$。

$\therefore\ (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=\frac{2y}{x}, \frac{2z}{y}, \frac{2x}{z}=8$。

5. $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{z}=1$, 則 $z+\frac{1}{x}=1$。試證之。

〔證〕 $z+\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{1}{z}}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\left(y+\frac{1}{z}\right)-y}+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}}=\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-\frac{1}{y}}$。

$$=\frac{1}{1-y}-\frac{y}{1-y}=1。$$

6. 從 $a+c=\frac{b}{x}-dx$。 $a-c=\frac{d}{x}-bx$。消去 x。

$\left[\text{答}\ \frac{c^2}{(b-d)^2}-\frac{a^2}{(b+d)^2}=1\right]$。

〔解〕由加法 $2a=\frac{1}{x}(b+d)-x(b+d)$。 $\therefore\ \frac{2a}{b+d}=\frac{1}{x}-x$。

由減法 $2c=\frac{1}{x}(b-d)+x(b-d)$。 $\therefore\ \frac{2c}{b-d}=\frac{1}{x}+x$。

由是 $\frac{4c^2}{(b-d)^2}-\frac{4a^2}{(b+d)^2}=\left(\frac{1}{x}+x\right)^2-\left(\frac{1}{x}-x\right)^2=4$。

7. 從 $x^2-yz=a$, $y^2-zx=b$, $z^2-xy=c$, $ax+by+cz=d$, 消去 x, y, z。

〔答 $a^3+b^3+c^3-3abc=d^2$〕。

〔解〕$x(x^2-yz)+y(y^2-zx)+z(z^2-xy)=ax+by+cz$。

即 $x^3+y^3+z^3-3xyz=d$ ……………………………………(1)

又依56章第三例。

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$$
$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$$

即 $a^3+b^3+c^3-3abc=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$ ……………………………(2)

由是從 (1) (2) $a^3+b^3+c^3-3abc=d^2$。

8. $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3$。試於此式示任意之根。及 a, b, c 之關係。 〔答 $a^3+2c^3=3ab^2$〕。

〔解〕於此三方程式。求 x, y, z。則各消去後。其値不能求得。即 x, y, z 之答爲 ∞。

故變第三方程式。爲 $\frac{1}{2}(x+y+z)\{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\}=c^3$,

故以第一及第二方程式。代於此式。則

$\frac{1}{2}a\{3b^2-a^2\}-c^3$。 $\therefore\ 3ab^2=a^3+2c^3$。

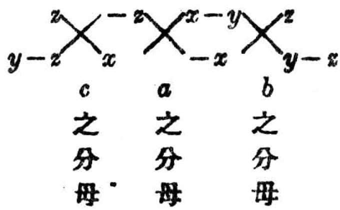
9. $bz+cy=cx+az=ay+bx$ 及 $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0$ 則 $a\pm b\pm c=0$。

〔證〕從最初之方程式。

$az-bz+c(x-y)=0$。 $a(y-z)+bx-cx=0$。

從此兩方程式。用十文字之法。

$$\frac{a}{zx-x(x-y)}=\frac{b}{(x-y)(y-z)+zx}=\frac{c}{zx+z(y-z)}。$$



即 $\dfrac{a}{x(y+z-x)}=\dfrac{b}{y(z+x-y)}=\dfrac{c}{z(x+y-z)}=K$ ……………………(A)

從 (A) $a+b+c=K\{x(y+z-x)+y(z+x-y)+z(x+y-z)\}$

$=-K(x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx)$

但從最後之方程式 $=-K(0)$。由是 $a+b+c=0$,

又從最初之兩方程式用十文字之法。

$$\frac{x}{a(b+c-a)}=\frac{y}{b(c+a-b)}=\frac{z}{c(a+b-c)}=\lambda$$

即 $x=a\lambda(b+c-a)$, $y=b\lambda(c+a-b)$, $z=c\lambda(a+b-c)$

代於最後之方程式而括之。則

$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$。

由是 $\pm a\pm b\pm c=0$。畧之得 $a\pm b\pm c=0$。

10. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, 則 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$。

〔證〕 $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=1^2$ 即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{2xyz}{abc}\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\right)=1$。

故從第二 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$。

11. $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$ 則 $x^2y^2z^2=1$ 或 $x=y=z$。

〔證〕 $yz(x-y)=y-z$, $zx(y-z)=z-x$, $xy(z-x)=x-y$,

由是 $x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=(x-y)(y-z)(z-x)$。

$\therefore$ $x^2y^2z^2=1$。 $x-y=0$ 或 $y-z=0$ 即 $x=y=z$。

12. $x=cy+bz$, $y=az+cx$, $z=bx+ay$, 則

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}。$$

〔證〕 $x-cy-bz=0$, $cx-y+az=0$, $bx+ay-z=0$。

從第一第二用十文字之法。 $\dfrac{x}{-ca-b}=\dfrac{y}{-bc-a}=\dfrac{z}{-1+c^2}$。

即 $\dfrac{x}{ca+b}=\dfrac{y}{cb+a}=\dfrac{z}{1-c^2}$ ……………………(1)

第二第三依同法。及第三第一亦依同法。

$\dfrac{x}{1-a^2}=\dfrac{y}{ab+c}=\dfrac{z}{ca+b}$ ……………………(2)

及 $$\frac{x}{ab+c}=\frac{y}{1-b^2}=\frac{z}{bc+a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從(1)及(3) $\frac{y^2}{(bc+a)(1-b^2)}=\frac{z^2}{(1-c^2)(bc+a)}$。 $\therefore\ \frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$。

又從(2)及(3)依同法 $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}$。

13. $x^2=y^2+z^2+2ayz,\ y^2=z^2+x^2+2bzx,\ z^2=x^2+y^2+2cxy$。則

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}。$$

〔證〕 $x^2-(y^2+z^2)=2ayz$ 平方之。則 $x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2=4a^2y^2z^2$,

卽 $x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2-z^2)^2=-4y^2z^2(1-a^2)$,

卽 $\sum x^4-2\sum y^2z^2=-4y^2z^2(1-a^2)$,

同法 $\sum x^4=2\sum y^2z^2=-4z^2x^2(1-b^2)$。 $\sum x^4-2\sum y^2z^2=-4x^2y^2(1-c^2)$。

由是 $y^2z^2(1-a^2)=z^2x^2(1-b^2)=x^2y^2(1-c^2)$。以此除 $x^2y^2z^2$。卽得所求之結果。

14. x, y, z 爲不等。而 $y=\frac{a+bz}{c+dz},\ z=\frac{a+bx}{c+dx},\ x=\frac{a+by}{c+dy}$。

則 $ad+bc+b^2+c^2=0$。試證之。

〔證〕本題三方程式之常數 a, b, c, d 在同位置。當注意。

第一之 z。以第二代用之。則

$$y=\frac{a+b\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)}{c+d\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)}=\frac{a(b+c)+(b^2+ad)x}{c^2+ad+d(b+c)x}。$$ 又從第三 $y=\frac{a-cx}{dx-b}$。

由是 $\frac{a(b+c)+(b^2+ad)x}{c^2+ad+d(b+c)x}=\frac{a-cx}{dx-b}$。去分母而括之。則

$(b^2+c^2+ad+bc)\}dx^2+(c-b)x-a\{=0$。

$\therefore\ b^2+c^2+ad+bc=0$。或 $dx^2+(c-b)x-a=0$。

然 $dx^2+(c-b)x-a=0$。則 $x(dx+c)=a+bx$。故變此方程式爲

$x=\frac{a+bx}{c+dx}$。然第一爲 $y=\frac{a+bx}{c+dx}$。 故 $x=y$。然依題意。則 $x\neq y$。由是

$b^2+c^2+ad+bc=0$。爲眞確無疑。

15. 從 $\frac{x^2}{yz}+\frac{yz}{x^2}=1$, $\frac{y^2}{zx}+\frac{zx}{y^2}=m$, $\frac{z^2}{xy}+\frac{xy}{z^2}=n$。消去 x, y, z。

〔答 $l^2+m^2+n^2-lmn-4=0$〕。

〔解〕最初之兩方程式相乘。則 $\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{yz}{x^2}\right)\left(\frac{y^2}{zx}+\frac{zx}{y^2}\right)=lm$。

即 $\frac{z^2}{xy}+\frac{xy}{z^2}+\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}=lm$。從此式減第三。則 $\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}=lm-n$。

此式乘第三。則 $\left(\frac{z^2}{xy}+\frac{xy}{z^2}\right)\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}\right)=n(lm-n)$。

即 $\frac{y^2z^2}{x^4}+\frac{x^4}{y^2z^2}+\frac{y^4}{z^2x^2}+\frac{z^2x^2}{y^4}=lmn-n^2$。

即 $\left(\frac{yz}{x^2}+\frac{x^2}{yz}\right)^2-2+\left(\frac{y^2}{zx}+\frac{zx}{y^2}\right)^2-2=lmn-n^2$。

第一及第二代於此式。則 $l^2-2+m^2-2=lmn-n^2$。

16. 從 $bx^2+lx+c=0$, $cy^2+my+a=0$, $az^2+nz+b=0$, 及 $xyz=1$。消去 x, y, z。

〔答 $al^2+bm^2+cn^2+lmn=4abc$〕。

〔解〕變原方程式爲 $bx+\frac{c}{x}=-l$, $cy+\frac{a}{y}=-m$, $az+\frac{b}{z}=-n$。

$\therefore\ \left(bx+\frac{c}{x}\right)\left(cy+\frac{a}{y}\right)\left(az+\frac{b}{z}\right)=(-l)(-m)(-n)$ 解此括弧。則

$$abcxyz+\frac{ca^2z}{xy}+\frac{ab^2x}{yz}+\frac{bc^2y}{zx}+\frac{c^2ayz}{x}+\frac{a^2bzx}{y}+\frac{b^2cxy}{z}+\frac{abc}{xyz}=-lmn。$$

$xyz=1$。故 $xy=\frac{1}{z}$, $yz=\frac{1}{x}$, $zx=\frac{1}{y}$。代於上式而括之。則

$$abc+c\left(a^2z^2+\frac{b^2}{z^2}\right)+a\left(b^2x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)+b\left(c^2y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)+abc=-lmn。$$

即 $2abc+c\left(az+\frac{b}{z}\right)^2-2abc+a\left(bx+\frac{c}{x}\right)^2-2abc+b\left(cy+\frac{a}{y}\right)^2-2abc$

$=-lmn$。

$\therefore\ 2abc+c(-n)^2-2abc+a(-l)^2-2abc+b(-m)^2-2abc=-lmn$。

即 $al^2+bm^2+cn^2-4abc+lmn=0$。

17. 從 $y^2+z^2=ayz$, $z^2+x^2=bzx$, $x^2+y^2=cxy$ 消去 x, y, z。但 xyz 非爲 0。

〔答 $a^2+b^2+c^2-abc=4$〕。

〔解〕 $xyz\neq 0$。 $\therefore$ x, y, z 各不爲 0。由是以 yz 除第一。則

$\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=a$。同法 $\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=b$, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=c$。

$$\therefore\quad \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=abc。$$

$$即\quad 1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+1=abc。$$

$$即\quad \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^2-4=abc。$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2-4=abc。$$

18. 從 $b\dfrac{y}{z}+c\dfrac{z}{y}=a$, $c\dfrac{z}{x}+a\dfrac{x}{z}=b$, $a\dfrac{x}{y}+b\dfrac{y}{x}=c$。消去第一 x, y, z 及第二 a, b, c。 〔答 $a^3+b^3+c^3-5abc$, $y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3=-x^2y^2z^2$〕。

〔解〕(1) 三方程式相乘。則 $\left(b\dfrac{y}{z}+c\dfrac{z}{y}\right)\left(c\dfrac{z}{x}+a\dfrac{x}{z}\right)\left(a\dfrac{x}{y}+b\dfrac{y}{x}\right)=abc$。

$$即\quad abc+b^2c\frac{y^2}{x^2}+c^2a\frac{z^2}{y^2}+a^2b\frac{x^2}{z^2}+ca^2\frac{x^2}{y^2}+ab^2\frac{y^2}{z^2}+bc^2\frac{z^2}{x^2}+abc=abc。$$

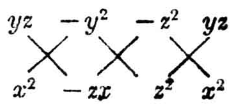
$$\therefore\quad abc+c\left(a\frac{x}{y}+b\frac{y}{x}\right)^2-2abc+a\left(b\frac{y}{z}+c\frac{z}{y}\right)^2-2abc$$
$$+b\left(c\frac{z}{x}+a\frac{x}{z}\right)^2-2abc=0。$$

$$\therefore\quad c^3+a^3+b^3-5abc=0。$$

(2) 去原三方程式之分母。且第一第二皆移項。則

$ayz-by^2-cz^2=0$, $ax^2-bzx+cz^2=0$, $ax^2+by^2=cxy$。

從第一第二用十文字之法。



$$\frac{a}{-y^2z^2-z^3x}=\frac{b}{-z^2x^2-yz^3}=\frac{c}{-xyz^2+x^2y^2}。$$

此各分數爲 λ。則

$$\lambda=\frac{ax^2+by^2}{x^2(-y^2z^2-z^3x)+y^2(-z^2x^2-yz^3)}=\frac{cxy}{xy(-xyz^2+x^2y^2)}。$$

在第三 ax^2+by^2。等於 cxy。

由是 $x^2(-y^2z^2-z^3x)+y^2(-z^2x^2-yz^3)=xy(-xyz^2+x^2y^2)$。

$$\therefore\quad z^3x^3+x^3y^3+y^3z\ +x^2y^2z^2=0,$$

19. 從 $ax+yz=bc$, $by+zx=ca$, $cz+xy=ab$。$xyz=abc$。消去 x, y, z。

〔答 $\Sigma b^3c^3=5a^2b^2c^2$〕。

〔解〕三方程式相乘。則 $(ax+yz)(by+zx)(cz+xy)=(bc)(ca)(ab)$。

即 $abcxyz+xyz(ax^2+by^2+cz^2)+abx^2y^2+bcy^2z^2+caz^2x^2+x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$。

因 $xyz=abc$。故

$a^2b^2c^2+abc(ax^2+by^2+cz^2)+abx^2y^2+bcy^2z^2+caz^2x^2=0$。

即 $a^2b^2c^2+bc(a^2x^2+y^2z^2)+ca(b^2y^2+z^2x^2)+ab(c^2z^2+x^2y^2)=0$。

即 $a^2b^2c^2+bc(ax+yz)^2-2abcxyz+ca(by+zx)^2-2abcxyz$
$+ab(cz+xy)^2-2abcxyz=0$。

$\therefore$ $a^2b^2c^2+bc(bc)^2-2a^2b^2c^2+ca(ca)^2-2a^2b^2c^2+ab(ab)^2-2a^2b^2c^2=0$。

$\therefore$ $b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3=5a^2b^2c^2$。

20. 從 $\dfrac{x^2-xy-xz}{a}=\dfrac{y^2-yz-yx}{b}=\dfrac{z^2-zx-zy}{c}$, 及 $ax+by+cz=0$。消去 x, y, z。

〔答 $a^3+b^3+c^3=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$〕。

〔解〕各分數爲 λ。則

$$\lambda=\frac{(x^2-xy-xz)-(y^2-yz-yx)-(z^2-zx-zy)}{a-b-c}$$

$$=\frac{(y-z-x)(z-x-y)}{a-b-c}=\frac{(y^2-yz-yx)(z^2-zx-zy)}{yz(a-b-c)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但從原分數 $y^2-yz-yx=b\lambda$, $z^2-zx-zy=c\lambda$。

由是從 (1) $\lambda=\dfrac{bc\lambda^2}{yz(a-b-c)}$。但 $\lambda\neq0$。

$\therefore$ $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{bc}{yz(a-b-c)}$。 $\therefore$ $\dfrac{xyz}{\lambda}=\dfrac{ax}{\dfrac{a(a-b-c)}{bc}}$ 爲等勢式。

故 $\dfrac{xyz}{\lambda}=\dfrac{ax}{\dfrac{a(a-b-c)}{bc}}=\dfrac{by}{\dfrac{b(b-c-a)}{ca}}=\dfrac{cz}{\dfrac{c(c-a-b)}{ab}}$。

由是 $\dfrac{ax+by}{\dfrac{a(a-b-c)}{bc}+\dfrac{b(b-c-a)}{ca}}=\dfrac{-cz}{-\dfrac{c(c-a-b)}{ab}}$。但 $ax+by=-cz$。

由是 $\dfrac{a(a-b-c)}{bc}+\dfrac{b(b-c-a)}{ca}=-\dfrac{c(c-a-b)}{ab}$。

$\therefore$ $a^2(a-b-c)+b^2(b-c-a)+c^2(c-a-b)=0$。

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)=0$。

21. 從 $a^2yz=\alpha^2(y+z)^2$, $b^2zx=\beta^2(z+x)^2$, $c^2xy=\gamma^2(x+y)^2$. 求得下之關係式 $\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}-4$。

〔證〕三方程式開平方而變化之。則

$$\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}=\pm\frac{a}{\alpha},\ \sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}=\pm\frac{b}{\beta},\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\pm\frac{c}{\gamma}.$$

$$\therefore\quad\left(\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}\right)\left(\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}.$$

即 $1+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}$。

即 $$2+\left(\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2-2+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2-2+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2-2=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}.$$

$$\therefore\quad\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}-4=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}.$$

22. $y^2+z^2+yz=a^2$, $z^2+x^2+zx=b^2$, $x^2+y^2+xy=c^2$。及 $yz+zx+xy=0$ 則 $a\pm b\pm c=0$。

〔證〕原三方程式相加。則 $2\sum x^2+\sum yz=a^2+b^2+c^2$。但 $\sum yz=0$。故 $\sum x^2=\frac{1}{2}\sum a^2$。

從第一減第二而括之。則 $(y-x)(x+y+z)=a^2-b^2$。

$\therefore\quad x+y+z=\frac{a^2-b^2}{y-x}$ 爲等勢式。故 $=\frac{b^2-c^2}{z-y}=\frac{c^2-a^2}{x-z}$。

由是 $(\sum x)^2=\frac{\sum(a^2-b^2)^2}{\sum(y-x)^2}$。即 $\sum x^2+2\sum yz=\frac{2\sum a^4-2\sum b^2c^2}{2\sum x^2-2\sum yz}$。

$\therefore\quad\sum x^2=\frac{\sum a^4-\sum b^2c^2}{\sum x^2}\qquad\therefore\quad(\sum x^2)^2=\sum a^4-\sum b^2c^2$。

$\therefore\quad(\frac{1}{2}\sum a^2)^2=\sum a^4-\sum b^2c^2$。即 $\sum a^4+2\sum b^2c^2=4\sum a^4-4\sum b^2c^2$。

23. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$。則 $\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}$。但 n 爲正整數。

〔證〕 $\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$。 $\qquad\therefore\quad(a+b)\{ab+c(a+b)+c^2\}=0$。

即 $(a+b)(a+c)(b+c)=0$。 $\therefore$ $a+b=0$, 或 $a+c=0$, 或 $b+c=0$,

若 $a+b=0$。則 $a=-b$。

$$\therefore \frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{-b^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{(-b+b+c)^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}$$ 其他同法。

24. $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$。則

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0。$$

及 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}=1$。

〔證〕 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1\right)-\left(1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)-\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=0$。

即 $a\{(b+c)^2-a^2\}-b\{b^2-(c-a)^2\}-c\{c^2-(a-b)^2\}=0$。

即 $(b+c-a)\{a(b+c+a)-b(b-c+a)-c(c+a-b)\}=0$。

即 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$。

次 $b+c-a=0$。則 $b^2+c^2-a^2=b^2+c^2-(b+c)^2=-2bc$。

$c^2+a^2-b^2=c^2+a^2-(a-c)^2=2ac$, $a^2+b^2-c^2=a^2+b^2-(a-b)^2=2ab$。

故 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}$

$$=\left(\frac{-2bc}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{2ca}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{2ab}{2ab}\right)^{2n+1}=-1+1+1=1。$$

25. $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=0$。$a^2x^3+b^2y^3+c^2z^3=0$。$\frac{1}{x}-a^2=\frac{1}{y}-b^2=\frac{1}{z}-c^2$。

則 $a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3=0$。及 $a^6x^3+b^6y^3+c^6z^3=a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2$。

〔證〕 $\frac{1}{x}-a^2=\frac{1}{y}-b^2=\frac{1}{z}-c^2=\lambda$。則

$$a^2x^3\left(\frac{1}{x}-a^2\right)+b^2y^3\left(\frac{1}{y}-b^2\right)+c^2z^3\left(\frac{1}{z}-c^2\right)=\lambda(a^2x^3+b^2y^3+c^2z^3)。$$

即 $(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-(a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3)-\lambda(0)$。

即 $0-(a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3)=0$。 $\therefore$ $a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3=0$。

又 $a^4x^3\left(\frac{1}{x}-a^2\right)+b^4y^3\left(\frac{1}{y}-b^2\right)+c^4z^3\left(\frac{1}{z}-c^2\right)=\lambda(a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3)$。

即 $(a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2)-(a^6x^3+b^6y^3+c^6z^3)=\lambda(0)$。

$\therefore\quad a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2=a^6x^3+b^6y^3+c^6z^3$。

26. $x-\dfrac{ayz}{x^2}=y-\dfrac{azx}{y^2}=z-\dfrac{axy}{z^2}$ 而 x, y, z 爲不等。則各等於 $x+y+z-a$ 試證之。

〔證〕設各數皆等於 λ。則第一第二式。爲 $x^3-ayz=\lambda x^2$, $y^3-azx=\lambda y^2$。由減法得 $x^3-y^3+az(x-y)=\lambda(x^2-y^2)$。

但 $x\neq y$。故兩邊以 $x-y$ 除之。則 $\lambda(x+y)=x^2+xy+y^2+az$。

由同法 $\lambda(y+z)=y^2+yz+z^2+ax$。

又由減法 $\lambda(x-z)=x^2-z^2+y(x-z)-a(x-z)$。但 $x\neq z$。故以 $x-z$ 除之則 $\lambda=x+y+z-a$。

27. x, y, z 爲不等。而 $2a-3y=\dfrac{(z-x)^2}{y}$, $2a-3z=\dfrac{(x-y)^2}{z}$。

則 $2a-3x=\dfrac{(y-z)^2}{x}$。及 $x+y+z=a$。

〔證〕去已知兩方程式之分母。用減法。則

$$y(2a-3y)-z(2a-3z)=(z-x)^2-(x-y)^2。$$

卽 $2a(y-z)-3(y^2-z^2)=(z-y)(z-2x+y)$。因 $y\neq z$。

故 $2a-3(y+z)=-(z-2x+y)$。 $\therefore\quad x+y+z=a$。

從第一方程式。$2(x+y+z)-3y=\dfrac{(z-x)^2}{y}$。去分母而變化之。

則 $2xy+2yz-y^2=z^2-2zx+x^2$。

$\therefore\quad 2x(y+z+x)-3x^2=y^2-2yz+z^2$。

卽 $2xa-3x^2=(y-z)^2$。 $\therefore\quad 2a-3x=\dfrac{(y-z)^2}{x}$。

28. $x+\dfrac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}$ 若 x 及 y 互換。其值不變。則 x 及 z 互換。其值亦不變。又若 $x+y+z=1$。則此各式皆爲 0。但各數量皆不等。

〔證〕依題意 $x+\dfrac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}=y+\dfrac{xz-y^2}{y^2+x^2+z^2}$。

$\therefore\quad (x-y)(x^2+y^2+z^2)=z(x-y)+(x^2-y^2)$。依題意。$x-y\neq 0$。故以 $x-y$ 除之。則 $x^2+y^2+z^2=x+y+z$。

由是 $x+\dfrac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}=x+\dfrac{yz-x^2}{x+y+z}=\dfrac{yz+zx+xy}{x+y+z}=z+\dfrac{yx-z^2}{z+y+x}$。

又 $x+y+z=1$。則 $x^2+y^2+z^2=1$。 $\therefore$ 得 $yz+zx+xy=0$。

而上之各式爲等於 $\dfrac{yz+zx+xy}{x+y+z}$。故爲0。

29. $y^3+z^3+m(y+z)=z^3+x^3+m(z+x)=x^3+y^3+m(x+y)$。則此各式等於 $2xyz$。但 x, y, z 各不等。

〔證〕 $y^3+z^3+m(y+z)=z^3+x^3+m(z+x)$。 $\therefore$ $x^3-y^3+m(x-y)=0$。

但 $x-y\neq 0$。 $\therefore$ $x^2+xy+y^2+m=0$。同法 $y^2+yz+z^2+m=0$。

由減法 $z^2-x^2+y(z-x)=0$。但 $z-x\neq 0$。 $\therefore$ $z+x+y=0$。

由是 $x^3+y^3+m(x+y)=(x+y)(x^2-xy+y^2+m)$

$$=(x+y+z-z)(x^2+xy+y^2+m-2xy)=(0-z)(0-2xy)=2xyz$$

30. $y^2+z^2+myz=z^2+x^2+mzx=x^2+y^2+mxy$。則各等於 $\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$。但 x, y, z 各不等。

〔證〕與前題同法。從最初之兩相等式 $x+y+mz=0$。

同法 $y+z+mx=0$。 $\therefore$ 得 $m=1$。 $\therefore$ $x+y+z=0$。

由是各式 $=y^2+z^2+yz=z^2+x^2+zx=x^2+y^2+xy$

$$=\frac{1}{3}\{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx\}=\frac{1}{6}\{3(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2\}$$

$$=(x^2+y^2+z^2)。$$

31. x, y 爲不等。而 $\dfrac{(2x-y-z)^3}{x}=\dfrac{(2y-z-x)^3}{y}$。則各等於 $\dfrac{(2z-x-y)^3}{z}$。

〔證〕 $x+y+z=s$。則 $\dfrac{(3x-s)^3}{x}=\dfrac{(3y-s)^3}{y}=K$。

即 $27x^2-27xs+9s^2-\dfrac{s^3}{x}=27y^2-27ys+9s^2-\dfrac{s^3}{y}=K$……………(1)

即 $27(x^2-y^2)-27s(x-y)+\dfrac{s^3}{xy}(x-y)=0$。但 $x-y\neq 0$。

故以 $x-y$ 除之。則 $27(x+y)-27s+\dfrac{s^3}{xy}=0$。 $\therefore$ $s^3=27xyz$。

故(1)之第一邊爲 $K=27x^2-27xs+9s^2-\dfrac{27xyz}{x}$

$$=9s^2-27(xy+yz+zx)\text{……………(2)}$$

又 $\frac{(2z-x-y)^3}{z}=\frac{(3z-s)^3}{z}=27z^2-27zs+9s^2-\frac{s^3}{z}$

$=27z^2-27sz+9s^2-\frac{27xyz}{z}=9s^2-27(xy+yz+zx)$……………(3)

從(2)及(3) $\frac{(2z-x-y)^3}{z}=K$。

32. a, b, c, d 各為實數量而非0。若 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=4abcd$。

則 $a=\pm b$ 及 $c=\pm d$。

〔證〕括之。則 $(ac-bd)^2+(ad-bc)^2=0$。 $\therefore$ $ac=bd, ad=bc$。

由是 $(ac)(ad)=(bd)(bc)$。 $\therefore$ $a^2=b^2$。 $\therefore$ $a=\pm b$。

33. a, b, c, x 各為實數量。而 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$。

則 $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}=x$。

〔證〕從 $(ax-b)^2+(bx-c)^2=0$。 $ax-b=0$, $bx-c=0$。

34. $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$。則 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$。

〔證〕解括弧而括之。則 $(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2=0$。

故從 $bx-ay=0$, $cy-bz=0$, $az-cx=0$。得證。

35. 示下各式之證。

(1) $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$。則 $a=b$。

(2) $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$。則 $a=b=c$。

(3) $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$。則 $a=b=c=d$。

(4) $n(a^2+b^2+c^2+\cdots n$ 文字$)=(a+b+c+\cdots n$ 文字$)^2$。則 $a=b=c=\cdots\cdots$

〔證〕各從前項減後項。則 $a^2-2ab+b^2$。即如 $(a-b)^2$ 項之和。

故 $a-b=0$, $b-c=0$……………$\therefore$ $a=b=c$……………

36. a, b, c, d 各為實正數。而 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$。則 $a=b=c=d$。

〔證〕括原恆同式。則 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$。

$\therefore$ 從 $a^2=b^2$, $c^2=d^2$, $ab=cd$。得 $a=b=c=d$。

37. $(n-1)x^2+2x(a_1-a_n)+a^2{}_1+2a^2{}_2+2a^2{}_3+\cdots\cdots+2a^2{}_{n-1}+a^2{}_n$

$=2(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n)$。則 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}=x$。

〔證〕本題亦以 $x, a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots a_n$ 爲實數量。今變原方程式爲
$(n-1)x^2+2x\{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(a_{n-1}-a_n)\}+(a_1-a_2)^2+\cdots\cdots$
$+(a_{n-1}-a_n)^2=0$。

但 x^2 爲有 $n-1$ 個。故分配而括之。

則 $\{x+(a_1-a_2)\}^2+\{x+(a_2-a_3)\}^2+\cdots\cdots\cdots+\{x+(a_{n-1}-a_n)\}^2=0$,

$\therefore\ x=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}$。

38. $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$
$\equiv(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)$。

〔證〕左邊依 a 之遞降方乘括之。其後當自明瞭。

$\sum a^3(b+c)=a^3(b+c)+a^2bc+a\{b^3+c^3+bc(b+c)\}+bc(b^2+c^2)$
$=a^2(ab+ac+bc)+a(b+c)(b^2-bc+c^2+bc)+bc(b^2+c^2)$
$=a^2(ab+ac+bc)+(b^2+c^2)(ab+ac+bc)=(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$。

39. $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d)+(c+a-b-d)^4(c-a)(b-d)$
$+(a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)\equiv16(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$

〔證〕$b=c$。則左邊 $=0$。 $\therefore\ (b-c)(c-a)(a-b)$ 爲其因子。

又 $d=a$。則左邊 $=0$。 $\therefore\ (d-a)(d-b)(d-c)$ 亦爲其因子。

$\therefore$ 從左邊 $=A(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$。 $A=16$

40. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$
$\equiv3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$

〔證〕$8(a+b+c)^3-(b+c)^3$ 爲有 $2(a+b+c)-(b+c)$。卽 $2a+b+c$ 之因子
又 $-(c+a)^3-(a+b)^3$。卽 $-\{(c+a)^3+(a+b)^3\}$ 爲有 $(c+a)+(a+b)$。
卽 $2a+b+c$ 之因子。故左邊有 $2a+b+c$ 之因子。同法知有
$a+2b+c$ 及 $a+b+2c$ 之因子。由此可得右邊。

41. $(a+b+c+d)^5-(b+c+d)^5-(c+d+a)^5-(d+a+b)^5-(a+b+c)^5$
$+(b+c)^5+(c+a)^5+(a+b)^5+(a+d)^5+(b+d)^5+(c+d)^5+a^5-b^5-c^5-d^5$
$\equiv60abcd(a+b+c+d)$

〔證〕$a=0$。則原式之左邊 $=0$。

$\therefore$ 從左邊 $=Aabcd(a+b+c+d)$。得 $A=60$。

42. $(a+b+c)^3abc-(bc+ca+ab)^3\equiv abc(a^3+b^3+c^3)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$

〔證〕左邊 $=\{a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\}abc$
$-\{b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3+3(bc+ca)(ca+ab)(ab+bc)\}$

$=abc(a^3+b^3+c^3)+3abc(a+b)(b+c)(c+a)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$

$-3c(b+a)a(c+b)b(a+b)=abc(a^3+b^3+c^3)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$。

43. $(a^2+b^2+c^2)^3+2(bc+ca+ab)^3-3(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)^2$

$\equiv(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$。

〔證〕 $a^2+b^2+c^2=x,\quad bc+ca+ab=y$。則

左邊 $=x^3+2y^3-3xy^2=(x+2y)(x-y)^2$。

$=(a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2$

$=(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$。

44. $(ca-b^2)(ab-c^2)+(ab-c^2)(bc-a^2)+(bc-a^2)(ca-b^2)$

$\equiv(bc+ca+ab)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2)$。

〔證〕 左邊 $=\{(ca-b^2)(ab-c^2)+(ab-c^2)(bc-a^2)+(ab-c^2)^2\}$

$+\{(bc-a^2)(ca-b^2)-(ab-c^2)^2\}$

$=(ab-c^2)\{ca-b^2+bc-a^2+ab-c^2\}-c\{a^3+b^3+c^3-3abc\}$

$=(ab-c^2)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2)-c(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$=(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2)\{ab-c^2+c(a+b+c)\}$。

45. $2(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)-(b^2+bc+c^2)^2$

$+2(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)-(c^2+ca+a^2)^2$

$+2(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)-(a^2+ab+b^2)^2\equiv3(bc+ca+ab)^2$。

〔證〕 本題無別法可解。唯解左邊之第一項。

$2a^4-b^4-c^4+2(a^3c+a^3b-b^3c-c^3b)+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+2abc(a+b+c)$,

其第二項第三項可輪換 a, b, c 而得。相加卽得右邊。

46. $(3a-b-c)^3+(3b-c-a)^3+(3c-a-b)^3$

$-3(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)\equiv16(a^3+b^3+c^3-3abc)$。

〔證〕 右邊爲 $A^3+B^3+C^3-3ABC$。則

$\frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}$ 而 A 爲 $3a-b-c$。B, C 依此輪換。故以之代於上式。則

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(4a-4b)^2+(4b-4c)^2+(4c-4a)^2\}$。卽得右邊。

47. $(na-b-c)^2+(nb-c-a)^2+(nc-a-b)^2$

$-3(na-b-c)(nb-c-a)(nc-a-b)\equiv(n+1)^2(n-2)(a^2+b^3+c^3-3abc)$

〔證〕 與前題同法。卽左邊爲

$\frac{1}{2}\{(n-1)a+(n-1)b+(n-1)c\}$

$$\{(n+1)^2(a-b)^2+(n+1)^2(b-c)^2+(n+1)^2(c-a)^2\}$$
$$=(n+1)^2(n-1)(a^3+b^3+c^3-3abc)。$$

48. $(x^2+2yz)^3+(y^2+2zx)^3+(z^2+2xy)^3$
$$-3(x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy)\equiv(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2。$$

〔證〕如**156**章第四例用ω。則較容易 即

$$(x^2+2yz)+(y^2+2zx)+(z^2+2xy)=(x+y+z)^2。$$

$\omega^3=1$。故$(x^2+2yz)+\omega(y^2+2zx)+\omega^2(z^2+2xy)=(x+\omega^2y+\omega z)^2$。

又 $(x^2+2yz)+\omega^2(y^2+2zx)+\omega(z^2+2xy)=(x+\omega y+\omega^2z)^2$兩邊各連乘。則原式$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$。

49. $(by+az)^3+(bz+ax)^3+(bx+ay)^3-3(by+az)(bz+ax)(bx+ay)$
$$\equiv(a^3+b^3)(x^3+y^3+z^3-3xyz)。$$

〔證〕與**47, 48**例同法。

50. $1+\omega+\omega^2=0$。則$\{(b-c)(x-a)+\omega(c-a)(x-b)+\omega^2(a-b)(x-c)\}^3$
$$+\{(b-c)(x-a)+\omega^2(c-a)(x-b)+\omega(a-b)(x-c)\}^3$$
$$\equiv27(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)。$$

〔證〕左邊之第一項爲A,第二項爲B,則

左邊$=A^3+B^3=(A+B)(A+\omega B)(A+\omega^2B)$。

但$A+B=2(b-c)(x-a)+(\omega+\omega^2)(c-a)(x-b)+(\omega+\omega^2)(a-b)(x-c)$
$$=2(b-c)(x-a)-(c-a)(x-b)-(a-b)(x-c)$$
$$=3(b-c)(x-a)-\{(b-c)(x-b)+(c-a)(x-b)+(a-b)(x-c)\}$$
$$=3(b-c)(x-a)-\{0\}=3(b-c)(x-a)。$$

由同法$A+\omega B=3\omega^2(c-a)(x-b)$, $A+\omega^2B=3\omega(a-b)(x-c)$。

$\therefore$ 左邊$=27(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)$。

51. 兩平方數之和。所成之若干因子之積。可以兩平方數之和表之。

〔證〕$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$其理已明。

故$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=A^2+B^2$。由同理

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)=(A^2+B^2)(e^2+f^2)=(Ae+Bf)^2+(Af-Be)^2$。

又以此式爲C^2+D^2。同法得四因子之積。爲E^2+F^2。

由是可如題云云。

52. $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)\equiv(ap+bq+cr+ds)^2$

$$+(aq-bp+cs-dr)^2+(ar-bs-cp+dq)^2+(as+br-cq-dp)^2。$$

〔證〕 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$

$$=(a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2+d^2s^2)+(a^2q^2+b^2p^2+c^2s^2+d^2r^2)$$

$$+(a^2r^2+b^2s^2+c^2p^2+d^2q^2)+(a^2s^2+b^2r^2+c^2q^2+d^2p^2)。$$

上之各項。補足 $2abpq$, $2cdrs$……又各減去之。卽得原式之右邊。

由是 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$。可得 $X^2+Y^2+Z^2+U^2$ 之形。

由同理 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$。

卽爲 $(X^2+Y^2+Z^2+U^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ 之形。又此形可得

$M^2+N^2+P^2+Q^2$ 之形。

本題與前題爲同性質之題。

53. $(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$。可用 X^2+XY+Y^2 表之。

〔證〕 $1+\omega+\omega^2=0$, 及 $\omega^3=1$。

故 $x^2+xy+y^2=x^2-(\omega+\omega^2)xy+\omega^3y^2=(x-\omega y)(x-\omega^2y)$。

$\therefore$ 左邊 $=(x-\omega y)(a-\omega b)(x-\omega^2y)(a-\omega^2b)$。

但 $(x-\omega y)(a-\omega b)=ax-\omega(bx+ay)+\omega^2by$。今用 $\omega^2=-1-\omega$

$$=(ax-by)-\omega(bx+ay+by)=X-\omega Y。$$

由同法得 $(x-\omega^2y)(a-\omega^2b)=X-\omega^2Y$。

$\therefore$ 左邊 $=(X-\omega Y)(X-\omega^2Y)=X^2+XY+Y^2$。

54. $(x^2+pxy+qy^2)(a^2+pab+qb^2)$。可用 $X^2+pXY+qY^2$ 表之。

〔證〕 $x^2+pxy+qy^2=(x+\alpha y)(x+\beta y)$。則 $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$。

$\therefore$ $(x^2+pxy+qy^2)(a^2+pab+qb^2)=(x+\alpha y)(a+\beta b)(x+\beta y)(a+\alpha b)$。

但 $(x+\alpha y)(a+\beta b)=ax+\alpha ay+\beta bx+\alpha\beta by$

$=ax+\alpha ay+(p-\alpha)bx+qby=(ax+pbx+qby)+\alpha(ay-bx)$

$=X+\alpha Y$。同法 $(x+\beta y)(a+\alpha b)=X+\beta Y$。

$\therefore$ 左邊 $=(X+\alpha Y)(X+\beta Y)=X^2+pXY+qY^2$。

55. $2s\equiv a+b+c$。則

(1) $a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)+c(s-a)(s-b)+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc$。

(2) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$。

(3) $(b+c)s(s-a)+a(s-b)(s-c)-2sbc$

$=(c+a)s(s-b)+b(s-c)(s-a)-2sca$

$=(a+b)s(s-c)+c(s-a)(s-b)-2sab$。

(4) $a(b-c)(s-a)^2+b(c-a)(s-b)^2+c(a-b)(s-c)^2=0$。

(5) $s(s-b)(s-c)+s(s-c)(s-a)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)=abc$。

(6) $(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2+s^2(s-b)^2(s-c)^2+s^2(s-c)^2(s-a)^2+s^2(s-a)^2(s-b)^2$

$+s(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)=a^2b^2c^2$。

〔證〕(1) 左邊 $=s^2\sum a-2s\sum bc+3abc+2\{s^3-s^2\sum a+s\sum bc-abc\}$

$=2s^3+3abc+2\{s^3-2s^3-abc\}=3abc+2\{-abc\}=abc$。

(2) 左邊 $=3s^3-3s^2(a+b+c)+3s(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3-3abc)$。

$=3s^3-6s^3+3s(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc+ca)$

$=-3s^3+3s(a^2+b^2+c^2)-2s(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=-3s^3+s(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)=-3s^3+s(2s)^2=s^3$。

(3) $(b+c)s(s-a)+a(s-b)(s-c)-2sbc$ 爲 $s^2(a+b+c)-2s(ab+bc+ca)+abc$ 爲 a, b, c 之輪換等勢式。故如題意。

(4) 解左邊之括弧。

(5) 左邊 $=s(s-c)(s-b+s-a)+(s-a)(s-b)(s-s+c)$

$=s(s-c)c+(s-a)(s-b)c=(s^2-cs+s^2-as-bs+ab)c=abc$。

(6) 以本題(5)之恆同式之兩邊平方之。卽得。

56. $2s=a+b+c+d$。則 $4(bc+ad)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2$

$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$。

〔證〕從左邊 $=\{2(bc+ad)+(b^2+c^2-a^2-d^2)\}$

$\{2(bc+ad)-(b^2+c^2-a^2-d^2)\}$

$=\{(b+c)^2-(a-d)^2\}\{(a+d)^2-(b-c)^2\}$ 可得右邊。

57. $a+b+c+d=0$。則 $ad(a+d)^2+bc(a-d)^2+ab(a+b)^2+cd(a-b)^2$

$+ac(a+c)^2+bd(a-c)^2+4abcd=0$。

〔證〕$a+d=-(b+c)$， $a+b=-(c+d)$， $a+c=-(b+d)$。故

左邊 $=ad(b+c)^2+bc(a-d)^2+ab(c+d)^2+cd(a-b)^2+ac(b+d)^2+bd(a-c)^2$

$+4abcd=ad(b^2+c^2)+bc(a^2+d^2)+ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)+ac(b^2+d^2)$

$+bd(a^2+c^2)+4abcd$

$=abd(a+b+d)+acd(a+c+d)+bcd(b+c+d)+abc(a+b+c)+4abcd$

$=abd(-c)+acd(-b)+bcd(-a)+abc(-d)+4abcd=0$。

58. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$。則 $ac=bd$。

〔證〕$(b+c)(d+a)(a+b)(c+d)=\{(a+b)+(c+d)\}\{cd(a+b)+ab(c+d)\}$。

即 $(cd+ab+bd+ac)(a+b)(c+d)=cd(a+b)^2+(cd+ab)(a+b)(c+d)$
$+ab(c+d)^2$。

即 $cd(a+b)^2-(bd+ac)(a+b)(c+d)+ab(c+d)^2=0$。

即 $\{c(a+b)-b(c+d)\}\{d(a+b)-a(c+d)\}=0$。即 $-(bd-ac)^2=0$。

59. $a+b+c=0$, 及 $x+y+z=0$。則

$4(ax+by+cz)^3-3(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$-2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)=54abcxyz$。

〔證〕左邊用 $-(a+b)$ 代 c 且 $a=0$。則左邊爲 0。推之 b, c, x, y, z 亦同。

∴ 左邊 $=Labcxyz$ 而得 $L=54$。

60. 設 $a+b+c=0$。則下各式之證如何。

(1) $2(a^7+b^7+c^7)=7abc(a^4+b^4+c^4)$。

(2) $6(a^7+b^7+c^7)=7(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$。

(3) $a^6+b^6+c^6=3a^2b^2c^2+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^3$。

(4) $25(a^7+b^7+c^7)(a^3+b^3+c^3)=21(a^5+b^5+c^5)^2$。

〔證〕本題依 129 章。可得上各式之證。

61. $a+b+c+d=0$。則 $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+cda+dab+abc)^2$
$=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$。

〔證〕$a^3+b^3+c^3+d^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d)$

$=-(c+d)^3+3ab(c+d)+(c+d)^3+3cd(a+b)=3(abc+abd+acd+bcd)$

平方之。則 $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(abc+abd+acd+bcd)^2$。

又 $a^3+b^3+c^3+d^3=a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$。

∴ $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(a+b)(b+c)(b+c)(c+a)(c+a)(a+b)$

$=9\{ac+b(b+a+c)\}\{ab+c(a+b+c)\}\{bc+a(a+b+c)\}$

$=9(ac-bd)(ab-cd)(bc-ad)$。

62. $a+b+c=0$。則 $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$。

〔證〕左邊 $=\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}\times\frac{\sum a(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$

$=\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}\times\frac{-\sum a\{a^2-a(b+c)+bc\}}{(b-c)(c-a)(a-b)}=\frac{\sum a(2a^2+bc)}{abc}$

$=\frac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)+9abc}{abc}=\frac{9abc}{abc}=9$。

63. $\frac{1}{1+l+ln}+\frac{m}{1+m+ml}+\frac{nm}{1+n+nm}=1$。

$\frac{l}{1+l+ln}+\frac{ml}{1+m+ml}+\frac{1}{1+n+nm}=1$。其分母皆非 0，則 $l=m=n$。

〔證〕以 l 乘第一減第二，則 $\frac{mnl-1}{1+n+nm}=l-1$。去分母。

則 $l+ln=n+nm$，卽 $1+l+ln=1+n+nm$。故以此代入第一。

則 $\frac{1}{1+n+nm}+\frac{m}{1+m+ml}+\frac{nm}{1+n+nm}=1$。

卽 $\frac{m}{1+m+ml}=\frac{n}{1+n+nm}$。卽 $\frac{1}{m}+1+l=\frac{1}{n}+1+m$。

$\therefore\ (m-n)(1+mn)=0$。但 $1+n+nm$ 非 0。故 $1+mn\neq$

$\therefore\ m+n=0$。 $\therefore\ m=n$。

64. $a+(1-a)b+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)d+\cdots\cdots$

$\equiv 1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\cdots\cdots$

〔證〕左邊 $=1-(1-a)+(1-a)b+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)d+\cdots$

$=1-(1-a)(1-b)+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)d+\cdots\cdots$

$=1-(1-a)(1-b)(1-c)+(1-a)(1-b)(1-c)d+\cdots\cdots$

$=1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+\cdots\cdots$以下類推。

65. $\frac{1}{a}=1+2(1-a)+3(1-a)(1-2a)+\cdots\cdots$

$+\{n(1-a)(1-2a)\cdots\cdots(1-\overline{n-1}a)\}+\frac{1}{a}\{(1-a)(1-2a)\cdots\cdots(1-na)\}$。

〔證〕用前例 $b=2a,\quad c=3a,\quad d=4a\cdots\cdots$

則 $a+(1-a)2a+(1-a)(1-2a)3a+(1-a)(1-2a)(1-3a)4d+\cdots\cdots$

$\equiv 1-(1-a)(1-2a)(1-3a)(1-4a)\cdots\cdots$

兩邊以 a 除之。移項。卽得本題之證。

66. $a^n+a^{n-1}(1-a^n)+a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1})+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\{a(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a^2)\}+\{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)\}=1$。

〔證〕 左邊$=1-(1-a^n)+a^{n-1}(1-a^n)+a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1})+\cdots\cdots\cdots$

$=1-(1-a^n)(1-a^{n-1})+a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1})+\cdots\cdots\cdots$

順次如此括之。則

左邊$=1-(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)+\{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots(1-a)\}=1$。

67. n 爲任意之正整數。則 $\dfrac{1-a^n}{1-a}+\dfrac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}$

$$+\frac{(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}+\cdots\cdots+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)}{1-a^n}=n。$$

〔證〕 原式之左邊爲 F_n。則

$$F_n=\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\cdots\cdots+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)}{1-a^n}。$$

$$F_{n+1}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)}{1-a^2}+\cdots\cdots+\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)\cdots\cdots(1-a^2)}{1-a^n}$$

$$+\frac{(1+a^{n+1})(1-a^n)\cdots\cdots(1-a)}{1-a^{n+1}}。$$

減上之相當項。則

$F_{n+1}-F_n=x^n+a^{n-1}(1-a^n)+a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1})+\cdots\cdots\cdots$

$+a\{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a^2)\}+\}(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)=1,$

從前例由是 $F_{n+1}=F_n+1$。由是 $F_2=F_1+1,\ F_3=F_2+1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

然 $F_1=\dfrac{1-a^1}{1-a}=1,\quad\therefore\quad F_2=F_1+1=2,\ F_3=F_2+1=3\cdots\cdots\cdots F_n=n$。

68. $a+b+c+d=0,\ x+y+z+u=0$。$ax+by+cz+dn=0$。則

$2(a^4x+b^4y+c^4z+d^4u)=(a^2x+b^2y+c^2z+d^2u)(a^2+b^2+c^2+d^2)$。

〔證〕 從第三 $(ax+by+cz+du)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)=0$。

即 $x+y+z+u+ax\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)+by\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{a}\right)+cz\left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$$+du\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0。$$

從 $x+y+z+u=0$。去上之分母。則

$a^2x(bc+cd+db)+b^2y(cd+da+ac)+c^2z(da+ab+bd)+d^2u(ab+bc+ca)=0$

但 $a^2x(bc+cd+db)=\frac{1}{2}a^2x\{(b+c+d)^2-b^2-c^2-d^2\}$

$$=\tfrac{1}{2}a^2x(a^2-b^2-c^2-d^2)=a^4x-\tfrac{1}{2}a^2x(a^2+b^2+c^2+d^2)。$$

故上之方程式爲 $a^4x+b^4y+c^4z+d^4u$

$$-\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^2x+b^2y+c^2z+d^2u)=0。$$

69. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。

〔證〕 $F_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。

$F_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}$ 由減法。

$F_{2n}-F_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。

又 $F_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。

$F_n=\quad 1\quad+\frac{1}{2}\quad+\frac{1}{3}\quad\quad+\frac{1}{n}$ 由減法。

$$F_{2n}-F_n=1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{1}{2n}。$$

70. $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{u+a}+\frac{1}{v-b}=\frac{1}{u+a'}+\frac{1}{v-b'}=\frac{1}{f}$。則

$f^2(ab'-a'b)^2=aa'bb'(a-a')(b-b')$。

〔證〕 $uv=f(u+v)$,

$uv=f(u+v)+f(a-b)-av+bu+ab$,

$uv=f(u+v)+f(a'-b')-a'v+b'u+a'b'$,

$\therefore\quad av-bu=f(a-b)+ab,\quad a'v-b'u=f(a'-b')+a'b'$。

由是 $u=\dfrac{aa'(b-b')+f(ab'-a'b)}{ab'-a'b},\quad v=\dfrac{bb'(a-a')+f(ab'-a'b)}{ab'-a'b}$。故

$$uv=\frac{aa'bb'(a-a')(b-b')+\{aa'(b-b')+bb'(a-a')\}f(ab'-a'b)+f^2(ab'-a'b)^2}{(ab'-a'b)^2}。$$

又 $f(u+v)=\dfrac{f\{aa'(b-b')+bb'(a-a')+2f(ab'-a'b)\}}{ab'-a'b}$。

$uv=f(u+v)$。故由此可得結果。

第拾貳編補

霍爾及乃托氏第三十四編摘要

消去法

533. 第三例 從 $x^2-y^2=px-qy$, $4xy=qx+py$, $x^2+y^2=1$。消去 x 及 y。

〔解〕 $x(x^2-y^2)+y(4xy)=x(px-qy)+y(qx+py)$。

卽 $x^3+3xy^2=p(x^2+y^2)=p(1)=p$ ....(A)

又 $y(x^2-y^2)-x(4xy)=y(px-qy)-x(qx+py)$。

卽 $-3x^2y-y^3=-q(y^2+x^2)=-q(1)=-q$ ....(B)

從 (A) 式減 (B) 式。則 $(x+y)^3=p+q$。 $\therefore\quad x+y=(p+q)^{\frac{1}{3}}$。

(A) 式加 (B) 式。則 $(x-y)^3=p-q$。 $\therefore\quad x-y=(p-q)^{\frac{1}{3}}$。

由是 $(p+q)^{\frac{2}{3}}+(p-q)^{\frac{2}{3}}=(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)=2$。

〔例題三十四〕 $x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$。

$\frac{a}{x}(x-p)=\frac{b}{y}(y-q)=\frac{c}{z}(z-r)$。消去 x, y, z。

〔解〕 令後式之各項爲 λ。則

$$x=\frac{ap}{a-\lambda},\qquad y=\frac{bq}{b-\lambda},\qquad z=\frac{cr}{c-\lambda}。$$

又 $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=1^2-1$。卽 $xy+yz+zx=0$。以上之 x, y, z 代入。而求其 λ。則得 x, y, z 之值。乃以所得之值。代用於 $x+y+z=1$ 而變化之。則

$$\frac{1}{(a-b)cr+(a-c)bq}+\frac{1}{(b-c)ap+(b-a)cr}+\frac{1}{(c-a)bq+(c-b)ap}$$

$$=\frac{1}{bcqr+carp+abpq}。$$

第拾叁編

方乘，方根，分指數，負指數

159. 自乘法〔Involution〕 凡求一數量之方乘。謂之自乘法。又求一數量之方根。謂之開方法〔Evolution〕。$5^2=25$ 爲自乘法。$\sqrt{25}=5$。爲開方法。

本編專論自乘法及開方法。以擴張指數之運用。

160. 指數之法則 依31章 m 及 n 爲任意之正整數。可證明之如下。 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ……(1)

此爲指數定則最要之公式。

由是 $a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n}\times a^p=a^{m+n+p}$。同理推之。

$$a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots\cdots}\cdots\cdots(2)$$

〔法則〕 同數量若干方乘之積。以各因子指數之和。爲其指數。

又 $a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\cdots n$ 因子 $=a^{m+m+m+\cdots n\text{項}}=a^{mn}$。

即 $$(a^m)^n=a^{mn}\cdots\cdots(3)$$

〔法則〕 一數量之某方乘。以方乘之指數。與原指數之積。爲其指數。

又 $(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\cdots\cdots m$ 因子。

$=(aaa\cdots\cdots m$ 因子$)(bbb\cdots\cdots m$ 因子$)=a^mb^m$。

同法 $(abc\cdots\cdots)^m=a^mb^mc^m\cdots\cdots(4)$

〔法則〕 積之方乘。以各因子之方乘爲其因子。

最普通者。爲 $(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=(a^x)^m(b^y)^m(c^z)^m\cdots\cdots$ 從(4)式

$=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots$ 從(3)式

由是 $(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots(5)$

〔法則〕 代數式任意之方乘。取方乘之指數乘因子之指數。各以其積爲因子之指數。

其特別之處。爲 $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(a\times\frac{1}{b}\right)^m=a^m\times\left(\frac{1}{b}\right)^m=a^m\times\frac{1}{b^m}=\frac{a^m}{b^m}$。

161. 符號之定則 正數量之方乘常爲正。而負數量之方乘。則各次正負相間。

$$(-a)^2=(-a)(-a)=+a^2。$$
$$(-a)^3=(-a)^2(-a)=+a^2(-a)=-a^3。$$
$$(-a)^4=(-a)^3(-a)=-a^3(-a)=+a^4。$$

以下同理。故 $(-a)^{2n}=+a^{2n}$ 及 $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$。

〔別證〕 上之最後二式。可依前章之 (3) 式。逕得其證。

例如 $(-a)^{2n}=\{(-a)^2\}^n=(+a^2)^n=+a^{2n}$。

又 $(-a)^{2n+1}=(-a)(-a)^{2n}=-a(+a^{2n})=-a^{2n+1}$。

〔法則〕 不論正數量與負數量。其偶數方乘皆爲正。而奇數方乘則與原數量同符號。(如原數爲正亦正。原數爲負亦負)。

162. 算術上之方根 在算術上求其平方根或他方根。恆能得其畧近之値。然求一不盡數之平方根或立方根。甚爲緊雜。故本編於數根之實地計算法。不復縷述。僅於理論上之證明。而示其運算於下。

例如求 $\sqrt{62}$ 之略近値。先記 1, 2, 3, ……… 諸數之平方。至所得平方大於 62 而止。而 7^2 小於 62。8^2 大於 62。故 $\sqrt{62}$ 在 7 與 8 之間。

次記 7.1, 7.2, 7.3, ……… 之平方。至大於 62 而止。而 $(7.8)^2$ 小於 62。$(7.9)^2$ 大於 62。故又知 $\sqrt{62}$ 在 7.8 與 7.9 之間。

次又記 7.81, 7.82, 7.83, ……… 之平方。如前法求之。則又知 $\sqrt{62}$ 在 7.83 與 7.84 之間。

逐次如此。雖所得之平方。不能恰合於 62。而屢次所得一爲小於 62 之平方。一爲大於 62 之平方。其差可漸次減小。至求得 $\sqrt{62}$ 之略近値。極其精密。

此法不僅可用於求平方根。卽求他方根亦可用之。故任意之整數或分數之 n 方根。恆能求得。

163. 根原定則之不盡根 代數學之根原定則。於文字之整數或分數。已證明其合理。而此編於不盡根。亦可證明之如下。

例如於根原定則中考察其互換法則。卽證

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}。$$

x, y 及 p, q 爲整數或分數。而令 x, y 之間有 $\sqrt[n]{a}$。p, q 之間有 $\sqrt[m]{b}$ 如下。

$$x>\sqrt[n]{a}>y。$$
$$p>\sqrt[m]{b}>q。$$

而 x 與 y 之差及 p 與 q 之差。可設爲無限小。以此兩不等式之相應項相乘。則

$$x\times p>\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}>y\times q。$$

或 $$p\times x>\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}>q\times y。$$

因 p, q, x, y 爲分數或整數。故由互換法則。而得

$$x\times p=p\times x, \qquad y\times q=q\times y。$$

依 162 章之證明。x 與 y 爲 $\sqrt[n]{a}$ 之略近之值。其差可至任何小。又 p 與 q 亦然。故小至於極限。則 $p\times x$ 與 $q\times y$ 之差。可幾至於無而相等。由是夾於兩積之 $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}$ 及 $\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}$ 亦不能不相等。

$$\therefore\quad \sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}。$$

由是知不盡根。亦能依互換法則。而證其合理。

164. 方乘及方根之區別 一數量之平方根有二。立方根有三。已示於前。故一數量之 n 方根有 n 個。此卽方根與方乘相異之處。何則。一數量之某方乘。祇有一個。例如 5 之平方。僅有 $5^2=25$ 之一數。而其方根卽 $\sqrt{25}$。則有 $+5$ 及 -5 之二根是也。

165. 不盡根之法則 積之 m 方乘。等於其因子 m 方乘之積。已證於 160 章之 (4) 式。而不盡根之因子。亦可依 163 章同法證之。卽 $(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\ldots\ldots\ldots)^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\times\ldots\ldots\ldots=a\times b\times\ldots\ldots\ldots$

由是 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\ldots\ldots\ldots=\sqrt{(a\times b\times\ldots\ldots\ldots)}$。

〔法則〕 諸數量之各平方根之積。等於諸數量之積之平方根。

由此法。則 $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{(2\times 8)}=\sqrt{16}=4$。

由此法而反用之。則 $\sqrt{75}=\sqrt{(5^2\times 3)}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$。

由此法而擴張之。則

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\ldots\ldots\ldots=\sqrt[n]{ab\ldots\ldots\ldots}\quad 及\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}。$$

又 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$。何則。兩邊各乘至 np 方。皆爲 a^{mp}。一項式之方乘。以其指數乘 m 爲指數。即 $(a^n)^m=a^{mn}$。故求此式之 m 方根。可以 m 除其指數。即 $\sqrt[m]{a^{mn}}=a^{mn\div m}=a^n$。

又 $\sqrt[2]{a^4}=a^2$, $\sqrt[3]{a^6b^9c^3}=a^2b^3c$。 $\sqrt[n]{a^{n\alpha}b^{n\beta}c^{n\gamma}}=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$。

但此等方根。爲在2方根, 3方根, n 方根之內。各取其一個。而 n 方根。必有 n 個之說也。

分指數及負指數之法則

166. 指數 前所論之指數。皆爲正整數。然如墨守此法則。則其用甚狹。今將其法則擴充之。證明指數之爲分數或負數。如 $a^{\frac{3}{2}}$ 或 a^{-2} 等。無不合理。

凡指數不僅爲正整數。即爲分數及負數。而在代數記號。恆不關其値之如何。而能依同一之定則。

今有 a^n 試命 n 爲分數或負數。則先依根原之指數定則。

$$a^m\times a^n=a^{m+n}。$$

若 m, n 各爲 $\frac{1}{2}$。 則 $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$。

即 $(a^{\frac{1}{2}})^2=a$。 而 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$。

故 n 爲分數。亦合於指數之常例。而 n 爲 $\frac{1}{2}$。其意義即所以示 a 之平方根也。

又推求 a^{-2} 之意義。

設 $m=3$, $n=-2$。依指數之法則。

$$a^3\times a^{-2}=a^{3-2}=a。\qquad \therefore\quad a^{-2}=\frac{a}{a^3}=\frac{1}{a^2}。$$

由同理可推得 $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$ 等。

167. 分指數及負指數之法則 今取普通之例示之如下。

〔第一〕 解 $a^{\frac{1}{n}}$ 之意義。但 n 爲任意之正整數。

由指數之法則。$(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots$ 至 n 因子

$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots n\text{項}}=a^{n\times\frac{1}{n}}=a。$$

故知 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

〔第二〕 求 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。但 m 及 n 爲任意之正整數。

由指數之法則。

$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots$ 至 n 因子。

$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots n\text{項}}=a^{\frac{mn}{n}}=a^m。\quad\therefore\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}。$$

又別法 $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$。 卽 $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$。

由是知 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。爲 a 之 m 方乘之 n 方根。亦可爲 a 之 n 方根之 m 方乘。故可書之如下。

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m。$$

又 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。從 165 章可得 $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$。

〔註〕 $\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m$ 之意義。苟如 164 章所示謂 n 方根。必有 n 個。則不能適合。故必如 165 章。僅取 n 方根內之一。乃合於理。例如 $\sqrt[2]{(a^4)}=\pm a^2$。則有二根。而 $(\sqrt[2]{a})^4$。卽 $+a^2$ 祇此一個之值。卽 $\sqrt[2]{(a^4)}$ 與 $(\sqrt[2]{a})^4$ 相異之點。

〔第三〕 示 $a^0=1$ 之意義。

由指數之法則。$a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m$。 $\therefore\quad a^0=a^m\div a^m=1$。

故不論 a 爲如何之數。而 $a^0=1$。卽 $2^0=(\sqrt{5})^0=\left(\frac{2}{3}\right)^0=(-7)^0=1$。

〔第四〕 求 a^{-m} 之意義。但 m 爲任意之正整數。

由指數之法則。$a^{-m}\times a^m=a^{-m+m}=a^0$。但由第三 $a^0=1$。

故 $\quad a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$ 及 $a^m=\dfrac{1}{a^{-m}}$。

168. 指數之諸公式 在前章證明 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 之法。則無論爲分指數及負指數。皆可準此推求。故由此法。則不問 m 及 n 爲如何之數。均能合於下之諸公式。

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn},\quad (ab)^n=a^nb^n。$$

以上諸式。已證明於160章。玆再就分指數及負指數反覆推之。以證其合理。

〔第一〕 證 $a^m\times a^n=a^{m+n}$。命 m 及 n 爲分數 $\frac{p}{q}$ 及 $\frac{r}{s}$。但 p, q, r, s 爲正數。則

$$\begin{aligned} a^m\times a^n&=a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\times\sqrt[s]{a^r} && \text{〔由定義〕}\\ &=\sqrt[qs]{a^{ps}}\times\sqrt[qs]{a^{rq}}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}} && \text{〔165 章〕}\\ &=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{m+n}。\end{aligned}$$

又命 m 及 n 爲負數。則

$$a^{-m}\times a^{-n}\times\frac{1}{a^m}\times\frac{1}{a^n}\text{〔由定義〕}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-m-n}。$$

及 $$a^{-m}\times a^n\times\frac{1}{a^m}\times a^n=a^n\div a^m=a^{n-m}=a^{-m+n}。$$

由是 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 對於 m 及 n 不論爲如何之值。均能合理。

推論 $a^{m-n}\times a^n=a^m$。其 m 及 n 爲任意之值。亦能合理。故推得 $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

〔第二〕 證 $(a^m)^n=a^{mn}$。但 m 及 n 爲任意之值。

先設 n 爲正整數。m 爲任意之值。則

$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\ldots\ldots n\text{因子}=a^{m+m+m+\cdots n\text{項}}\text{〔167章第一〕}=a^{mn}。$$

次設 n 爲正分數 $\frac{p}{q}$。而 p, q 爲正整數。則

$$(a^m)^n=(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\{(a^m)^p\}}=\sqrt[q]{(a^{mp})}。\text{因 } p \text{ 爲整數。故}$$

$$=a^{\frac{mp}{q}}=a^{mn}。$$

更設 n 爲負數。即 $-p$。則

$$(a^m)^n=(a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}=\frac{1}{a^{mp}}=a^{-mp}=a^{mn}。$$

由是 m 及 n 不論爲如何之值。而 $(a^m)^n=a^{mn}$。恆能合理。

〔第三〕 證 $(ab)^n=a^nb^n$。但 n 爲任意之值。

在 160 章 n 爲正整數。則已證明 $(ab)^n=a^nb^n$ 矣。

今設 m 爲任意之數。q 爲正整數。則

$$(a^mb^m)^q=a^mb^m\times a^mb^m\times\cdots\cdots\cdots q\text{因子}$$
$$=a^{m+m+\cdots\cdots q\text{項}}\times b^{m+m+\cdots\cdots q\text{項}}$$
$$=a^{mq}b^{mq}。$$

設 n 爲正分數 $\frac{p}{q}$。而 p 及 q 爲正整數。則

$(ab)^n=(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{(a^pb^p)}$。〔因 p 爲正整數故〕。

又 $(a^nb^n)^q=a^{nq}b^{nq}$。〔因 q 爲正整數故〕。

由是對於 n 之任意之正值。而 $a^nb^n=\sqrt[q]{(a^pb^p)}=(ab)^n$。

更設 n 爲負數 $-m$。則

$$(ab)^n=(ab)^{-m}=\frac{1}{(ab)^m}=\frac{1}{a^mb^m}=a^{-m}b^{-m}=a^nb^n。$$

例　題

1. 化 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}$ 爲簡式。　〔解〕 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}$。

2. 化 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}\times a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{6}{5}}$ 爲簡式。　〔解〕 $a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}=a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{10}{5}}=a^2b^2$。

3. 化 $(-a^{-2}b^{\frac{4}{3}})^{-\frac{3}{2}}$ 爲簡式。　〔解〕 $(a^{-2})^{-\frac{3}{2}}(b^{\frac{4}{3}})^{-\frac{3}{2}}=a^3b^{-2}=\frac{a^3}{b^2}$。

4. 化 $\sqrt{(a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}})}\div\sqrt[3]{(a^{\frac{1}{2}}b^4c^{-1})}$ 爲簡式。

〔解〕 $a^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^0=\frac{\sqrt[6]{b}}{a}$。

169. 有理補因子 已知之無理式。以他代數式乘之。其積可變爲有理式。則其乘式。謂爲原式之有理補因子。例如下。

$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-\sqrt{b^2}=a^2-b$。故 $a+\sqrt{b}$ 爲 $a-\sqrt{b}$ 之有理補因子。而 $a-\sqrt{b}$ 亦爲 $a+\sqrt{b}$ 之有理補因子。

又 $a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}$ 爲 $a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}$ 之有理補因子。

又從已知之恆同式 $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ 可推

$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 之有理補因子爲

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})(\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r})(-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})。$$

而用此恆同式可求得特別之例如下。

$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})=(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2-r=p+q-r+2\sqrt{pq}$。

而 $(p+q-r-2\sqrt{pq})(p+q-r+2\sqrt{pq})=(p+q-r)^2-4pq$。故

$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 之有理補因子爲 $(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})(p+q-r-2\sqrt{pq})$。

又從恆同式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$。卽得

$a+b^{\frac{1}{3}}$ 爲 $a^2-ab^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ 之有理補因子。

170. 求任意二項式有理補因子。

求 $ax^{\frac{p}{q}}\pm by^{\frac{r}{s}}$ 之有理補因子。則令

$X=ax^{\frac{p}{q}}$ 及 $Y=by^{\frac{r}{s}}$ 而 n 爲 q 及 s 之最小公倍數。則 X^n 及 Y^n 皆爲有理式。

由是 $(X+Y)\{X^{n-1}-X^{n-2}Y+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}Y^{n-1}\}=X^n+(-1)^{n-1}Y^n$。

及 $(X-Y)(X^{n-1}+X^{n-2}Y+\ldots\ldots+Y^{n-1})=X^n-Y^n$。

故 $X+Y$ 及 $X-Y$ 之有理補因子爲

$$X^{n-1}-X^{n-2}Y+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}Y^{n-1}。$$

及 $$X^{n-1}+X^{n-2}Y+\ldots\ldots+Y^{n-1}。$$

〔例〕 求 $x^{\frac{2}{3}}-ay^{\frac{5}{6}}$ 之有理補因子。令 $X=x^{\frac{2}{3}}$, $Y=ay^{\frac{5}{6}}$, $n=6$。

由是 $X^6=x^4$, $Y^6=a^6y^5$, 而 $X-Y$ 之有理補因子爲

$$X^5+X^4Y+X^3Y^2+X^2Y^3+XY^4+Y^5。故$$

$x^{\frac{2}{3}}-ay^{\frac{5}{6}}$ 之有理補因子爲

$$x^{\frac{10}{3}}+ax^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{6}}+a^2x^2y^{\frac{5}{3}}+a^3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{2}}+a^4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{10}{3}}+a^5y^{\frac{25}{6}}。$$

例題十七

1. 化 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}\times a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$ 爲最簡式。 答 $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$。

〔解〕 $a^{\frac{2}{3}+(-\frac{1}{2})}b^{\frac{5}{6}+(-\frac{2}{3})}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$。

2. 化 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{4}}\times(a^2)^{-\frac{1}{6}}\times\dfrac{1}{(a^{-\frac{1}{12}})^5}$ 爲簡式。 答 1。

〔解〕 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{3}{4}}\times a^{-\frac{2}{6}}\times(a^{-\frac{1}{12}})^{-5}=a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{2}{6}+\frac{5}{12}}=a^0=1$。

3. 化 $(ab^{-2}c^3)^{\frac{1}{2}}\times(a^3b^2c^{-3})^{\frac{1}{3}}$ 爲簡式。 答 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}$。

〔解〕 $a^{\frac{1}{2}}b^{-1}c^{\frac{3}{2}}\times ab^{\frac{2}{3}}c^{-1}=a^{\frac{1}{2}+1}b^{-1+\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{2}-1}=a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}$。

4. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(x^{\frac{a+b}{b-a}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$。 答 1。

〔解〕 $x^{\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}+\frac{a+b}{(b-a)(c-a)}}=x^0=1$。

5. 以 $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$ 乘 $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$。 答 $x-y$。

〔解〕 用 $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$ 式。

6. 以 x^2-1+x^{-2} 乘 x^2+1+x^{-2}。 答 x^4+1+x^{-4}。

〔解〕 $\{(x^2+x^{-2})+1\}\{(x^2+x^{-2})-1\}=(x^2+x^{-2})^2-1=x^4+2+x^{-4}-1$。

7. 以 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ 乘 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$。

答 $x+y+z-3xyz$。

〔解〕 用 $(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(a+b+c)=a^3+b^3+c^3-3abc$ 之恆同式。

8. 以 $x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}$ 除 $x^{\frac{4}{3}}-2+x^{-\frac{4}{3}}$。 答 $x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}$。

〔解〕 因 $x^{\frac{4}{3}}-2+x^{-\frac{4}{3}}=(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})^2$ 而得。

9. 以 $a^{\frac{1}{10}}-x^{\frac{1}{5}}$ 除 $a^{\frac{1}{2}}-x$。 答 $a^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{3}{10}}x^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{10}}x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{4}{5}}$。

〔解〕 $\dfrac{(a^{\frac{1}{10}})^5-(x^{\frac{1}{5}})^5}{a^{\frac{1}{10}}-x^{\frac{1}{5}}}=(a^{\frac{1}{10}})^4+(a^{\frac{1}{10}})^3x^{\frac{1}{5}}+(a^{\frac{1}{10}})^2x^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{10}}x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{4}{5}}$。

10. 以 $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$ 除 $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$。 答 $x+y$。

〔解〕 $\dfrac{x(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})+y(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}=x+y$。

11. 求 $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})^2$ 之證。

〔證〕 $(x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+4x)+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$

$=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{2}{3}}=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})^2$。

12. 以 $3x-4+2x^{-1}$ 乘 $4x^2-5x-4-7x^{-1}+6x^{-2}$。其積以 $3x-10+10x^{-1}-4x^{-2}$ 除之。 答 $4x^2+3x+2-3x^{-1}$。

〔解〕 用分離係數法。則

$$\begin{array}{r}
4-5-4-7+6 \\
3-4+2 \\
\hline
12-15-12-21+18 \\
-16+20+16+28-24 \\
+\ 8-10-\ 8-14+12 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3-10+10-4 & 12-31+16-15+38-38+12 \;\big(\;4+3+2-3 \\
 & 12-40+40-16 \\
\hline
 & \quad +\ 9-24+\ 1+38 \\
 & \quad +\ 9-30+30-12 \\
\hline
 & \qquad\quad 6-29+50-38 \\
 & \qquad\quad 6-20+20-\ 8 \\
\hline
 & \qquad\qquad -\ 9+30-30+12 \\
 & \qquad\qquad -\ 9+30-30+12 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

此商之最高項。爲 $4x^2\times3x\div3x$。即 $4x^2$。故得 $4x^2+3x+2-3x^{-1}$。

13. 以 $x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$ 除 $x-x^{-1}-2(x^{\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{6}})+2(x^{\frac{5}{6}}-x^{-\frac{5}{6}})$。

〔解〕 變被除式爲 $x-x^{-1}+(2x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{6}})+(2x^{-\frac{1}{6}}-2x^{-\frac{5}{6}})$

$$=x-x^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})+2x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})。$$

$$\therefore\quad 商=\frac{x-x^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})+2x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+1+x^{-\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}。$$

14. 化 $\dfrac{ax^{-1}+a^{-1}x+2}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-1}$ 爲簡式。答 $a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$。

〔解〕 $$\frac{(a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}}=(a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})\left\{\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}}\right\}$$

$$=(a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{6}}x^{-\frac{1}{6}}+a^{-\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{6}})。$$

此題第二節之{ }與 a^3+b^3 以 a^2-ab+b^2 除之得 $a+b$ 同法。何則。因被除式之 a,b 之次數為3次。除式為2次。故得 $\frac{3}{2}$ 次。此式 $(ax^{-1})^{\frac{1}{2}}+(a^{-1}x)^{\frac{1}{2}}$ 為 $\frac{1}{2}$ 次。故 $(ax^{-1})^{\frac{1}{3}}-1+(a^{-1}x)^{\frac{1}{3}}$ 為 $\frac{1}{3}$ 次。故亦得 $\frac{3}{2}$ 次。而與前同形。

15. 以 $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}+\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ 除 $\frac{x^{\frac{7}{3}}}{y^{\frac{14}{5}}}+\frac{y^{\frac{14}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}}$。

〔解〕 $\left\{\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^7+\left(\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^7\right\}\div\left\{\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)+\left(\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)\right\}$

$$=\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^6-\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^5\left(\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)+\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^4\left(\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2-\cdots\cdots+\left(\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^6$$

$$=x^2y^{-\frac{12}{5}}-x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{8}{5}}+x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{5}}-1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{5}}-x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{8}{5}}+x^{-2}y^{\frac{12}{5}}。$$

16. 求 $\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{2}{3}}+2$ 之證。

〔證〕 左邊 $=\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1-(x^{\frac{1}{3}}-1)=x^{\frac{2}{3}}+2$。

17. 求 $(2x+y^{-1})(2y+x^{-1})=(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})^2$ 之證。

〔證〕 $(2x+y^{-1})(2y+x^{-1})$

$$=x\,y^{-\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}y\;+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})=(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})^2。$$

18. 求 $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}-\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}=1$ 之證。

〔解〕 $\frac{ab^{-1}(ab-a^{-1}b^{-1})+a^{-1}b(ab-a^{-1}b^{-1})}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}+\frac{ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

$$=\frac{ab^{-1}+a^{-1}b}{ab+a^{-1}b^{-1}}+\frac{ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}}$$

$$=\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}}=1$$

19. 設 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$。求 $(x+y+z)^3=27xyz$ 之證。

〔證〕 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$ 兩邊立方之。則

$$x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=-z。\quad 卽\quad x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(-z^{\frac{1}{3}})=-z。$$

$\therefore$ $x+y+z=3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$。兩邊立方之。則 $(x+y+z)^3=27xyz$。

20. 求以下諸式之有理補因子。

(1) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{4}{3}}$。 (2) $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{1}{2}}$。

(3) $a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}}$。 (4) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$。

〔解〕 (1) $a^{\frac{1}{2}}=X$, $b^{\frac{4}{3}}=Y$。則 $a^3=X^6$, $b^8=Y^6$。故 $X+Y$ 之有理因子。爲 $X^5-X^4Y+X^3Y^2-X^2Y^3+XY^4-Y^5$。

卽有理補因子爲 $a^{\frac{5}{2}}-a^2b^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{8}{3}}-ab^4+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{16}{3}}-b^{\frac{20}{3}}$。

(2) $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{1}{2}}$ 爲 $X+Y$。則 $a^4x^5=X^6$, $y^3=Y^6$。故 $X+Y$ 之有理補因子。與 (1) 同法。得 $a^{\frac{10}{3}}x^{\frac{25}{6}}-a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{10}{3}}y^{\frac{1}{2}}+a^2x^{\frac{5}{2}}y-a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}y^2-y^{\frac{5}{2}}$。

(3) 用 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc$。則

$$(a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}})(a^2+b^2x^{\frac{2}{3}}+c^2x^{\frac{4}{3}}-bx^{\frac{1}{3}}cx^{\frac{2}{3}}-cx^{\frac{2}{3}}a-abx^{\frac{1}{3}})$$
$$=a^3+b^3x+c^3x^2-3abcx。$$

故有理補因子爲 $a^2+b^2x^{\frac{2}{3}}+c^2x^{\frac{4}{3}}-bcx-cax^{\frac{2}{3}}-abx^{\frac{1}{3}}$。

(4) $$(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})$$
$$=x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}。$$

又 $$\{(x+y+z)-3(xyz)^{\frac{1}{3}}\}\{(x+y+z)^2+3(x+y+z)(xyz)^{\frac{1}{3}}+9(xyz)^{\frac{2}{3}}\}$$
$$=(x+y+z)^3-27xyz。$$

由是有理補因子爲 $(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})$。與

$(x+y+z)^2+3(x+y+z)x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}$ 之積。

21. $(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(y-z)+(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(z-x)+(1-z^3)^{\frac{1}{3}}(x-y)=0$。設 x, y, z 皆不等。則 $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$。

〔證〕 $a+b+c=0$。則 $a^3+b^3+c^3=3abc$。從本題之已知關係式。卽得

$$(1-x^3)(y-z)^3+(1-y^3)(z-x)^3+(1-z^3)(x-y)^2$$
$$=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}。$$

上之左邊 $=(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3-\{x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3\}$
$$=3(y-z)(z-x)(x-y)-3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$$
$$=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz)。$$ 由是

$$3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz)=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}。$$

依題意 $(y-z)(z-x)(x-y)\neq 0$。

$$\therefore \quad 1-xyz=(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}。$$

兩邊立方之。則 $(1-xyz)^3=(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)$。

查理斯密司氏
霍爾氏，乃托氏

大代數學講義

第四卷

第拾肆編

不盡根，虛數及複虛數

171. 定義 在算術上所求得之方根。僅爲略近數者。稱爲不盡根。

如代數式 $\sqrt{a}$。其實雖非不盡根。而恆付以不盡根之名。

不盡根爲同根號者。稱爲同次。例如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{6}$ 爲二次。即平方之不盡根。又 $\sqrt[3]{4}$ 爲三次。即立方之不盡根。故 $\sqrt[n]{a}$ 爲第 n 次之不盡根。

兩不盡根。其化出之無理因子相同者。謂之同類 (Similar)。例如 $\sqrt{8}$ 及 $\sqrt{18}$。化得 $2\sqrt{2}$ 及 $3\sqrt{2}$。俱有 $\sqrt{2}$ 之無理因子。故爲同類。

有不盡根式之運算。可依前編所證得之定理施之。

註 所設之根號置於數字之前者。爲表算術上之一根。若置於代數式之前者。爲表諸根內任意之一根。

例如 $\sqrt{a}$ 爲有兩方根即 $+\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$。若所示爲 $\sqrt{2}$。則僅表算術上之一根 1.414……。即不以 $\pm\sqrt{2}$ 記之。

172. 有理數量 亦可以不盡根之形表之。

例如 $2=\sqrt{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[n]{2^n}$。$a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}$。

又依 165 章。$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{(ab)}$ 故 $2\sqrt{2}=\sqrt{4}\sqrt{2}=\sqrt{(4\times 2)}=\sqrt{8}$。

$5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{5^3}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{(5^3\times 3)}=\sqrt[3]{375}$。

及 $a\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{(a^n\times ab)}=\sqrt[n]{a^{n+1}b}$。

反之。$\sqrt{18}=\sqrt{(9\times 2)}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$。

及 $\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{(3^3\times 5)}+\sqrt[3]{(2^3\times 5)}=3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$。

173. 任意兩不盡根可化爲同次之不盡根。

例如 $\sqrt[n]{a}$ 及 $\sqrt[m]{b}$ 化爲同次。則依165章。得

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$ 及 $\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{b^n}$。

〔例〕 $\sqrt[3]{14}$ 與 $\sqrt{6}$ 何者爲大。

兩邊化爲同次。卽

$\sqrt[3]{14}=\sqrt[6]{14^2}=\sqrt[6]{196}$。及 $\sqrt{6}=\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{216}$。故

$\sqrt[6]{216}$ 大於 $\sqrt[6]{196}$。卽 $\sqrt{6}$ 大於 $\sqrt[3]{14}$。

故比較不盡根之大小。不必各求方根。依上法求之卽得。

174. 同次兩不盡根之積易求得之。

例如 $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$。

由是求任意諸不盡根之積。先化諸不盡根爲同次。乃用如下之公式。卽得

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\ldots\ldots\ldots=\sqrt[n]{(abc\ldots\ldots\ldots)}。$$

例題

1. 以 $\sqrt[3]{2}$ 乘 $\sqrt{5}$。

〔解〕 $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{(5^3\times2^2)}=\sqrt[6]{500}$。

2. $3\sqrt{5}$ 以 $2\sqrt[3]{2}$ 乘之。

〔解〕 $3\sqrt{5}\times2\sqrt[3]{2}=3\times2\times\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{2^2}=6\sqrt[6]{500}$。

3. $\sqrt{2}$ 以 $\sqrt[3]{2}$ 乘之。

〔解〕 $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{(2^3\times2^2)}=\sqrt[6]{32}$。

又別法 $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}$。

4. 以 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 乘 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$。

〔解〕 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\sqrt{2}\times\sqrt{5}$

$$=3+\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{10}。$$

5. 以 $\sqrt{8}$ 除 $\sqrt[3]{4}$。

〔解〕 $\sqrt[3]{4}\div\sqrt{8}=\sqrt[6]{4^2}\div\sqrt[6]{8^3}=\sqrt[6]{\dfrac{4^2}{8^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{32}}$。

175. 不盡根 計算不盡根之略近數。原屬於算術之問題。非代數學之問題。然在代數式。能變不盡根之形而歸於簡易。令

其便於實算。如分數之分母有不盡根。則依169章。乘其有理補因子而變爲有理式是也。

例如
$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}。$$
$$\frac{3}{\sqrt{5}-1}=\frac{3(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{3}{4}(\sqrt{5}+1)。$$
$$\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}=\frac{1}{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{(3-1)(5-1)}$$
$$=\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)。$$

176. 兩同類二次不盡根 其積及商皆爲有理。

例如 $a\sqrt{b}\times c\sqrt{b}=acb$ 及 $a\sqrt{b}\div c\sqrt{b}=\frac{a}{c}$。兩式自易明瞭。

反之。若兩不盡根 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 之積爲有理。則爲同類。

何則。命此積爲有理數 x。則 $x=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$。故

$x\sqrt{b}=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times\sqrt{b}=b\sqrt{a}$。即 $x\sqrt{b}$ 與 $b\sqrt{a}$ 之兩不盡根爲同類。

又 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}$ 爲有理。則其爲同類可以同法推知。

177. 定理 下之定理。最爲重要。

若 $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$。而 a 及 x 爲有理數。$\sqrt{b}$ 及 $\sqrt{y}$ 爲無理數。則 $a=x,\ b=y$。

何則。從 $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y},\ a-x+\sqrt{b}=\sqrt{y}$。兩邊平方之。則

$(a-x)^2+2(a-x)\sqrt{b}+b=y$。

$\therefore\quad 2(a-x)\sqrt{b}=y-b-(a-x)^2$。

此方程式。若不盡根等於有理數量。則不合理。故不盡根之係數。不能不爲0。即 $a-x=0$。　$\therefore\quad a=x$。

由是從原式 $\sqrt{b}=\sqrt{y}$。　$\therefore\quad b=y$。

〔例〕 證照不盡根。若不爲同類。則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\neq 0$。

何則。若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$。則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=-\sqrt{c}$。兩邊平方之。則 $a+b+2\sqrt{ab}=c$。由是 $\sqrt{ab}$ 不能不爲有理數。若此數爲有理。則由176章。$\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 爲同類。是不合於題意。故如題云云。

178. 相屬不盡根 $a+\sqrt{b}$ 及 $a-\sqrt{b}$ 兩式。互爲相屬二次不盡根。即 $a+\sqrt{b}$ 爲 $a-\sqrt{b}$ 之相屬。又 $a-\sqrt{b}$ 爲 $a+\sqrt{b}$ 之相屬。

兩相屬不盡根之和及積。恆爲有理。

即　$(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})=2a$。　$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$。

反之。若 $a+\sqrt{b}$ 及 $c+\sqrt{d}$ 兩式之和及積爲有理。則其兩式互相屬。

何則。$(a+\sqrt{b})+(c+\sqrt{d})=a+c+\sqrt{b}+\sqrt{d}$。此式爲有理。則由 177 章 $\sqrt{b}+\sqrt{d}$ 不能不爲 0。　$\therefore\ \sqrt{b}+\sqrt{d}=0$。即 $\sqrt{d}=-\sqrt{b}$。

又 $(a+\sqrt{b})(c+\sqrt{d})$。即 $(a+\sqrt{b})(c-\sqrt{b})=ac-b+(c-a)\sqrt{b}$。此式爲有理。則 $c-a=0$。故 $c=a$。

由是 $c+\sqrt{d}$。即 $a-\sqrt{b}$ 與 $a+\sqrt{b}$ 爲相屬。

179. 代數式　$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+k$。其 $a, b, c, \ldots\ldots\ldots k$ 皆爲有理。若以 $\alpha+\sqrt{\beta}$ 代 x。而此式爲 0。則以其相屬之 $\alpha-\sqrt{\beta}$ 代 x。亦必爲 0。$x=\alpha+\sqrt{\beta}$。則依題意。

$a(\alpha+\sqrt{\beta})^n+b(\alpha+\sqrt{\beta})^{n-1}+c(\alpha+\beta)^{n-2}+\ldots\ldots\ldots k=0$。而 $\alpha+\sqrt{\beta}$ 之方乘內 $\sqrt{\beta}$ 之偶數方乘爲有理。而其和爲 P。又奇數方乘爲 $\sqrt{\beta}$ 之若干倍。而其和爲 $Q\sqrt{\beta}$。故原方程式爲 $P+Q\sqrt{\beta}=0$。故由 177 章 $P=0,\ Q=0$。

又 $x=\alpha-\sqrt{\beta}$。則 $-\sqrt{\beta}$ 之偶數方乘。各爲正號之有理數。其和與前之 P 同。而 $-\sqrt{\beta}$ 之奇數方乘。各爲負 $\sqrt{\beta}$ 之若干倍。其和即 $-Q\sqrt{\beta}$。故得 $P-Q\sqrt{\beta}$。而以 $P=Q=0$。故 $P-Q\sqrt{\beta}=0$。

由是依 88 章之定理。知原式有 $x-\alpha-\sqrt{\beta}$ 之因子。亦有 $x-\alpha+\sqrt{\beta}$ 之因子。

故凡有理整代數式。能以相屬平方兩不盡根之一根除盡。則其餘一根亦能除盡。

〔別證〕 $\{x-(\alpha+\sqrt{\beta})\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}$ 爲 x 之二次式。故以此除 $ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+k$。則得商 Q。而餘式爲普通 $Rx+R'$ 之一次式。

$\therefore\ \ ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+k=Q\{x-(\alpha+\beta)\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}+Rx+R'$。

今 $x=\alpha+\sqrt{\beta}$。則依題此左邊爲 0。故

$0=Q\{0\}\{\alpha+\sqrt{\beta}-(\alpha-\sqrt{\beta})\}+R(\alpha+\sqrt{\beta})+R'$。

即 $-R\sqrt{\beta}=R\alpha+R'$。由 177 章則 $R=0$。　$\therefore\ \ R'=0$。

由是 $ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+k=Q\{x-(\alpha+\sqrt{\beta})\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}$。

即 $x=\alpha-\sqrt{\beta}$ 亦得原式爲 0。

180. 二項式之平方根 有理數量與二次不盡根所成二項式之平方根。有時可化爲簡式。

例如求 $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$。但 $\sqrt{b}$ 爲不盡根。

設 $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，兩邊平方之。則 $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$。

今 $\sqrt{b}$ 爲不盡根。故由177章。

$$x+y=a。及\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{b}。即\ xy=\frac{1}{4}b。$$

由是 x 及 y 爲方程式 $x^2-ax+\frac{1}{4}b=0$ 之兩根（見128章）。而此兩根爲 $\frac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\}$，及 $\frac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}$。

$$故\quad \sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}。$$

若 $\sqrt{(a^2-b)}$ 非有理數。則前方程式之右邊。不能簡於左邊。亦不適於計算。故依此方法。必先審得 a^2-b 爲平方數。而後可施運算又 x 及 y 若爲有理數。則其根可由視察而得。

〔第一例〕 求 $\sqrt{(6+2\sqrt{5})}$。

$\sqrt{(6+2\sqrt{5})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$。兩邊平方之。則 $6+2\sqrt{5}=x+y+2\sqrt{xy}$。

$\therefore\ x+y=6.$ 及 $xy=5$。由視察而得 $x=5,\ y=1$。

故 $\sqrt{(6+2\sqrt{5})}=\sqrt{5}+1$。

〔第二例〕 求 $\sqrt{(28-5\sqrt{12})}$。

$\sqrt{(28-5\sqrt{12})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$。則 $28-5\sqrt{12}=x+y-2\sqrt{xy}$。

$\therefore\ x+y=28,$ 及 $2\sqrt{xy}=5\sqrt{12}$。即 $xy=75$。

由視察而得 $x=25,\ y=3$。

$\therefore\ \sqrt{(28-5\sqrt{12})}=\sqrt{25}-\sqrt{3}=5-\sqrt{3}$。

〔第三例〕 求 $\sqrt{(18+12\sqrt{3})}$。

在此例則 $\sqrt{(a^2-b)}$。即 $\sqrt{(18^2-12^2\times 3)}$。即 $\sqrt{-108}$ 爲無理數。故不能開平方。但此式雖不能以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 之形顯之。而可以 $\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}$ 之形顯之。何則。

$$\sqrt{(18+12\sqrt{3})}=\sqrt{\{\sqrt{3}(6\sqrt{3}+12)\}}=\sqrt[4]{3}\sqrt{(12+6\sqrt{3})}=\sqrt[4]{3}(3+\sqrt{3})$$
$$=3\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{3}\sqrt{3}=\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{27}。$$

〔第四例〕 求 $\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}$。

$\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$。平方之。則

$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$。

由是 $x+y+z=10$, $xy=6$, $yz=10$, $zx=15$。從後之三方程式察得 $x=3$, $y=2$, $z=5$。代入第一方程式。適合 $3+2+5=10$。故

$\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$。

〔第五例〕 $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$。則 $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$。立方之

$a+\sqrt{b}=(x+\sqrt{y})^3=x^3+3xy+(3x^2+y)\sqrt{y}$。

由是 $x^3+3xy=a$ 及 $(3x^2+y)\sqrt{y}=\sqrt{b}$。由減法得

$a-\sqrt{b}=x^3+3xy-(3x^2+y)\sqrt{y}=(x-\sqrt{y})^3$。

$\therefore\ \sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$。

例題十八

化以下各式爲簡式。

1. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$。　　　答 $2-\sqrt{3}$。

〔解〕 原式 $=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}$。

2. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$。　　　答 $5-\sqrt{15}$。

〔解〕 原式 $=\dfrac{(5-3)\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{5}=5-\sqrt{15}$。

3. $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$。　　　答 $\frac{4}{5}\sqrt{2}$。

〔解〕 原式 $=\dfrac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})+(\sqrt{8}+\sqrt{3})}{8-3}=\dfrac{2\sqrt{8}}{5}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$。

4. $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3}$。　　　答 52。

〔解〕 $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^3}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^3}=\dfrac{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3}{(4-3)^3}=2.2^3+6.2.3=52$。

5. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$。

〔解〕 $\dfrac{(6-3)\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{(6-2)\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{(3-2)\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$。

$$=(\sqrt{6}-\sqrt{3})\sqrt{2}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{3}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{6}$$
$$=(2\sqrt{3}-\sqrt{6})-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})+(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=0。$$

6。 $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$。 答 $14\frac{1}{2}$。

〔解〕 $\dfrac{\{(7-2\sqrt{5})(31+13\sqrt{5})\}(5+\sqrt{7})}{\{(6-2\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})\}(3+\sqrt{5})}=\dfrac{29(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{7})}{2(5+\sqrt{7})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{29}{2}$。

7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$。 答 $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$。

〔解〕 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}。$$

8. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$。 與前例同法。 答 $\dfrac{\sqrt{30}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}$。

9. $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$。 答 $\frac{1}{2}(\sqrt{21}+10-\sqrt{14}-\sqrt{15})$。

〔解〕 $\dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})+\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\dfrac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$$=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(7-5)(3-2)}=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})。$$

10。 $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{21}-\sqrt{10}-\sqrt{35}}$。 與前例同法。

$$\frac{1}{10}(\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{21}-\sqrt{35})。$$

11。 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$。 答 $\dfrac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4}{3}$。

〔解〕 $\dfrac{2-1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{\frac{1}{3}(2+1)}{\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1+\frac{1}{3}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$。

12. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}$。 答 $3\sqrt[3]{3}+1$。

〔解〕 如前例各分子爲 $\frac{1}{2}(9-1)$, 及 $\frac{1}{2}(9+1)$。

13. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$。 答 $\sqrt[3]{2}-1$。

〔解〕 $\dfrac{1\times(1-\sqrt[3]{2})}{(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})(1-\sqrt[3]{2})}=\dfrac{1-\sqrt[3]{2}}{1-2}=\sqrt[3]{2}-1$。

14. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}$。 答 $\dfrac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}}{4}$。

〔解〕 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1)}\times\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\dfrac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[3]{2}(3-1)}\times\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}}{4}$。

15. $\sqrt{(101-28\sqrt{13})}$。 答 $7-2\sqrt{13}$。

〔解〕 $\sqrt{(101-28\sqrt{13})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$。則 $101-28\sqrt{13}=x+y-2\sqrt{xy}$。

$\therefore x+y=101$。 $xy=14^2\times 13$。

$\therefore$ $x=49$。 $y=52$。 由是 $\sqrt{(101-28\sqrt{13})}=\sqrt{49-52}$。

16. $\sqrt{(28-5\sqrt{12})}$。 答 $5-\sqrt{3}$。

〔解〕 $\sqrt{(28-10\sqrt{3})}=\sqrt{(5^2-2.5.\sqrt{3}+\sqrt{3^2})}=5-\sqrt{3}$。

17. $\sqrt{\{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})\}}$。 答 $1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$。

〔解〕 原式 $=\sqrt{\{11+2(1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35})\}}$

$=\sqrt{(13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$。 則

$13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$。

$\therefore$ $x+y+z=13,$ $xy=5,$ $yz=7,$ $zx=35$。

由是 $x=5,$ $y=1,$ $z=7$。 $\therefore$ 原式 $=\sqrt{5}+\sqrt{1}+\sqrt{7}$。

18. $\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}\}}$。 答 $\sqrt{3}-1$。

〔解〕 原式 $=\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+2\sqrt{(4-2\sqrt{3})}\}}$

$=\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+2(\sqrt{3}-1)\}}=\sqrt{(4-2\sqrt{3})}=\sqrt{3}-1$。

19. $\sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})}$。 答 $2-\sqrt{3}$。

〔解〕 原式 $=\sqrt[4]{(7^2-2.7.4\sqrt{3}+4^2 3)}=\sqrt[4]{(7-4\sqrt{3})^2}$。

$=\sqrt{(7-4\sqrt{3})}=\sqrt{(4-2.2\sqrt{3}+3)}=2-\sqrt{3}$。

20. $\dfrac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{(3-2\sqrt{2})}}$。 答 1。

〔解〕 原式 $=\dfrac{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{1}=1$。

21. $(\sqrt{2}+\sqrt{45})\div\{\sqrt{2}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}\}$。 答 $\dfrac{1}{5}(15+\sqrt{10})$

〔解〕 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{(5-2\sqrt{5}.\sqrt{2}+2)}}=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$。

22. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}$。 答 $\sqrt{2}+\sqrt{6}-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$。

〔解〕原式$=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\{\sqrt{2}-\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}}{2-(2+\sqrt{3})}$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}}{-\sqrt{3}}=-\frac{4}{\sqrt{3}}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}+2\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(4+2\sqrt{3})\right\}}=-\frac{4}{\sqrt{3}}+2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)\right\}$$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)-\frac{4}{3}\sqrt{3}。$$

23. $\dfrac{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}-\sqrt{(5-2\sqrt{6})}}{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}+\sqrt{(5-2\sqrt{6})}}$。 答 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$。

〔解〕 原式$=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$。

24. $\sqrt{\{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\}}$。 答 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$。

〔解〕 $\sqrt{\{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$。

25 $\sqrt{\{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}\}}$。同上法。 答 $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}$。

26 $\sqrt{\{17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}\}}$。

答 $2+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{6}$。

〔解〕 $\sqrt{\{17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}\}}$

$$=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}。$$

則 $17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}$

$$=x+y+z+u+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}-2\sqrt{xu}-2\sqrt{yu}+2\sqrt{zu}。$$

$\therefore$ $x+y+z+u=17$, $xy=8$, $yz=12$, $zx=24$, $xu=20$, $yu=10$ $zu=30$。由是 $x=4$, $y=2$, $z=6$, $u=5$。

27. 求 $\dfrac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\dfrac{2}{\sqrt{(10+\sqrt{84})}}=0$之證。

〔證〕 左邊 $=\dfrac{1}{\sqrt{(12-2\sqrt{35})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(8-2\sqrt{15})}}-\dfrac{2}{\sqrt{(10+2\sqrt{21})}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})=0。$$

28. 求 $\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\frac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}=0$。

〔證〕 左邊 $=\frac{6-5}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{5-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\frac{6-2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0。$$

虛數及複虛數

181. 虛數 在83章求二次式因子。曾示虛數之式。即 $\sqrt{-a}$。但 a 必爲正數。惟此虛數式之用法。亦必依代數學之根原法則。

無論正數量與負數量。其平方必皆爲正。前已說明。然 $\sqrt{-a}$ 之平方爲 $(\sqrt{-a})^2=\sqrt{(-a)^2}=-a$。故 $\sqrt{-a}$ 不能以正數或負數稱之。即不能示其性質若何。故稱之爲虛數 (Imaginary)。

又 $a+b\sqrt{-1}$ 爲複虛數 (Complex Quantity)。但 a 及 b 爲實數。又 $a+\sqrt{-b}$ 亦爲複虛數。

182. 新疑問 此等虛數。在代數學上可另立一新記號與否。亦一新疑問也。然代數學之根原法則。爲代數學上之憲法。國有憲法。不能因有外國人之新來。而爲之更立新制。故此虛數量。可不必另作新記號。而自能服從於原定之法則。

凡虛數量既不必另立新記號。而能服從於根原法則。故吾人對於此疑問。無須再計。仍用現在之記號。以 $\sqrt{-a}$ 顯虛數。而示明其在原則上。均能合理如下。

183. 虛數之單位 用 $\sqrt{-1}$。

以 -1 乘任意之數量。則其方向正相反對。即如向東4里之距離爲 $+4$。以 -1 乘之。得 -4。則變爲向西 里之距離。此易知者也。

而 $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$。故任意之數量。以 $\sqrt{-1}$ 乘二次。其結果與以 -1 乘一次同。而與原數之方向正相反對。故以 $\sqrt{-1}$ 乘一次者。則變方向之半分。即九十度之變化是也。

例如向東4里爲 $+4$。則向北4里爲 $4\sqrt{-1}$。向西4里爲 -4。又向南4里爲 $-4\sqrt{-1}$。又以 $\sqrt{-1}$ 乘之。則仍爲東方4里。故順次以

$\sqrt{-1}$乘。卽如時計之針。依反向而動。設針初在3時。第一次反動在12時。第二次在9時。第三次在6時。第四次則復在原處3時。

凡實數量祇能在一直線上變其方向。卽+4里爲向東。−4里爲向西。而不能有別方向。惟虛數則以$4\sqrt{-1}$及$-4\sqrt{-1}$表向北與向南。故虛數之直線。與實數之直線交成直角而示其方向者也。

由是凡在一直綫之垂綫上所度之量。可用$\sqrt{-1}$爲其運算之記號。而此記號之意義。亦見完足矣。

記號$\sqrt{-1}$。通例以i顯之。依前述轉成直角(九十度)之說。卽$-i$爲i正相反對之方向。

184. 虛數之運算 時計之針所成直角之單位卽$\sqrt{-1}$。以a乘之。則其式爲ia。卽a倍其單位爲其長數。又使a爲時針之回轉於直角之數。則其式亦得ai。與前式同。故$ai=ia$。卽得交換法則。

又bi乘ai。依28章乘法之定義。卽以ai代bi所有之單位。卽將b個轉得之直角代以a。而各又轉一直角也。合兩直角。卽成負號所表之方向。

由是$ai\times bi=-ab=abii$。

依上法。記號i若在積中。則與他之記號同。可依交換法則得之。$(ai)\times(ai)=aaii=a^2(-1)=-a^2$。而$\sqrt{-a^2}=ai$。故虛數式祇須用一個。卽$\sqrt{-1}$。

185. 據上之定義 $\sqrt{-1}$卽i爲時計之針。依逆方向通過直角之運算。亦爲在一直線上可度之量。故就代數學之根原法則。所論虛數及複虛數。均可證明之。

前章所示甚爲簡約。其詳細之處。則見於De Morgan氏之Duble Algebra。又Clifford氏之Common Sense of the Exact Sciences第四編12章及13章。又Hobson氏之大三角法第十三編。皆爲斯密氏所未詳。

186. 定理 $a+bi=0$。若a及b爲實數。則a及b當俱爲0。

何則。$a=-bi$。是實數與虛數等。爲不合於理。故必$a=0,\ b=0$。

〔註〕 此後遇$a+bi$之形。則當知a及b恆爲實數。

187. 定理 $a+bi=c+di$。則 $a=c,\ b=d$。

何則 $a-c+(b-d)i=0$。依 186 章。必 $a-c=0$。及 $b-d=0$ 也。

故兩複虛數相等。則各實數及各虛數俱相等。

188. 相屬複虛數 $a+bi$ 及 $a-bi$ 互爲相屬。即與178章同

$(a+bi)+(a-bi)=2a,\quad (a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$。

由是兩相屬複虛數之和及積。皆爲實數。

反之兩複虛數。其和及積皆爲實數。則爲互相屬。

何則 $(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$ 因爲實數。故 $b+d=0$。

即 $d=-b$。

又 $(a+bi)(c+di)$。即 $(a+bi)(c-bi)=ac+b^2-(a-c)bi$ 因爲實數。

故 $a-c=0$。即 $c=a$。由是 $c+di$。即 $a-bi$。

189. 定義 a^2+b^2 平方根之正數值。即 $+\sqrt{a^2+b^2}$ 謂之 $a+bi$ 之模數〔Modulus〕。恆以 $mod(a+bi)$ 記之。故 $mod(a+bi)=+\sqrt{(a^2+b^2)}$。

兩相屬複虛數。必有同一之模數。又依 188 章。

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2。$$

但 $mod(a+bi)=+\sqrt{(a^2+b^2)}$。

故兩相屬複虛數之積。恆爲 a^2+b^2 平方根之正値之積。

即 $mod(a+bi)=mod(a-bi)=+\sqrt{(a^2+b^2)}$。

因 a 及 b 皆爲實數。故 a^2+b^2 若爲0。則 a 及 b 必皆爲 0。

是故複虛數若消去。則其模數亦必消去。

又在 $mod(a+bi)=+\sqrt{(a^2+b^2)}$ 式。其 $b=0$。則 $mod(a)=+\sqrt{a^2}=+a$。

故實數之模數即本數。

190. 積之模數 $a+bi$ 及 $c+di$ 之積。爲

$ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$。

由是積之模數。即

$$mod\{(a+bi)(c+di)\}=\sqrt{\{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2\}}=\sqrt{\{(a^2+b^2)(c^2+d^2)\}}$$
$$=\sqrt{\{(a^2+b^2)\times\sqrt{(c^2+d^2)}\}}=mod(a+bi)\times mod(c+di)。$$

故兩複虛數之積之模數。等於其各模數之積。據此定理。可擴充之於諸複虛數。

定理 若干數之複虛數。其積之模數。等於其各模數之積。

$$mod\{(a+bi)(c+di)(e+fi)\}=mod\{(a+bi)(c+di)\}\,mod(e+fi)$$
$$=mod(a+bi)\,mod(c+di)\,mod(e+fi)。$$

191. 商之模數 兩複虛數之積之模數。等於各模數之積。故反之兩式之商之模數。等於其各模數之商。

別證之如下。

$$(a+bi)\div(c+di)=\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}。$$

由是 $$mod\left\{\frac{a+bi}{c+di}\right\}=\frac{\sqrt{\{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2\}}}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(c^2+d^2)}}=\frac{mod(a+bi)}{mod(c+di)}。$$

192. 實因子 凡能消去任意之積爲0。必其積之內有一因子爲0。今由190章之定理推之。雖其一因子。或若干因子爲複虛數。而此題亦能合理。

何則。若干因子之積之模數。等於其各模數之積。而模數皆爲實數。故非其因子之模數爲0。則積之模數不能爲0。若若干因子之積爲0。則其模數亦必爲0（見189章）。卽其因子亦必消失而爲0。反之。若諸因子之一因子爲0。則其模數爲0。故積之模數爲0。由是其積亦遂消失而爲0。

193. 定理 於 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots+k$ 式。設 $a, b, c\ldots\ldots k$ 等。皆爲實數。用 $\alpha+\beta i$ 代 x 能令此式爲0。則用 $\alpha-\beta i$ 代 x。亦能令此式爲0。與179章同。

$x=\alpha+\beta i$ 代入原式。所生各實項之和爲 P。各虛項之和爲 Qi。則原代數式爲 $P+Qi$。

P 及 Q 皆爲實數。故僅含 i 之偶數方乘。由是 P 及 Q。雖變 i 之符號。而其值不變。故用 $\alpha-\beta i$ 代 x。其結果爲 $P+Q(-i)$。卽 $P-Qi$。

若原式用 $\alpha+\beta i$ 代 x。而其式爲0。則 $P+Qi=0$。

P 及 Q 皆爲實數。故 $P=0$, 及 $Q=0$。故 $P+Qi=0$。由是 $P-Qi=0$。

卽以 $\alpha-\beta i$ 代原式中之 x。其式亦爲0。

由88章若 $x-\alpha-\beta i$ 爲已知代數式之一因子。則 $x-\alpha+\beta i$ 亦爲其一因子。

故在 x 之有理整代數式。其係數若爲實數。則於兩相屬複虛數中。能以一複虛數整除。其餘一複虛數。亦必能整除之。

第拾伍編

平方根，立方根

194. 求已知代數式之平方 已示於前。本編則用反對之運算。示以求任意代數式之平方。等於已知代數式之方法。若已知之代數式。能有完全平方式之形。則其平方根。易由視察得之。

195. 由恆同式 $a^2\pm2ab+b^2\equiv(a\pm b)^2$。而視察三項式之形狀。爲兩數平方之和加(或減)兩數之積2倍所成。卽知以其兩數之和(或差)爲平方根也。

由是求三項式之平方根。先依某文字整列爲遞降方乘。若能爲完平方式。則其全式之平方根。卽等於兩外項平方根之和(或中項爲負。則等於其差)。

例如 $4a^8-12a^4b^3+9b^6$ 之平方根。取其兩外項之平方根。$\pm2a^4$ 及 $\pm3b^3$。因中項爲負。故得其差 $\pm(2a^4-3b^3)$ 爲所求之平方根。

〔註〕代數式所含特別一文字。若僅有相異之兩方乘者。皆可依其文字之遞降方乘整列。而變爲三項式。

例如 $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$ 依 a 之遞降方乘整列。則得三項式爲 $a^2+2a(b+c)+(b^2+2bc+c^2)$。

故據本章之理推之。可取其兩外項之平方根。$\pm a$ 及 $\pm(b+c)$ 卽 $\pm(a+b+c)$ 爲原式之平方根。

〔第一例〕 求 $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$ 之平方根。

依 a 之遞降方乘整列。則 原式 $=a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$。

卽 $\{a-(b+c)\}^2$。 $\therefore$ 所求之平方根爲 $a-b-c$。

〔第二例〕 求 $4x^4+9y^4+16z^4+12x^2y^2-16x^2z^2-24y^2z^2$ 之平方根

依 x 之遞降方乘整列。則 $4x^4+4x^2(3y^2-4z^2)+9y^4-24y^2z^2+16z^4$。

卽 $4x^4+4x^2(3y^2-4z^2)+(3y^2-4z^2)^2$。

卽 $\{2x^2+(3y^2-4z^2)\}^2$。

由是所求之平方根爲 $2x^2+3y^2-4z^2$。

〔第三例〕 求 $a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2bcx^3+c^2x^4$ 之平方根。

依 a 之遞降方乘整列。則

$a^2+2a(bx+cx^2)+b^2x^2+2bcx^3+c^2x^4$。

卽 $a^2+2a(bx+cx^2)+(bx+cx^2)^2$。

卽 $a+bx+cx^2$ 爲平方根。

〔第四例〕 求 $x^6-2x^5+3x^4+2x^3(y-1)+x^2(1-2y)+2xy+y^2$ 之平方根。

此代數式。爲僅有 y^2 及 y 相異二方乘。故依 y 之遞降方乘整列。

則 $y^2+2y(x^3-x^2+x)+x^6-2x^5+3x^4-2x^3+x^2$。

卽 $y^2+2y(x^3-x^2+x)+(x^3-x^2+x)^2$。 卽 $(y+x^3-x^2+x)^2$。

由是所求之平方根爲 $y+x^3-x^2+x$。

197. 求任意代數式之平方根。

今求 $(A+B)^2$ 之平方根。而 A 爲其平方根之若干項。B 爲其餘之若干項。而 A 及 B。皆依特別一文字之遞降（或遞昇）整列。其 A 項內各文字。皆比 B 項內各文字之次數高（或低）。

若已知 $(A+B)^2$ 平方根之若干項 A。而求其餘之若干項 B。則其法如下。

先從 $(A+B)^2$ 減 A^2。則其餘式爲 $(2A+B)B$。

前所設之特別文字。在此餘式內之最高次（或最低次）之項。必等於 A 之第一項與 B 之第一項之積之2倍。

由是欲求根之次項。其法將已求得之根之平方。從原式中減去之。再以根之第一項之2倍。除其餘式之最高次（或最低次）之項。所得商卽根之次項。

根之初項爲原式中初項之平方根。故必先求其根之初項。乃次第依上法。求其根之全項。

例如求 $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$ 之平方根。

其法詳列於下。

$$x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4(x^3-2x^2+x-2$$

$$(x^3)^2=x^6$$

$$(x^3-2x^2)^2=x^6-4x^5+4x^4$$

$$(x^3-2x^2+x)^2=x^6-4x^5+6x^4-4x^3+x^2$$

$$(x^3-2x^2+x-2)^2=x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4。$$

先求已知代數式(卽依 x 文字之遞降方乘整列者)之第一項 x^6 之平方根得 x^3。爲所求之平方根之第一項。

次從已知代數式。減 x^3 之平方 x^6。其餘式之第一項爲 $-4x^5$。以 $2x^3$ 除之得 $-2x^2$。爲所求之平方根之第二項。

次從已知代數式。減 x^3-2x^2 之平方 $x^6-4x^5+4x^4$。其餘式之第一項爲 $2x^4$。以 $2x^3$ 除之得 x。爲所求之平方根之第三項。

又從原式減 x^3-2x^2+x 之平方。其餘式之第一項爲 $-4x^3$。以 $2x^3$ 除之得 -2。爲所求之平方根之末項。

而減 x^3-2x^2+x-2 之平方。則適盡無餘。

由是 x^3-2x^2+x-2 爲所求之平方根。

以 x^3, x^3-2x^2 等之平方。置於原式之下。同行相對。則減後餘式之初項。易由視察而得。

198. 求代數式之平方根　用91章之定理。亦可求得。

如前章之例 $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$ 之平方根。設爲 ax^3+bx^2+cx+d。則

$$x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4\equiv(ax^3+bx^2+cx+d)^2$$

$$\equiv a^2x^6+2abx^5+(2ac+b^2)x^4+2(ad+bc)x^3+(2bd+c^2)x^2+2cdx+d^2。$$

比較 x 之同方乘之係數。則 $a^2=1$, $2ab=-4$, $2ac+b^2=6$, $2(ad+bc)=-8$, $2bd+c^2=9$, $2cd=-4$, $d^2=4$。

從 $a^2=1$。則 $a=1$。從 $2ab=-4$。則 $b=-2$。從 $2ac+b^2=6$。則 $c=1$。從 $2(ad+bc)=-8$。則 $d=-2$。

而末後之 $2bd+c^2=9$, $2cd=-4$, $d^2=4$。對於所得 a, b, c, d 之各值。皆能合理。

故以此各值代入 ax^3+bx^2+cx+d。則得 x^3-2x^2+x-2 爲所求之平方根。

199. 平方根定義之擴張 代數式之平方根。非完全平方。則可以擴張其定義。卽非完全平方之代數式。亦可依 197 或 198 章之法。得若干項之平方根。其根之平方式。與原代數有若干項相合。

例如 x^2+2x 之平方根爲 $x+1$。何則。

$(x+1)^2=x^2+2x+1$。則可與前式合。至含 x 之項。

又 $1+x$ 之平方根。爲 $1+\frac{1}{2}x$。而 $(1+\frac{1}{2}x)^2=1+x+\frac{1}{4}x^2$。與前式合至第二項。卽與 $1+x$ 僅差 $\frac{1}{4}x^2$。又設 $1+x$ 之平方根。爲 $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$。則與前式僅差 $-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}$。故 x 至無限小。則 $1+\frac{x}{2}$ 可爲 $1+x$ 平方根之略近值。而 $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ 爲 $1+x$ 之略近平方根。則更爲精密。然 x 非甚小。則此值無用。

200. 已求得平方根之若干項 則可由通常之除法。而求得其項之次項。

設有已知代數式。以下所列之代數式爲平方根。則

$(a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots\ldots+a_rx^{n-r+1})+(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+a_{2r}x^{n-2r+1})+R$。

其係數 $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{2r}$ 可將上式乘爲平方。自 $2r$ 項起。取其以前各項內 x 方乘之係數。與已知代數式內之相當 x 方乘之係數比較。卽可求得之。

上式之平方如下。

$$
\begin{aligned}
&(a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots\ldots+a_rx^{n-r+1})^2\\
&\quad+2(a_1x^n+\ldots\ldots+a_rx^{n-r+1})(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+a_{2r}x^{n-2r+1})\\
&\quad+[(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+a_{2r}x^{n-2r+1})^2+2R(a_1x^n+\ldots\ldots+a_rx^{n-r+1})\\
&\qquad\qquad+2R(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+a_{2r}x^{n-2r+1})+R^2]。
\end{aligned}
$$

惟已知之代數式內。第一項 x 之方乘爲 x^{2n}。至第 $2r$ 項 x 之方乘爲 $x^{2n-2r+1}$。故欲決定 $a_1, a_2\ldots\ldots a_{2r}$ 諸係數。可取 x^{2n} 至 $x^{2n-2r+1}$ 各方乘之係數相比較。而不必取及 x^{2n-2r} 以下各方乘之係數。

但 R 內所含 x 之最高方乘爲 x^{n-2r}。故上式〔〕內之 x 之最高方乘爲 x^{2n-2r}。

由是知〔〕內之式。x 各方乘之係數與 $a_1, a_2 \ldots\ldots a_{2r}$ 均無關係。故從所設之代數式。減平方根自首項至 r 項和之平方。而以首項至 r 項和之 2 倍。除其餘式。卽得平方根之次 r 項。

201. 由通常記數所成之數。若其平方根。可求至 n 位。則以下之 $n-1$ 位。可由除法求得之。但此數須爲 $2n-1$ 位之完平方。否則最後之數。不免有誤。

N 爲有 $2n-1$ 位之完全平方數。p 爲後有 $n-1$ 個 0 之 n 個數字之數。q 爲其餘 $n-1$ 位之數。則

$\sqrt{N}=p+q$。　　$\therefore\quad (N-p^2)/2p=q+q^2/2p$。

今 $2p \nless 2.10^{2n-2}$ 及 $q \ngtr 10^{n-1}$。由是 $q^2/2p$ 不能不爲分數。故若從 N 減 p^2 以 $2p$ 除其餘數。則其整商爲 q。

次設 $\sqrt{N}$ 爲有 m 數字。但 m 大於 $2n-1$。

又 p 爲後有 $m-n$ 個 0 之 n 個數字之數。q 爲後有 $m-2n+1$ 個 0 之 $n-1$ 個數字之數。r 爲其餘之有 $m-2n+1$ 數字之數。則 $N=(p+q+r)^2$。

$$\therefore\quad (N-p^2)/2p-q=(q^2+r^2+2qr)/2p+r。$$

今　$10^m>p\nless 10^{m-1}$，　$10^{m-n}>q\nless 10^{m-n-1}$，　及　$10^{m-2n+1}>r\nless 10^{m-2n}$。

故　$(q^2+r^2+2qr)/2p$ 小於 10^{m-2n+1}。

由是 $(q^2+r^2+2qr)/2p+r$ 小於 $2\times 10^{m-2n+1}$。但此實不小於 10^{m-2n+1}。由是 $(N-p^2)/2p$ 比 q。僅多有 10^{m-2n+1}。然其差異必小於 $2\times 10^{m-2n+1}$。卽商數 $(N-p^2)/2p$ 中之 $n-1$ 之數字。與 q 中之 $n-1$ 數字。其所差異。不過最後之一數。

立方根

202. 恆同式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 爲二項式立方之四項式。依某文字之遞降方乘。或遞昇方乘整列。則其兩外項之立方根。卽爲原二項式之項。

由是有四項之任意完全立方式。則其立方根。可由觀察得之。卽依一文字之方乘整列。而取其兩外項之立方根。爲所求之立方根。

例如 $27a^6-54a^5b+36a^4b^2-8a^3b^3$ 爲完全立方。則其立方根爲 $3a^2-2ab$。而依 $3a^2-2ab$ 作一立方。卽可知已知代數式爲完全立方。

若代數式之特別一文字。有三種相異之方乘。則可依其文字之方乘整列之。而變爲四項之形。

故若干項之代數式爲完全立方。其一文字之方乘。僅有三種。則亦可由視察而得其立方根。

例如求 $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+3b^2c+3bc^2$ 之立方根。

先依 a 之方乘整列。則得

$a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2+2bc)+b^3+c^3+3b^2c+3bc^2$

卽 $a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$。

由是所求之立方根爲 $a+b+c$。

203. 求任意代數式之立方根。

試求 $(A+B)^3$ 之立方根。但 A 爲立方根之若干項。B 爲其餘之若干項。以 A 及 B 之各項。依一文字之遞降(或遞昇)整列。則 A 之各項比 B 之各項。其文字之次數高(或低)。

若已知 A 之各項。而求 B 之各項。則由 $(A+B)^3$ 減 A^3。其餘式爲 $(3A^2+3AB+B^2)B$。

今依整列之方法。則在餘式內之最高次(或最低次)之項。必等於 $3\times A$ 之第一項之平方 $\times B$ 之第一項。

由是欲得立方根之次項(卽 B 之最高次或最低次項)。其法將已得若干項立方根之立方。從原式中減去之。再將立方根第一項之平方3倍之。以除其餘式之最高次(或最低次)之項卽得。

依此法則。則第一項以後之各項。可以次第求得。而根之第一項。卽爲已知代數式第一項之立方根。固自明瞭。

例如求 $x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$ 之立方根。其法如下。

$$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6。$$

$$(x^2)^3=\underline{x^6}$$

$$(x^2-2xy)^3=\underline{x^6-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3}$$

$$(x^2-2xy+3y^2)^3=\underline{x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6}。$$

先將已知代數式。依 x 之遞降方乘整列。取其第一項之立方根得 x^2。卽爲所求立方根之第一項。

次從原式減 x^2 之立方。其餘式之第一項。爲 $-6x^5y$。以 $3\times(x^2)^2$ 除之。得 $-2xy$ 爲立方根之第二項。

次從原式減 x^2-2xy 之立方。其餘式之第一項爲 $9x^4y^2$。以 $3\times(x^2)^2$ 除之。得 $3y^2$ 爲立方根之第三項。

而 $(x^2-2xy+3y^2)^3$ 與原式等。故 $x^2-2xy+3y^2$ 爲所求之立方根。

〔註〕 求立方根用上法者少。施諸實用。尙有簡易之法如下。

如前例第一項及末項之立方根。爲 x^2 及 $3y^2$。此卽爲原式立方根之第一項及末項。而此第一項之平方3倍。卽 $3\times(x^2)^2$。以除原式之第二項。得 $-2xy$ 爲立方根之第二項。若已知代數式爲完全立方。則不能不爲 $(x^2-2xy+3y^2)^3$。

又求次之立方式。

$$x^9-6x^8y+15x^7y^2-29x^6y^3+51x^5y^4-60x^4y^5+64x^3y^6-63x^2y^7$$
$$+27xy^8-27y^9。$$

若所設之式。爲完全立方。則其立方根之初項及末項。爲 $\sqrt[3]{x^9}$。及 $\sqrt[3]{-27y^9}$。依次得所求根之初項及末項。爲 x^3 及 $-3y^3$。

又立方根之第二項。不能不爲 $-6x^8y\div3(x^3)^2=-2x^2y$。而其末項之前一項。不能不爲 $27xy^8\div3(-3y^3)^2=+xy^2$。

由是原式若爲完全立方。則不能不等於 $(x^3-2x^2y+xy^2-3y^3)^3$。卽易得其立方根。

204. 任意方根 如下之恆同式(見後253章)。

$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+a$ 低於 $n-1$ 次之項。亦可依197及203章之法。求其代數式之 n 方根。

〔規則〕 將代數式。依某文字之遞降或遞昇方乘整列。取其第一項之 n 方根。爲所求 n 方根之第一項。乃從原式中減其已

得根若干項之乘方。又以n方根第一項之$n-1$方乘之n倍。除其餘式之第一項。即得n方根之次項。

依此規則。次第求之。則n方根可得。

如6,8,12諸方根。以有2,3因子。故但求其平方根及立方根即得。若求5,7,13等方根。則不能不依此規則。

例題十九

記下之平方根。

1. $4x^{10}-12x^5y^3+9y^6$。 答 $2x^5-3y^3$。

2. $x^8+9x^4y^{12}-6x^6y^6$。 答 $x^4-3x^2y^6$。

3. $a^2+4b^2+9c^2+12bc-6ca-4ab$。 答 $a-2b-3c$。

4. $25a^4+9b^4+4c^4+12b^2c^2-20c^2a^2-30a^2b^2$。 答 $5a^2-3b^2-2c^2$。

求以下各式之平方根。

5. $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$。 答 x^3+x^2+x+1。

〔解〕從原式減$(x^3+x^2)^2$。則其餘式之初項。為$2x^4$。以$2x^3$除之得x。故x^3+x^2+x+1為所求之平方根。何則。以末項為1故也。

6. $4x^4-8x^3y^2+4xy^6+y^8$。 答 $2x^2-2xy^2-y^4$。

〔解〕從原式減$(2x^2-2xy^2)^2$。則餘式之第一項為$-4x^2y^4$。以$2(2x^2)$除之。則得$-y^4$。而原式等於$(2x^2-2xy^2-y^4)^2$。

7. $49+112x^2+70x^3+64x^4+80x^5+25x^6$。 答 $7+8x^2+5x^3$。

〔解〕先求$7+8x^2$。次得$5x^3$。

8. $x^4-2x^3+5x^2-6x+8-6x^{-1}+5x^{-2}-2x^{-3}+x^{-4}$。

答 $x^2-x+2-x^{-1}+x^{-2}$。

〔解〕原式$-(x^2-x)^2=4x^2+x$之低次項。 $\therefore$ $4x^2\div 2x^2=2$。

由是原式$-(x^2-x+2)^2=-2x+x$之低次項。

$\therefore$ $-2x\div 2x^2=-x^{-1}$。又平方根之最後項為$\pm x^{-2}$。故末得$+x^{-2}$。

9. $\dfrac{25x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{25x^2}-20\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{5x}+2$。 答 $\dfrac{5x}{y}-\dfrac{y}{5x}-2$。

〔解〕 $\left(\dfrac{5x}{y}-\dfrac{y}{5x}\right)^2-4\left(\dfrac{5x}{y}-\dfrac{y}{5x}\right)+4=\left(\dfrac{5x}{y}-\dfrac{y}{5x}-2\right)^2$

10.　$x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x+4x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$。　　　　答　$x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}}$。

〔解〕　$(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^2-2x+4x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{6}}(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{1}{3}}$

$$=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}})^2。$$

11.　$x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}$。　　　　答　$x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}$

〔解〕　$(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{5}{6}}(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{5}{3}}=(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}})^2$。

12.　$x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$。

答　$\pm(a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}})$。

〔解〕　$(x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}})^2+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$

$$=(x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}})^2+2a^{\frac{4}{5}}(x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}})+a^{\frac{8}{5}}=(x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{4}{5}})^2。$$

求下之各立方根。

13.　$x^3-24x^2+192x-512$。　　　　答　$x-8$。

14.　$x^6-3x^5y+6x^4y^2-7x^3y^3+6x^2y^4-3xy^5+y^6$。　　答　x^2-xy+y^2。

〔解〕　x^2-xy 自易求得。又知 $\sqrt[3]{y^6}=y^2$。卽得所求之根。

15.　$1-9x^2+33x^4-63x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}$。　　答　$1-3x^2+2x^4$。

16.　求 $2a^2(b+c)^2+2b^2(c+a)^2+2c^2(a+b)^2+4abc(a+b+c)$ 之平方根。

答　$2(bc+ca+ab)$。

〔解〕　$2\{(ab+ac)^2+(bc+ba)^2+(ca+bc)^2+2abc(a+b+c)\}$

$$=4\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\}=\{2(bc+ca+ab)\}^2。$$

17.　求 $x^2(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+2x(y+z)(yz-x^2)$ 之平方根。

答　$x^2-x(y+z)-yz$。

〔解〕　$x^4-2x^3(y+z)+x^2(y^2+z^2)+2xyz(y+z)+y^2z^2$

$$=x^4-2x^3(y+z)+x^2(y+z)^2-2yz\{x^2-x(y+z)\}+y^2z^2$$

$$=\{x^2-x(y+z)-yz\}^2。$$

18.　求 $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$ 之平方根。　答　a^2+b^2。

〔解〕　原式 $=(a-b)^4-\{(a+b)^2+(a-b)^2\}(a-b)^2+(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$

$$=(a-b)^4-(a^2-b^2)^2-(a-b)^4+(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^2。$$

19.　證 $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ 爲完全平方。

〔證〕 原式 $=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4$

$$=\{(x^2+5ax+5a^2)-a^2\}\{(x^2+5ax+5a^2)+a^2\}+a^4$$

$$=(x^2+5ax+5a^2)^2-a^4+a^4=(x^2+5ax+5a^2)^2。$$

20. $x^4+px^3+qx^2+rx+s$。若 $p^2s=r^2$ 及 $p^3-4pq+8r=0$。則爲完全平方。試證之。

〔證〕 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=(x^2+\frac{1}{2}px+\sqrt{s})^2$。

則 $$=x^4+px^3+\left(\frac{1}{4}p^2+2\sqrt{s}\right)x^2+p\sqrt{s}x+s。$$

由是 $q=\frac{1}{4}p^2+2\sqrt{s}$ 及 $r=p\sqrt{s}$。

從 $r=p\sqrt{s}$, 則 $p^2s=r^2$。 又 $pq=\frac{1}{4}p^3+2p\sqrt{s}=\frac{1}{4}p^3+2r$。

21. $4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25$ 爲完全平方。求 A, B 及 C 之值。 答 $A=20$, $B=68$, $B=-44$ 或 $A=52$, $B=-68$, $C=76$。

〔解〕 $4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25=(2x^3-6x^2+ax+b)^2$

$$=4x^6-24x^5+(36+4a)x^4+(4b-12a)x^3+(a^2-12b)x^2+2abx+b^2。$$

由是 $b^2=25$。 $\therefore$ $b=5$ 或 -5。

由 $2ab=-40$。 $\therefore$ $a=-4$ 或 4。

$A=36+4a=36+4(-4)=20$, 或 $A=36+4(4)=52$。

$B=4b-12a=4(5)-12(-4)=68$, 或 $B=4(-5)-12(4)=-68$。

$C=a^2-12b=(-4)^2-12(5)=-44$, 或 $C=4^2-12(-5)=76$。

22. ax^3+bx^2+cx+d 爲完全立方。則 $b^2=3ac$ 及 $c^2=3bd$。

〔證〕 $ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)^3=m^3x^3+3m^2nx^2+3mn^2x+n^3$。

由是 $a=m^3$, $b=3m^2n$, $c=3mn^2$, $d=n^3$。

$b^2=9m^4n^2=3m^3(3mn^2)=3ac$,

$c^2=9m^2n^4=3(3m^2n)n^3=3bd$。

23. 求 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ 與 x, y, z 之有理式平方之關係。

〔解〕 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=(Ax+By+Cz)^2$

$$=A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2+2BCyz+2CAzx+2ABxy。$$

$\therefore$ $a=A^2$, $b=B^2$, $c=C^2$, $f=BC$, $g=CA$, $h=AB$。

由是 $af=A^2BC=(CA)(AB)=gh,$

$by=b^2CA=(AB)(BC)=hf,$

$ch=C^2AB=(BC)(CA)=fg$。

24. $(a-\lambda)x^2+(b-\lambda)y^2+(c-\lambda)z^2+2fyz+2gzx+2hxy$ 爲 c, y, z 之有理代數式之平方。試證下式之關係。

$$a-\frac{gh}{f}=b-\frac{hf}{g}=c-\frac{fg}{h}=\lambda。$$

〔證〕 如前例之關係。從 $(a-\lambda)f=gh$。則 $\lambda=a-\frac{gh}{f}$。以下同法。

25. 已知代數式之立方根之最初 r 項。試由通常之除法。求次之 r 項。

〔證〕 P^3 爲已知代數式。其方根之 Q 爲最初 n 項。R 爲其餘項。

$\therefore\quad P=(a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots\cdots+a_rx^{n-r+1})+(a_{r+1}x^{n-r}+\cdots\cdots+K)=Q+R$。

由是 $\dfrac{P^3-Q^3}{3Q^2}=R+\dfrac{3QR^2+R^3}{3Q^2}$ ……………………………(1)

Q 爲 x 之 n 次，R 爲 x 之 $n-r$ 次式。故 $3QR^2+R^3$ 爲 x 之 $3n-2r$ 次式。故 $\dfrac{3QR^2+R^3}{3Q^2}$ 爲 x 之 $(3n-2r)-2n$ 即 $n-2r$ 次式。

故 (1) 式右邊之 R。爲自 x^{n-2r} 以上之項。與 $\dfrac{3QR^2+R^3}{3Q^2}$ 之整數部。相加則爲 x^{n-2r+1} 以上之係數。即從 x^{n+r} 至 x^{n-2r+1} 之第 r 項。爲立方根之次項已明。故如題言。

26. 求證通常記數之數之立方根。其最初之數。知有 $n+2$ 位。則可由除法而得次之 n 位。但此數爲 $2n+2$ 位之完全立方數。

〔證〕 全數爲 ^{3}。立方根之最初 $n+2$ 位之數爲 p。餘 n 位爲 q。則 $=10^np+q$。故

$$\frac{{}^3-10^{3n}p^3}{3\times10^{2n}p^2}=q+\frac{3\times10^npq^2+q^3}{3\times10^{2n}p^2}=q+\frac{q^2}{10^np}+\frac{q^3}{3\times10^{2n}p^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$q<10^n,\quad\therefore\quad q^n<10^{2n}$。 又 $10^{n+1}<p,\quad\therefore\quad 10^{n+1}<q^2<10^{2n}p$。

由是 $\dfrac{q^2}{10^np}<\dfrac{1}{10}$ 又 $\dfrac{q^3}{10^{3n}p^2}<\dfrac{1}{10^{n+2}}$。故 (1) 之分數部 皆小於 1。

由是得 位 q。

27. 求證方程式$x^3+qx-r=0$之一正根之數值爲$n+2$位卽a。則$r-qa-a^3$。以$3a^2+q$除之。其次之數字亦得至$n-1$位。

〔證〕 $x^3+qx-r=0$之一根爲$a+\frac{b}{10^{n-1}}$。則

$$\left(a+\frac{b}{10^{n-1}}\right)^3+q\left(a+\frac{b}{10^{n-1}}\right)-r=0\text{。變之。則}$$

$$\frac{b}{10^{n-1}}(3a^2+q)+\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^3+3\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2a=r-qa-a^3\text{。}$$

$$\therefore\quad \frac{b}{10^{n-1}}+\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)3\,a+\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^3}{3a^2+q}=\frac{r-qa-a^3}{3a^2+q}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但 $10^{n+2}>a>10^{n+1}$ 及b之最小數字爲b'。則 $10^{n-1}>b'>10^{n-2}$。

故 $\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2 3a<\left(\frac{10^{n-1}}{10^{n-1}}\right)^2 3\times10^{n+2}$。 卽 $3\times10^{n+2}$。

又 $3a^2+q>3(10^{n+1})^2$ 卽 $3\times10^{2n+2}$。

由是 $\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2 3a}{3a^2+q}<\frac{3\times10^{n+2}}{3\times10^{2n+2}}$， 卽 $\frac{1}{10^n}$。

同法 $\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^3}{3a^3+q}<\frac{1}{10^{2n+2}}$。

由是(1)之分數部。爲自$\frac{b}{10^{n-1}}$以下之數位。故如題言。

第拾陸編

比及比例

205. 定義 一數量有他數量之若干倍。而審其大小之關係謂之比 (Ratio)。

相異之兩名數。不能相比。如人數與金數。里數與斤數。不能比較其大小是也。

a 及 b 之比。可以 $a:b$ 記之。卽 a 爲比之第一項。b 爲其第二項。第一項稱前項。第二項稱後項。

比之前項大於後項。則其比大於1。謂之優比。前項小於後項。則其比小於1。謂之劣比。前項等於後項。則其比等於1。謂之等比

凡若干比。以其第一項之積。比第二項之積。謂之諸比之複比。

例如 $ac:bd$ 爲 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比。

又 $a^2:b^2$ 謂之 $a:b$ 之二倍比。$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 謂之 $a:b$ 之二分比。

206. 量 各量之比。恆以數顯之。故求一量爲他量之幾倍。則以他量之數。除此一量之數卽得。故比者卽分數也。

分數之原則。詳於第八編。而比之原則。與之全同。

故比之兩項。以相同之數乘或除之。則其值不變(見 **107** 章)。

相異之兩比。通爲公分母。可以比較其大小(見 **106** 章)。

113 章之諸定理。亦合於比理。

及下之定理尤爲緊要。

207. 定理 任意之比。其各項皆加相同之正數量。則其值較近於1。

例如 x 爲正數量。加入 $a:b$ 之各項。則得 $a+x:b+x$。

今 $\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$，及 $\frac{a+x}{b+x}-1=\frac{a-b}{b+x}$。

因分子相同。而 $\frac{a-b}{b+x}$ 之分母較大。故 $\frac{a-b}{b+x}$ 之商數小於 $\frac{a-b}{b}$。

即 $\frac{a+x}{b+x}$ 與 1 之差。小於 $\frac{a}{b}$ 與 1 之差。即 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 爲近於 1。

若 x 爲甚大。則分數 $\frac{a-b}{b+x}$ 可爲甚小。即 x 愈變大。$\frac{a-x}{b+x}$ 與 1 之差乃愈變小。故 x 若爲無窮大。則 $\frac{a+x}{b+x}$ 至於極限而等於 1。

若兩數量之比爲 1。則不必如上例 $a+x$ 與 $b+x$ 常相等。故 $a:b$ 與 $a+x:b+x$ 相等。所以 a 與 b 當爲不相等者 (參看 118 章)。

208. 餘論 任意之比。其各項加同數量。而近於 1。故大於 1 之比其各項加同數量。則其值減小而近於 1。小於 1 之比其各項加同數量。則其值增大而近於 1。故上之定理可簡言之如下。

各項加同數量。則優比之值減。劣比之值增。

209. 不可通度數 兩數量之比。恆有不能以兩整數表之者。例如正方形之對角線。與其一邊之比爲 $\sqrt{2}:1$。而 $\sqrt{2}$ 非有限小數。即不能以相當之分數顯之是也。

由是兩數之比。不能以兩整數表之者。謂之不可通度 (Incommeasurable)。

不可通度之兩數相比。雖不能表以整數。然亦可依所欲求之程度。求其略近之值。以證其比之關係。此種定理。可用 163 章之法明之。

例如 $\sqrt{5}:4=\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2.236067\ldots}{4}=.559016\ldots\ldots\ldots\ldots$

故 $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 雖 $>\frac{559016}{1000000}$ 及 $<\frac{559017}{1000000}$。然所差俱在 $\frac{1}{1000000}$ 以內。爲數甚微也。

比　例

210. 比例 有四數量。其第一與第二之比。等於第三與第四之比。則此四數量成爲比例 (Proportion)。

例如 $a:b=c:d$。則 a, b, c, d 成比例。

其式則記爲 $a:b::c:d$。可讀爲 a 比 b 如 c 比 d。

凡成比例之四數量。第一及第四謂之兩外項。第二及第三謂之兩中項。

211. 四數量 a, b, c, d 成比例。則由比之定義。得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

兩邊以 bd 乘之。則 $ad=bc$。

故比例之兩外項之積。與兩中項之積相等。

反之。若 $ad=bc$。則 a, b, c, d 成比例。

何則。$ad=bc$。則 $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$。

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。卽 $a:b::c:d$。

由是又得下之四關係。凡 $ad=bc$。則

$$a:b=c:d。$$
$$a:c=b:d。$$
$$b:a=d:c。$$
$$b:d=a:c。$$

此四式內。其一式合理。則餘三式亦皆合理。

〔例〕 $a:b=c:d$。則 $a+b:a-b=c+d:c-d$。

何則。$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。由 113 章第一例 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

由是 $a+b:a-b=c+d:c-d$。

212. 連比例 有諸數量。其第一與第二之比。第二與第三之比。第三與第四之比（以下皆如此）。而各各相等。則此諸數量謂之連比例 (Continued Proportion)。

例如 a, b, c, d………… 爲 $a:b=b:c=c:d=$…………

卽 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$………… 則成連比例。

$a:b=b:c$。則 b 稱爲 a 及 c 之比例中項。

a, b, c 爲連比例。則 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$。 $\therefore\ b^2=ac$。卽 $b=\sqrt{ac}$。

故兩數量間之比例中項。等於其積之平方根。

又 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}$。 即 $\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2}{b^2}$。

故三數量爲連比例。則第一與第三之比。等於第一與第二之二倍比。及第二與第三之二倍比。

213. 比例之兩定義 歐几里得之幾何學上。有比例之定義如次。

有四數量。其第一及第三以任意之等數倍之。又第二及第四以任意之等數倍之。若第一之倍數較第二之倍數大或等或小。從而第三之倍數較第四之倍數大或等或小。則此四數量成比例。

四數量 a, b, c, d 在代數學上比例之定義。則爲 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

故如上所示第一 a 及第三 c。均以 m 倍之。第二 b 及第四 d。均以 n 倍之。則無論 m, n 之值如何。恆得 $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$。

由是 $ma \gtreqless nb$。從而 $mc \gtreqless nd$。故適合於幾何學上比例之定義。

次設 a, b, c, d 爲適合於幾何學之定義者。而 a 及 b 爲可通度數。非如 $\sqrt{2}:1$。則 $a:b=m:n$。

但 m 及 n 爲整數。則 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$。 $\therefore\ na=mb$。

依定義 $na \gtreqless mb$。從而 $nc \gtreqless md$。

由是 $nc=md$。 $\therefore\ \frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$。

故 a, b, c, d 亦適合代數學上比例之定義。

若 a 及 b 爲不可通度之數。則不能求得二整數 m 及 n 以表之。即不能作 $a:b=m:n$ 之式。

然若取 a 之倍數爲 na。令 na 在 b 之相連兩倍數間。卽在 mb 與 $(m+1)b$ 之間。則

$$na>mb \quad 及 \quad na<(m+1)b。$$

由是依定義得 $nc>md$ 及 $nc<(m+1)d$。

故 $\frac{a}{b}>\frac{m}{n}$ 或 $<\frac{m+1}{n}$。及 $\frac{c}{d}>\frac{m}{n}$ 或 $<\frac{m+1}{n}$。

考上之不等式。則知 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之差。爲小於 $\frac{m+1}{n}-\frac{m}{n}$。即 $\frac{1}{n}$。

然 n 爲任意之等倍數。可爲任何大。故 n 愈增大。則 $\frac{1}{n}$ 愈減小。而 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之差恆比 $\frac{1}{n}$ 更小。若 n 大至極限。則 $\frac{1}{n}$ 小至極限。而得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

例題

1. $7+x:12+x$ 等於 $5:6$。求 x。 答 18。

〔解〕 $\frac{7+x}{12+x}=\frac{5}{6}$。 $\therefore$ $\frac{12-7}{12+x}=\frac{6-5}{6}$。 $\therefore$ $12+x=30$。

2. $6x^2+6y^2=13xy$。則 x 與 y 之比如何。 答 $2:3$, 或 $3:2$,

〔解〕 從原方程式 $(2x-3y)(3x-2y)=0$。

$\therefore$ $2x=3y$, 或 $3x=2y$。 $\therefore$ $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, 或 $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$。

3. $5:9$ 之各項加最小整數。則其比大於 $7:10$。求此整數若干。 答 5。

〔解〕 $5+x:9+x>7:10$。

即 $\frac{5+x}{9+x}>\frac{7}{10}$。 $\therefore$ $10(5+x)>7(9+x)$。 $\therefore$ $3x>13$。

由是 $x>4\frac{1}{3}$。 $x=5$。

4. $x+1:x+6$ 等於 $3:5$ 之二倍比求 x。 答 $\frac{29}{16}$。

〔解〕 從 $\frac{x+1}{x+6}=\frac{3^2}{5^2}$ 得 x。

5. $a:b=c:d$ 求下之證。

(1) $a^2+ab+b^2:c^2+cd+d^2=a^2-ab+b^2:c^2-cd+d^2$。

(2) $a+b:c+d=\sqrt{(2a^2-3b^2)}:\sqrt{(2c^2-3d^2)}$。

(3) $a^2+b^2+c^2+d^2:(a+b)^2+(c+d)^2=(a+c)^2+(b+d)^2:(a+b+c+d)^2$。

〔證〕 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

(1) 故 $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}=\frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}$ 及 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ 由除法。

$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\div\frac{a+b}{a-b}=\frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}\div\frac{c+d}{c-d}$。 即 $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{c^2-cd+d^2}{c^2+cd+d^2}$。

(2) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=K$。 $K^2=\frac{2a^2}{2c^2}=\frac{3b^2}{3d^2}=\frac{2a^2-3b^2}{2c^2-3d^2}$。

$\therefore\ K=\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{(2a^2-3b^2)}}{\sqrt{(2c^2-3d^2)}}$。

(3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=K$。 $a=bK$。 $c=dK$。

$$\therefore\ \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\frac{b^2K^2+b^2+d^2K^2+d^2}{(bK+b)^2+(dK+d)^2}=\frac{(K^2+1)(b^2+d^2)}{(K+1)^2(b^2+d^2)}=\frac{K^2+1}{(K+1)^2}$$
$$=\frac{(K^2+1)(b+d)^2}{(K+1)^2(b+d)^2}=\frac{(bK+dK)^2+(b+d)^2}{(bK+dK+b+d)^2}=\frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c+b+d)^2}。$$

6. $a:b=c:d$。則 $ab+cd$ 爲 a^2+c^2 及 b^2+d^2 之比例中項試證之。

〔證〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a^2}{ab}=\frac{c^2}{cd}=\frac{a^2+c^2}{ab+cd}$ 同法 $=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$。

由是 $a^2+c^2:ab+cd=ab+cd:b^2+d^2$。

變　數

214. 變數 二數量有一定之關係。其第一量任意兩值之比。等於第二量相當兩值之比。則謂之第一量因第二量而變。

例如第一量之兩值爲 a_1a_2 之比。等於第二量之相當兩值 b_1b_2 之比。則 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$。故 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$。

由是此二量之相當値爲常比。

凡用 ∞ 記號。卽示因變之意。故 $A\infty B$ 可讀爲 A 因 B 變。

$a\infty b$。則 $a:b$ 爲常數。而此常比。命爲 m。則 $\frac{a}{b}=m$。 $\therefore\ a=mb$。

於任意之例欲求常比m。必先知a及b之相當數值。

例如 $a\infty b$ 知b等於5。a等於15。則

$$\frac{a}{b}=m=\frac{15}{5}。\quad \therefore\ \frac{a}{b}=3。\ 即\ a=3b。$$

215. 定義 凡二數量。其第一量因第二量之反商而變。則謂之第一量因第二量反變。

例如a因b反變。則$a:\frac{1}{b}$爲常比。而$ab=m$。

一數量依他二數量之積而變。則謂之此數量因他二數量合變。

例如 $a\infty bc$ 爲a因b及c合變。卽 $a=mbc$。但m爲常數。

有三數量。其第一量依第二量及第三量之反商之積而變。則謂之第一量因第二量正變。因第三量反變。

例如a因b正變。因c反變。則 $a:b\times\frac{1}{c}$ 爲常比。卽 $a=m\frac{b}{c}$。但m爲常數。

上所述各例之定義。知其相當數值。卽可決定其常數。

例如a因b及c合變。若b爲4。c爲3而a爲6。則 $a=mbc$。

卽 $6=m\times4\times3$。 $\therefore\ m=\frac{1}{2}$。 由是 $a=\frac{1}{2}bc$。

216. 定理 a唯與b及c相關係。若c爲常數。則a因b變。b爲常數。則a因c變。b及c皆爲變數。則a因bc變。

設a, b, c之相當數值。爲a', b', c及a'', b', c'然c之值。在第一及第二相同。故 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ ……(1)

b'之値。在第二及第三相同。故 $\frac{a'}{a''}=\frac{c}{c'}$ ……(2)

由是從(1)式及(2)式。得 $\frac{a}{a''}=\frac{bc}{b'c'}$。 卽 $\frac{a}{a''}=\frac{mbc}{mb'c'}$。

$\therefore\ a=mbc,\ a''=mb'c'$。卽得證。

其例如下。

有牛肉若干。若重量 (W) 爲常數。則總價 (C) 因每斤之價 (P) 變。若每斤之價 (P) 爲常數。則總價 (C) 因重量 (W) 變。由是依定理。若重量與每斤之價。俱爲變數。則牛肉之總價 (C)。當因重量 (W) 與每斤之價 (P) 之積而變。

例如 W 爲常數。則 $C \propto P$。又 P 爲常數。則 $C \propto W$。若 P 及 W 俱爲變數。則 $C \propto PW$。

又如三角形之面積。若高爲常數。卽因底邊變。若底邊爲常數。則因高變。若高及底邊俱爲變數。則其面積因高及底邊之積而變。

又如氣體之壓力。若溫度爲常數。則因其質之密度變。若密度爲常數。則因溫度變。若密度及溫度俱爲變數。則氣體之壓力。因密度與溫度之積而變。

例題

1. 圓之面積。因其半徑之平方變。若半徑 10 尺之圓面積爲 314·159 平方尺。問半徑 7 尺之圓面積若干。 答 153·93791 平方尺。

〔解〕 面積爲 A。半徑爲 r。則 $A \propto r^2$。卽 $A = mr^2$。

卽 $314\cdot159 = m(10)^2$。 $\therefore\ m = 3\cdot14159$。

由是 $A = 3\cdot14159 \times 7^2 = 153\cdot93791$。

2. 球之體積。因其半徑之立方變。半徑 1 尺之球之體積。爲 4·188 立方尺。問半徑 3 尺之球之體積若干。 答 113·076 立方尺。

〔解〕 球之體積爲 V。半徑爲 r。則 $V = mr^3$。

卽 $4\cdot188 = m \times 1^3$。 $\therefore\ m = 4\cdot188$。

由是 $V = 4\cdot188 \times 3^3 = 113\cdot076$。

3. 物體於靜止時墜落。其距離因其時之平方變。今若物體於 2 秒間落 64 尺。問 6 秒間落若干尺。 答 576 尺。

〔解〕 距離爲 v 時爲 t。則 $v = mt^2$。卽 $64 = m(2)^2$。 $\therefore\ m = 16$。

由是 $v = 16(6)^2 = 576$。

4. 氣體之體積因溫度正變。因壓力反變。今壓力 15。溫度 260。則其體積爲 200 立方吋。若壓力 18。溫度 390。則其體積爲若干。

答 250 立方吋。

〔解〕 體積爲V。壓力爲P。溫度爲T。則 $V=mT\times\frac{1}{P}$。

即 $200=m\times260\times\frac{1}{15}$。 $\therefore\ m=\frac{150}{13}$。

由是 $V=\frac{150}{13}\times390\times\frac{1}{18}=250$。

5. 在海岸望遠。其目力所到之距離。因目高於水平面之平方根變。今目高6呎。所望見之距離爲3哩。問目高72碼。其望見之距離若何。 答 18哩。

〔解〕 距離爲D。目高爲h。則 $D=m\sqrt{h}$。

即 $3=m\sqrt{6}$。 $\therefore\ m=\frac{3}{\sqrt{6}}$。

由是 $D=\frac{3}{\sqrt{6}}\times\sqrt{72\times3}=18$。但 1碼 = 3呎。

不定式

217. 比爲分數。則有時對於文字之值。爲不定式。

例如 $x=0$。則 $\frac{x^2-x}{x^3-x}$ 之分母分子皆爲0。即得 $\frac{0}{0}$ 之式。又 $x=1$ 所得亦同。

又上之分數。若 $x=\infty$。則 $\frac{\infty}{\infty}$ 亦爲不定式。

今以此等不定式。求其分數之極限值。示其方法於下。

例如分數 $\frac{x^2-1}{x^3-1}$。若 $x=1$。則得 $\frac{0}{0}$。

今 $\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$。

而 $x-1$ 實非0。則以 $x-1$ 除其分母子。此分數之值仍不變。即 $x-1$ 雖任何小。亦能合理。

由是 $x-1$ 爲甚小。則得 $\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{x+1}{x^2+x+1}$。

此第二之分數。若 x 近於1。則其極限爲 $\frac{2}{3}$。

由是 x 爲甚小而近於 1。則分數 $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ 亦近於 $\frac{2}{3}$。而可以 $L_{x=1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{2}{3}$ 記之。

例題

1. 設 $x=2$。求 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-10x+16}$ 之極限值。 答 $\frac{1}{6}$。

〔解〕 $L_{x=2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-10x+16}=L_{x=2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-8)}=L_{x=2}\frac{x-3}{x-8}=\frac{1}{6}$。

2. 設 $x=0$ 及 $x=\infty$。求 $\frac{x^2+2x}{2x^2+3x}$ 之極限值。 答 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$。

〔解〕 $L_{x=0}\frac{x^2+2x}{2x^2+3x}=L_{x=0}\frac{x(x+2)}{x(2x+3)}=L_{x=0}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{2}{3}$。

$$L_{x=\infty}\frac{x^2+2x}{2x^2+3x}=L_{x=\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}\right)}=L_{x=\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}。$$

其 $\frac{2}{x}$ 及 $\frac{3}{x}$。因 $x=\infty$ 而爲 0。

3. 設 x 爲無窮大。求 $\frac{2x^2+100x+500}{5x^3-40}$ 之極限值。 答 0。

〔解〕 $$L_{x=\infty}\frac{2x^2+100x+500}{5x^3-40}=L_{x=\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{100}{x}+\frac{500}{x^2}\right)}{x^3\left(5-\frac{40}{x^3}\right)}$$

$$=L_{x=\infty}\frac{2+\frac{100}{x}+\frac{500}{x^2}}{x\left(5-\frac{40}{x^3}\right)}=0。$$

例題二十

1. $a+b$, $b+c$, $c+a$ 爲連比例 則 $b+c:c+a=c-a:a-b$。試證明之。

〔證〕 從 $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}$。 $1-\frac{a+b}{b+c}=1-\frac{b+c}{c+a}$。

即 $\frac{c-a}{b+c}=\frac{a-b}{c+a}$。 $\therefore$ $\frac{b+c}{c+a}=\frac{c-a}{a-b}$。

2. $x:a=y:b=z:c$。則 $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$。

〔證〕 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=K$。則

$x=aK$, $y=bK$, $z=cK$, $x+y+z=K(a+b+c)$。

$\therefore$ $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(aK)^3}{a^2}+\frac{(bK)^3}{b^2}+\frac{(cK)^3}{c^2}=K^3(a+b+c)$

$$=\frac{K^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}。$$

3. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$。則 a, b, c, d 成比例。

〔證〕 從原方程式 $\frac{a+b+c+d}{a-b+c-d}=\frac{a+b-c-d}{a-b-c+d}$。

$\therefore$ $\frac{(a+b+c+d)+(a-b+c-d)}{(a+b+c+d)-(a-b+c-d)}=\frac{(a+b-c-d)+(a-b-c+d)}{(a+b-c-d)-(a-b-c+d)}$。

即 $\frac{2(a+c)}{2(b+d)}=\frac{2(a-c)}{2(b-d)}$。 $\therefore$ $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$。再變之。則

$\frac{2a}{2c}=\frac{2b}{2d}$。 $\therefore$ $a:b=c:d$。

4. $b^2+c^2=a^2$。則 $a+b+c:c+a-b=a+b-c:b+c-a$。

〔證〕 從 $b^2+c^2=a^2$。則 $(b+c)^2-a^2=2bc$。

即 $(b+c+a)(b+c-a)=2bc$ ……………………………… (1)

又 $(b-c)^2=a^2-2bc$。 $\therefore$ $2bc=a^2-(b-c)^2$。

即 $(a+b-c)(a-b+c)=2bc$ ……………………………… (2)

從 (1) (2) 得結果。

5. 從 7, 10, 19, 31 各數。減如何相同之數。則成比例。 答 3.

〔解〕 $\frac{7-x}{10-x}=\frac{19-x}{31-x}$。 $\therefore$ $1-\frac{7-x}{10-x}=1-\frac{19-x}{31-x}$。

即 $\frac{3}{10-x}=\frac{12}{31-x}$。 $\therefore$ $31-x=4(10-x)$。 $\therefore$ $x=3$。

6. $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+c-b}{b+c-a}=\dfrac{a+b+c}{2a+b+2c}$。求 $a:b:c$ 之值。 答 $2:3:4$。

〔解〕 $\dfrac{b+(a+c-b)}{(a+b)+(b+c-a)}=\dfrac{(a+c-b)+(a+b+c)}{(b+c-a)+(2a+b+2c)}$。

即 $\dfrac{a+c}{2b+c}=\dfrac{2(a+c)}{a+2b+3c}$。 即 $\dfrac{1}{2b+c}=\dfrac{2}{a+2b+3c}$。

$\therefore\ a+c=2b$ ....(1)

又 $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+c-b}{b+c-a}$。 從 (1) $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{2b-b}{b+c-a}$。

$\therefore\ a+b=b+c-a$。 即 $c=2a$。 $\therefore$ 從 (1) $b=\dfrac{3}{2}a$。

由是 $a:b:c=a:\dfrac{3}{2}a:2a=2:3:4$。

7. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$。則

$(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz)$。

〔證〕 已知分數爲 K。則

$K=\dfrac{x+y+z}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$ ....(1)

又 $K=\dfrac{x+y}{(b+c-a)+(c+a-b)}=\dfrac{x+y}{2c}$。同法 $=\dfrac{y+z}{2a}=\dfrac{z+x}{2b}$。

$\therefore\ K=\dfrac{z(x+y)+x(y+z)+y(z+x)}{2cz+2ax+2by}=\dfrac{yz+zx+xy}{ax+by+cz}$ ....(2)

從 (1) (2) 可得其結果。

8. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$。 則 $\dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{x-y}{c(a-b)}$。

〔證〕 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)=K$。 則

$y+z=\dfrac{K}{a},\quad z+x=\dfrac{K}{b},\quad x+y=\dfrac{K}{c}$。

$\therefore\ x-y=(z+x)-(y+z)=\dfrac{K}{b}-\dfrac{K}{a}=\dfrac{K(a-b)}{ab}$。 $\therefore\ \dfrac{x-y}{c(a-b)}=\dfrac{K}{abc}$。

又 $y-z=(x+y)-(z+x)=\dfrac{K}{c}-\dfrac{K}{b}=\dfrac{K(b-c)}{bc}$。 $\therefore\ \dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{K}{abc}$。

及 $z-x=(y+z)-(x+y)=\dfrac{K}{a}-\dfrac{K}{c}=\dfrac{K(c-a)}{ca}$。 $\therefore\ \dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{K}{abc}$。

9. 證 $(l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\dots\dots\dots):(l_1b_1+l_2b_2+l_3b_3+\dots\dots\dots)$ 在 $a_1:b_1$, $a_2:b_2$, $a_3:b_3$, ……… 諸比之最大及最小之間。

〔證〕 與(113 章定理三同)。

10. $a:b=c:d$。則 $\dfrac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$。

〔證〕 $a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}=\dfrac{1}{a^{2n}}+\dfrac{1}{d^{2n}}+\dfrac{1}{b^{2n}}+\dfrac{1}{c^{2n}}$

$$=\frac{d^{2n}+a^{2n}}{a^{2n}d^{2n}}+\frac{c^{2n}+b^{2n}}{b^{2n}c^{2n}}。\quad 但\quad ad=bc$$

$$=\frac{d^{2n}+a^{2n}}{b^{2n}c^{2n}}+\frac{c^{2n}+b^{2n}}{b^{2n}c^{2n}}。\quad 但\quad b^2c^2=bcad$$

$$=\frac{a^{2n}+d^{2n}+b^{2n}+c^{2n}}{(b^2c^2)^n}=\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{(abcd)^n}。$$

由是 $\dfrac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$。

11. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$。則 $a:b=d:c$。

〔證〕 從已知方程式。

$\{(a+b)(c+d)(b+c)(a+d)\}=\{(a+b)+(c+d)\}\{cd(a+b)+ab(c+d)\}$。

即 $(a+b)(c+d)(ab+ac+bd+cd)$

$$=cd(a+b)^2+(a+b)(c+d)(cd+ab)+ab(c+d)^2。$$

$\therefore\ cd(a+b)^2-(a+b)(c+d)(ac+bd)+ab(c+d)^2=0$。

即 $c(a+b)\{d(a+b)-a(c+d)\}-b(c+d)\{d(a+b)-a(c+d)\}=0$。

即 $c(a+b)(bd-ac)-b(c+d)(bd-ac)=0$。

即 $(bd-ac)\{c(a+b)-b(c+d)\}=0$。

即 $(bd-ac)^2=0$。 $\therefore\ bd=ac$。

12. $(bcd+cda+dab+abc)^2-abcd(a+b+c+d)^2=0$。則 a, b, c, d 可任意排列而成比例。

〔證〕 $\{cd(a+b)+ab(c+d)\}^2-abcd\{(a+b)+(c+d)\}^2=0$。

即 $c^2b^2(a+b)^2+a^2b^2(c+d)^2-abcd(a+b)^2-abcd(c+d)^2=0$。

即 $cd(a+b)^2(cd-ab)-ab(c+d)^2(cd-ab)=0$。

即 $(cd-ab)\{cd(a+b)^2-ab(c+d)^2\}=0$。

即 $(cd-ab)\{cda^2+cdb^2-abc^2-abd^2\}=0$。

即 $(cd-ab)\{ca(da-bc)-bd(da-bc)\}=0$。

即 $(cd-ab)(da-bc)(ca-bd)=0$。

$\therefore$ $cd=ab$, $da=bc$, $ca=bd$。

13. $\dfrac{x}{a+2b+c}=\dfrac{y}{a-c}=\dfrac{z}{a-2b+c}$。則 $\dfrac{a}{x+2y+z}=\dfrac{b}{x-z}=\dfrac{c}{x-2y+z}$。

〔證〕 已知分數爲 K。則

$$K=\frac{x+2y+z}{(a+2b+c)+2(a-c)+(a-2b+c)}=\frac{x+2y+z}{4a}。$$

又 $$K=\frac{x-z}{(a+2b+c)-(a-2b+c)}=\frac{x-z}{4b}。$$

又 $$K=\frac{x-2y+z}{(a+2b+c)-2(a-c)+(a-2b+c)}=\frac{x-2y+z}{4c}。$$

由是 $\dfrac{x+2y+z}{4a}=\dfrac{x-z}{4b}=\dfrac{x-2y+z}{4c}$。

14. $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$。及 $x+y+z=0$。僅適合於 $x:y:z$ 之一組。則

$bc-f^2+ca-g^2+ab-h^2+2(gh-af)+2(hf-bg)+2(fg-ch)=0$。

〔證〕 $\dfrac{x}{z}=\lambda$, $\dfrac{y}{z}=\mu$。以 z^2 及 z 除已知兩方程式。則

$a\lambda^2+b\mu^2+c+2f\mu+2g\lambda+2h\lambda\mu=0$。 $\lambda+\mu+1=0$。

$\mu=-(\lambda+1)$。代入第一。則

$\lambda^2(a+b-2h)+2\lambda(b-f+g-h)+b+c-2f=0$。依題意 λ 之解答唯一個。故 $4(b-f+g-h)^2-4(a+b-2h)(b+c-2f)=0$。解而括之。則

$bc-f^2+ca-g^2+ab-h^2+2(gh-af)+2(hf-bg)+2(fg-ch)=0$。

15. $\dfrac{a}{p(px-qy-rz)}=\dfrac{b}{q(qy-rz-px)}=\dfrac{c}{r(rz-px-qy)}$。則

$$\frac{p}{a(ax-by-cz)}=\frac{q}{b(by-cz-ax)}=\frac{r}{c(cz-ax-by)}。$$

〔證〕 已知分數各以 pgr 乘之。則

$$\frac{agr}{px-gy-rz}=\frac{brp}{gy-rz-px}=\frac{cpg}{rz-px-by}。$$

順次以兩個分母子相加。則得

$$\frac{agr+brp}{-2rz}=\frac{brp+cpg}{-2px}=\frac{cpg+agr}{-2gy}。$$

$$\therefore\quad \frac{br+cg}{x}=\frac{cp+ar}{y}=\frac{ax+bp}{z}=K。$$

$$K=\frac{a(br+cg)-b(cp+ar)-c(ag+bp)}{ax-by-cz}=\frac{-2bcp}{ax-by-cz}。$$

$$\therefore\quad -\frac{K}{2abc}=\frac{p}{a(ax-by-cz)}\ \text{同法}=\frac{g}{b(by-cz-ax)}=\frac{r}{c(cz-ax-by)}。$$

16. $ab=cd$。則各等於 $(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)/(a+b+c+d)^2$。

又 $a+b=c+d$。則各等於 $abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\Big/(ab+cd)$。

〔證〕 從 $ab=cd$。則 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$。 $\therefore\quad \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{b}=\frac{a+b+c+d}{b+c}$。

由是 $\frac{(a+c)(b+c)}{a+b+c+d}=c$。

又從 $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$ 同法 $\frac{(c+d)(b+d)}{a+b+c+d}=d$。

由是 $\frac{(a+c)(b+c)(a+d)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}=cd$。

次 $a+b=c+d=K$。則

$$\frac{K}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ \text{及}\ \frac{K}{cd}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}。\quad \therefore\quad K\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}。$$

由是 $K=abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\Big/(ab+cd)$。

17. $x=2$ 及 $x=\infty$。求下各分數之極限值。

(1) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+14}$。 (2) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$。 (3) $\frac{x^2+6x-16}{x^3-12x+16}$。

答 (1) $\frac{3}{5}$, 1。 (2) 0, 1。 (3) ∞, 0。

〔解〕 (1) $L_{x=2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+14}=L_{x=2}\dfrac{x-5}{x-7}=\dfrac{3}{5}$。

及 $L_{x=\infty}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+14}=L_{x=\infty}\dfrac{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{10}{x^2}}{1-\dfrac{9}{x}+\dfrac{14}{x^2}}=1$。

(2) $L_{x=2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=L_{x=2}\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{0}{-1}=0$。

及 $L_{x=\infty}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=L_{x=\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=1$。

(3) $L_{x=2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^3-12x+16}=L_{x=2}\dfrac{x+8}{x^2+2x-8}=\dfrac{10}{0}=\infty$。

及 $L_{x=\infty}\dfrac{x^2+6x-16}{x^3-12x+16}=L_{x=\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{16}{x^3}}{1-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{16}{x^3}}=\dfrac{0}{1}=0$。

18. $x=a$ 求下之極限值。

(1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}$。　　(2) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$。

答 (1) $3\sqrt[3]{a^2}$。 (2) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$。

〔解〕 $L_{x=a}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=L_{x=a}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[2]{ax}+\sqrt[3]{x^2})=3\sqrt[3]{a^2}$。

$L_{x=a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=L_{x=a}\left\{\sqrt{\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{x^2-a^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{x+a}}\right\}$

$=L_{x=a}\left\{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\sqrt{\dfrac{1}{x+a}}\right\}=\sqrt{\dfrac{0}{2a2\sqrt{a}}}+\sqrt{\dfrac{1}{2a}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$。

第拾柒編

等差，等比，調和級數

218. 級數 依定法次第演成之諸數。謂之級數 (Series)。

例如 1, 2, 3, 4 ……… 等。爲各項依次多 1 所成之級數。

又 3, 6, 12, 24 ……… 等。爲各項依次 2 倍所成之級數。

其他如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ ……… 等。或如 $1+a, 2+3a, 3+5a, 4+7a$ 等。皆以一定之規則連續成之。故皆爲級數。

此編僅論簡單之級數。俟後編再詳論之。

等差級數

219. 定義 級數中之任一項。與其前項之差恆相等者。謂之等差級數 (Arithmetical Progression)。

例如 $b-a=c-b=d-c$………，則 a, b, c, d ……… 爲等差級數。略記爲 (A. P.)。

A. P. 各項之差。謂之公差 (Common Difference)。下之各項。爲等差級數。

$$\begin{array}{lllll} 1, & 3, & 5, & 7, & \ldots\ldots\ldots \\ 3, & -1, & -5, & -9, & \ldots\ldots\ldots \\ a, & a+2b, & a+4b, & \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

此第一之公差爲 2。第二之公差爲 -4。第三之公差爲 $2b$。

220. 等差級數之初項爲 a。公差爲 d。則由定義得第 2 項 $=a+d$, 第 3 項 $=a+2d$, 第 4 項 $=a+3d$, 第 5 項 $=a+4d$。以下準此。

由是審其 d 之係數。恆比其項數少 1。

故　第 n 項 $=a+(n-1)d$。

故知 A. P. 之初項及公差。則各項皆可求得。

例如A.P.之初項爲5。公差爲4。則其第10項$=5+(10-1)4=41$。及第30項$=5+(30-1)4=121$。

221. 知等差級數之任意二項 則其級數卽能決定。例如第m項爲α。第n項爲β。則設a爲初項。d爲公差。故

$$a+(m-1)d=\alpha,\qquad a+(n-1)d=\beta。$$

於此兩方程式a及d之值。可以α,β之項表之。

例如A.P.之第7項15及第21項22。求第10項。

a爲初項。d爲公差。則

$$a+6d=15,\qquad a+20d=22。$$

由是 $d=\frac{1}{2}$ 及 $a=12$。 $\therefore$ 第10項$=12+9\times\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$。

222. 等差中項 三數量爲等差級數。則其中數謂爲他兩數之等差中項(Arithmetic Mean)。

如$a,b,c,$爲A.P.則依定義

$$b-a=c-b。\qquad\therefore\quad b=\frac{1}{2}(a+c)。$$

故兩數量間之等差中項。等於其兩數量之和之半。

諸數量爲A.P.則其中間之諸數量。謂爲兩外項之等差諸中項。

例如7, 9, 11, 13, 15之五數。其9, 11, 13稱爲7及15之等差三中項。

凡已知兩數量之間。可插入若干之等差中項。

例如a及b爲已知兩數量。今欲插入n項。則a,b二項與其間插入之n項。共得$n+2$項之等差級數。a爲其初項。b爲其末項卽第$n+2$項。

由是設d爲公差。則$b=a+(n+2-1)d$。 $\therefore\quad d=\frac{b-a}{n+1}$。

卽此級數爲 $a,\ a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1}\ \cdots\cdots\cdots$

故所求之等差中項。爲

$$a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1},\ \cdots\cdots\cdots a+n\frac{b-a}{n+1}。$$

即 $\dfrac{a+b}{n+1}$, $\dfrac{(n-1)a+2b}{n+1}$, ……… $\dfrac{a+nb}{n+1}$。

例如6及18之間插入等差5中項。則

$$18=6+(5+2-1)d。\quad \therefore\ d=2。$$

由是 6, 6+2, 6+4, 6+6, 6+8, 6+10, 6+12。

即 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18。

故所求中項。爲 8, 10, 12, 14, 16。

223. 總和 求等差級數任意若干項之和。

a 爲初項。d 爲公差。n 爲項數。而第 n 項爲 l。則

$$l=a+(n-1)d \quad\text{……………………………}(1)$$

又 S 爲所求之和。則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\dots\dots+(l-2d)+(l-d)+l。$$

更以此和數。從末項逆記之。則

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\dots\dots+(a+2d)+(a+d)+a。$$

由是加其相當之項。則得

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\dots\dots\text{至 } n \text{ 項}=n(a+l)$$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l) \quad\text{……………………………}(2)$$

或從 (1) 式。 $\therefore\ S=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ ……………………(3)

從 (1), (2), (3) 之三公式。則於 a, d, n, l, s 五量中任知其三量。即可得其餘二量。

例題

1. 求等差級數 3+6+9+……… 至20項之和。 答 630。

〔解〕 $a=3,\ d=3。\quad \therefore\ S=\dfrac{20}{2}\{2\times3+(20-1)3\}=630。$

2. 從1起連續諸奇數之和。等於其項數之平方。試證明之。

〔證〕 於 1+3+5+……… $a=1,\ d=2$。則 n 項之和。爲

$$S=\frac{n}{2}\{2\times1+(n-1)2\}=\frac{n}{2}(2+2n-2)=n^2。$$

3. 將級數 $1+5+9+\dots\dots\dots$ 以若干項相加。則其和爲 190。 答 10 項。

〔解〕 $a=1,\ d=4,\ S=190$。從公式 (3)

$190=\frac{n}{2}\{2\times 1+(n-1)4\}$。 卽 $2n^2-n-190=0$。

卽 $(n-10)(2n+19)=0$。由是 $n=10$ 或 $n=-9\frac{1}{2}$。故 $n=10$ 爲解答。其 $n=-9\frac{1}{2}$ 之一根去之。以項必爲正整數也。

4. 取 $5+7+9+\dots\dots\dots$ 之若干項。則其和爲 480。 答 20 項。

〔解〕 從公式 (3) $(n-20)(n+24)=0$。 $\therefore$ 取 $n=20$。

5. A. P. 之第 5 項 11, 第 9 項 7。試求其第 14 項。 答 2。

〔解〕 $a+4d=11,\ a+8d=7$。 $\therefore\ d=-1,\ a=15$。

由是第 14 項 $=15+13(-1)=2$。

6. 第 4 項 b 及第 7 項 $3a+4b$。求 A. P. 之第 2 項。 答 $-2a-b$。

〔解〕 初項爲 x。公差爲 d。則 $x+3d=b,\ x+6d=3a+4b$。

$\therefore\ d=a+b,\ x=-3a-2b$。

由是第 2 項 $=x+d=-3a-2b+(a+b)=-2a-b$。

7. $5, 8, 11, \dots\dots\dots$ 級數之第幾項爲 320。 答 第 106 項。

〔解〕 $a=5,\ d=3$。 $\therefore\ 320=5+(n-1)3$。 $\therefore\ n=106$。

8. 證 A. P. 之各項加同數量。亦爲 A. P.。

〔證〕 $a, b, c, d, \dots\dots\dots$ 爲 A. P.。同數量爲 x。則從

$b-a=c-b=d-c=\dots\dots\dots$ 得

$(b+x)-(a+x)=(c+x)-(b+x)=(d+x)-(c+x)=\dots\dots\dots$

$\therefore\ a+x,\ b+x,\ c+x,\ d+x,\ \dots\dots\dots$ 亦爲 A. P.。

9. 證 A. P. 之各項乘同數量亦爲 A. P.。

〔證〕 從 $b-a=c-b=d-c=\dots\dots\dots$ 得 $bx-ax=cx-bx=\dots\dots\dots$

10. A. P. 之各連續兩項間。插入定數之等差中項。則其全體亦爲 A. P.。

〔證〕 $b-a=c-b=d-c=\dots\dots\dots$ 而 $a, b, c, d\ \dots\dots\dots$ 之各兩項間。插入 n 中項。則其差爲 $\frac{b-a}{n+1},\ \frac{c-b}{n+1},\ \frac{d-c}{n+1}\ \dots\dots\dots$ 而各相等。故如題言。

11. 求下列各級數之和。

(1) $2\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+6\frac{3}{4}+$………………至 23 項。 答 621。

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-$………………至 12 項。 答 -16。

(3) $(a+9b)+(a+7b)+(a+5b)+$……至 10 項。 答 $10a$。

(4) $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+$…………至 n 項。 答 $\frac{1}{2}(n-1)$。

〔解〕 (1) $a=2\frac{1}{4}$, $d=2\frac{1}{4}$。

$$\therefore\quad S=\frac{23}{2}\left\{2\times2\frac{1}{4}+(23-1)2\frac{1}{4}\right\}=621。$$

(2) $$S=\frac{12}{2}\left\{2\times\frac{1}{2}+(12-1)\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=-16。$$

(3) $$S=\frac{10}{2}\{2(a+9b)+(10-1)(-2b)\}=10a。$$

(4) $$S=\frac{n}{2}\left\{2\frac{n-1}{n}+(n-1)\left(-\frac{1}{n}\right)\right\}=\frac{1}{2}(n-1)。$$

12. A.P. 之第 7 項 15 及第 21 項 8。求最初 13 項之和。 答 195。

〔解〕 $a+6d=15$, $a+20d=8$。 $\therefore\ d=-\frac{1}{2}$, $a=18$。

由是所求之和 $=\frac{13}{2}\left\{2\times18-(13-1)\frac{1}{2}\right\}=195$。

13. 有第 11 項為 20 之 A.P. 求其第 21 項之和。 答 420。

〔解〕 $a+10d=20$。

$$S=\frac{21}{2}\{2a+(21-1)d\}=21\{a+10d\}=21\{20\}=420。$$

14. 奇數項之 A.P. 其初項,中央項,末項,亦為 A.P.。

〔證〕 項數為 $2n+1$。初項為 a。中央項為 m。末項為 l。

則 $m=a+(n+1-1)d=a+nd$, $l=a+(2n+1-1)d=a+2nd$。

由是 a, $a+nd$, $a+2nd$ 為 A.P.。

15. 8, 16, 24, ……… 之級數若干項之和加 1。則可以奇數之平方數表之。

〔證〕 $S=\frac{n}{2}\{2\times8+(n-1)8\}=4n+4n^2$。

由是 $S+1=1+4n+4n^2=(1+2n)^2$。

16. 取級數 $15+11+7+\cdots\cdots$ 若干項。則其和爲35。 答 5。

〔解〕 $35=\frac{n}{2}\{2\times15+(n-1)(-4)\}$。 $\therefore\ 2n^2-17n+35=0$。

即 $(n-5)(2n-7)=0$。 $\therefore\ n=5$ 而 $n=\frac{7}{2}$ 不用。

17. A. P. 前5項之和爲 -5。及第6項爲 -13。求公差如何。

答 -4。

〔解〕 $-5=\frac{5}{2}\{2a+(5-1)d\}$ 及 $-13=a+5d$。從此兩方程式消去 a 求 d 之同數爲 -4。

18. 於200及400間之各數。可以7整除者。求其諸數之和。

〔解〕 200以7除。則餘4。 $\therefore$ 200=7之倍數+4。

由是 203=7之倍數+7=7之倍數。

又 400以7餘。則餘1。 $\therefore$ 400−1=399=7之倍數。

由是 203, 210, 217, …, …, 399之A. P. 爲所求之和。

故 $399=203+(n-1)7$。 $\therefore\ n=29$。

由是 $S=\frac{29}{2}(203+399)=8729$。

19. 於A. P. 之級數。每 n 項合爲一羣。則其諸羣亦爲A. P.。而其公差與原級數之公差之比爲 $n^2:1$。

〔證〕 $a, a+d, a+2d, \cdots\cdots$ 爲原級數。每 n 項合爲一羣。則

第一羣 $(A)=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d=an+\frac{n}{2}(n-1)d$。

第二羣 $(B)=\frac{n}{2}\{2(a+nd)+(n-1)d\}=an+\frac{n}{2}(n-1)d+n^2d$。

第三羣 $(C)=\frac{n}{2}\{2(a+2nd)+(n-1)d\}=an+\frac{n}{2}(n-1)d+2n^2d$。

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

由是 $A, B. C, \cdots\cdots$ 之公差爲 n^2d。故與 d 之比爲 $n^2:1$。

等比級數

224. 定理 級數中任一項。與其前項之比恆相同者。謂之等比級數 (Geometrical Progression)。

例如 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=$………。則 a, b, c, d ………爲等比級數。略記爲 G. P.

G. P. 各項與其前項之比。謂之公比 (Common Ratio)

下之各項爲等比級數。

$$1,\quad 3,\quad 9,\quad 27,\quad \cdots\cdots$$

$$4,\quad -2,\quad 1,\quad -\frac{1}{2},\quad \cdots\cdots$$

$$a,\quad a^3,\quad a^5,\quad a^7,\quad \cdots\cdots$$

此第一之公比爲3。第二之公比爲 $-\frac{1}{2}$。第三之公比爲 a^2。

225. 等比級數之第一項爲 a。公比爲 r。則

第 2 項爲 ar。

第 3 項爲 ar^2。

第 4 項爲 ar^3。

以下準此。而 r 指數。恆比項數少 1。

故 第 n 項 $=ar^{n-1}$。

故知 G. P. 之初項及公比。則各項皆可求得。

例如 初項爲 2。公比爲 3。則 G. P. 之第 6 項 $=2\times 3^5$ 及第 20 項 $=2\times 3^{19}$。

226. 知等比級數之任意兩項 則此級數即可決定。

例如知第 m 項爲 α。及第 n 項爲 β。則設 a 爲初項。r 爲公比。即得

$$ar^{m-1}=\alpha,\qquad ar^{n-1}=\beta。$$

從此兩方程式 $r^{m-n}=\frac{\alpha}{\beta}$。

$$\therefore\quad r=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{m-n}}=\alpha^{\frac{1}{m-n}}\beta^{-\frac{1}{m-n}}。$$

又 $a=\frac{a}{r^{m-1}}=ar^{1-m}=a\left(a^{\frac{1}{m-n}}\beta^{\frac{1}{n-m}}\right)^{1-m}=a^{\frac{1-n}{m-n}}\beta^{\frac{1-m}{n-m}}$。

〔例〕 G. P. 之第3項爲18。第5項爲$40\frac{1}{2}$。試求其初項。

設初項爲a。公比爲r。則

$$ar^2=18,\quad ar^4=40\frac{1}{2}。\qquad\therefore\quad r^2=\frac{9}{4}。$$

由是 $a=\frac{18}{r^2}=18\times\frac{4}{9}=8$。

故此級數爲 8, 12, 18, ...

227. 三數量爲G. P.。則其中數。謂爲他兩數之等比中項(Geometric Mean)。

a, b, c 爲 G. P.。則由定義。得 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$。

由是 $b^2=ac$。 $\therefore\quad b=\pm\sqrt{ac}$。

故已知兩數量之等比中項。等於其積之平方根。

若干數量爲G.P.。則其中間之諸數。謂爲兩外項之等比諸中項。

如 a, b, c, d, e 爲 G. P.。則 b, c, d 爲 a, e 之等比三中項。

凡已知兩數量之間。可插入若干之等比中項。

如a及b爲已知二數量。於其間插入n項之等比中項。則b爲G. P. 之第$n+2$項。故

$$ar^{n+2-1}=b。\qquad\therefore\quad r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}。$$

由是此級數爲 a, ar, ar^2, ar^3 .... ar^n, b。

卽其所求諸中項爲 ar, ar^2 .... ar^n。

卽 $a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\quad a\sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}}\quad ....\quad a\sqrt[n+1]{\frac{b^n}{a^n}}$。

卽 $\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b}{a}},\quad \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^2}{a^2}}\quad ....\quad \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^n}{a^n}}$。

卽 $a^{\frac{n}{n+1}}b^{\frac{1}{n+1}},\quad a^{\frac{n-1}{n+1}}b^{\frac{2}{n+1}}\quad ....\quad a^{\frac{1}{n+1}}b^{\frac{n}{n+1}}$。

例如求3及96之間之等比四中項。則項數爲$4+2=6$。公比爲r。即得　$96=3r^5$。　$\therefore\ r=\sqrt[5]{32}=2$。

由是得 3, 6, 12, 24, 48, 96。

即所求之四中項爲 6, 12, 24, 48。

228. 總和 求若干項等比級數之和。

a爲初項，r爲公比，n爲項數。而第n項爲l。則

$$l=ar^{n-1}。$$

又S爲所求之總數。則

$$S=a+ar+ar^2+\dots\dots+ar^{n-2}+ar^{n-1}。$$

以r乘之。則

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\dots\dots+ar^{n-1}+ar^n。$$

由減法得 $S-Sr=a-ar^n$。　$\therefore\ S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$。

〔例〕 求級數 3, 6, 12, ……… 至10項之和。

$a=3,\ r=2,\ n=10$。則由前之公式。得

$$S=\frac{3(1-2^{10})}{1-2}=3(2^{10}-1)=3069。$$

229. 無窮級數 由前章之公式。

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}。$$

若r爲常分數。則不論正或負。在n增大時。r^n之絕對値必從而減小。故n之値增至無窮大。r^n即可減至無限小。

由是r若小於1。則其項數多至無窮。而其和數S與$\dfrac{a}{1-r}$之差甚爲微小。

即n爲無窮大。則r^n可爲0。而$\dfrac{ar^n}{1-r}=0$。

故　$S=\dfrac{a}{1-r}$。

故等比級數$a+ar+ar^2+\dots\dots$若r之値小於1。則其無窮項數之和爲$\dfrac{a}{1-r}$。

例題

1. 求級數 $9-6+4\cdots\cdots$ 之無窮項之和。 答 $\frac{27}{5}$。

〔解〕 $a=9,\ r=\frac{-6}{9}=-\frac{2}{3},\ S=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{27}{5}$。

2. 等比級數無窮項之和。爲 $4\frac{1}{2}$。第二項爲 -2。則其級數如何。

答 $6,\ -2,\ \frac{2}{3}\cdots\cdots$

〔解〕 $ar=-2$, 及 $4\frac{1}{2}=\frac{a}{1-r}$。由是 $9r^2-9r-4=0$。

$\therefore\ r=-\frac{1}{3}$ 或 $r=\frac{4}{3}$ 因 $r=\frac{4}{3}>1$ 爲不合理。

故 $r=-\frac{1}{3},\ a=-\frac{2}{r}=6$。

3. G. P. 之第3項2。第6項 $-\frac{1}{4}$。則第10項如何。 答 $\frac{1}{64}$。

〔解〕 $ar^2=2,\ ar^5=-\frac{1}{4}$。 $\therefore\ r^3=-\frac{1}{8}$。 $\therefore\ r=-\frac{1}{2}$。

又 $a=\frac{2}{r^2}=8$。由是 $ar^9=8\left(-\frac{1}{2}\right)^9=-\frac{1}{64}$。

4. 試於8及 -1 之間。插入等比兩中項。又於2及18之間。插入等比三中項。 答 $-4,\ 2$。又 $\pm2\sqrt{3},\ 6,\ \pm6\sqrt{3}$。

〔解〕 $8r^3=-1$。 $\therefore\ r=-\frac{1}{2}$。 $\therefore\ 8\times-\frac{1}{2}=-4,\ -4\times-\frac{1}{2}=2$。

又 $2r^4=18$。 $\therefore\ r=\pm\sqrt{3}$。 $\therefore\ \pm2\sqrt{3},\ 6,\ \pm6\sqrt{3}$。

5. G. P. 之各項。以同數乘之。亦爲 G. P.。

〔證〕 $a,\ ar,\ ar^2\cdots\cdots$ 以 x 乘之。則

$ax,\ (ax)r,\ (ax)r^2\cdots\cdots$ 卽亦爲 G. P.。

6. G. P. 各項之反商亦爲 G. P.。

〔證〕 依 $a,\ ar,\ ar^2\cdots\cdots$ 之反商爲 $\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right),\ \frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^2\cdots\cdots$ 卽亦爲 G. P.。

7 G. P. 之連續各二項。插入同數之中項。則其式亦爲 G. P.。

〔證〕 a, b, c, d ……… 爲 G. P.。則 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=$………。而各兩項間。插入等比 n 中項。其比爲 r。則 $r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[n+1]{\frac{c}{b}}=$………。各式皆同。故如題云云。

8. 求下列各式之和。

(1) $12+9+6\frac{3}{4}+$……… 至 20 項。 答 $48\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}$。

(2) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-$……… 至 6 項。 答 $\frac{133}{243}$。

(3) $4+.8+.16+$……… 至無窮。 答 5。

〔解〕 (1) $a=12,\ r=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$。

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{3}{4}}=48\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}。$$

(2) $a=1,\ r=-\frac{2}{3}$。 $\therefore\ S=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^6}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3^6-2^6}{3^5\times 5}=\frac{133}{243}$。

(3) $a=4,\ r=\frac{.8}{4}=.2,\ S=\frac{a}{1-r}=\frac{4}{1-.2}=5$。

9. 等比級數諸數量之連乘積。等於 $(gl)^{\frac{n}{2}}$。但 n 爲項數。g 及 l 爲諸數量中之最大及最小者。試證之。

〔證〕 r 爲公比。則 l, lr, lr^2 ……… lr^{n-1} 爲諸數量。$g=lr^{n-1}$ 而連乘積爲 $l\cdot lr\cdot lr^2$ ……… lr^{n-1}。即 $l^n r^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}$ 即 $l^n r^{\frac{n-1}{2}(1+n-1)}$ 即 $l^n r^{\frac{n}{2}(n-1)}$。即 $(l^2 r^{n-1})^{\frac{n}{2}}$ 即 $(lr^{n-1}l)^{\frac{n}{2}}$ 即 $(gl)^{\frac{n}{2}}$。

10. 求證 G. P. 諸數量之積。等於中項之 n 方乘。但 n 爲項數。且爲奇數。

〔證〕 中項爲 m。則依前例設 $gl=m^2$。而諸數量之連乘積爲 $(gl)^{\frac{n}{2}}=(m^2)^{\frac{n}{2}}=m^n$。

11. G. P. 之最初 10 項之和。等於最初 5 項之和之 244 倍。求公比。 答 3。

〔解〕 $\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=244\times\dfrac{a(1-r^5)}{1-r}$。 $\therefore\ 1-r^{10}=244(1-r^5)$。

$\therefore\ 1+r^5=244$。 $\therefore\ r=\sqrt[5]{243}=3$。

12. G. P. 之公比小於 $\dfrac{1}{2}$。則各項大於以下諸項之和。試證之。

〔證〕 任設一項爲 ar^m。則其以下諸項之和爲 $ar^{m+1}+ar^{m+2}+\ldots\ldots$ 即 $\dfrac{ar^{m+1}}{1-r}$。而 $ar^m-\dfrac{ar^{m+1}}{1-r}=\dfrac{ar^m(1-2r)}{1-r}$。

但 $r<\dfrac{1}{2}$。 $\therefore\ 1-2r$ 爲正。 $\therefore\ ar^m>\dfrac{ar^{m+1}}{1-r}$。

調和級數

230. 定理 級數中任意連續三項之差之比。等於第一與第三之比。謂之調和級數 (Harmonical Progression)。

例如 $a-b:b-c=a:c$。

$b-c:c-d=b:d$。

由是 $a, b, c, d\ldots\ldots\ldots$ 爲調和級數。略記爲 H. P.。

a, b, c 爲調和級數。則由定義。

$$a-b:b-c=a:c。$$

$$\therefore\quad c(a-b)=a(b-c)。$$

由是兩邊以 abc 除之。則得 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}$。

由是 $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ 爲等差級數。

故調和級數之反商爲等差級數。

231. 調和中項 $a\ b, c$ 爲調和級數。則 $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ 爲等差級數。

由是 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$。 $\therefore\ b=\dfrac{2ac}{a+c}$。

故兩數量之調和中項 (Harmonic Mean)。等於其和數除其積之 2 倍。

設 A.G.H. 為 a 及 b 兩數量之等差,等比,調和之中項。則

$$A=\frac{1}{2}(a+b),\quad G=\sqrt{ab},\quad H=\frac{2ab}{a+b}.$$

$$\therefore\quad AH=\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2.$$

故任意兩數間之等比中項。又為其兩數之等差中項,與調和中項之等比中項。

232. 定理 兩不等正數量之等差中項。恆大於其等比中項。

設 a 及 b 為兩正數。則

$$\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \text{ 為正。}$$

由是 $\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}.$

又兩不等正數量之等比中項。恆大於其調和中項。

何則 $\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$ 為正。

由是 $\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}.$

233. 插入項 凡任意兩項之間。可插入 n 個調和中項。

先於 $\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{b}$ 之間。求插入 n 個等差中項。則依222章。得

$\frac{1}{a}+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),\quad \frac{1}{a}+\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$ ………… 而由此諸中項。求其反商。卽為所求之調和中項如下。

$$\frac{(n+1)ab}{nb+a},\quad \frac{(n+1)ab}{(n-1)b+2b}\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{(n+1)ab}{b+na}.$$

234. 求調和級數之總和 不能作一公式示之。

〔餘論〕 凡級數三項。其相連兩項之差之比為等差級數。可僅以第一項表之。至等比級數。則已進一步。而關係及於第二項。至調和級數。則更進一步。而關係及於第三項。

例如有 a, b, c 三數。

此三數爲等差級數。則 $a-b=b-c$。

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b-c}=1=\frac{a}{a}。$$

又此三數爲等比級數。則 $b^2=ac$。故 $ab-b^2=ab-ac$。

即 $b(a-b)=a(b-c)$。 $\therefore \quad \dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{b}$。

又如爲調和級數。則依230章之定義。得

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}。$$

由是等差,等比,調和之三級數。乃極明瞭。試整列其次序如下。

$a-b : b-c :: a : a$..................(等差)

$a-b : b-c :: a : b$..................(等比)

$a-b : b-c :: a : c$..................(調和)

例題二十一

1. a, b, c 爲 A. P.。則 $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ 爲 A. P.。

〔證〕 $a-b=b-c$。而 $a^2(b+c)-b^2(c+a)=ab(a-b)+c(a^2-b^2)$

$$=(a-b)(ab+ca+bc)=(b-c)(ab+ca+bc)$$
$$=bc(b-c)+a(b^2-c^2)=b^2(c+a)-c^2(a+b)。$$

2. 四數爲 A. P.。其平方之和爲120。第一與第四之積。比他兩數之積少8。求四數。 答 2, 4, 6, 8 或 $-2, -4, -6, -8$。

〔解〕 $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ 爲四數,則

$(x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2=120$。

即 $2(x^2+9y^2)+2(x^2+y^2)=120$。 $\therefore \quad x^2+5y^2=30$。

又 $(x-3y)(x+3y)=(x-y)(x+y)-8$。 $\therefore \quad 8y^2=8$。 $\therefore \quad y=\pm 1$。

由是 $x^2=30-5y^2=25$。 $\therefore \quad x=\pm 5$。

$\therefore$ 所求之四數爲 $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$。

3. a, b, c 爲 A. P.。b, c, d 爲 H. P.。求證 $a : b=c : d$。

〔證〕 $a-b=b-c$ 及 $\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}$。 $\therefore \quad \dfrac{b-c}{bc}=\dfrac{c-d}{cd}$。

$\therefore \quad \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$。 $\therefore \quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$。

4. 三數爲 G. P.。其和爲 14。其平方之和爲 84。求各數

答 2, 4, 8。

〔解〕 三數爲 x^2, xy, y^2。則 $x^2+xy+y^2=14$。

$x^4+x^2y^2+y^4=84$。由此通同方程式。可得 x, y。

5. 求證 a, b, c 爲等差級數。x 爲 a 及 b 之等比中項。y 爲 b 及 c 之等比中項。則 x^2, b^2, y^2 爲等差級數。

〔證〕 $a-b=b-c,\quad x^2=ab,\quad y^2=bc,\quad 2b=c+a$。

又 $x^2+y^2=b(a+c)=2b^2$。 $\therefore\ x^2, b^2, y^2$ 爲 A. P.。

6. a, b, c 爲調和級數。則 $\dfrac{a}{b+c-a}$, $\dfrac{b}{c+a-b}$, $\dfrac{c}{a+b-c}$ 亦爲調和級數。試證之。

〔證〕 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$。故以 $a+b+c$ 乘之。則

$$\frac{a+b+c}{a}-\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{b}-\frac{a+b+c}{c}。$$

即 $\left(\dfrac{a+b+c}{a}-2\right)-\left(\dfrac{a+b+c}{b}-2\right)=\left(\dfrac{a+b+c}{b}-2\right)-\left(\dfrac{a+b+c}{c}-2\right)$。

即 $\dfrac{b+c-a}{a}-\dfrac{c+a-b}{b}=\dfrac{c+a-b}{b}-\dfrac{a+b-c}{c}$。

$\therefore\ \dfrac{a}{b+c-a}$, $\dfrac{b}{c+a-b}$, $\dfrac{c}{a+b-c}$ 爲 H. P.。

7. a, b, c, d 爲調和級數。則 $3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$。

〔證〕 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)+\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{d}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{d}\right)$。 即 $\dfrac{b-a}{ab}=\dfrac{c-b}{bc}=\dfrac{d-c}{cd}=\dfrac{d-a}{3ad}$。

$\therefore\ \dfrac{(b-a)(d-c)}{ab\times cd}=\dfrac{(c-b)(d-a)}{bc\times 3ad}$。 $\therefore\ 3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$。

8. a, b, c 爲調和級數。則 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{b-a}+\dfrac{1}{b-c}$。

〔證〕 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$。 $\therefore\ \dfrac{b-a}{ab}=-\dfrac{b-c}{bc}$。

$\therefore\ \dfrac{a}{b-a}=-\dfrac{c}{b-c}$。 即 $\dfrac{a}{b-a}+\dfrac{c}{b-c}=0$。

$\therefore\ \dfrac{a}{b-a}+1+\dfrac{c}{b-c}+1=2$。 即 $\dfrac{b}{b-a}+\dfrac{b}{b-c}=2$。

9. a, b, c 爲 H. P.。則 $\dfrac{b+a}{b-a}+\dfrac{b+c}{b-c}=2$。試證之。

〔證〕 由前例 $\dfrac{a}{b-a}+\dfrac{c}{b-c}=0$, 及 $\dfrac{b}{b-a}+\dfrac{b}{b-c}=2$。

相加。則 $\dfrac{b+a}{b-a}+\dfrac{b+c}{b-c}=2+0=2$。

10. a, b, c 爲 A. P.。而 b, c, d 爲 G. P.。c, d, e 爲 H. P.。則 a, c, e 爲 G. P.。試證之。

〔證〕 $2b=a+c$, $c^2=bd$, $d=\dfrac{2ce}{c+e}$。連乘之。則

$2bc^2d=(a+c)\,bd\,\dfrac{2ce}{c+e}$。 即 $c=\dfrac{e(a+c)}{c+e}$。

$\therefore\ c(c+e)=e(a+c)$。 $\therefore\ c^2=ae$。

11. 求證 a, b, c 爲 H. P.。則 $a-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{b}{2}$, $c=\dfrac{b}{2}$ 爲 G. P.。

〔證〕 $b=\dfrac{2ac}{a+c}$。 $\therefore\ \dfrac{b}{2}(a+c)=ac$。 即 $0=-\dfrac{b}{2}(a+c)+ac$。

$\therefore\ \dfrac{b^2}{4}=\dfrac{b^2}{4}-\dfrac{b}{2}(a+c)+ac=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)\left(c-\dfrac{b}{2}\right)$。

由是 $a-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{b}{2}$, $c-\dfrac{b}{2}$ 爲 G. P.。

12. 若 a, b, c 爲 H. P.。則 $a, a-c, a-b$ 及 $c, c-a, c-b$ 亦爲 H. P.。試證之。

〔證〕 由定義 $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{c}$。 即 $\dfrac{c}{b-c}=\dfrac{a}{a-b}$。

即 $\dfrac{a-(a-c)}{(a-c)-(a-b)}=\dfrac{a}{a-b}$。 $\therefore\ a, a-c, a-b$ 爲 H. P.。

又 $\dfrac{a}{b-a}=\dfrac{c}{c-b}$。即 $\dfrac{c-(c-a)}{(c-a)-(c-b)}=\dfrac{c}{c-b}$。 $\therefore\ c, c-a, c-b$ 爲 H. P.

13. x, a_1, a_2, y 爲 A. P.。又 x, g_1, g_2, y 爲 G. P.。及 x, h_1, h_2, y 爲 H. P.。則 $\dfrac{g_1g_2}{h_1h_2}=\dfrac{a_1+a_2}{h_1+h_2}$。試證明之。

〔證〕 $x+y=a_1+a_2$, $xy=g_1g_2$。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}。即 \frac{y+x}{xy}=\frac{h_1+h_2}{h_1h_2}。\quad \therefore \quad \frac{a_1+a_2}{{}_1g_2}=\frac{h_1+h_2}{h_1h_2}.$$

14. G.P. 之第一項。第二項及第三項之和。與第三項,第四項及第五項之和之比爲 1:4。而七項爲 384。則此級數如何。

答 6, ±12, 24 ………

〔解〕 $\dfrac{a+ar+ar^2}{ar^2+ar^3+ar^4}=\dfrac{1}{4}$ 及 $ar^6=384$。

$\therefore \quad \dfrac{a(1+r+r^2)}{ar^2(1+r+r^2)}=\dfrac{1}{4}$。 $\therefore \quad \dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{4}$。

$\therefore \quad r=\pm 2,\quad a=\dfrac{384}{r^6}=\dfrac{384}{64}=6$。

15. $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$ 爲 H P.。則

$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$。試證明之。

〔證〕 $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_4}=\ldots\ldots \quad =\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}=K$。

則 $\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}\right)+\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right)+\left(\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_4}\right)+\ldots\ldots+\left(\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)=(n-1)K$。

即 $(n-1)K=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}$。 $\therefore \quad K=\dfrac{a_n-a_1}{(\ -1)a_1a_n}$。

又 $K=\dfrac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\dfrac{a_3-a_2}{a_2a_3}=\dfrac{a_4-a_3}{a_3a_4}=\ldots\ldots=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$。

由是 $\dfrac{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\ldots\ldots+(a_n-a_{n-1})}{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots\ldots+a_na_{n-1}}=\dfrac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$。

即 $\dfrac{a_n-a_1}{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}a_n}=\dfrac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$。

$\therefore \quad a_1a_2+a_2a_3+\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$。

16. a, x, y, b 爲等差級數。a, u, v, b 爲調和級數。則 $xv=yu=ab$。試證之。

〔證〕 由 222 章 a, b 間之等差中項爲 $a+\dfrac{b-a}{3}$, $a+2\dfrac{b-a}{3}$。

$\therefore \quad x=a+\dfrac{b-a}{3}=\dfrac{1}{3}(2a+b),\quad y=a+2\dfrac{b-a}{3}=\dfrac{1}{3}(a+2b)$。

又 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ 間之等差中項爲 $\frac{1}{u}=\frac{a+2b}{3ab}$, $\frac{1}{v}=\frac{2a+b}{3ab}$。

即 $u=\frac{3ab}{a+2b}$, $v=\frac{3ab}{2a+b}$。

由是 $xv=\frac{1}{3}(2a+b)\frac{3ab}{2a+b}=ab$,

$yu=\frac{1}{3}(a+2b)\frac{3ab}{a+2b}=ab$。

17. 有三數爲等差級數。而其兩外項之積。爲中項之5倍。而兩大數之和。等於最小數之8倍。求各數。 答 3, 9, 15。

〔解〕 設三數爲 $x-y$, x, $x+y$。則 $(x-y)(x+y)=5x$。即 $x^2-5x=y^2$。

又 $x+(x+y)=8(x-y)$。 即 $y=\frac{2}{3}x$。

$\therefore$ $\frac{4}{9}x^2=x^2-5x$。 $\therefore$ $x=9$, 而 $y=6$。

18. $\frac{a+b}{1-ab}$, b, $\frac{b+c}{1-bc}$ 爲 A. P.。則 a, $\frac{1}{b}$, c 爲 H. P.。試證明之。

〔證〕 $\frac{a+b}{1-ab}-b=b-\frac{b+c}{1-bc}$。即 $\frac{a(1+b^2)}{1-ab}=-\frac{c(1+b^2)}{1-bc}$。

$\therefore$ $a(1-bc)=-c(1-ab)$。 $\therefore$ $2abc=c+a$。

即 $2b=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$。 $\therefore$ $\frac{1}{a}$ b, $\frac{1}{c}$ 爲 A. P.。

$\therefore$ a, $\frac{1}{b}$, c 爲 H. P.。

19. a, b, c 爲 A. P.。及 a^2, b^2, c^2 爲 H. P.。則 $-\frac{1}{2}a, b, c$ 爲 G. P.。

〔證〕 $a-b=b-c$ 及 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$。

由是 $c^2(b^2-a^2)=a^2(c^2-b^2)$。即 $c^2(a+b)(a-b)=a^2(b+c)(b-c)$。

$\therefore$ $c^2(a+b)(a-b)=a^2(b+c)(a-b)$。

$\therefore$ $a-b=0$, 或 $c^2(a+b)=a^2(b+c)$, $a-b=0$。則 $b-c$ 亦爲 0。

$\therefore$ $a=b=c$。

又 $c^2(a+b)=a^2(b+c)$。則 $ac(c-a)+b(c^2-a^2)=0$。而 $c-a=0$ 與前同。故 $ac+b(c+a)=0$。而 $c+a=2b$。故 $ac+2b^2=0$。

$\therefore\ b^2=-\frac{1}{2}ac$。 $\therefore\ -\frac{1}{2}a, b, c$ 爲 G. P.。

20. 有 a, b 爲最初兩項之等差級數。及調和級數。x 爲等差級數之任意一項。y 爲相當之調和級數之一項。則 $x-a : y-a=b : y$。試證之。

〔證〕 $x=a+(n-1)d$。則 $\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+(n-1)D$。

但 $d=b-a,\quad D=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$,

$$x=a+(n-1)(b-a),\ \text{即}\ x-a=(n-1)(b-a),$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),\ \text{即}\ \frac{b(y-a)}{y}=(n-1)(b-a)。$$

由是 $x-a=\frac{b(y-a)}{y}$。 $\therefore\ x-a : y-a=b : y$。

21. a 爲 b 及 c 間之等差中項。b 爲 a 及 c 間之等比中項。則 c 爲 a 及 b 間之調和中項。試證之。

〔證〕 $2a=b+c,\ b^2=ac$。 $\therefore\ 2a=\frac{ac}{b}+c$。 $\therefore\ c=\frac{2ab}{a+b}$。

22. 自然數區分爲各羣。如 $1, | 2, 3, | 4, 5, 6, | 7, 8, 9, 10, | \cdots\cdots$。則第 K 羣之和爲 $\frac{1}{2}k(k^2+1)$。試證之。

〔證〕 如第 2 羣之末項爲 $\frac{1}{2}2(1+2)=3$。第 3 羣之末項爲 $\frac{1}{2}3(3+1)=6$。則第 K 羣之末項爲 $\frac{1}{2}k(1+k)$。

故第 K 羣之和爲 $\frac{1}{2}k\left\{2\times\frac{1}{2}k(1+k)+(k-1)(-1)\right\}=\frac{1}{2}k(k^2+1)$。

23. A. P. 及 H. P. 之初項爲 a。末項爲 l。項數爲 n。則 A. P. 之第 $r+1$ 項。及 H. P. 之第 $n-r$ 項之積。與 r 無關係。

〔證〕 從 $l=a+(n-1)d,\ d=\frac{l-a}{n-1}$。

又從 $\frac{1}{l}=\frac{1}{a}+(n-1)D,\quad D=\frac{-(l-a)}{al(n-1)}$。

但 A. P. 之第 $r+1$ 項 $=a+rd=a+\frac{(l-a)r}{n-1}=\frac{a(n-1)+(l-a)r}{n-1}$。

H.P.之第$n-r$項$=1\Big/\left\{\dfrac{1}{a}+(n-r-1)\dfrac{-(l-a)}{al(n-1)}\right\}=\dfrac{al(n-1)}{a(n-1)+(l-a)r}$。

由是此兩項之積$=\dfrac{a(n-1)+(l-a)r}{n-1}\times\dfrac{al(n-1)}{a(n-1)+(l-a)r}=al$。

24. 從A.P.之已知一項。至等距離之各兩項之積。取其逐次之差。則亦爲A.P.。試證之。

〔證〕 d爲公差。已知一項爲a。則$a-nd$。及$a+nd$爲與a等距離之兩項。此積爲$(a-nd)(a+nd)=a^2-n^2d^2$。

逐次積爲$a^2-(n+1)^2d^2,\ a^2-(n+2)^2d^2,\ a^2-(n+3)^2d^2$。

而此差爲$(2n+1)d^2,\ (2n+3)d^2,\ (2n+5)d^2\ \ldots\ldots\ldots$。

故亦爲A.P.。

25. S_n, S_{2n}, S_{3n}爲n項，$2n$項，$3n$項之G.P.之和。則
$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$。試證之。

〔證〕 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r},\quad S_{2n}=S_n+\dfrac{ar^n(1-r^n)}{1-r}$。

即 $S_{2n}-S_n=r^nS_n,$ 又 $S_{3n}=S_{2n}+\dfrac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r}$。

即 $S_{3n}-S_{2n}=r^{2n}S_n,\quad \therefore\ (S_{2n}-S_n)^2=r^{2n}S_n^{\,2}=(S_{3n}-S_{2n})S_n$。

26. a, b, c皆爲正數。無論爲A.P.爲G.P.爲H.P.。若n爲任意之正整數。則$a^n+c^n>2b^n$。試證之。

〔證〕 $a<b<c$爲A.P.。則$c-b=b-a=d$。

$$a^n+c^n-2b^n=(c^n-b^n)-(b^n-a^n)$$
$$=d\{(c^{n-1}+c^{n-2}b\ldots\ldots\ldots+b^{n-1})-(b^{n-1}+b^{n-2}a\ldots\ldots\ldots+a^{n-1})\}。$$

此式之{ }內爲正。 $\therefore\ a^n+c^n>2b^n$。

又H.P.爲A.P.之反商。故知A.P.亦能合理。

又爲G.P.。則從$b^2=ac,\ a^n+c^n-2b^n=a^n+c^n-2a^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}=(a^{\frac{n}{2}}-c^{\frac{n}{2}})^2$。其數爲正。故$a^n+c^n>2b^n$。

27. P, Q, R爲(1) A.P.，(2) G.P.，(3) H.P.之第p項，第q項第r項。求證 (1) $P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)=0$。

(2) $P^{q-r}Q^{r-p}R^{p-q}=1$。

(3) $QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0$。

〔證〕 (1) $P=a+(p-1)d,\quad Q=a+(q-1)d,\quad R=a+(r-1)d,$

$P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)$

$=a\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\}+d\{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)\}$

$=a\{0\}+d\{0\}=0$。

(2) $P=at^{p-1},\quad Q=at^{q-1},\quad R=at^{r-1}$。

$P^{q-r},\ Q^{r-p},\ R^{p-q}=a^{(q-r)+(r-p)+(p-q)}t^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}=a^0t^0=1$。

(3) $\dfrac{1}{P}=\dfrac{1}{a}+(p-1)d,\quad \dfrac{1}{Q}=\dfrac{1}{a}+(q-1)d,\quad \dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{a}+(r-1)$

$$\frac{q-r}{P}+\frac{r-p}{Q}+\frac{p-q}{R}=\frac{1}{a}\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\}$$
$$+d\{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)\}=0。$$

$\therefore\ QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0$。

28. $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$ 爲 H. P.。則

$\dfrac{a_1}{a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n},\ \dfrac{a_2}{a_1+a_3+\ldots\ldots+a_n},\ \dfrac{a_n}{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}}$ 亦爲 H.P.。

〔證〕 $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}=\ldots\ldots=\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}$。以 $a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n$ 乘之。則

$$\left(1+\frac{a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n}{a_1}\right)-\left(1+\frac{a_1+a_3+\ldots\ldots+a_n}{a_2}\right)$$
$$=\left(1+\frac{a_1+a_3+\ldots\ldots+a_n}{a_2}\right)-\left(1+\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{a_3}\right)=\ldots\ldots\ldots。$$

卽 $$\frac{a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n}{a_1}-\frac{a_1+a_3+\ldots\ldots+a_n}{a_2}$$
$$=\frac{a_1+a_3+\ldots\ldots+a_n}{a_2}-\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{a_3}=\ldots\ldots\ldots。$$

故此反商爲 H. P.。

29. $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ 皆爲實數。而

$(a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots\ldots+a_{n-1}^2)(a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots\ldots+a_n{}^2)=(a_1a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}a_n)^2$。

則 $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ 爲 G. P.。

〔證〕 解已知方程式之括弧。消去 $a_1{}^2a_2{}^2, a_2{}^2a_3{}^2 \ldots\ldots$ 之項。再括之。

則 $(a_1a_n-a_2a_{n-1})^2+(a_3a_{n-2}-a_4a_{n-3})^2+\ldots\ldots\ldots=0$。

依題意 $a_1a_n-a_2a_{n-1}=0,\ a_3a_{n-2}-a_4a_{n-3}=0\ \ldots\ldots\ldots$。

$\therefore\quad a_1a_n=a_2a_{n-1},\ a_3a_{n-2}=a_4a_{n-3}\cdots\cdots$。

由是 $a_1, a_2, a_3, \cdots, \cdots, a_n$ 爲G. P.。

30. 任意之偶數平方$(2n)^2$。等於A. P.之n項之和。又任意之奇數平方$(2n+1)^2$。等於A. P.若干項之和加1。試證之。

〔證〕 $s=\frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\}=\frac{d}{2}m^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)m$。而$a=\frac{d}{2}$。則

$s=am^2=4n^2$。 $\therefore\quad m=n,\ a=4,\ d=8$。

由是$4+12+20+\cdots\cdots$至 項$=4n^2$。

次 $s+1=\frac{d}{2}m^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)m+1$爲平方數。則

$\left(a-\frac{d}{2}\right)^2-4\times\frac{d}{2}\times1=d$。 $\therefore\quad a=\frac{d}{2}\pm\sqrt{2d},\ d=2$。則

$a=1\pm2=3$, 或 -1。

由是$s+1=\left(m\sqrt{\frac{d}{2}}+1\right)^2=(m+1)^2=(2n+1)^2$。 $\therefore\quad m=2n$。

由是 $(3+5+7+9+\cdots\cdots$至$2n$項$)+1=(2n+1)^2$。

或 $(-1+1+3+5+\cdots\cdots$至$2n+2$項$)+1=(2n+1)^2$。

31. 任意正整數p之某方乘。爲$1, 3, 5, 7, \cdots\cdots$級數之p項之和。又此和爲p^r。試求其初項。 答 $p^{r-1}-p+1$。

〔證及解〕 初項$=2k+1$。則

$s=\frac{p}{2}\{2(2k+1)+(p-1)2\}=2pk+p^2=p^r$。

$2k=p^{r-1}-p$。 $\therefore\quad 2k+1=p^{r-1}-p+1$。

由是此級數爲

$s=(p^{r-1}-p+1)+(p^{r-1}-p+3)+(p^{r-1}-p+5)+\cdots\cdots+(p^{r-1}-p+2p-1)$

$=p(p^{r-1})-p(p)+(1+2+3+\cdots\cdots+2p-1)=p^r-p^2+p^2=p^r$。

32. A. P.及G. P.其第一項及第二項相同。而各項皆爲正數。試證A. P.之他項小於G. P.之相應項。

〔證〕 初項及第二項爲a及b。A. P.之第m項爲A。G. P.之第m項爲G。則$A=a+(m-1)(b-a)=m(b-a)+2a-b$。

$$G=a\left(\frac{b}{a}\right)^{m-1}=\frac{b^{m-1}}{a^{m-2}}。$$

$$G-A=\frac{b^{m-1}}{a^{m-2}}-\{m(b-a)+2a-b\}$$

$$=\frac{1}{a^{m-2}}\{b^{m-1}-a^{m-1}-ma^{m-2}(b-a)+a^{m-2}(b-a)\}$$

$$=\frac{b-a}{a^{m-2}}\{b^{m-2}+b^{m-3}a+\ldots\ldots+a^{m-2}-(m-1)a^{m-2}\}$$

$$=\frac{b-a}{a^{m-2}}\{(b^{m-2}-a^{m-2})+a(b^{m-3}-a^{m-3})+\ldots\ldots+a^{m-2}(1-1)\}。$$

此最後之結果。在 { } 內之各項。與 $b-a$ 爲同符號。故此式爲正數。由是 $G>A$。

第拾捌編

記數法

235. 通常記數法 算術中所用數字。有十個記號。如 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 以表任意之數。且置於左之數字。常十倍於右一位。而單, 十, 百, 千等位。為無數者。則用零 (卽 0) 以補之。

此記法。謂之通常記數法。以 10 為其底數 (Radix or Base)。

236. 記數法 欲用任意之底數以代 10。則必取小於底數之數字以書各數。

例如 r 進法。卽用 r 為底數以表 N 數。則

$$N=\ldots\ldots\ldots d_3d_2d_1d_0.$$

但 $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots\ldots$ 為小於 r 之數。而 d_0 為單位。d_1 為 $d_1\times r$。d_2 為 $d_2\times r^2$。……… 故

$$N=d_0+d_1r+d_2r^2+d_3r^3+\ldots\ldots\ldots$$

〔註〕 本編各文字皆為正整數。

237. 定理 任意之正整數。可用任意之記數法表之。而每一記數法。所表之一數。祇有一種。

如 N 為某正整數。以 r 之底數表之。則以 r 除 N。得商為 Q_1。餘數為 d_0。則 $\quad N=d_0+r\times Q_1$。

又以 r 除 Q_1。得商為 Q_2。餘數為 d_1。則

$$Q_1=d_1+r\times Q_2.$$

$$\therefore\quad N=d_0+r(d_1+rQ_2)=d_0+d_1r+r^2Q_2.$$

依此法逐次施之。至最後之商數 Q_n 小於 r。卽與最後之餘數全等為 $Q_n\equiv d_n$。

由是 $N=d_0+d_1r+d_2r^2+d_3r^3+\ldots\ldots\ldots+d_nr^n$。

但 $d_0, d_1, a_2, \ldots\ldots$ 俱為 r 所除後之餘數。故俱小於 r。又自 d_n 不能為 0 外。其他皆得為 0。

故記 N 以 r 進法。則其數爲

$$d_n\ldots\ldots\ldots d_3d_2d_1d_0。$$

如上法以 r 除 N。其各次所得之商及餘數。爲一定之數。故如定理所云。每一記數所表之一數。祇有一種。

例 題

1. 2157 記以 6 進法。 答 13553。

〔解〕 順次以 6 除之。如下

$$\begin{array}{rl}
6\,\underline{)\,2157} & \\
6\,\underline{)\,359} & 餘數\ 3=d_0 \\
6\,\underline{)\,59} & 餘數\ 5=d_1 \\
6\,\underline{)\,9} & 餘數\ 5=d_2 \\
1 & 餘數\ 3=d_3
\end{array}$$

$\therefore\quad 2157=1\times6^4+3\times6^3+5\times6^2+5\times6+3.$

卽 2157 以 6 進法記之。爲 13553。

2. 6 進法所記之數爲 13553。今記以 8 進法得若干。 答 4155。

〔解〕 13553 爲以 6 爲底數。今若以 8 除之。當先化 13 爲 $1\times6+3$。卽 9 乃以 8 除得商 1。餘數 1。

次以此餘數 1。與其次位 5 相連爲 15。亦化爲 $1\times6+5$。卽 11 以 8 除得商 1。餘數 3。以下準此。

$$\begin{array}{rl}
8\,\underline{)\,13553} & \\
8\,\underline{)\,1125} & 餘數\ 5 \\
8\,\underline{)\,53} & 餘數\ 5 \\
4 & 餘數\ 1
\end{array}$$

由是所求之數爲 4155。

3. 8 進法之數爲 4155。今記以 10 進法得若干。 答 2157。

與前法同。

$$\begin{array}{rl}
10\,\underline{)\,4155} & \\
10\,\underline{)\,327} & 餘數\ 7 \\
10\,\underline{)\,25} & 餘數\ 5 \\
2 & 餘數\ 1
\end{array}$$

故所求之數爲 2157。

或 $4155=4\times8^3+1\times8^2+5\times8+5=\{(4\times8+1)8+5\}8+5$。故以 8 乘 4 加 1。以 8 乘之加 5。又以 8 乘之加 5。卽得所求之結果。

4. 3166 記以 12 進法。 答 $19et$。

12 爲底數。則小於 12 之數有十及十一。故以 t 代十。以 e 代十一。

〔解〕

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3166 \\ \hline 12 & 263 \text{ 餘數 } 10 \text{ 卽 } t \\ \hline 12 & 21 \text{ 餘數 } 11 \text{ 卽 } e \\ \hline & 1 \text{ 餘數 } 9 \end{array}$$

故所求之數爲 $19et$。

5. $\frac{17}{21}$ 記以 4 進法。 答 $\frac{101}{111}$。

〔解〕

$$\begin{array}{r|l} 4 & 17 \\ \hline 4 & 4 \text{ 餘數 } 1 \\ \hline & 1 \text{ 餘數 } 0 \quad \therefore \ 101。 \end{array}$$

又

$$\begin{array}{r|l} 4 & 21 \\ \hline 4 & 5 \text{ 餘數 } 1 \\ \hline & 1 \text{ 餘數 } 1 \quad \therefore \ 111。 \end{array}$$

由是所求之分數爲 $\frac{101}{111}$。

6. 4950 記之爲 20301。問用何數爲底數。 答 7。

〔解〕 所求之底數爲 r。則 $2r^4+or^3+3r^2+or+1=4950$。

卽 $2r^4+3r^2-4949=0$。 卽 $(r^2-49)(2r^2+101)=0$。

$\therefore \ r=\pm7,\ r=\pm\sqrt{50\frac{1}{2}}$。

由是 $r=7$。

238. 分底數

通常記數法之分數。亦可以任意記數法之分底數表之。如 $\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}+\frac{c}{r^3}+\ldots\ldots$ 可作 $abc\ldots\ldots$。而以 $\frac{1}{r}$ 爲其底。

凡已知之分數。表以 r 進法之分底數。其法亦祇有一種。

設 F 爲已知之分數。則

$$F=abc\ldots\ldots\ldots\equiv\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}+\frac{c}{r^3}+\ldots\ldots\ldots$$

但 $a, b, c\ldots\ldots\ldots$ 爲正整數。或爲 0。皆小於 r。以 r 乘上之恆同式。

則得 $$F\times r=a+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\ldots\ldots\ldots$$

由是 a 爲 Fr 之整數部分。而 $\dfrac{b}{r}+\dfrac{c}{r}+\cdots\cdots$ 不能不爲分數部分。若 Fr 小於 1。則 a 爲 0。何則。以凡小於 1 之數中。不能有整數部分也。

設 Fr 之分數部。爲 F_1。則 $F_1=\dfrac{b}{r}+\dfrac{c}{r^2}+\cdots\cdots$。

又以 r 乘之。則 $$F_1\times r=b+\frac{c}{r}+\cdots\cdots。$$

由是 b 又爲 F_1r 之整數部分。

依此順次以 r 底數乘其分數部分。卽可求得 $a, b, c, \cdots\cdots$。

例題

1. $\dfrac{1}{27}$ 以 6 之分底數記之。　　　答 .012。

〔解〕 $\dfrac{1}{27}\times 6=0+\dfrac{6}{27},\ \dfrac{6}{27}\times 6=1+\dfrac{9}{27},\ \dfrac{9}{27}\times 6=2。$

由是所求之結果爲 .012。

2. $\dfrac{1}{7}$ 以 3 之分底數記之。　　　答 $.\dot{0}1021\dot{2}$。

〔解〕 $\dfrac{1}{7}\times 3=0+\dfrac{3}{7},\ \dfrac{3}{7}\times 3=1+\dfrac{2}{7},\ \dfrac{2}{7}\times 3=0+\dfrac{6}{7},$

$\dfrac{6}{7}\times 3=2+\dfrac{4}{7},\ \dfrac{4}{7}\times 3=1+\dfrac{5}{7},\ \dfrac{5}{7}\times 3=2+\dfrac{1}{7}。$

由是所求之結果爲 $.\dot{0}1021\dot{2}$。因最後之餘數。仍爲 $\dfrac{1}{7}$。故爲循環數。

3 以 8 進法所記之 324.26。求以 6 進法記之。

〔解〕 此數爲 $3\times 8^2+2\times 8+4+\dfrac{2}{8}+\dfrac{6}{8^2}$。若記以 6 進法。可將整數與分數分求之。較爲便利。

6) 324
　6) 43 餘數 2
　　　5 餘數 5　　　∴ 324 爲 552。

又 $.26\times6=2.04$, $.04\times6=0.30$, $.30\times6=2.20$, $.20\times6=1.40$,

$.40\times6=3.00$。 $\therefore$ $.26$ 爲 $.20213$。

由是所求之數爲 552.20213。

4. 以 8 進法所表之 $.16\dot{3}1\dot{5}$ 變爲常分數。 答 $\dfrac{16277}{77700}$。

〔解〕 $N=.16\dot{3}1\dot{5}$。

$\therefore$ $8^2N=16.\dot{3}1\dot{5}$。 又 $8^5N=16315.\dot{3}1\dot{5}$。

$\therefore$ $8^5N-8^2N=16315-16$。

$$\therefore\quad N=\frac{16315-16}{8^5-8^2}=\frac{16315-16}{77700}=\frac{16277}{77700}。$$

〔註〕 10^5 爲 10 進法。則有六位數。首位 1 而附以五個 0。爲 100000。今與之相同之 8^5。爲 8 進法。亦有六位數。首位 1 而附五 0。爲 100000。故 $8^5-8^2=100000-100=77700$。

5. 以 7 進法所表之 $.2\dot{3}\dot{1}$ 變爲常分數。 答 $\dfrac{113}{330}$。

〔解〕 $N=.2\dot{3}\dot{1}$。 $\therefore$ $7N=.2\dot{3}\dot{1}$。

又 $7^3N=231.\dot{3}\dot{1}$。 $\therefore$ $N=\dfrac{231-2}{7^3-7}=\dfrac{226}{660}=\dfrac{113}{330}$。

6. 5 進法之數 $314.2\dot{3}$ 變爲 7 進法。 答 $150.\dot{3}56\dot{4}$。

〔解〕

$$\begin{array}{r|l}
7 & 314 \\ \hline
7 & 22 \text{ 餘數 } 0 \\ \hline
 & 1 \text{ 餘數 } 5
\end{array}$$

$.2\dot{3}\times7=3.4\dot{1}$。

$.4\dot{1}\times7=5.4\dot{3}$。

$.4\dot{3}\times7=6.3\dot{1}$。

$.3\dot{1}\times7=4.2\dot{3}$。

以 7 連乘 $2\dot{3}$。亦得循環數 $.\dot{3}56\dot{4}$。

由是所求之數爲 $150.\dot{3}56\dot{4}$。

239. 定理 r 進法所表任意之數。與其數字之和之差。恆能以 $r-1$ 除盡。

設 N 爲任意之數。S 爲其數字 $d_0, d_1, d_2, \ldots\ldots\ldots$ 之和。則

$$N=d_0+d_1r+d_2r^2+\ldots\ldots\ldots+d_nr^n。$$

$$S=d_0+d_1+d_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+d_n。$$

$\therefore \quad N-S=d_1(r-1)+d_2(r^2-1)+\dots\dots\dots+d_n(r^n-1)$。

上式之右邊。依86章各項能以$r-1$除盡。故$N-S$能用$r-1$除盡。

因$N-S$。能以$r-1$除盡。故N及S以$r-1$除之。其所得之餘數相同。

例題

1. 同數字所記之兩數之差。恆能以$r-1$除盡。其r爲底數。

〔證〕 設兩數爲N_1及N_2。因兩數字相同。故兩數字之和。均以S代之。則依前之定理N_1-S及N_2-S。能以$r-1$除盡。故知$(N_1-S)-(N_2-S)=N_1-N_2$能以$r-1$除盡。

2. 通常記數法。於其數之數字之和。能以9或3除盡之者。則其數亦能以9或3除盡。

〔證〕 原數爲N。數字之和爲S。則

$N-S$能以$10-1$。卽9整除。故S能以9整除。則N亦能以9整除。S能以3整除。則N亦能以3整除。

3. 某數之奇位數字之和。與偶位數字之和之差。能以$r+1$整除者。則其數亦能以$r+1$整除。

〔證〕 $N=d_0+d_1r+d_2r^2+d_3r^3+\dots\dots\dots$

及 $D=(d_0+d_2+\dots\dots\dots)-(d_1+d_3+\dots\dots\dots)$

則 $N-D=d_1(r+1)+d_2(r^2-1)+d_3(r^3+1)+\dots\dots\dots$。

上式之右邊。依87章各項能以$r+1$除盡。故$N-D$。亦能以$r+1$整除。故知D若能以$r+1$整除。則N亦能以$r+1$整除。

4. N_1及N_2爲任意之兩整數。以9除N_1, N_2及$N_1\times N_2$各數。其餘數順次爲n_1, n_2及p。則n_1, n_2之積等於p。或其差爲9之倍數。

〔證〕 但$N_1=n_1+9$之倍數。$N_2=n_2+9$之倍數。故

$N_1\times N_2=(n_1+9$之倍數$)\times(n_2+9$之倍數$)$

$=n_1n_2+n_1\times 9$之倍數$+n_2\times 9$之倍數$+9$之倍數$\times 9$之倍數

$=n_1n_2+9$之倍數。

但$N_1\times N_2=p+9$之倍數。

故n_1n_2等於p。如其不等。必其差爲9之倍數。

此題可用以驗乘法之有誤與否。若 n_1n_2 非等於 p。或其差不爲 9 之倍數。則其乘積必有誤。

此題在算術中謂之九去法。

5. 7 進法所記之三位數。若變爲 9 進法。則數字相同而位置相反。問此數爲何數。 答 503。

〔解〕 設三位之數字爲 a, b, c。則 $7^2a+7b+c=9^2c+9b+a$。

但 $a, b, c,$ 俱爲小於 7 之正整數。而由上之關係。則得 $b=8(3a-5c)$。

卽 b 爲 8 之倍數。然 b 小於 7。故 b 不能不等於 0。

由是 $3a=5c$。 $\therefore\ a=5$ 及 $c=3$。

故 7 進法之原數爲 503。

6. 有三位數。若 2 倍之。則其數位倒轉。其首末兩數字所成之二位數。以 2 倍之。其數位亦倒轉。求證此數之記數法。以連續三數內之一數爲底數。皆能合理。

〔證〕 r 爲底數。三位數爲 abc。則 $abc\times 2=cba$。

cba 大於 abc。故 c 大於 a。

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ \times 2 \\ \hline c\ b\ a \end{array}$$

故 2 乘 c 必末位爲 a 而進 1 於其左位。次 2 乘 b 其末位與前之 1 相加爲 b。亦進 1 於其左位。又次 2 乘 a 與前之 1 相加爲 c 卽得 cba 之積如下。

$$2c=a+r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2b+1=b+r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$2a+1=c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

從 (1) 式及 (3) 式。得 $ac\times 2=ca$。

又從 $2c=r+a,\ 2a+1=c,$ 消去 c。則得 $3a=r-2$。

a 爲整數。故 $r-2$ 爲 3 之倍數。 $\therefore\ r-2=0, 3, 6, 9, \ldots\ldots\ldots$。

$\therefore$ 從 $r=2, 5, 8, 11, \ldots\ldots\ldots$ 而得

$a=0, b=1, c=1,$ 或 $a=1, b=4, c=3,$ 或 $a=2, b=7, c=5,$ 或 $a=3, b=t, c=7, \ldots\ldots\ldots$。卽於 $2, 5, 8, 11, \ldots\ldots\ldots$ 進法順次得 011, 143, 275, 3t7, ……… 而以 1, 2, 3 或 2, 3, 4 或 3, 4, 5 或 4, 5, 6 或 5, 6, 7 或 6, 7, 8 等三數內之一數爲底數。

例題二十二

1. 有以7及9爲底數之二位數。其數字相同。試求其數如何。

答 31。

〔解〕 $7a+b=9b+a$。 $\therefore$ $3a=4b$。 $\therefore$ $a=4,\ b=3$。

由是所求之數 $=7a+b=7\times4+3=31$。

2. 於任意之已知記數法。試依定位數。求其最大最小值。

〔解〕 數字任何大。必比底數 r 小1。又任何小。亦必首位爲1。而以下爲0。 $\therefore$ 最大數 $=(r-1)(r-1)(r-1)\dots\dots\dots(r-1)$。

最小數 $=100\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots0$。

3. 有6位之數。用三數字輪次相列而成。則此數可以1001整除。試證之。

〔證〕 $abcabc=ar^5+br^4+cr^3+ar^2+br+c=(ar^2+br+c)(r^3+1)$。

但 $r^3+1=1r^3+0r^2+0r+1=1001$。

4. 依1斤,2斤,4斤,8斤,………之次序。取1027斤。試求各數。

答 1斤,2斤,1024斤。

〔解〕

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
2\,) & \underline{1027} \\
2\,) & \underline{513}\dots\dots1 \\
2\,) & \underline{256}\dots\dots1 \\
2\,) & \underline{128}\dots\dots0 \\
2\,) & \underline{64}\dots\dots0 \\
2\,) & \underline{32}\dots\dots0 \\
2\,) & \underline{16}\dots\dots0 \\
2\,) & \underline{8}\dots\dots0 \\
2\,) & \underline{4}\dots\dots0 \\
2\,) & \underline{2}\dots\dots0 \\
 & 1\dots\dots0
\end{array}
$$

由是 $1027=10000000011$

$=2^9+2^1+1$

$=1024+2+1$。

5. 任意記數法所表之數144。恆爲平方數。試證之。

〔證〕 $144=r^2+4r+4=(r+2)^2$。故如題云云。

6. 任意記數法所表之121,12321,1234321等。恆爲平方數。試證之。

〔證〕 $121=r^2+2r+1=(r+1)^2$,

$12321=r^4+2r^3+3r^2+2r+1=(r^2+r+1)^2$,

$1234321=r^6+2r^5+3r^4+4r^3+3r^2+2r+1=(r^3+r^2+r+1)^2$。

7. 有二位之數加18。則其數位倒置。又此數以七進法記之。亦爲轉位數。試求其數幾何。 答 46。

〔解〕 從 $10a+b+18=10b+a$ 及 $10a+b=7b+a$。如是可得 a, b。

8. 有一數。以5之底數表之。則爲 $4.4\dot{4}\dot{0}$。問以何數爲底數。則爲 $4.5\dot{4}$。 答 6。

〔解〕 一數爲 $N+4$。即 $N=.4\dot{4}\dot{0}$。 $\therefore\ 5N=4.\dot{4}\dot{0}$。 $\therefore\ 5^3N=440.\dot{4}\dot{0}$。

$\therefore\quad N=\dfrac{440-4}{5^3-5}=\dfrac{4\times5^2+4\times5-4}{120}=\dfrac{29}{30}$。次 $.5\dot{4}=\dfrac{5}{r}+\dfrac{4}{r(r-1)}=\dfrac{29}{30}$。

$\therefore\quad (r-6)(29r-5)=0$。 $\therefore\quad r=6$。

9. 於通常記數法。一數 N 之數字之和爲 S。他數 $2N$ 之數字之和爲 $2Q$。則 $S-Q$ 爲9之倍數。試證之。

〔證〕 $N=9$ 之倍數 $+S$, $2N=9$ 之倍數 $+2Q$。

$\therefore\quad 2(S\sim Q)=(2N-9$ 之倍數$)-2(N-9$ 之倍數$)=9$ 之倍數。

10. 以奇數爲底數之數。若爲偶數。則數字之和。亦爲偶數。若爲奇數。則數字之和。亦爲奇數。試證之。

〔證〕 由239章 $N=(r-1)$ 之倍數 $+S$。但 $r-1$ 爲偶數。故 n 爲偶數或奇數。從而 S 亦爲偶數或奇數。

11. 於任意記數法。凡三位數之平方。與轉位數之平方之差。恆能以 r^2-1 整除。試證之。

〔證〕 $(ar^2+br+c)^2-(cr^2+br+a)^2$。能以 $(ar^2+br+c)-(cr^2+br+a)$ 整除。而 $(ar^2+br+c)-(cr^2+br+a)=(a-c)(r^2-1)$。故如題云云。

12. 以 r 爲底數之任意數之平方。與其轉位數之平方之差。恆爲 r^2-1 之倍數。

〔證〕 原數爲奇位數。則

$$\begin{aligned}&(P_0r^{2n}+P_1r^{2n-1}+\ldots\ldots+P_nr^n+\ldots\ldots+P_{2n})^2\\&\qquad-(P_{2n}r^{2n}+P_{2n-1}r^{2n-1}+\ldots\ldots+P_nr^n+\ldots\ldots+P_0)^2\\&=(P_0r^{2n}+P_1r^{2n}+\ldots\ldots+P_0)\{P_0(r^{2n}-1)\\&\qquad+P_1r(r^{2n-2}-1)+\ldots\ldots-P_{2n}(r^{2n}-1)\}。\end{aligned}$$

故能以r^2-1整除。

又原數爲偶位數。則

$$(P_0r^{2n+1}+P_1r^{2n}+\ldots\ldots+P_{2n+1})^2-(P_{2n+1}r^{2n+1}+P_{2n}r^{2n}+\ldots\ldots+P_0)^2$$
$$=\{P_0(r^{2n+1}+1)+P_1r(r^{2n-1}+1)+\ldots\ldots+P_{2n+1}(r^{2n+1}+1)\}$$
$$\{P_0(r^{2n+1}-1)+P_1r(r^{2n-1}-1)+\ldots\ldots-P_{2n+2}(r^{2n+1}-1)\}。$$

上式兩因子之各項。爲$r+1$及$r-1$之倍數。故能以r^2-1整除。

13.　7進法之三位數變爲11進法。則爲轉位數。求其數幾何。

答　502，或361。

〔解〕　$7^2a+7b+c=11^2c+11b+a$。　$\therefore\ b=6(2a-5c)$。

由是　$2a-5c=0$，或1。

若$2a-5c=0$。則$b=0,\ a=5,\ c=2$。又$2a-5c=1$。則$b=6,\ a=3,\ c=1$。

14.　以5及9爲底數之數。其中諸數字相同。則無論各數字之次序如何。以4除之。恆得同一之餘數。試證之。

〔證〕5爲底數之數爲N。9爲底數之數爲N'。其數字之和皆爲S。則$N-S=(5-1)$之倍數。卽4之倍數。$N'-S=(9-1)$之倍數。卽8之倍數。故4除N及N'之餘數。皆等於4除S之餘數。卽如題云云。

15.　3進法所表之6位數。若以12進法記之。則得其最後之三數字。試求此數。　答　288，289，或290。

〔解〕　$3^5a+3^4b+3^3c+3^2d+3e+f=12^2d+12e+f$。

$\therefore\ e=3(9a+3b+c-5d),\ e<3$。　$\therefore\ e=0,\ 9a+3b+c-5d=0$。

又$9a+3b+c=5d$。a及d爲六位數及三位數之首位數字。故不能爲0。設d爲1。或爲2。然$9a<5d$。故d不能等於1。因而$d=2$。

由是所求之數爲　$12^2d+12e+f=288+12\times0+f$。

故$f=0,1,2$。則所求之數爲288，289，290。

16.　8進法之四位數。若2倍之。則數位倒轉。求其原數。

答　2775，或2525。

〔解〕　$abcd\times2=dcba$。此題以$d\times2$之末位爲a。故$d>a$。

$\therefore\ 2d=a+8$。又$a\times2=d$。或$a\times2=d-1$。

$2a=d$。則從$2d=a+8$。得$3a=8$爲分數不合理。故$2a=d-1$。

從$2d=a+8$。得$a=2,\ d=5$。

由是 $(8^3a+8^2b+8c+d)\times 2=8^3d+8^2c+8b+a$。

$\therefore\ 341a+40b=170d+16c$。　$\therefore\ 341\times 2+40b=170\times 5+16c$。

即 $2c=5b-21$。　$\therefore\ b$ 爲大於 3 之奇數。　$\therefore\ b=5$ 或 7。

由是 $c=2$ 或 7。　$\therefore$ 所求之數爲 2775 或 2525。

17. 有三位之數。其數字成 A. P.。以其數字之和除之。則得商 15。又加 396。則爲其轉位數。求其原數。　答 135。

〔解〕 $\dfrac{100a+10(a+d)+(a+2d)}{a+(a+d)+(a+2d)}=15$。　$\therefore\ d=2a$。

又 $100a+10(a+d)+(a+2d)+396=100(a+2d)+10(a+d)+a$。

$\therefore\ d=2$。由是 $a=1$。　$\therefore$ 原數爲 135。

18. $13ab45c$ 能以 792 整除。求數字 a, b, c。　答 $a=8,\ b=0,\ c=6$。

〔解〕 $792=8\times 9\times 11$。故原數爲 8 之倍數。故 $45c$ 爲 8 之倍數。

$\therefore\ c=6$。又原數爲 9 之倍數。故 $1+3+a+b+4+5+6$。

即 $a+b+19$ 爲 9 之倍數。即 $a+b+1$ 爲 9 之倍數。

$\therefore\ a+b=8$ 或 $a+b=17$ ....(1)

又原數爲 11 之倍數。故 $1+a+4+6\sim(3+b+5)$。

即 $a+3\sim b$。爲 11 之倍數。　$\therefore\ a-b=8$ 或 $b-a=3$ ....(2)

於 (1) (2) 從 $a+b=8,\ a-b=8$。則 $a=8,\ b=0$。

又從 $a+b=8,\ b-a=3$。則 $b=5\dfrac{1}{2}$。爲不合理。

又從 $a+b=17,\ a-b=8$。則 $a=12\dfrac{1}{2}$。亦不合理。

又從 $a+b=17,\ b-a=3$。則 $b=10$。亦不合理。

由是 $a=8,\ b=0,\ c=6$ 得答。

19. 某底數所記之數爲 1155。能以同底數所表之 12 整除之。求其底數。　答 7。

〔解〕 $r^3+r^2+r5+5=(r+2)(r^2-r+7)-9$。故 9 不能不爲 $r+2$ 之倍數。　$\therefore\ r+2=9$。　$\therefore\ r=7$。

20. 有通常記數法所表之四位數。以 9 乘之。則爲轉位數。求其原數如何。　答 1089

〔解〕 $(1000a+100b+10c+d)\times 9=1000d+100c+10b+a$。

故 $a=1,\ d=9$。則上之方程式爲 $c=89b+8$。故 $b+0,\ c=8$。

21. r進法之數$(r^2-1)(r^n-1)$。以$r-1$除之。其商爲轉位數。試證之。

〔證〕 $(r^2-1)(r^n-1)=r^{n+2}-r^n-r^2+1$

$$=r^{n+1}(r-1)+r^n(r-2)+r^{n-1}(r-1)+\dots\dots+r^2(r-1)+1$$

$$=(r-1)(r-2)(r-1)\dots\dots(r-1)01。$$

又 $(r^2-1)(r^n-1)\div(r-1)=r^{n+1}+r^n-r-1$

$$=r^{n+1}+r^{n-1}(r-1)+r^{n-2}(r-1)+\dots\dots+r(r-2)+(r-1)$$

$$=10(r-1)(r-1)\dots\dots(r-2)(r-1)。$$

即原數之轉位數。

22. 依任意之記數法。得 $\dfrac{1}{(r-1)^2}=.\dot{0}123\dots\dots(r-3)(r-1)$ 式。除$(r-2)$之數字外。爲自0至$r-1$連續循環數。試證之。

例如 $\dfrac{1}{(10-1)^2}=\dfrac{1}{81}=.012345679$。

〔證〕 $\dfrac{1}{(r-1)^2}=1\div(r^2-2r+1)$

$$=\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r^3}+\dots\dots+\frac{r-2}{r^{r-1}}+\frac{r-1}{r^r}+\frac{r}{r^{r+1}}+\frac{r+1}{r^{r+2}}+\dots\dots$$

$$=\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r^3}+\frac{3}{r^4}+\dots\dots+\frac{r-3}{r^{r-2}}+\frac{r-2}{r^{r-1}}+\frac{r-1}{r^r}+\frac{r}{r^{r+1}}+\frac{r+1}{r^{r+2}}\dots\dots。$$

然 $\dfrac{r-3}{r^{r-2}}+\dfrac{r-2}{r^{r-1}}+\dfrac{r-1}{r^r}+\dfrac{r}{r^{r+1}}+\dfrac{r+1}{r^{r+2}}+\dfrac{r+2}{r^{r+3}}\dots\dots$

$$=\frac{r-3}{r^{r-2}}+\frac{r-2}{r^{r-1}}+\frac{1}{r^{r-1}}-\frac{1}{r^r}+\frac{1}{r^r}+\frac{1}{r^{r+1}}+\frac{1}{r^{r+2}}+\frac{1}{r^{r+2}}+\frac{2}{r^{r+3}}+\dots\dots$$

$$=\frac{r-3}{r^{r-2}}+\frac{r-1}{r^{r-1}}+\frac{1}{r^{r+1}}+\frac{2}{r^{r+2}}+\frac{3}{r^{r+3}}+\dots\dots。$$

即循環末位爲 $\dfrac{r-1}{r^{r-1}}$。以下續得相同之數字。

由是 $\dfrac{1}{(r-1)^2}=.0123\dots\dots(r-3)(r-1)$。

23. 有六位之數。以3倍之。則左端之數字移於右端。試證其右端之數字。必爲1或2。又求其兩原數若何。 答 142857 與 285714。

〔證及解〕 右端之數字爲a。其次之諸位數爲x。則$N=10^5a+x$及$3N=10x+a$。由此消去x。

則 $N=142857a$ 而 $3N=142857a\times 3$。不能不爲六位數。

$\therefore$ $a=1$，或 $a=2$。設 $a=1$。則 $N=142857$，$a=2$。則 $N=285714$。

24. 有三位之數。其最後兩數字相等。今以某數乘之。則其積亦爲三位數。其最初兩數字。等於原數之最後二位數字。而末位卽其乘數。試求原數。 答 166，199。

〔解〕 $(100a+10b+b)\times c=100b+10b+c$。卽 $11b(10-c)=c(100a-1)$。

從此方程式 $c(100a-1)$ 爲 11 之倍數。而 c 小於 10。

故 $100a-1=11$ 之倍數 $=99$。 $\therefore$ $a=1$。

由是得方程式如下。

$11b(10-c)=99a$。 卽 $10b-bc-9c+90=90$。

卽 $(10-c)(b+9)=18\times 5$ 或 15×6。 $\therefore$ $10-c=5$ 或 6。

$\therefore$ $c=5$ 或 4。又 $b+9=18$ 或 15。 $\therefore$ $b=9$ 或 6。

第拾玖編

排列及組合

240. 定義 從 n 個相異之物內。每次取 r 個。依其次序列成種種之式。謂之由 n 物取 r 個之排列法 (Permutations)。

依上之定義。每兩列中。若非同物或物同而所列之次序不同。則兩排列相異。

例如有 a, b, c, d 四物。每次取其二個。則其排列如下。

$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$。

又每次取其三個。則其排列如下。

$abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb$。

若於 n 物每次取 r 個。則其排列之種數。以 ${}_nP_r$ 表之。故上之二例爲 ${}_4P_2=12$, ${}_4P_3=24$。

241. 問題 於相異之 n 物內。求其每次取 r 個之排列數。

相異之 n 物爲 $a, b, c, \ldots\ldots\ldots$。

從 n 物內每次取一個。則其排列之數。依前之記法得 ${}_nP_1$。

即 ${}_nP_1=n$ 爲已明瞭。

今於 n 字內。取 r 個之排列法。若計其特別一字不動之排列數。必與本字外所餘 $n-1$ 字內。取 $r-1$ 個之排列數相等。而在 n 字內。每字之排列數可依同樣計之。

故 $${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}。$$

設 n 爲 $n-1$, r 爲 $r-1$。則 ${}_{n-1}P_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}P_{r-2}$。

設 n 爲 $n-2$, r 爲 $r-2$。則 ${}_{n-2}P_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}P_{r-3}$。

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

次第得 $${}_{n-r+2}P_{r-r+2}=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}P_{r-r+1}。$$

$${}_{n-r+1}P_1=(n-r+1)。$$

以上各式。將其兩邊連乘。而去其公有之因子。則得

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)。$$

若 n 物每次悉取之。則 $r=n$。故

$$\begin{aligned}{}_nP_n&=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-n+1)\\&=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots3\cdot2\cdot1。\end{aligned}$$

定義 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ 之積。可以記號 $\underline{|n}$ 記之。讀爲 n 之逐乘數 (Factorial)。

例如 $\underline{|4}\equiv4\cdot3\cdot2\cdot1$。

又 $n, n-1, n-2, \cdots\cdots\cdots n-r+1$。其 r 個數量之連乘積。以 n_r 記之。

例如 $n_3\equiv n(n-1)(n-2)$。 $\therefore\ {}_nP_n=\underline{|n},\quad {}_nP_r=n_r$。

242. 問題 n 物中。含若干同類之物。求其每次悉取之排列數。

設 n 物內有 p 個 a, q 個 b, r 個 c, ………等。令每次悉取之排列數爲 P。今若於每列中。變其 p 個 a 字。爲 p 個相異之字。則依前例 p 個 a 字。每次取 P 個之排列。當有 $\underline{|p}$ 種。

故全排列數當爲 $P\times\underline{|p}$。

例如4物爲 a, a, a, b。每次悉取之排列僅爲 $aaab, aaba, abaa, baaa$。

然3個 a 變爲相異之字。如 a', a'', a'''。則 $aaab$ 一列。得 $\underline{|3}=3\cdot2\cdot1=6$。如下。

$a'a''a'''b, a'a'''a''b, a''a'a'''b, a''a'''a'b, a'''a'a''b, a'''a''a'b$。而 $aaba$。亦得 $\underline{|3}=3\cdot2\cdot1=6$。如下。

$a'a''ba''', a'a'''ba'', a''a'ba''', a''a'''ba', a'''a'ba'', a'''a''ba'$。其他 $abaa, baaa$ 亦得 $\underline{|3}$。

若再於 $P\times\underline{|p}$ 個排列式中。令 q 個 b 字。變爲相異之字。則依前法而得全排列數。爲 $P\times\underline{|p}$ 之 $\underline{|q}$ 倍。即 $P\times\underline{|p}\times\underline{|q}$。

又有同理 r 個 c 字以下。皆變爲相異之字。則得

$$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\cdots\cdots\cdots。$$

上得之結果。則以 n 物皆變爲相異者。但依前章之理。相異 n 物悉取之排列數。爲 ${}_nP_n=\underline{|n}$。 $\therefore\ P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\cdots\cdots\cdots=\underline{|n}$。

$$\therefore\ P=\frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}\cdots\cdots\cdots}。$$

例　題

1.　求 $_6P_3$, $_5P_4$ 及 $_7P_7$。　　答　120, 120, 5040。

〔解〕　$_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$,　$_5P_4=5\times4\times3\times2=120$,

$_7P_7=\underline{|7}=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$。

2.　求證 $_{10}P_4={}_7P_7$。

〔證〕　$_{10}P_4=10\cdot9\cdot8\cdot7=2\cdot5\cdot3\cdot3\cdot2\cdot4\cdot7=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\underline{|7}={}_7P_7$。

3.　$_nP_5=12\times{}_nP_3$。求 n 之值。　　答　7。

〔解〕　$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=12n(n-1)(n-2)$。

$\therefore$　$(n-3)(n-4)=12$。　即　$n(n-7)=0$。　　$\therefore$　$n=7$。

4.　$_{2n}P_3=100\times{}_nP_2$。求 n 之值。　　答　13。

〔解〕　$2n(2n-1)(2n-2)=100n(n-1)$。兩邊以 $4n(n-1)$ 除之。

則　$2n-1=25$。　　$\therefore$　$n=13$。

5.　$_{2n}P_3=2\times{}_nP_4$。求 n 之值。　　答　8。

6.　求 Acacia, Hannah, Success 及 Mississippi 各文字之排列數。

答　60, 90, 420, 34650。

〔解〕　試舉一以例其餘。如第三之 Success。其 s 字有 3。c 字有 2。u 及 e 各 1。故 $n=7$。

$$\therefore\quad \frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|2}}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=420。$$

7.　8 人圍一圓桌而坐。其席次之變化若何。又有相異之球 8 個。以絲貫之作成輪形。則其變化若何。　　答　$\underline{|7}$, $\frac{1}{2}\underline{|7}$。

〔解〕　惟爲圓桌。故 $abcdefgh$ 與 $bcdefgha$。其變化相同。依此則省去順移法。故可除去一人不動。其餘 7 人。作 $_7P_7$ 之排列。故所求之變化爲 $\underline{|7}$。

又球之變化與人異。無上下表裏之別。故 abc 之現狀。與 cba 無異。其正反相對之各列全同。故如前法之二分之一爲 $\frac{1}{2}\underline{|7}$。

8.　有四女與四男。圍坐一圓桌。男與男。女與女。各不相隣。問其坐法有幾種。　　答　144。

〔解〕　4 女席次之變化爲 $\underline{|3}=6$。又此變化每種有 4 男之變化爲 $\underline{|4}=24$。由是總變化爲　$6\times24=144$。

9. 相異之n物。依每次悉取之排列。其內有特別之r個物。必依一定之次序。則其排列數為 $\frac{\lfloor n}{\lfloor r}$。試證之。

〔證〕 r物有一定之次序而不變。則r個之物。當視為同物。而所求之數為P。若r個物為每次取r之排列。則依242章$P\times\lfloor r=\lfloor n$。

$\therefore \quad P=\frac{\lfloor n}{\lfloor r}$。

10. 排列書籍n册。其內之特別2册不相隣接。則其變化為$(n-2)\lfloor n-1$。試證之。

〔證〕 特別2册為a, b。而a之外其餘$n-1$册悉取之排列數為$\lfloor n-1$。此各列內於b之前後可接a。如ab或ba。則有$2\lfloor n-1$種。故所求之數為 $\lfloor n-2\lfloor n-1=\lfloor n-1(n-2)$。

11. n物每次取r個。若所取可為同物。則其列數若何。 答 n^r。

〔解〕 例如 a, b, c 每次取二個。則得

$$aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc。$$

先於n物每次取1。則其數為n。於此每1個各以n分配之。則為$n\times n$。若又於每1個。各以n分配之。則為$n\times n\times n$。

由是所求之列數為 $n\times n\times n$.........r因子$=n^r$。

組合法

243. 定義 從相異之n物內。每次選出r個。不計其排列之次序若何。但求取出之物不全相同。則謂之由n物取r個之組合法 (Combinations)。

例如排列法中之abc與acb。以其次序之不同。而作為二列。但此二列其物全同。故在組合法中。若取abc。則不復取acb也。

故由 a, b, c, d 四字內。每次取其二個。則其組合為

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd。$$

由相異之n物內每次取r個。則其組合為

$${}_nC_r \text{ 如 } {}_4C_2=6 \text{ 是也。}$$

244. 問題 求於相異之 n 物。每次取 r 個之組合數。

相異之 n 物以 a, b, c......... 至 n 字顯之。而在 n 字取 r 個之組合中。若計其特別一字之組數。等於其餘之 $n-1$ 字內取 $r-1$ 個之組數。各文字可同樣計之。卽組合內每字有 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 個。

故由 n 字內每次取 r 個。其組合之總字數爲 $n\times{}_{n-1}C_{r-1}$。

又各組中之字數爲 r。故文字之總數又爲 $r\times{}_nC_r$。

由是 $$r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}。$$

設 n 爲 $n-1$, r 爲 $r-1$。則

$$(r-1)\times{}_{n-1}C_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}C_{r-2}。$$

設 n 爲 $n-2$, r 爲 $r-2$。則 $(r-2)\times{}_{n-2}C_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}C_{r-3}。$

....

次第得 $$2\times{}_{n-r+2}C_2=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}C_1。$$

$${}_{n-r+1}C_1=n-r+1。$$

以此各式相乘。而約其公因子。則得

$$\lfloor r\ {}_nC_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)。$$

$$\therefore\quad {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}=\frac{n_r}{\lfloor r}\cdots\cdots\cdots(1)$$

以 $\lfloor n-r$ 乘分母子。則

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\lfloor n-r}{\lfloor r\lfloor n-r}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots\cdots2\cdot1}{\lfloor r\lfloor n-r}$$

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

〔別證〕 由 n 物內。每次取 r 個之組合爲 ${}_nC_r$。而此各組。若取其 r 字之排列。則得 $\lfloor r$ 而成 ${}_nP_r$。 $\therefore\ {}_nC_r\times\lfloor r={}_nP_r$。

由是 $${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{\lfloor r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}。$$

〔註〕 於公式 (2) 設 $r=n$。則

$${}_nC_n=\frac{\lfloor n}{\lfloor n\lfloor n-n}=\frac{1}{\lfloor 0}。$$

而 $_nC_n=1$。 $\therefore\quad 1=\dfrac{1}{\lfloor 0}$ 卽 $\lfloor 0=1$。

又 $\lfloor 0=1$ 可用他法求得。

卽 $\lfloor n=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3\cdot2\cdot1=n\lfloor n-1$。若 $n=1$。則 $\lfloor 1=1\cdot\lfloor 1-1$。

$\therefore\quad \lfloor 0=1$。

245. 定理 由相異之n物內。每次取r個之組合數。恆等於每次取$n-r$個之組合數。

此題可直由事實上審得之。卽從n物內選取r個。其餘爲$n-r$個。故選r個之組數。與選$n-r$個之組數同。

此證又依前章公式(2)可得。

由n物取r個之組合爲$_nC_r=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$。而由$n$物取$n-r$個之組合。則$r$可以$n-r$代之。故

$$_nC_{n-r}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\,\lfloor n-(n-r)}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\,\lfloor r}。$$

$$\therefore\quad _nC_r={}_nC_{n-r}。$$

第一證雖不用**244**章之公式(1)與(2)。而自能合理。

例 題

1. 求 $_{10}C_4$, $_{12}C_9$ 及 $_{20}C_{17}$。 答 210, 220, 1140。

〔解〕 $_{20}C_{17}={}_{20}C_{20-17}={}_{20}C_3=\dfrac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3}=1140$。

2. 設 $_nC_6={}_nC_{12}$。求 $_nC_{16}$。 答 153。

〔解〕 $_nC_6={}_nC_{n-6}$。 卽 $={}_nC_{12}$。 $\therefore\quad n-6=12$。 $\therefore\quad n=18$,

由是 $_{18}C_{16}={}_{18}C_2=\dfrac{18\cdot17}{1\cdot2}=153$。

3. 設 $_nC_5={}_nC_6$。求n之值。 答 11。

〔解〕 $_nC_5={}_nC_{n-5}={}_nC_6$。 $\therefore\quad n-5=6$。 $\therefore\quad n=11$。

4. $3\times{}_nC_4=5\times{}_{n-1}C_5$。求$n$之值。 答 10。

〔解〕 $3\times\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}=5\times\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{\lfloor 5}$,

即 $3n=(n-4)(n-5)$。即 $n^2-12n+20=0$。即 $(n-10)(n-2)=0$。

$\therefore\ n=10$ 或 2。

但 ${}_{n-1}C_5$ 爲從 $n-1$ 物內取五個。故 $n-1$ 不小於 5。

即 n 不小於 6。 $\therefore\ n=10$。

5. ${}_nC_4=210$。求 n 之值。 答 10。

〔解〕 $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}=210$。

即 $(n^2-3n)\{(n^2-3n)+2\}=70\times 72$。

$\therefore\ n^2-3n=70$。 $\therefore\ n=10$。

6. 設 ${}_nP_r=272$ 及 ${}_nC_r=136$。求 n 及 r 之值。 答 $n=17,\ r=2$。

〔解〕 ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{\underline{|r}}$。即 $136=\dfrac{272}{\underline{|r}}$。 $\therefore\ \underline{|r}=2=1.2=\underline{|2}$。 $\therefore\ r=2$。

由是 ${}_nC_2=136$。即 $\dfrac{n(n-1)}{1.2}=136$。 $\therefore\ n-17$。

7. 設 ${}_nC_{r-1}:{}_nC_r:{}_nC_{r+1}=2:3:4$。求 n 及 r。 答 $n=34,\ r=14$。

〔解〕 $\dfrac{{}_nC_{r-1}}{2}=\dfrac{{}_nC_r}{3}=\dfrac{{}_nC_{r+1}}{4}$。但 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\dfrac{n-r+1}{r}$。

又 ${}_nC_{r+1}={}_nC_r\times\dfrac{n-r}{r+1}$。

$\therefore$ 從 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{n-r+1}{r}$。及 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{n-r}{r+1}$。得 $n=34,\ r=14$。

8. 於子音6字及母音4字之內。取子音3字。母音2字。拼成文字。問得字數若干。 答 14400。

〔解〕 從子音6字選3字。則其種數爲 ${}_6C_3$。而所選子音之種數。每一種可配以從母音4字選2字之種數 ${}_4C_2$。故共選之數。爲 ${}_6C_3\times{}_4C_2=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\times\dfrac{4\cdot3}{1\cdot2}=120$。而此各組內。所含之5字。再依排列法變其次序。則得 $\underline{|5}=5\times4\times3\times2\times1=120$。

由是總字數爲 $120\times120=14400$。

9. 有五圓，壹圓，五角，壹角，五分，壹分，等貨幣各一個。問其中能得相異之價若干種。 答 63。

〔解〕 六種之貨幣。求每次取 6, 5, 4, 3, 2, 1 之組數。卽得所求之數爲 ${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=63$。

10. 有相異之 $2n$ 物。依每次取 n 個之組合法。其含特別一物之數。等於其不含特別一物之數。試證之。

〔證〕 $${}_{2n}C_n=\frac{|\underline{2n}}{|\underline{n}\,|\underline{2n-n}}=\frac{|\underline{2n}}{(|\underline{n})^2}。$$

又除去特別之一物。其餘 $2n-1$ 物。取 $n-1$ 之組合。爲

$${}_{2n-1}C_{n-1}=\frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n-1}\,|\underline{2n-1-(n-1)}}=\frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n-1}\,|\underline{n}}\times\frac{2n}{2n}=\frac{|\underline{2n}}{2(|\underline{n})^2}。$$

卽適得全數之半。故如題云云。

11. 相異之 $4n$ 物。依每次取 n 個之組合法。其含特別一物之數。等於不含此物數之三分之一。試證之。

〔證〕 ${}_{4n}C_n=\dfrac{|\underline{4n}}{|\underline{n}\,|\underline{3n}}$。而含特別一物之數爲 ${}_{4n-1}C_{n-1}$。

卽 $$\frac{|\underline{4n-1}}{|\underline{n-1}\,|\underline{4n-1-(n-1)}}=\frac{|\underline{4n-1}}{|\underline{n-1}\,|\underline{3n}}\times\frac{4n}{4n}=\frac{|\underline{4n}}{4|\underline{n}\,|\underline{3n}}=\frac{1}{4}\,{}_{4n}C_n。$$

又不含此一物之數。爲 ${}_{4n}C_n-{}_{4n-1}C_{n-1}=\dfrac{3}{4}\,{}_{4n}C_n$。

12. 有 3 男 4 女。令於兩側以男女各 1 人爲一組打網毬。試求其組數。 答 36。

〔解〕 各側 1 男。故兩側須有 2 男。因而從 3 男內取 2 男之排列數。爲 ${}_3P_2=6$。此各列又各於 4 女內取 2 女之組數。爲 ${}_4C_2=6$。

故 ${}_3P_2\times{}_4C_2=6\times6=36$。

13. 以 1, 2, 3, 4, 5 五個數字。作大於 23000 之數。其數共有幾種。 答 90。

〔解〕 此五數字所成之五位數。爲 ${}_5P_5=120$ 種。此中以 1 爲首位之數。爲 ${}_4P_4=24$。又 21 爲首位之數。爲 ${}_3P_3=6$ 種。皆小於 23000。故所求種數爲 $120-24-6=90$。

14. 某選舉會。於候補者四人之內選舉三人。而選舉者每一人投票所書之姓名。不得過三人。問投票之法有幾種。 答 14。

〔解〕 從 4 人之內選 1 人。其數爲 ${}_4C_1$。選 2 人。其數爲 ${}_4C_2$。選 3 人。其數爲 ${}_4C_3$。

由是總數$=4+6+4=14$。

246. 組合之最大值 已知n之值。求${}_nC_r$之最大值。

依244章。${}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\dfrac{n-r+1}{r}$。

由此關係式$n-r+1\gtreqless r$。從而${}_nC_r\gtreqless{}_nC_{r-1}$。

但從$n-r+1\gtreqless r$。則$n+1\gtreqless 2r$。 卽 $\dfrac{1}{2}(n+1)\gtreqless r$。

故 $r\lesseqgtr\dfrac{1}{2}(n+1)$。從而${}_nC_r\gtreqless{}_nC_{r-1}$。

故r若小於$\dfrac{1}{2}(n+1)$。則由n物取r個之組合。必增加。

故n爲偶數。則${}_nC_r$以$r=\dfrac{1}{2}n$時爲最大。

又n爲奇數。則${}_nC_r$以$r=\dfrac{1}{2}(n+1)$。或$r=\dfrac{1}{2}(n+1)-1=\dfrac{1}{2}(n-1)$爲最大。

例如$n=10$。則$r=5$時${}_nC_r$之值爲最大。又$n=11$。則$r=5$或$=6$時${}_nC_r$之值爲最大。

247. 定理 證${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$。

於$n+1$物。每次取r個之組合數。內以其含特別之一物者。與不含特別之一物者。分爲二羣。而含特別一物之組數。必爲n物每次取$r-1$個之組數。卽${}_nC_{r-1}$。又不含特別一物之組數。必爲n物每次取r個之組數。卽${}_nC_r$。

$$\therefore\quad {}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r。$$

〔別證〕 由244章。

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r+{}_nC_{r-1}&=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}+\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r+1}=\frac{\lfloor n\,(n-r+1+r)}{\lfloor r\,\lfloor n-r+1}\\
&=\frac{\lfloor n+1}{\lfloor r\,\lfloor n+1-r}={}_{n+1}C_r。
\end{aligned}
$$

〔例〕 證${}_{n+1}P_r={}_nP_r+r\,{}_nP_{r-1}$。

於 $n+1$ 物。每次取 r 個之排列數內。其不含特別一字者爲 ${}_nP_r$。而含有特別一字者爲 ${}_nP_{r-1}$。然此一字。在各列 r 個字之首尾或中間。卽有 r 種。故總計含有此特別字者。爲 $r{}_nP_{r-1}$。

$$\therefore \qquad {}_{n+1}P_r = {}_nP_r + r{}_nP_{r-1}。$$

248. 定理 x, y 爲兩正整數。若 $x+y=m$。則

$$ {}_mC_n = {}_xC_n + {}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1 + {}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2 + \cdots\cdots\cdots + {}_xC_1\cdot{}_yC_{n-1} + {}_yC_n。$$

設 m 文字爲 $a, b, c \ldots\ldots\ldots p, q \ldots\ldots\ldots$ 分之爲 x 及 y 二羣。

若從 x 羣內全取 n 個爲 ${}_xC_n$。又從 x 羣內取 $n-1$ 個爲 ${}_xC_{n-1}$。而各附以從 y 羣取 1 之 ${}_yC_1$。則得 ${}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1$。又從 x 羣內取 $n-2$ 個。而各附以從 y 羣取 2 之 ${}_yC_2$。則得 ${}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2$ 逐次如此。至末得從 y 羣取 n。卽 ${}_yC_n$。

依此所得之全數與從 $x+y$（卽 m）。取 n 個之 ${}_mC_n$ 相等。已極明瞭。

由是 ${}_{x+y}C_n = {}_xC_n + {}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1 + {}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2 + \cdots\cdots\cdots + {}_yC_n$。

x 或 y 恆大於 n。若 $r>n$。則 ${}_nC_r=0$。

249. Vandermond 氏之定理 x, y, n 爲正整數。若 $x+y$ 大於 n。由 **244** 章 ${}_nC_r = \dfrac{n_r}{\lfloor r}$。則前章之定理。爲

$$\frac{(x+y)_n}{\lfloor n} = \frac{x_n}{\lfloor n} + \frac{x_{n-1}}{\lfloor n-1}\frac{y_1}{\lfloor 1} + \frac{x_{n-2}}{\lfloor n-2}\frac{y_2}{\lfloor 2} + \cdots\cdots + \frac{x_{n-r}}{\lfloor n-r}\frac{y_r}{\lfloor r} + \cdots\cdots + \frac{y_n}{\lfloor n}。$$

以 $\lfloor n$ 乘之。則

$$(x+y)_n = x_n + \frac{n}{\lfloor 1}x_{n-1}y_1 + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x_{n-2}y_2 + \cdots + \frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}x_{n-r}y_r + \cdots + y_n。$$

上之方程式爲 x 及 y 逐乘數之次式。而 y 若爲大於 n 之特別正整數。則對於 x 之任意正整數。皆能合理。而此 x 之值。恆多於 x 種。由是依 **91** 章之定理。x 卽非正整數。而爲任意之值。亦能合理。由同法。x 之值若大於 n。則 y 之多於 n 種值。其能合理亦同。是謂 Vandermond 氏之定理。卽

n 爲任意之正整數。則 x 及 y 無論爲如何之值。恆得下之相等式。

$$(x+y)_n=x_n+\frac{n}{1}x_{n-1}y_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x_{n-2}y_2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}x_{n-r}y_r+\cdots\cdots+y_n。$$

〔例〕 設 $n=3$。則 $(x+y)_3=x_3+3x_2y_1+3x_1y_2+y_3$。

即 $(x+y)(x+y-1)(x+y-2)$

$$=x(x-1)(x-2)+3x(x-1)y+3xy(y-1)+y(y-1)(y-2)。$$

等 次 積

250. 等次積 由 n 字內。每次取 r 個之積。若可複用同字。則其相異之積之數爲 ${}_nH_r$。

例如於 a, b, c 三字。每次取二個。則其所成積爲 $a^2, b^2, c^2, ab, ac, bc$。即 ${}_3H_2=6$。

此中之 ab, ac, bc 爲前所示之組合數。

而等次積。則又計其餘之 aa 即 a^2, bb 即 b^2, cc 即 c^2。

問題 求 ${}_nH_r$。

由 n 字每次取 r 個之積中。其一切文字之數。爲 ${}_nH_r\times r$。而此中特別一字(例如 a)之數。則爲 ${}_nH_r\times r\div n$。

又此含 a 之各積。以 a 除之。即除去一 a。其所得之商。爲 $r-1$ 次。即由 n 字取 $r-1$ 之數之積。爲 ${}_nH_{r-1}$。此中含 a 字之數。爲 ${}_nH_{r-1}\times(r-1)\div n$。而以 a 除得之數。即除去 a 之共數爲 ${}_nH_{r-1}$。

$$\therefore\qquad \frac{r}{n}{}_nH_r=\frac{r-1}{n}\times{}_nH_{r-1}+{}_nH_{r-1}。$$

即 $${}_nH_r=\frac{n+r-1}{r}\times{}_nH_{r-1}。$$

設 r 爲 $r-1$。則 $${}_nH_{r-1}=\frac{n+r-2}{r-1}\times{}_nH_{r-2}。$$

設 r 爲 $r-2$。則 $${}_nH_{r-2}=\frac{n+r-3}{r-2}\times{}_nH_{r-3}。$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

逐次得 $${}_nH_2=\frac{n+1}{2}\times{}_nH_1。$$

$${}_nH_1=n。$$

兩邊連乘而去其公因子。則得

$${}_nH_r=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots\ldots(n+r-1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots r}={}_{n+r-1}C_r$$ (又見293章)。

例　題

1. 求 a, b, c, d 用同字每次取三個之組合數。　答 20。

〔解〕 ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$。

2. 有 a 字 6, b 字 6, c 字 6, d 字 6。求其每次取六字之組合數。

答 84。

〔解〕 ${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6\quad {}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}=84$。

3. 求證 ${}_nH_r={}_{n-1}H_r+{}_nH_{r-1}$。

又 ${}_nH_r={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-2}H_{r-1}+\ldots\ldots\ldots+{}_1H_{r-1}$。

〔證〕 由247章。${}_{n+r-2}C_r+{}_{n+r-2}C_{r-1}={}_{n+r-1}C_r$。

即 ${}_{n-1}H_r+{}_nH_{r-1}={}_nH_r$。

又 ${}_nH_r={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_r={}_nH_{r-1}+({}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-2}H_r)$

$={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-1}+({}_{n-2}H_{r-1}+{}_{n-3}H_r)$

$={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-2}H_{r-1}+\ldots\ldots\ldots$。

4. 求證 ${}_nH_r={}_{n-1}H_r+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-2}+\ldots\ldots\ldots+{}_{n-1}H_1+1$。

〔證〕 由前例。${}_nH_r={}_{n-1}H_r+{}_nH_{r-1}={}_{n-1}H_r+({}_{n-1}H_{r-1}+{}_nH_{r-2})$

$={}_{n-1}H_r+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-2}+{}_nH_{r-3}$。以下同法。

至最後得 ${}_nH_1={}_{n-1}H_1+{}_nH_0={}_{n-1}H_1+1$。由是合於題意。

251. 雜例 排列及組合法之例。詳於次編二項式之定理。(見292章)。

〔第一例〕 相異之 mn 物分給 n 人。每人得 m 個。其法有幾種。

答 $\underline{|mn}/(\underline{|m})^n$。

從 mn 物內。取 m 個給第一人。其法為 ${}_{mn}C_m$。而從此各餘數 $mn-m$ 內。取 m 個給第二人。其法為 ${}_{mn-m}C_m$。而其數變為 ${}_{mn}C_m\times{}_{mn-m}C_m$。又從此各餘數 $mn-2m$ 內。取 m 個給第三人。為 ${}_{mn-2m}C_m$。以下準此求之。故所求變化之數。為

$${}_{mn}C_m \times {}_{mn-m}C_m \times {}_{mn-2m}C_m \times \cdots\cdots \times {}_{2m}C_m \times {}_{m}C_m$$

$$=\frac{\underline{|mn}}{\underline{|m}\,\underline{|mn-m}} \times \frac{\underline{|mn-m}}{\underline{|m}\,\underline{|mn-2m}} \times \frac{\underline{|mn-2m}}{\underline{|m}\,\underline{|mn-3m}} \times \cdots\cdots \times \frac{\underline{|2m}}{\underline{|m}\,\underline{|m}} \times \frac{\underline{|m}}{\underline{|m}} = \frac{\underline{|mn}}{(\underline{|m})^n}。$$

〔第二例〕 求證下式。

$$1-{}_nC_1\cdot{}_nH_1+{}_nC_2\cdot{}_nH_2-{}_nC_3\cdot{}_nH_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n\,{}_nH_n=0。$$

因 $${}_nC_r\cdot{}_nH_r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\times\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{\underline{|r}}$$

$$=\frac{n^2(n^2-1^2)\cdots\cdots\{n^2-(r-1)^2\}}{1^2\cdot2^2\cdots\cdots r^2}。$$

由此恆同式以 $r=1, 2, 3\cdots\cdots n$ 遞次代入之得。

$$1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2\cdot2^2}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^n\frac{n^2(n^2-1^2)\cdots\cdots\{n^2-(n-1)^2\}}{1^2\cdot2^2\cdots\cdots n^2}=0。$$

故最初二項之和 $=-\dfrac{n^2-1^2}{1^2}$。

最初三項之和 $=+\dfrac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2\cdot2^2}$。

最初四項之和 $=-\dfrac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}$。

…………………………………

由是左邊一切項之和 $=(-1)^n\dfrac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\cdots(n^2-n^2)}{1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdots\cdots n^2}$。

〔第三例〕 一平面上有 n 直線各不平行。又三線不會於一點。則此 n 直線必分割平面爲 $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ 部分。

〔證〕 n 直線所分平面之部分其數爲 $F(n)$。則 $n-1$ 直線所分平面之部分。其數爲 $F(n-1)$。

〔$F(n)$ 謂之 n 之函數〕。

因各直線既不平行。則任一線必各與他直線相交。故 $n-1$ 直線。必截第 n 直線之部分爲 n。而此各分之兩邊。皆在分割平面內。故 n 直線所截平面之部分。較 $n-1$ 直線截得之部分多 n。

$$\therefore\qquad F(n)=F(n-1)+n。$$

設 n 爲 $n-1$。則 $F(n-1)=F(n-2)+n-1$。

設 n 爲 $n-2$。則 $F(n-2)=F(n-3)+n-2$。

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

逐次得 $F(2)=F(1)+2$。

$F(1)=\quad 1+1$。

加之。則 $F(n)=1+(1+2+\cdots\cdots+n)=1+\frac{1}{2}n(n+1)$。

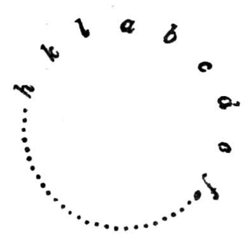
例如六直線爲 $F(6)=1+\frac{1}{2}6(6+1)=22$。卽分平面爲二十二部分。

〔第四例〕 有依一定次序連續之物。於此 n 物中。每次取三個。其中每二物。在前之次序不相隣接者。則其組合之數。爲

$$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)。$$

又此 n 物。若依次連續如環狀(卽最初一物與最後一物連續)。則其方法變化之數爲 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$。

〔證〕 先證其第二問。設 n 物爲 $a, b, c, d, e, f, \cdots\cdots h, k, l$ 依次連續。成環狀如圖。



n 物每次取三個。其內二物在環形上不相連續。則先取 a 與間一個字之 c, ac 之次可附之字有 $n-5$。(卽除連續於 a 之 b, l 與連續於 c 之 d。及 a, c 本字外。所餘之字爲 $n-5$)。又取 a 與間一個字之 k, ak 之次。可附之字。亦有 $n-5$。故其方法爲 $2(n-5)$。

次取 a 與任意之字 e。則 a, e 之次。可附之字數爲 $n-6$。(卽除連續於 a 之 b, l 與連續於 e 之 d, f。及 a, e 本字外。所餘之字爲 $n-6$)。而附於 ah, af 等字之次亦然。但除與 a 間一個字之 c, k 外。計有 $n-5$ 字。故其方法之數爲 $n-6$ 之 $n-5$ 倍。

由是以 a 爲第一字。每次取三字之全方法。爲

$$2(n-5)+(n-6)(n-5)。卽\ (n-4)(n-5)。$$

此外各字之爲第一字者亦然。故共有 n 倍之方法。

卽 $n(n-4)(n-5)$。

然在此各方法內所取之字。有重複者。如 $ace, aec, cae, cea, eac, eca$ 等之排列。當以 $\lfloor 3$ 除之。故所求之數爲 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$。

於第一問。則 a, l 不相連續。故 al 之次。所附之字有 $n-4$ 個。(卽除與 a 連續之 b。與 l 連續之 k。及 a, l 本字外。所餘之字爲 $n-4$)。卽較第二問。增 $n-4$。

由是所求之數爲 $\frac{1}{6}(n-4)(n-5)+(n-4)$。卽 $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$。

〔第五例〕 有記名之信筒 n 個。以書信 n 通投入之。求其全行誤錯之度數。

答 $\lfloor n\left\{\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{\lfloor n}\right\}$。

〔解〕 n 通之書信爲 $a, b, c, \ldots\ldots\ldots$。而與之相當之信筒爲 $a', b', c', \ldots\ldots\ldots$ $F(n)$ 爲所求全行錯誤之度數。

設誤在 a。則 a 必入於 $b', c', \ldots\ldots$ 等 $n-1$ 信筒內。先設 a 誤入於 k' 內。若 k 亦誤入於 a'。則此時他信悉行錯誤之數爲 $F(n-2)$。又 a 誤入於 k'。而 k' 不誤入於 a'。其餘 b 亦不入於 b'。c 亦不入於 c'。如此一切之錯誤爲 $F(n-1)$。故 a 入於 k' 共有之誤法爲 $F(n-1)+F(n-2)$。惟 a 可任意誤入 $b'c'\ldots\ldots\ldots$ 等 $n-1$ 信筒。其誤數亦相同。

由是 $$F(n)=(n-1)\{F(n-1)+F(n-2)\}。$$

$$\therefore\quad F(n)-nF(n-1)=-\{F(n-1)-(n-1)F(n-2)\}。$$

依同理 $$F(n-1)-(n-1)F(n-2)=-\{F(n-2)-(n-2)F(n-3)\}。$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(3)-3F(2)=-\{F(2)-2F(1)\}。$$

但一書信一信筒。則無錯誤。故 $F(1)=0$。又二書信二信筒。則誤一次。故 $F(2)=1$。

由是 $$F(3)-3F(2)=-\{1-2\times 0\}=-1=(-1)^3。$$

$$\therefore\quad F(4)-4F(3)=-\{F(3)-3F(2)\}=-\{(-1)^3\}=(-1)^4。$$

依同理推之 $$F(n)-nF(n-1)=(-1)^n。$$

由是 $$\frac{F(n)}{\lfloor n}-\frac{F(n-1)}{\lfloor n-1}=\frac{(-1)^n}{\lfloor n}。$$

同法 $$\frac{F(n-1)}{\lfloor n-1} - \frac{F(n-2)}{\lfloor n-2} = \frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n-1}。$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F(3)}{\lfloor 3} - \frac{F(2)}{\lfloor 2} = \frac{(-1)^3}{\lfloor 3}。$$

$$\frac{F(2)}{\lfloor 2} - \frac{F(1)}{\lfloor 1} = \frac{(-1)^2}{\lfloor 2}。$$

上式之各兩邊相加。則得 $\frac{F(n)}{\lfloor n} = \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{\lfloor n}$。

例題二十三

1. 有相異之物20個。分給5人。各得4個。求其分法有幾種。

〔解〕 由251章第一例。得 $\frac{\lfloor 20}{(\lfloor 4)^5}$。即答

2. 11人共乘一艇。用棹8枝。其內5人撐左舷。4人撐右舷。其餘2人。可左右移動。則其撐法之變化如何。 答 185。

〔解〕 餘2人爲 a, b。a, b 不加於左邊。則左邊之撐法爲 ${}_5C_4$。而加於右邊。則爲 ${}_6C_4$。

$\therefore\ {}_5C_4 \times {}_6C_4 = 5 \times 15 = 75$。若 a 在左邊用去一棹。則左邊之撐法爲 ${}_5C_3$。而 b 加入於右邊。右邊之撐法爲 ${}_5C_4$。即 ${}_5C_3 \times {}_5C_4 = 10 \times 5 = 50$。又 b 在左邊用去一棹。亦得50。若 a, b 同在左邊各撐一棹。則得 ${}_5C_2 \times {}_4C_4 = 10 \times 1 = 10$。 $\therefore$ 答 $= 75 + 50 + 50 + 10$。

3. 12人爲選舉者。今於候補者3人之內選舉1名。其法有幾種。又候補者得等數投票之方法若何。 答 3^{12}, $\lfloor 12/(\lfloor 4)^3$。

〔解〕 各選舉人於3人之內選舉一名之方法有3。故第一第二選舉人之方法爲 3^2。此各合於第三選舉人之3方法。其變化爲 3^3。以下準此。故12人選舉之方法爲 3^{12}。又候補者3人等分12枚之投票。即1名得 $12 \div 3 = 4$。故與1題同法。得 $\lfloor 12/(\lfloor 4)^3$。

4. ${}_{4n}C_{2n} : {}_{2n}C_n = 1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(4n-1) : \{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(2n-1)\}^2$。

〔證〕 ${}_{4n}C_{2n} = \frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n \lfloor 2n}$ 及 ${}_{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$。

但 $\underline{|4n}=1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots\ldots(4n-2)(4n-1)4n$。

$=\{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(4n-1)\}2^{2n}\{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots(2n-1)2n\}$

$=\{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(4n-1)\}2^{2n}\underline{|2n}$。

同法 $\underline{|2n}=\{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(2n-1)\}2^{n}\underline{|n}$。

$$\therefore\quad \frac{{}_{4n}C_{2n}}{{}_{2n}C_{n}}=\frac{\underline{|4n}(\underline{|n})^2}{(\underline{|2n})^2\,\underline{|2n}}=\frac{\{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(4n-1)\}2^{2n}\underline{|2n}(\underline{|n})^2}{\{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(2n-1)\}^2 2^{2n}(\underline{|n})^2\,\underline{|2n}}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(4n-1)}{\{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(2n-1)\}^2}。$$

5. 用 0, 1, 2, 3, 4 之五數字作任意之數。而不合同數字可得若干種。 答 260。

〔解〕 一位數 $=5-1=4$, 二位數 $={}_5P_2-4=16$,

三位數 $={}_5P_3-{}_4P_2=48$, 四位數 $={}_5P_4-{}_4P_3=96$,

五位數 $={}_5P_5-{}_4P_4=96$。 $\therefore\ 4+16+48+96+96=260$。

但於三位數之 ${}_5P_3$ 內如 012, 013 等首位爲 0。即爲二位數。故此等之數 ${}_4P_2$ 當去之。以下同。

6. n 物內取 r 個之排列。中含特別之 p 字之數。恆爲 ${}_{n-p}P_{r-p}\times{}_rP_p$。試證之。

〔證〕 $p<r$ 於 n 物中取含特別之 p 物之組合。則爲 ${}_{n-p}C_{r-p}$。此各列取 r 物之排列 $\underline{|r}$。即得

所求之排列。即 ${}_{n-p}C_{r-p}\times\underline{|r}=\dfrac{\underline{|n-p}}{\underline{|r-p}\,\underline{|n-r}}\times\underline{|r}=\dfrac{\underline{|r}}{\underline{|r-p}}\times\dfrac{\underline{|n-p}}{\underline{|n-r}}$

$=r(r-1)\ldots\ldots(r-p+1)\times(n-p)(n-p-1)\ldots\ldots(n-r+1)={}_rP_p\times{}_{n-p}P_{r-p}$。

7. 平面上有 n 點。其內無三點同在一直線者。若取此二點。聯爲一直線。則直線之數若干。 答 $\frac{1}{2}n(n-1)$。

〔解〕 $A, B, C,\ldots\ldots$ 爲 n 點。則直綫 $AB, AC,\ldots\ldots$ 之數爲 ${}_nC_2$。

8. 平面上有 n 點。除其內 m 點同在一直線之外。更無三點同在一直線上者。求此各點聯爲直線之數。 答 $\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}m(m-1)+1$。

〔解〕 先求 ${}_nC_2-{}_mC_2$ 再加 1 即 m 點連結之一直綫卽得。

9. 平面上有 n 點。除其內 m 點同在一直線上之外。亦無三點同在一直線上者。求此各三點連結成三角形之數。

〔解〕 ${}_nC_3-{}_mC_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$。

10. 平面上有n直線其內無三線會於一點者。此n直線所成多角形之數為$\frac{1}{2}\lfloor n-1$。試證之。

〔證〕 $a, b, c, \ldots\ldots$ 之n直線如$abc\ldots\ldots acb\ldots\ldots$等所成之$n$多角形與242章例題7輪置8球同法故為$\frac{1}{2}\lfloor n-1$。

11. 平面上有n點。其內各二點連結之直線。皆非平行者。且無三線同會於一點。若將此等直線引長之。其相交之點在原n點之外有幾何。　　答 $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$。

〔解〕 各二點連結之直線。其數為$\frac{1}{2}n(n-1)$。見(例題7)諸點之內。通過任意之二點相成之直線。為連結其餘$n-2$點直線所可分截。而連結$n-2$點之直線之數。由例題7得$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$。故此即為其分截點之數。而他之各直線。亦有此分截點。故總分截點為$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)\frac{1}{2}n(n-1)$。即$\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$。但二直線會於一點。故上之得數當二分之。即所求之數為$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$。

12. 通過三角形之各角點。$3m$直線。其$3m$直線無一平行者。求此直線之交點。　　答 $3m^2$。

〔解〕 各m線之一線與他之兩角點之$2m$線交於$2m$點。故總交點為$2m, 3m=6m^2$。然a與b交於1點。則a, b兩交點為1點。而2倍之也。故$6m^2$當以2除之。即$6m^2\div 2=3m^2$。

13. 有一市街如碁盤形。以m條之線分割南北。以n條之線分割東西。其間皆通道路。某人自北西隅行至南東隅。欲取最近距離。則其行路之方法有幾種。　　答 $\lfloor m+n-2/\lfloor m-1\lfloor n-1$。

〔解〕 從北西隅行至南東隅。無論取如何之道路。其南北及東西之道路。皆須經過南北道路。如$m-1$。東西道路為$n-1$。故其行法之種數為於$m+n-2$內。每次取$m-1$或$n-1$之組合數。

$$\therefore \quad \frac{\lfloor m+n-2}{\lfloor m-1\lfloor n-1}。$$

14. 以n多角形之各角點爲角點。作三角形。惟無一邊合於此多角形之邊者。試求三角形之數。(本題與**251**章第四例全同)。

答 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-6)$。

15. 有$2n$人。其每n人圍坐二個圓桌之方法爲$\underline{|2n}/n^2$。試證之。

〔證〕 n人從$2n$人內選出之方法爲${}_{2n}C_n=\frac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}$。

又由**242**章例題7。知n人換座之方法爲$\underline{|n-1}$。而在第二圓桌。其餘之n人換座之方法亦$\underline{|n-1}$。

$\therefore$ 所求之數$=\frac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}(\underline{|n-1})^2=\frac{\underline{|2n}}{n^2}$。

16. 與平行四邊形之各邊平行。引m直線。由是所成之平行四邊形之數。爲$\frac{1}{4}(m+2)^2(m+1)^2$。

〔證〕 $ABCD$爲平行四邊形。AB, CD兩線與其平行線m。每次取2之組合。卽此等之$m+2$線爲對邊之平行四邊形。其數${}_{m+2}C_2$而他之二對邊BC, AD及其平行線m。每次取2所成之平行四邊形。亦得${}_{m+2}C_2$。

由是所求之數爲${}_{m+2}C_2\times{}_{m+2}C_2=\frac{(m+2)(m+1)}{\underline{|2}}\times\frac{(m+2)(m+1)}{\underline{|2}}$。

17. p個正符號。與n個負符號。置於一列。惟兩個負符號。不得連接。其列法如何。

答 $\underline{|p+1}/\underline{|n}\,\underline{|p+1-n}$。

〔解〕 $p>n$。置p個正符號於一列。則其中間爲$p-1$。而左右之外側各加1。則爲$p+1$。此$p+1$之處。置n個負符號。則其列法之數爲${}_{p+1}C_n=\frac{\underline{|p+1}}{\underline{|n}\,\underline{|p+1-n}}$。

18. 以m物任意置於$n+1$處。則其方法爲$\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,\underline{|n}}$。試證之。

〔證〕 因m物配置$n+1$處。並無定數。或m物皆置於一處。或某處置若干個。或置一個。或不置。故求$n+1$物取m個之等次積卽得。卽${}_{n+1}H_m=\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m)}{\underline{|m}}\times\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}}=\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,\underline{|n}}$。

19. $2n$物分配n對(2個爲一對)。其方法爲$\underline{|2n}/2^n\underline{|n}$。試證之。

〔證〕 如251章第一例求之。則得

$${}_{2n}C_2\times{}_{2n-2}C_2\times{}_{2n-4}C_2\times\ldots\ldots\times{}_2C_2$$

$$=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|2}\,\underline{|2n-2}}\times\frac{\underline{|2n-2}}{\underline{|2}\,\underline{|2n-2}}\times\ldots\ldots\times\frac{\underline{|2}}{\underline{|2}}=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|2^n}}。$$

然$2n$物爲相異之物。則如上例。而本題爲同物。故當以取n對之排列$\underline{|n}$爲列。故得$\underline{2n}/2^n\div\underline{|n}$。

20. mn物分爲m羣。各羣爲n其方法之數若何。 答 $\dfrac{\underline{|mn}}{\underline{|m}(\underline{|n})^n}$。

〔解〕 依251章得 $\dfrac{\underline{|mn}}{(\underline{|n})^n}$。但此例之$mn$爲同物。故如前例。亦當以$\underline{|m}$除之。

21. 通過球之中心。不同過一直徑之n平面。分球面爲n^2-n+2。試證之。

〔證〕 截球之第n平面。爲他之$n-1$截平面之各圓周。截於2點。故第n平面之圓周。由$n-1$平面分爲$2(n-1)$部分。而第n平面之圓周。於其兩側分界球面。故其$2(n-1)$部分之各弧。於其兩側可分球面爲$2(n-1)$部分。由是若去第n平面。則其餘之$n-1$平面分球之數可減$2(n-1)$。今n平面分球之數爲$F(n)$。則

$$F(n)=F(n-1)+2(n-1)。$$

由同理 $$F(n-1)=F(n-2)+2(n-2)。$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(2)=F(1)+2(1)。\qquad 但\quad F(1)=2。$$

由加法得 $$F(n)=2+2\{1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)\}$$

$$=2+2\times\tfrac{1}{2}(n-1)(n-1+1)。$$

22. 以$m+n$直線分平面之數爲$mn+2m+2n-1$。但此內m直線通過一點。n直線通過他一點而諸直線無一平行者。試證之。

〔證〕 m線通過自己之點。交於他之n線。則截爲$n+2$部分。故如前例 $F(m,n)=F(m-1,n)+n+2$。

由同理 $F(m-1,n)=F(m-2,n)+n+2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$F(2,n)=F(1,n)+n+2,\quad F(1,n)=F(0,n)+n+2-1\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$

但僅有n線。則分平面爲$2n$分。　∴　$F(0, n)=2n$。　又(A)式爲n線截一線。則比$F(0,n)$多$n+1$。卽多$n+2-1$部分。蓋減1者。卽不計自己之點也。　∴　由加法得$F(m, n)=m(n+2)+2n-1$。

23. 有通過球之中心之$m+n$平面。求分截球面之數。但其內m平面通過一直徑。n平面通過他一直徑。　答　$2(mn+m+n-1)$。

〔解〕AA'及BB'爲m及n平面通過之直徑。通過AA'之第m平面之圓周。由通過BB'之n平面而分截$2n$點。故此第m平面加以A, A'二點。共有$2n+2$分點。

此各分點之兩側爲球面之二部分。故若去第m平面。則可去一個$2n+2$部分。卽全部分減少$2n+2$。

由是　$F(m, n)=F(m-1, n)+2n+2$。

依同理　$F(m-1, n)=F(m-2, n)+2n+2$。

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(2, n)=F(1, n)+2n+2,$$

$$F(1, n)=F(0, n)+2n+2-2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

但$F(0, n)=2n$ (A)式。爲通過AA'之一平面爲n平面所截。則祇爲$F(0, n)$增$2n$。故從$2n+2$減2。

由是　$F(m, n)=m(2n+2)+2n-2=2(mn+m+n-1)$。

24. 通過中心之$a+b+c\ldots\ldots$平面分球之部分若何。但a爲第一直徑。b爲第二直徑。c爲第三直徑。以下依次通過第n直徑。

答　$2\sum a+2\sum ab-2(n-1)$。

〔解〕與前例相同$a, b, c\ldots\ldots$通過之直徑爲$AA', BB', CC', \ldots\ldots$通過$AA'$之一平面爲$b+c+\ldots\ldots$所截之點爲$2(b+c+\ldots\ldots)$。

故　$F(a, b, c\ldots\ldots)=F(a-1, b, c\ldots\ldots)+2(b+c+\ldots\ldots)+2,$

依同理　$F(a-1, b, c\ldots\ldots)=F(a-2, b, c\ldots\ldots)+2(b+c+\ldots\ldots)+2,$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(2, b, c\ldots\ldots)=F(1, b, c\ldots\ldots)+2(b+c+\ldots\ldots)+2,$$

$$F(1, b, c\ldots\ldots)=F(0, b, c\ldots\ldots)+2(b+c+\ldots\ldots),$$

∴　$F(a, b, c\ldots\ldots)=F(b, c\ldots\ldots)+2a(b+c+\ldots\ldots)+2a-2,$

同法　$F(b, c\ldots\ldots)=F(c\ldots\ldots)+2b(c+\ldots\ldots)+2b-2,$

逐次如此　∴　$F(a, b, c\ldots\ldots)=2\sum ab+2\sum a-2(n-1)$。

但$n-1$爲AA', BB', CC', ... 之數。

25. n平面分空間爲$\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$部分。但在n面之內。必各四面不通過一點。試證之。

〔證〕 第n平面爲$n-1$直線截於他之平面。由**251**章第三例。$n-1$直線分第n平面爲$\frac{1}{2}n(n-1)+1$部分。故

$$F(n)=F(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+1,$$

同理 $F(n-1)=F(n-2)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1, \ldots\ldots$

$F(2)=F(1)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1, \qquad F(1)=2$。

由是 $F(n)=\frac{1}{2}\{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots\ldots+(n-1)n\}+n+1$。

但 $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots\ldots+(n-1)n=\frac{1}{3}n(n^2-1)$。見此後**318**章。

26. 一直線上之m點。各與他一直線上之n點連結。則此等之連結線交於他點之點爲$\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$。但各連結線不引長。

〔證〕 $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_m$爲一直線上之$m$點。$B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots B_n$爲他一直線之$n$點。$F(n.m)$爲$m$點與$n$點連結線所有交點之全數。$B_1A_r$爲$B_2, B_3\ldots\ldots B_n$之各交於$r-1$點。故其交點共爲$(r-1)(n-1)$。故通過$B_1$之線所有交點之和爲$(n-1)\{1+2+\ldots\ldots+(m-1)\}$。

由是 $F(n, m)-F(n-1, m)=(n-1)\{1+2+\ldots\ldots+(m-1)\}$

$$=\frac{1}{2}(n-1)m(m-1)。$$

同法 $F(n-1, m)-F(n-2, m)=\frac{1}{2}(n-2)m(m-1)\ldots\ldots\ldots\ldots$

$F(2, m)-F(1, m)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot m(m-1), \qquad F(1, m)=0$。

由是 $F(n, m)=\frac{1}{2}m(m-1)\{1+2+\ldots\ldots+(n-1)\}=\frac{1}{2}m(m-1)\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$。

27. 平面有n點。其內無四點同在一圓周者。通過此各三點畫圓。此諸圓中每三個圓。於原點n點之外。別無公用之一點。若與他圓相交於二點。則其諸圓之交點之數。除原n點之外有$\frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(2n-1)$。試證之。

〔證〕 圓之數$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$。於原n點中之三點。無一點公用之一圓。與諸圓成各對之數爲

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\cdot\frac{1}{6}(n-2)(n-4)(n-5)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

故如此諸圓之各對。爲有與n定點區別之二交點。如此交點之全數爲 $\frac{1}{36}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ 即 $(A)\times 2$。

原點n之一個爲公共之圓。其各對之數爲 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\cdot 3\cdot\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$。如此圓之各對與原點$n$相異者。祇有一點。故其交之全數爲

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)。$$

由是所求之數爲 $\frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{2(n-5)+9\}$。